Приближённое решение задачи о рюкзаке

Акимова Ольга

24 июня 2023 г.

1 Постановка задачи

Имеется набор из n предметов. У каждого предмета есть положительный вес w и неотрицательная стоимость c. Также дано неотрицательное число W - вместимость рюкзака. Требуется найти такое множетсво предметов M, чтобы они помещались в рюкзак, и суммарная стоимость предметов была максимальна. То есть

$$\sum_{x \in M} c(x) \to \max$$

$$\sum_{x \in M} w(x) \leq W$$

2 Асимптотика и точность

Алгоритм решает задачу за $O(\frac{n^3}{\varepsilon})$ с точностью $(1-\varepsilon)$, то есть $OUTPUT \geq (1-\varepsilon) * OPT$

3 Решение

1. Обозначим за $K = \frac{\varepsilon * \max(c)}{n}$
2. Введём *сокращённые стоимости* $c' = \lfloor \frac{c}{K} \rfloor$
3. Задачу со сокращёнными стоимостями решим стандартным динамическим программированием: $dp[i][cost]$ - минимальный вес для достижения стоимости $cost$ из множества первых i предметов
4. Ответ - сумма реальных стоимостей в найденном оптимальном наборе предметов

Асимптотика такого решения $O(n^2 \max c') = O(n^2 \max \lfloor \frac{c}{K} \rfloor) = O(n^2 * \lfloor \frac{n \max c}{\varepsilon * \max(c)} \rfloor) = O(n^2 * \lfloor \frac{n}{\varepsilon} \rfloor)$

4 Доказательство точности

Пусть S - найденный набор предметов, максимизируюший сокращённые стоимости, M - оптимальный набор для исходной задачи.
Утв. $OUTPUT = \sum_{x \in S} c(x) \geq (1-\varepsilon) \sum_{x \in M} c(x) = (1-\varepsilon) OPT$

S - оптимальный набор для решения задачи со сокращёнными весами, значит

$$\sum_{x \in S} c(x) \geq K * \sum_{x \in S} c'(x) \geq K * \sum_{x \in M} c'(x)$$

Так как $c(x) - K * c'(x) < K$, $\sum_{x \in M} c(x) - K * \sum_{x \in M} c'(x) < nK$:

$$K * \sum_{x \in M} c'(x) > \sum_{x \in M} c(x) - nK$$

Так как $\sum_{x \in M} c(x) \geq \max(c)$:

$$\sum_{x \in M} c(x) - nK = \sum_{x \in M} c(x) - \varepsilon \max c \geq (1-\varepsilon) \sum_{x \in M} c(x)$$

5 Список литературы

Vazirani, V. Approximation Algorithms, Springer, 2001