MAGNITUDES ESCALARES

`Resumen`: Las Magnitudes Escalares son magnitudes escalares invariantes que conservan su valor y forma bajo transformaciones de traslación y rotación, o cambios entre sistemas de coordenadas (Cartesianas, polares, esféricas, etc.)

I. Definiciones

0. Magnitudes Vectoriales

La posición vectorial ($\vec{r}_{ij}$), la velocidad vectorial ($\vec{v}_{ij}$), y la aceleración vectorial ($\vec{a}_{ij}$) de dos partículas i y j están dadas por:

Magnitud Vectorial	Definición	Derivación
Posición ($\vec{r}_{ij}$)	$\vec{r}_{ij} \doteq (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$	(*Definición fundamental*)
Velocidad ($\vec{v}_{ij}$)	$\vec{v}_{ij} \doteq (\vec{v}_i - \vec{v}_j)$	$\vec{v}_{ij} \doteq d(\vec{r}_{ij})/dt$
Aceleración ($\vec{a}_{ij}$)	$\vec{a}_{ij} \doteq (\vec{a}_i - \vec{a}_j)$	$\vec{a}_{ij} \doteq d^2(\vec{r}_{ij})/dt^2$

1. Magnitudes Escalares

La posición escalar (τ_{ij}), la velocidad escalar ($\dot{\tau}_{ij}$), y la aceleración escalar ($\ddot{\tau}_{ij}$) de dos partículas i y j están dadas por:

Magnitud Escalar	Definición	Derivación
Posición (τ_{ij})	$\tau_{ij} \doteq \frac{1}{2}\vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}$	(*Definición fundamental*)
Velocidad ($\dot{\tau}_{ij}$)	$\dot{\tau}_{ij} \doteq \vec{v}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}$	$\dot{\tau}_{ij} \doteq d(\tau_{ij})/dt$
Aceleración ($\ddot{\tau}_{ij}$)	$\ddot{\tau}_{ij} \doteq \vec{a}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} + \vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij}$	$\ddot{\tau}_{ij} \doteq d^2(\tau_{ij})/dt^2$

II. Demostraciones de Invarianza Escalar

0. Transformaciones Vectoriales (Absolutas)

La posición vectorial ($\vec{r}_i'$), la velocidad vectorial ($\vec{v}_i'$) y la aceleración vectorial ($\vec{a}_i'$) de una partícula i con respecto a un Sistema de Referencia S', cuyo origen O' está en la posición vectorial $\vec{r}_{O'}$ con respecto a otro Sistema de Referencia S, están dadas por:

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_{O'}$$

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{O'} - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{O'})$$

$$\vec{a}_i' = \vec{a}_i - \vec{a}_{O'} - 2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{v}_{O'}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{O'})) - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{O'})$$

Donde $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$, y $\vec{a}_i$ son la posición, velocidad y aceleración vectoriales de la partícula i con respecto al Sistema S; y $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ son la velocidad angular y la aceleración angular del Sistema S' con respecto al Sistema S.

Nota

Si $\vec{m}_i' = \vec{n}_i$ entonces:

$$\frac{d(\vec{m}_i')}{dt} = \frac{d(\vec{n}_i)}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{n}_i$$

1. Invarianza de la Posición Escalar (τ_{ij})

La Posición Escalar τ_{ij} es invariante bajo rotación y traslación porque la magnitud del vector relativo se preserva.

$\tau_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

$\tau'_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{r}'_i - \vec{r}'_j) \cdot (\vec{r}'_i - \vec{r}'_j)$

Dado que $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = (\vec{r}'_i - \vec{r}'_j)$

Porque $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{O'}$ y $\vec{r}'_j = \vec{r}_j - \vec{r}_{O'}$

(El vector de posición relativa es independiente del origen del Sistema.)

$\tau'_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

Por lo tanto: $\tau'_{ij} = \tau_{ij}$

2. Invarianza de la Velocidad Escalar ($\dot{\tau}_{ij}$)

La Velocidad Escalar $\dot{\tau}_{ij}$ es invariante porque el producto cruz generado por la velocidad angular ($\vec{\omega}$) es perpendicular al vector de posición relativa, resultando en un producto escalar cero.

$\dot{\tau}_{ij} = (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

$\dot{\tau}'_{ij} = (\vec{v}'_i - \vec{v}'_j) \cdot (\vec{r}'_i - \vec{r}'_j)$

$\dot{\tau}'_{ij} = ((\vec{v}_i - \vec{v}_j) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

Dado que $(-\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0$

(El término rotacional es ortogonal al vector de posición relativa.)

Porque $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0$ (Propiedad del Triple Producto Escalar)

$\dot{\tau}'_{ij} = (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

Por lo tanto: $\dot{\tau}'_{ij} = \dot{\tau}_{ij}$

3. Invarianza de la Aceleración Escalar ($\ddot{\tau}_{ij}$)

La Aceleración Escalar $\ddot{\tau}_{ij}$ es invariante porque los términos inerciales (Aceleración Angular, Coriolis y Centrífuga) se anulan mutuamente debido a las propiedades de los productos vectoriales y escalares.

$\ddot{\tau}_{ij} = (\vec{a}_i - \vec{a}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) + (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j)$

$\ddot{\tau}'_{ij} = (\vec{a}'_i - \vec{a}'_j) \cdot (\vec{r}'_i - \vec{r}'_j) + (\vec{v}'_i - \vec{v}'_j) \cdot (\vec{v}'_i - \vec{v}'_j)$

$\ddot{\tau}'_{ij} = [(\vec{a}_i - \vec{a}_j) - 2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{v}_j) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)) - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)] \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

$+ [(\vec{v}_i - \vec{v}_j) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)] \cdot [(\vec{v}_i - \vec{v}_j) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)]$

Dado que $-(\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0$ (El término de aceleración angular se anula)

Porque $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0$ (Propiedad del Triple Producto Escalar)

Dado que $-2\,(\vec{\omega}\times(\vec{v}_i-\vec{v}_j))\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_j)-2\,(\vec{v}_i-\vec{v}_j)\cdot(\vec{\omega}\times(\vec{r}_i-\vec{r}_j))=0$ (Los términos de Coriolis se anulan)

Porque $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ (Propiedad de Permutación Cíclica del Triple Producto Escalar)

Dado que $+\,(\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times(\vec{r}_i-\vec{r}_j)))\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_j)+(\vec{\omega}\times(\vec{r}_i-\vec{r}_j))\cdot(\vec{\omega}\times(\vec{r}_i-\vec{r}_j))=0$ (Los términos Centrífugos se anulan)

Dado que $+\vec{P}\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_j)+E=0$

Porque $\vec{P}=\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\;\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\;\vec{C}$ (Triple Producto Vectorial)

Porque $E=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{A}\cdot\vec{A})\;(\vec{B}\cdot\vec{B})-(\vec{A}\cdot\vec{B})^2$ (Identidad de Lagrange)

$\ddot{\tau}'_{ij}=(\vec{a}_i-\vec{a}_j)\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_j)+(\vec{v}_i-\vec{v}_j)\cdot(\vec{v}_i-\vec{v}_j)$

Por lo tanto: $\ddot{\tau}'_{ij}=\ddot{\tau}_{ij}$

III. Relaciones Fundamentales

Las magnitudes escalares $(\tau_{ij}, \dot{\tau}_{ij}, \ddot{\tau}_{ij})$ expresadas con magnitudes radiales (r_{ij}), magnitudes polares (r_{ij}), magnitudes cilíndricas (r_{ij}), magnitudes circulares (r_{ij}) y magnitudes esféricas (r_{ij}), están dadas por:

Magnitud Radial: $\tau_{ij}=\frac{1}{2}r_{ij}^2$

Magnitud Radial: $\dot{\tau}_{ij}=r_{ij}\dot{r}_{ij}$

Magnitud Radial: $\ddot{\tau}_{ij}=r_{ij}\ddot{r}_{ij}+\dot{r}_{ij}^2$

Magnitud Polar: $\tau_{ij}=\frac{1}{2}r_{ij}^2$

Magnitud Polar: $\dot{\tau}_{ij}=r_{ij}\dot{r}_{ij}$

Magnitud Polar: $\ddot{\tau}_{ij}=r_{ij}\ddot{r}_{ij}+\dot{r}_{ij}^2$

Magnitud Cilíndrica: $\tau_{ij}=\frac{1}{2}r_{ij}^2$

Magnitud Cilíndrica: $\dot{\tau}_{ij}=r_{ij}\dot{r}_{ij}$

Magnitud Cilíndrica: $\ddot{\tau}_{ij}=r_{ij}\ddot{r}_{ij}+\dot{r}_{ij}^2$

Magnitud Circular: $\tau_{ij}=\frac{1}{2}r_{ij}^2$

Magnitud Circular: $\dot{\tau}_{ij}=r_{ij}\dot{r}_{ij}$

Magnitud Circular: $\ddot{\tau}_{ij}=r_{ij}\ddot{r}_{ij}+\dot{r}_{ij}^2$

Magnitud Esférica: $\tau_{ij}=\frac{1}{2}r_{ij}^2$

Magnitud Esférica: $\dot{\tau}_{ij}=r_{ij}\dot{r}_{ij}$

Magnitud Esférica: $\ddot{\tau}_{ij}=r_{ij}\ddot{r}_{ij}+\dot{r}_{ij}^2$

IV. Bibliografía

[1] **A. Torassa**, Una Terna de Ecuaciones Invariantes, (2014). (PDF)

[2] **A. Torassa**, Una Reformulación de la Mecánica Clásica, (2014). (PDF)

[3] **A. Tobla**, Magnitudes Lineales, Radiales y Escalares, (2015). (PDF)

[4] **A. Tobla**, Una Reformulación de la Mecánica Clásica, (2024). (PDF)