БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Методы численного анализа
Лабораторная работа №2
"Метод стрельбы решения граничной задачи ОДУ"

работу выполнил
Малыщик Аким Андреевич
студент 3 курса 3б группы

научный руководитель
ассистент кафедры вычислительной математики
Горбачёва Юлия Николаевна

2021 г.

Постановка задачи

Найти численное решение граничной задачи методом стрельбы с шагом $0.01h$. Для численного решения задач Коши использовать явный метод трапеций. Сравнить найденное численное решение с точным решением $u(x)$, т.е. найти $max|u(x_i) - y_i|$.

В одной системе координат построить график функции $u(x)$ и график полученного численного решения.

Граничная задача

$$\begin{cases} u'' + \frac{3x}{x^2+1}u' - \frac{2}{x^2+1}u = -\frac{4x^2+8}{(x^2+1)^3} \\ 5u(0.5) = 8 \\ 3u(1) + 2u'(1) = 1 \end{cases}$$

Точное решение

$$u(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

In [1]:
```python
def f(x):
    return -((4 * x ** 2 + 8) / ((x ** 2 + 1) ** 3))


def p(x):
    return (3 * x) / (x ** 2 + 1)


def g(x):
    return -2 / (x ** 2 + 1)


def correct_solution(x):
    return 2 / (x ** 2 + 1)
```

Краткая теория, реализация метода

Линейный метод стрельбы

Рассмотрим первую задачу Коши:

$$\begin{cases} u_0''(x) + p(x)u_0'(x) + g(x)u_0(x) = f(x) \\ \alpha_0 u_0(a) + \beta_0 u_0'(a) = \gamma_0, \end{cases}$$

где α_0 и β_0 не обращаются в ноль одновременно. В нашем случае $\alpha_0 = 5 \neq 0$. Берём пристрелочный параметр $\eta_0 = u'(a)$, подстановкой во второе уравнение системы выше получаем, что

$$u(a) = \frac{\gamma_0 - \beta_0\eta_0}{\alpha_0}, \text{ в нашем случае } \beta_0 = 0 \Rightarrow u(a) = \frac{8}{5}.$$

Аналогично, рассмотрим вторую задачу Коши

$$\begin{cases} u_1''(x) + p(x)u_1'(x) + g(x)u_1(x) = 0 \\ \alpha_1 u_1(a) + \beta_1 u_1'(a) = 0, \end{cases}$$

где α_1 и β_1 не обращаются в ноль одновременно. При пристрелочном параметре $\eta_1 = u'(a)$ получаем

$$u(a) = \frac{-\beta_0\eta_1}{\alpha_0}, \text{ в нашем случае } \beta_0 = 0 \Rightarrow u(a) = 0.$$

Решая задачи Коши, получаем u_0 и u_1 для левого граничного условия. Теперь найдём C, удовлетворяющее правому граничному условию, чтобы получить решение в виде $u = u_0 + C \cdot u_1$. Подставим это в правое граничное условие:

$$\alpha_1(u_0(b) + Cu_1(b)) + \beta_1(u_0'(b) + Cu_1'(b)) = \gamma_1,$$

откуда

$$C = \frac{\gamma_1 - \alpha_1 u_0(b) - \beta_1 u_0'(b)}{\alpha_1 u_1(b) + \beta_1 u_1'(b)}.$$

Задачи Коши будем решать явным методом трапеций.

Явный метод трапеций

Введём замену $v = u'$ (избавимся таким образом от второй производной).

$$\begin{cases} u' \equiv v \\ v' \equiv f(x) - p(x)v - g(x)u \end{cases}$$

Тогда $(j+1)$-ое приближение функции методом трапеций находится из системы:

$$\begin{cases} u_{j+1} = u_j + \frac{\tau}{2} \cdot (v_j + (v_j + \tau k_1)) \\ v_{j+1} = v_j + \frac{\tau}{2} \cdot (k_1 + k_2) \\ u_0 = u(a) \\ v_0 = u'(a), \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} k_1 = f(x_j) - p(x_j)v_j - g(x_j)u_j \\ k_2 = f(x_{j+1}) - p(x_{j+1})(v_j + \tau k_1) - g(x_{j+1})(u_j + \tau v_j) \end{cases}$$

In [2]:
```python
def trapezium(x_j, u_j, v_j, tau, b, is_u0):
    """Реализация явного метода трапеций"""
    while x_j <= b:
        k1 = f(x_j) * int(is_u0) - p(x_j) * v_j - g(x_j) * u_j
        k2 = f(x_j + tau) * int(is_u0) - p(x_j + tau) * (v_j + tau * k1) - g(x_j + tau) * (u_j + tau *
 v_j)
        u_j += tau * (v_j + (v_j + tau * k1)) / 2
        v_j += tau * (k1 + k2) / 2
        x_j += tau
    return u_j, v_j


def get_c():
    a_1, b_1, g_1 = 3, 2, 1
    u_0_b, v_0_b = trapezium(x_j=0.5, u_j=8/5, v_j=0.5, tau=0.01, b=1, is_u0=True)
    u_1_b, v_1_b = trapezium(x_j=0.5, u_j=0, v_j=0.5, tau=0.01, b=1, is_u0=False)
    return (g_1 - a_1 * u_0_b - b_1 * v_0_b) / (a_1 * u_1_b + b_1 * v_1_b)


def pif_paf(x, c):
    """Реализация метода стрельбы"""
    u_0, v_0 = trapezium(x_j=0.5, u_j=8/5, v_j=0.5, tau=0.01, b=x, is_u0=True)
    u_1, v_1 = trapezium(x_j=0.5, u_j=0, v_j=0.5, tau=0.01, b=x, is_u0=False)
    return u_0 + c * u_1
```

Оценка точности метода

In [3]:
```python
import numpy as np


c = get_c()
x = np.arange(0.5, 1.01, 0.01)
correct = np.array([correct_solution(t + 0.01) for t in x])
shooting = np.array([pif_paf(t, c) for t in x])

print(f'max abs delta: {max(abs(correct - shooting)): .3e}')
```

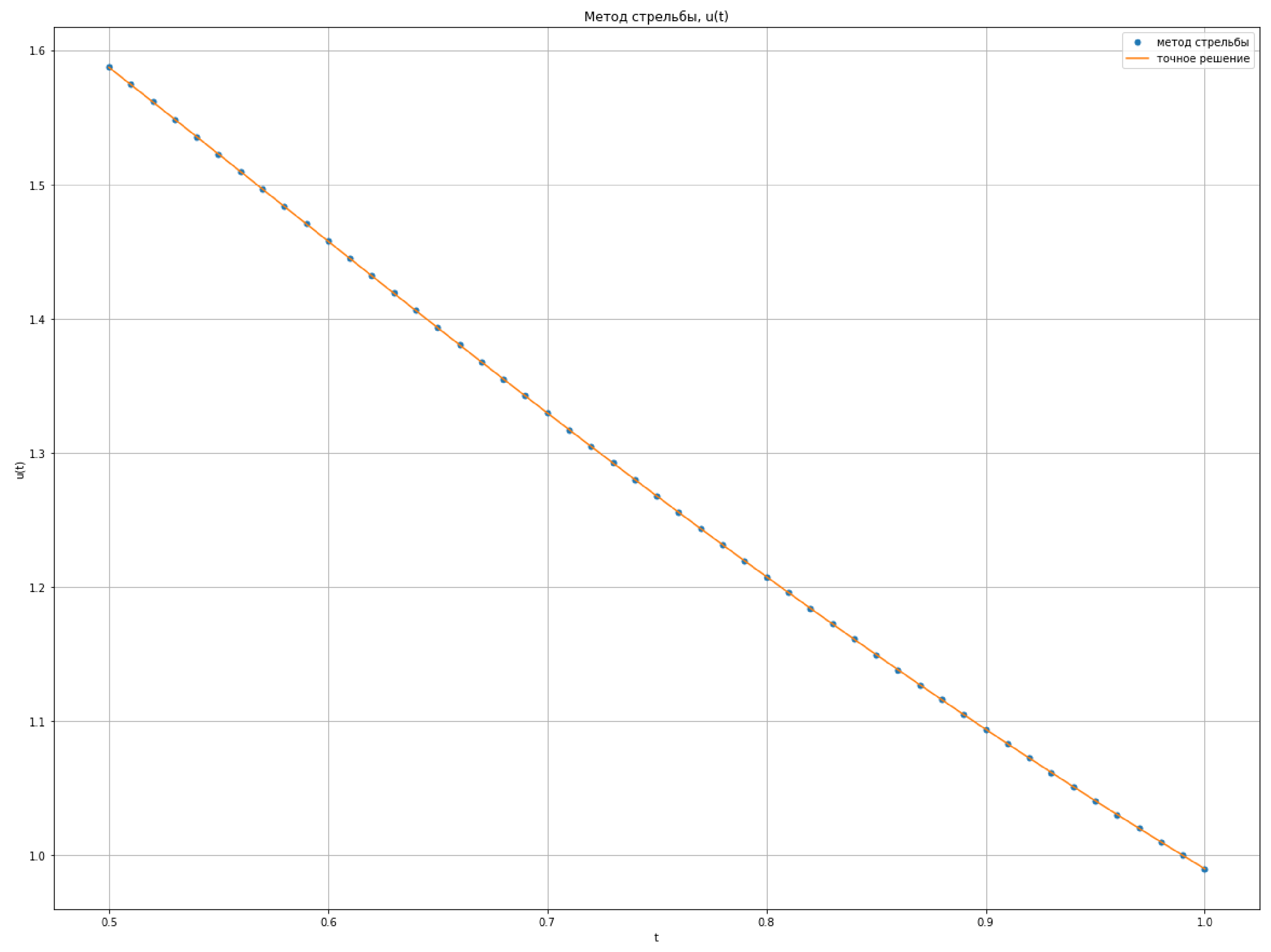
```
max abs delta:  8.039e-06
```

График явного метода трапеций рядом с точным решением

In [4]:
```python
from matplotlib import pyplot as plt


fig, ax = plt.subplots(figsize=(20, 15))
ax.plot(x, shooting, '.', label='метод стрельбы', markersize=10)
ax.plot(x, correct, label='точное решение')

ax.set_xlabel('t')
ax.set_ylabel('u(t)')
ax.set_title('Метод стрельбы, u(t)')
ax.grid()
ax.legend()
plt.show()
```



Выводы

Линейный метод стрельбы — достаточно эффективный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, требующий решения всего двух задач Коши и обеспечивающий адекватную точность приближённого решения.