Modelado y Simulación de Sistemas Complejos con Aplicaciones en Economía

Clase 2

Modelos Computacionales

1C 2024-FCEyN, UBA

Contenido de la clase 2

- Modelos Computacionales
- Introducción. Autómatas Celulares. Patrones y Reglas.
- Ejemplos. Segregación de Schelling. Modelo de condensación
- Práctica: Segregación de Schelling, Mercado inmobiliario.
- Extras: Juego de la Vida de Conway, Modelo de tráfico.

Autómata Celulares

Los autómatas celulares (AC) son modelos idealizados de sistemas complejos:

- gran red de componentes simples
- comunicación limitada entre componentes
- sin control centralizado
- dinámicas complejas a partir de reglas sencillas
- capacidad de tratamiento de la información/computación

Para representar computacionalmente un *sistema económico* como un grupo de agentes es conveniente utilizar el paradigma computacional de los autómatas celulares.

Autómata Celulares

Un AC consiste en:

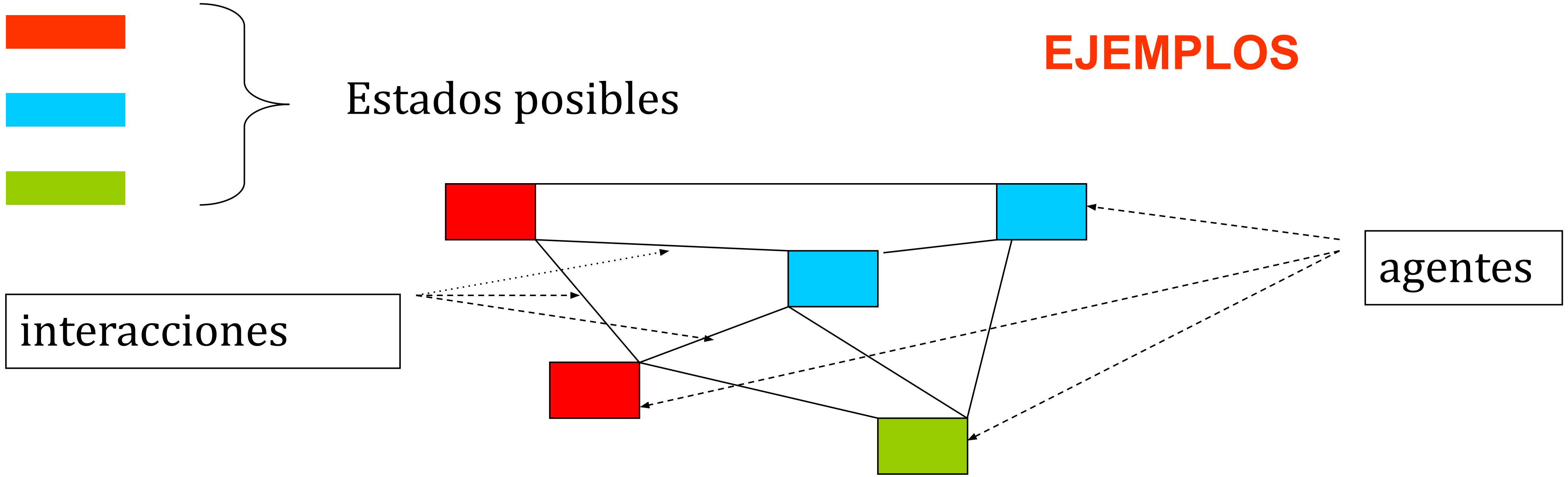
- Un conjunto de unidades procesadoras capaces de intercambiar información
- Cada unidad procesadora puede estar en uno de varios estados posibles
- Las unidades pueden cambiar de estado como consecuencia de las interacciones que mantienen

Las unidades procesadoras representan a los agentes del sistema Económico. El intercambio de información representa las interacciones entre agentes.

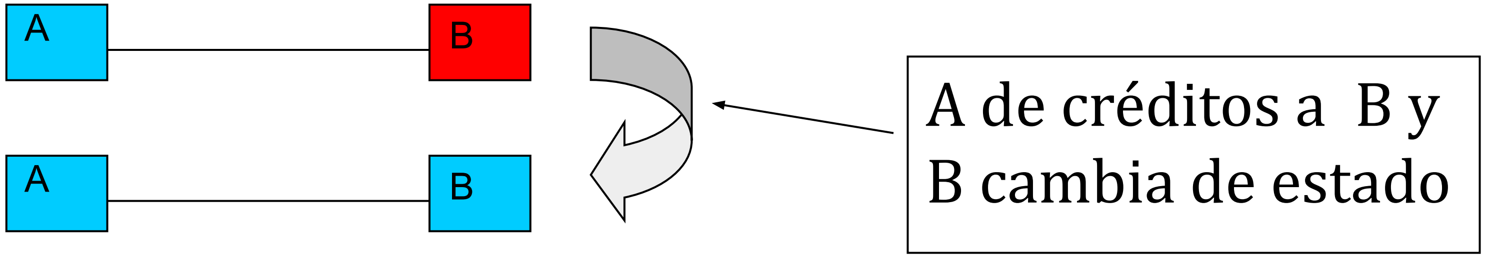
Cada agente cambia de uno a otro de sus estados dependiendo del estado en que se encuentre ella misma y los procesadores con los que interactúa.

AC ofrecen un marco general para describir y analizar la dinámica de sistemas donde las partes actualizan su estado en función de las condiciones de su entorno (interacciones / entorno espacial)

EJEMPLOS



Ejemplos de interacción: A compra / vende a B
A emplea B



Evolución: la evolución de un autómata puede ser **sincrónica o asincrónica**

Autómata Celulares

- Agentes:
  - productores, consumidores, intermediarios, financieros…
  - instituciones, empresas o sectores enteros de la economía…

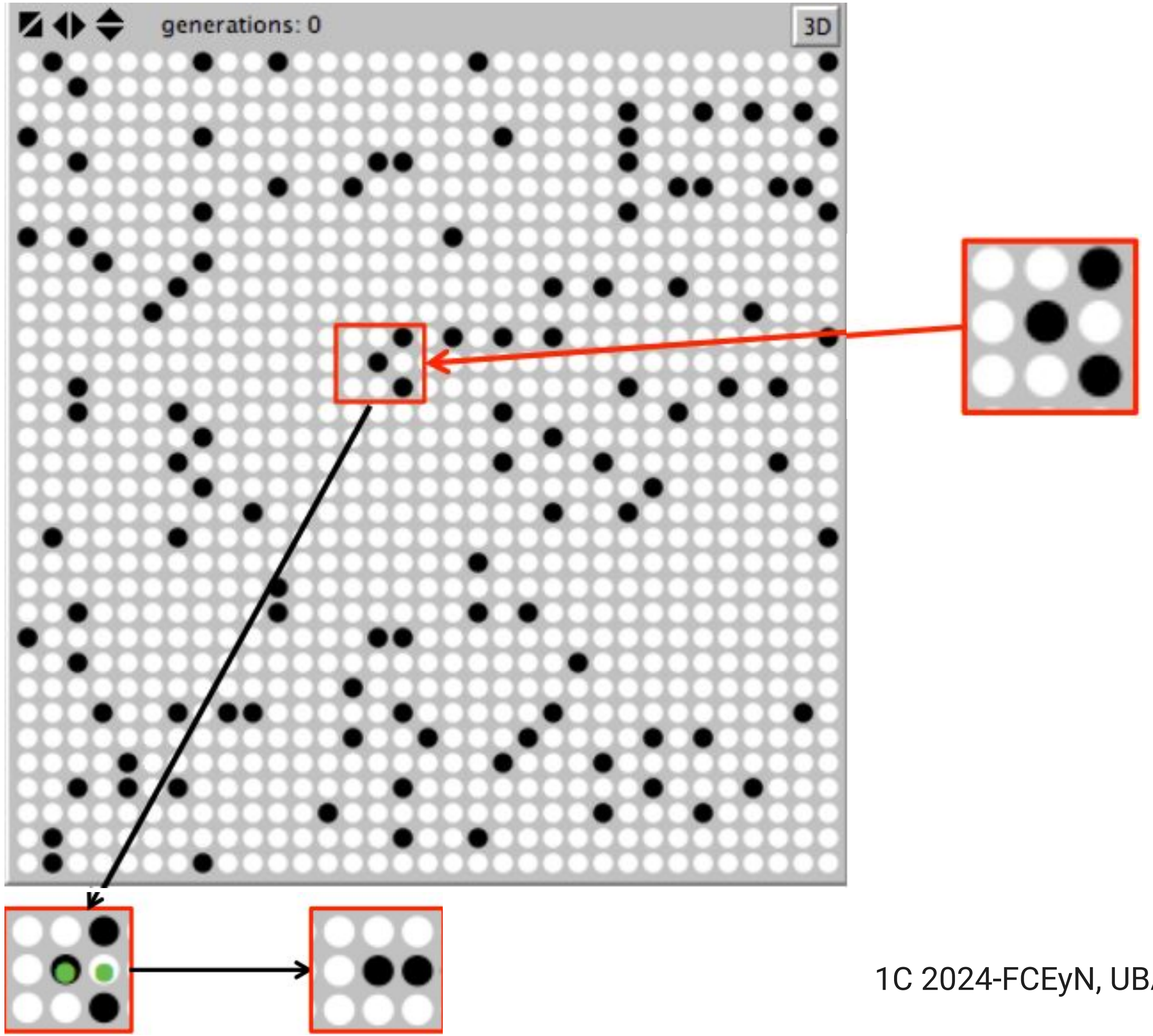
- Un AC procesa información y evoluciona como consecuencia de dicho procesamiento.
- Constituyen un paradigma computacional diferente del usual en el sentido que su capacidad de procesamiento se encuentra “desagregada” o “distribuida” en un gran número de procesadores individuales.
- En los autómatas celulares la interacción entre los agentes determina la capacidad de procesamiento del sistema como un todo

The **Game of “Life”**

- El autómata celular más famoso del mundo
- Publicado en 1970 por el matemático británico *John Conway*, a través de la columna "Math.Games" de Martín Gardner en Scientific American
- Inspirado en los modelos de *John von Neumann* de procesos similares a la vida en autómatas celulares.
- Sistema simple que genera emergencia y

autoorganización

The **Game of “Life”**



negras = “vivas”
blancas = “muertas”

vecindario Moore

Reglas:

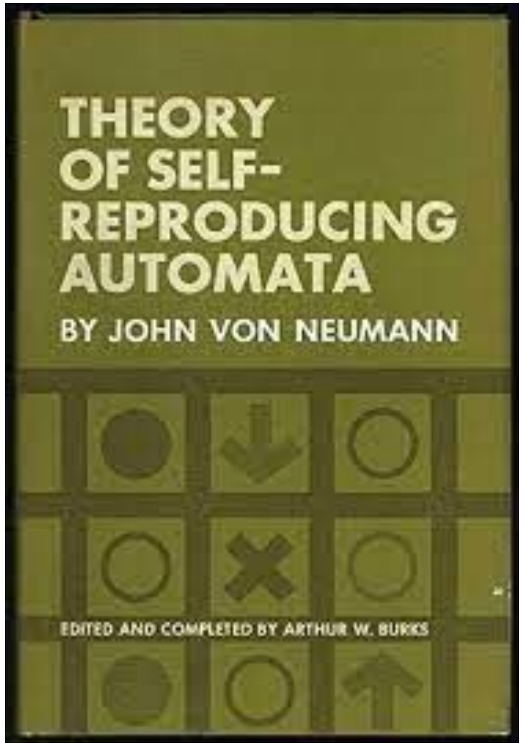
- una célula viva sigue viva en el siguiente paso temporal sólo si dos o tres vecinas están vivas. En caso contrario, muere.
- una célula muerta se convierte en viva en el siguiente paso sólo si exactamente tres vecinos están vivos.

Autómata Celular

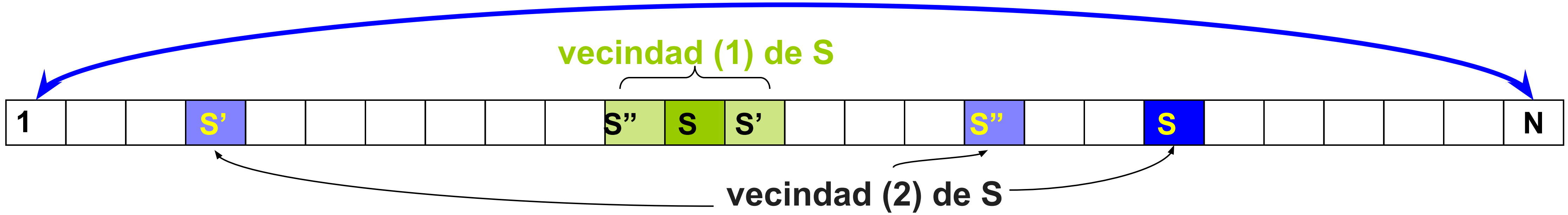
- Los autómatas celulares fueron inventados en 1940 por Stanislaw Ulam y John von Neumann para demostrar que la autorreproducción es posible en las máquinas (y para vincular aún más la biología y la computación)

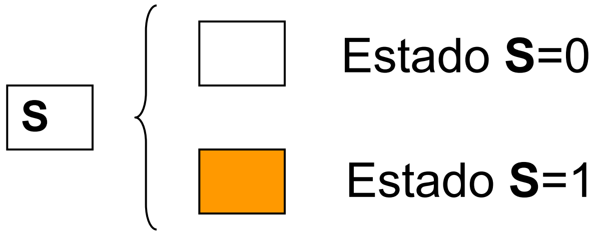
John von Neumann
1903-1957

Stanislaw Ulam
1909-1984



Autómatas unidimensionales y deterministas





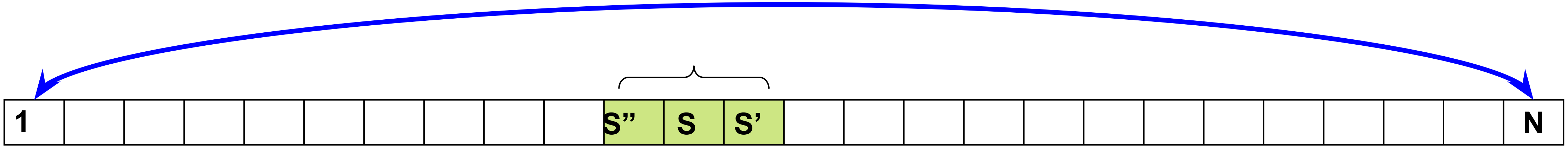
Regla de evolución del autómata:

S(t+1)= ***F*** [**S''**(t) , **S**(t) , **S'**(t)],
o bien **S**(t+1)= ***F***($\mathbf{S}_i$) con $\mathbf{S}_i$ ∈ vecindad

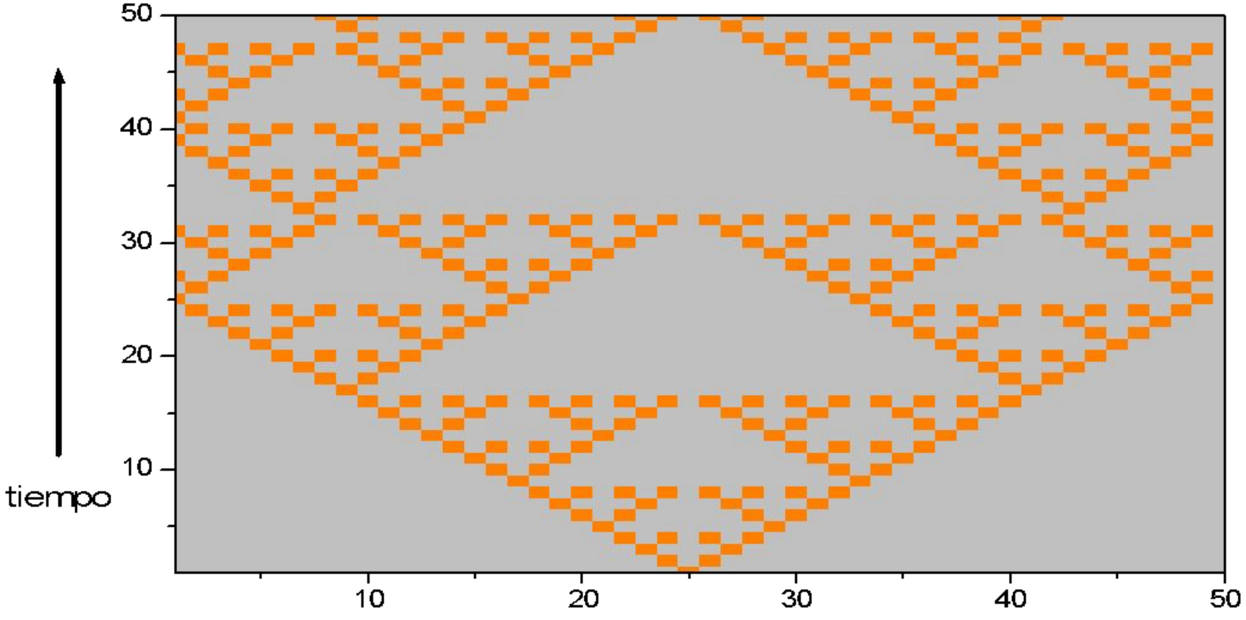
El autómata es *unidimensional* porque las células se disponen según la topología de una recta o una circunferencia. Es *determinista* porque ***F*** no es una función estocástica.

Una vecindad como la (1) corresponde a un autómata *ordenado* y una como la (2) corresponde a un autómata *desordenado.* Un autómata desordenado no puede decirse que sea unidimensional porque no tiene la topología de la recta

En un autómata *probabilístico* ***F*** es la *probabilidad de transición* **S**(t) □ **S**(t+1) condicionada al hecho que las células vecinas, en el tiempo t, están en los estados **S'**(t) y **S''**(t)



Ejemplo en el que **S**(t+1)= ***F*** [**S”**(t) , **S**(t) , **S’**(t)] corresponde a la función Booleana
S(t+1)= XOR(**S”**, **S’**)



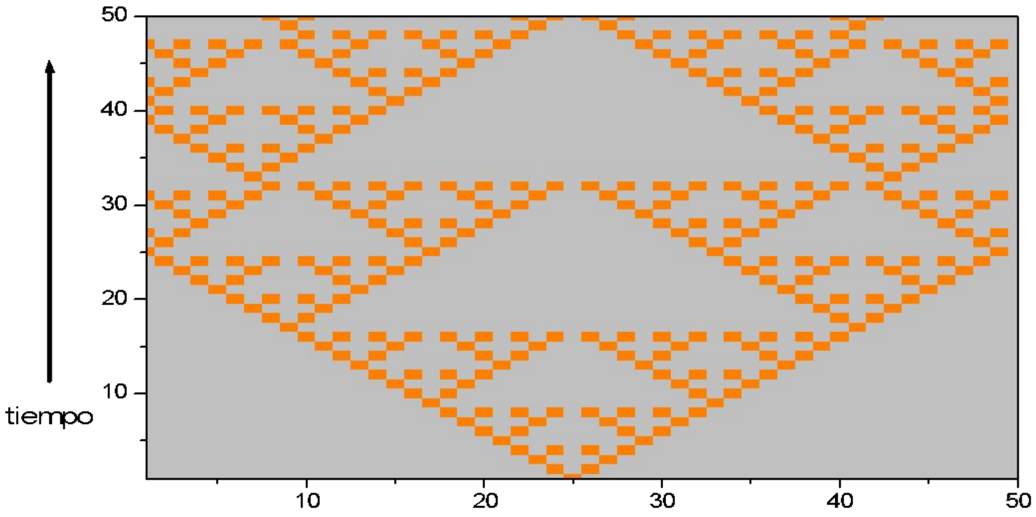
Funcion Booleana

i1	i2	s
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

La compuerta **XOR**

s= $\bar{A}B+A\bar{B}$

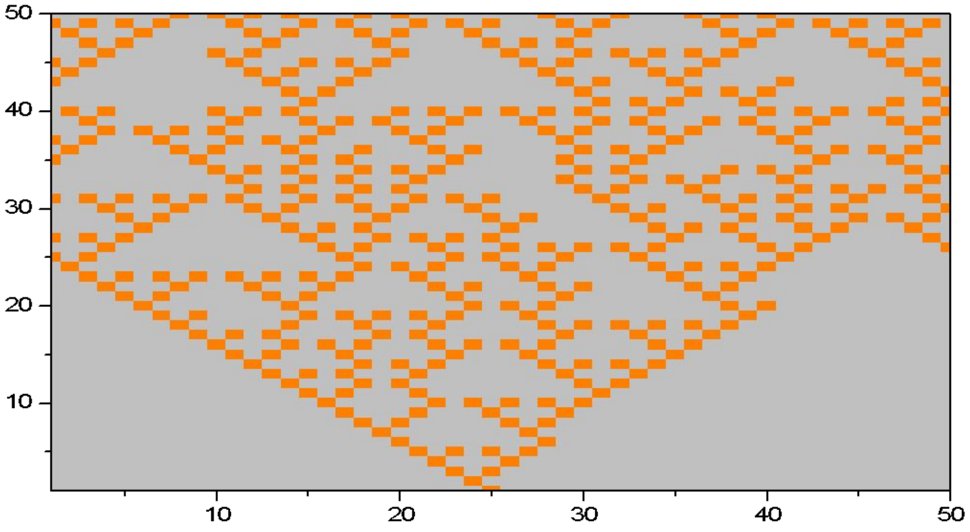
s= $A \oplus B$



Funcion Booleana

i1	i2	s
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Autómata **determinista** con la Función Booleana XOR



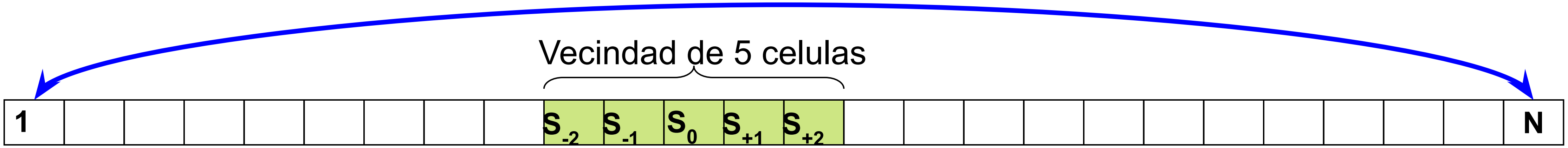
Autómata **probabilístico** con la Función Booleana

S(t+1)= Prob[XOR(**S**”(t),**S**’(t)]

con Prob = 0.95

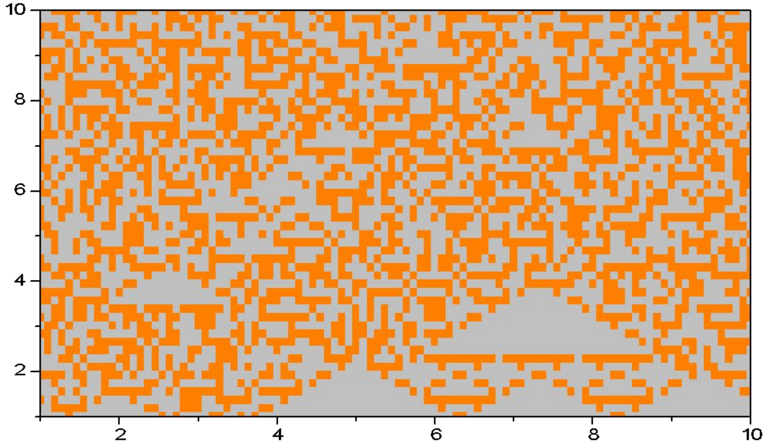
S(t+1)= XOR(**S**”(t),**S**’(t) con p=0.95

S(t+1)= **0** con p=0.05

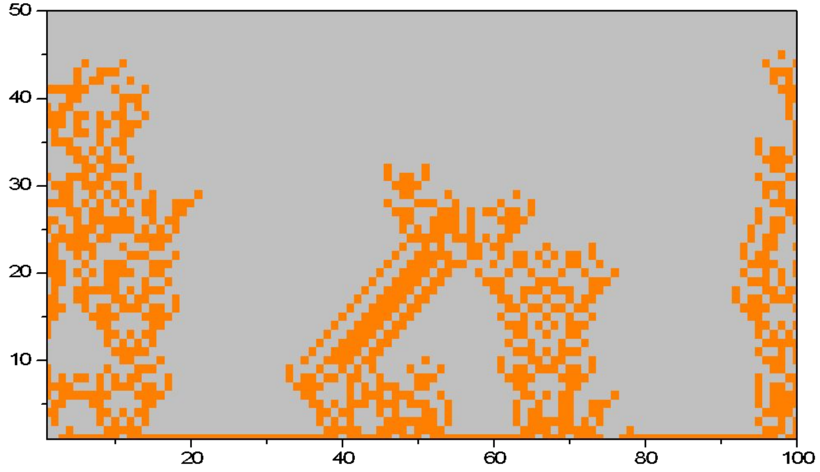


Se dice que una regla “totalística” cuando $S_0(t+1)$ sólo depende de $T = \sum_{-2}^{+2} S_i$

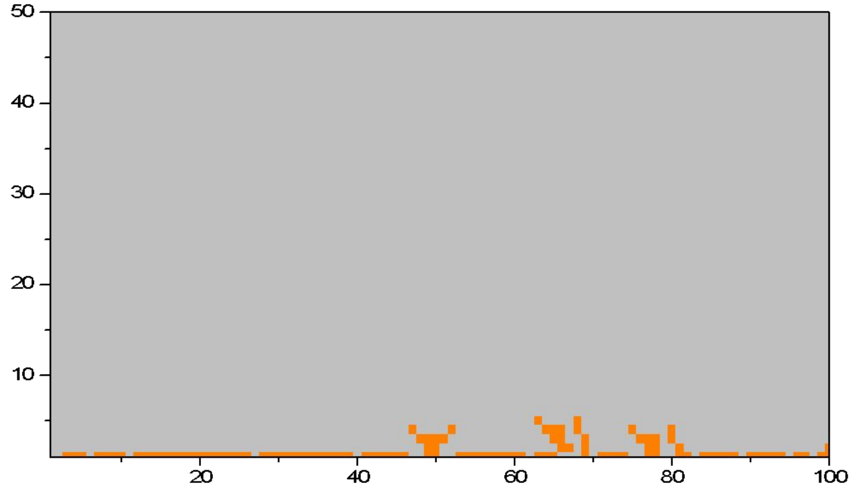
(para una vecindad de 5 celdas)



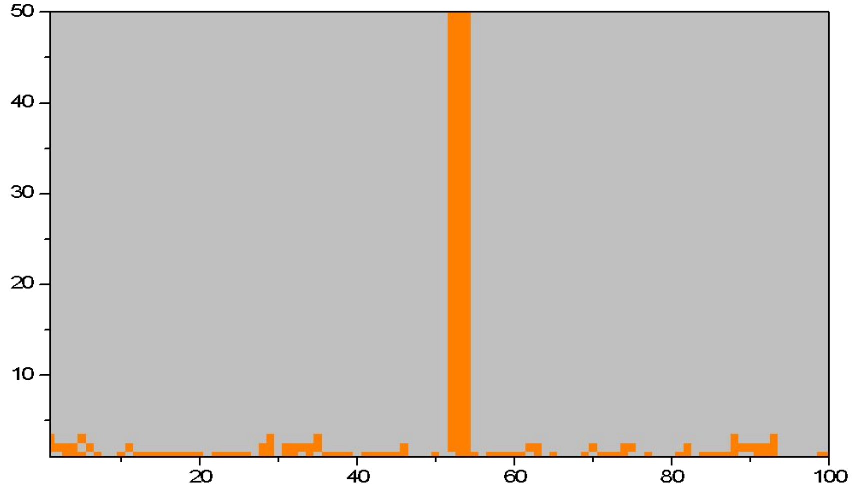
Regla totalística : S_0 =1 solamente si T=1 o 3 evolucionan hacia un estado caótico o aperiódico



Regla totalística : S_0 =1 solamente si T=2 o 4 evolucionan hacia un estado que involucra una estructura compleja y localizada



Regla totalísitica : S_0 =1 solamente si T=2
un estado fijo y homogéneo

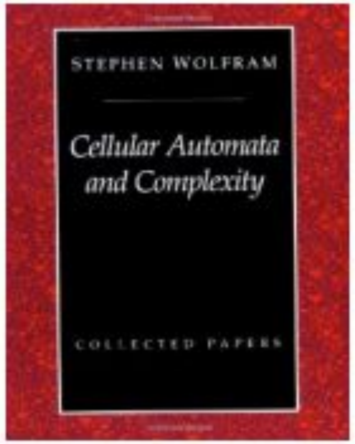


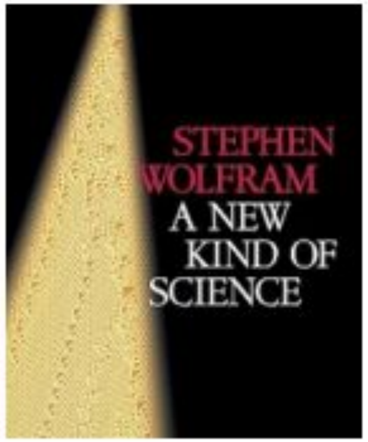
Regla totalísitica : S_0 =1 solamente si T= 3
evolucionan hacia un estado fijo
inhomogeneo o a un ciclo límite

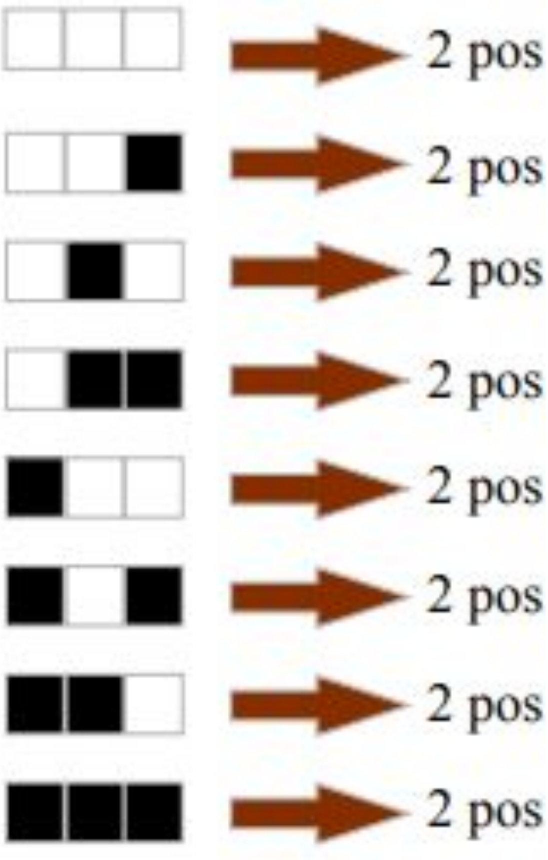
En todos los ejemplos la condición inicial es que las celdas están encendidas con una dada probabilidad

Autómata celular elemental

Stephen Wolfram



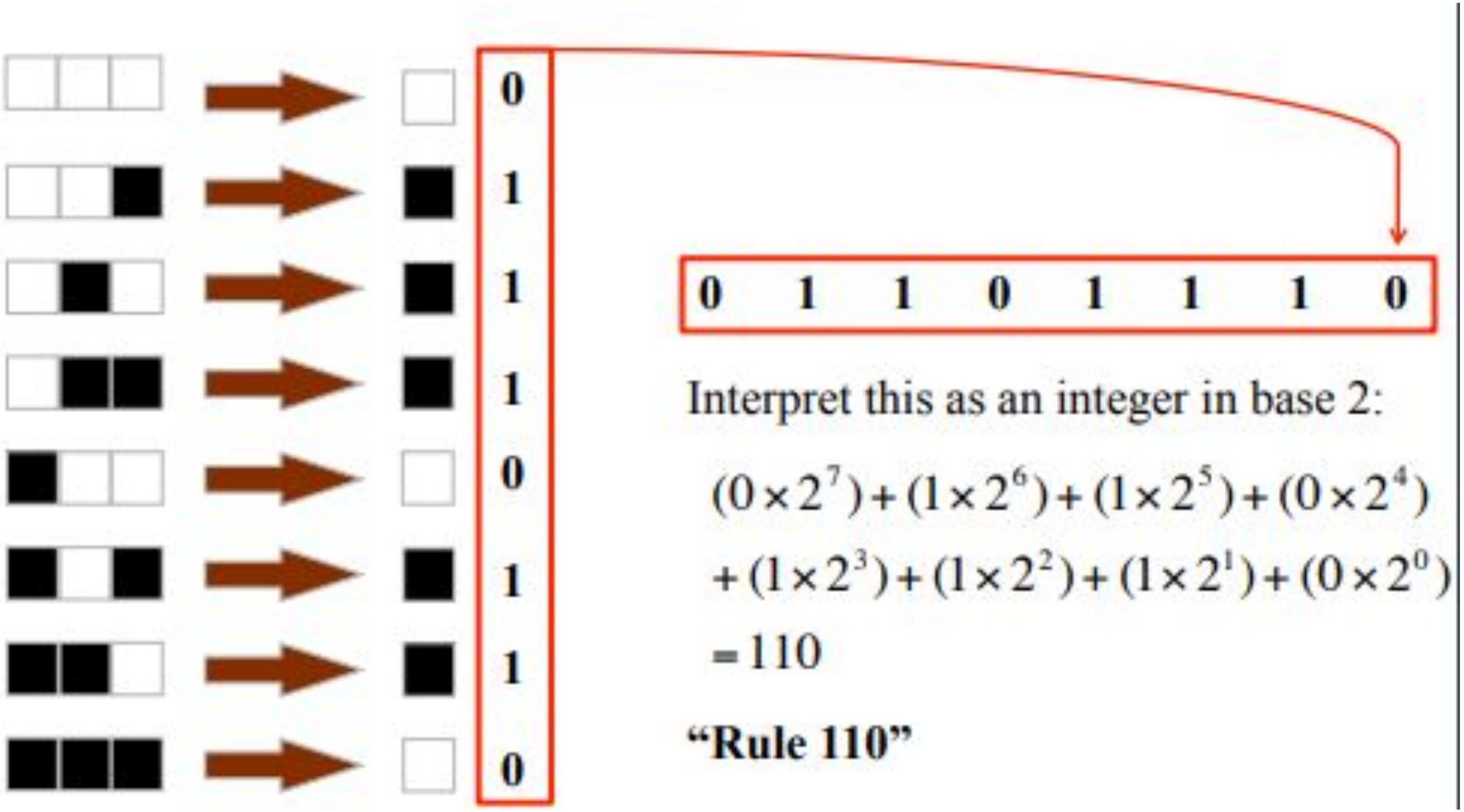




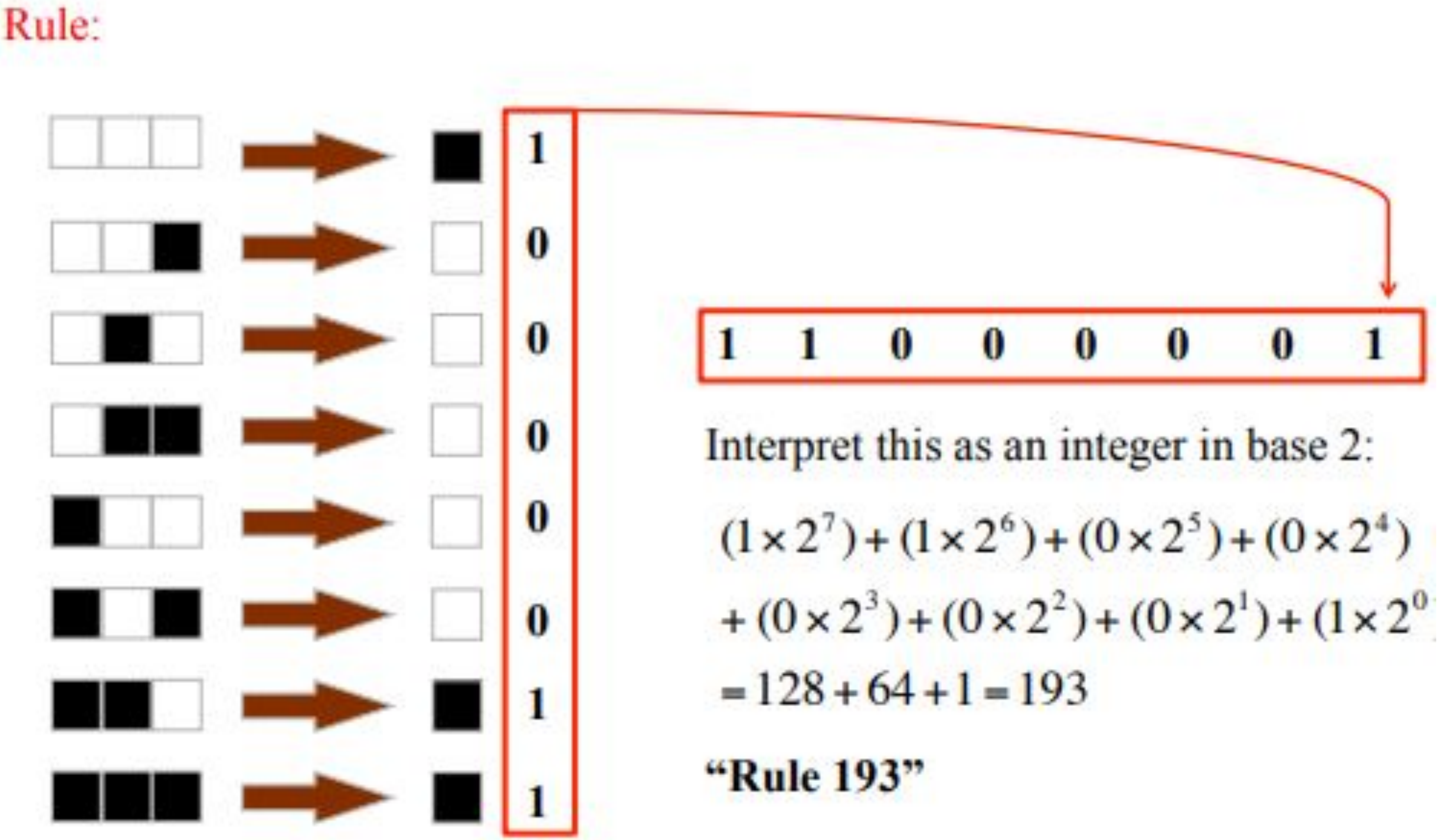
Total: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$

= 256 possible ECAs

Numeración Wolfram



Numeración Wolfram

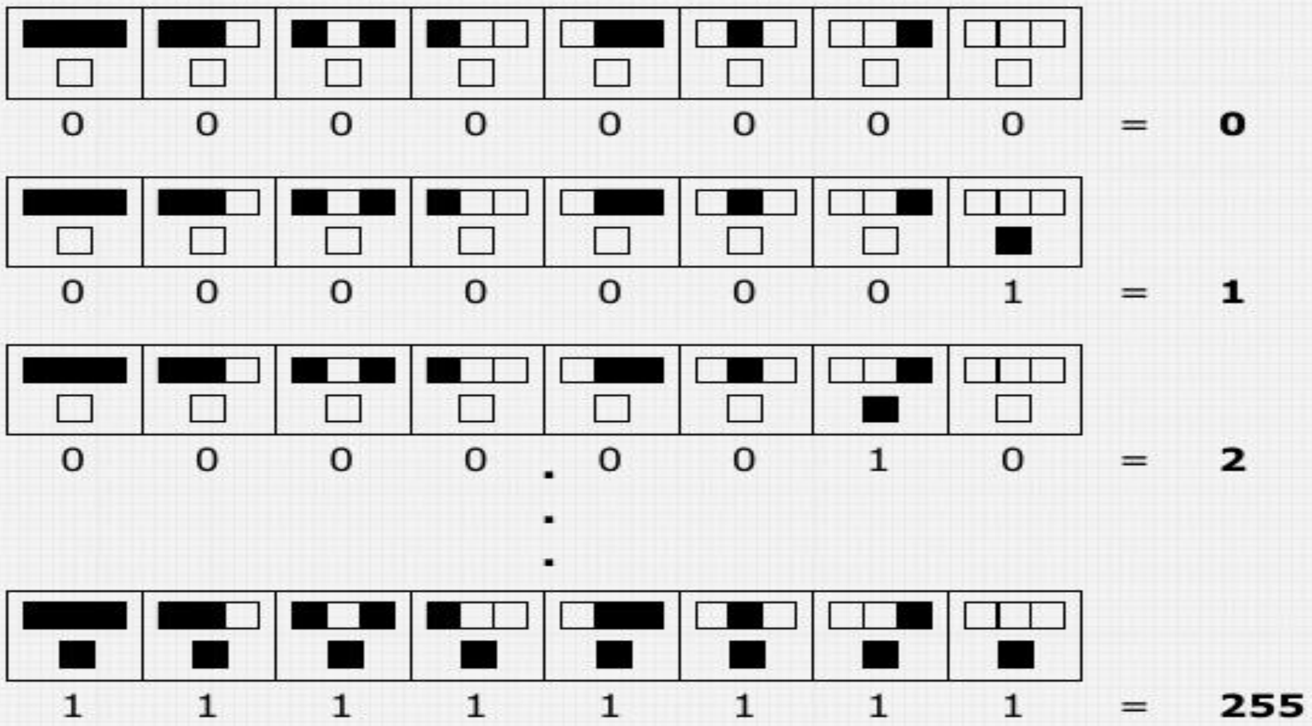


CONSTRUCCIÓN DEL ACE

Con una vecindad de radio 1 y un alfabeto binario se tienen 256 tablas de transiciones o reglas. Por ejemplo:

$$000 \longrightarrow 0 \qquad 001 \longrightarrow 1 \qquad 010 \longrightarrow 0 \qquad 011 \longrightarrow 1$$

$$100 \longrightarrow 1 \qquad 101 \longrightarrow 0 \qquad 110 \longrightarrow 1 \qquad 111 \longrightarrow 0$$

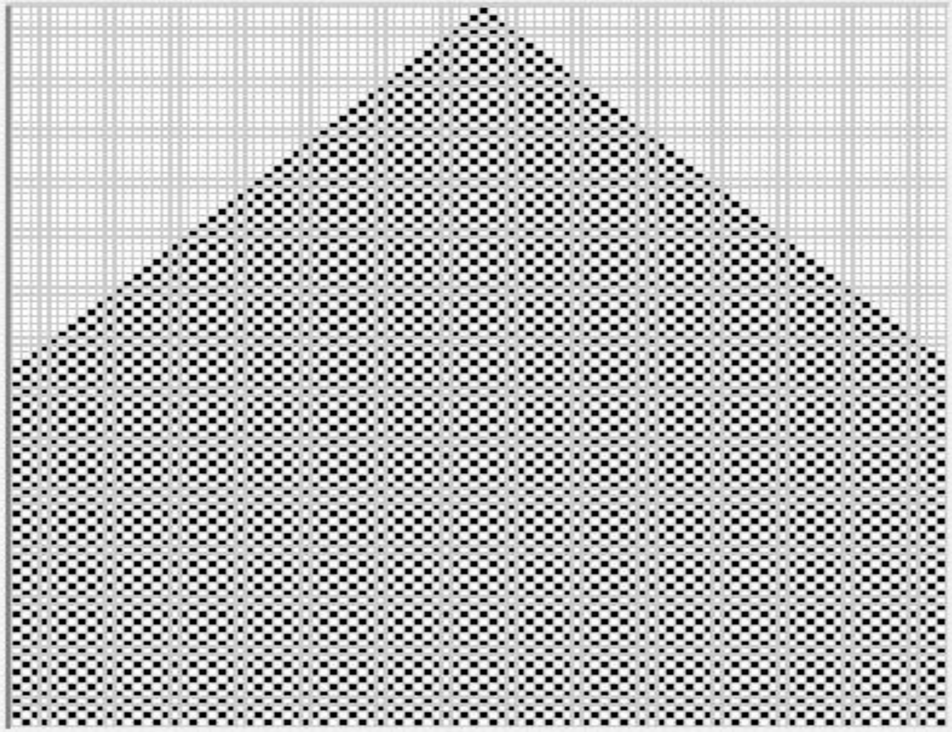


AC: reglas de Wolfram

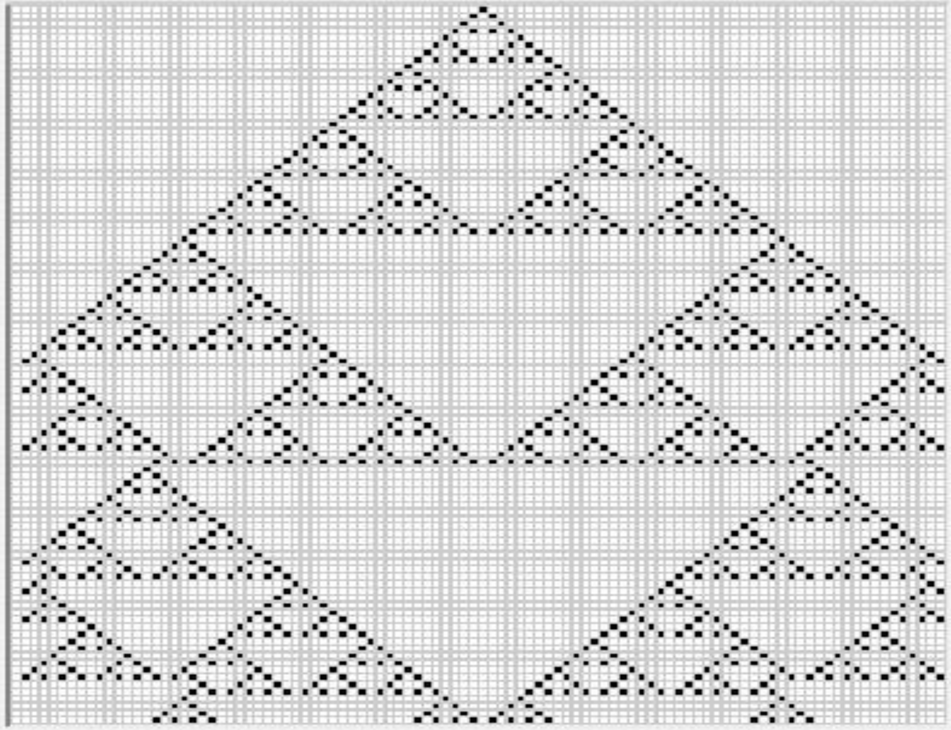
- Wolfram numeró las 256 reglas. Cada regla tiene una tabla de verdad distinta y el número asociado a la regla es la expresión en base diez del número binario que forma la última columna de la tabla (de arriba a abajo).
  - La regla módulo 2 de la tabla 1 se le asocia el número $(01011010)_2 = 90$.
- Las reglas número $(00010010)_2 = 18$, $(10010010)_2 = 146$ y $(11010010)_2 = 210$, generan la misma estructura espacio-temporal que la regla 90.
- ¿De las 256 reglas, cuántas generan patrones interesantes? La regla 0 y la regla 255 son poco interesantes, pero la respuesta a la pregunta anterior requiere la simulación de cada una de las reglas.

CONSTRUCCIÓN DEL ACE

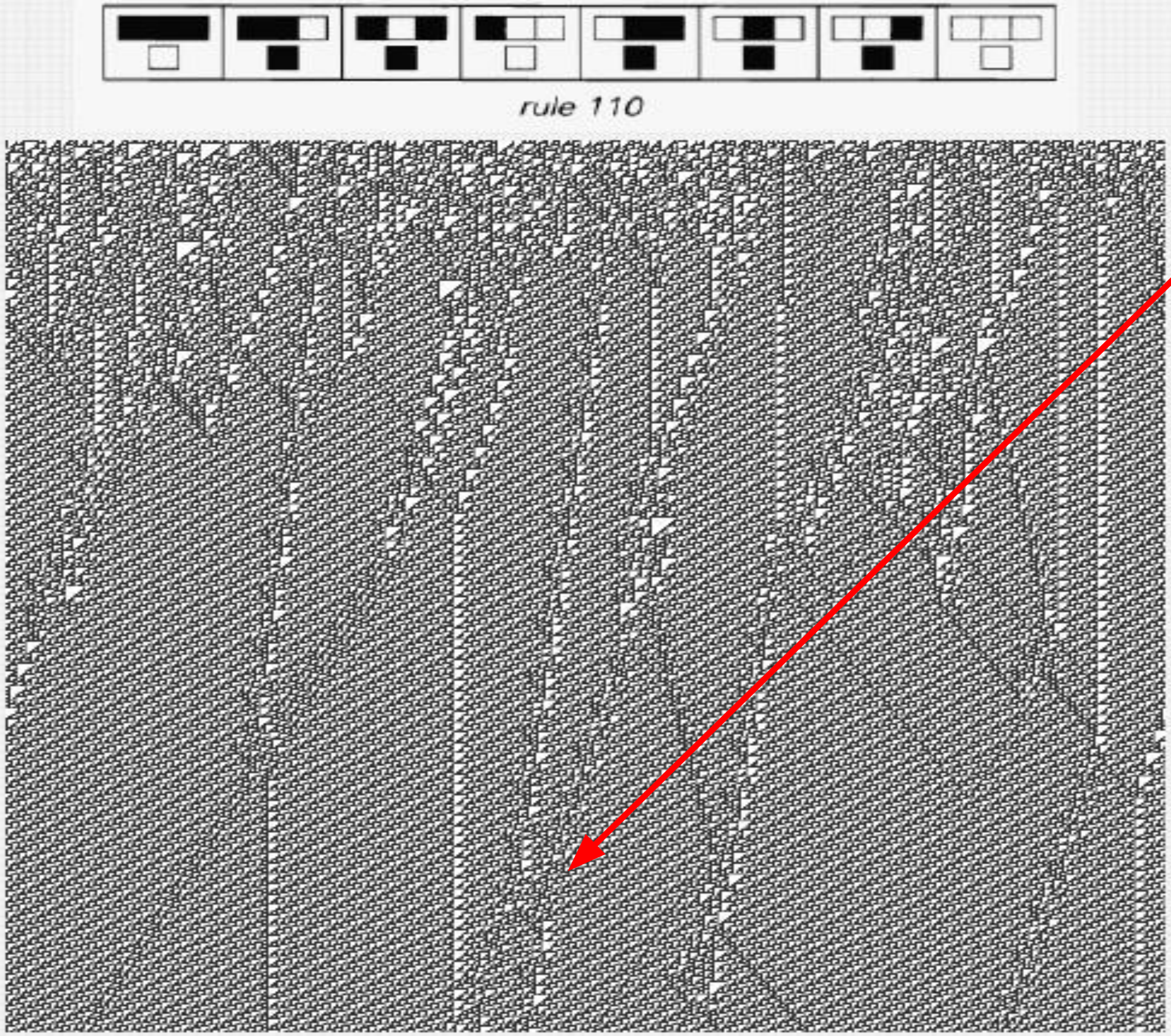
rule 250



rule 90



EVOLUCIÓN DEL ACE



ejemplos de estructuras localizadas complejas y longevas

CLASIFICACIÓN DE LOS ACE

Un problema fundamental en la teoría de autómatas celulares es la *clasificación*.

Una buena clasificación divide un AC en grupos con propiedades relacionadas.

Clasificación de Wolfram[1]

- **Clase I** (24): la evolución del sistema lleva a un estado homogéneo, sin estructuras espaciales ni temporales de ningún tipo..

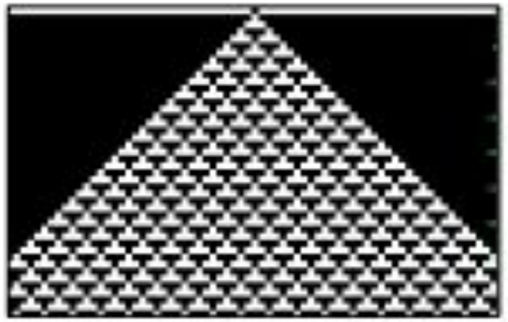
- **Clase II** (194): la evolución del sistema da lugar a estructuras separadas de tipo estable o periódico.

- **Clase III** (26): la evolución da lugar a patrones caóticos. Espacialmente surgen estructuras fractales y temporalmente hay ciclos de longitud muy grande.
- **Clase IV** (12): la evolución genera estructuras complejas localizadas.

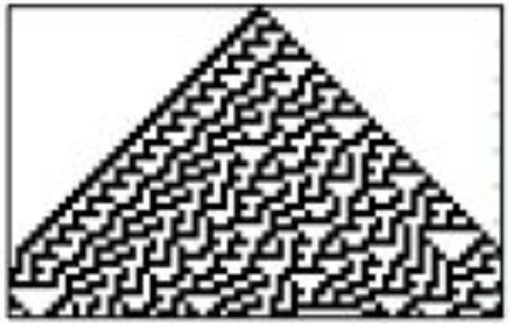
[1] Wolfram, S., *Physica* 10D:1 (1984).

Wolfram's Four Classes of CA Behavior

Class 1: Almost all initial configurations relax after a transient period to the same fixed configuration.



Class 2: Almost all initial configurations relax after a transient period to some fixed point or some periodic cycle of configurations, but which one depends on the initial configuration



Class 3: Almost all initial configurations relax after a transient period to chaotic behavior. (The term ``chaotic'' here refers to apparently unpredictable space-time behavior.)

Class 4: Some initial configurations result in complex localized structures, sometimes long-lived.

- “El autómata de la *Regla 30* es lo más sorprendente que he visto en ciencia. Tardé varios años en asimilar lo importante que era. Pero al final me di cuenta de que esta imagen contiene la clave de lo que quizá sea el misterio más antiguo de toda la ciencia: de dónde procede, en definitiva, la **complejidad** del mundo natural.”
  Stephen Wolfram (quoted in Forbes)

- uso patentado de la *Regla 30* como generador de números pseudoaleatorios

Los Autómatas Celulares como Sistemas Dinámicos: Analogía con *mapa logístico*

Mapa Logístico

- eq: $x_{t+1}=f(x_t)=Rx_t(1-x_t)$
- Determinista
- pasos de tiempo discretos
- estado continuo (el valor de x es un número real)

Dinámica:

- Punto fijo→periódico→caos
- Parámetro de control: R

ACs elementales

- eq: $x_{t+1}=f(x_t)$ s.a. [f=ECA regla], x = celda
- Determinista
- pasos de tiempo discreto
- estado discreto (el valor de x es una secuencia de "negro" y "blanco")

Dinámica:

- Punto fijo→periódico→caos
- Parámetro de control: ?

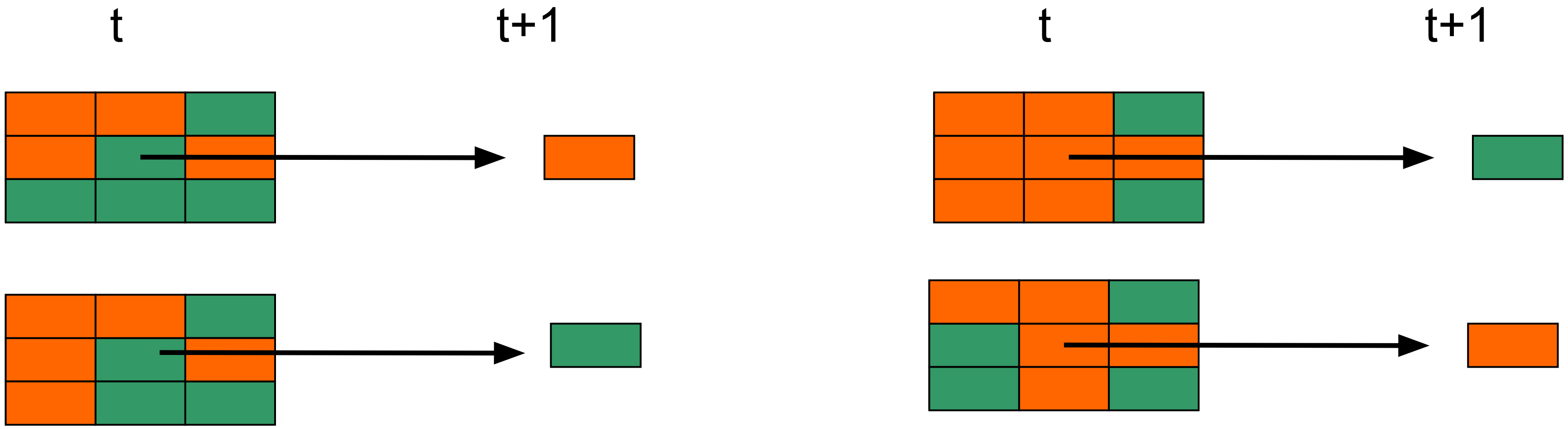
Parámetro de control para ACs: parámetro **lambda de Langton**
“Edge of Chaos” applet

Modelos de Autómatas Celulares dos dimensionales

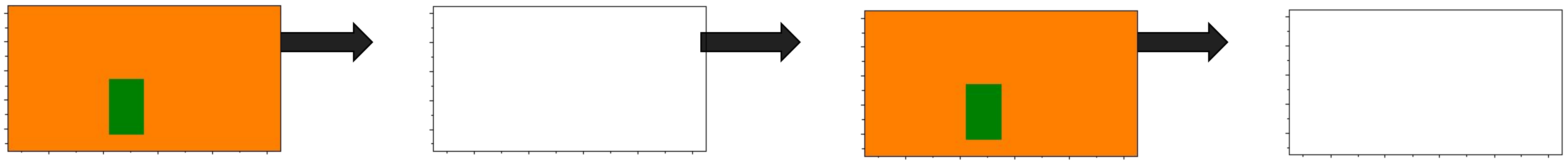
- AC está definido por ***(G, K, f)***:
  - ***G*** el grafo cuyos vértices constituyen las células del autómata y cuyas aristas reflejan la relación de vecindad entre las mismas.
  - **K** el conjunto de estados
  - ***f*** el conjunto de mapeos, uno por cada vértice, que definen las reglas de transición de los estados de las células en función de su propio estado y de los estados de sus células vecinas.
  - Las vecindades más usadas son la de von Neumann y la de Moore.
- A partir de reglas simples emergen comportamientos organizados.
- Los autómatas bidimensionales también caen en las cuatro clases mencionadas anteriormente

Modelo 1: El juego de la vida de Conway

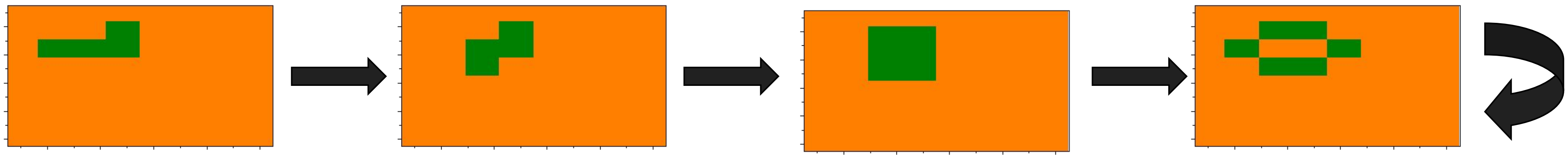
1. Una célula permanece viva (**verde**) si tiene 2 o 3 células vivas en su vecindad. De lo contrario muere (**naranja**).
2. Una célula muerta permanece como tal a menos que tenga exactamente 2 (ó 3) células vivas en su vecindad. Si sucede esto, renace.
3. Todas las células evolucionan de manera sincrónica



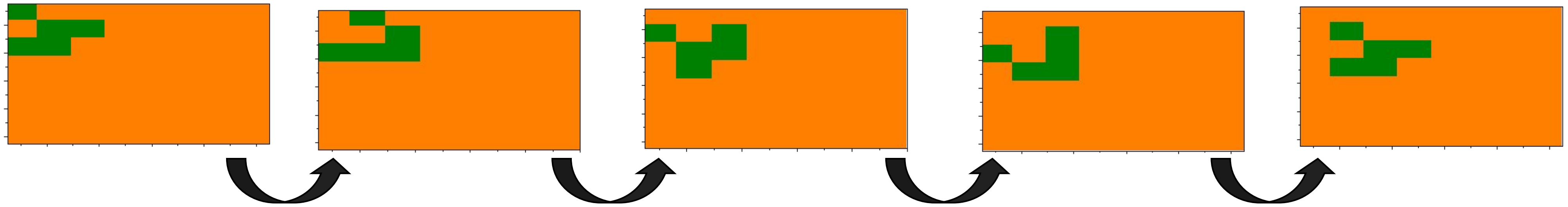
Ejemplo de ciclo límite de orden 2: ***“semaforo”***



Ejemplo de punto fijo: ***“panal”***



Ejemplo de patrón que se repite trasladado en una celda hacia la derecha y otra hacia abajo luego de 3 estados intermedios.(*): ***“Trineo”*** :



(*) Los ejemplos que se muestran corresponde a un Juego de la Vida con la regla que una célula muerta permanece como tal a menos que haya exactamente 3 células vivas en su vecindad

Hay configuraciones (***“cañones”***) que emiten “trineos” luego de un dado número de iteraciones

Es posible verificar que es formalmente equivalente a una máquina de Turing y que por consiguiente es capaz de comportarse como una computadora universal

Esta propiedad parece ser extensible a autómatas unidimensionales de la clase 4

La riqueza dinámica del AC de Conway es por consiguiente la máxima imaginable.

Para construir una “computadora celular” basada en el AC de Conway es necesario construir las funciones lógicas incluida la negación.

Para ello se usan Trineos y Cañones. Los Trineos se interpretan como señales binarias que viajan según las diagonales. La presencia de un Trineo se interpreta como un **1** y su ausencia como un **0**

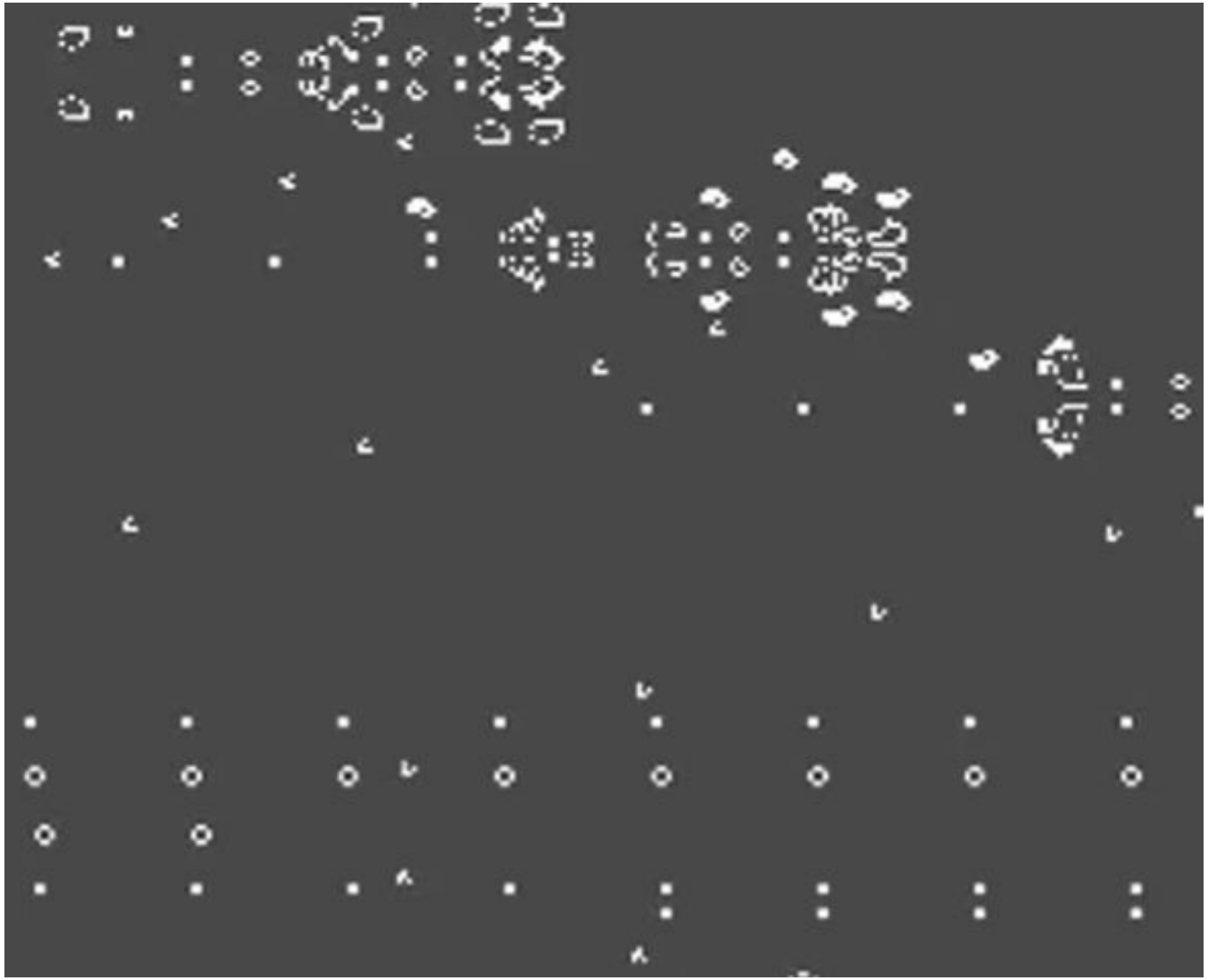
La colisión de dos trineos aniquila a ambos

Algunas conclusiones preliminares:

- Reglas simples a nivel de comportamientos individuales pueden dar lugar a comportamientos colectivos enormemente complejos.

- Hay propiedades del conglomerado de agentes que son propias del conjunto y que no pueden ser reducidas a las propiedades de una parte del sistema o a las de cada uno de los integrantes del sistema

- Si se admite que el comportamiento de una sociedad real no puede exceder en complejidad a una computadora universal, se puede concluir que la riqueza de dinámicas del AC de Conway es en principio equivalente a la de una sociedad integrada por seres vivos.



ver Juego de la Vida

Modelo 2: Segregación de Schelling

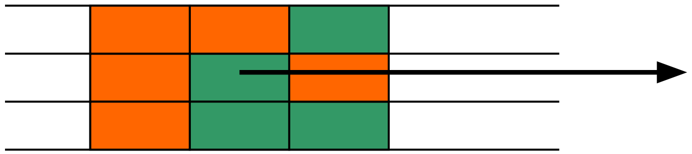
Schelling, Thomas C. 1971. Dynamic Models of Segregation. *Journal of Mathematical Sociology* 1:143-186.

Rule: each iteration, each dot looks at its 8 neighbours and if less than 30% are the same colour as itself, it moves to a random empty square

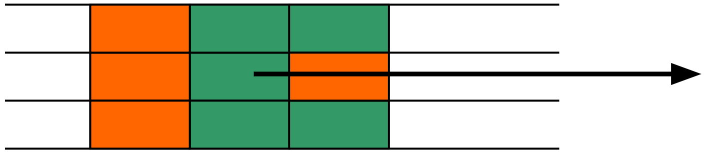
Segregation can result from wanting only a few neighbours of a like colour

Modelo 2: Segregación de Schelling

1. ***Alternativa:*** Un agente está *"descontento"* si su tipo es igual al de la minoría de agentes de su entorno inmediato (incluyendo él mismo). La situación ***favorable*** es participar de la ***mayoría***
2. ***Alternativa:*** Un agente está *"descontento"* si su tipo es igual al de la mayoría de agentes de su entorno inmediato (incluyendo él mismo). La situación ***favorable*** es participar de la ***minoría***



El agente central pertenece a la minoría en su entorno inmediato *(descontento en la alternativa 1)*

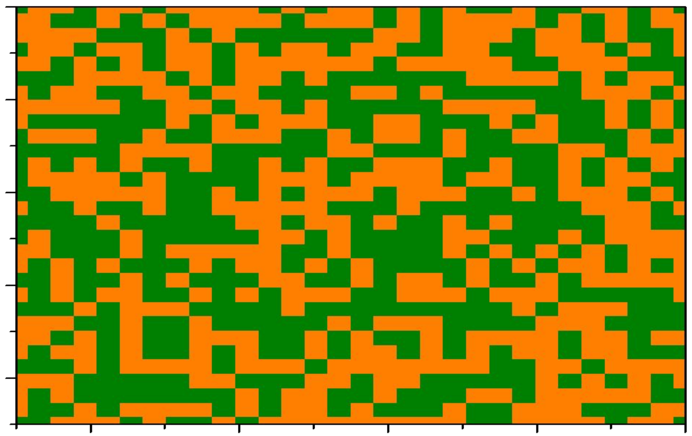


El agente central pertenece a la mayoría en su entorno inmediato *(descontento en la alternativa 2)*

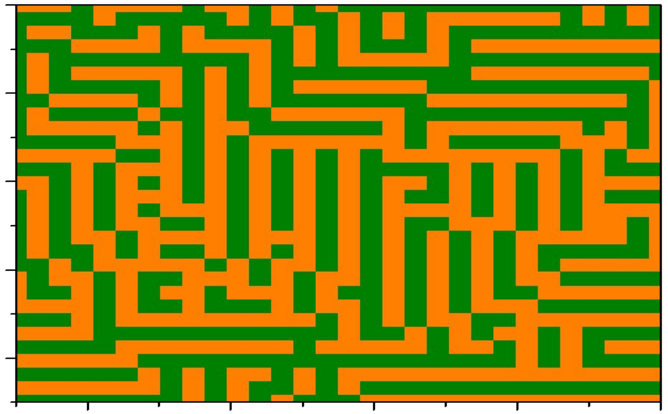
Dinámica: Dos agentes descontentos de tipos diferentes, elegidos al azar intercambian sus respectivas posiciones.

Dos agentes "descontentos" (Alt. 1) de distinto tipo que intercambian posiciones

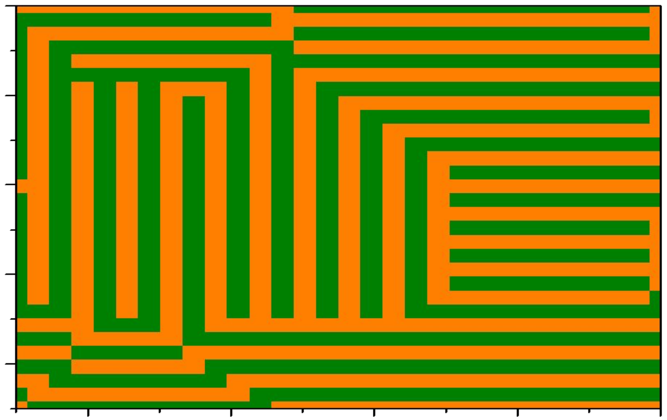
ALTERNATIVA 2: la situación **favorable** es ser **minoría**



CONDICIÓN INICIAL



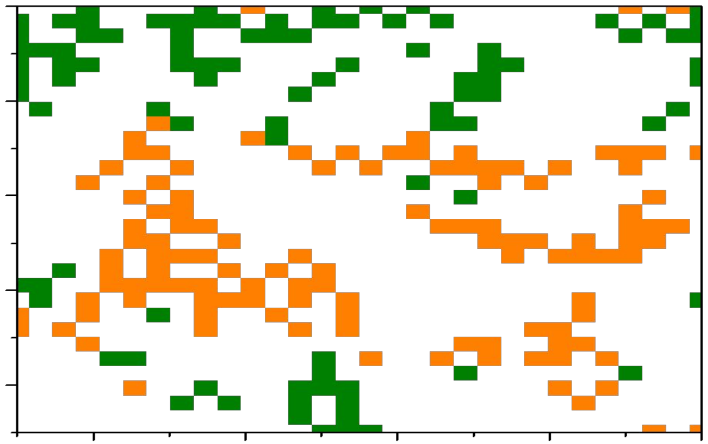
500 MUDANZAS

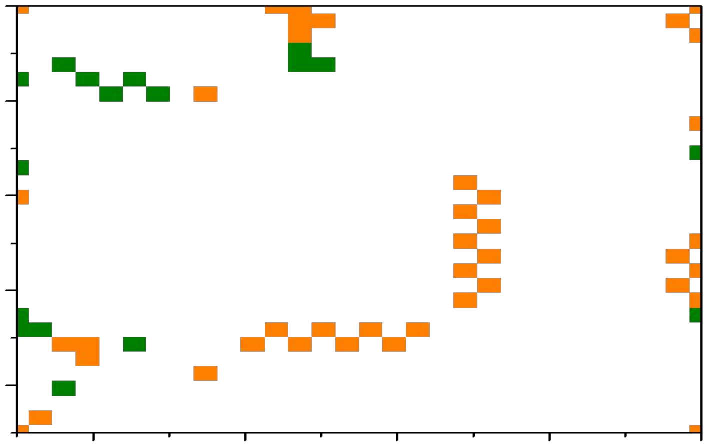


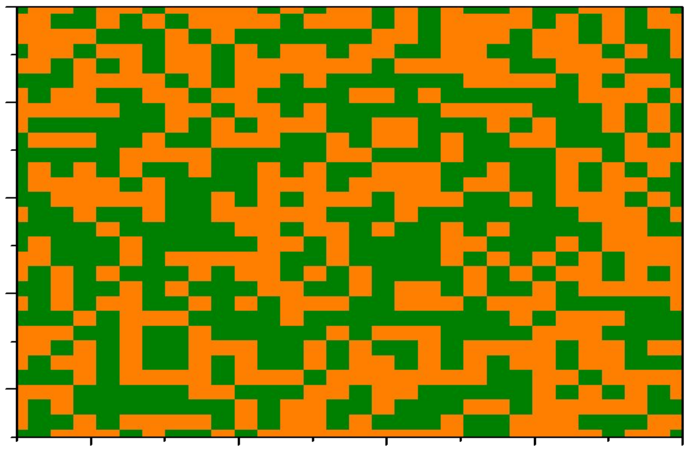
1500 MUDANZAS

A pesar que cada agente mantiene interacciones locales surge un orden de gran escala

Agentes en situación desfavorable.
La dinámica tiende a disminuir el número de descontentos y éstos se concentran en los bordes de amplios dominios

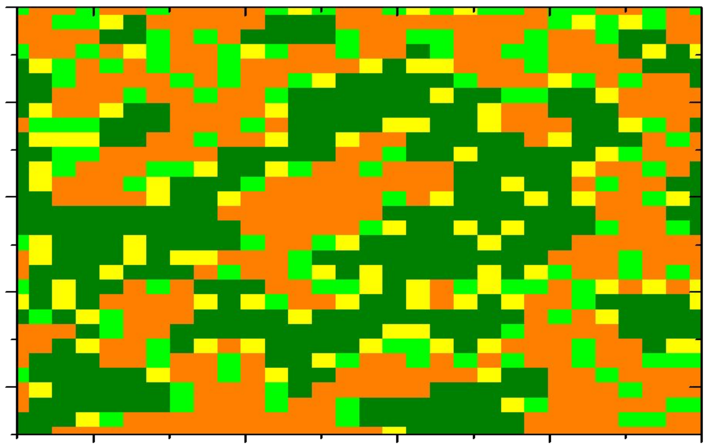






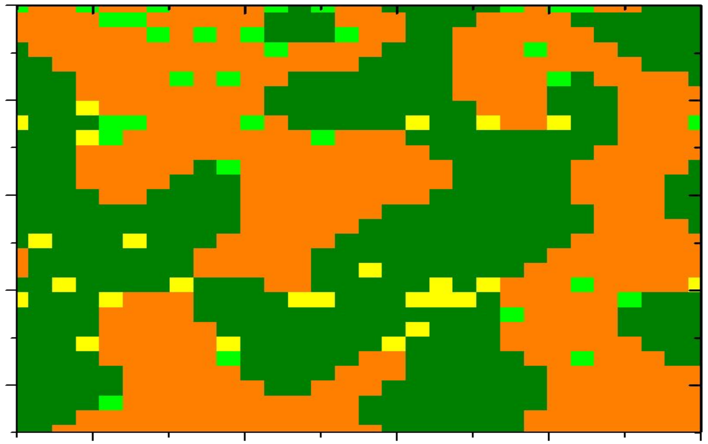
Condición
inicial

A las 50 mudanzas



ALTERNATIVA 1 : La situación **favorable** es ser **mayoría**

- Agente **verde** en situación favorable
- Agente **verde** en situación desfavorable
- Agente **naranja** en situación desfavorable
- Agente **naranja** en situación favorable

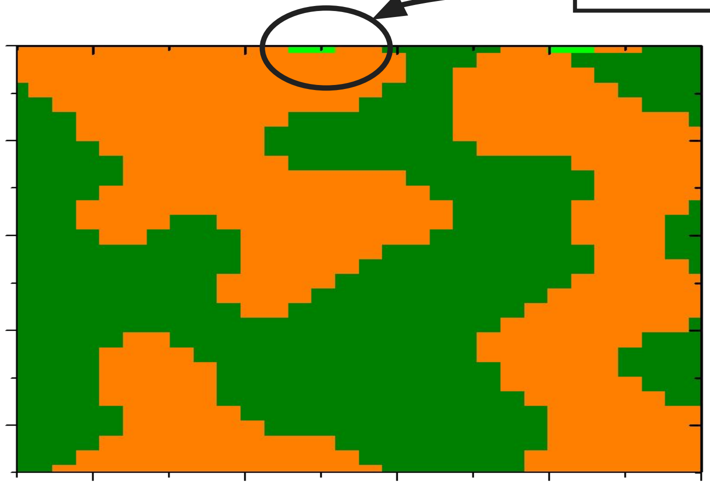


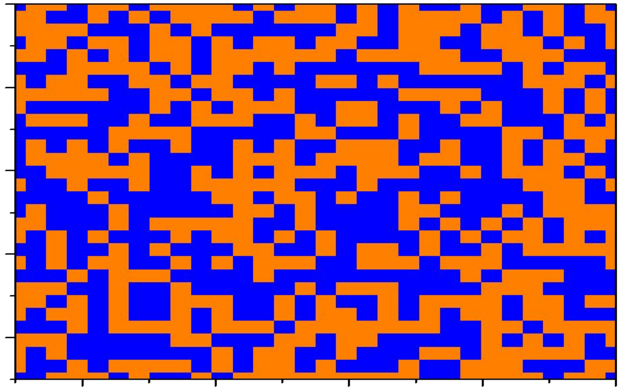
A las 150 mudanzas

Si la situación favorable es ser la mayoría se produce segregación

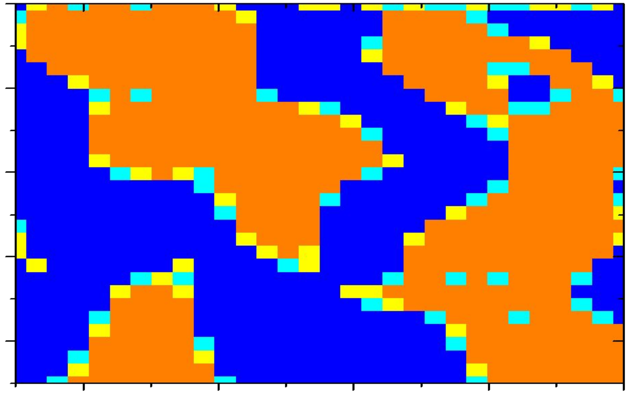
A las 200 mudanzas

descontentos

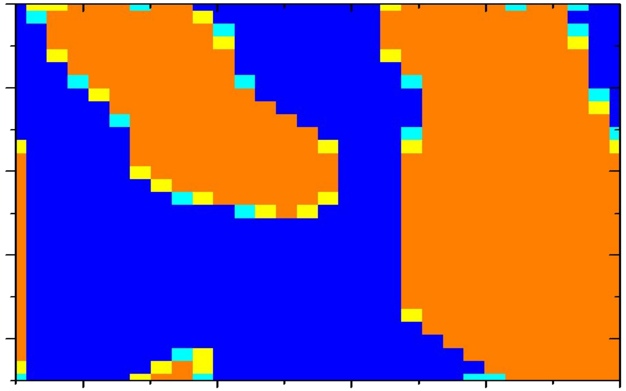




inicial



500 mudanzas



1000 mudanzas

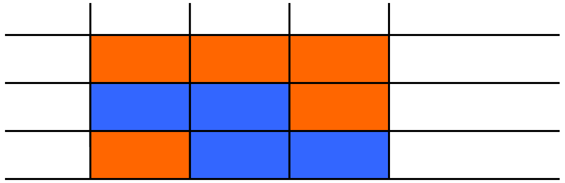
VARIANTE DE LA ALTERNATIVA 1 :
La situación **favorable** es mantener una ***representación mínima***

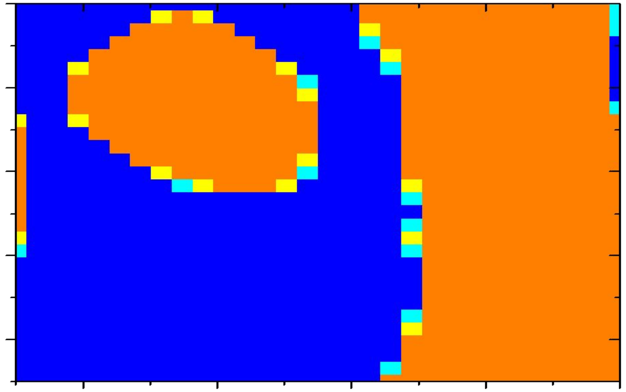
Un agente de un tipo está en situación ***des****favorable* cuando en su entorno los agentes del otro tipo poseen una representación que exceden la propia en 2 o más unidades **:**

azul fav. => cant(**azul**) > cant(**naranja**) -2
naranja fav.=>cant(**naranja**) > cant(**azul**) -2

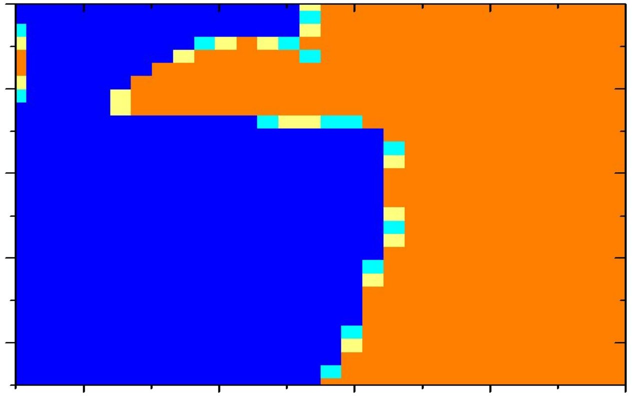
- Agente **azul** en situación favorable
- Agente **azul** en situación desfavorable
- Agente **naranja** en situación desfavorable
- Agente **naranja** en situación favorable

Ejemplo: Un agente **azul** en situación favorable :

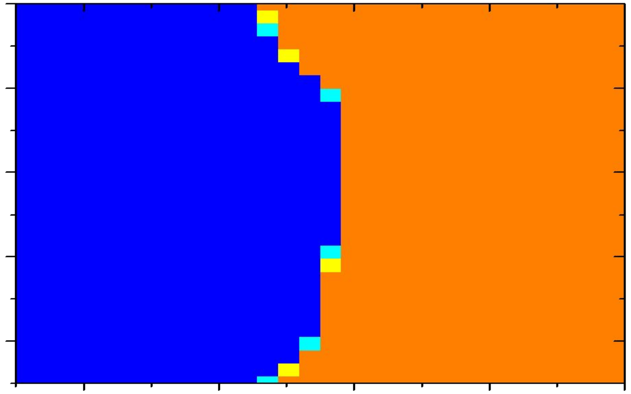




1500 mudanzas



2000 mudanzas



3000 mudanzas

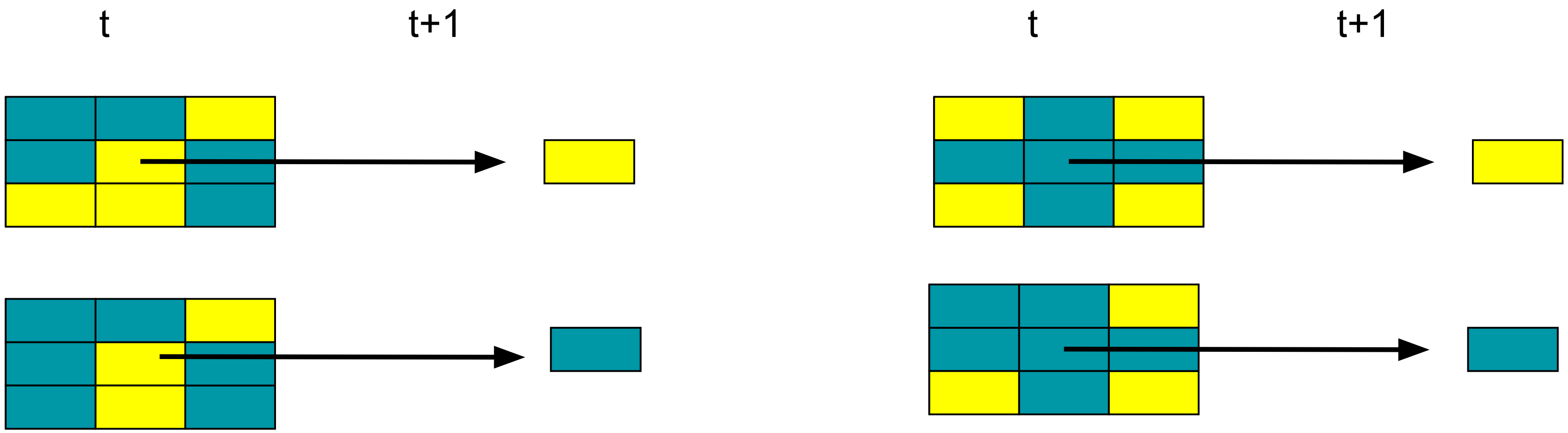
Comentarios

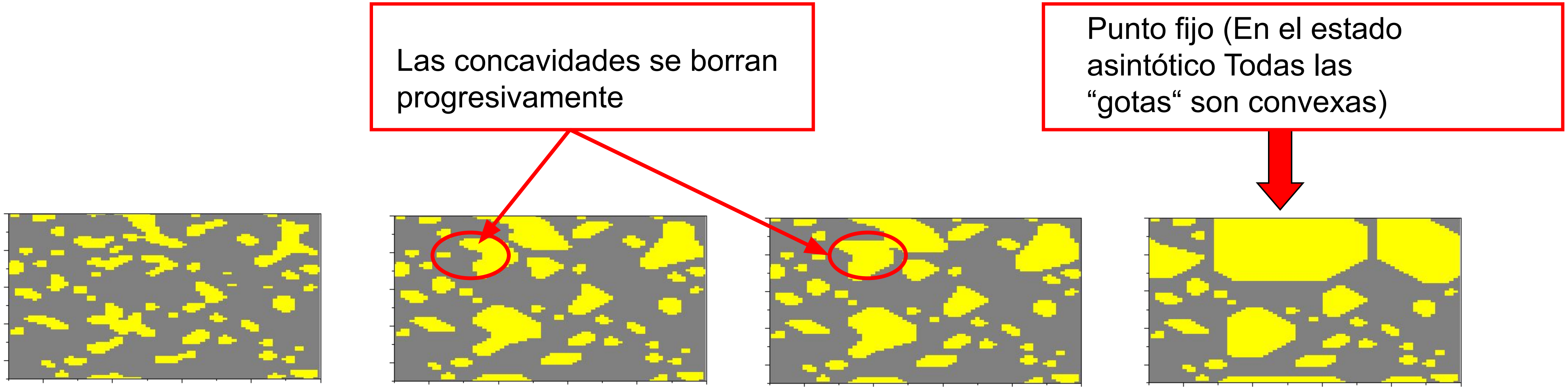
- La estabilidad de una configuración obtenida a través del algoritmo de evolución puede comprenderse analizando la frontera que separa los “barrios” de distinto color.
- Puede verse que la segregación se produce aun cuando haya un alto grado de tolerancia entre vecino de distinto tipo.
- Es fácil comprobar que las situaciones de máxima intolerancia conducen a inestabilidades permanentes: no puede haber barrios estables si todos los habitantes exigen estar rodeados íntegramente por vecinos del mismo tipo.

Modelo 3: Condensación

1. Una célula se condensa si en su vecindad hay 4 o más células condensadas
2. Una célula pasa a un estado gaseoso si en su vecindad hay menos de 4 células condensadas
3. Todas las células evolucionan de manera sincrónica

Ejemplos





4 iteraciones 10 iteraciones 12 iteraciones 50 iteraciones

Evolución para una probabilidad inicial de la fase condensada de 25%

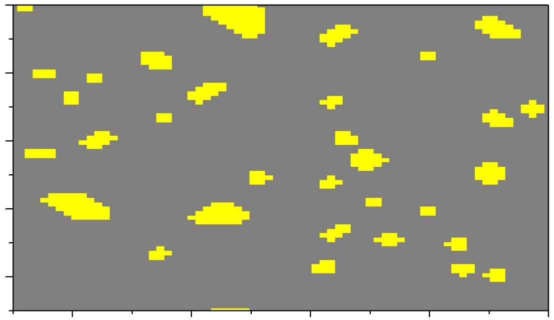
El modelo presenta un cambio abrupto de comportamiento para un valor de la probabilidad de la fase condensada próximo al 25%.

Se suele decir que el sistema presenta una ***transición de fase.***

Estas transiciones son comunes en todos los sistemas complejos y en sistemas termodinámicos. El cambio abrupto es una discontinuidad cuando el sistemas es infinito

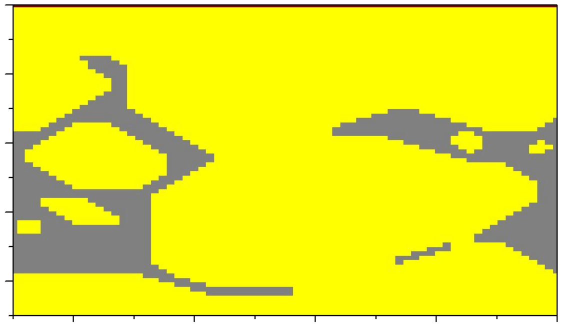
TRANSICIÓN DE FASE DE LA CONDENSACIÓN

Estado asintótico para una probabilidad inicial de la fase condensada de 20%.
Hay una distribución de los tamaños de las gotas con un tamaño más probable



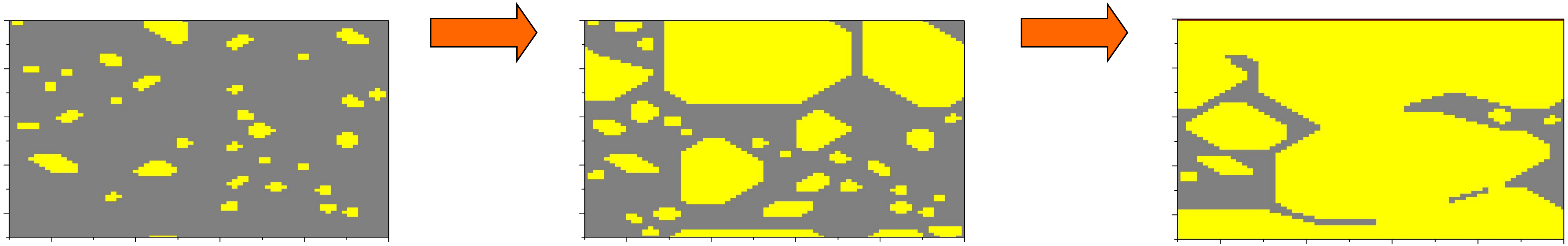
Estado asintótico para una probabilidad inicial de la fase condensada de 25%. Hay gotas de todos los tamaños. La distribución no tiene un tamaño más probable

50 iteraciones para una probabilidad inicial de la fase condensada de 27%. Cuando llegue a su estado asintótico todo el espacio estará en la fase condensada



Modelo 3: Condensación

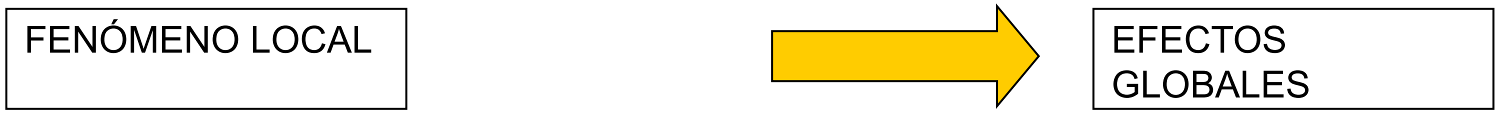
- El umbral de condensación es la mínima probabilidad para que la fase condensada alcance a todo el espacio
- Si se siembran núcleos de condensación con probabilidad p las gotas que se forman pueden cubrir todo el espacio sólo si $p \geq p_{(critico)} = 0.25$.
  - Este ejemplo es una variante del fenómenos de percolación



p = 0.20 p ~ 0.25 p ~ 0.26

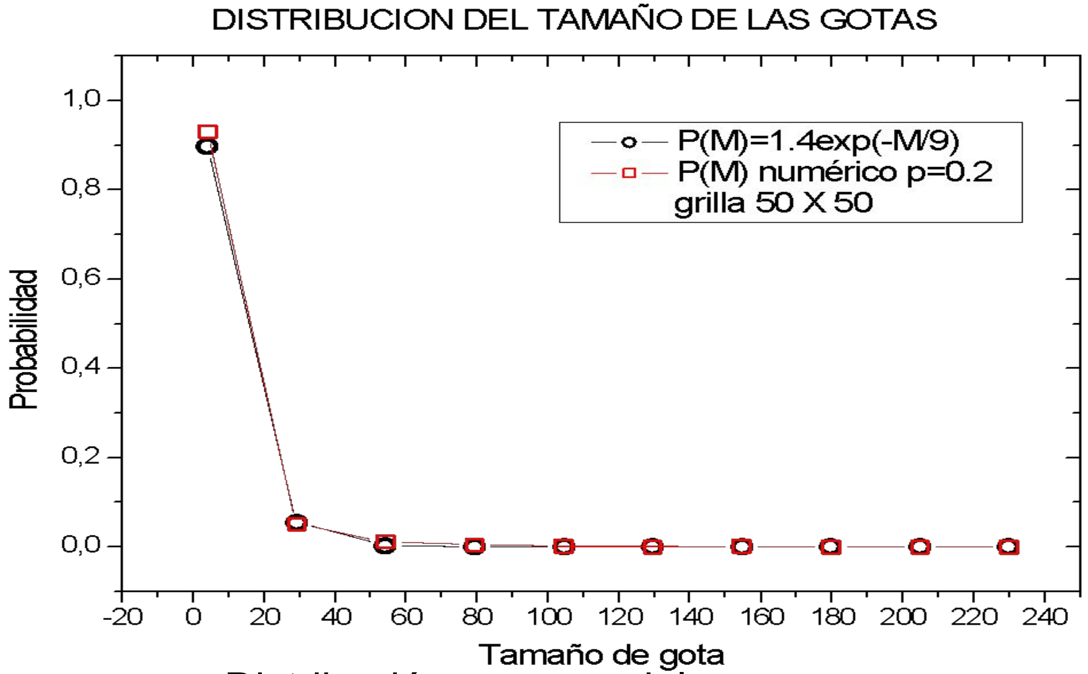
- Los tamaños de las gotas se distribuyen con una distribución exponencial para p < p(crítico) pero en la transición de fase la distribución es una **ley de potencias**

- El modelo del proceso de condensación posee un comportamiento singular para un valor particular del parámetro de control:
- Cuando el valor del mismo alcanza ese valor particular la dimensión de las gotas alcanza a la totalidad el sistema.
- Este tipo de comportamiento es de gran interés porque representa el caso en que un fenómeno local se magnifica y alcanza a todo el sistema.



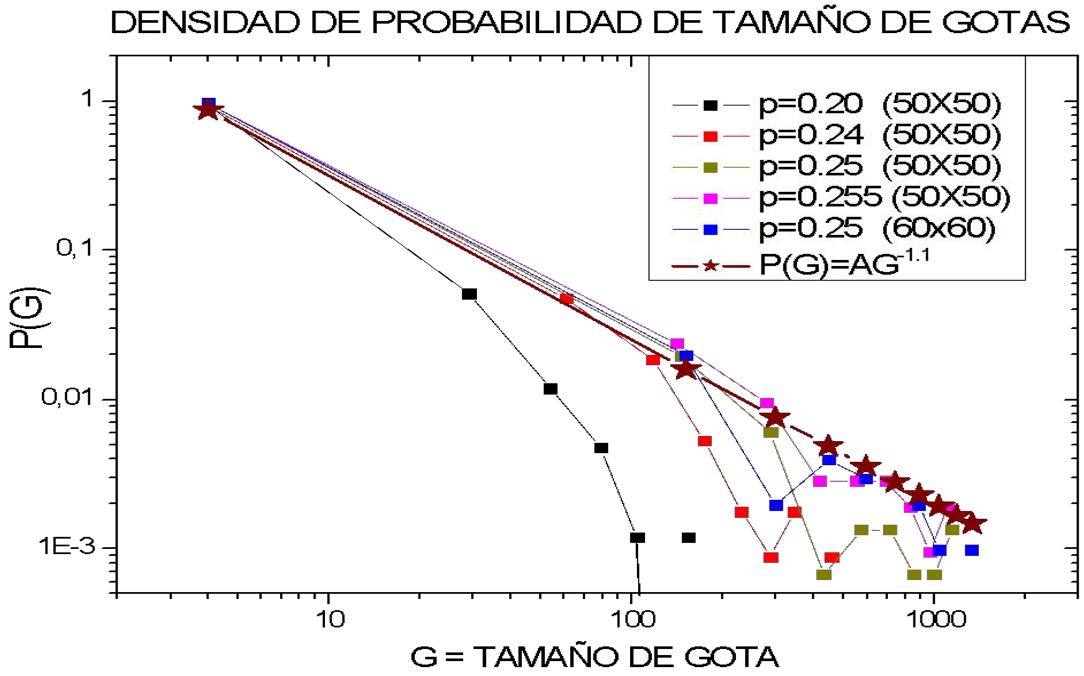
- Esta situación se presenta en numerosas circunstancias de muy diversa naturaleza y recibe el nombre de transición de fase

Más sobre el modelo de condensación



Distribución exponencial

A



B

Se puede estudiar cuál es la distribución de tamaño de gotas para cada valor de *p.*

Se encuentra que esa distribución es exponencial pero cuando *p* alcanza el valor crítico pasa a ser una ley de potencias con exponente –1.1 Un distribución así no tiene valor medio finito.

Conclusión: en la transición de fase se pueden encontrar "gotas" de todos los tamaños imaginables

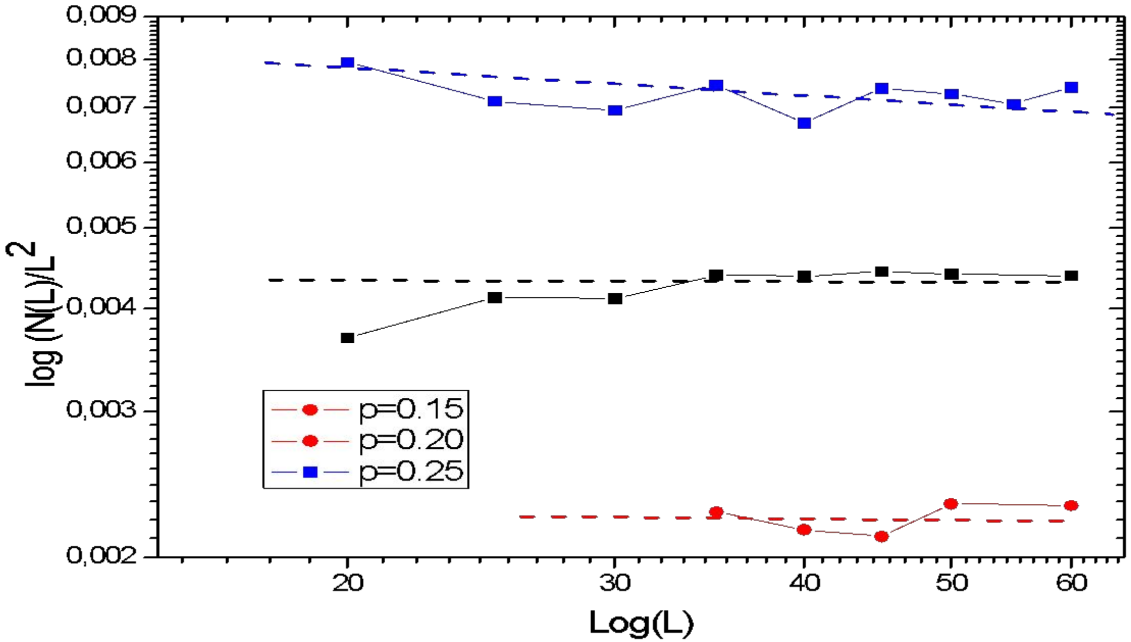
Se puede calcular la densidad de gotas calculando cuántas gotas se forman en una grilla de lado L. La densidad de gotas es

$$\rho = \frac{N(G)}{L^2}$$

La densidad se mantiene constante si p<0.25 pero en el umbral de condensación cuando vale una ley de potencias se cumple que

$$\rho \sim L^{-\gamma}$$

→ indica que el conjunto de gotas es **autosimilar** con una **dimensión fractal** dada por γ



p=0.25

p=0.20

p=0.15

Comentarios

- Fenómenos en que todos los individuos de un sistema enfrentan cambios abruptos surgen en muchas y muy diversas circunstancias
  - en sistemas físicos : magnetización de materiales, condensación o congelamiento de materiales
  - en sistemas biológicos: extinción de especies
  - en sistemas sociales crisis económicas y financieras
- En todos los casos existe algún parámetro representativo x del sistema sujeto normalmente a fluctuaciones azarosas en torno a algún valor de equilibrio que pierde ese valor representativo.
- Es por consiguiente de esperar que en la vecindad de esa situación sus valores se distribuyan obedeciendo una ley de potencias del tipo

$$P(x) = Ax^{-\lambda}$$

- Leyes de potencias y transiciones de fase ocurren simultáneamente

¡Nos vemos en la próxima clase!