2000年度　入学試験 一般教育科目

■ 英語

1. 次の文を読んで、自ら考えるところを 英語で、20 行程度で記せ。

   Nuclear power plants currently provide about 18% of the world's electricity. Although global demand for electricity is increasing, this figure is expected to fall as the construction of new nuclear power stations winds down. Some in the nuclear industry, however, are fighting back, arguing that the only way to meet demand while cuting emissions of greenhouse gases is to build more nuclear power plants.

   But this fight back comes at a bad time for the industry. Last year a nuclear worker in Japan died after mishandling enriched uranium. Historically, governments invested heavily in the nuclear industry following the oil crisis in the 1970's. The price of oil then fell, new reserves of oil and gas were discovered. However, much of the optimism within the nuclear industry comes from its enviromental credentials. The International Energy Agency estimates that world energy demand in 2020 will be two-thirds more than 1995 levels, and in 1997 at the Kyoto conference industrialized nations pledged to cut greenhouse–gas emissions to 5% below 1990 levels by 2012. Nuclear energy produces almost no greenhouse gases.

   Japan remains committed to nuclear power, despite recent problems, and produces about one–third of its electricity from nuclear sources. Japan expects to increase its nuclear capacity by more than 20% over the next two decades. This is not typical of developed countries. (adapted from *Physics World*, April 2000)

2. 次の英文は、ノーベル平和賞を受賞した或る物理学者の文章である。これを読み以下の設問に答えよ。

   (i) 下線部 (a),(b) を和訳せよ。

   (ii) 科学者になろうとする人に筆者が提唱していることを日本語で (直訳ではなく、自分の言葉で) 説明せよ。

   The tremendous advances in pure science made during the 20th century have completely changed the relation between science and society. Through its technological application, science has become a dominant element in our lives. It has enormously improved the quality of life. It has created great perils, threatening the very existence of the human species. Scientists can no longer claim that their work has nothing to do with the welfare of the individual or with state policies.

   However, (*a*)many scientists still cling to an ivory tower mentality founded on precepts such as "science should be done for its own sake", "science is neutral", and "science cannot be blamed for its misapplication." This amoral attitude is in my opinion actually immoral, because it eschews personal responsibility for the likely consequences of one's actions.

   The ever-growing interdependence of the world community offers great benefits to individuals, but by the same token it imposes responsibilities on them. Every citizen must be accountable for his or her deeds. This applies particularly to scientists, for the reasons I have outlined. It is also in their interest, because the public holds scientists responsible for any misuse of science. (*b*)The public has the means to control science by withholding the purse or imposing restrictive regulations. It is far better that scientists themselves take appropriate steps to ensure responsible application of their work.

   Professional organization of scientists should work out ethical codes of conduct for their members, including the monitoring of research projects for possible harm to society. It is particularly important to ensure that new entrants into the scientific profession are made aware of their social and moral responsibilities. One way would be to initiate a pledge for scientists, a sort of Hippocratic oath, to be taken at graduation. As in the medical profession, the main value of such an oath might be symbolic, but I believe it would stimulate young scientists to reflect on the wider consequences of their intended field of work before embarking on a career in academia or industry.

   I like the pledge initiated by the Student Pugwash Group in the United States, which has already been signed by thousands of students from many countries. It reads: "I promise to work for a better world, where science and technology are used in socially responsible ways. I will not use my education for any purpose intended to harm human beings or the environment. Through my career, I will consider the ethical implication of my work before

I take action. While the demands placed upon me may be great, I sign this declaration because I recognize that individual responsibility is the first step on the path to peace.”

(precept: guide for behavior, eschew: keep oneself away from)

(adapted from *Science*, **288**(1999))

■ 数学

1. 4 次元ユークリッド空間の部分空間 V_1, V_2 を

$$V_1 \equiv \{ \text{条件 } x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \text{ と } x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \text{ を共に満足するベクトル} \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の集合} \}$$

$$V_2 \equiv \{ \text{条件 } 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \text{ と } 3x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \text{ を共に満足するベクトル} \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の集合} \}$$

とする。

(i) V_1, V_2 はそれぞれ何次元の空間か？

(ii) V_1 と V_2 に共通に含まれるベクトルを求めよ。

(iii) 空間 $V_1 \cap V_2$ は何次元か？

2. 原点を中心とし、周辺を固定した半径 a の薄い円形膜の振動を考えよう。平行位置からの変位を u とする。極座標を用い $u = u(r, \theta, t)$ とする時、円形膜の振動は波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \qquad \cdots (1)$$

に従う (簡単のため方程式に現れる係数を 1 とおいた)。以下の設問に答えよ。

(i) n 次のベッセル関数 $J_n(x)$ は微分方程式

$$\frac{d^2 J_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_n(x)}{dx} + (1 - \frac{n^2}{x^2})J_n(x) = 0 \qquad \cdots (2)$$

を満たす。 $J_n(x)$ の j 番目の零点を ξ_{nj} とする時、次の直交関係

$$\int_0^1 x J_n(\xi_{nj}x) J_n(\xi_{nl}x) dx = 0, \quad j \neq l \qquad \cdots (3)$$

が成り立つことを証明せよ。

(ii) 境界条件 $u(a, \theta, t) = 0$ と初期条件 $u(r, \theta, 0) = F(r, \theta), \left[\frac{\partial u(r,\theta,t)}{\partial t}\right]_{t=0} = 0$ を満たす波動方程式の解を変数分離の方法で求めよ。(1) で議論した直交関係を用いてよい。

3. 未知関数 $x(t)$ に関する常微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx(t)}{dt} + \beta^2 x(t) = f(t) \qquad \cdots (4)$$

について以下の設問に答えよ。ここで、 α および β は正の定数とする。

(i) この方程式をフーリエ変換を用いて調べ、未知関数 x を

$$x(\omega) = C(\omega) f(\omega) \qquad \cdots (5)$$

の形で表せ。ただし $x(\omega), f(\omega)$ は $x(t), f(t)$ のフーリエ変換とする。

(ii) $f(t) = \delta(t)$ (デルタ関数) の場合を考える。(1) の結果を用い留数定理を適用して解 $x(t)$ を以下の場合について求めよ。

(i) $\alpha < \beta$

(ii) $\alpha = \beta$

(iii) $\alpha > \beta$

■ 英語 解答

1. **全訳**

原子力発電は現在世界の電力のおよそ 18% をまかなっている。世界の電力需要は増加しているが、この数値からは減るものと見こまれている。新規の原発の建設が減っているからである。しかし、原発業界の一部は反撃する。温室効果ガスの排出を抑えつつ需要にこたえるには、もっと原発をつくるしかないと。

しかしこの反撃も時期が悪い。昨年日本では、濃縮ウランの軽率なとりあつかいによってひとりが亡くなっている。歴史的に見れば、政府は 1970 年代の石油危機以来、原発業界にかなりの投資をしてきた。その後石油の価格はさがり、新たな油田やガス田も発見されたが、業界内部は上にあげたような環境配慮の面から楽観的であった。国際エネルギー機関は 2020 年の世界のエネルギー需要は 1995 年の 5/3 倍になるとしている。一方、1997 年の京都会議では工業先進国は 2012 年には温室効果ガスの排出を 1900 年より 5% 少なくすると誓った。原子力はほとんど温室効果ガスを出さないのである。

日本は昨今の不祥事にもかかわらず原子力に依存している。実際、日本の電力の 1/3 は原発によるものである。日本は原発による発電をこれからの 20 年で 20% 以上増やすことを計画している。この行動は他の先進国とは異なっている。

解答例　I forcus the discussion in the following on the claim that nuclear plants produce no greenhouse gases, which is seemingly mentioned to imply that they are somewhat ‘safer’ to the environment.

We often hear that global warming, caused possibly by greenhouse gases emitted by us and accumulated in the air already is threatening us, for example small island countries in the South Pacific are said to disappear under the water in the near future. Although the debate whether there is global–warming, or if there is, whether the cause is the human emission of greenhouse gases have not yet been settled even scientifically, to start eliminating the emission in this stage is politically correct I think, because it seems to me that we will need oil not only as the source of energy, but also as the source of many chemicals, and that the latter need will last even if all energy can be produced from something other than oils. In this respect, nuclear plants are certainly good, they use no oils, emit no greenhouse gases, etc.

But of course nuclear fuel must be handled with great care, during and after its use. The accident last year in Japan is just one example. You know many others, including one at Chernobyl. The point is that even though otherwise very safe, once an accident spreads the radioactive elements around, the damage caused is enormous and lasts quite long. And even if a plant ends its life with no accident, the waste produced and the plant itself is dangerously radioactive, so they are to be watched by us, not just us living today but including generations many many after us. Considering this, the cost imposed for human beings total is I think formidablly big. Maybe to decrease the emission of carbon dioxide quickly we must first rely on the nuclear plants. But we should bear in mind that it is only an intermediate step to a more, truly safer way of getting energy.

2. **全訳**

20 世紀における純粋科学の大いなる進歩は、科学と社会の関係を完全に変えた。科学技術の応用を通して、科学は我々の生活の支配的要素となった。科学は生活水準を大いに向上させた。科学は大変な危険物をも生み出し、それは人類の存在をも脅かしている。科学者は自分たちの研究が個人の幸福や国家の方針と無関係であるなどとはもはや言っていられない。

しかしながら、(a)多くの科学者はまだ、「科学はそれ自身のためになされるべきである」「科学は中立である」「科学は誤用を非難され得ない」といった格言に基づく象牙の塔的な思考に固執している。 この道徳観念を欠いた態度は、私の考えでは、実際不道徳である。何故ならば、自分の行動によってもたらされるかもしれない結果に対する個人の責任を避けているからである。

国際社会の相互依存性は増大する一方であり、そのことは個人に大きな利益をもたらすと同時に個々人に責任を課している。民間人各々が自分の行為に責任を持たなければならない。私が概説したような理由によって、

このことは特に科学者に当てはまる。そのことはまた、科学者のためでもある。何故ならば大衆は科学の誤用の責任が科学者にあると考えているからである。(b)大衆は、財源を抑えるとか制限的な規則を設けるといった、科学を統制する手段を持っている。科学者自らがその研究の応用に責任を持つことを確実にするため適切な措置をとればなお一層良い。

社会に対してもたらされ得る危害を調査するプロジェクトを監視することも含めて、科学者の専門組織は構成員向けに研究上の倫理規約を設けるべきである。科学に携わる職業に新規に就く者に自身の社会的・道徳的責任を自覚させることは特に重要である。1 つの方法は、卒業時に同意すべき科学者の誓約（一種のヒポクラテスの誓い）を設けることであろう。医学の職においてのように、そのような誓いの主たる価値は象徴的であるだろうが、その誓いが若い科学者に学界や産業でのキャリアに漕ぎ出す前に研究の専攻分野の帰結についてより広くじっくり考えさせるきっかけを与えるであろうと私は信じている。

私は合衆国の学生パグウォッシュグループが提唱した誓約が気に入っている。それは既に多くの国々の何千もの学生によって署名されている。それにはこう書かれている;「私は、科学と技術が社会的に責任を持って用いられるようなより良い世界を実現するよう努めることを誓います。私は、人類や自然環境に害を与えることを意図した如何なる目的のためにも私の受けた教育を用いません。私はこの職につく限りにおいて、行動する前に私の研究の倫理的影響を良く考えます。私に課された要求は大きいかもしれませんが、私は個々の責任が平和への道における第一歩であるということを認識しているのでこの宣言に署名します。」

(*Science*,**288**(1999) より)

解答例 : 科学者になろうとする人に筆者が提唱していること　科学は大いに発展し、その応用は我々の生活水準の向上に貢献すると同時に人類・自然環境に有害なものをも生み出している。科学が個人の幸福から国家間の利害までも左右するほどの強大な影響力を獲得した今、もはや科学者が研究成果の応用に関して無責任な態度をとることは許されない。科学者は実際的な科学による害を調査するのみならず、研究上の倫理規約を自らに課すべきである。卒業して科学研究の世界に羽ばたく前に、何らかの誓いを立て、科学を扱う者としての責任、科学者としての倫理をよく見つめなおしておくべきである。即ち、科学者を志す者は研究の応用に関して研究者としての自分の責任をまず自覚すべきである、と筆者は提唱しているのである。

■ 数学 解答

1. 式の番号を以下のように定める。4 次元ユークリッド空間の部分空間を考えているので各変数は実数である。

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \quad \cdots (1)$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad \cdots (2)$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \quad \cdots (3)$$

$$3x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \quad \cdots (4)$$

(i) (1), (2) より、

$$V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_3 = x_1 + 2x_2, x_4 = 3(x_1 + x_2)\} \quad \cdots (5)$$

よって V_1 は $\underline{2\ 次元}$ の空間。

(3), (4) より、

$$V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = (-2x_3 + x_4)/3, x_2 = (-2x_3 + 4x_4)/3\} \quad \cdots (6)$$

よって V_2 は $\underline{2\ 次元}$ の空間。

(ii) $x_3 = x_1 + 2x_2, x_4 = 3(x_1 + x_2)$ を $x_1 = (-2x_3 + x_4)/3$ に代入し、整理して $x_2 = -2x_1$ を得る。
$x_3 = x_1 + 2x_2, x_4 = 3(x_1 + x_2)$ と $x_2 = (-2x_3 + 4x_4)$ からも $x_2 = -2x_1$ を得るので、

$$\begin{aligned} V_1 \cap V_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_2 = -2x_1, x_3 = x_1 + 2x_2, x_4 = 3(x_1 + x_2)\} &\cdots (7)\\ &= \{c(1, -2, -3, -3) | c\ は任意の実数\} &\cdots (8) \end{aligned}$$

となる。よって $\underline{c(1, -2, -3, -3)(c\ は任意の実数)}$ が V_1, V_2 に共通に含まれる。

(iii) 上の結果 (8) より $V_1 \cap V_2$ は $\underline{1\ 次元}$ である。

2. **(i)** $J_n(x)$ が (2) を満たすから、α, β を任意の実数として

$$\frac{d}{dx}\left\{x\frac{dJ_n(\alpha x)}{dx}\right\} + \left(\alpha^2 x - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(\alpha x) = 0 \quad \cdots (9)$$

$$\frac{d}{dx}\left\{x\frac{dJ_n(\beta x)}{dx}\right\} + \left(\beta^2 x - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(\beta x) = 0 \quad \cdots (10)$$

$(9) \times J_n(\beta x) - (10) \times J_n(\alpha x)$ を $[0, 1]$ で積分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \left[J_n(\beta x)\frac{d}{dx}\left\{x\frac{dJ_n(\alpha x)}{dx}\right\} - J_n(\alpha x)\frac{d}{dx}\left\{x\frac{dJ_n(\beta x)}{dx}\right\}\right] + (\alpha^2 - \beta^2)\int_0^1 xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx \\ &= x\left\{J_n(\beta x)\frac{dJ_n(\alpha x)}{dx} - J_n(\alpha x)\frac{dJ_n(\beta x)}{dx}\right\}\Bigg|_0^1 + (\alpha^2 - \beta^2)\int_0^1 xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx \end{aligned}$$

となる。

α, β が $J_n(x)$ の異なる零点である場合を考える。右辺の第 1 項は、(2) より、

- $n = 0$ のとき、$dJ_n(x)/dx = -x\left(d^2 J_n(x)/dx^2 + J_n(x)\right) \to 0\ (x \downarrow 0)$
- $n > 0$ のとき、$(n^2 - x^2)J_n(x) = x\left(xd^2 J_n(x)/dx^2 + dJ_n(x)/dx\right) \to 0\ (x \downarrow 0)$

となるので 0 であるから、

$$\int_0^1 xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx = 0$$

となる。

(ii) まず、(1) の解で $u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ と変数分離でき、初期条件

$$\left[\frac{\partial u(r,\theta,t)}{\partial t}\right]_{t=0} = 0 \quad \cdots (11)$$

を満たすものを求める。

$\psi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ とおき、(1) に代入して整理すると

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}/T = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right)/\psi \quad \cdots (12)$$

を得るので、両辺の値は r,θ,t によらない定数である。これを $-\lambda^2$ とおく。

$\partial^2 T/\partial t^2 = -\lambda^2 T$ の解で、値が実数かつ (11) を満たすものは $T(t) \propto \cos\lambda t$ なるものに限られる。

$\psi(r,\theta)$ に関する方程式を R,Θ で書き直して整理し、 $R' = dR/dr, \Theta' = d\Theta/d\theta$ のように略記すると

$$r^2\left(\frac{R'' + R'/r}{R} + \lambda^2\right) = -\frac{\Theta''}{\Theta}$$

両辺は r,θ によらないので ν^2 とおける。

$\Theta'' = -\nu^2\Theta$ なので、ν が整数の場合に限り一価の独立な実数解 $\Theta(\theta) \propto \sin\nu\theta, \Theta(\theta) \propto \cos\nu\theta$ がある。

$R(r)$ についての方程式は、 $x = \lambda r$ と変数変換すると

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial R}{\partial x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0$$

となるから、 $r \geq 0$ で有限な実数解は $R(r) = J\nu(\lambda r)$ に限られる。

境界条件 $u(a,\theta,t) = R(a)\Theta(\theta)T(t) = 0$ より、$R(a) = J_\nu(\lambda a) = 0$ なので、$\xi_{\nu j}$ を J_ν の j 番目の零点として $\lambda = \xi_{\nu j}/a$ と書ける。

以上より、(11) と境界条件を満たす (1) の解は

$$\varphi^{(1)}_{\nu j} = J_\nu\left(\frac{\xi_{\nu j}}{a}r\right)\sin\nu\theta, \varphi^{(1)}_{\nu j} = J_\nu\left(\frac{\xi_{\nu j}}{a}r\right)\cos\nu\theta$$

の形のものに限られる。これらが、2 個の解の積を半径 a の円 S の内部で積分することで定義される内積に関して直交することを示す。(厳密には完全直交系をなすことを示すべきであろう)

θ に関して先に積分すれば、 $\varphi^{(1)}_{\nu j}$ と $\varphi^{(2)}_{\nu' j'}$ が直交すること、および $\nu \neq \nu'$ のとき $\varphi^{(i)}_{\nu j}$ と $\varphi^{(i)}_{\nu' j'}$ が直交する $(i = 1,2)$ ことがわかる。

よって、 ν が等しく j が異なる場合で、 θ に関する積分が消えない場合を考えればよいが、このとき (i) の結果より

$$\int_S \varphi^{(i)}_{\nu j}\varphi^{(i)}_{\nu j'} dS = \left(\int_0^{2\pi}\sin^2\nu\theta d\theta\right)\int_0^a rJ_\nu\left(\frac{\xi_{\nu j}}{a}r\right)J_\nu\left(\frac{\xi_{\nu j'}}{a}r\right) = 0$$

となる ($x = r/a$ と置換して積分すればよい)。

従って、(上の解が完全直交系をなすことを認めれば) 初期条件 $u(r,\theta,0) = F(r,\theta)$ を満たす解は、

$$a^{(1)}_{\nu j} = \int_S F(r,\theta)J_\nu\left(\frac{\xi_{\nu j}}{a}r\right)\sin\nu\theta dS \Big/ \int_S J^2_\nu\left(\frac{\xi_{\nu j}}{a}r\right)\sin^2\nu\theta dS$$

および

$$a^{(2)}_{\nu j} = \int_S F(r,\theta)J_\nu\left(\frac{\xi_{\nu j}}{a}r\right)\cos\nu\theta dS \Big/ \int_S J^2_\nu\left(\frac{\xi_{\nu j}}{a}r\right)\cos^2\nu\theta dS$$

を用いて、

$$u(r,\theta,t) = \sum_\nu\sum_j J_\nu\left(\frac{\xi_{\nu j}}{a}r\right)\left(a^{(1)}_{\nu j}\sin\nu\theta + a^{(2)}_{\nu j}\cos\nu\theta\right)\cos\frac{\xi_{\nu j}}{a}t$$

となる。

3. **(i)**

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} x(\omega) d\omega \qquad \cdots (13)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(\omega) d\omega \qquad \cdots (14)$$

を (4) に代入し、 t に関する微分と ω での積分の順序を交換して

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[(-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \beta^2) x(\omega) - f(\omega) \right] d\omega = 0 \qquad \cdots (15)$$

を得る。これが任意の t に対して成り立つので、

$$(-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \beta^2) x(\omega) = f(\omega)$$

すなわち $\underline{C(\omega) = -\omega^2 + 2i\alpha\omega + \beta^2}$ となる。

(ii) $f(t) = \delta(t)$ のとき、フーリエ変換の定義により

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \delta(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

であるから、フーリエ変換可能な解 $x(t)$ があるとき、 $x(t)$ は

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} x(\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{f(\omega)}{C(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^{i\omega t}}{(\omega - i\alpha)^2 - \beta^2 + \alpha^2} d\omega \qquad \cdots (16)$$

で与えられることがわかる。ここで、 $g(\omega) = -e^{i\omega t}/\{(\omega - i\alpha)^2 - \beta^2 + \alpha^2\}$ とおく。

(i) $\alpha < \beta$

$\gamma = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ とおくと、 $g(\omega)$ の極は $\omega = i\alpha \pm \gamma$ である。

$\alpha > 0$ より、極はどちらも上半平面にあるので、$t < 0$ のとき (16) によって $x(t) = 0$ となる。

$t > 0$ のとき、図 (1) に示した上側の経路 C に沿った積分は

$$\int_{C'} g(\omega) d\omega = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(g, i\alpha + \gamma) + \mathrm{Res}(g, i\alpha - \gamma) \right) = 2\pi e^{-\alpha t} \frac{\sin \gamma t}{\gamma}$$

となり、半円の半径を R とすれば、 $R >> \alpha, \beta$ のとき $|g(\omega)| = O(R^{-2})$ なので、$R \to \infty$ のとき半円部分の積分は 0 に収束する。よって

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega = e^{-\alpha t} \frac{\sin \gamma t}{\gamma}$$

となる。

以上から、

$$x(t) = \Theta(t) e^{-\alpha t} \frac{\sin \gamma t}{\gamma} = \Theta(t) e^{-\alpha t} \frac{\sin \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} t}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$$

を得る。

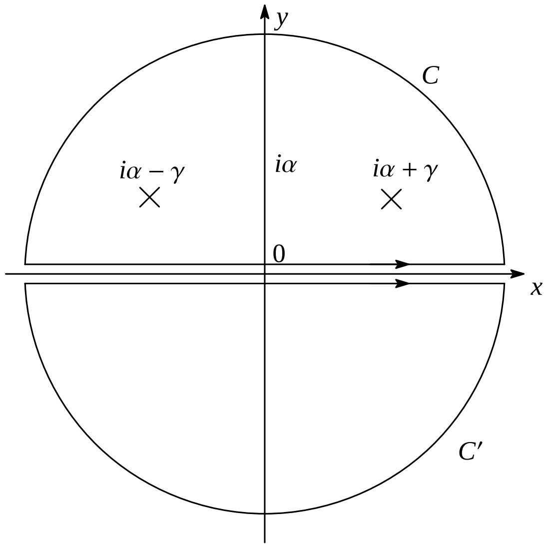

図 1: $\alpha < \beta$ の場合の積分経路

(ii) $\alpha = \beta$

このとき、 $g(\omega)$ は $\omega = i\alpha$ に 2 位の極を持つ。
$f(z)$ が $z = z_0$ に n 位の極を持つとき、

$$\mathrm{Res}\,[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0, z\neq z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)]$$

であるから、

$$\mathrm{Res}\,[g(\omega), i\alpha] = \lim_{\omega\to i\alpha} \frac{d}{d\omega}(-e^{i\omega t}) = -ite^{-\alpha t}$$

となる。
$t > 0$ のとき、図 (1) の C に沿って積分すると半円部分は (i) と同様に $R \to \infty$ で消えるので、

$$x(t) = 2\pi i \mathrm{Res}\,[g(\omega), i\alpha] = te^{-\alpha t}$$

$t < 0$ のとき、図 (1) の C' に沿って積分すると半円部分が消え、 $x(t) = 0$ となる。
よって、

$$x(t) = \Theta(t) te^{-\alpha t}$$

が得られる。

(iii) $\alpha > \beta$

$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ と定める。

$\alpha > \gamma > 0$ より、極はどちらも上半平面にあるので、$t < 0$ のとき (16) によって $x(t) = 0$ となる。

$t > 0$ のとき、図 (2) に示した上側の経路 C に沿った積分は

$$\int_{C'} g(\omega) d\omega = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(g, i\alpha + i\gamma) + \mathrm{Res}(g, i\alpha - i\gamma)\right) = 2\pi e^{-\alpha t} \frac{\sinh \gamma t}{\gamma}$$

となり、半円の半径を R とすれば、 $R >> \alpha, \beta$ のとき $|g(\omega)| = O(R^{-2})$ なので、$R \to \infty$ のとき半円部分の積分は 0 に収束する。よって

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega = e^{-\alpha t} \frac{\sinh \gamma t}{\gamma}$$

となる。

以上から、

$$x(t) = \Theta(t) e^{-\alpha t} \frac{\sinh \gamma t}{\gamma} = \Theta(t) e^{-\alpha t} \frac{\sinh \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} t}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$$

を得る。

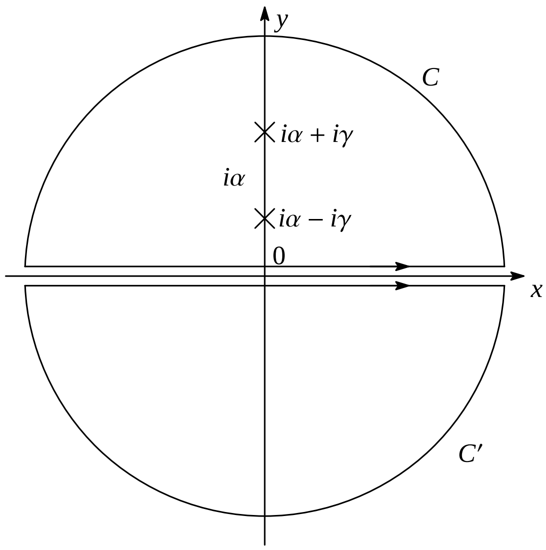

図 2: $\alpha > \beta$ の場合の積分経路

(注) 境界条件が指定されていないので、一般解は 2 個の積分定数を含むが、問題文の指示に従って解くと $t < 0$ で $x(t) = 0$ を満たす解のみが得られる。