計算機演習　物理応用問題 No.1

金澤　輝代士

2009 年 1 月 1 日

1　初めに

やぁ、新年明けましておめでとう、同士諸君。同士諸君に朗報である。**諸君にお年玉をあげることにした**。今回のお年玉とは、**冬休みにやる計算機演習の宿題だ**。とてもうれしいだろう！ (はーと

で、僕の担当は物理応用問題だ。面白そうな問題を選んどいたから、結構やる気が出ると思う。多分、諸君が知らない内容だと思う。少なくとも理学部物理学科の課程では習わない内容だ。だから本当は、諸君が理論的内容を知ってから計算機でシュミレーションする方がいいかもしれない。その方が理論的背景がわかる。少なくとも今までの課程ではそうしてきた。だけど、逆の考え方もあると思う。研究者は理論を知らない段階から、面白い現象を見て考え始める。今回のように、理論を知らない段階からシミュレーションすれば、研究者と同じように新鮮な気持ちで現象を見ることができるのではないだろうか。少なくとも、僕は新鮮な気持ちでシミュレーションできた。新しい分野に興味がもてた。諸君にもその新鮮な気持ちを味わってもらいたいから、ここにこの問題を贈る。[*1] ちなみに、今回のテーマは**カオス**だ。これを機に、カオスを勉強し始めてくれたら嬉しいなぁ。さぁ、いってみよー！！Σ (ドナルド風に

2　カオス系

同士諸君、カオスとはなんだろうか？正直、よくわからないよな。僕もよくわからない。ただ、よく聞かされている内容とは、**決定論なんだが、初期値に敏感すぎて計算による予測が極めて短時間しかできない系**ということだと思う。だが、多分、言葉の上でわかっても、抽象的でよくわからないんじゃないかなぁ。僕は少なくともはっきりとはわからない。では、実際にそれを調べてみようじゃないか。本当にそんな変な性質が物理学の簡単な方程式から出てくるのか？疑わしいじゃないか。百聞は一見にしかずだ。

そこで、次のような方程式を考える。

$$x_{n+1} = 4rx_n(1 - x_n)$$

これは**ロジスティック写像**と呼ばれる式らしい。なんでも、人口増加の様子を表す漸化式だとか。どこが人口増加を表すかだって？それは次のような考えによるらしい。

世代 n の人口を P_n として表そう。このとき、理想的には、次の世代には定数倍になるだろう。つまり、

$$P_{n+1} = aP_n$$

である。しかし、当然増加が理想的に続くわけはない。何故なら、人口が増えると疫病がはやったり、食料がなくなったり、戦争が起こったり、人口増加はとまらざるを得ないからだ。そこで、人口を一定以上増えない様にする為に、次のように漸化式を修正しよう。

$$P_{n+1} = P_n(a - bP_n)$$

そして、スケール変換を行う。$x_n = \frac{b}{a}P_n, a = 4r$ とすると、ロジスティック方程式が得られる。また、以下では $0 \leq r \leq 1, 0 \leq x_0 \leq 1$ の範囲でこの式を扱うことにする。

[*1] ちなみに断っておくが、僕はカオスを勉強していないから、ここに詳しいカオスの理論を展開することはできない。細かいところは間違っているかもしれない。そこら辺は自分で詳しく勉強してくれ。ちなみに、今回の内容は**計算物理学入門**(ピアソン・エデュケーション社 ハーベイ・ゴールド/ジャン・トボチニク著 鈴木増雄 監訳) を参考にした。だから、基本的に正しいとは思う ZE!

3 ロジスティック方程式の性質

さて、同士諸君にはこのロジスティック方程式で戯れていただくわけだが、戯れるにあたって、どんなことを調べたら面白いかを、ヒントとして教授してやろう。カオスの特徴として、主に次のようなものがある。

・1・周期倍化
・2・初期値鋭敏性

ロジスティック方程式の唯一のパラメータは r と初期値 x_0 である。この r と初期値 x_0 だけで全てが決まってしまうわけだが、n を大きくすると大体の初期値で同じ値に集まっていくので、**実質のパラメータは r のみである**。つまり、r で性質が決まるのだが、次のような 4 つの領域で全く違った挙動を示す。

・1・$0 \leq r < 0.25$
・2・$0.25 < r < 0.75$
・3・$0.75 < r < r_\infty$
・4・$r_\infty < r < 1$

ちなみに、1、2 領域では収束し、3 では振動する。しかも、振動は r が大きくなるにつれて周期が倍倍になっていく。4 はカオス領域であり、初期値に関して鋭敏に反応する。本当にそうなるかだって？自分で調べろ。ググれカス。このゆとりめが。それこそがこの課題だっつーの。では、早速の問題だ。

4 問題

・1・

r の値を 0 から 1 まで変化させて x の収束した値を調べよ。初期値は $x_0 = 0.5$ とせよ。ただし、領域 1 , 2 では収束していたものが領域 3 では振動し始める。そのときは、振動している値を調べよ。[*2]また、領域 4 ではカオス領域になり、無茶苦茶に振動し始めるので、その値を大体で記録すればよい。[*3]そして、最後に横軸を r, 縦軸を x の収束値 (振動値) にして、グラフでプロットして様子を見なさい。提出にあたっては、ソースファイル、グラフを提出すればよい。また、収束したとみなせる n は 1000 くらいにすればよい。つまり、最初の 1000 個の値を捨てて、それからの値を記録すればよい。[*4]

・2・

周期を上と同じ感じで調べろ。この問題も、ソースファイル、グラフともに提出すること。

[*2] 例えば,$1 \to 2 \to 1 \to 2 \to \ldots$ となっていれば、1,2 を r とともに記録する。
[*3] 僕が模範解答を作る際は 500 点くらい記録した。
[*4] ところで、$y = 1 - \frac{1}{4r}$ という曲線を引いてみてくれ。これをどう思う？すごく...

・3・

カオス領域での初期値鋭敏性を調べよ。調べ方としては、領域４から適当に r とごく近い二つの初期値を選んで、それらの計算結果が 10% ずれるのにどれくらいの n が必要かを調べればよい。これはソースファイルと、計算結果の n をテキストファイルに記録して提出すればよい。