1993年度　入学試験 一般教育科目（英語なし）

■ 教育 数学

1. 平面上の次の関数について以下の設問に答えよ。

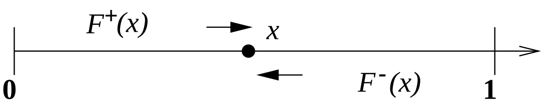
$$f(x,y) = (x^4 - y^2)\exp(-r^4), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(i) 最大値と最小値の存在を示し、これらを求めよ。

(ii) 次の積分を求めよ。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2. x 軸上の区間 $[0,1]$ を図のように x 軸の正方向と負方向に進む粒子群がある。位置 x でのそれぞれの群の流量を $F^+(x)$ (個/秒) および $F^-(x)$ (個/秒) とする。ある群の流量が F であるとき、距離 $\mathrm{d}s$ を進む間に $F\mathrm{d}s$ (個/秒) の粒子が x 軸を構成する格子と衝突する。衝突するたびに粒子群の一部は確率 a で消滅し、残りは進行方向および反対方向に確率 f と b で散乱される。すなわち、$a + b + f = 1$ である。
ただし粒子の速さはすべて同じで、散乱の際にも粒子の速さは変化しないものとする。また格子点は一様で十分数が多いので、x 軸は連続体とみなして良い。このとき、次の設問に答えよ。



(i) 流量 $F^+(x)$ と $F^-(x)$ を支配する x についての一階連立微分方程式を導け。

(ii) 次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ。ただし、固有ベクトルの第一成分は 1、また、$\alpha > \beta > 0$ とする。

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & +\beta \\ -\beta & +\alpha \end{pmatrix}$$

(iii) (ii) の結果を利用して (i) の方程式系を解け。ただし、境界条件として粒子は $x = 0$ で区間に流量 1 個／秒で流入しており、また、$x = 1$ で区間に流入する粒子は無いとする。さらに $a, b > 0$ とする。

3. 正の整数 N の分割数 $P(N)$、すなわち N を N 以下の正の整数の和で表す場合の数を考える。例えば、$N = 3$ のとき、$N = 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ であるから、$P(3) = 3$ である。また、$P(0) = 1$ と約束する。このとき次の設問に答えよ。

(i) $P(4), P(5)$ を求めよ。

(ii) 負でない整数 n を正の整数 m 以下の正の整数の和で表す場合の数を $p(n,m)$ と書く。ただし $p(0,m) = 1$ と約束する。この時分割に現れる最大数に着目して $p(n,m)$ を $p(n',m')$, $n' < n, m' \le m$ を用いて表しなさい。

(iii) (ii) の結果を用いて $P(8)$ を求めよ。

(iv) 問題とする場合の数 $q(n)$ を係数とする、べき級数 $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n)x^n$ を $q(n)$ の母関数という。例えば、$p(n, 2)$ に対する母関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n, 2)x^n = (1 + x^1 + x^{1+1} + \cdots)(1 + x^2 + x^{2+2} + \cdots)$$

で与えられる。これを参考にして $P(N)$ の母関数 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n$ を $g(x) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{f_k(x)}$ の形で与える多項式 $f_k(k)$ を求めよ。

■ 教育 物理

1. 質量 M、半径 R の一様な円盤が、傾斜角 θ の坂をすべらずに転がり落ちる運動を考える。斜面に沿って x 軸をとり、重力加速度を g、ころがりまさつ力を F として次の問に答えよ。

   (i) 円盤重心の x 方向の運動方程式を示せ。

   (ii) 円盤の回転軸まわりの慣性モーメント I を求め、回転に関する運動方程式を示せ。

   (iii) x 方向の速度 v と、回転角速度 ω の関係を示せ。

   (iv) 以上の関係を整理して、x 方向の加速度が、まさつがなかった場合の何倍になっているのかを求めよ。

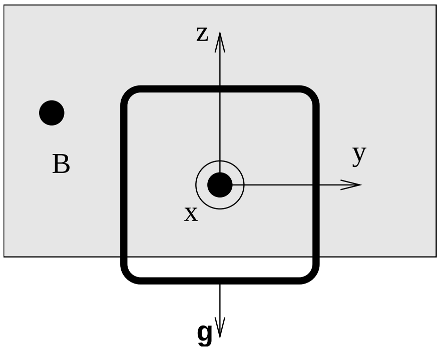
2. 図に示すように金属線で出来た正方形のループが yz 面内にある。ループの上半分に強さ $B[T]$ の一様磁場がループ面と垂直（x 軸方向）にかかっており、また、ループは下方に重力を受けているものとする。
   ループの一辺の長さを L[m]、金属線の断面積を s[m^2]、金属の密度を d[kg/m^3]、金属の抵抗率を ρ[Ωm]、重力加速度を g[m/s^2] として、以下の問に答えよ。ただし、空気の抵抗は無視し、ループが回転してしまうことは無いものとする。また、ループは十分に大きいとして、ループ全体が磁場の外に出てしまう場合を考慮する必要はない。

   (i) ループが速度 v で落下しているとき、ループに流れる電流 I の向きを図示し、その大きさを求めよ。

   (ii) ループにながれる電流と磁場 B とによってループが受けるローレンツ力 F の方向を図示し、その大きさを求めよ。

   (iii) ループの落下運動をあらわす運動方程式を書き下せ。

   (iv) ループの初速を 0 として落下速度 v を時間の関数として求め、v の変化の様子をグラフに示せ。



3. 圧力 p と単位体積あたりの内部エネルギー u の間に

$$p = \frac{1}{3}u$$

   の関係が成り立つ気体がある（光子気体）。$u = u(T)$ が温度 T のみの関数であるとして、その関数形を求めたい。以下の問に答えよ。

   (i) 断熱過程において圧力 p と体積 V の間に $pV^{4/3}$ = 一定 の関係が成り立つことを示せ。

   (ii) 四つの状態 A, B, C, D を通り、等温膨張 ($A \to B$)、断熱膨張 ($B \to C$)、等温圧縮 ($C \to D$)、断熱圧縮 ($D \to A$) という四つの準静的過程からなる可逆サイクルを考える。このサイクルの $p - V$ 図の概略を描け。但し、状態 A, B, C, D における体積をそれぞれ V_A, V_B, V_C,
   V_D とし、等温過程 $A \to B$ 及び $C \to D$ における温度をそれぞれ T_1 及び T_2 とする。

   (iii) 上記のサイクルで、等温過程 $A \to B$ 及び $C \to D$ の間に吸収する熱量をそれぞれ Q_1 及び Q_2 とするとき、Q_1, Q_2 を求めよ。

   (iv) このサイクルが可逆であることを用いて

$$\frac{u(T_1)^{1/4}}{T_1} = \frac{u(T_2)^{1/4}}{T_2}$$

   が成り立つことを示せ。
   [参考:これにより、Stefan-Boltzmann の法則 $u(T) = \sigma T^4$ （σ は定数）が得られる。]

■ 教育 数学 解答

1. **(i)** この関数 f には特異点はなく、また $r\to\infty$ で $f\to 0$ に収束する。f は有限の領域 ($\mathbf{R}^2$) に正負の値を持つので f は $\mathbf{R}^2$ 上に最大値、最小値を持つ。

さて、$\mathbf{R}^2$ は開集合なので、連続微分可能な関数 f がある点で最大値または最小値をとるためには、その点で、

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

となることが必要条件である。具体的に書き下すと、

$$+x[x^2-(x^4-y^2)(x^2+y^2)]=0 \qquad \cdots (1)$$
$$-y[1+2(x^4-y^2)(x^2+y^2)]=0 \qquad \cdots (2)$$

となる。

f が最大値を取るのは明らかに f が正の時であり、その時には $(x^4-y^2)>0$ なので式 (2) が満たされるためには $y=0$ となることがわかる。これを式 (1) に代入すると、

$$4x^3(1-x^4)=0 \qquad \therefore\quad x=+1,0,-1$$

が得られる。この時の f の値は

$$f(1,0)=f(-1,0)=\frac{1}{e}\qquad f(0,0)=0$$

なので、最大値は、

$$f(1,0)=f(-1,0)=\frac{1}{e}$$

である。

同様にして最小値を求めると、最小値は明らかに負なので $(x^4-y^2)<0$ なので式 (1) が満たされるためには $x=0$ となることがわかる。これを式 (2) に代入すると、

$$2y(2y^4-1)=0 \qquad \therefore\quad y=0,\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

が得られる。この時の f の値は

$$f\left(0,+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)=f\left(0,-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}\qquad f(0,0)=0$$

なので、最小値は、

$$f\left(0,+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)=f\left(0,-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$$

である。

(ii) 与式を極座標の積分に直すと、

$$I=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\left(r^5\cos^4\theta-r^3\sin^2\theta\right)e^{-r^4}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

となる。θ による積分は、

$$\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{4}$$
$$\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta=\pi$$

となる。r の積分は、$r^2=t$ と変数変換して

$$I=\pi\int_0^{\infty}\left(\frac{3}{8}t^2-\frac{1}{2}t\right)e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{3\pi^{\frac{3}{2}}}{32}-\frac{\pi}{4}$$

と求まる。

2. **(i)** 正の方向に進む粒子は、dx 進む間に、$(a+b)F^+\mathrm{d}x$ 個が散乱によって失われ、$bF^-\mathrm{d}x$ 個が、負方向に進む粒子からの散乱によって生じる。負方向に進む粒子は $-\mathrm{d}x$ 進む間に同様の収支があるので結局

$$+\frac{\mathrm{d}F^+}{\mathrm{d}x} = -(a+b)F^+ + bF^-$$
$$-\frac{\mathrm{d}F^-}{\mathrm{d}x} = -(a+b)F^- + bF^+$$

となる。

(ii) 固有値 λ は

$$(-\alpha-\lambda)(\alpha-\lambda)+\beta^2 = \lambda^2-\alpha^2+\beta^2 = 0 \qquad \therefore\ \lambda^\pm = \pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$$

となる。それぞれに対応する固有ベクトルの第 2 成分を $\gamma^\pm$ とすれば、

$$\begin{pmatrix} -\alpha & +\beta \\ -\beta & +\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^\pm \end{pmatrix} = \pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^\pm \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\gamma^\pm = \frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}$$

が得られる。よって固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ (\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2})/\beta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ (\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2})/\beta \end{pmatrix}$$

となる。ただし、複号の順序は、固有値と固有ベクトルのそれぞれで一致している。

(iii) $\alpha = a+b, \beta = b$ とすれば、(i) の方程式は、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} F^+ \\ F^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & +\beta \\ -\beta & +\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F^+ \\ F^- \end{pmatrix}$$

となる。この行列を対角化するために、

$$\begin{pmatrix} F^+ \\ F^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma^+ & \gamma^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F^{+\prime} \\ F^{-\prime} \end{pmatrix}$$

で変換すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} F^{+\prime} \\ F^{-\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^+ & 0 \\ 0 & \lambda^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F^{+\prime} \\ F^{-\prime} \end{pmatrix}$$

となる。よってこの解は

$$F^{+\prime}(x) = A^+e^{\lambda^+x} \qquad F^{-\prime}(x) = A^-e^{\lambda^-x}$$

であり、変換して

$$F^+(x) = A^+e^{\lambda^+x} + A^-e^{\lambda^-x}$$
$$F^-(x) = A^+\gamma^+e^{\lambda^+x} + A^-\gamma^-e^{\lambda^-x}$$

となる。境界条件 $F^+(0) = 1, F^-(1) = 0$ を用いて未定係数 A^+, A^- を定めて、さらに $\lambda^- = -\lambda^+ \equiv \lambda$、$\gamma^+\gamma^- = 1$ の関係を用いると、結局

$$F^+(x) = \frac{\gamma^-e^{\lambda^-+\lambda^+x} - \gamma^+e^{\lambda^++\lambda^-x}}{\gamma^-e^{\lambda^-} - \gamma^+e^{\lambda^+}} = \frac{\gamma^-e^{-\lambda(1-x)} - \gamma^+e^{+\lambda(1-x)}}{\gamma^-e^{-\lambda} - \gamma^+e^{+\lambda}}$$
$$F^-(x) = \frac{\gamma^+\gamma^-e^{\lambda^-+\lambda^+x} - \gamma^+\gamma^-e^{\lambda^++\lambda^-x}}{\gamma^-e^{\lambda^-} - \gamma^+e^{\lambda^+}} = \frac{e^{-\lambda(1-x)} - e^{+\lambda(1-x)}}{\gamma^-e^{-\lambda} - \gamma^+e^{+\lambda}}$$

となる。

3. **(i)** $4 = 1+1+1+1 = 2+1+1 = 3+1 = 2+2$ だから、$P(4) = 5$
$5 = 1+1+1+1+1 = 2+1+1+1 = 3+1+1 = 4+1 = 2+2+1 = 3+2$ だから、$P(5) = 7$

(ii) $p(n,m)$ は m 以下の数で n を分割する種類の数であるが、分割した項の中で一番大きい数が k であるような分割の種類の数は、残りの和が $n-k$ で k 以下の数で分割する分割の種類の数 $p(n-k.k)$ であるので、よって

$$p(n,m) = \sum_{k=1}^{m} p(n-k.k)$$

と表されることになる。

(iii) (ii) で得られた公式を使って順に計算していく。

$$\begin{aligned}
p(8) &= p(8,8)\\
&= p(7,1)+p(6,2)+p(5,3)+p(4,4)+p(3,5)+p(2,6)+p(1,7)+p(0,8)\\
&= 1+\{p(5,1)+p(4,2)\}+\{p(4,1)+p(3,2)+p(2,3)\}+5+3+2+1+1\\
&= 1+(1+3)+(1+2+2)+5+3+2+1+1\\
&= 22
\end{aligned}$$

(iv) 与えられている $p(n,2)$ の母関数の右辺の表式を展開して、x の各次数ごとを眺めると

$$\begin{aligned}
&x^0 : 1\\
&x^1 : x^1\\
&x^2 : x^2 + x^{1+1}\\
&x^3 : x^{2+1} + x^{1+1+1}
\end{aligned}$$

のように x の指数は分割の仕方を示していることがわかる。
これをヒントに整数 n の一般の分割を考える。
整数 n の和分割で、整数 $m\,(m=[1,\infty))$ の数の項の数を a_m とと表すことにする。この分割を x の指数で示すと

$$x^n = x^{1a_1+2a_2+3a_3+\cdots} = x^{1a_1}x^{2a_2}x^{3a_3}\cdots$$

となる。これを逆に考えると、任意の数の組 $\{a_m\}\,(m=[1,\infty))$ は、上式で計算される n の分割の一例になっている。
ここで $p(n,2)$ の例を思い出して

$$(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\cdots$$

という式を考える。これを展開すると x の n 次の項の係数は n の分割の種類の数となっている。すなわち、これは $P(n)$ の母関数である。

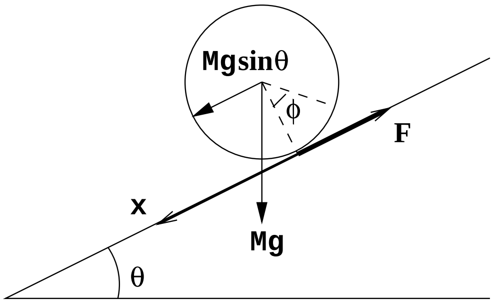
$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n &= (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\cdots\\
&= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\cdots = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k} = \prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{k+1}}
\end{aligned}$$

となる。よって

$$f_k(x) = 1 - x^{k+1}$$

と求まる。

■ 教育 物理 解答



1. 問題の状況は右図の様である。

(i) 重心の運動方程式は次の通りである。

$$M\ddot{x} = Mg\sin\theta - F$$

(ii) 円盤の密度を $\rho = M/\pi R^2$ として慣性モーメント I は

$$I = \int_0^R \rho r^2 \cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}r = 2\pi\rho\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2$$

となる。回転の運動方程式は、図の反時計回りを回転角速度 ω の正の向きとして、

$$I\dot{\omega} = FR \qquad \therefore\quad \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega} = FR$$

(iii) すべりがないので明らかに次式が成り立つ。

$$v = R\omega$$

(iv) 前問での結果を総合して、摩擦力 F を消去すると、

$$\dot{v} = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

を得る。摩擦があるときは摩擦がないときの $\frac{2}{3}$ 倍の加速度をもつことになる。

2. **(i)** ループを貫く磁束を Φ としたとき、起電力 V は Faraday の電磁誘導の法則より、

$$V = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

である。起電力の向きは磁場に対して右向きであるが、問題の図ではループの反時計回りである。
磁束の変化分はループのうち y 軸と並行な上側の金属線が通過する磁束である。金属線の速度 v が負の値であることに注意して $\mathrm{d}\Phi = BvL\mathrm{d}t$ よって起電力は

$$V = -BvL \quad (>0)$$

ループの抵抗 R は $R = \rho 4L/s$ と表される。流れる電流 I は

$$I = \frac{V}{R} = -\frac{Bsv}{4\rho} \quad (>0)$$

電流は図では反時計回りに流れる。

(ii) z 軸に平行な線にかかる力は相殺し、z 軸に垂直な線に働く力のみが残る。

$$F = IBL = -\frac{B^2sLv}{4\rho}$$

この力は上向きである。

(iii) ループの質量 m は $m = 4Lsd$ と表される。運動方程式は

$$m\dot{v} = F - mg$$

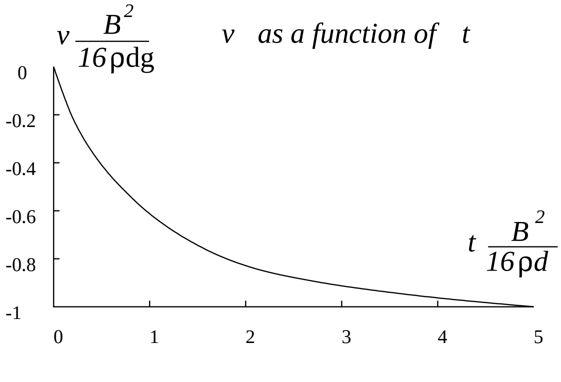
(iv) 前問で得られた運動方程式を整理して

$$\dot{v} = -\frac{B^2}{16\rho d}v - g$$

となる。これを初期条件 $v(0) = 0$ のもとで解くと、

$$v = \frac{16\rho dg}{B^2}\left[\exp\left(-\frac{B^2}{16\rho d}t\right) - 1\right]$$

この v の時間変化は右図の様である。



3. **(i)** 全内部エネルギー U は

$$U = u(T) \times V = 3pV \qquad \therefore \quad \mathrm{d}U = 3(p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p)$$

断熱過程であるので

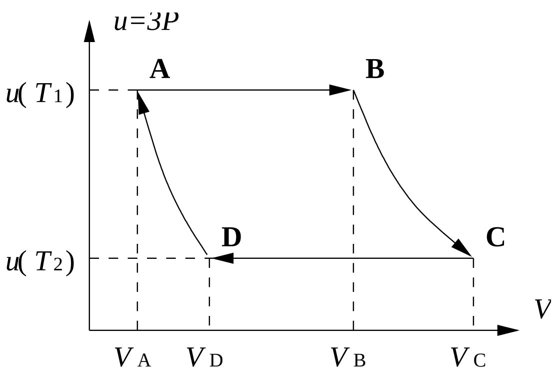
$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q' - p\mathrm{d}V = -p\mathrm{d}V$$

よって、

$$4p\mathrm{d}V + 3V\mathrm{d}p = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{4}{3}\frac{\mathrm{d}V}{V} = -\frac{\mathrm{d}p}{p} \quad \rightarrow \quad \frac{4}{3}\log V = -\log p + c$$

$$\therefore \quad pV^{4/3} = \mathrm{const}$$

(ii) 等温過程で $u(T)$ は一定なので p も一定となる。
$p - V$ 図は右図の通り。



(iii) 等温過程では p が一定 $\mathrm{d}p = 0$ なので

$$\mathrm{d}U = 3p\mathrm{d}V$$

となる。また流入する微小熱量を $\mathrm{d}Q'$ として

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q' - p\mathrm{d}V$$

よって

$$\mathrm{d}Q' = 4p\mathrm{d}V$$

これより流入する熱量は体積の差に比例することがわかる。熱量 Q_1, Q_2 は以下の通り。

$$Q_1 = \int_A^B \mathrm{d}Q' = 4p(V_B - V_A) = \frac{4}{3}u(T_1)(V_B - V_A) \quad > 0 \quad 吸熱$$

$$Q_2 = \frac{4}{3}u(T_2)(V_D - V_C) \quad < 0 \quad 廃熱$$

(iv) 可逆なのでエントロピー収支は 0 である。すなわち、

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

前問の結果を代入して

$$\frac{4}{3}\frac{u(T_1)(V_B - V_A)}{T_1} + \frac{4}{3}\frac{u(T_2)(V_D - V_C)}{T_2} = 0$$

設問 (i) で示された定理から

$$u(T_1)V_A^{4/3} = u(T_2)V_D^{4/3} \qquad u(T_1)V_B^{4/3} = u(T_2)V_C^{4/3}$$

が得られ、これから V_C, V_D を V_A, V_B で表わしたものを代入すると

$$\frac{u(T_1)}{T_1} - \frac{u(T_2)}{T_2}\left(\frac{u(T_1)}{u(T_2)}\right)^{3/4} = 0$$

となり、これにより

$$\frac{u(T_1)^{1/4}}{T_1} = \frac{u(T_2)^{1/4}}{T_2}$$

が示される。