Laporan Aljabar Linier dan Geometri

IF2123 Sem. 3 2020/2021

Tugas Besar 1

Kelompok 38:
Alifah Rahmatika B. / 13519053
Akifa Nabil Ufairah / 13519179
Afifah Fathimah Q. / 13519183

PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA
SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG
2020

BAB I

DESKRIPSI MASALAH

Membuat program dalam **Bahasa Java** untuk:

1. Menghitung solusi SPL dengan metode eliminasi Gauss, metode Eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan).
2. Menyelesaikan persoalan interpolasi dan regresi linier.
3. Menghitung matriks balikan
4. Menghitung determinan matriks dengan berbagai metode (reduksi baris dan ekspansi kofaktor).

Dengan spesifikasi sebagai berikut.

1. Program dapat menerima masukan (input) baik dari keyboard maupun membaca masukan dari file text. Untuk SPL, masukan dari keyboard adalah m, n, koefisien aij , dan bi. Masukan dari file berbentuk matriks augmented tanpa tanda kurung, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,

```
3 4.5 2.8 10 12
-3 7 8.3 11 -4
0.5 -10 -9 12 0
```

2. Untuk persoalan menghitung determinan dan matriks balikan, masukan dari keyboard adalah n dan koefisien aij. Masukan dari file berbentuk matriks, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,

```
3 4.5 2.8 10
-3 7 8.3 11
0.5 -10 -9 12
```

3. Untuk persoalan interpolasi, masukannya jika dari keyboard adalah n, (x0, y0), (x1, y1), ..., (xn, yn), dan nilai x yang akan ditaksir nilai fungsinya. Jika masukannya dari file, maka titik-titik dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung. Misalnya jika titik-titik datanya adalah (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513), maka di dalam file text ditulis sebagai berikut:

```
8.0 2.0794
9.0 2.1972
9.5 2.2513
```

4. Untuk persoalan regresi, masukannya jika dari keyboard adalah n (jumlah peubah x), semua nilai-nilai x1i, x2i, ..., xni, nilai yi, dan nilai-nilai xk yang akan ditaksir nilai fungsinya. Jika masukannya dari file, maka titik-titik dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung.
5. Untup persoalan SPL, luaran (output) program adalah solusi SPL. Jika solusinya tunggal, tuliskan nilainya. Jika solusinya tidak ada, tuliskan solusi tidak ada, jika

solusinya banyak, maka tuliskan solusinya dalam bentuk parametrik (misalnya x4 = -2, x3 = 2s – t, x2 = s, dan x1 = t.)

6. Untuk persoalan determinan dan matriks balikan, maka luarannya sesuai dengan persoalan masing-masing
7. Luaran program harus dapat ditampilkan pada layar komputer dan dapat disimpan ke dalam file.
8. Bahasa program yang digunakan adalah Java.
9. Program tidak harus berbasis GUI, cukup text-based saja, namun boleh menggunakan GUI (memakai kakas Eclipse misalnya).
10. Program dapat dibuat dengan pilihan menu. Urutan menu dan isinya dipersilakan dirancang masing-masing. Misalnya, menu:

(((FOTO MENU)))

```
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
```

Untuk pilihan menu nomor 1 ada sub-menu lagi yaitu pilihan metode:

```
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
```

Begitu juga untuk pilihan menu nomor 2 dan 3.

BAB II

TEORI SINGKAT

2.1. Metode Eliminasi Gauss

Metode Gauss terdiri dari Forward Phase dan teknik penyulihan mundur (Backward Substitution) matriks *augmented*. Forward Phase berisi penerapan OBE pada matriks sampai terbentuk matriks eselon baris. Teknik penyulihan mundur dimulai dari baris terakhir. Solusi baris tersebut disubstitusikan ke dalam baris di atasnya, begitu pula seterusnya.

Sistem Persamaan Linier memiliki tiga kemungkinan solusi, yaitu:

1.) Solusi unik (tunggal)
   Solusi tunggal dapat dinyatakan dengan variabel dan nilainya.
2.) Solusi banyak (tidak berhingga)
   Penulisan SPL dengan banyak solusi diberikan dalam bentuk parameter dengan memisalkan satu atau beberapa koefisien dengan alfabet, misal k dan k merupakan anggota Riil.
3.) Tidak memiliki solusi sama sekali

2.2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Untuk menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, Sistem Persamaan Linier (SPL) perlu dinyatakan dalam bentuk matriks augmented.

Metode Gauss-Jordan terdiri dari dua bagian, yaitu:

2.2.1. Forward Phase

Bagian ini berisi penerapan OBE (Operasi Baris Elementer) pada matriks *augmented* sampai terbentuk matriks eselon baris. Penerapan OBE dilakukan dengan langkah sebagai berikut.

1.) Cari baris dengan kolom paling kiri tidak 0, baris ini terletak di paling atas dan dijadikan poros.
2.) Jika perlu lakukan penukaran baris untuk meletakkan baris poros di paling atas
3.) Terapkan reduksi baris hingga terbentuk matriks segitiga atas
4.) Gunakan kembali reduksi baris untuk membentuk satu utama dengan hasil matriks eselon baris.

2.2.2. Backward Phase

Pada Backward Phase OBE kembali diterapkan agar diperoleh nilai 0 di atas satu utama. Backward Phase akan menghasilkan matriks eselon baris tereduksi. Kolom terakhir pada setiap baris merupakan solusi dari sistem persamaan linier.

2.3. Determinan

Determinan matriks 2x2 dan matriks 3x3 dapat dihitung dengan mengalikan dan mengurangkan diagonal matriks. Namun, untuk matriks dengan ukuran yang lebih besar perhitungan determinan biasa akan sulit dilakukan. Terdapat dua metode lain untuk menghitung determinan, yaitu:

2.3.1. Metode Reduksi Baris

Metode reduksi baris menggunakan penerapan Operasi Baris Elementer (OBE) untuk membentuk matriks segitiga atas. Cara kerjanya hampir mirip dengan Forward Phase, tetapi tidak membentuk satu utama dan hanya menghasilkan matriks segitiga atas. Determinan didapatkan dengan menghitung perkalian diagonal utama matriks segitiga atas.

2.3.2. Metode Ekspansi Kofaktor

Metode ini menggunakan hasil perhitungan minor dan membentuk matriks kofaktor. Minor adalah determinan submatriks yang elemennya tidak berada pada baris *i* dan kolom *j*. Elemen matriks kofaktor ditentukan oleh rumus berikut.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} ,$$

dengan C_{ij} elemen kofaktor dan M_{ij} minor pada baris *i* dan kolom *j*.

Tanda positif dan negatif pada matriks kofaktor dapat diperhatikan juga melalui pola berikut.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Nilai determinan dapat dihitung dengan merujuk pada suatu kolom atau suatu baris. Misalkan terdapat matriks A dengan elemen a_{ij}, maka persamaan jika merujuk pada baris, yaitu:

$$\det(A) = a_{m1}C_{m1} + a_{m2}C_{m2} + \ldots + a_{mn}C_{mn} ,$$

dengan *m* sebagai baris rujukan dan *n* sebagai ukuran matriks.

Persamaan jika merujuk pada baris, yaitu:

$$\det(A) = a_{1m}C_{1m} + a_{2m}C_{2m} + \ldots + a_{nm}C_{nm} ,$$

dengan *m* sebagai kolom rujukan dan *n* sebagai ukuran matriks.

2.4. Matriks Balikan

Misalkan M adalah matriks persegi dengan ukuran *n* x *n*. Balikan matriks M adalah M^{-1} yang memenuhi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Matriks M dinyatakan memiliki balikan atau inverse jika determinan M tidak sama dengan 0. Matriks balikan dapat dicari dengan rumus sebagai berikut.

$$M^{-1} = \frac{1}{det(M)}\ \text{adj}(M),$$

dengan adj(M) adalah matriks adjoin M.

2.5. Matriks Kofaktor

Matriks kofaktor adalah matriks dengan elemen minor yang memiliki tanda (positif atau negatif, tergantung dengan nilai i dan j). Lebih lanjutnya telah dijelaskan pada bagian 2.3.2. diatas.

2.6. Matriks Adjoin

Matriks adjoin adalah transpose dari matriks kofaktor. Transpose sendiri adalah proses menukar nilai i dan j pada elemen-elemen matriks yang bersangkutan sehingga posisi elemen pun ikut berubah.

2.7. Kaidah Crammer

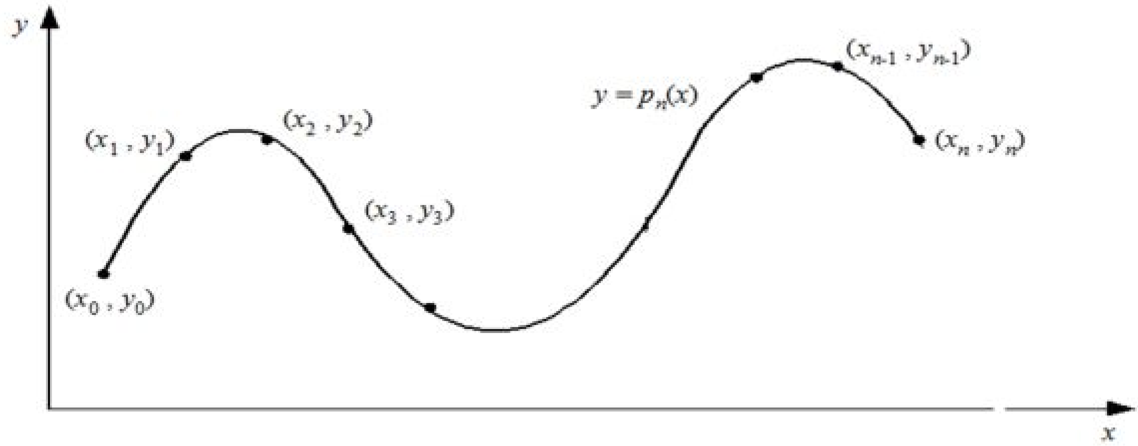
Jika Ax = b adalah SPL yang terdiri dari n persamaan linier dengan n peubah (variable) sedemikian sehingga det(A) 0, maka SPL tersebut memiliki solusi yang unik yaitu

$x_1 = \frac{det(A1)}{det(A)}$ hingga x_n

dimana $det(A_1)$ adalah determinan dari matriks yang diperoleh dengan mengganti entri pada kolom ke1 dari A dengan entri dari matriks b.

2.8. Interpolasi Polinom

Interpolasi polinom adalah metode yang digunakan untuk memprediksi nilai. Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan n+1 buah titik berbeda, (x0, y0), (x1, y1), ..., (xn, yn). Tentukan polinom pn(x) yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga yi = pn(xi) untuk i = 0, 1, 2, …, n.



Setelah polinom interpolasi pn(x) ditemukan, pn(x) dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di sembarang titik di dalam selang [x0, xn].

Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik (x0, y0),(x1, y1), ..., (xn, yn). adalah berbentuk pn(x) = a0 + a1x + a2x 2 + … + anx n. Dengan menyulihkan (xi, yi) ke dalam persamaan polinom pn(x) = a0 + a1x + a2x 2 + … + anx n untuk i = 0, 1, 2, …, n, akan diperoleh n buah sistem persamaan lanjar dalam a0, a1, a2, …, an sebagai berikut

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n &= y_1 \\ \ldots \qquad\qquad & \ldots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n &= y_n \end{aligned}$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini, yaitu nilai a0, a1, …, an, diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

2.9. Regresi Linier Berganda

Regresi Linear (akan dipelajari lebih lanjut di Probabilitas dan Statistika) merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Meskipun sudah ada rumus jadi untuk menghitung regresi linear sederhana, terdapat rumus umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap βi dapat digunakan Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \quad + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \quad + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \quad &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 \quad + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} &= \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad & \quad \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{2i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 \quad &= \sum_{i=1}^{n} x_{ki} y_i
\end{aligned}
$$

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

BAB III

IMPLEMENTASI PROGRAM

Program pada Java diimplementasikan dalam struktur kelas beserta atribut objek dan *method* pada kelas tersebut. Program yang kami rancang terdiri dari sebuah kelas Matriks yang memiliki berbagai objek dan *method* untuk melakukan operasi operasi yang diinginkan pada kelas Matriks dan kelas MatriksDriver yang secara garis besar berfungsi untuk menjalankan program matriks yang diinginkan menggunakan atribut dan method pada kelas Matriks. Pada MatriksDriver akan ditampilkan pilihan menu, yaitu :

1. Penyelesaian SPL
    - Metode Eliminasi Gauss
    - Metode Eliminasi Gauss-Jordan
    - Metode Matriks Balikan
    - Kaidah Cramer
2. Hitung Determinan
    - Metode reduksi baris
    - Metode ekspansi kofaktor
3. Matriks Balikan
    - Metode Eliminasi Gauss-Jordan
    - Menggunakan determinan dan adjoin
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linear berganda

Selain memilih setiap menu di atas, user juga dapat memilih metode input data elemen matriks yang diinginkan, yaitu bisa menggunakan input dari keyboard atau dari file '.txt'.

Kelas Matriks terdiri dari sebuah objek M berupa array dua dimensi, KolEf dan BrsEf yang menyatakan banyaknya kolom dan baris yang digunakan pada M, BrsMin dan KolMin yang menyatakan indeks dari baris dan kolom pertama yang digunakan array dua dimensi M. Kemudian juga didefinisikan object Scanner untuk membaca input user. Konstruktor Matriks didefinisikan pada 'Matriks()' dan 'Matriks(nbrs,nklm)'. Disini kami menggunakan 2 konstruktor untuk disesuaikan dengan kebutuhan penggunaan kelas matriks ini sendiri. Konstruktor 'Matriks()' digunakan untuk membuat sebuah kelas Matriks yang ingin dideklarasikan berupa matriks kosong terlebih dahulu dan diisi disesuaikan dengan kebutuhan nantinya. Sedangkan konstruktor Matriks(nbrs,nklm) digunakan untuk membuat sebuat kelas Matriks yang sudah terdefinisi memiliki sebuah array 2 dimensi dengan banyak baris dan kolom berturut-turut nbrs dan nklm.

Selain konstruktor, juga terdapat method selektor, yaitu GetFirstIdxBrs(), GetLastIdxBrs(), GetFirstIdxKol(), GetLastIdxKol(), Elmt(int idxbrs, int idxkol) pada kelas Matriks. Sedangkan untuk *assignment* nilai elemen digunakan *method* SetElmt(idxbrs,idxkol, val).

Penyelesaian sistem persamaan linear pada program dilakukan dengan 5 metode yang dapat dipilih oleh user. Metode pertama adalah metode Gauss, yang dijalankan oleh dengan memanggil method splGauss() pada objek matriks di kelas MatriksDriver. Implementasi method splGauss() adalah dengan menjalankan proses pada method ForwardPhase(), LeadingOne(), menyimpan solusi hasil BackSubs() pada sebuah array 'solusi', dan menampilkan solusi tersebut dengan method printsolusispl(solusi). Metode kedua adalah dengan menggunakan splGaussJordan() yang mirip dengan splGauss, hanya saja ditambahkan method BackwardPhase() sebelum dilakukan BackSubs().

Selain penggunaan dua metode tersebut, juga terdapat metode splMatriksBalikan() dan splCramer() untuk penyelesaian SPL. Method splMatriksBalikan() digunakan dengan terlebih dahulu mencari invers matriks A pada matriks Augmentasi persamaan Ax=B dengan meninjau terlebih dahulu ukuran A sudah berbentuk matriks persegi atau belum. Jika terdapat invers matriks yang juga ditandai dengan determinan tidak sama dengan 0, maka akan ditentukan jenis solusi SPL dan solusi SPL tersebut. Sedangkan metode splCramer dilakukan dengan menggunakan prinsip metode cramer untuk penentuan solusi.

Untuk pencarian nilai determinan dilakukan dengan dua pilihan cara. Pertama dengan menggunakan reduksi baris dengan memanfaatkan method ForwardPhase() lalu melakukan manipulasi untuk menghitung determinan. Kedua dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor.

Pencarian Invers juga dilakukan dengan dua pilihan cara, yaitu menggunakan metode reduksi baris dan menggunakan determinan dan adjoin. Pencarian invers dengan metode reduksi baris akan memanfaatkan metode Gauss-Jordan yaitu dengan memanggil kembali method ForwardPhase(), LeadingOne(), dan BackwardPhase() pada matriks Augmented dari matriks yang ingin dicari nilai inversnya dengan matriks satuan (A|I) seukuran matriks tersebut. Setelah membentuk matriks eselon baris tereduksi akan dilihat apakah matriks yang terbentuk adalah augmentasi dari matriks satuan dan matriks awal (I| A^{-1}), jika iya, maka akan diambil bagian matriks augmented yang terletak setelah matriks satuan, namun jika tidak dikeluarkan output matriks tidak memiliki invers. Sedangkan pencarian invers dengan determinan dan adjoin dilakukan dengan mencari kofaktor matriks, melakukan transpos sehingga membentuk adjoin, lalu membagi dengan skalar nilai determinan matriks dengan memanfaatkan method untuk menghitung nilai determinan yang telah dibuat sebelumnya.

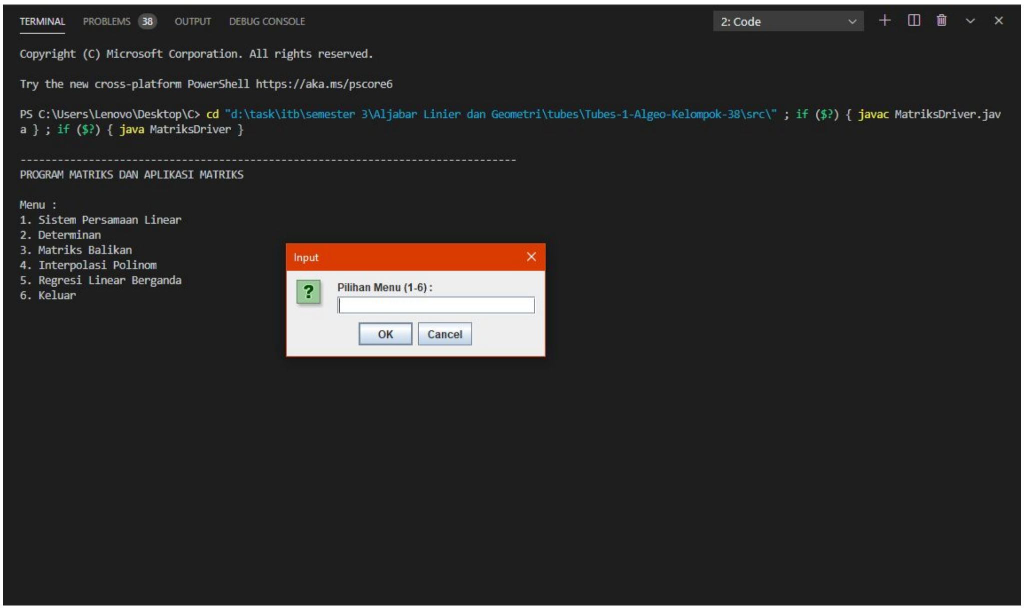
Dalam realisasi program menghitung interpolasi, kami membuat sebuah method khusus yaitu Interpolasi(). Setelah menerima input titik x dan y, dilakukan terlebih dahulu deklarasi dan pengisian nilai matriks yang merupakan koefisien dari sistem persamaan linear untuk penyelesaian interpolasi. Setelah itu, akan dilakukan penyelesaian sistem persamaan linear dengan memanggil method splGaussJordan() dan ditampilkan persamaan interpolasi yang koefisiennya merupakan hasil penyelesaian sistem persamaan linear tersebut. Berikutnya akan dilakukan perhitungan nilai taksiran terhadap titik sesuai input user dengan memanfaatkan solusi spl yang telah didapat sebelumnya.

Realisasi program regresi linear ganda dilakukan dalam sebuah method khusus, yaitu regresilinearganda(). Dalam prosesnya, akan dilakukan terlebih dahulu pembacaan banyak variabel peubah x dan banyak data yang ingin diinput serta menyimpannya ke dalam sebuah matriks. Berikutnya, akan dilakukan perhitungan untuk mendapat *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* yang akan disimpan ke dalam matriks augmented. Dari matriks ini akan dipanggil method splGauss() untuk mendapat solusi dari sistem persamaan linear tersebut. Berikutnya, akan diminta input dari user berupa nilai variabel peubah yang akan ditaksir, menyimpan input ke sebuah matriks, lalu menampilkan persamaan regresi linear ganda yang terbentuk berdasarkan solusi spl, serta hasil taksiran dari perhitungan persamaan tersebut setelah disubstitusi dengan nilai-nilai dari variabel peubah yang ingin ditaksir.

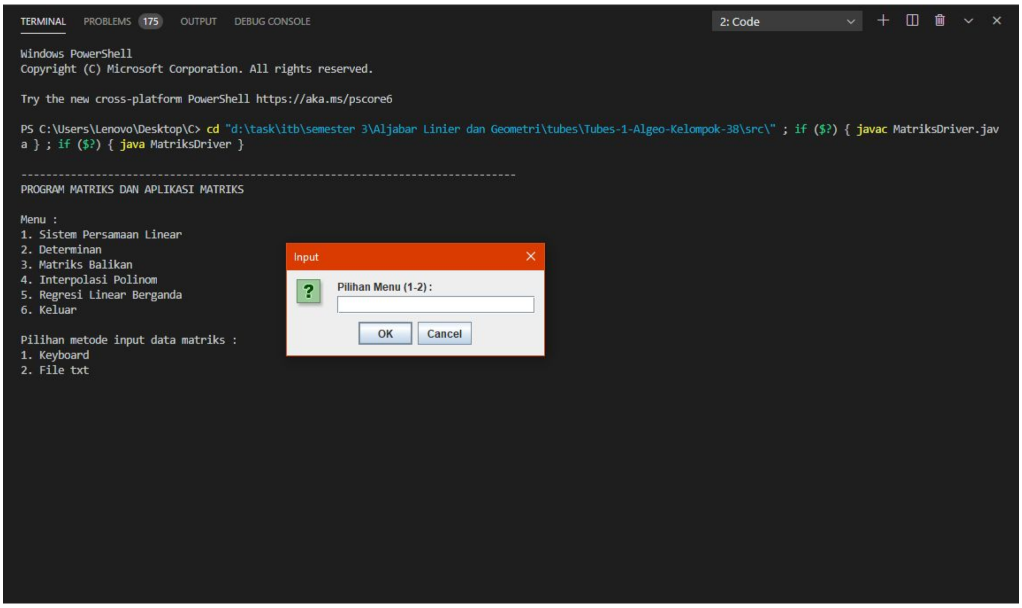
BAB IV

EKSPERIMEN

Berikut ini tampilan program ketika dijalankan

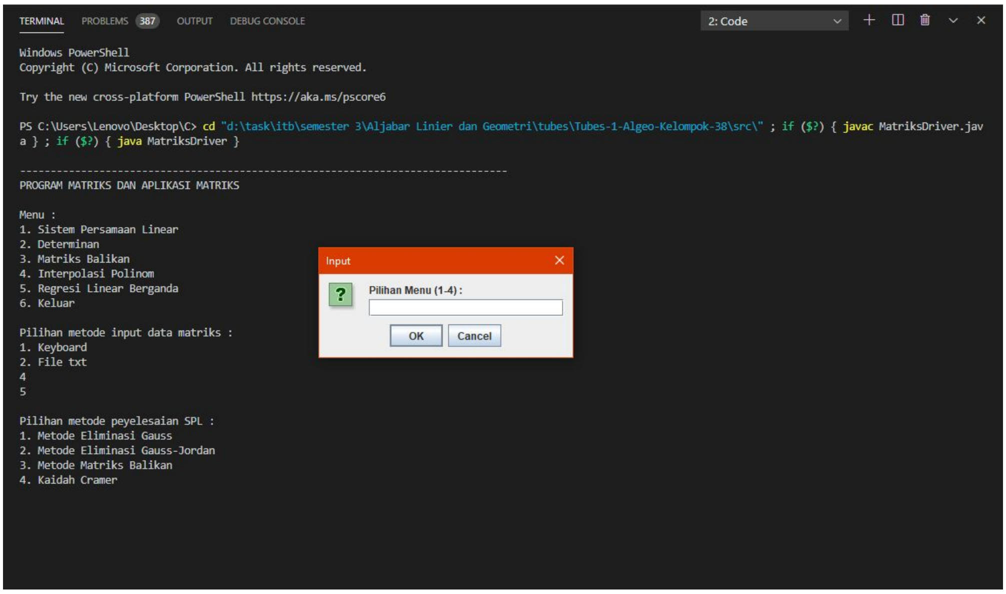


Setelah memilih menu, maka muncul pilihan metode untuk menginput data



4.1. Pengecekan Solusi SPL Ax=b

Penyelesaian SPL terdiri dari beberapa metode seperti yang terlihat pada program berikut



4.1.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Solusi matriks tersebut

```
Sistem Persamaan Linear tidak memiliki penyelesaian.
```

Dibuktikan dengan hasil matriks yg didapat dari metode eliminasi Gauss-Jordan

```
0.000    1.000    0.000    -2.667    0.000
0.000    0.000    1.000    -1.000    0.000
0.000    0.000    0.000    0.000     1.000
```

dimana terdapat baris yang semua koefisien variabel nya 0, tetapi memiliki hasil yang tidak nol.

4.1.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solusi matriks tersebut berupa

```
x1 = 3.0+1.0t
x2 = 2.0t
x3 = 1.0s
x4 = -1.0+1.0t
x5 = 1.0t
Dengan r,s,t bilangan real.
```

Apabila menggunakan metode eliminasi gauss akan didapat matriks

```
1.000    -1.000    0.000    0.000    1.000    3.000
0.000    2.000     0.000    -3.000   -1.000   3.000
0.000    0.000     0.000    2.500    -2.500   -2.500
0.000    0.000     0.000    0.000    0.000    0.000
```

menggunakan metode eliminasi gauss-jordan didapat matriks

```
1.000    -1.000    0.000    0.000    1.000    3.000
0.000    2.000     0.000    -3.000   -1.000   3.000
0.000    0.000     0.000    2.500    -2.500   -2.500
0.000    0.000     0.000    0.000    0.000    0.000
```

dimana terdapat baris yang semua koefisien variabel hingga hasilnya bernilai 0, sehingga solusi dalam bentuk parameter.

4.1.3.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solusi matriks tersebut berupa

```
x1 = 1.0r
x2 = 1.0-1.0t
x3 = 1.0s
x4 = -2.0-1.0t
x5 = 1.0+1.0t
x6 = 1.0t
Dengan r,s,t bilangan real.
```

Dimana hasil menggunakan metode eliminasi Gauss adalah matriks

```
0.000    1.000    0.000    0.000    1.000    0.000    2.000
0.000    0.000    0.000    1.000    1.000    0.000    -1.000

0.000    0.000    0.000    0.000    1.000    -1.000   1.000
```

dan hasil menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan adalah matriks

```
0.000    1.000    0.000    0.000    0.000    1.000    1.000
0.000    0.000    0.000    1.000    0.000    1.000    -2.000

0.000    0.000    0.000    0.000    1.000    -1.000   1.000
```

dimana terlihat ada kolom-kolom yang seluruh elemen nya bernilai 0 sehingga variabel kolom tersebut diberikan dalam bentuk parameter.

4.1.4.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

dimana H adalah matriks Hilbert.

Untuk n = 6 akan didapat solusi

```
Sistem Persamaan Linear memilikisebuah solusi unik.
x1 = 55.71554
x2 = -766.36005
x3 = 2496.38468
x4 = -2085.75268
x5 = -1116.99999
x6 = 1447.66666
```

dimana nilai tidak sama persis dikarenakan dalam proses penginputan, diperlukan nilai desimal sehingga nilai tidak tepat 1/n.

Sedangkan untuk n = 10 akan didapat solusi

```
Sistem Persamaan Linear memilikisebuah solusi unik.
x1 = -118.80751
x2 = 2454.70478
x3 = -11619.51182
x4 = 18675.51553
x5 = -6300.88888
x6 = -8308.5185
x7 = 7855.6111
x8 = -6402.5
x9 = 3679.0
x10 = 105.66665
```

dengan analisis sama seperti n = 6.

4.2. Pengecekan Solusi SPL berbentuk Matriks Augmented

4.2.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Didapat solusi

```
x1 = -1.0+1.0t
x2 = 2.0s
x3 = 1.0s
x4 = 1.0t
Dengan s,t bilangan real.
```

Jika menggunakan metode eliminasi Gauss, didapat matriks sebagai berikut

```
1.000    -1.000    2.000    -1.000    -1.000
0.000    3.000    -6.000    0.000    0.000
0.000    0.000    0.000    0.000    0.000
0.000    0.000    0.000    0.000    0.000
```

dimana terdapat baris yang seluruh elemen nya bernilai 0 sehingga solusi diberikan dalam bentuk parameter.

4.2.2. b

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Didapatkan solusi

```
Sistem Persamaan Linear memilikisebuah solusi unik.
x1 = 0.0
x2 = 2.0
x3 = 1.0
x4 = 1.0
```

dimana jika menggunakan metode eliminasi Gauss didapat matriks

```
1.000    -1.000    2.000    -1.000    -1.000
0.000    1.000    -2.000    0.000    0.000
0.000    0.000    0.000    0.000    0.000
0.000    0.000    0.000    0.000    0.000
```

dimana terdapat baris yang seluruh elemen nya bernilai 0 sehingga solusi diberikan dalam bentuk parameter.

4.3. Pengecekan Solusi SPL berbentuk Persamaan

1. SPL berbentuk persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Didapatkan solusi unik

```
Sistem Persamaan Linear memilikisebuah solusi unik.
x1 = -0.22433
x2 = 0.18243
x3 = 0.70945
x4 = -0.25807
```

2. SPL berbentuk persamaan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}
$$

Didapatkan hasil

```
Sistem Persamaan Linear tidak memiliki penyelesaian.
```

apabila menggunakan metode eliminasi Gauss akan didapat matriks

```
1.000    1.000    1.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    8.000
0.000    1.000    3.657    1.000    3.657    1.000    3.657    1.000    0.000    57.240
0.000    0.000    1.000    0.000    1.000    17.491    1.000    17.491    14.318    344.916
0.000    0.000    0.000    1.000    1.000    1.000    0.000    0.000    0.000    15.000
0.000    0.000    0.000    0.000    1.000    -896966.000    -30696.000    -927663.500    -764940.000    -17522739.500
0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    1.000    0.034    1.034    0.853    19.536
0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    1.000    1.000    1.000    13.000
0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    1.000    -47258.000    -236291.800
0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    1.000    5.000
0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    1.000
0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    1.000
0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    0.000    1.000
```

dimana terdapat baris yang semua koefisien variabel nya 0, tetapi memiliki hasil yang tidak nol.

4.4. Studi Kasus : Interpolasi

Dengan menyusun kesepuluh persamaan diatas didapatkan sistem persamaan linier sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
&i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0\\
&- i_{52} + i_{65} - i_{54} = 0\\
&- i_{32} + i_{43} = 0\\
&i_{54} - i_{43} = 0\\
&i_{32} R_{32} \quad V_2 - V_3 = 0\\
&i_{43} R_{43} + V_3 - V_4 = 0\\
&i_{65} R_{65} + V_5 = V_6\\
&i_{12} R_{12} + V_2 = V_1\\
&i_{54} R_{54} + V_4 - V_5 = 0\\
&i_{52} R_{52} + V_2 - V_5 = 0
\end{aligned}
$$

Tentukan nilai dari:

$$i_{12},\ i_{52},\ i_{32},\ i_{65},\ i_{54},\ i_{13},\ V_2,\ V_3,\ V_4,\ V_5$$

bila diketahui

$$
\begin{aligned}
&R_{12} = 5 \text{ ohm}, \quad R_{52} = 10 \text{ ohm}, \quad R_{32} = 10 \text{ ohm}\\
&R_{65} = 20 \text{ ohm}, \quad R_{54} = 15 \text{ ohm}, \quad R_{14} = 5 \text{ ohm.}\\
&V_1 = 200 \text{ volt}, \quad V_6 = 0 \text{ volt.}
\end{aligned}
$$

Didapatkan solusi, yaitu:

```
Sistem Persamaan Linear memiliki sebuah solusi unik.
x1 = 6.95653
x2 = -5.21741
x3 = -1.73911
x4 = -6.95653
x5 = -1.73911
x6 = -1.73911
x7 = 165.21734
x8 = 147.82619
x9 = 139.13061
x10 = 113.04389
```

```
Masukkan derajat polinom interpolasi : 4
a1 = -19.99999
a2 = 9.08333
a3 = -0.74166
a4 = 0.02666
a5 = -3.3E-4
p4(x) = -19.99999 + 9.08333x - 0.74166x^2 + 0.02666x^3 - 3.3E-4x^4
Masukkan nilai X yang ingin ditaksir : 200
Hasil taksiran polinom interpolasi yaitu : 185410.266
```

4.5. Interpolasi

Mencari polinom interpolasi dari tabel. Program menerima masukan nilai x yang akan dicari nilai fungsi f(x).

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0. 148	0.248	0.370	0.518	0.697

Dari tabel nilai x dan fungsi f(x) diperoleh polinom berderajat 6. Hasil taksiran didasarkan pada perhitungan polinom yang terdapat pada layar. Perhitungan ini menggunakan pembulatan 5 angka di belakang koma.

4.5.1. x = 0.2

Berikut adalah hasil taksiran untuk x = 0.2.

```
Masukkan derajat polinom interpolasi : 6
a1 = -0.02308
a2 = 0.24189
a3 = 0.18708
a4 = 0.0255
a5 = -0.00598
a6 = 0.01974
a7 = -0.00472
p6(x) = -0.02308 + 0.24189x + 0.18708x^2 + 0.0255x^3 - 0.00598x^4 + 0.01974x^5 - 0.00472x^6
Masukkan nilai X yang ingin ditaksir : 0.2
Hasil taksiran polinom interpolasi yaitu : 0.03298
```

4.5.2. x = 0.55

Berikut adalah hasil taksiran untuk x = 0.55.

```
Masukkan derajat polinom interpolasi : 6
a1 = -0.02308
a2 = 0.24189
a3 = 0.18708
a4 = 0.0255
a5 = -0.00598
a6 = 0.01974
a7 = -0.00472
p6(x) = -0.02308 + 0.24189x + 0.18708x^2 + 0.0255x^3 - 0.00598x^4 + 0.01974x^5 - 0.00472x^6
Masukkan nilai X yang ingin ditaksir : 0.55
Hasil taksiran polinom interpolasi yaitu : 0.17124
```

4.5.3. x = 0.85

Berikut adalah hasil taksiran untuk x = 0.85.

```
Masukkan derajat polinom interpolasi : 6
a1 = -0.02308
a2 = 0.24189
a3 = 0.18708
a4 = 0.0255
a5 = -0.00598
a6 = 0.01974
a7 = -0.00472
p6(x) = -0.02308 + 0.24189x + 0.18708x^2 + 0.0255x^3 - 0.00598x^4 + 0.01974x^5 - 0.00472x^6
Masukkan nilai X yang ingin ditaksir : 0.85
Hasil taksiran polinom interpolasi yaitu : 0.33898
```

4.5.4. x = 1.28

Berikut adalah hasil taksiran untuk x = 1.28.

```
Masukkan derajat polinom interpolasi : 6
a1 = -0.02308
a2 = 0.24189
a3 = 0.18708
a4 = 0.0255
a5 = -0.00598
a6 = 0.01974
a7 = -0.00472
p6(x) = -0.02308 + 0.24189x + 0.18708x^2 + 0.0255x^3 - 0.00598x^4 + 0.01974x^5 - 0.00472x^6
Masukkan nilai X yang ingin ditaksir : 1.28
Hasil taksiran polinom interpolasi yaitu : 0.6983
```

4.6. Polinom Interpolasi

Menggunakan data dibawah ini dengan memanfaatkan polinom interpolasi untuk melakukan prediksi jumlah kasus Covid-19 pada tanggal-tanggal berikut.

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus
24/04/20	4,800	8.211
30/04/20	5,000	10.118
16/05/20	5,516	17.025
22/05/20	5,710	20.796
15/06/20	6,500	39.294
06/07/20	7,194	64.958
03/08/20	8,097	113.134
08/08/20	8,258	123.503
01/09/20	9,033	177.571
10/09/20	9,333	145.510

Dengan tanggal desimal merupakan hasil dari perhitungan berikut.

1. 25/05/20

   Perhitungan tanggal desimal, yaitu 5,806.

```
Masukkan derajat polinom interpolasi : 9
a1 = -3.5057410213497E8
a2 = 3.169008137917E8
a3 = -9.020558760479E7
a4 = -4778656.42444
a5 = 9379622.96459
a6 = -2643520.12849
a7 = 384398.82503
a8 = -32035.76175
a9 = 1455.96883
a10 = -28.10246
p9(x) = -3.5057410213497E8 + 3.169008137917E8x - 9.020558760479E7x^2 - 4778656.42444x^3 + 9379622.96459x^4 - 2643520.12849x^
5 + 384398.82503x^6 - 32035.76175x^7 + 1455.96883x^8 - 28.10246x^9
Masukkan nilai X yang ingin ditaksir : 5.806
Hasil taksiran polinom interpolasi yaitu : 2.1071010386982E8
```

2. 30/08/20

tanggal(desimal) = bulan + (tanggal / jumlah hari pada bulan tersebut)

   Perhitungan tanggal desimal, yaitu 8,968.

```
2
Masukkan derajat polinom interpolasi : 9
a1 = -3.5057410213497E8
a2 = 3.169008137917E8
a3 = -9.020558760479E7
a4 = -4778656.42444
a5 = 9379622.96459
a6 = -2643520.12849
a7 = 384398.82503
a8 = -32035.76175
a9 = 1455.96883
a10 = -28.10246
p9(x) = -3.5057410213497E8 + 3.169008137917E8x - 9.020558760479E7x^2 - 4778656.42444x^3 + 9379622.96459x^4 - 2643520.12849x^
5 + 384398.82503x^6 - 32035.76175x^7 + 1455.96883x^8 - 28.10246x^9
Masukkan nilai X yang ingin ditaksir : 8.968
Hasil taksiran polinom interpolasi yaitu : 1.054416497375681E10
```

3. 15/09/20

   Perhitungan tanggal desimal, yaitu 9,500.

```
Masukkan derajat polinom interpolasi : 9
a1 = -3.5057410213497E8
a2 = 3.169008137917E8
a3 = -9.020558760479E7
a4 = -4778656.42444
a5 = 9379622.96459
a6 = -2643520.12849
a7 = 384398.82503
a8 = -32035.76175
a9 = 1455.96883
a10 = -28.10246
p9(x) = -3.5057410213497E8 + 3.169008137917E8x - 9.020558760479E7x^2 - 4778656.42444x^3 + 9379622.96459x^4 - 2643520.12849x^
5 + 384398.82503x^6 - 32035.76175x^7 + 1455.96883x^8 - 28.10246x^9
Masukkan nilai X yang ingin ditaksir : 9.500
Hasil taksiran polinom interpolasi yaitu : 1.771162930790785E10
```

4. Masukan user bebas (10/10/20)
   Perhitungan tanggal desimal, yaitu 10,322.

```
Masukkan derajat polinom interpolasi : 9
a1 = -3.5057410213497E8
a2 = 3.169008137917E8
a3 = -9.020558760479E7
a4 = -4778656.42444
a5 = 9379622.96459
a6 = -2643520.12849
a7 = 384398.82503
a8 = -32035.76175
a9 = 1455.96883
a10 = -28.10246
p9(x) = -3.5057410213497E8 + 3.169008137917E8x - 9.020558760479E7x^2 - 4778656.42444x^3 + 9379622.96459x^4 - 2643520.12849x^
5 + 384398.82503x^6 - 32035.76175x^7 + 1455.96883x^8 - 28.10246x^9
Masukkan nilai X yang ingin ditaksir : 10.322
Hasil taksiran polinom interpolasi yaitu : 3.737519781518881E10
```

4.7. Polinom Interpolasi Derajat N

Menyederhanakan fungsi dengan polinom interpolasi derajat n di dalam selang [0, 2]. Sebagai contoh, jika n = 5, maka titik-titik x yang diambil di dalam selang [0, 2] berjarak h = (2 – 0)/5 = 0.4.

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

```
Petunjuk:
Jumlah baris : derajat + 1
Jumlah baris : 2
Masukkan banyak baris matriks : 6
Masukkan banyak kolom matriks : 2
Masukkan Elemen Matriks Baris 1 Kolom 1 : 0
Masukkan Elemen Matriks Baris 1 Kolom 2 : 0
Masukkan Elemen Matriks Baris 2 Kolom 1 : 0.4
Masukkan Elemen Matriks Baris 2 Kolom 2 : 0.41888423
Masukkan Elemen Matriks Baris 3 Kolom 1 : 0.8
Masukkan Elemen Matriks Baris 3 Kolom 2 : 0.50715
Masukkan Elemen Matriks Baris 4 Kolom 1 : 1.2
Masukkan Elemen Matriks Baris 4 Kolom 2 : 0.5609247
Masukkan Elemen Matriks Baris 5 Kolom 1 : 1.6
Masukkan Elemen Matriks Baris 5 Kolom 2 : 0.58368566
Masukkan Elemen Matriks Baris 6 Kolom 1 : 2
Masukkan Elemen Matriks Baris 6 Kolom 2 : 0.57665153
Masukkan derajat polinom interpolasi : 5
a1 = 0.0
a2 = 2.03562
a3 = -3.55463
a4 = 3.24013
a5 = -1.42309
a6 = 0.23663
p5(x) =  + 2.03562x - 3.55463x^2 + 3.24013x^3 - 1.42309x^4 + 0.23663x^5
Masukkan nilai X yang ingin ditaksir : 0
Hasil taksiran polinom interpolasi yaitu : 0.0
```

Dengan menggunakan titik titik berjarak h=5 diperoleh persamaan polinom berderajat 5 sebagaimana fungsi p5(x) di atas. Untuk menguji coba apakah polinom interpolasi ini benar, dicoba untuk menghitung kembali taksiran untuk nilai 0 yang ternyata sama dengan f(0) pada fungsi awal.

4.8. Regresi Linear Berganda

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

Menggunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* untuk mendapatkan regresi linear berganda dari data pada tabel diatas, kemudian estimasi nilai Nitrous Oxide apabila Humidity bernilai 50%, temperatur 76°F dan tekanan udara sebesar 29.30.

```
Input nilai-nilai x yang ingin ditaksir nilai fungsinya
Masukkan nilai x1 : 50
Masukkan nilai x2 : 76
Masukkan nilai x3 : 29.3

Persamaan regresi linear:
y =0.42551 - 0.00323x1 + 6.0E-4x2 + 0.02176x3

Hasil taksiran fungsi : 0.94767
```

Nilai yang ditampilkan sebagai koefisien variabel dan konstanta pada persamaan regresi yang dihasilkan merupakan hasil pembulatan 5 angka di belakang koma dengan menggunakan teknik Nearest Even Rounding. Begitu juga dengan hasil taksiran. Selain itu, galat hasil perhitungan juga disebabkan karena pengoperasian floating point pada metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan linear ini.

BAB V

KESIMPULAN

5.1. Kesimpulan

Program java ini dapat menghitung solusi persamaan linier dengan metode Gauss, Gauss-Jordan, Invers, dan Cramer. Program ini juga dapat mencari invers matriks persegi dengan syarat determinan tidak sama dengan 0. Dengan memanfaatkan metode sebelumnya program juga dapat diperoleh determinan, interpolasi, dan regresi linier berganda suatu fungsi. Program tersebut juga terbukti dapat menjawab kasus-kasus permasalahan yang disediakan.

5.2. Saran

Dari metode-metode yang digunakan, yang dirasa paling sederhana adalah metode eliminasi Gauss, karena untuk metode-metode lain menggunakan lebih banyak method/fungsi dan bahkan ada metode yang menggunakan hasil dari eliminasi Gauss sehingga pasti memakan waktu run lebih lama. Saran untuk pembuatan program berikutnya sebaiknya mencari juga runtime agar dapat diketahui metode mana yang paling sederhana dan efektif.

Kemudian perlu diteliti lebih lanjut untuk metode interpolasi. Perlu dibuat kesepakatan mengenai pembulatan masukan ataupun kesepakatan masukan yang ada untuk meminimalisasi galat.

5.3. Refleksi

Pembagian kerja sudah ditentukan diawal, tetapi antar anggota tidak merasa keberatan membantu apabila ditemukan kesulitan. Sudah ada anggota yang mengerjakan sejak tanggal 20 September 2020, dan beberapa anggota tim baru aktif mengerjakan pada tanggal 26 September 2020. Jangka waktu mengerjakan sudah dirasa cukup, tapi lebih baik lagi apabila lebih diperpanjang agar hasil lebih optimal.

DAFTAR REFERENSI

1. https://people.math.aau.dk/~ottosen/MMA2011/rralg.html
2. https://docs.oracle.com/javase/7/docs/api/java/math/BigDecimal.html
3. https://docs.oracle.com/javase/7/docs/api/java/text/DecimalFormat.html#:~:text=Class%20DecimalFormat&text=DecimalFormat%20is%20a%20concrete%20subclass,%2C%20Arabic%2C%20and%20Indic%20digits.