平成２０年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数　　　学

平成１９年８月２７日（月）　１０時００分～１１時００分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に**科目名（数学）**、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名（数学）、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配布する。

第１問

(i) ３次元空間回転を表す３次元実正方行列すべての集合を R とする。R は単位行列 I も含むものとする。これに関して、以下の各命題の真偽を○ (真) か× (偽) かで答えよ。

(a) $X \in R$ かつ $Y \in R$ ならば $XY \in R$ である。

(b) $X \in R$ かつ $Y \in R$ ならば $XY = YX$ である。

(c) $X \in R$ ならば ${}^tXX = X{}^tX = I$ である。ただし、${}^tX$ は X の転置行列を表す。

(d) ${}^tXX = X{}^tX = I$ であるならば $X \in R$ である。

(e) $X \in R$ ならば $U^\dagger XU$ が対角行列であるようなユニタリ行列 U が存在する。ただし、$U^\dagger$ は U のエルミート共役行列 (転置行列の複素共役) を表す。

(ii) $\Omega(\boldsymbol{n}, \theta)$ を、単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向を回転軸とした角度 θ の回転を表す３次元実正方行列とする。ここで、$\boldsymbol{n}$ 方向に右ねじを進める時右ねじを回す向きを正とする回転角を θ とする。また、任意の３次元実ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ に対して、$\boldsymbol{v}(\theta)$ を $\boldsymbol{v}(\theta) = \Omega(\boldsymbol{n}, \theta)\boldsymbol{v}_0$ で定義する。以下の設問に答えよ。

(1) $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$ のとき、$\Omega(\boldsymbol{n}, \theta)$ の３つの固有値を答えよ。

(2) 任意の $\boldsymbol{n}$ に対して、$\Omega(\boldsymbol{n}, \theta)$ の３つの固有値を答えよ。

(3) 原点を始点としたとき $\boldsymbol{v}(\theta)$ の終点がどれだけ移動するかを考えて、

$$\boldsymbol{v}(\theta + \Delta\theta) - \boldsymbol{v}(\theta) = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}(\theta)\ \Delta\theta$$

となることを説明せよ。ただし、 $\Delta\theta$ は θ に比べて十分小さいものとする。また、$\times$ はベクトル積（外積）である。必要なら図を用いて説明してもよい。

(4) 設問 (3) の結果から得られる $\boldsymbol{v}(\theta)$ に関する微分方程式を解くことによって、

$$\Omega(\boldsymbol{n}, \theta) = e^{\theta A(\boldsymbol{n})}$$

であることを示せ。ここで、$A(\boldsymbol{a})$ は、ある３次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して決まる３次元実正方行列であり、任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して $A(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u}$ を満たすものとする。

(5) ３次元実交代行列

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & 0 & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし、} x_{ij} = -x_{ji}, \quad i, j = 1 \sim 3)$$

に対して、$X = A(\boldsymbol{a}_0)$ となるような３次元実ベクトル $\boldsymbol{a}_0$ を求めよ。ここで、A は設問 (4) で定義されたものと同じである。

(6) $Y = e^X$ となるような3次元実交代行列 X が存在するならば Y は3次元回転を表す行列であることを示せ。

第2問

$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して、関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

と定義する。以下の設問に答えよ。

(i) $f_n(x)$ は x の多項式である。x の何次の多項式であるか答えよ。

(ii) $n > 1$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_n(x) e^{-x^2} dx$$

を求めよ。

(iii) 一般の n に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f_n(x) e^{-x^2} dx$$

を求めよ。ただし、必要であれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

を用いてよい。

(iv) z を複素数とするとき、

$$e^{-z^2} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{e^{-\omega^2}}{\omega - z} d\omega$$

が成り立つ。ここで、複素平面上の積分経路 C は、図1のような z を中心とした半径 1の反時計回りの円周であるとする。このことを用いて、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} f_n(z) = e^{-t^2-2zt} \qquad (|t| < 1)$$

となることを示せ。ただし、今の場合、無限級数和と積分の順序を入れ替えてもよい。

(v) 設問 (iv) で得られた関数 e^{-t^2-2tz} は、

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{-t^2-2tz} - 2z\frac{\partial}{\partial z} e^{-t^2-2tz} = -2t\frac{\partial}{\partial t} e^{-t^2-2tz}$$

という式を満たす。このことを用いて、関数 $f_n(z)$ が

$$\frac{d^2}{dz^2} f_n(z) - 2z\frac{d}{dz} f_n(z) + \lambda f_n(z) = 0$$

という微分方程式を満たすということを示し、そのときの λ を求めよ。

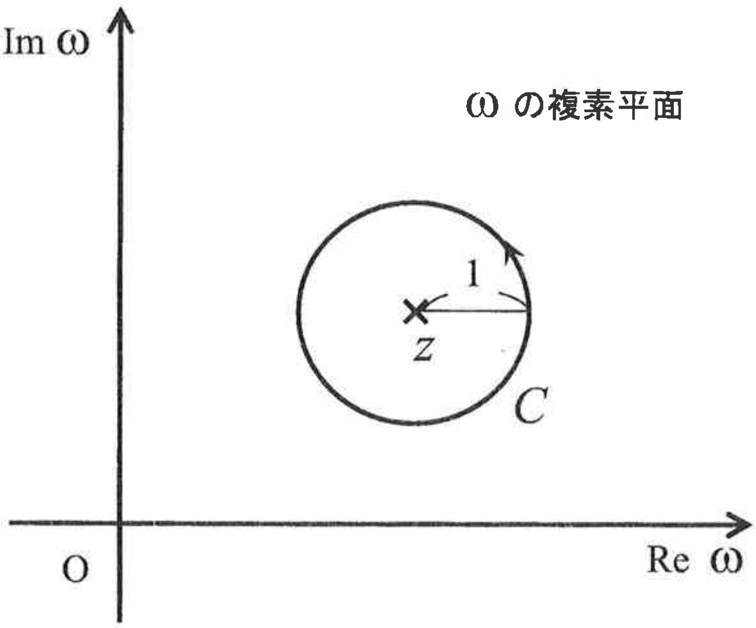

図 1: 積分経路 C.

平成 20 年度入試の過去問解答

使い方の注意
脚注は気になった人のためのものなので、基本的には本文だけ読めば事足ります。

数学

[第 1 問]

(i) 順に T,F,T,F,T(T=True, F=False)

解説は略します。今考えている SO(3) の定義が「直交かつ det=1」なことに注意すれば大丈夫です。(b) は回転軸変えればだいたい非可換になるし、(d) の反例としては鏡映など。

(ii)
(1)z 軸を中心とした回転なので、普通に 2 次元の回転行列を考えます。これを Ω_0 とおいときます。

$$\Omega_0(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

固有値の出し方はいいでしょう。exp(±iθ),1。あと $(0,0,1) = \mathbf{n_0}$ としときます。

(2) 固有値は上と同じです。（任意の $\mathbf{n}$ に対して、その方向を z 軸の方向として基底を変換すれば (1) の話に帰着するので。基底の変換（もとい座標の向きの決め方）に対して固有値は不変です。[*1]）

(3) 単純計算でも絵を描いても出来ますが、面倒なので楽に。まず、求めたい式の両辺に $\Omega(\mathbf{n}, -\theta)$ を掛けて

$$(\Omega(\mathbf{n}, \Delta\theta) - I)\mathbf{v_0} = \mathbf{n} \times \mathbf{v_0}\Delta\theta \tag{2}$$

とします。[*2]さらに脚注 1 で書いた R^{-1} を左から掛けて（その脚注にあるように $\Omega = R\Omega_0 R^{-1}$ に注意。）

$$(\Omega_0(\Delta\theta) - I)(R^{-1}\mathbf{v_0}) = \mathbf{n_0} \times (R^{-1}\mathbf{v_0})\Delta\theta \tag{3}$$

[*1] もしもっと形式的に議論をしたければ、例えば $(0,0,1) = \mathbf{n_0}$ を $\mathbf{n}$ に回転させてもっていく行列を R とします。すると (1) の行列を Ω_0,(2) の行列を Ω としたとき、$\Omega = R\Omega_0 R^{-1}$ となることがわかります。（右辺は右から順に、「回転軸を $\mathbf{n}$ から $(0,0,1)$ に動かした」「まわした」「戻した」（結局、二つの回転軸のまわりの世界を R や R^{-1} で行ったり来たりできると思えば、わかるはずです。））あとはすぐわかるでしょう。例えば $\Omega_0 v = \lambda v$ なら $R\Omega_0 R^{-1}(Rv) = \lambda(Rv)$ となるので、Ω も固有値 λ を持ち、逆も同様なので二つの行列の固有値の集合は一致。$det[\Omega - \lambda I] = det[R]det[\Omega - \lambda I]det[R^{-1}] = det[\Omega_0 - \lambda I]$ でもいいでしょう。

[*2] 右辺では、ベクトルの外積が回転行列 Ω に対して $\Omega(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\Omega\mathbf{a}) \times (\Omega\mathbf{b})$ のように、要はベクトル的に変換することを使いました。（$\mathbf{n}$ は $\mathbf{n}$ まわりでいくら回転させても $\mathbf{n}$ のままなのに注意。）ベクトルの外積の意味を考えても当たり前ですが、数式的にこれを証明するには、テンソルの記法で $\Omega_{ij}a_k b_l \epsilon_{klj} = \epsilon_{imn}\Omega_{mp}a_p\Omega_{nq}b_q$ を示せばできます。（テンソル苦手なんで、全部下つきの添え字で書いちゃいました。）これを示すには、右辺に $\epsilon_{imn}\Omega_{mp}\Omega_{nq} = \Omega_{ir}\epsilon_{pqr}$ （直交行列の各列ベクトルは正規直交基底を成すので、第 p 列と第 q 列のベクトルの外積の第 i 成分を左辺が示すと思えば。例えば $p = 1, q = 2$ ならそれは第 3 列のベクトルの第 i 成分ですよね。）を代入します。

を示せばいいことになります。（ここでも脚注 2 の性質を使いました。）$R^{-1}\mathbf{v_0} = (x, y, z)$ とおいて、式 (1) を元に、この式 (4) の成分を $O(\Delta\theta)$ まであらわに書くと

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Delta\theta & 0 \\ \Delta\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Delta\theta \tag{4}$$

となりますが、これは明らかでしょう。

（式変形が少しややこしかったかもしれませんが、この解答は本質的には「一般の回転軸のまわりで $\theta \to \theta + \Delta\theta$」だとめんどいから、$z$ 軸まわりで $\theta = 0$ にしちゃえ、ってしてるだけです。）

(4) 設問 (3) で与えられた式の両辺を $\Delta\theta$ で割ることによって得られる微分方程式は

$$\frac{d\Omega}{d\theta}(\mathbf{n}, \theta)\mathbf{v_0} = \mathbf{n} \times \mathbf{v_0} \tag{5}$$

です。ここで設問に与えられた A を使うと[*3]右辺は $A(\mathbf{n})\mathbf{v_0}$ と書けるので

$$\frac{d\Omega}{d\theta}(\mathbf{n}, \theta) = A(\mathbf{n}) \tag{6}$$

となります。あとはいいでしょう。（$\theta = 0$ を考慮して積分定数を決めるのも忘れずに。）

(5)$X\mathbf{u} = \mathbf{a_0} \times \mathbf{u}$。$\mathbf{a_0} = (x, y, z)$ とおきます。$\mathbf{u} = (0, 0, 1), (0, 1, 0)$ を代入して

$$\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{12} \\ 0 \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \tag{7}$$

を得ます。よって $\mathbf{a_0} = (x_{32}, x_{13}, x_{21})$。

(6)X が実交代 $\Leftrightarrow {}^tX = -X$。いま、$Y$ が「直交、かつ det=1」ならいいので、順に見てくと

$${}^tYY = {}^t(e^X)e^X = e^{{}^tX}e^X = e^{-X}e^X = I, \quad \text{同様に } Y{}^tY = I \tag{8}$$

$$det[Y] = det[e^X] = e^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} = e^{trX} = e^0 = 1 \tag{9}$$

より示せました。ただし λ は X の固有値。

下については少し補足すると、「det は固有値全ての積、tr は固有値全ての和」という性質を使いました。（これは対角化すれば明らかです。対角化不可能な行列についても、固有値出すための方程式に解と係数の関係使えばわかります。）$trX = 0$ は、交代行列なら定義から対角成分が 0 になるからです。（例えば (5) の設問の式。）exponential の扱いで気になったら、テイラー展開すれば多分わかります。

[*3] このような A の存在証明を一応しときます。$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{u}$ は $\mathbf{u}$ について線形なので、線形変換を行列表示したものを $A(\mathbf{a})$ とすれば $A(\mathbf{a})\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{u}$ と書ける。これが実の行列であることは、任意のベクトル $\mathbf{u}$ に対して右辺が実だから。

[第 2 問]

(i)n 次。これは帰納法で。$n=0$ なら明らか。あとは以下の関係式に注意。

$$f_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = e^{x^2}\frac{d}{dx}(e^{-x^2}f_{n-1}(x)) = -2xf_{n-1}(x) + \frac{d}{dx}f_{n-1}(x) \tag{10}$$

(ii)$n \geq 2$ を使うと、部分積分などから以下がわかります。

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf_n(x)e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})dx = -\int_{\infty}^{\infty}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})dx = 0 \tag{11}$$

(iii) 上と同様に部分積分を繰り返すとわかります。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f_n(x)e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})dx = \cdots = (-1)^n n!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = (-1)^n n!\sqrt{\pi} \tag{12}$$

(iv) 与えられた式に $f_n(x)$ の定義式を代入すると、結局

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2}) = e^{-(t+z)^2} \tag{13}$$

を示せればいいことがわかります。ここで与えられた積分の式を左辺に入れて

$$\begin{aligned}
(l.h.s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{-\omega^2}}{\omega - z}d\omega &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{-\omega^2}}{(\omega - z)^{n+1}}d\omega && (14)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C\sum_{n=0}^{\infty}t^n\frac{e^{-\omega^2}}{(\omega - z)^{n+1}}d\omega && (15)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{-\omega^2}}{\omega - z - t}d\omega && (16)\\
&= e^{-(t+z)^2} && (17)
\end{aligned}$$

となるので示せました。ただし最後から二番目の等号は $\sum z^n = 1/(1-z)$ という普通の幾何級数を、最後の等号は $|t| < 1$ より（pole が C の内側にあるので）普通の留数計算（あるいは、本文で与えられた公式）です。

(v) この設問で与えられた微分方程式に、(iv) で示した式をそのまま代入して

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(f_n''(z) - 2zf_n'(z) + 2nf_n(z)) = 0 \tag{18}$$

を得ます。これが恒等式なので、各 n について、sum されている中身は 0 にならなくてはいけません。(t の多項式だとでも思って。。）よって $\lambda = 2n$。