# 1 有限要素法＆境界要素法ゼミ纏め

## ネタ増量中

しけたい４　(緋想天で勝てない)

## 1　濛々メール

さーて。マラソンがランナーの突然死により思いのほか早く終了してしまったので、ちょっと予定を変更して、マラソン分の時間で視聴者様からのお便りを紹介していきたいと思います。

し、社長。それが・・・・
どうやら自分達の持ち時間まで時間があるっていうので、コーナー担当が酒盛りしてたようでして・・・

え゛・・・・・・・

ちょっと飲みすぎたかな？
どうも、おはがき紹介コーナーの時間です。まずは一通目のお便り。
『名無しの魔法使いさん』から。

”音楽室の壁のボコボコの写真を送ります”

（吐くのをこらえている）
うぷっ、おのれ、視聴者。上手い手を考えたわね。しかし、そんなこともあろうかと今回は相棒を連れてきたのよ。相棒、出てきなさい。

嫌だ！
こんな姿で全国放送されたらもうお嫁に行けないっ！

げ、酔ってるよ。この人。面倒だなぁ・・・・・
ほら、視聴者も出てきて欲しいって言ってるよ？
二通目のお便り『名無しの不老不死さん』から

”その姿も面白いよwww”

・・・・・・・・・
三通目のお便り『名無しの蓬莱ニートさん』から
”さっきのはがきの投稿者なら、番組のサクラだから5番スタジオに居るよ”
な、なんか凄い番組ね。っておい、相棒何処へ行く！？

くすん、くすん。
今夜の放送を無かったことにしてやる・・・・・
（ふらふらと移動していく）

あー、これは事件の予感がするわね。止めるの面倒だし、酔い覚ましも兼ねて、5番スタジオまで行って来ますか。なんか偏微分方程式で結界作ってるみたいだけど、まあ、私達なら楽勝でしょ。

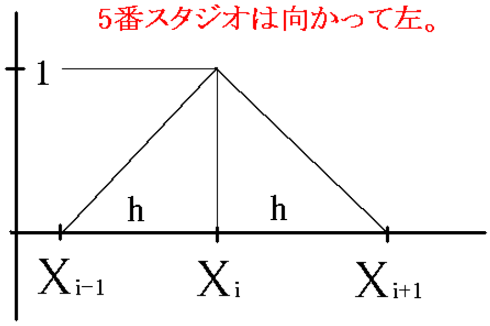
## 2 直ぐにわかる有限要素法

この説明では、例としてヘルムホルツの熱伝導の方程式を持ち出すわ。
$\frac{\partial}{\partial t}u + \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = 0$
この式は恒等式なのだから、任意の関数 $g(x)$ に対して、定義域 [a,b] での積分式
$\int_a^b(\frac{\partial}{\partial t}u + \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}u)g(x)dx = 0$
が成り立つわね。

有限要素法では、偏微分方程式の解を**いくつかの関数の線形結合**と考えて、さらに、$g(x)$ を**ある適当な有限の関数群**とするわ。この二つが有限要素法での近似のエッセンスなの。
近似１：近似解の形式
$u^h(x) = \sum c_i\phi_i(x)$
近似２：満たす偏微分方程式の形式
$\int_a^b(\frac{\partial}{\partial t}u^h(x) + \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}u^h(x))g_i(x)dx = 0$

$\phi_i(x), g_i(x)$ は時間とかに依存しない与えられた関数とすれば、時間発展の偏微分方程式の場合、時間発展は $c_i$ の変化で表せるわね。都合の良い $\phi_i$ や $g_i$ を定めることが出来れば、時間発展が追えそうね。
ここからは時間に対する添え字 $j$ を用いて $c_i^j$ と表記するわ。

前回と同様、初期状態は $c_i^0$ で表されるわ。
さて、上手い $\phi_i$ なのですが・・・
あ、新しいおはがき来たわ。「PN：名無しの蓬莱薬師」さんからのお便りです。




素晴らしい。見たまま、これが $\phi_i$ になりえますね。差分法で領域 [a,b] を分点 $x_0$ から $x_{n+1}$ で分けたときに対応させれば、初期条件
$u(x,0) = f(x)$ は
$c_i^0 = f(x_i)$
で表すことができるわね。

$t = t_1$ の時の状態を求めたい場合、求めるべき未知数は $n+2$ 個。
$c_i^1$ が満たすべき式を $n+2$ 個見つければよいのだけど、既に**境界条件**で 2 個あるとすれば、必要なのはあと $n$ 個になるわね。

ここで、今まで放置してた $g_i(x)$ の形を考えるわ。
先ほどの考察から、$g_i(x)$ の $i$ は全部で $n$ 種類の値をとればいいことがわかるわね。ここで、二つ目の裏技
$g_i(x) = \phi_i(x) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ とするわ。

さて、ヘルムホルツの熱伝導方程式を $g_j \equiv \phi_j$ を用いて積分するわ。
$\int(\frac{\partial}{\partial t}u^h(x) + \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}u^h(x))\phi_j(x) = 0$
これを $x$ について部分積分して（$\phi_j$ は $x = a, b$ で 0 を利用）
$\int(\frac{\partial}{\partial t}u^h(x) - \lambda\frac{\partial u^h(x)}{\partial x}\frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x}) = 0$
$u^h(x)$ を近似 1 に従って近似すると
$\int(\sum_i(\frac{1}{dt}(c_i^{j+1} - c_i^j)\phi_i(x)\phi_j(x)) - \lambda\sum_i(c_i^j\frac{\partial\phi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial\phi_j(x)}{\partial x}) = 0$

ここまでくれば、殆ど式は解けたも同然ね。下に便利なカンペ公式を作っておくわ。いうまでも無いけど、あらかじめ $\phi_i$ の形は決めておくのだから、計算機にシミュレートさせる時は値の代入だけで OK よ。境界条件で両端の値を 0 としたヘルムホルツの熱伝導方程式の場合は、以下のようになるわ。端が 0 じゃない場合は自分で作ってみるといいわね。

くすん・・、これがあれば解けたも同然・・・・・

$\int_a^b \phi_i\phi_j = \frac{2}{3}h(i=j)$、$\frac{h}{6}(i=j\pm1)$、0（その他）

$\int_a^b \phi_i\phi_j\phi_k = \frac{h}{2}(i=j=k)$、

$\frac{h}{12}$（i,j,k のうち二つが等しく、他の一つが ±1 の範囲内の時)、

0（その他）

$\int_a^b \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx} = \frac{2}{h}(i=j)$、

$-\frac{1}{h}(i=j\pm1)$、0（その他）

$\int_a^b \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}\phi_k = \frac{1}{h}(i=j=k)$、

$\frac{1}{2h}(i=j,k=i\pm1)$、$-\frac{1}{2h}(i=j\pm1,k=i$ または $j)$、0（その他）

$\int_a^b \frac{d\phi_i}{dx}\phi_j\phi_k = \frac{1}{3}(j=k,i=j+1)$、$-\frac{1}{3}(j=k,i=j-1)$、

$\frac{1}{6}(j=k\pm1,i=max(j,k))$、$-\frac{1}{6}(j=k\pm1,i=min(j,k))$、0（その他）

さて、ヘルムホルツの熱伝導方程式もいよいよ大詰めね。カンペ公式を使えば具体的に、$c_i^j$ の値の動きを追っていけるわ。$c_i^j$ から $u(t_i,x)$ の近似した形を作ろうと思った場合、前の番組で使った方式に従うなら、そのまんま

$c_i^j = u^h(x_i,t_j) \equiv u_i^j$

ね。上で色々作った関係式を境界での $u=0$ を仮定して行列の形に直すと・・・

$$\frac{1}{\delta t}\begin{bmatrix} \frac{2}{3}h & \frac{1}{6}h & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \frac{1}{6}h & \frac{2}{3}h & \frac{1}{6}h & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 0 & \cdot\cdot & \frac{1}{6}h & \frac{2}{3}h & \frac{1}{6}h \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & \frac{1}{6}h & \frac{2}{3}h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \cdot\cdot \\ u_{n-1}^{j+1} \\ u_n^{j+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3\delta t}h+\lambda\frac{2}{h} & \frac{1}{6\delta t}h-\lambda\frac{1}{h} & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \frac{1}{6\delta t}h-\lambda\frac{1}{h} & \frac{2}{3\delta t}h+\lambda\frac{2}{h} & \frac{1}{6\delta t}h-\lambda\frac{1}{h} & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 0 & \cdot\cdot & \frac{1}{6\delta t}h-\lambda\frac{1}{h} & \frac{2}{3\delta t}h+\lambda\frac{2}{h} & \frac{1}{6\delta t}h-\lambda\frac{1}{h} \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & \frac{1}{6\delta t}h-\lambda\frac{1}{h} & \frac{2}{3\delta t}h+\lambda\frac{2}{h} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \cdot\cdot \\ u_{n-1}^j \\ u_n^j \end{bmatrix}$$

一般の偏微分方程式への拡張は私が・・

有限要素法の場合、二階の偏微分方程式は以下のように書き直す。計算すれば解るけど、最終的に行列を対称行列の形にしたいからだな。ちなみに求めたい関数は $u$ だな。

$\frac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{\partial}{\partial x}u) + q(x)u = r(x)$

先ほど同様に $\phi_j$ で積分して、部分積分を施すと

$\int(p(x)\frac{\partial}{\partial x}u)\frac{\partial}{\partial x}\phi_j(x)+(q(x)u)\phi_j(x)-r(x)\phi_j(x)dx=0$

更に、各々の関数を $p(x)=\sum_{i=0}^{n+1}p_i\phi_i(x)$ のように書き直すと・・

$\int(\sum_j p_j\phi_j)(\sum_k u_k\frac{\partial}{\partial x}\phi_k)(\frac{\partial}{\partial x}\phi_i)+(\sum_j q_j\phi_j)(\sum_k u_k\phi_k)\phi_i-(\sum_j r_j\phi_j)\phi_i(x)dx=0$

確認が大変だけど、これを行列に書き直すとこうなる。

$A_{ik}=\int(dx\ (\sum_j p_j\phi_j)(\frac{\partial\phi_k}{\partial x}\frac{\partial\phi_i}{\partial x})+(\sum_j q_j\phi_j)(\phi_k\phi_i))$

$(i=1,2,\cdot\cdot\cdot\cdot,n、k=0,1,2,\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot,n+1)$

$$A\begin{bmatrix} u_0^h \\ u_1^h \\ \cdot\cdot \\ u_n^h \\ u_{n+1}^h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \int\phi_1\sum_j(\phi_j r(x_j)) \\ \int\phi_2\sum_j(\phi_j r(x_j)) \\ \cdot\cdot \\ \int\phi_{n-1}\sum_j(\phi_j r_j) \\ \int\phi_n\sum_j(\phi_j r_j) \end{bmatrix}$$

行列 A は N 行 N 列じゃない。これものすごく重要だからな。これに境界条件を駆使して N 行 N 列に書き直すことで、様々な行列を扱うメソッドが使えるようにするんだ。まあ、一度くらいは頭を悩ませるとよいだろう。見れば解るが逆行列を解けないとこの問題の答えは出てこない。逆行列の解き方は・・・・

次回を楽しみにしてくれ。

# 3　固有値問題

$\frac{d^2u}{dx^2}+k^2u=0$

境界はやっぱり 0 でいいわ。コーヒーブレイクの気分で気楽にやりましょ。これが解ければスタジオに入れそうだしね。まあ、この問題は楽勝ね。

重み関数は前回定義したとおり。式を

$\int\frac{d\phi_i}{dx}\sum_j(u_j\frac{d\phi_j}{dx})=\int k^2\phi_i\sum_j(u_j\phi_j)$

と書き直せば

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 0 & \cdot\cdot & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot\cdot \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}=k^2\begin{bmatrix} \frac{2}{3}h & \frac{1}{6}h & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \frac{1}{6}h & \frac{2}{3}h & \frac{1}{6}h & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 0 & \cdot\cdot & \frac{1}{6}h & \frac{2}{3}h & \frac{1}{6}h \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & \frac{1}{6}h & \frac{2}{3}h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot\cdot \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}$$

となるから、あとは前回と同じ解法で固有値と固有ベクトルを探せば良いわ。え、適当すぎるって？
だって、面倒なんだｍ（ｒｙ

しゃ、社長。サクラに葉書を書かせていた５番スタジオの結界が破られました！

音声切って、カメラ落としておいて頂戴。
全く。無事に番組進行できるのかしらこれ・・・・・

台詞は読者のご想像にお任せします。おっと、ここでお葉書投稿「PN：名無しのしけたい４」さんからですね。
”台詞の中身を考えてみました”
１．”あっ、角の先端はさわっちゃらめぇ”
２．”よいではないかよいではないか・・・”
３．”おお、これはもう一杯飲める流れね。めでたしめでたし”

この章の纏め
１．解を有限の数の関数の線形和と仮定する
２．偏微分方程式を有限の数の関数との積分の式に直す
３．結局最後は行列と戯れることになる。
陳謝いたします。