1 計算機の宿題１日目

陽的解法で楽しもう

しけたい４　(ぱーふぇくとなんとか)

1 問１

ヘルムホルツの熱伝導方程式
$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
初期条件 ：$u(x,0) = \sin \pi x$
x の定義域：$[0,1]$
境界条件 ：$u(0,t) = u(1,t) = 0$
の解を求めよ。

1.1 ヒント

教材に書かれているままです。シミュレーション結果と比べるために求めてみましょう。

2 問２

以下の空欄□を埋めよ
x, t の関数 $u(x,t)$ の (x_i, t_j) での値を
u_i^j とする。($x_i - x_{i-1} = h, t_j - t_{j-1} = dt$ は u の変化に比べて十分小さいとする)
このとき偏微分の差分近似は、例えば以下のように書くことが出来る。
$\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t} = \frac{1}{dt}(u_i^{j+1} - u_i^j)$
$\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2} = \frac{1}{\square}(u_{\square}^j - 2u_{\square}^j + u_{\square}^j)$

これらを用いるとヘルムホルツの偏微分方程式の差分法での近似式は
$\frac{1}{dt}(u_i^{j+1} - u_i^j) + = \frac{1}{\square}(u_{\square}^j - 2u_{\square}^j + u_{\square}^j)$
となる。

2.1 ヒント

テーラー展開して精度を求めると、空欄内の精度は２次になります。これも教材にあります。これが答えられない場合は教材を精読しましょう。

3 問3

問1の条件でヘルムホルツの熱伝導方程式を実際にプログラミングしてシミュレートしてみよ。また、問1で求めた結果と比較してみよ。

3.1 ヒント

殆ど教材にソースコードが載っています。良い子はコピペせずに頑張りましょう。ソースコードの意味がわからない人は知っていそうな人に聞きましょう。

4 問4

h や dt を変えて値の収束性を確かめたり、条件を変えたりしてシミュレートをしてみよ。余裕があれば、cin を用いて刻み幅をカスタマイズできるようにしてみよ。

4.1 ヒント

色々試してみましょう。

2 計算機の宿題２日目

CIP 補完でエクササイズ

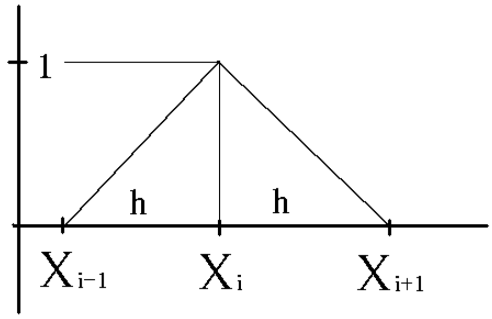
しけたい４　(すごろくやりたい)

1　お断り

ソースコードのヒントは近日更新（予定）

2　問１

x の関数 $f(x)$ の線形補完の有限要素法での近似は
$f^h(x) = \sum_i f(x_i)\phi_i(x)$



となっていた。CIP 補完での関数の近似は
$f^h(x) = \sum_i f(x_i)\phi_i^{(0)}(x) + f'(x_i)\phi_i^{(1)}(x)$
となっている。$\phi_i^0, \phi_i^{(1)}$ の形を求めよ。

2.1　ヒント

やっぱり教材に解がある。この補完のメリットがわかるようになるまでじっくり教材を読み直そう。

3　問２

x の関数 $f(x)$ を以下の条件下で CIP 補完せよ。また、様々な x に於いて $|f^h(x) - f(x)|^2$ を線形補完の場合と比較してみよ。
$f(x), x_i - x_{i-1} \equiv h$ は余裕があれば様々な値を用いてみよ。x の定義域：[0 : 1]
$f(x) = \sin n\pi x \quad (n = 1, 2・・)$

3.1 ヒント

CIP 補完の場合、各々の分点で覚える情報の数が 2 倍なので、刻み幅は線形補完が CIP 補完の 2 倍でなければ上手く評価できない。思いのほか CIP 補完が頑張ってくれない。時間変化などを経てそのありがたみが見えてくる。

3 計算機の宿題３日目
行列と遊びたいその１

しけたい４　(この辺どうしよっか)

1　お断り

教材未完成部分があるので見て直ぐ解けない人も凹まぬように。というか、既存の行列しけぷりも結構カオスなので・・・・

1.1　業務連絡

行列ネタは全部で

- 最も簡単な反復法による固有ベクトル計算（これ）
- ２分法による固有値計算（難しいかな）
- ランチョス法による固有ベクトル計算（ゼミで未紹介）
- 緩和法による固有ベクトル計算（未紹介。疎行列に強い子らしい）
- LU 分解による連立方程式計算（ゼミは金澤がやった）
- ガウス=ザイテル法による連立方程式計算（ちょっと楽）
- 共役勾配法による連立方程式計算（色々ムズい）

とありますが、全部宿題にすると多分死ねます。演習ゼミにいくつか回す方針でしょうか。

2　問１

N 行 N 列行列 H の N 個の固有ベクトル $|i>$(固有値 λ_i に対応) で、あるベクトル $|a>$ を分解したとする。
$|a>= c_1|1> +c_2|2> +$・・・
この時
$H^n|a>= c_1\lambda_1^n|1> +c_2\lambda_2^n|2> +$・・・
となる。この性質を利用すると
$H^n|a>$ は最も固有値の絶対値の大きい固有ベクトルに収束する。
この性質を用いて固有値の最も大きい固有ベクトルを求めよ。また、固有値の最も小さい固有ベクトル（基底状態に相当）も求めよ。

2.1　ヒント

実はこのネタはゼミでは扱っていない。が、基底状態を楽に求めるにはそれなりに適した方法で、難易度も行列計算の中では低いほうなので取り扱ってみました。新しいものにチャレンジする精神を期待してます。注

意点、着目点としては

- ベクトルの大きさが発散しないように、H をかけるごとにベクトルの大きさを小さくしましょう。
- H に単位ベクトルのスカラー倍を足すと固有値をずらせます。
- 求めたいベクトルと $|a>$ が直行にならないように注意。

3 問 2

固有ベクトルの直行性を利用して他の固有値の固有ベクトルも求めよ。

3.1 ヒント、注意点

- $|a>$ の時点で問 1 で求めた固有ベクトルと直行にしましょう。
- H をかける度に問 1 で求めた固有ベクトルの成分を除外しないといけません。。

基底状態以外も求めたい場合はこの方法はまず使わないと見てよいでしょう（何