

# 1994 年度 入学試験 物理専門科目

## 専攻 問題 1

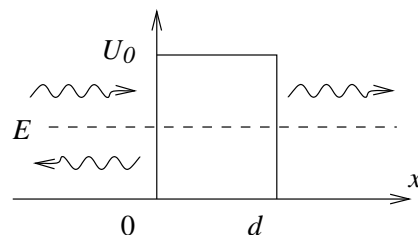
1. 右図のように  $0 < x < d$  で  $U(x) = U_0$ 、それ以外は  $U(x) = 0$  であるような一次元のポテンシャルの壁に、左側の無限遠から質量  $m$ 、エネルギー  $E = U_0/2$  の粒子が入射するものとして、以下の問に答えよ。

(i) 一般に、有界な 1 次元のポテンシャルの不連続点で波動関数が満たすべき条件をあげ、その理由を述べよ。

(ii) 右図の条件に対応する波動関数の領域  $x \leq 0$  における形を

$$\psi = e^{ikx} + \beta e^{-ikx} \quad \text{ここで } k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

とする。 $\beta$  は未知係数である。同様に、 $0 < x < d, d \leq x$  における波動関数をそれぞれ適当な未知係数を用いて表せ。



(iii) 透過率を  $T$  とする。次式を示せ。

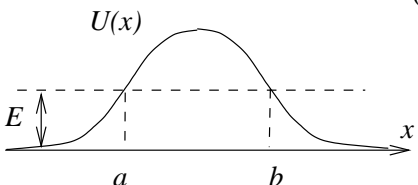
$$T = \frac{1}{\sinh^2(kd) + 1} \quad \dots (1)$$

2. WKB 法の近似によれば、右図のような 1 次元の滑らかなポテンシャル障壁  $U(x)$  に左側の無限遠から質量  $m$ 、エネルギー  $E$  の粒子が入射するものとして、透過率  $T$  は  $T \ll 1$  の場合

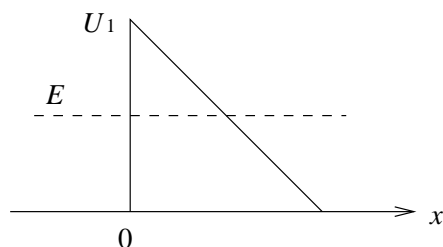
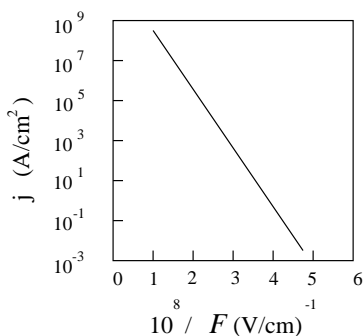
$$T \approx \exp \left[ -2 \int_a^b q(x) dx \right] \quad q(x) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U(x) - E)} \quad \dots (2)$$

で与えられる。以下の問に答えよ。

(i) 設問 1 のポテンシャルは滑らかでないが、 $T \ll 1$  の場合は式 (1)  $E$  の  $T$  は数係数を除き WKB 法の近似式 (2) と一致することを示せ。

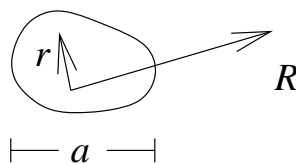


- (ii) 金属の表面に強い電場を加えると電子が放出される現象を電界放出という。電界放出による電流密度  $j$  と電場  $F$  の間には、左下の図に示すような関係があることが知られている。この現象の簡単なモデルとして、 $x = 0$  を金属の表面、 $x < 0$  を金属の内部とし、電子に対するポテンシャルを右下の図に示すように  $x < 0$  で  $U(x) = 0$ 、 $0 \leq x$  で  $U(x) = U_1 - eFx$  とする。ここで、 $e$  は電子の電荷の絶対値である。金属内部で電子は一定のエネルギー  $E$  ( $0 < E < U_1$ ) をもち、 $x$  軸と平行に運動するものとする。電子の質量を  $m$  とし、WKB 法の近似式 (2) を用いて透過率を求め、電流密度は透過率に比例するとして、左下の図の関係を説明せよ。



## 専攻 問題 2

三次元空間のある限られた領域(広がり幅を  $a$  とする)に電荷が分布し、振動数  $\nu$  で振動している場合の電磁波の放射を考える。右図のように座標をとって、電荷密度を  $\rho(\vec{r}, t)$ 、電流密度を  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  とおくと、時刻  $t$ 、観測点  $\vec{R}$  におけるスカラーポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $\vec{A}$  の遅延解は、



$$\phi(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}, t - |\vec{R} - \vec{r}|/c)}{|\vec{R} - \vec{r}|} d^3r \quad \dots (1)$$

$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}, t - |\vec{R} - \vec{r}|/c)}{|\vec{R} - \vec{r}|} d^3r \quad \dots (2)$$

と書ける。ただし、 $c$  は真空中の光の速さ、 $\epsilon_0$  と  $\mu_0$  はそれぞれ真空の誘電率と透磁率である。式 (1),(2) の積分で、時刻に関する引数が " $t - |\vec{R} - \vec{r}|/c$ " となっているのは位置  $\vec{R}$ 、時刻  $t$  における電磁波の強さが、電磁波の伝搬に必要な時間、 $|\vec{R} - \vec{r}|/c$ 、だけ前の時刻の電荷及び電流の分布に依存することを示している。

いま、電荷の分布している領域から観測点までの距離が電荷の広がりより十分大きく ( $R \gg a$ )、また、放射される電磁波の波長が電荷の広がりより十分大きい ( $c/\nu \gg a$ ) 場合を考える。このとき、式 (1) の積分における電荷密度分布は、

$$\rho(\vec{r}, t - |\vec{R} - \vec{r}|/c) \simeq \rho(\vec{r}, t') + \frac{\partial \rho}{\partial t'} \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{cR} \quad \dots (3)$$

と近似できる。ただし、 $R \equiv |\vec{R}|$ ,  $t' \equiv t - R/c$  である。さらに、 $R \gg c/\nu$  が満たされると、 $\phi$  と  $\vec{A}$  はそれぞれ、

$$\phi(\vec{R}, t) \simeq \frac{\int \rho(\vec{r}, t') d^3r}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{\partial}{\partial t'} \int \frac{\vec{R} \cdot \vec{r} \rho(\vec{r}, t')}{4\pi\epsilon_0 c R^2} d^3r = \frac{\int \rho(\vec{r}, t') d^3r}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{\vec{R} \cdot \dot{\vec{d}}(t')}{4\pi\epsilon_0 c R^2} \quad \dots (4)$$

$$\vec{A}(\vec{R}, t) \simeq \int \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t')}{4\pi R} d^3r = \frac{\mu_0 \dot{\vec{d}}(t')}{4\pi R} \quad \dots (5)$$

と近似できる。ただし、 $\dot{\vec{d}}$  は双極子モーメント  $\vec{d} (\equiv \int \vec{r} \rho d^3r)$  を  $t' (\equiv t - R/c)$  について微分したものである。このとき、電場の強さ  $\vec{E}$ 、磁束密度  $\vec{B}$  は、それぞれ、

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 \vec{R} \times (\vec{R} \times \ddot{\vec{d}})}{4\pi R^3} \quad \dots (6)$$

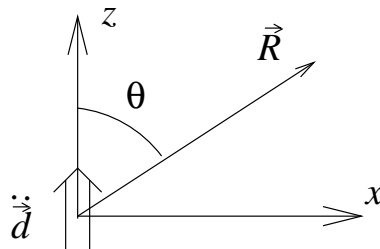
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \ddot{\vec{d}} \times \vec{R}}{4\pi c R^2} \quad \dots (7)$$

と近似できる。ただし、 $\ddot{\vec{d}}$  は  $\dot{\vec{d}}$  を  $t'$  について微分したものである。以下の問に答えよ。

1. 式 (3) を導け。

2. 式 (7) を導け。

3. 右図のように、 $\ddot{\vec{d}}$  を  $z$  軸方向、 $\vec{R}$  を  $xz$  平面内にとる。同様の図を描き、位置  $\vec{R}$  における電場  $\vec{E}$  と磁束密度  $\vec{B}$  の方向を図示せよ。さらに、ポインティングベクトル  $\vec{P}$  の方向も同じ図に書き込み、その大きさを  $\theta$  の関数として求めよ。ただし、 $\ddot{\vec{d}}$  と  $\vec{R}$  のなす角を  $\theta$  とする。



4. 単位時間あたりの全放射強度を求めよ。

## 専攻 問題 3

磁場  $H$  中での大きさ  $J (= 1/2, 1, 3/2, \dots)$  のスピンのエネルギー固有値  $\varepsilon_m$  は、

$$\varepsilon_m = g\mu_B H m, \quad (m = -J, -J+1, \dots, J-1, J)$$

で与えられる。ここで、 $m$  は磁気量子数、 $g$  は  $g$  因子、 $\mu_B$  はボーア磁子である。このようなスピンを単位体積中に  $n$  個含み、温度  $T$  の熱平衡状態にある系について、以下の問に答えよ。ただし、ボルツマン定数を  $k$  とし、スピンの間の相互作用は考えない。

1. この系の単位体積あたりの分配関数は次式で与えられることを示せ。

$$Z = \left( \frac{\sinh[(2J+1)x/2J]}{\sinh(x/2J)} \right)^n, \quad x = \frac{g\mu_B JH}{kT}$$

2. この系の単位体積あたりの比熱  $C$  を次式で定義されるブリルアン関数  $B_J(x)$  の導関数を用いて表せ。

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{x}{2J}\right)$$

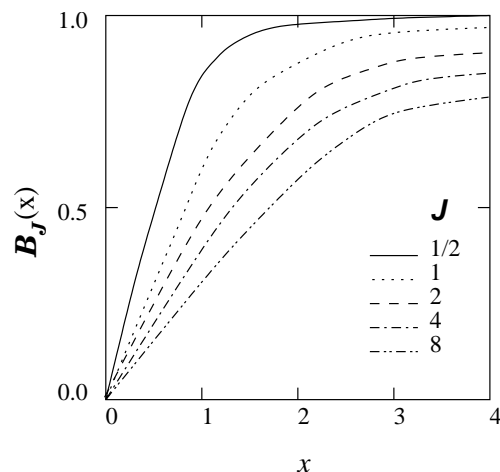
3. 温度が (a) 高い場合 ( $x \ll 1$ ) と (b) 低い場合 ( $x \gg J$ ) について、比熱  $C$  の近似形を求めよ。
4. 前問の結果に基づき、 $J = 1/2$  に対して、比熱  $C$  の温度依存性の概略を図示し、このような温度依存性となる物理的理由を述べよ。なお、図は縦軸を  $C/nk$ 、横軸を  $kT/g\mu_B JH$  とせよ。
5. 古典スピンの極限 (積  $g\mu_B J$  が一定のまま  $J \rightarrow \infty$ ,  $g\mu_B \rightarrow 0$  とした場合) における比熱  $C$  を求めよ。さらに、その温度依存性の概略を示せ。なお、図は前問同様、縦軸を  $C/nk$ 、横軸を  $kT/g\mu_B JH$  とせよ。

(参考) ブリルアン関数

右図に  $J = 1/2, 1, 2, 4, 8$  に対するブリルアン関数を示す。  
近似式 (証明なしに用いてよい)

$$B_J(x) \approx \begin{cases} \frac{J+1}{3J}x & (x \ll 1) \\ 1 - \frac{1}{J} \exp\left(-\frac{x}{J}\right) & (x \gg J) \end{cases}$$

$$\coth(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{x}{3} & (x \ll 1) \\ 1 + 2e^{-2x} & (x \gg 1) \end{cases}$$

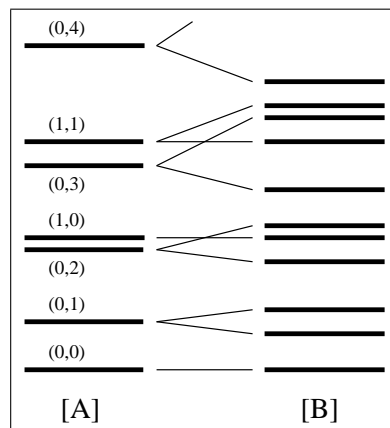


## 専攻 問題 4

原子核の殻模型では、原子核の中の核子（陽子と中性子）は、他の核子からの力の平均として、一つの引力ポテンシャルの中で独立に運動していると考えられる。このポテンシャルが作るエネルギー準位に、陽子と中性子を別々に、パウリの排他律に従ってエネルギーの低い順に詰めていくことにより、原子核が構成される。エネルギー準位間の間隔はポテンシャルの形によるが、一般に等しくはない。上の準位との間隔が特に大きな準位がちょうど一杯になる様な原子核は安定であり、原子核の性質がそこで不連続に変わる。このような原子核は閉殻を成すという。実験によると、陽子または中性子の数が 2, 8, 20, 28, 50, 82, ... (これらの数を魔法数という) である原子核が閉殻をつくることが知られている。

1. ポテンシャルによる力が中心力の場合、エネルギー準位は動径方向の波動関数に関する量子数  $n$  と軌道角運動量  $l$  (以後、角運動量は全て  $\hbar$  を単位とする) との組  $(n, l)$  で指定できる。

- (i) 量子数  $n$  による縮退がないとき、エネルギー準位  $(n, l)$  に入り得る中性子の数は幾つか。中性子のスピン  $s = 1/2$  を考慮せよ。
- (ii) 中心力のポテンシャルの形を原子核の密度分布に近い形に取ると、低い方のエネルギー準位はおおよそ、右の図の [A] のようになる (図では、準位が  $(n, l)$  で指定してある)。このとき下から 6 番目までの各準位にはいる中性子の個数を書け。また、閉殻を成す原子核の中性子数は幾つになるか、小さい方から 4 番目まで書け。



2. 中心力のポテンシャルのみでは、前問のように、28 以上の魔法数を説明できない。そこで、前問のポテンシャルにスピン軌道相互作用のポテンシャル  $V_1 = -A(\vec{l} \cdot \vec{s})$  を加える。ただし、 $A$  は正の定数とし、 $\vec{l}$  および  $\vec{s}$  はそれぞれ中性子の軌道角運動量およびスピンの演算子である。このとき、この中性子の全角運動量は、 $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$  となり、そのエネルギー準位は、 $n, l$  と全角運動量の量子数  $j$  の組  $(n, l, j)$  で指定できる。この準位に入り得る中性子の数は、 $2j + 1$  である。

- (i) 中性子の状態  $(n, l, j)$  に関するスピン軌道相互作用の演算子  $(\vec{l} \cdot \vec{s})$  の期待値を求めよ。
- (ii) スピン軌道相互作用の強さ  $A$  を適当に取るとエネルギー準位は分離して図の [B] のようになる。下から 7 番目までの準位について低い方から順に  $(n, l, j)$  を書き、それらの各準位に入る中性子の数を書け。

3. 原子核  ${}^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$  (陽子数  $Z = 20$ , 中性子数  $N = 21$ ) と  ${}^{41}_{21}\text{Sc}_{20}$  ( $Z = 21, N = 20$ ) の基底状態のスピン (原子核全体の全角運動量) と磁気能率を、これまでの設問で考察したようなモデルで求める。閉殻を構成している核子は、これらの量には関与しないとする。この問題では、磁気能率は、核磁子  $\mu_N = e\hbar/2M_p$  を単位とする ( $e$  と  $M_p$  は陽子の電荷と質量である)。

- (i) 原子核  ${}^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$  と  ${}^{41}_{21}\text{Sc}_{20}$  の基底状態のスピンを求めよ。
- (ii) 原子核の磁気能率の大きさ  $\mu$  は、磁気能率の演算子  $\vec{\mu}$  の  $z$  成分の、磁気量子数  $m_j = j$  の状態での期待値と定義されている。状態  $(n, l, j)$  の核子は、その軌道運動により  $g_l \vec{l}$ 、スピンにより  $g_s \vec{s}$  の磁気能率をもつので、その磁気能率の演算子はこれらのベクトル和  $\vec{\mu} = g_l \vec{l} + g_s \vec{s}$  となる。ただし、係数  $g_l$  と  $g_s$  は核子の軌道運動量とスピンの  $g$  因子と呼ばれる。演算子  $\mu_z$  の状態  $(n, l, j)$  での期待値は、その状態での  $(\vec{\mu} \cdot \vec{j})_{jz} / \langle j^2 \rangle$  の期待値で与えられることを使って、 $\langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle$  を  $l, s, j$  と  $g_l, g_s$  で表し、 $\mu$  を求めよ。
- (iii) 中性子の軌道運動は中性子が電荷を持たないので磁気能率に寄与せず ( $g_l = 0$ )、陽子に対しては、 $g_l = 1$  である。測定された中性子と陽子のスピンの  $g$  因子はそれぞれ  $g_s = -3.8$ 、 $g_s = 5.6$  である。原子核  ${}^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$  と  ${}^{41}_{21}\text{Sc}_{20}$  の基底状態の  $\mu$  を計算せよ。

## 専攻 問題 5

図 1 のように質量がそれぞれ、 $m, M (m < M)$  である 2 種の原子を交互に配置した鎖状の 1 次元格子の振動を考える。ポテンシャルは各最近接原子間だけに働き、微小な平衡位置からのずれに対して調和型であり、原子は鎖の方向にだけ変位すると仮定する。以下の設問に答えよ。

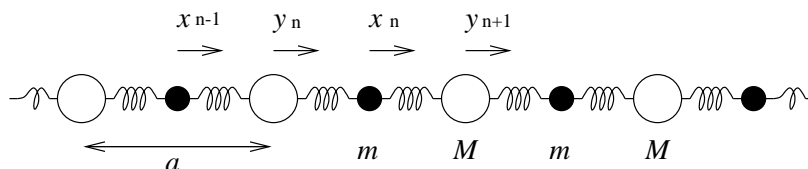
1. 原子間のポテンシャルのばね定数を  $k$ 、 $n$  番目の単位胞内の質量  $m$  の原子の変位を  $x_n$ 、質量  $M$  の原子の変位を  $y_n$  とするとき、それらの運動方程式はどのようなになるか？
2. この系の基準振動は一般に、

$$x_n = A \exp(-i\omega t) \exp(inqa)$$

$$y_n = B \exp(-i\omega t) \exp(inqa)$$

と表すことができる。ここで、 $t$  は時間、 $\omega$  は角振動数、 $q$  は波数、 $a$  は原子間の距離の 2 倍である。 $A$  と  $B$  の満たす関係式を導け。

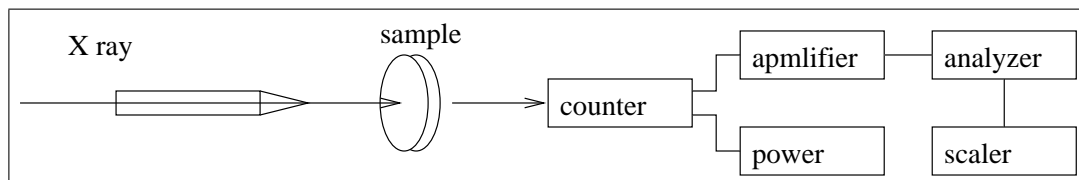
3.  $\omega$  は  $q$  のどのような関数になるか？ またその関係  $\omega(q)$  を図で示せ。図には波数  $q$  が 0, および  $\pi/a$  のときの  $\omega$  の値を記入すること。
4.  $q = \pi/a$  のときの基準振動に対応する各原子の変位を図示し、このときの振動数  $\omega$  がなぜそのような値をとるのかについて考察せよ。
5.  $m$  が  $M$  に比べて極めて小さいとき、この格子系の振動はどのような特徴を示すか考察せよ。またそのような特徴がなぜ出現するかについて、理由を考えてみよ。



## 専攻 問題 6

X 線の吸収に関する実験について次の問いに答えよ。

1. 単色化した Cu - K $\alpha$  線 (波長  $\lambda_K = 0.1542$  nm) をコリメーターを用いて細いビームにし、その強度を充分広い検出窓を持つシンチレーションカウンターで測定する図 1 のような装置を作った。



このビームの中に表面積の充分大きい、0.1 mm の一様な厚さを持つシリコン薄板試料をその表面がビームに垂直になるようにセットして、その枚数  $n$  を変えながら透過するビームの強度  $I$  を測定し右の表の結果を得た。また、シリコンのかわりに X 線を通さない鉛板を置いてバックグラウンドを測定した結果、60 秒間に 98 カウントが計測された。入射強度  $I_0$  の X 線が、吸収係数  $\mu$ 、厚さ  $t$  の物質を透過した後の強度は  $I = I_0 \exp(-\mu t)$  と表される。実験結果に関する次の問いに答えよ。ただし、 $\ln 10 = 2.30$ 、 $\log_{10} 2 = 0.301$ 、 $\log_{10} 3 = 0.477$  とする。

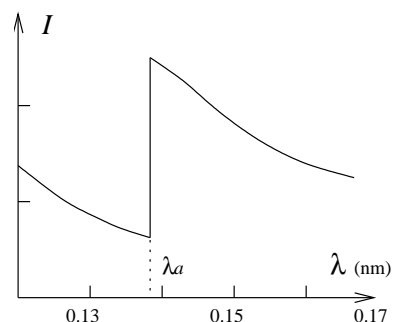
$n$ (枚)	$I$ (カウント)	測定時間 (秒)
0	78,018	1
1	48,106	1
2	18,065	1
3	22,195	5
4	10,891	10
5	8,010	30
6	3,924	60

- (i) 実測した透過ビーム強度をシリコン薄板の厚さ  $t$  に対して調べてみると、枚数が少ないとき実測値は上の式からはずれている。その原因は何か議論せよ。
- (ii) シリコンの吸収係数  $\mu$  [ $\text{mm}^{-1}$ ]、および入射強度  $I_0$  [カウント/秒] を、10% 程度の精度で求めよ。
- (iii) 厚さ 0.025 mm の金属薄膜を 1 と同じ条件の X 線ビームの中に挿入してその透過強度を測定したところ、10 秒間に 30,300 カウント計測された。この金属の吸収係数を求めよ。また、次の各金属の Cu - K $\alpha$  線に対する吸収係数 ( $\text{mm}^{-1}$ ) の値を参照して、この金属は次のうちどれか推定せよ。

Ti (93)   V (136)   Cr (186)   Fe (255)   Co (315)   Ni (44)

2. 使用する X 線を Cu - K $\alpha$  線から Mo - K $\alpha$  線 (波長 0.0711 nm) に換えたとき、正しく信号を取り出すためにシンチレーションカウンターの計測回路中調整すべき点を挙げよ。
3. 試料として銅の薄膜を用い、今度は入射 X 線の波長を連続的に変化させながらその透過強度を測定し右図の結果を得た。

- (i) 図中で波長  $\lambda_a = 0.1381$  nm に見られる大きな強度の不連続点は何と呼ばれるか。
- (ii) 1 における X 線発生管の銅のターゲットから発生する Cu - K $\alpha$  線 (波長  $\lambda_K = 0.1542$  nm) とこの  $\lambda_a = 0.1381$  nm との間には  $\lambda_K > \lambda_a$  の関係があるが、このことを X 線の発生を吸収の機構をもとに説明せよ。



## 専攻 問題 7

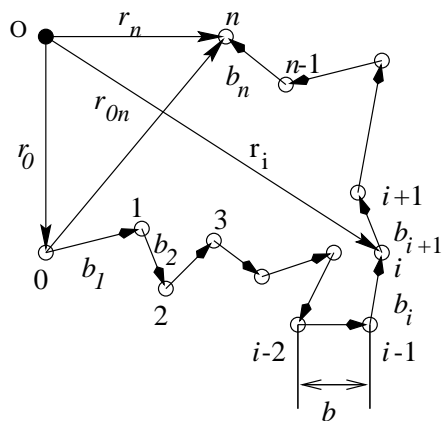
生物の細胞分化に関する次の文章を読んで、それにつづく問に簡潔に答えよ。

ヒトの脳は約 100 億の神経細胞からできているがヒトの遺伝子の総数は約 10 万に過ぎない。このように多細胞生物に細胞の数に比べて遺伝子の数は極めて少ない。多数の細胞の細胞分化とその個性を少数の遺伝子によって決定せねばならないというこの困難を、生物は進化の過程で「(転写制御) 遺伝子の組合せによるコーディング (Combinatorial Coding)」という機構を獲得することによって克服した。

1. 生物が少数の遺伝子の組合せによる細胞の分化・多様性を実現しているという事実について考えてみよう。
  - (i) 各遺伝子の ON/OFF の組合せで 100 億の脳細胞の一つ一つに “番号づけ” をするとしたら、遺伝子は何個以上必要か?  $\log_{10} 2 = 0.3$  とせよ。
  - (ii) 上で計算した最小に近い数の遺伝子ですべての脳細胞の分化を実現したとすると、その生物は進化の過程で不利であると予想される。その理由を述べよ。
  - (iii) 遺伝子 A と B が ON で、かつ C が OFF の時に遺伝子 X の転写活性が高まるという場合、遺伝子 X の調節領域でどのような分子機構が働いているかを予想して述べよ。特に転写調節のレベルで考えられる可能性をあげよ。
2. 生物における「組合せによるコーディング」のもう一つの例は遺伝子の本体である DNA にみられる。現在地球上の生物の DNA は、A(アデニン)・T(チミン)・G(グアニン)・C(シトシン) の 4 塩基の “文字列” ですべての情報を暗号化している。
  - (i) DNA が 2 塩基 (P と Q と名づける) のみから構成される生物が宇宙のどこかに存在するとしたら、P と Q との間にはどのような関係があると期待されるか?
  - (ii) この宇宙生物が 2 塩基組成の RNA を介して 20 種類のアミノ酸からなるタンパク質をコードするとしたら、遺伝暗号表はどのようなものになると予想されるか?
  - (iii) 2 つの塩基のみからなる DNA を持つこの宇宙生物が、4 塩基 DNA を持つ地球上の生物に比べて生存に不利な点をあげよ。
  - (iv) タンパク質についても同様に考えてみよう。2 種のアミノ酸のみからなるタンパク質で構成される生物が存在し得るか? タンパク質の構造と機能の多様性を実現するのに何種類のアミノ酸が必要かを推論し、その理由を述べよ。

## 専攻 問題 8

核酸やタンパク質分子は、ヌクレオチドやアミノ酸を骨格要素とする直鎖状高分子である。図は  $(n+1)$  個の骨格要素からなる直鎖状高分子のコンフィギュレーションを描いたものである。骨格要素は円で示されている。 $i$  番目の骨格要素の位置ベクトルを  $\vec{r}_i$ 、 $i-1$  番目と  $i$  番目の骨格要素をつなぐ結合ベクトルを  $\vec{b}_i$  とする。結合ベクトルの大きさはすべて  $b$  である。以下の設問に答えよ。



1. 結合ベクトルの向きが互いに完全にランダムである鎖を自由連結鎖という。自由連結鎖について、 $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j$  の期待値である  $\langle \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \rangle$  を求めよ。
2. 鎖の両末端を結ぶベクトルを  $\vec{r}_{0n} = \vec{r}_n - \vec{r}_0$  とする。自由連結鎖の両末端距離の 2 乗の平均  $\langle \vec{r}_{0n}^2 \rangle$  を求めよ。
3. 鎖の広がりを表す回転半径  $R_G$  は、各骨格要素と鎖の重心との距離の 2 乗の平均の平方根で定義される。 $R_G$  が、

$$R_G = \frac{1}{n+1} \left( \sum_{0 \leq i < j \leq n} \langle (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \rangle \right)^{1/2}$$

与えられることを用いて、 $n \rightarrow \infty$  での  $R_G$  と  $\langle \vec{r}_{0n}^2 \rangle$  との関係を示せ。

4. 大腸菌ゲノムの大きさは、 $5 \times 10^6$  塩基対である。ゲノム DNA 分子を塩基対を骨格要素とする自由連結鎖とみなし、 $R_G$  および  $\langle \vec{r}_{0n}^2 \rangle^{1/2}$  を有効数字 1 桁で求めよ。なお、DNA 2 重らせんの塩基対間距離は 0.3nm である。
5. 実在する DNA 分子は、隣り合う塩基対同士の連絡が自由でないで、塩基対を骨格要素とする自由連結鎖とみなすことはできない。しかし、実在する DNA 分子の十分に離れた塩基対どうしはあたかも自由に連結されているかのようにふるまう。したがって、長さが  $n$  塩基対の実在 DNA 分子は、 $n$  が十分に大きいとき、 $n/a$  個の仮想的な骨格要素を長さ  $ab$  の仮想的な結合で連結した自由連結鎖とみなすことができる。実験によると、生理的条件下では  $a = 500$  である。大腸菌のゲノム DNA 分子を仮想的な骨格要素からなる自由連結鎖と考え、 $R_G$  および  $\langle \vec{r}_{0n}^2 \rangle^{1/2}$  を有効数字 1 桁で求めよ。
6. 大腸菌の大きさは約  $1\mu\text{m}$  である。この大きさと設問 5 で得られたそのゲノム DNA 分子の大きさとを比較し、両者の違いの生物学的意味について述べよ。
7. 直鎖高分子の溶液中での大きさを測定する実験方法を二つあげ、その原理と方法を具体的に述べよ。



## 専攻 問題 1 解答

### 1. (i) Schrödinger 方程式

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + U(x) \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

より、 $\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2}$  は明らかに potential の不連続点  $x = x_0$  で不連続。

Schrödinger 方程式を、potential の不連続点  $x = x_0$  の近傍  $[x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_1]$  で積分すると、

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \int_{x_0 - \delta_2}^{x_0 + \delta_1} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} dx + \int_{x_0 - \delta_2}^{x_0 + \delta_1} [U(x) - E] \psi(x) dx = 0$$

で、potential  $U(x)$  は有界だから、左辺第 2 項  $= O(\delta_1) + O(\delta_2)$ 、 $\delta_1, \delta_2 \rightarrow +0$  で  $\rightarrow 0$  である。したがって

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{x_0 - \delta_2}^{x_0 + \delta_1} = O(\delta)$$

すなわち、 $\delta_1, \delta_2 \rightarrow +0$  の極限で、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x_0 + 0} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x_0 - 0}$$

が必要。

また波動関数を確率的に解釈するために波動関数の連続性

$$\psi(x_0 + 0) = \psi(x_0 - 0)$$

が必要。

### (ii) 領域 $0 < x < d$ では Schrödinger 方程式は、

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi(x) = \frac{mU_0}{\hbar^2} \psi(x) = k^2 \psi(x)$$

だから、波動関数は未知係数  $A, B$  を用いて

$$\psi(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

と書ける。

領域  $x > d$  では Schrödinger 方程式は、

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} E \psi(x) = -\frac{mU_0}{\hbar^2} \psi(x) = -k^2 \psi(x)$$

だから、波動関数は未知係数  $C$  を用いて

$$\psi(x) = Ce^{ik(x-d)}$$

と書ける。 $e^{-ikx}$  の項は  $x = \infty$  から  $x$  のマイナス方向への進行波なので物理的考察から排除される。

### (iii) current は

$$j = \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left( \psi^* \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \right)$$

で与えられるので、

$$\psi_{\text{in}} = e^{ikx}, \quad \psi_{\text{ref}} = \beta e^{-ikx}, \quad \psi_{\text{tr}} = Ce^{ik(x-d)}$$

を用いて計算すると、透過率は

$$\frac{j_{\text{tr}}}{j_{\text{in}}} = |C|^2$$

で与えられる。

さてここで、 $x = 0$  と  $x = d$  での境界条件から、

$$1 + \beta = A + B$$

$$i(1 - \beta) = A - B$$

$$Ae^{kd} + Be^{-kd} = C$$

$$Ae^{kd} - Be^{-kd} = iC$$

である。これらの 4 つの変数についての 4 つの式を、 $\beta, C$  について解くと

$$\beta = -i \tanh(kd) \quad C = \operatorname{sech}(kd) = \frac{1}{\cosh(kd)}$$

である。

したがって、透過率  $T$  は

$$T = \operatorname{cosech}^2(kd) = \frac{1}{\sinh^2(kd) + 1}$$

である。

2. (i) 近似式 (2) で透過率を求めると

$$T \cong \exp \left[ -2 \int_0^d \frac{dx}{\hbar} \sqrt{2m \left( U_0 - \frac{U_0}{2} \right)} \right] = \exp \left[ -2 \int_0^d \frac{dx}{\hbar} \sqrt{2mE} \right] = \exp \left[ -2 \int_0^d k dx \right] = e^{-2kd}$$

である。

一方、 $1 \ll kd$  のとき

$$1 \ll \cosh^2(kd) \cong \frac{e^{2kd}}{4}$$

であるから、設問 1 で求めた透過率は

$$4e^{-2kd}$$

である。

(ii) 電子のポテンシャル

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ U_1 - eFx & (x > 0) \end{cases}$$

( $U_1$ : 金属の仕事関数 ;  $F$ : 電界)

エネルギー  $E (< U_1)$  の金属内電子がトンネル効果で抜ける必要のある場所は  $x = 0$  から  $x = \frac{U_1 - E}{eF}$  までである。

$$\begin{aligned} T &\cong \exp \left[ -2 \int_0^{\frac{U_1 - E}{eF}} \frac{dx}{\hbar} \sqrt{2m(U_1 - eFx - E)} \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \left[ -\frac{2}{3} (2m(U_1 - E - eFx))^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2meF} \right]_0^{\frac{U_1 - E}{eF}} \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{2}{3\hbar eF} \{2m(U_1 - E)\}^{3/2} \right] \end{aligned}$$

だから、

$$\log_{10} j = \log_{10} T + \text{const} = \frac{1}{\ln 10} \left[ -\frac{2}{3\hbar eF} \{2m(U_1 - E)\}^{3/2} \right] + \text{const}$$

で、 $1/F$  に比例してさがる。これはグラフの結果と一致する。

## 専攻 問題 2 解答

1.  $R \gg a$ 、すなわち  $|\vec{R}| \gg |\vec{r}|$  の条件では

$$\frac{|\vec{R} - \vec{r}|}{c} \simeq \frac{R}{c} - \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{cR}$$

と近似できる。ところで、 $\rho$  の時間変化 (すなわち  $t$  による変化) の周期は放射される電磁波の周期  $1/\nu$  と同じ程度と考えられるが、 $a/c \ll 1/\nu$  なので、 $r/c$  程度の時間での  $\rho$  の変化分は  $\rho$  の時間による Taylor 展開の 1 次の項で近似できる。よって、

$$\rho(r, t - |\vec{R} - \vec{r}|/c) \simeq \rho(r, t - \frac{R}{c} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{cR}) \simeq \rho(r, t') + \frac{\partial \rho}{\partial t'} \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{cR}$$

2. 式 (5) で表されるベクトルポテンシャル  $\vec{A}$  に対して磁場  $\vec{B}$  は  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  である。

$$\begin{aligned} \partial_i A_j &= \frac{\mu_0}{4\pi R} \cdot \ddot{d} \left( t - \frac{R}{c} \right)_j \left( -\frac{1}{c} \right) \left( \frac{R_i}{R} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \dot{d} \left( t - \frac{R}{c} \right)_j \frac{-R_i}{R^3} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi c R^2} \cdot R_i \cdot \left( \ddot{d}(t')_j + \frac{c}{R} \dot{d}(t')_j \right) \\ \therefore \text{rot } \vec{A} &= (\epsilon_{lij} \partial_i A_j) = -\frac{\mu_0}{4\pi c R^2} \cdot \vec{R} \times \left( \ddot{\vec{d}} + \frac{c}{R} \dot{\vec{d}} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi c R^2} \cdot \left( \ddot{\vec{d}} + \frac{c}{R} \dot{\vec{d}} \right) \times \vec{R} \end{aligned}$$

となる。この ( ) の中の 2 つの項の大きさを比較する。 $|\dot{\vec{d}}| \sim |\ddot{\vec{d}}|/\nu$  であるから後ろの項は

$$|\frac{c}{R} \dot{\vec{d}}| \sim \frac{c}{R\nu} |\ddot{\vec{d}}| \ll |\ddot{\vec{d}}|$$

となるので前の項に対して無視できる。よって、

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\vec{d}} \times \vec{R}}{cR^2}$$

3.  $\vec{B} \propto \ddot{\vec{d}} \times \vec{R}$  で、 $\ddot{\vec{d}}, \vec{R}$  とともに xz 平面に平行なため、 $\vec{B}$  は xz 平面に垂直。方向は紙面上から下。  
 $\vec{E} \propto \vec{B} \times \vec{R}$  となり、 $\vec{E}, \vec{R}$  に垂直。

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{R} = \frac{\mu_0 (\vec{R} \times (\vec{R} \times \ddot{\vec{d}})) \times (\ddot{\vec{d}} \times \vec{R})}{16\pi^2 c R^5}$$

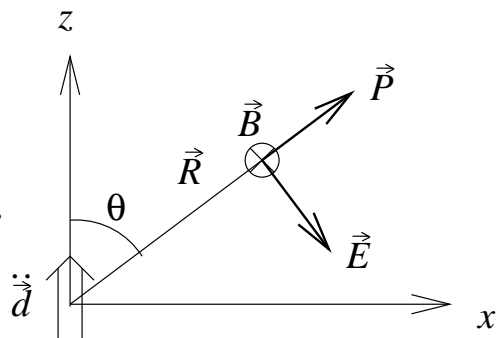
方向は、 $\vec{E}$  と  $\vec{R}$  が互いに垂直のため、直ちに図の方向とわかる。  
 大きさは、 $\vec{R}$  と  $(\vec{R} \times \ddot{\vec{d}})$  が垂直なので、

$$|\vec{R} \times (\vec{R} \times \ddot{\vec{d}})| = |\vec{R}|^2 |\ddot{\vec{d}}| \sin \theta$$

となり、結局、

$$|\vec{E}| = \frac{\mu_0 R^3 |\ddot{\vec{d}}|^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c R^5} = \frac{\mu_0 |\ddot{\vec{d}}|^2}{16\pi^2 c R^2} \sin^2 \theta$$

この様子を右図に記す。



4. 3の  $\vec{E}$  は、原点を中心とする半径任意の球面に垂直である。よって flux の総量は、 $|\vec{E}|$  をこの球面で積分すれば良い。全 flux を  $F$  として、

$$F = R^2 2\pi \int_0^\pi |\vec{E}| \sin \theta d\theta = R^2 2\pi \frac{\mu_0 |\ddot{\vec{d}}|^2}{16\pi^2 c R^2} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \frac{\mu_0 |\ddot{\vec{d}}|^2}{6\pi c}$$

## 専攻 問題 3 解答

1. 各スピン間の相互作用は考えないので、全系の分配関数は 1 つのスピンの方の分配関数の  $n$  乗である。

$$\begin{aligned} Z &= \left( \sum_{m=-J}^J \exp\left(\frac{g\mu_B H}{kT} m\right) \right)^n = \left( \sum_{m=-J}^J \exp\left(\frac{x}{J} m\right) \right)^n = \left( \frac{e^{-Jx/J}(e^{(2J+1)x/J} - 1)}{e^{x/J} - 1} \right)^n \\ &= \left( \frac{e^{(2J+1)x/2J} - e^{-(2J+1)x/2J}}{e^{x/2J} - e^{-x/2J}} \right)^n = \left( \frac{\sinh[(2J+1)x/2J]}{\sinh(x/2J)} \right)^n \end{aligned}$$

2. 平均エネルギー  $U$  は

$$\begin{aligned} U &= \frac{\sum \epsilon e^{-\beta \epsilon}}{\sum e^{-\beta \epsilon}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = -ng\mu_B JH \frac{\partial}{\partial x} (\ln(\sinh(2J+1)x/2J) - \ln(\sinh x/2J)) \\ &= -ng\mu_B JH \left( \frac{2J+1}{2J} \coth \frac{2J+1}{2J} x - \frac{1}{2J} \coth \frac{1}{2J} x \right) = -ng\mu_B JH B_J(x) \\ \therefore C &= \frac{dU}{dT} = \frac{dx}{dT} \frac{dU}{dx} = \frac{n(g\mu_B JH)^2}{kT^2} B'_J(x) = nkx^2 B'_J(x) \end{aligned}$$

- 3.

$$T \rightarrow \text{large}, \quad x \ll 1 \quad C \simeq nkx^2 \frac{J+1}{3J} = \frac{J+1}{3J} nkx^2$$

$$T \rightarrow \text{small}, \quad x \gg J \quad C \simeq \frac{nkx^2}{J^2} \exp\left(-\frac{x}{J}\right)$$

4.  $J = 1/2$  なので

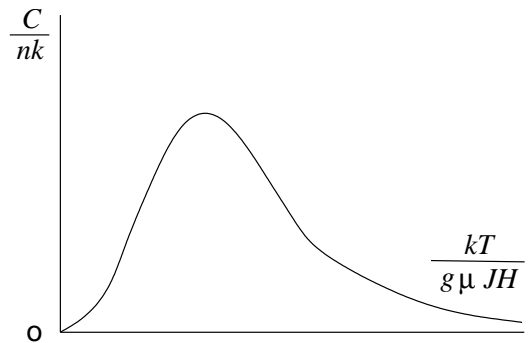
$$x \ll 1 \quad \frac{C}{nk} \simeq x^2$$

$$x \gg J \quad \frac{C}{nk} \simeq 4x^2 \exp(-2x)$$

$T \rightarrow$  大では、スピンの向きは全くランダムとなり、

$\langle E \rangle \rightarrow 0$ 、よって  $C \rightarrow 0$ 。

$T \rightarrow$  小では、エネルギーを最小にするため、スピンのすべて  $m = +J$  にそろってしまうので  $C \rightarrow 0$ 。



5.  $x, g\mu_B J$  を有限の一定値にしたまま、 $J \rightarrow \infty$  とする。

$$\begin{aligned} \lim_{J \rightarrow \infty} B_J(x) &= \lim_{J \rightarrow \infty} \left( \frac{2J+1}{2J} \coth \frac{2J+1}{2J} x - \frac{1}{2J} \coth \frac{1}{2J} x \right) \\ &= \coth x - \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{1}{2J} \left( \frac{2J}{x} + \frac{1}{3} \frac{x}{2J} \right) \\ &= \coth x - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} U = -ng\mu_B JH \lim_{J \rightarrow \infty} \left( \frac{2J+1}{2J} \coth \frac{2J+1}{2J} x - \frac{1}{2J} \coth \frac{1}{2J} x \right) = -ng\mu_B JH \left( \coth x - \frac{1}{x} \right)$$

従って、比熱は

$$\begin{aligned} C &= nkx^2 \frac{d}{dx} \left( \coth x - \frac{1}{x} \right) \\ &= nk(1 - x^2 \operatorname{cosech}^2 x) \end{aligned}$$

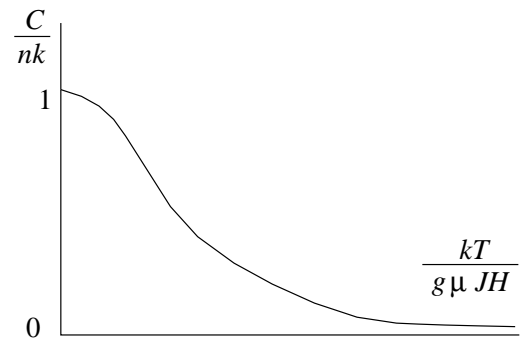
となる。よって、

$$x \ll 1 \quad U = -ng\mu_B JH \left( \frac{x}{3} \right)$$

$$\therefore C = \frac{dU}{dT} = \frac{n(g\mu_B JH)^2}{3kT^2} = \frac{nkx^2}{3}$$

$$x \gg 1 \quad U = -ng\mu_B JH \left( 1 + 2e^{-2x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore C &= \frac{dU}{dT} = \frac{n(g\mu_B JH)^2}{kT^2} \left( \frac{1}{x^2} - 4e^{-2x} \right) \\ &= nk(1 - 4x^2 e^{-2x}) \end{aligned}$$



## 専攻 問題 4 解答

1. (i) 軌道角運動量による縮退度が  $2l+1$  で、それぞれに対してスピンによる縮退が、2 つある。従って、 $4l+2$  個の中性子が入り得る。

- (ii) 下の準位からそれぞれ 2, 6, 10, 2, 14, 6 個。閉殻をなす中性子数 (魔法数) は、2, 8, 20, 40 となる。

(0, 2), (0, 3) の準位では、それぞれ (1, 0), (1, 1) の準位と近いため閉殻を成さない。

(補足) 3 次元の調和振動子のエネルギー固有値は、 $n' = 2(n-1) + l$  できまる。(0, 2)(1, 0) の準位は  $n' = 0$  に、(0, 3), (1, 1) の準位は  $n' = 1$  に対応している。この  $n'$  の縮退が解けて [A] のエネルギー準位が生まれたと考えればよい。

2. (i)  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$  だから、

$$\vec{j}^2 = (\vec{l} + \vec{s})^2 = \vec{l}^2 + 2\vec{l} \cdot \vec{s} + \vec{s}^2$$

従って期待値  $\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle$  は、

$$\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle = \langle l j | \frac{1}{2} (\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2) | l j \rangle = \frac{1}{2} \{ j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \}$$

- (ii) 一次摂動の範囲でエネルギー準位は  $-A\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle$  だけ変化するので、同じ  $(n, l)$  を持つ状態では、 $j$  が大きい ( $\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle$  が大きい) 方がエネルギー準位が低くなる。従って、エネルギー準位とそこに入り得る中性子の数は低い順に以下になる。

(n, l, j)	(0, 0, 1/2)	(0, 1, 3/2)	(0, 1, 1/2)	(0, 2, 5/2)	(1, 0, 1/2)	(0, 2, 3/2)	(0, 3, 7/2)
中性子の数	2	4	2	6	2	4	8

この結果、問題の図 [B] から読みとれる魔法数は 2, 8, 20, 28, ... となり、実験で得られている値と一致する。

3. (i) 魔法数が 20 なので、どちらも、一個だけ閉殻を構成できない核子が余る。その核子は (0, 3, 7/2) へ入るので、スピンはどちらも 7/2 である。

- (ii) まず、 $\vec{l} \cdot \vec{j}$  と  $\vec{s} \cdot \vec{j}$  を求める。

$$\vec{s}^2 = (\vec{j} - \vec{l})^2 = \vec{j}^2 - 2\vec{l} \cdot \vec{j} + \vec{l}^2$$

などから、

$$\vec{l} \cdot \vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{j}^2 + \vec{l}^2 - \vec{s}^2) \quad \vec{s} \cdot \vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{j}^2 - \vec{l}^2 + \vec{s}^2)$$

が得られる。これを使うと、

$$\vec{\mu} \cdot \vec{j} = g_l \vec{l} \cdot \vec{j} + g_s \vec{s} \cdot \vec{j} = g_l \frac{1}{2}(\vec{j}^2 + \vec{l}^2 - \vec{s}^2) + g_s \frac{1}{2}(\vec{j}^2 - \vec{l}^2 + \vec{s}^2)$$

$$\langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle = \frac{g_l}{2} \{ j(j+1) + l(l+1) - s(s+1) \} + \frac{g_s}{2} \{ j(j+1) - l(l+1) + s(s+1) \}$$

$$\mu = \langle nlj(m_j = j) | \mu_z | nlj(m_j = j) \rangle = \langle nlj(m_j = j) | \frac{(\vec{\mu} \cdot \vec{j}) j_z}{j(j+1)} | nlj(m_j = j) \rangle$$

$$= \frac{1}{j+1} \left[ \frac{g_l}{2} \{ j(j+1) + l(l+1) - s(s+1) \} + \frac{g_s}{2} \{ j(j+1) - l(l+1) + s(s+1) \} \right]$$

- (iii) 上で得た式を用いる。  $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$  では、(0, 3, 7/2) に入る中性子が一個余っているので、

$$\mu = \frac{2}{9} \left[ 0 + \frac{-3.8}{2} \left\{ \frac{63}{4} - 12 + \frac{3}{4} \right\} \right] = -1.9$$

となる。同様にして、 $^{41}_{21}\text{Sc}_{20}$  では、余っているのは陽子なので、

$$\mu = \frac{2}{9} \left[ \frac{1}{2} \left\{ \frac{63}{4} + 12 - \frac{3}{4} \right\} + \frac{5.6}{2} \left\{ \frac{63}{4} - 12 + \frac{3}{4} \right\} \right] = 5.8$$

となる。

## 専攻 問題 5 解答

1. 原子の運動方程式は以下の通り。

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} x_n &= -k(x_n - y_n) + k(y_{n+1} - x_n) \\ M \frac{d^2}{dt^2} y_n &= -k(y_n - x_{n-1}) + k(x_n - y_n) \end{aligned} \quad \dots (1)$$

2. 与えられた  $x_n, y_n$  の表式を前問の運動方程式に代入して整理して

$$\begin{aligned} (2k - m\omega^2)A - k(1 + e^{+iqa})B &= 0 \\ (2k - M\omega^2)B - k(1 + e^{-iqa})A &= 0 \end{aligned} \quad \dots (2)$$

を得る。

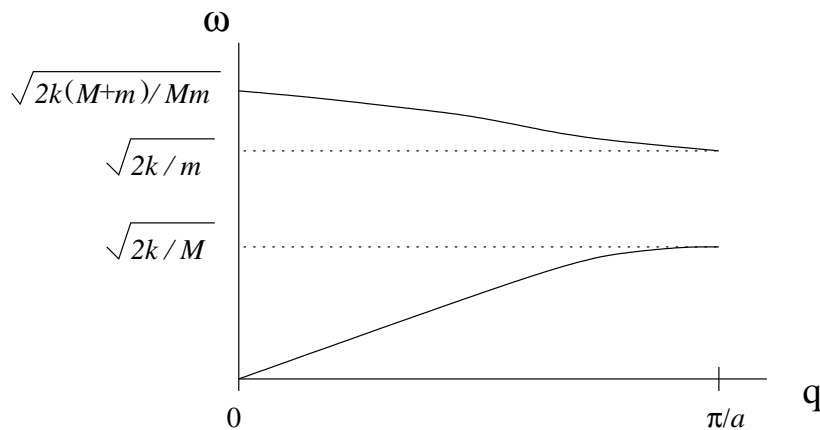
3.  $A, B$  が  $A = B = 0$  以外の解をもつためには前問より、

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k(1 + e^{+iqa}) \\ -k(1 + e^{-iqa}) & 2k - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

であることがわかる。これを  $\omega$  について解いて

$$\omega^2 = \frac{k(m + M) \pm k \sqrt{(m + M)^2 - 4mM \sin^2(qa/2)}}{mM} \quad \dots (3)$$

を得る。分散関係は下図のようになる。



4.  $q = \pi/a$  を式 (3) に代入して

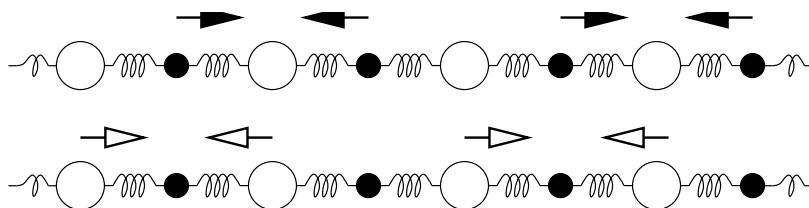
$$\omega^2 = \frac{2k}{M} \quad \text{or} \quad \frac{2k}{m}$$

を得る。この  $\omega$  をそれぞれ式 (2) に代入すると  $A, B$  の条件は、

$$(a) \quad \omega^2 = \frac{2k}{M} \longrightarrow A = 0 \quad B = \text{任意}$$

$$(b) \quad \omega^2 = \frac{2k}{m} \longrightarrow A = \text{任意} \quad B = 0$$

となる。よって、 $q = \pi/a$  の基準振動での各原子の変位は下図のようになる。



つまり、それぞれ片方の種類の原子が静止しているため、バネ定数  $2k$  で原子をつなげていることになっている。

5. 両原子の振幅の比の絶対値を考える。式 (2) より

$$\left| \frac{A}{B} \right| = \frac{|2k - M\omega^2|}{|k(1 + e^{-iqa})|}$$

これに式 (3) の  $\omega$  を代入して  $m \ll M$  を用いて近似計算していく。

$$\begin{aligned} \left| \frac{A}{B} \right| &= \frac{|2m - (m + M) \mp \sqrt{(m + M)^2 - 4mM \sin^2(qa/2)}|}{m|1 + e^{-iqa}|} \\ &= \frac{|m - M \mp (m + M) \sqrt{1 - \frac{4mM}{(m+M)^2} \sin^2(qa/2)}|}{m|e^{+iqa/2} + e^{-iqa/2}||e^{-iqa/2}|} \\ &\simeq \frac{|m - M \mp (m + M - 2m \sin^2(qa/2))|}{2m|\cos(qa/2)|} \end{aligned}$$

複号が  $-$  の場合は  $\omega$  の高周波の解についてであり

$$\left| \frac{A}{B} \right| \simeq \frac{|-2M + 2m \sin^2(qa/2)|}{2m|\cos(qa/2)|} \simeq \frac{M}{m} \frac{1}{|\cos(qa/2)|}$$

複号が  $+$  の場合は  $\omega$  の低周波の解についてであり

$$\left| \frac{A}{B} \right| \simeq \frac{|2m - 2m \sin^2(qa/2)|}{2m|\cos(qa/2)|} = |\cos(qa/2)|$$

となる。

高周波の解では  $q$  の値によらず、 $|A/B| \gg 1$  であるから、質量  $M$  の原子はほとんど振動せず、質量  $m$  の原子が大きな振幅で振動する。

低周波の解では  $A/B \leq 1$  であるから、質量  $M$  の原子も質量  $m$  の原子も振動する。

$m \ll M$  であるから、高い周波数で激しく振動させようとする、質量  $m$  の原子だけが振動して、質量  $M$  の原子は止まっていようとして、 $|A/B| \gg 1$  となる。この振る舞いは波数  $q$  には依らない。

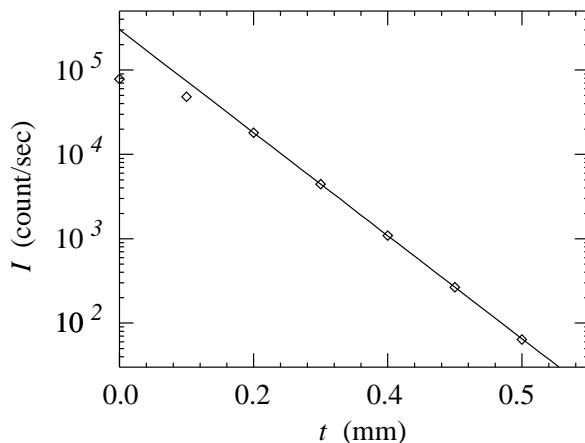
低い周波数でゆっくりと振動させる場合は、両方の原子がゆっくりと振動する。このため、 $|A/B| \sim 1$  である。ただし、この場合には 4 で考察したように、波数が大きくなるにつれて、質量  $M$  の原子だけが振動するようになる。



## 専攻 問題 6 解答

1. (i) シンチレーションカウンターには不感時間があり、一つのパルスが発生してから次のパルスが発生させるまでにおよそ  $2\mu\text{s}$  ほどかかる。この間に入ったパルスは無視されるので、枚数が少なく計数が多い時には数え落しが多くなる。

- (ii) 横軸にシリコンの厚さ  $t[\text{mm}]$ 、縦軸に入射強度  $I[\text{カウント/秒}]$  をとると以下のようなになる。



この傾きおよび切片から、 $\mu = 14[\text{mm}^{-1}]$ 、 $I_0 = 3.0 \times 10^5[\text{カウント/秒}]$  と求められる。

- (iii) 求める吸収係数を  $\mu_0[\text{mm}^{-1}]$  とすると、1 と同じ条件であることから、

$$I_0 \exp(-0.025\mu_0) = \frac{30300}{10} - \frac{98}{60} \quad \mu_0 = 1.8 \times 10^2$$

したがって、この金属は Cr と推定される。

2. Mo -  $K_\alpha$  線の方が Cu -  $K_\alpha$  線よりも波長が短いので、光子のエネルギーは高く、電圧の高いパルスとして観測される。したがって、シグナルとノイズを選別するためのパルス波高の閾値を高くしておかなければならない。

3. (i) 吸収端 (absorption edge)

- (ii)  $\lambda < \lambda_a$  の時には光電効果で K 殻の電子をたたき出せるようになるので急激に透過強度は減少する。したがって、K 殻のエネルギーを  $-E_K$  とすると、

$$\lambda_a = \frac{hc}{E_K}$$

また、特性 X 線  $K_\alpha$  線は K 殻にできたホールに L 殻から電子が落ち込む時に発生するので、L 殻のエネルギーを  $-E_L$  とすると、

$$\lambda_K = \frac{hc}{E_K - E_L}$$

したがって、 $\lambda_K > \lambda_a$  である。

## 専攻 問題 7 解答

1. (i) 100 億の脳細胞の一つ一つに 2 進数の “番号づけ” をする。遺伝子が  $n$  個以上必要であるとする、 $2^n = 10^{10}$  だから、 $n = 33.3$  となり、遺伝子は 34 以上必要である。  
(ii) すべての脳細胞の 1 つ 1 つを 34 個の遺伝子でコードしたとすると、進化の過程で起こる突然変異や転写のミスにより、必要な脳細胞が発現できなくなったりすると生存できなくなる恐れがあるので、進化の過程で不利となる。  
(iii) 遺伝子 X を構造遺伝子と考え、その転写活性が高まるという場合について考える。このとき遺伝子 X の調節領域では、プロモーターに RNA ポリメラーゼが結合し、かつオペレーターにはリプレッサーが結合していない時転写が開始される。さらに転写量を増加させるエンハンサーなどの配列が活性化されると転写活性が高まる。よって、遺伝子 A と B としてプロモーターとエンハンサーを対応させ、C をオペレーターに対応させると遺伝子 A と B が ON で、かつ C が OFF の時に遺伝子 X の転写活性が高まる。
2. (i) DNA が 2 塩基 (P と Q と名づける) のみから構成される生物でも DNA の 2 重らせんで遺伝情報が保存されているとすると、P と Q との間には (P-P、Q-Q)、P-Q のいずれかのペアができるがこのうち、後者の場合は、2 つの塩基とも同じ数の水素結合のための手を持たねばならないので塩基対の形成時にミスが生じやすいので不可。一方前者の場合、2 つの塩基の水素結合の手の数を変えておけば上のようなミスは起きずに済む。よって、前者のような関係があると思われる。  
(ii) 2 塩基組成の RNA を介して 20 種類のアミノ酸からなるタンパク質をコードする時のコドンの大きさは  $2^5 = 32$  より、5 文字であればよい。遺伝暗号表は 5 文字のコドンを表現するため普通のコドン表で、縦に最初の 2 文字、横に次の 2 文字で分類し、最後の文字でコラムを分ければよい。  
(iii) 4 塩基の DNA では  $4^3 = 64$  個の組合せで 20 個のアミノ酸をコードしているので、コドンの縮訳が起こりコード情報の保存性が高められたり、転写時のミスが少なくなるが、2 塩基の場合 32 個しかコードしていないので上に述べた利点は少なくなり、さらにコドンが長くなるので突然変異の確率が高くなるので不利である。  
(iv) 2 種のアミノ酸のみからなるタンパク質で構成される生物が存在し得ない。理由としてはタンパク質は、生体内では親水基を外側に、疎水基を内側にして存在しているので、最低親水基と疎水基を持ったアミノ酸が必要である。さらにタンパク質の機能の多様性を得るためにいくつかのアミノ酸が必要なので、2 種アミノ酸のみからなる生物は存在しないと考えられる。では何種類のアミノ酸が必要になるかを考える。生体内のアミノ酸は側鎖の化学的性質により、中性で非極性、中性で極性、酸性、塩基性の 4 つに分けられることから、まずその 4 種類は最低必要である。この他に、タンパク質の 3 次構造形成のためグリシンのような側鎖の小さいものや、S-S 結合を作るために S を側鎖に持ったものが必要である。この他タンパク質の酵素反応の活性部位でのタンパク質の識別のためにいくつかのアミノ酸が必要だと思われる。ゆえに最低 6 種類以上のアミノ酸が必要だと予想される。

## 専攻 問題 8 解答

1.

$$\langle \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij} \langle \vec{b}^2 \rangle + \delta_{i \neq j} \langle \vec{b}_i \rangle \langle \vec{b}_j \rangle = b^2 \delta_{ij}$$

( $\because i \neq j$  のとき、ランダムに向きが動くので、 $\vec{b}_i$  と  $\vec{b}_j$  の相関がなく、free である。)

2.  $r_{0n}^2 = \sum_{i=0}^n \vec{b}_i$  より、

$$\langle r_{0n}^2 \rangle = \sum_{i,j} \langle \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \rangle = \sum_{i,j} \delta_{ij} b^2 = nb^2$$

3.  $\vec{r}_j - \vec{r}_i = \sum_{k=i+1}^j \vec{b}_k$  (但し  $j > i$ ) なので、

$$\langle (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \rangle = \left\langle \sum_{k=i+1}^j \vec{b}_k \cdot \sum_{l=i+1}^j \vec{b}_l \right\rangle = \sum_{k,l=i+1}^j \delta_{kl} b^2 = |j-i| b^2$$

$$\therefore \sum_{0 \leq i < j \leq n} \langle (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \rangle = \sum_{0 \leq i < j \leq n} |j-i| b^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) b^2$$

となるから、 $n \rightarrow \infty$  で、

$$R_G = \sqrt{\frac{1}{6} n b^2 \frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)^2}} \simeq \sqrt{\frac{1}{6} n b^2} = \sqrt{\frac{1}{6} \langle r_{0n}^2 \rangle}$$

4.  $n = 5 \times 10^6$ 、 $b = 3 \times 10^{-10}$  m よって  $n b^2 = 45 \times 10^{-14}$  m<sup>2</sup> より、

$$\langle \vec{r}_{0n}^2 \rangle^{1/2} = 7 \times 10^{-7} [\text{m}] = 0.7 [\mu\text{m}]$$

$$R_G \simeq \sqrt{\frac{1}{6} \langle \vec{r}_{0n}^2 \rangle}^{1/2} \simeq 0.3 [\mu\text{m}]$$

5. 設問 4 において、 $n' = n/a = 1 \times 10^4$ 、 $b' = ab = 1.5 \times 10^{-7}$  m とおき直して計算。

$$n' b'^2 = 2.25 \times 10^{-10} \text{ m}^2$$

よって、

$$\langle \vec{r}_{0n}^2 \rangle^{1/2} = 1.5 \times 10^{-5} [\text{m}] = 15 [\mu\text{m}]$$

$$\therefore R_G = 6 [\mu\text{m}]$$

6. 大腸菌の中で、ゲノム DNA はランダムコイル状態にあるのではなく、何らかの機構により、コンパクトに折り畳まれていると考えられる。コンパクトな形に定まっていることにより、表面積を小さくし、紫外線など外界の危険をなるべく避けることに成功していると考えられる。

7. [ゲルろ過法]

凹凸のついたビーズをカラムに詰め、その中に溶液を流す。大きさの大きいものほど早く落ちてくるので、それによって分子の大きさを知ることができる。

[拡散係数を測定する]

拡散係数が分子の大きさの関数になっているので、拡散の度合を光散乱で測定すればそれより分子のおおよその大きさが計算できる。

そのほか、粘性の測定・流動複屈折 (屈折率の方向依存性の測定)・光散乱の利用が考えられる。