1 国士無双の多次元流体

流体の期限は３月まで

しけたい４　(多分私が作るのよね。)

1　リポジトリ・オブ・流体

ここで緊急ニュースです

現場の暴食幽霊さん！

先ほど入りました情報によると、この番組の開始時に何者かにナイフで刺された吸血鬼のおうちの門番、名前はえーっと・・・・が、出血多量により帰らぬ人になった模様です。

勝手に殺さないでください。

でもって、私の名前は・・・・

ぎゃーーーーーーーー。幽霊だ。
いやいや、幽霊なんているわけないじゃない。ようはそっくりさんね。こういうドッキリがあるなんて聞いてなかったわよ。

ひ、酷い。こうなったら、私が私であると信じてもらうためにも流体のシミュレーション方法を説明するしかないですね。画面の前の皆さん、耳かっぽじって聞いてください。

2　流体でよくお目にかかる式

あ、門番の幽霊。

ち、違います。幽霊でもそっくりさんでもありません。今からそれを証明するために流体シミュレーションの説明をしますので、聞いていってください。

くすん、解ったわ。流体のシミュレートが気になって成仏できないのね。私が相手するわ・・・

・・・・

流体の偏微分方程式の意味の説明の詳細は省きます。流体の方程式は主に**流速**と**圧力**で構成されます。流体を考える時に、よく流速が満たすべきとされる[*1]条件は覚えていますか？

連続した値をとる

保存則が成り立つ

この二つよ。

これを流速 u の式に書き直すと

$(\frac{\partial u}{\partial t})_i + (u \cdot grad\ u_i) = 0$

$div\ u = 0$

となります。流体でよく見る式、その 1 はこの 2 つです。

可愛そうに。まだ成仏できないのね。次に**粘性の影響**を取り入れるわ。天下り的ですが、粘性の影響は以下のようにして取り入れればいいの。

$(\frac{\partial u}{\partial t})_i + (u \cdot grad\ u_i) = \nu \triangle u$

$div\ u = 0$

これが流体でよくみる式その 2。後で差分法や有限要素法でシミュレートしようね。

最後に**圧力の影響**を取り入れます。これまた天下り的ですが、以下のように取り入れます。

$(\frac{\partial u}{\partial t})_i + (u \cdot grad\ u_i) = -\frac{1}{\rho}(grad\ p)_i + \nu \triangle u$

$div\ u = 0$

ρ は密度 p が圧力です。これが流体でよくみる式その 3 です。第一目標としてこのシミュレートができるようになりましょう。

[*1] 相対論的流体力学とかでは連続とかは満たすとは限らないらしい。

3　擬似粘性を取り入れた差分法によるシミュレート

『上流差分などを取り入れた云々』を理解するために、ちょっと簡単な流体シミュレートの式を考えてみましょう。以下の式は**バーガーズ方程式**と呼ばれています。

$a\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}u$

u の定義域：$[0,1]$、$u(0)=0, u(1)=1$

ようは、連続の条件を無視した、1 次元の定常状態の波です。先ほど紹介した式の簡易版ですね。境界条件はあくまで一例です。

何事もなかったかのように差分近似を行えばいいわ

$\frac{\partial u(x_i)}{\partial x} = \frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2\Delta x}$

$\frac{\partial^2 u(x_i)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{(\Delta x)^2}$

何事もなかったかのように差分近似の結果を先ほどの式に影響させれば

$a\frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2\Delta x} = \nu\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{(\Delta x)^2}$

となります。$\frac{a\Delta x}{2\nu} \equiv P$ とすると、

$u_i = \frac{1}{2}\{(1-P)u_{i+1} + (1+P)u_{i-1}\}$

となってくれます。

P が 1 より大きい場合、u_i は振動してしまう可能性があるわ。そんなときのために 1 次近似を書き直しちまえばいいわ。ちまえばってなによ。ちまえばって。

$\frac{\partial u(x_i)}{\partial x} = \frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{\Delta x}$

こうすることで何が起こるか、それはっ・・・・・

くそっ、キテレツの展開が気になってしょうがない。

ブタゴリラの恋は実るのかっ！　実るのだけど。確か。

$\frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{\Delta x} = \frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2\Delta x} - \frac{1}{2}\Delta x\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$

この右辺は最初に行った差分近似に比べて、粘性項が ν から $\nu + \frac{1}{2}\Delta x$ になります。この近似を用いた場合、$a > 0$ なら、ν 絶対値が増え、P の絶対値が減るので、振動解が生じるのを防ぐことが出来ます。P の定義からして、必ず P の絶対値は 1 より小さくなりますね。

$a < 0$ の場合は、同様に 1 次の偏微分を、

$\frac{\partial u(x_i)}{\partial x} = \frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{\Delta x}$

とすれば良いわ。これでも粘性項が増やせるわね。

先ほどは a と定数にしましたが、もうちょっと凝った式の形、
$u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}u$
を解くなら 2 次の部分の差分近似はそのままで、1 次の部分はこうすれば良いです。
$\frac{\partial u(x_i)}{\partial x} = \frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{\Delta x}(u > 0)$
$\frac{\partial u(x_i)}{\partial x} = \frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{\Delta x}(u < 0)$
まあ、u の値がわからないので、上手く整合するまで粘る必要があるのですけどね。

4 有限要素法による擬似粘性の取り入れ

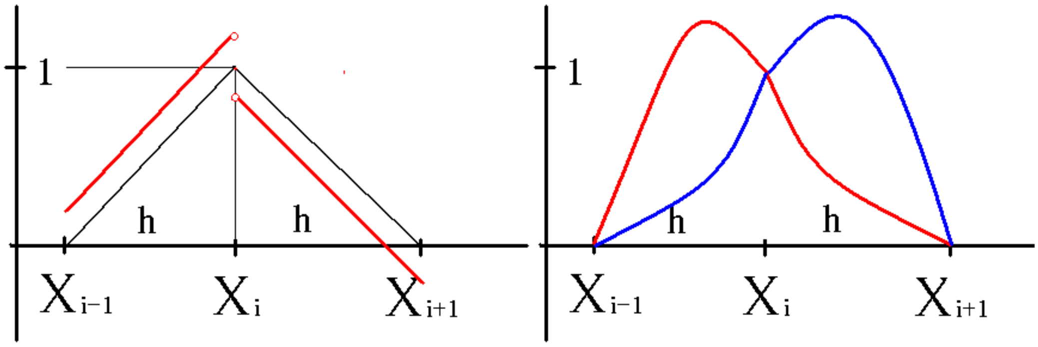
最初にアウトラインだけ解説します。これがよく解らなくても気にしないでください。有限要素法はようは『**固定された関数の線形重ねあわせで物理量を近似する**』、『**未知数である係数を決めるための式を、偏微分方程式に適当な関数を重み付けした式を積分して作る**』わけですね。今までは物理量を ϕ_i の重ねあわせで、重み付け関数を ϕ_i と同じ関数を使っていたわけですが、ここでは重み付け関数を ϕ'_i に変更して擬似粘性を取り入れます。

で、同じ問題を考えるわ。差分法で大体解ったと思うけど、ようは粘性項を擬似的に増えればいいの。ϕ'_i を考えるために粘性項が増えてしまった式
$a\frac{\partial u}{\partial x} = (\nu+\alpha)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u$
を考えます。粘性が α 分だけ増えています。ええ、増えてます。

これに、何事もなかったかのように重みつけ関数をかけて積分します。
$\int(a\frac{\partial u}{\partial x} - (\nu+\alpha)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u)\phi_i dx$
$\quad = \int a\frac{\partial u}{\partial x}(\phi + \frac{\alpha}{a}\frac{\partial \phi}{\partial x}) + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}dx = 0$

粘性項を増やさない場合、つまり $\alpha = 0$ の場合は、同様に ϕ をかけて積分すると
$\int a\frac{\partial u}{\partial x}(\phi) + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}dx = 0$
この二つの式をよく見比べてください。ϕ の形を書き換えれば上の式に書きなおせる予感がしませんか？

上記問題の場合、もともとの ϕ が三角型なら、以下の図のように ϕ' を決めれば、擬似粘性を取り入れることが出来るわ。この形に限らず、下の図のように重み付け関数を不対称にすることで、粘性項をフレキシブルに取り入れられるの。このあたりがフレキシブルに決められる点に於いて有限要素法は優れているわね。



赤線が $a > 0$ に対応した重み関数です。青線は $a < 0$ に対応してます。左の図でなんとなくわかるでしょうけど、右の図のように連続な形にしても擬似粘性を取り入れることが出来ます。言うまでもなく、このときの擬似粘性は一定値にはなりません。が、このようにフレキシブルに粘性項を取り入れることが出来る技術は重要で、様々な重み関数が考えられているようです。

5　差分法で圧力を取り入れた流体シミュレート

いよいよお別れね。最後に一番面倒な流体シミュレートの解き方を説明するわ。
$(\frac{\partial u}{\partial t})_s + (u \cdot grad\ u_s) = -\frac{1}{\rho}(grad\ p)_s + \nu \triangle u$
$div\ u = 0$
を片付けるわ。分点慣れしてないと辛いけど $u(t_k, \vec{r}_i)$ の近似値を u_i^k としておくわ。

最初に一つやっておくことがあるの。$-\frac{1}{\rho}(grad\ p)_s$ を $(grad\ p')_s$ とあらわせるように p' をつくっておいてね。$t = 0$ で p' を作れば、後述の方法では p' を時間にそって更新させていくので、いちいち作り直す必要がなくなるの。以下 p' を p と表記するわ。

さて、差分近似を以下のようにするとラクチンです。$\frac{\tilde{u}_i - u_i^k}{dt} + (u_i^k \cdot grad\ (u_i^k)_s) = -(grad\ p_i^k)_s + \nu \triangle u_i^k$
偏微分方程式を構成する式の時間が全て $t = t_k$ で作られているのがポイントです。$t = t_k$ での物理量は全て与えられているので u^{k+1} は逐一計算すると楽々求められます。ようは『陽的』なわけですね。

が、こいつは大きな問題を抱えています。$div\ u = 0$ を満たしてくれません。そこで、u_i^{k+1} を $\tilde{u}_i$ を補正して求めます。また、p_i^{k+1} も求めなければいけません。問題が多々ありますね♪

これを解決するため以下のように近似するわ。$(\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{dt})_s + (u_i^k \cdot\ grad\ (u_i^k)_s) = -(grad\ p_i^{k+1})_s + \nu \triangle u_i^k$
この式での u_i^{k+1} は $div\ u^{k+1} = 0$ を満たすとするわ。この形は 1 次の精度で偏微分方程式と合致しているわね。しっかり確認してね。

先ほどの式を引き算すれば
$(\frac{u_i^{k+1}-\tilde{u}_i}{dt})_s = -grad\ (p_i^{k+1} - p_i^k)_s$
$-dt(p_i^{k+1} - p_i^k) \equiv \phi$ とすれば
$(u_i^{k+1} - \tilde{u}_i)_s = (grad\ \phi)_s$
両辺を div して
$\nabla(\tilde{u}_i) = -\triangle\phi$

このように、ϕ が満たすべき式が出てきます。ϕ が解れば、u_i^{k+1} も p_i^{k+1} も求められますね。流れをよく見直して覚えてくださいね。

6　有限要素で面倒な流体シミュレート

差分法と有限要素法のエッセンスがわかっているなら解説する必要は全くない！
のだけど、多分もう一回解説したほうがよいのよね。

差分法での式をこんな感じで書き直せばよいです。
$\frac{\tilde{u}(\vec{r})-u^k(\vec{r})}{dt} + (u^k(\vec{r})_i \cdot\ grad\ (u^k(\vec{r}))_s) = -(grad\ p^k(\vec{r}))_s + \nu\triangle u^k(\vec{r})$
え、添え字 i を $(\vec{r})$ にしただけじゃないかって？**そうですよ。**

有限要素法では物理量 $A(\vec{r})$ を
$A(\vec{r}) = \sum A_i\psi_i(\vec{r})$　ψ は既知の関数
と近似して、c_i を求めるメソッドなのですから。上の式で未知なのは $\tilde{u}_i$ なので、式に適当な重み付け関数をかけて積分することで $\tilde{u}_i$ の満たすべき式を作り $\tilde{u}_i$ を求めて、得られた $\tilde{u}(\vec{r})$ から ϕ を求めれば u^{k+1} が求められます。

うう、悲しいけどこれでお別れね。今まで楽しかったわ。

7　CIP 補完による多次元の偏微分方程式

おかしいですね。門番の魂が見当たらないのですが。まあ、慌てずに偏微分方程式の CIP 補完による多次元拡張を考えます。ここでは 2 次元で考えましょう。最終的には
$f^h(x,y)=\sum_{ij}\{f(x_i,y_j)\phi^0_{ij}(x,y)+f_x(x_i,y_j)\phi^{1,x}_{ij}(x,y)+f_y(x_i,y_j)\phi^{1,y}_{ij}(x,y)\}$
と書き直したいわけですね。

基底関数はそれぞれ $x_{i-1}<x<x_{i+1}$、$y_{i-1}<y<y_{i+1}$ でのみ 0 以外の値をとり
$\phi^0_{ij}(x_k,y_l)=\delta_{ik}\delta jl,\quad \frac{\partial}{\partial x,y}\phi^0_{ij}(x_k,y_l)=0$
$\phi^{1,x}_{ij}(x_k,y_l)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\phi^{0,x}_{ij}(x_k,y_l)=\delta_{ik}\delta_{jl},\quad \frac{\partial}{\partial y}\phi^{0,x}_{ij}(x_k,y_l)=0$
$\phi^{1,y}_{ij}(x_k,y_l)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\phi^{0,y}_{ij}(x_k,y_l)=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}\phi^{0,y}_{ij}(x_k,y_l)=\delta_{ik}\delta_{jl}$
を満たす必要があります。

さて、CIP 法でお世話になった基底関数
$\phi^{0,x}_i(x)=1-\frac{3(x-x_i)^2}{h^2}+\frac{2|x-x_i|^3}{h^3}$
$\phi^{1,x}_i(x)=(x-x_i)-|x-x_i|\frac{2(x-x_i)}{h}+\frac{(x-x_i)^3}{h^2}$
を用いて天下り的に解くと

$\phi^0_{ij}(x,y)=\phi^{0,x}_i(x)\phi^{0,y}_j(y)$
$\phi^{1,x}_{ij}(x,y)=\phi^{1,x}_i(x)\phi^{0,y}_j(y)$
$\phi^{1,y}_{ij}(x,y)=\phi^{0,x}_i(x)\phi^{1,y}_j(y)$
h が上記条件を満たすことが解ります。あとは頑張って計算してね♪

にしても・・・魂が見つかりませんね。
あ、ただいま吸血鬼のおうちから緊急入電です。

こちらから送った情報が typo でした。申し訳ありません。「出血多量により帰らぬ人になった」ではなく「出欠多量により帰らぬ人になった」です。ようは仕事サボったりしすぎたせいで解雇になったということです。

え、幽霊じゃないの？
どのみちお別れだけど・・・・・

ぴちゅーん♪・・・