しけぷり

某しけたい 4

2008 年 11 月 10 日

▷もくじ◁

1 魅力的なCIP法

出張版

しけたい４　(えーりんえーりん)

1　御挨拶

どうも、お久しぶりですしけたい４の代理です。今回は偏微分方程式の数値解法の最終回、CIP 法のレジュメをお送りいたします。しけたい４からの要望にこたえてちょっと宣伝。

このシケプリは**八雲トリオで８×3=24時間テレビ**の出張版です。本編では私とニートとホームレスの不死身トリオにキモい妖怪を加えた４人によるもうちょっと深く掘り進んだ偏微分とかの解説を予定しています。

無断転載は禁止しています。
レポートの内容の正しさは完全には保障できません
間違い気付きましたら教えてください
この顔アイコンはみょふ～会様からのお借り物です

ネタが長い
出来が悪い

え、ネタはやらないのかって？
もちろんやりますよ。それではお楽しみください♪

2　弔天才

うわあああああん。薬師ぃいいい
**　どうして死んじゃったんだよぉおおお**

誰が死んだって。誰が。
まったく、RPG に知人の名前を入れるのはやめなさいって言ったでしょ？

解らない人のために解説：
こいつ勇者

こいつ賢者

こいつ魔法使い

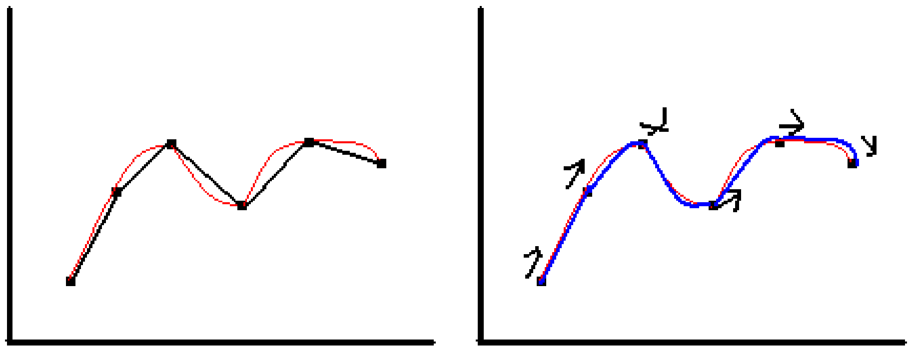
こいつ戦士

魔王はこんな顔

3 CIP 法のエッセンス

ぐふっ、回復アイテムに毒キノコを食べてしまったわ。いいこと、私のいうことを聞いて CIP 法で傷口を解析するのよ。もし私がへばったら弟子の魔法使いがどうにかするわ・・・・
今回扱う CIP 法のエッセンスは一言で言い表せるわ。それは、関数の形を計算機に覚えさせるときに、その『値と傾き』を覚えさせるということよ。

例えばこの前扱った有限要素法では
$f(x) = \sum_i f_i \phi_i(x)$ と表した場合、計算機が覚えている関数の形は下のように、線形の補完を行ったものになって居るわね。この形は線形補完に適さないような形、例えば方形波とかを扱うとすぐに誤差が出てしまうの。もし、関数の値と、傾きを覚えていれば、計算機に『今覚えている関数はどんな形？』と訪ねたときに下のように大分マシな形になってくれるわね。



赤線の関数を有限要素法、CIP 法を用いて覚えさせた場合
初期の有限要素法では関数の値のみを覚えていて、線形補完（黒線）で関数の形を予測する
CIP 法では、関数の値と傾きを覚えているので線形補完（青線）が実際の関数に近くなる

さ、さすが薬師。腹に穴が相手も喋れるなんて、パーティーのなかで最も HP が高いだけあるわ
以下、CIP 法のゼミ纏めでは、このエッセンスを取り込んだ計算方法の説明をやって行くわ。扱うのは
・CIP 法のエッセンスを取り込んだ有限要素法
・思いのほか面倒な流体の偏微分方程式を解く

の二つよ。どちらも CIP 法と銘打っているけど、エッセンスの内容以外は別の者と思ってくれてかまわないわ。今後偏微分方程式を解くときに使うのは前者で、後者は流体のみに特化した方法なの。ゼミでは解りにくいと好評だったわ。ちなみにこれを扱うのには CIP 法の歴史が絡んでいたりするわ。

一次の偏微分方程式は実は二次よりも扱いが難しくて（上流、下流差分は誤差が大きく、中央差分だと一般的に誤差が発散する可能性が高いから）流体の扱いってのはそれだけで論文になる程度の難題らしいのよ。で、実は元々 CIP 法は流体を扱うために生まれた方法なの。貴方たちも方法の生まれることとなった、流れくらいは見ておきたいでしょ？実際、CIP 法は流体に対して様々な特別な方法を持っているから、難しくてもじっくり遊んであげてね。

4　CIP 法的有限要素法

傾きを覚えた有限要素法は将来のことを考えると以下のように書けると都合がいいです。
$f(x) = \sum_i f_i \phi_i^{(0)}(x) + f_i' \phi_i^{(1)}(x)$
f_i, f_i' は x_i に於ける f の値と傾きです。

このような形が満たすべき条件は

$\phi_i^{(0)}(x_j) = \delta_{ij}$

$\frac{d\phi_i^{(0)}}{dx}(x_j) = 0$

$\phi_i^{(1)}(x_j) = 0$

$\frac{d}{dx}\phi_i^{(1)}(x_j) = \delta_{ij}$

だ

この形を満たす関数を求めるには二つの方法があって、一つは『都合のいい関数の形を自分で考えて束縛条件から求める』もう一つは『CIP 法の関数補完の概念に従って求める』の 2 通りがある・・・・

ちなみに、前者を使っている文献は特に見つけていないのでしけ 4 オリジナルと考えてもらおうか。

ぎゃあああ！

大魔王が来た。掘られる。掘られちゃうぅ！

4.1 直接求める

来たわね。大魔王。。。

さて、関数の形なのだけど、今までの有限要素法の考え方に従えば $\phi_i^{(0)}, \phi_i^{(1)}$ は $x_{i-1} < x < x_{i+1}$ の中でのみ 0 でない値を取りうると積分する時に楽そうってのは解るかしら？

さらに、関数の形を $\phi_i^{(0)}(x - x_i), \phi_i^{(1)}(x - x_i)$

とすれば、$x = x_{i+1}, x = x_{i-1}$ での条件は関数に $h, -h$ を入れたときの条件になるので、関数が点対称だったり線対称だとすれば、x_i, x_{i+1} の束縛条件を満たすようにうまく作れば、それをちょっと書き換えて x_{i-1} の時の条件も満たせそうね。

説明だけ読んでも解らないかも知れないから、実際にやってみようかしら。二つの点について、束縛条件はそれぞれの値、傾きの 4 つだから、$\phi_i^{(0)}(x - x_i), \phi_i^{(1)}(x - x_i)$ を三次関数として考えるわ。

$\phi_i^{(0)} = \frac{1}{h^3}\alpha_3(x - x_i)^3 + \frac{1}{h^2}\alpha_2(x - x_i)^2 + \frac{1}{h}\alpha_1(x - x_i) + \alpha_0$

として。$(x_i < x < x_{i+1})$

$\alpha_0 = 1$

$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 0$

$\alpha_1 = 0$

$3\alpha_3 + 2\alpha_2 + \alpha_1 = 0$

以上から、
$\phi_i^{(0)} = \frac{2}{h^3}(x-x_i)^3 - \frac{3}{h^2}(x-x_i)^2 + 1$
となるわ。魔王が言っていた条件のうち $x = x_{i-1}$ で満たされるべき条件も、これを書き換えれば求められそうね。ちなみに、
$1 - \frac{3(x-x_i)^2}{h^2} + \frac{2|x-x_i|^3}{h^3}$
になるわ。殆ど絶対値をつけるだけでつじつまがあうわ。

ははは！
貴様一人しか戦えないようではお前らも終わりだな。
さあ、諦めて掘られるがよい！
掘られて永遠の時を悔やむが良い！

まだだ。俺達はまだ負けていない！

同様に
$\phi_i^{(1)} = \frac{1}{h^2}\beta_3(x-x_i)^3 + \frac{1}{h}\beta_2(x-x_i)^2 + \beta_1(x-x_i) + \beta_0$
$\beta_0 = 0$
$\beta_3 + \beta_2 + \beta_1 + h\beta_0 = 0$
$\beta_1 = 1$
$3\beta_3 + 2\beta_2 + \beta_1 = 0$

これらから
$\phi_i^{(1)} = (x-x_i) - |x-x_i|\frac{2(x-x_i)}{h} + \frac{(x-x_i)^3}{h^2}$
となる。まだまだ行くぜえええええ！

アッー！痛恨の一撃っ！！

アッー。戦士が掘られた！

ふむ、それは困った自体だが、運よく CIP 有限要素法はこれで終わりだったりするわ。
ようは任意の関数を $f(x)$ を
$f(x) = \sum_i f_i\phi_i^{(0)}(x) + f_i'\phi_i^{(1)}(x)$
と書き直して偏微分方程式を書き直す。有限要素法のエッセンスがわかっていればもう解るわね？

そして、境界条件と偏微分方程式と $\phi_i^{(0)}, \phi_i^{(1)}$ の内積を用いて未知数を求めるのに必要な数だけの式を取得するわ。具体例はそうね。余裕があったら書こうかしら。

今回は２点の値と一階微分の２個の束縛条件で３次関数を作ったけど、２階微分まで条件に入れて５次関数にしても同じことが出来ます。このあたりがエッセンスだから実際に計算したりしながらよく考えてみてください。

二次元以降も同様よ。
４つの点でやるなら $(x_i, y_k), (x_{i+1}, y_k), (x_i, y_{k+1}), (x_{i+1}, y_{k+1})$ についての値、x 偏微分、y 偏微分を使えば１２個の束縛条件を使えるわ。１２個の項を持つ x, y の対称式を上手く決めて束縛条件を満たす関数を作れば OK ね。

4.2 CIP 法の関数補完の概念を用いて解く

なにやら説明が面倒になってきたわね。参考文献は此方の方法で解いていたけどどうにもこれが CIP 有限要素解析のエッセンスじゃないし。簡単な説明だけでいいかしら？

簡単に言うと
$x_i < x < x_{i+1}$ の間の関数を
$\phi_i(x) = \alpha_3(x - x_i)^3 + \alpha_2(x - x_i)^2 + \alpha_1(x - x_i) + \alpha_0$ として
$\phi_i(x_i) = f_i$
$\phi_i(x_{i+1}) = f_{i+1}$
$\phi_i'(x_i) = f_i'$
$\phi_i'(x_{i+1}) = f_{i+1}'$

を満たす α_i を求めるの。そうして具体的な形で書かれた ϕ_i を $f_i, f_{i+1}, f_i', f_{i+1}'$ で括りなおせば同じ式が得られるわ。後で説明するけど、CIP 法は三次補完からうまれたのよ。初期の CIP の C は（Cubic）の略称だったの。

5 CIP 法で流体と戯れる

ふはははは。物理学科の諸君！
誰から掘られるつもりかね！？

な、なんて酷いネタ。色々と申し訳なくなってきました。時間が無いからってあんまりです。あんまりだから、せめて流体についてくらいは私がわかりやすく解説します。

5.1 楽な流体

流体の代表的な方程式[*1]
$\frac{\partial}{\partial t} f + v \frac{\partial}{\partial x} f = 0$ (v は定数)
から考えます。これはただの関数の平行移動ですね？

はじめの方で師匠が言っていましたが、この手の問題の一番の問題は関数の形を計算機が正確に覚えていないことなのです。上の方の図でいう線形補完の関数なら、ちょっと平行移動したら直ぐに形が崩れてしまうのわかりますね？

この問題を解決するために考えられたのが CIP 法による三次元補完よ。さっきちょっと紹介したけど
$x_i < x < x_{i+1}$ の間の関数を
$\phi_i^j(x) = \alpha_{3(i)}^j (x - x_i)^3 + \alpha_{2(i)}^j (x - x_i)^2 + \alpha_{1(i)}^j (x - x_i) + \alpha_{0(i)}^j$ とするの。

$\phi_i^j(x_i) = f_i^j$
$\phi_i^j(x_{i+1}) = f_{i+1}^j$
$\phi_i^{'j}(x_i) = f_i^{'j}$
$\phi_i^{'j}(x_{i+1}) = f_{i+1}^{'j}$
より α は

$\alpha_{3(i)}^j = 2(f_i^j - f_{i+1}^j)/h^3 + (f_i^{\prime j} + f_{i+1}^{\prime j})/h^2$
$\alpha_{2(i)}^j = 3(f_{i+1}^j - f_i^j)/h^2 - (2f_i^{\prime j} + f_{i+1}^{\prime j})/h$
$\alpha_{1(i)}^j = f_i^{\prime j}$
$\alpha_{0(i)}^j = f_i^j$

こうして、最初に薬師が言ったような関数補完が完成するわ。あとは、これを速度にしたがって平行移動させるだけよ。
f_i^j から f_i^{j+1} を作るだけじゃなくて $f_i^{\prime j+1}$ もしっかり更新するのを忘れないでね。

[*1] 以下、解きたい f 以外の変数は x, t の関数、または定数で与えられているとする

6 実りにくい一般の流体方程式

ちょっと面倒な流体方程式

$\frac{\partial}{\partial t}f + \frac{\partial}{\partial x}(vf) = h$

を考えます。これを解くには二段構造が必要です。

まず、式を書き直して

$\frac{\partial}{\partial t}f + v\frac{\partial}{\partial x}f = h - \frac{\partial v}{\partial x}f$

$h - \frac{\partial v}{\partial x}f \equiv H$

とします。そして、前回解説した方法で

$\frac{\partial}{\partial t}f + v\frac{\partial}{\partial x}f = 0$

の dt 秒後を解きます。手順としては

1．各々の分点での傾き、値を覚える

2．$v(x_i, t_j)$ にしたがって、各々の分点を平行移動させる

3．平行移動された分点の間を CIP 法のメソッドで三次補完する

4．補完された関数の x_i での値、傾きを覚える

です。

こうして求められた近似解を $f_i^*, f_i'^*$ と名づけます。

さて、$\frac{\partial}{\partial t}f$ を差分法近似で書き直すと

$\frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{dt} - \frac{f_i^* - f_i^j}{dt} = H$

となっているわ。このことを利用して

$f_i^{j+1} = f_i^* + Hdt$

となるわ。

さて、

$\frac{\partial}{\partial t}f + v\frac{\partial}{\partial x}f = H$

の両辺を偏微分すると

$\frac{\partial}{\partial t}f' + v\frac{\partial}{\partial x}f' = \frac{\partial}{\partial x}H - \frac{\partial v}{\partial x}f'$

となっているわね。

さて、先ほど座薬が解説したメソッドから $f_i'^*$ は
$\frac{\partial}{\partial t}f' + v\frac{\partial}{\partial x}f' = 0$
であるといえるわ。（此処はちょっと理解が難しいわね。簡単に言えば f と等しく平行移動しているからよ。）

よって
$\frac{f_i'^{j+1}-f_i'^{j}}{dt} - \frac{f_i'^{*}-f_i'^{j}}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}H - \frac{\partial v}{\partial x}f'$
といえます。楽をするために
$\frac{\partial}{\partial x}H = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{f_i^{j+1}-f_i^{j}}{dt} - \frac{f_i^{*}-f_i^{j}}{dt})$
を利用すると・・・

$f_i'^{j+1} = f_i'^{*} + \frac{f_{i+1}^{j+1}-f_{i-1}^{j+1}}{2h} - \frac{f_{i+1}^{*}-f_{i-1}^{*}}{2h} - dt(\frac{\partial v}{\partial x}f_i^{*})$
となるわ。ゼミの内容が間違っていたので要注意。中央差分を用いたのは精度が上がるからよ。平行移動の速度も $v(x_i, t_j)$ としなくても解は得られるの。あくまでも『数あるメソッドの中で計算が楽なもの』であることを忘れないでね。

うーぉうーぉうーぉ

さあ、追い詰めたわよ大魔王！

私と手を組まないか？
世界の半分をおまえにやろう
＞はい
　いいえ

＞はい

貴様の冒険は終わった！

暇な人摩擦ゼミの内容教えてくれ（何