

目次	2004 年度	5
	一般教育	7
	物理専門	20
	2003 年度	43
	一般教育	45
	物理専門	57
	2002 年度	105
	一般教育	107
	物理専門	118
	2001 年度	155
	一般教育	157
	物理専門	166
	2000 年度	199
	一般教育	201
	物理専門	210
	1999 年度	241
	一般教育	243
	物理専門	260
	1998 年度	293
	一般教育	295
	物理専門	314
	1997 年度	343
	一般教育	345
	物理専門	358
	1996 年度	395
	一般教育	397
	物理専門	411
	1995 年度	439
	一般教育	441
	物理専門	454
	1994 年度	481
	一般教育	483
	物理専門	497
	1993 年度	517
	一般教育	519
	物理専門	532

1992 年度	559
一般教育	561
物理専門	603

これらは2003年度のものです。

【試験に関する注意事項】

英語・数学 9時00分～11時00分(120分)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用のこと。
3. 問題は全部で4問ある。4問全てに解答せよ。
4. 答案用紙は数学2枚、英語2枚（罫線入り）が配布されていることを確かめること。
5. 数学の解答は2枚とじ解答用紙に記入し、1問ごとに別のページを用いること。英語の解答は罫線入りの2枚とじ解答用紙に記入し、同じく1問ごとに別のページを用いること。
6. 各答案用紙の所定欄に科目名（物理学）受験番号、指名、問題番号を記入すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係のない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと。

物理学 12時30分～17時00分(270分)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用のこと。
3. 問題は全部で9問ある。9問から5問選んで解答すること。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計5枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名（物理学）受験番号、指名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係のない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙に絶対使用しないこと。計算用紙は別に配布する。

2004 年度

2004年度 入学試験 一般教育科目

第 1 問

次の英文は H. A. Bethe の講演からの抜粋である。これを読み以下の設問 (i)、(ii)、(iii)、(iv) に答えよ。

From time immemorial people must have been curious to know what [a] the sun shining. The first scientific attempt at an explanation was by Helmholtz about one hundred years ago, and was based on the force most familiar to physicists at the time, gravitation. When a gram of matter falls to the sun's surface it [b] a potential energy

$$E_{pot} = -GM/R = -1.91 \times 10^{15} \text{ erg/g}, \quad \dots (1)$$

where $M = 1.99 \times 10^{33}$ g is the sun's mass, $R = 6.96 \times 10^{10}$ cm its radius, and $G = 6.67 \times 10^{-8}$ the gravitational constant. A similar energy was set free when the sun was assembled from interstellar gas or dust in the dim past; actually somewhat more, because most of the sun's material is located closer to its center, and therefore has a numerically larger potential energy. One-half of the energy set free is [c] into kinetic energy according to the well-known virial theorem of mechanics. This will permit us later to estimate the temperature in the sun. The other half of the potential energy is radiated away. We have known that at present the sun radiates

$$\epsilon = 1.96 \text{ erg/g sec.} \quad \dots (2)$$

Therefore, if gravitation supplies the energy, there is enough energy available to supply the radiation for about 10^{15} sec which is about 30 million years.

This was long enough for nineteenth century physicists, and certainly a great deal longer than man's recorded history. It was not long enough for the biologists of the time. Darwin's theory of evolution had just become popular, and biologists argued with Helmholtz that evolution would require a longer time than 30 million years, and that therefore his energy source for the sun was insufficient. They were right.

(1) At the end of the 19th century, radioactivity was discovered by Becquerel and the two Curie's who received one of the first Nobel prizes for this discovery. Radioactivity permitted a determination of the age of the earth, and more recently, of meteorites which indicate the time at which matter in the solar system solidified. On the bases of such measurements the age of the sun is estimated to be 5 milliards of years, within about 10 %. So gravitation is not sufficient to supply its energy over the ages.

Eddington, in the 1920's, investigated very thoroughly the interior constitution of the sun and other stars, and was much concerned about the sources of stellar energy. His favorite hypothesis was the complete annihilation of matter, changing nuclei and electrons into radiation. The energy which was to be set free by such a process, if it could [d], is given by (2) the Einstein relation between mass and energy and is

$$c^2 = 9 \times 10^{30} \text{ erg/g} \quad \dots (3)$$

This would be enough to [e] the sun's radiation for 1500 milliards of years. However nobody has ever observed the complete annihilation of matter. From experiments on earth we know that protons and electrons do not annihilate each other in 10^{30} years. It is hard to believe that the situation would be different at a temperature of some 10 million degrees such as [f] in the stars, and Eddington appreciated this difficulty quite well.

(3) From the early 1930's it was generally assumed that the stellar energy is produced by nuclear reactions. Already in 1929, Atkinson and Houtermans concluded that at the high temperatures in the interior of a star, the nuclei in the star could penetrate into other nuclei and cause nuclear reactions, releasing energy. In 1933, particle accelerators began to operate.

rate in which such nuclear reactions were actually observed. They were found to obey very closely the theory of Gamow, Condon and Gurney, on the penetration of charged particles through potential barriers. In early 1938, Gamow and Teller revised the theory of Atkinson and Houtermans on the rate of « the mononuclear » reactions, i.e. nuclear reactions occurring at high temperature. At the same time, von Weizsäcker speculated on the reactions which actually might take place in the stars.

meteorite: 隕石.

1 erg=10⁻⁷ J (cgs 単位).

milliard: 10 億.

(i) 文章中の (a) から (f) まで 6箇所の四角にあてはまる単語の原型を次の中からえらべ。

(ア) transform (イ) supply (ウ) keep (エ) get (オ) prevail (カ) occur

(a)		(b)		(c)		(d)		(e)		(f)	
-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--

(ii) 下線部 (1) を和訳せよ。

(iii) 下線部 (2) の the Einstein relation とはなんであるか、簡単に英語で説明せよ。

(iv) 下線部 (3) を和訳せよ。

第 2 問

次の英文は R. A. Millikan の講演からの抜粋である。これを読み以下の設問 (i),(ii),(iii) に答えよ。

The most direct and unambiguous proof of the existence of the electron will probably be generally admitted to be found in an experiment which for convenience I will call the oil-drop experiment. But before discussing the significance of that advance I must ask you to bear with me while I give the experimentalist's answer to the very fundamental but very familiar query: << What is electricity? >> His answer is naive, but simple and definite. He admits at once that as to the ultimate nature of electricity he knows nothing.

He begins rather with a few simple and familiar experiments and then sets up some definitions which are only descriptions of the experiments and therefore involve no hypothetical elements at all.

He first notes the fact that a pith ball, after contact with a glass rod that has been rubbed with silk, is found to be endowed with the new and striking property that it tends to move away from the rod with a surprisingly strong and easily measurable force. He describes that facet, and affirms at the same time his ignorance of all save the existence of this force, by inventing a new word and saying that the pith ball has been put into a positively electrified state, or simply has received a charge of positive electricity. He then measures the amount of its charge by the strength of the observed force.

Similarly he finds that the pith ball, after contact with an ebonite rod that has been rubbed with cat's fur is attracted, and he proceeds to describe this experiment by saying that it has now received a charge of negative electricity. Whenever the pith ball is found to have been put, by contact with any body or by any other process, into a condition to behave in either of the foregoing ways, it has, by definitions, received a charge of either positive or negative electricity. The whole of our thinking about electrical matters starts with these two simple experiments and those two definitions.

In order now to get the most crucial possible test of the correctness of incorrectness of Franklin's conception of a particle, or an atom, of electricity it was clearly necessary to reduce the charge on the pith ball to the smallest possible amount, to change that charge by the most minute possible steps, and then to see whether the forces acting upon it at a given distance from the glass rod (i.e. in a constant field) had any tendency to increase or decrease by unitary steps.

The success of the experiments first performed in 1909, was wholly due to the design of the apparatus, i.e. to the relation of the parts.

The pith ball itself which was to take on the smallest possible charge had of course to be the smallest spherical body which could be found and yet which would remain of constant mass; for a continuously changing gravitational force would be indistinguishable, in its effect upon the motion of the charged body, from a continuously changing electrical charge.

A non-homogeneous or non-spherical body also could not be tolerated; for the force acting on the pith ball had to be measured by the speed of motion imparted to it by the field, and this force could not be computed from the speed unless the shape was spherical and the density absolutely constant. This is why the body chosen to replace the pith ball was an individual oil-droplet about a thousandth of a millimeter in diameter blown out of an ordinary atomizer and kept in an atmosphere from which convection currents had been completely removed by suitable thermostatic arrangements. The glass rod, the purpose of which was to produce a constant electrical field, was of course replaced by the two metal plates C and D (Fig. 1) of an air condenser, one of the plates (D) being attached to the positive, the other (C) to the negative terminal of a battery, and a switch being added, as shown in the figure, so as to make it possible to throw the field on or off at will.

pith: 木髓、植物の茎の中心にある柔らかい組織、軽く、帯電しやすい性質を持つ。

rod: 棒. save: を除いて (=except).

spherical: 球形の. atomizer: 噴霧器.

convection currents: 対流

- (i) Millikan は木髓球が受け取った電荷が正であるか、あるいは負であるかを調べるためにには、どのような実験を行えば良いと言っているのだろうか。それぞれの場合の木髓球の振る舞いも答えよ。

(ii) 油滴の落下実験を成功に導いた油滴の特徴について、本文中に述べられていることを箇条書きにしてすべて挙げよ。

(iii) ここには示していないが、原文では実験装置の概略図 (Fig. 1) が描かれている。その一部である 2 枚の金属板 (C と D) を含む回路図を、本文中の説明をもとに描け。

第 1 問

(1) n 個の n 次元ベクトル $u_j(j = 1, \dots, n)$ を用いて、行列 U を $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ で定義するとき、 U がユニタリー行列ならば、 $\{u_j\}$ は正規直交系をなすことを示せ。

(2) A を実対称行列、 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ を n 次元ベクトルとする。ただし、 T は転置を表す。このとき実 2 次形式 $\phi(x) = x^T A x$ に対し適当な直交変換 $x = Py$ を行うと、対角行列 B を用いて $\phi = y^T B y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ の標準形に変換できる。

$\phi(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_3x_1$ について、 $A, P, \lambda_i(i = 1, 2, 3)$ を求め標準形で表せ。

(3) A を n 次実対称行列として、次の微分方程式を考える。

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

このとき、スカラー関数 $\Phi(x)$ を用いて $\frac{d\Phi}{dt} = -\Delta_x \Phi(x)$ と書けることを $\Phi(x)$ の具体形とともに示せ。ただし、 $\frac{d\Phi}{dt} = (\frac{d\Phi}{dt}, \dots, \frac{d\Phi}{dt})^T, \Delta_x \Phi = (\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n})^T$ である。

(4) 設問 (3) で軌道 $x(t)$ に沿った Φ の微分 $d\Phi(x(t))/dt$ は、 $\frac{d\Phi(x(t))}{dt} \leq 0$ を満たすことを示せ。また、任意の $x(x \neq 0)$ に対し $\Phi > 0$ が成り立つならば、解軌道は最終的に $x = 0$ に漸近することを示せ。

第 2 問

$f(x, t)$ についての偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(xf) + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \cdots (1)$$

を考える。

f および $\partial f / \partial x$ は、 $x \rightarrow \pm\infty$ に対して十分速やかに 0 に収束する。また、 D は正の定数とする。

(1) x についての f の定積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx$$

が保存されること、すなわち $dI/dt = 0$ であることを示せ。

(2) 原点 $x = 0$ を中心とするガウス分布関数

$$g(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \quad (\sigma \text{ は正の定数})$$

が、はじめの偏微分方程式の定常解（すなわち、 $\partial f / \partial t = 0$ ）であるとき、 σ はどう表せるか。

(3) 中心 $X(t)$ 、標準偏差 $\sigma(t)$ (X および σ は t の関数) のガウス分布関数

$$f(x, t) = g(x - X(t), \sigma(t))$$

が、はじめの偏微分方程式の解になるために、 $X(t)$ および $\sigma(t)$ の満たすべき常微分方程式を求めよ。

(4) はじめの偏微分方程式を、初期条件 $f(x, 0) = \delta(x - 1)$ のもとで解き、 $t \rightarrow \infty$ において設問(2)で求めた定常解に近づくことを示せ。（デルタ関数 $\delta(x - 1)$ は、 $g(x - 1, \sigma)$ の $\sigma \rightarrow 0$ の極限であることを考慮せよ。）

第 1 問 解答

(i)

(a)	ウ	(b)	工	(c)	ア	(d)	力	(e)	イ	(f)	オ
-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---

(ii)

19 世紀末、ベクレルと二人のキューリーによって放射能が発見され、彼らはこの発見により初期のノーベル賞を受賞した。放射能は地球の年齢の決定を可能にし、さらに最近では、太陽系で物質が凝固した年代を暗示する隕石の年齢の決定も可能にした。このような測定に基づくと太陽の年齢は、10 %以内の誤差で、50 億年であると見積もられる。よって重力は、このような長い年月もの間太陽のエネルギーを供給するには不十分である。

(iii)

The Einstein relation between mass and energy contends that mass and energy are equivalent. Their relation is given by the equation " $\epsilon^2 = mc^2$ ", where ϵ represents the energy, m the mass, and c the speed of the light.

(iv)

1930 年代初頭より、星のエネルギーは核反応によって生み出されているのだと一般的に考えられるようになつた。1929 年にすでに、アトキンソンとホーターマンが、星の中心の高い温度においては星の中の原子核は他の原子核まで到達することができ、エネルギーの解放をともなう核反応を起こすことができると結論したのだ。1933 年には、このような核反応が実際に観測されるような粒子加速器が稼動しはじめた。

第 2 問 解答

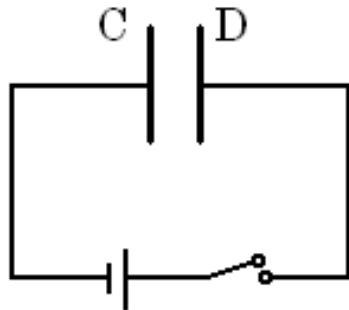
(i)

木髄球に絹でこすったガラス棒を近づけて、木髄球の動きを見れば良いと言っている。もし木髄球が正に帯電しているならガラス棒から離れようとし、逆に負に帯電しているならガラス棒に引き寄せられる。

(ii)

- 最小の電荷を受け取れるように、油滴が、実現できる最小の大きさであったこと。
- 電場から受ける力を計算できるように、油滴が球型であったこと。
- 油滴の質量が同じになるように、質量密度が完全に一定であったこと。

(iii)



第 1 問 解答

(1)

$$U = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \end{pmatrix} \text{ と書くと、 } U^* = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^* \\ \vec{u}_2^* \\ \vdots \\ \vec{u}_n^* \end{pmatrix} \text{ である。}$$

U がユニタリー行列であるから、

$$U^* U = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^* \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1^* \cdot \vec{u}_2 & \cdots \\ \vec{u}_2^* \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2^* \cdot \vec{u}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = E$$

各成分を見れば、題意は証明された。

(2)

$$\phi = \vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T P^T A P \vec{y}$$

適当な直交行列 P を用いて、 A を対角化する。固有ベクトルが互いに直交することを利用する。まず A の固有値、固有ベクトルを求め、それを使って基底の変換をする。

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ から固有値を求める。}$$

$$\text{固有値 } \lambda = 1 \text{ に対して、固有ベクトル } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{固有値 } \lambda = 2 \text{ に対して、固有ベクトル } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{固有値 } \lambda = 5 \text{ に対して、固有ベクトル } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。 P を求めるには、 P が直交変換であることに注意して、 P の各列をノルム 1 の固有ベクトルにする。よって

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(3)

$n=3$ くらいで実験するのが、わかりやすいかと思われる。

A の成分を a_{ij} のように書くことにする。

成分で書くと、

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

積分して、

$$x_1 = a_{11}\frac{x_1^2}{2} + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + f(x_2, x_3)$$

$$x_2 = a_{21}x_1x_2 + a_{22}\frac{x_2^2}{2} + a_{23}x_1x_3 + f(x_1, x_3)$$

$$x_3 = a_{31}x_1x_3 + a_{32}x_2x_3 + a_{33}\frac{x_3^2}{2} + f(x_1, x_2)$$

ただし f は任意の関数でよい。A は対角行列であることに注意すると、次のようにすればよいことがわかる。

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= -\left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\frac{x_i^2}{2} + \sum_{i \neq j} a_{ij}\frac{x_i x_j}{2}\right) \\ &= -\sum_{i,j} a_{ij}\frac{x_i x_j}{2}\end{aligned}$$

(4)

$$\frac{dx}{dt} = A\vec{x} = -\nabla_x \Psi(\vec{x})$$

から直接示そうとすると、成分計算がごちゃごちゃになって、ちょっと難しい。

ここは(2)を使って、基底の変換をする。

$$\vec{x} \rightarrow P\vec{y}$$

とすると、

$$P^{-1}\nabla_x \rightarrow \nabla_y$$

であり、 Ψ がスカラーなので変換を受けないと注意すると、

$$\frac{dy}{dt} = P^{-1}APy = -\nabla_y \Psi(\vec{y})$$

となり、 Ψ を対角化した、

$$\Psi = -\sum_i^n \lambda_i \frac{y_i^2}{2} \quad \cdots (1)$$

だけで考えればいいことになる。こうしておけば、直接計算して、

$$\frac{d\Psi(y(t))}{dt} = -\sum_i^n \lambda_i y_i \frac{dy_i}{dt} = +\sum_i^n \lambda_i y_i \frac{\partial \Psi(y)}{\partial y_i} = -\sum_i^n \lambda_i^2 y_i^2 \leq 0 \quad \cdots (2)$$

で問題の前半は終わった。

また、任意の $x(x \neq 0)$ に対して $\Psi > 0$ が成り立つとき、(1) 式から \dot{y} は負。すると (1) 式の言っていることは、 y が中心 $y=0$ から離れるほど、二次関数的に単調にポテンシャルが増加するということである。式 (2) の意味は、「解曲線に沿ったポテンシャルの時間変化は、マイナス」つまり、「ポテンシャルの低いほうへ y は移動」であるから、解軌道は最もポテンシャルの低い $y=0$ へ漸近する。

第 2 問 解答

偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(xf) + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \cdots (1)$$

を考える。

ただし、条件として

- $f, \partial f / \partial x$ が, $x \rightarrow \pm\infty$ に対して十分速やかに 0 に収束する。
- D は正の定数

が与えられている。

(1)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx \quad \cdots (2)$$

として, $dI/dt = 0$ を示す。

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x}(xf) + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dx \\ &= \left[xf + D \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{-\infty}^{\infty} \end{aligned} \quad \cdots (3)$$

条件より,

$$xf \rightarrow 0 (x \rightarrow \pm\infty) \quad \cdots (4)$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow 0 (x \rightarrow \pm\infty) \quad \cdots (5)$$

であるから, $\cdots (5)$ に代入して, $dI/dt = 0$ が云える。□

(2)

$$g(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \quad \cdots (6)$$

に対して,

$$\frac{\partial}{\partial x}(xg) + D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0 \quad \cdots (7)$$

であるための σ の条件を求める。

計算すると,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x}{\sigma^2} g \quad \cdots (8)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{g}{\sigma^2} + \frac{x^2}{\sigma^4} g \quad \cdots (9)$$

であることから, … (9) にこれらを代入すると,

$$\begin{aligned} g - \frac{x^2}{\sigma^2}g + D\left[\frac{x^2}{\sigma^4}g - \frac{g}{\sigma^2}\right] &= 0 \\ \iff \left(1 - \frac{D}{\sigma^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right)g &= 0 \end{aligned} \quad \cdots (10)$$

これが x に関わらず成立するので, $1 - D/\sigma^2 = 0$ が云える.

$$\therefore \sigma = \sqrt{D} \quad \square \quad \cdots (11)$$

(3)

ガウス分布関数

$$f(x, t) = g(x - X(t), \sigma(t)) \quad \cdots (12)$$

が … (12) の解になるための条件を考える.

… (12) の f の微分は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left[\frac{1}{\sigma(t)^3} \left\{ (X(t) - x)^2 \frac{d\sigma}{dt} - \sigma(t)(X(t) - x) \frac{dX}{dt} \right\} - \frac{1}{\sigma(t)} \frac{d\sigma}{dt} \right] g(x - X(t), \sigma(t)) \quad \cdots (13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x - X(t)}{\sigma(t)^2} g(x - X(t), \sigma(t)) \quad \cdots (14)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left[\frac{(x - X(t))^2}{\sigma(t)^4} - \frac{1}{\sigma(t)^2} \right] g(x - X(t), \sigma(t)) \quad \cdots (15)$$

となるので, これを … (15) に代入して,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\sigma(t)^3} \frac{d\sigma}{dt} \right) x^2 + \left(\frac{1}{\sigma(t)^2} \frac{dX}{dt} - \frac{2X(t)}{\sigma(t)^3} \frac{d\sigma}{dt} \right) x + \left\{ \left(\frac{X(t)^2}{\sigma(t)^3} - \frac{1}{\sigma(t)} \right) \frac{d\sigma}{dt} - \frac{x(t)}{\sigma(t)^2} \frac{dX}{dt} \right\} \\ &= \left(\frac{D}{\sigma(t)^4} - \frac{1}{\sigma(t)^2} \right) x^2 + \left(\frac{X(t)}{\sigma(t)^2} - \frac{2DX(t)}{\sigma(t)^4} \right) x + \left\{ 1 + D \left(\frac{X(t)^2}{\sigma(t)^4} - \frac{1}{\sigma(t)^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad \cdots (16)$$

を得るが, これが x によらずに成り立つための条件は各係数が等しいことであるので, 結果として,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{D}{\sigma} - \sigma \quad \cdots (17)$$

$$\frac{dX}{dt} = -X \quad \cdots (18)$$

を得る. \square

(4)

常微分方程式 … (18), … (18) を初期条件 $\sigma(t) = 0, X(t) = 1$ の下で解けばよい.

常微分方程式 … (18) の一般解は,

$$\sigma(t) = \sqrt{D \pm \exp\{-2(t - C)\}} \quad (C \text{ は任意定数}) \quad \cdots (19)$$

であるから, 初期条件より,

$$\sigma(t) = \sqrt{D(1 - \exp(-2t))} \quad \cdots (20)$$

が解である.

同様にして,

$$X(t) = \exp(-t) \quad \cdots (21)$$

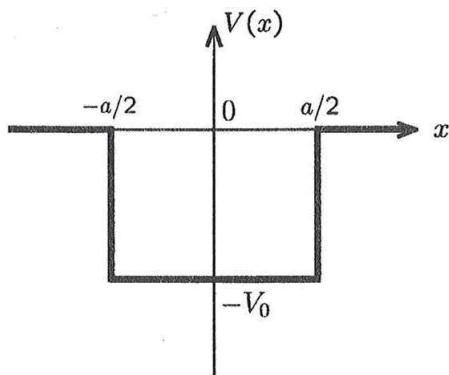
がわかる.

したがって, $x \rightarrow \infty$ で, $\sigma \rightarrow \sqrt{D}, X \rightarrow 0$ であるから, 確かに解は, $g(x, \sqrt{D})$, すなわち (2) でもとめた定常解に近づくことになる. \square

2004年度 入学試験 物理専門科目

第 1 問

幅 a 、深さ $-V_0 (< 0)$ の一次元井戸型ポテンシャル $V(x)$ を考える（図 質量 m の粒子が、 $x = -\infty$ から波数 k の平面波 e^{ikx} で入射すると、その一部は反射し、一部は透過する。このとき、 $x < -a/2$ と $x > a/2$ における波動関数を、それぞれ $\psi = e^{ikx} + Re^{-ikx}$, $\psi = Te^{ikx}$ とし、また $-a/2 \leq x \leq a/2$ における波動関数を $\psi = \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx}$ として、以下の設問に答えよ。但し、 $\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数) とする。



1. 入射波、反射波、透過波に対するフラックス（確率密度の流れ）を、 \hbar, m, k, R, T を用いて表せ。また T と R の関係式を与える。
2. $T = |T|e^{i\theta}$ と書くとき、位相 θ が現れる物理的理由を簡潔に述べよ。
3. p を \hbar, m, k, V_0 を用いて表せ。
4. T を以下の式のように表すとき、 A と B を k と p を用いて表せ。

$$T = \frac{e^{-ika}}{A \cos(pa) - iB \sin(pa)}$$

5. 入射した波が反射を全く受けない（完全透過する）為の k が満たすべき条件を求めよ。また、完全透過がおこる物理的理由を簡潔に述べよ。
6. $|T|^2$ を k の関数として図示せよ。

第 2 問

金属中の伝導電子系をフェルミ・ディラック統計に従う自由電子気体とみなす単純なモデルを考える。図示したように、金属内部を表す一辺 L の立方体の箱の中はポテンシャルがゼロで、外部は $V(>0)$ になっているものとする。この中に N 個の電子が存在する。このとき以下の設問に答えよ。ただし、電子の質量を m 、ボルツマン定数を k_B 、 $\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数) とする。なお、設問 2 以降では、 L および N が十分に大きいとし、エネルギー準位の分布はほぼ連続と見なして良い。

1. V が十分に大きいものとし、波動関数 $\psi(x, y, z)$ に周期的境界条件

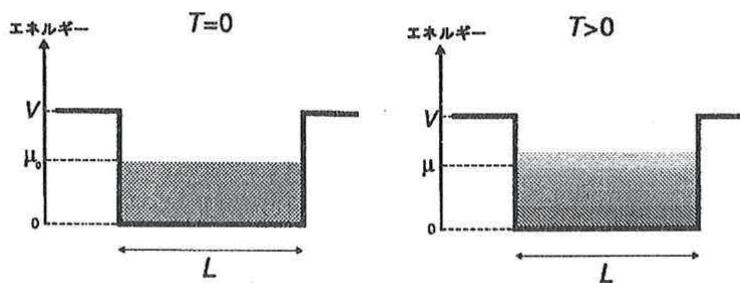
$$\psi(x + L, y, z) = \psi(x, y, z), \quad \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z), \quad \psi(x, y, z + L) = \psi(x, y, z),$$

を適用することによって、箱の中の電子状態を表す固有関数と固有エネルギーを求めよ。

2. 状態密度 $g(\epsilon)$ を求めよ。状態密度とは、エネルギーが ϵ と $\epsilon + d\epsilon$ の範囲にある単位体積あたりの電子状態の数を $g(\epsilon)d\epsilon$ と表したときの $g(\epsilon)$ である。
3. 温度 $T = 0$ における化学ポテンシャル（フェルミ準位） μ_0 と、電子の数密度 $n = N/L^3$ との関係を求めよ。
4. 温度 $T > 0$ では高いエネルギー状態にも有限の確率で電子が分布するので、一部の電子は表面から外部（真空中）に飛び出すことができる。表面に垂直で外向きの方向を $+z$ 軸として、単位面積から単位時間に外部に流れ出す電子の数 J_n を、フェルミ分布関数 $f(\epsilon)$ 、電子の z 方向の速度 v_z を含む三次元波数空間での積分をして表せ。その際、三次元波数空間の積分範囲を明示せよ。
5. $k_B T \ll (V - \mu)$ （ただし μ は有限温度での化学ポテンシャル）という近似のもとで設問 4 の積分を実行することにより、表面から単位時間、単位面積あたりに外部に流れ出す電子の数が

$$J_n = \frac{4\pi m(k_B T)^2}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{V - \mu}{k_B T}\right)$$

となることを示せ。



第 3 問

真空中で、高い強度の単色光（電磁波）と自由電子（質量 m 、電荷 $-e$ ）との相互作用を考える。電子にはたらく力 $\mathbf{F} = -e\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (E, B はそれぞれ光の電場と磁束密度、 v は電子の速度) のうち、光の磁場成分と電子の相互作用の寄与が十分小さいのはどのような場合かを具体的に考察しよう。空間内のある点で、 x 方向に直接偏光した角振動数 ω を持つ単色平面波の電場を $E_x = E_0 \sin \omega t$ と表すとき、以下の設問に答えよ。ただし、真空中での光の速さを c とする。

- 光の電場の振幅 E_0 と磁束密度の振幅 B_0 の比 E_0/B_0 が c であることに注意し、電子には働く力のうち、光の磁場成分と電子との相互作用の寄与が十分小さくなるための v の大きさに関する条件を求めよ。

以下の設問 2,3,5 では、設問 1 で考察した光の磁場成分と電子との相互作用の寄与が十分小さく、無視して良い場合を考える。

- 時刻 $t = t_0$ で電子の速度が 0 であったとする。時刻 $t > t_0$ における光の電場 E_x 中での電子の運動エネルギーを求めよ。
- 設問 2 で求めた運動エネルギーについて、光の電場の 1 周期 $T = 2\pi/\omega$ にわたる平均を求めよ。また、求めた平均が取り得る最小値を明示し、その物理的意味を簡潔に説明せよ。時間に依存するある物理量 $u(t)$ の 1 周期にわたる平均 $\langle u(t) \rangle$ は、

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t') dt'$$

で定義される。

- 光の強度 $I[\text{W/m}^2]$ がポインティングベクトル $S = E \times B / \mu_0$ (μ_0 は真空の透磁率) の大きさの 1 周期平均に相当することに注意し、電場の振幅 E_0 を光の強度 I と $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ (ϵ_0 は真空の誘電率) を含む式で表せ。 Z_0 は真空の放射インピーダンスと呼ばれる。
- 電子の運動エネルギーについて、設問 3 で求めた平均が取り得る最小値を U と書く。設問 4 の結果を用い、 $U[\text{J}]$ の標識を、光の強度 $I[\text{W/m}^2]$ 、その波長 $\lambda[\text{m}]$ 、電子の質量 $m[\text{kg}]$ と電荷の大きさ $e[\text{C}]$ 、光の速さ $c[\text{m/s}]$ 、及び Z_0 を用いて表せ。
- 設問 5 で得られた U の表式に光の強度 I と波長 λ 以外の物理量を代入すると、数値係数は $1.5 \times 10^{-24}\text{s}$ となる。いま、 $\lambda = 0.8\mu\text{m} = 8 \times 10^{-7}\text{m}$ のとき、 $I < 10^{18}[\text{W/m}^2]$ であれば、設問 1 で考察したように、電子に働く力のうち、光の磁場成分と電子との翻訛作用の寄与が十分小さいことを示せ。ただし、 $m = 9 \times 10^{-31}\text{kg}$ とする。

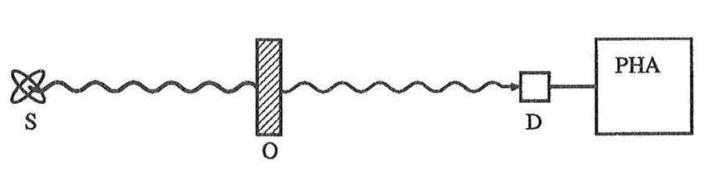
第 4 問

1. ガンマ線と物質の相互作用に関して以下の設問に答えよ。

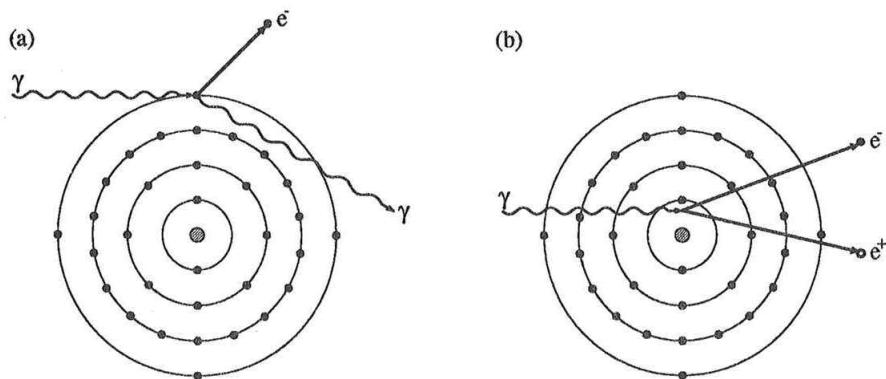
- (i) 物質によるガンマ線の減衰を測定するために、エネルギーが E のガンマ線を一定の強度で等方的に放出するガンマ線源 (S)、厚さ x の物質 (O)、ガンマ線検出器 (D) を、図 2 のように配置して実験を行った。なお、 D は波高分析装置 (PHA) に接続されており、エネルギー E をもつガンマ線だけをカウントすることができる。

T 秒間の測定により得られたカウント数は、 $Y (Y \gg 1)$ であった。次に、 O を取り除いて同じく T 秒間測定し、カウント数を求めるとき、 Y_0 であった。さらに、 S を取り除いたとき T 秒間のカウント数は 0 であった。この物質 O の微笑厚さ Δx で失われるガンマ線の割合が、 $\mu \Delta x$ であるとして、 μ を、 x, Y, Y_0 を用いて表せ。

- (ii) カウント数の統計誤差に起因する μ の実験誤差を求めよ。なお、この実験装置の不感時間は無視できるとしてよい。



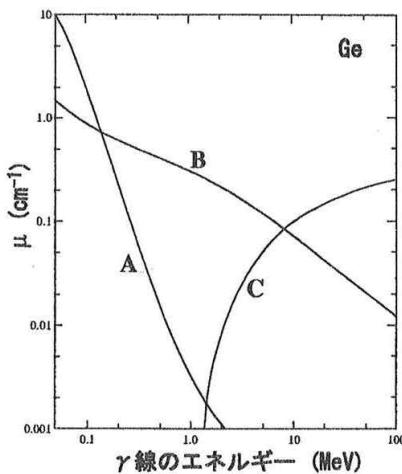
- (iii) ガンマ線と物質内の原子の相互作用に関して、主要な過程は 3 つある。図 3(a), (b) にはこのうち、2 つを模式的に示し、また、図 3 の A, B, C の曲線は、ゲルマニウムに対する、それぞれからの μ への寄与を示す。図 3(a) および (b) の過程はそれどう呼ばれているか、またそれが図 3 の A, B, C のどれに対応するかを答えよ。さらに、残りの過程の名称を答え、その特徴を示す模式図を図 3 にならって描け。



2. 原子核や素粒子の崩壊によって放出されるガンマ線に関して以下の設問に答えよ。

- (i) 図 1(a) のように、ある励起した原子核 A^* は、その静止系で、 1.4MeV のエネルギーのガンマ線を放出して原子核 A に崩壊する。実験室で原子核反応により励起した原子核 A^* を生成したところ、実験室系での速さが光速 c の $801(b)$ に示すように、実験室系で、崩壊前の A^* の速度ベクトルの方向に対するガンマ線の放出角度を θ_L とする。 $\theta_L = 60^\circ$ でガンマ線を観測すると、観測されるガンマ線のエネルギーがいくらになるか。有効数字 2 衔で答えよ。

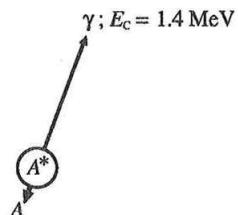
なお、実験室系の z 軸方向に速さ $v = \beta_c$ で静止系が運動しているとき、静止系における 4 元反変ベクトル X_C と実験室系における 4 元反変ベクトル X_L は、ローレンツ変換



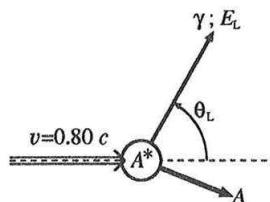
$$X_C = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} X_L$$

で関連づけられる。ただし、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ である。

(a) 静止系



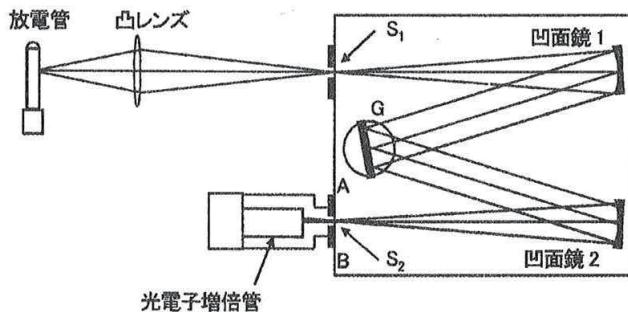
(b) 実験室系



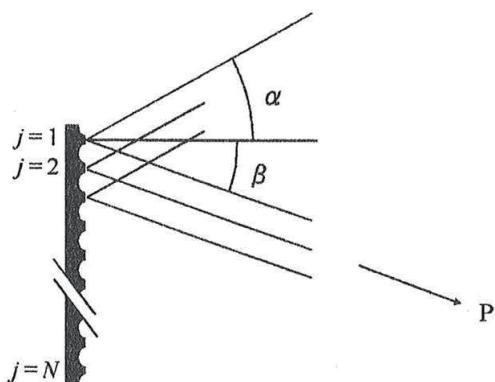
- (ii) π^0 中間子（質量 m ）は、おもに 2 個のガンマ線に崩壊する。実験室でこの崩壊が観測されたとき、2 個のガンマ線のそれぞれのエネルギー (E_1 および E_2)、2 個のガンマ線の方向ベクトルのなす角度 θ 、および m との間にどのような関係が成り立つかを示せ。なお、光速を c とせよ。

第 5 問

放電管のスペクトルを調べるために、分光器を使って図のような実験を行った。放電管から出た発行は、凸レンズによって入り口スリット S_1 上に集光される。 S_1 を通った光線は、凹面鏡 1 によって平行光線となり、回折格子 G に入射する。回折光は凹面鏡 2 によって出口のスリット S_2 上に集光されて、光電子増倍管によって検出される。 G を回転することにより、 S_2 から出てくる光の波長を変化させることができる。



分光器の働きを理解するために、まず回折格子について考察する。回折格子の拡大図を図示す。ただし、取り扱いを簡単にするために、溝の部分からの反射はまったくなく、平らな部分（反射面）の幅は溝に比べて十分に狭いと仮定する。入射光、回折光が回折格子の法線となす角度をそれぞれ α, β 、入射光の波長を λ 、格子の間隔を D とする。 $j = 1, \dots, N$ は反射面の番号である。以下の設問に答えよ。



1. 十分遠方の点 P における、 j 番目と $j+1$ 番目の反射面からの回折光の位相差 ϕ を求め、回折光が強くなるための条件を、 α, β を含む式で書け。ただし、空気の屈折率は 1 と考えてよい。
2. $j = 1$ の反射面からの回折光の点 P における電場が、複素表示で

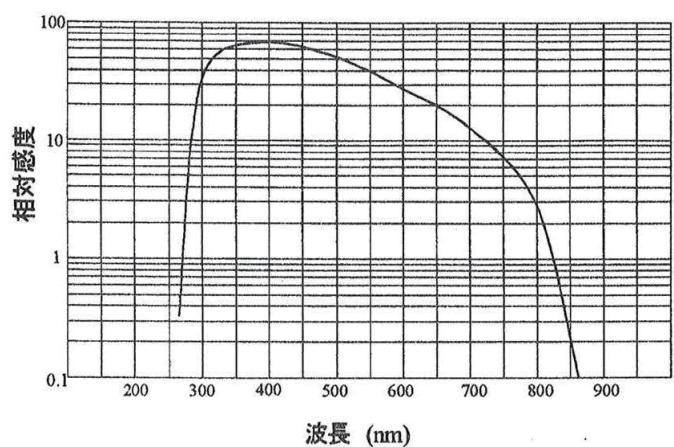
$$E = E_0 \exp(i\omega t)$$

と与えられるとして、 N 本の反射面からの回折光をたし合わせた電場 E_{tot} を、 ϕ を含む複素表示で書け。ただし、 E_0 は α, β によらないものとする。

3. 点 P における螢雪高強度は $|E_{\text{tot}}|^2$ に比例する。 $|E_{\text{tot}}|^2$ の $\phi = 2\pi$ 近傍でのふるまいを、 ϕ の関数として図示せよ。なお、最大値及び、極大、極小などの特徴的な点の ϕ 座標を記入すること。

つぎに、図示した実際の分光器に単色光を入射した場合について考察する。

- 設問 3 で、 $\phi = 2\pi$ のピークは一次回折光とよばれ、分光に利用される。回折格子 G によって、ある一定の方向に回折された光は、凹面鏡 2 によって S_2 を含む平面 AB 上の 1 点に位相差なく集光されるものとする。はじめに、波長 λ において 1 次の回折光が S_2 に集光されるように G の角度を固定 (α, β を固定することに対応) する。次に、入射する単色光の強度を一定に保ちながら λ をわずかに変化させ、 $\lambda + \Delta\lambda$ とする。このとき、 S_2 における光の強度を、 $\Delta\lambda$ の関数として、 $\Delta\lambda \geq 0$ の領域で図示し、最初に現れる極小点における $\Delta\lambda$ の値を、mm 単位で求めよ。ただし、波長 λ を 600nm、回折格子の 1mmあたりの溝の本数を 1000、回折格子の溝に垂直方向の幅を 60nm とする。また、回折格子の全面が一様に回折に寄与しているとする。
- 設問 4 で求めた最初の極小点における $\Delta\lambda$ の値は、分光器のスペクトル分解能のめやすを与える。しかし、実際の分光器のスペクトル分解能は、スリット (S_1, S_2) の幅にも依存する。その理由を簡潔に述べよ。
- この実験で光検知器として用いている「光電子増倍管」の原理を、簡潔に説明せよ。また、この光電子増倍管は図しめすような波長感度特性を持っているが、短波長と長波長で感度がゼロに近づいていくのはなぜか。その理由を簡潔に説明せよ。



第 6 問

実験においては、熱力学的な孤立系を取り扱うことは極めてまれである。例えば、温度を一定に保つために恒温槽を用いたり、圧力を一定に保つために大気圧下で実験を行う。このような系では、外界と系との間で熱の出入りや仕事のやりとりがあり、実験に都合のよい熱力学量を用いることが必要である。その一つがギブズ自由エネルギー (G) であり、

$$G = H - TS$$

で与えられる。ここで、 H, T, S は、それぞれ、エンタルピー、絶対温度、エントロピーである。以下の設問に答えよ。ただし、 $H = E + pV$ である。（ E, p, V は、それぞれ、系の内部エネルギー、圧力、体積である）

- 可逆過程において、外界より系に流入する微少な熱量 δQ とエントロピーの微小変化 dS との間に成り立つ関係式を示せ。

- 可逆過程において、 G の全微分 dG が、

$$dG = Vdp - SdT$$

で与えられることを、熱力学の第 1 法則から出発して示せ。

- 一般に、以下の関係式が成立することを証明せよ。

$$\begin{aligned} S &- \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p \\ H &= -T^2 \left(\frac{\partial (G/T)}{\partial T} \right)_p \end{aligned}$$

- 次に、大気圧下で温度上昇によりもたらされる。鎖状分子の立体構造変化（熱転移）について考えてみよう。この鎖状分子（例えば、蛋白質などの生体高分子を考える）は N このユニットが直鎖状につながったものであり、低温では唯一の立体構造を取るが、温度を上昇させると、ある温度で協同的に熱転移してランダム構造に変わる。ランダム構造では、1 ユニットあたり n 通りの状態を自由に取ることができるとかいついすると、一つの鎖状分子あたりの可能な状態数は n^N 通りあることになる。 $N = 100$ かつ $n = 10$ のとき、低温構造から低温ランダム構造への変化に伴って起こる、分子 1 モルあたりのエントロピーの変化 ΔS_C を求めよ。必要であれば、 $\ln 10 = 2.3$ 、気体定数 $R = 8.3 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ を使ってよい。
- 設問 4 における熱転移は一次相転移として扱うことができる。転移に伴うエントロピー変化が設問 4 の ΔS_C のみであると仮定すると、熱転移温度が 90 の時、熱転移に伴うエンタルピー変化はいくらか。

第 1 問 解答

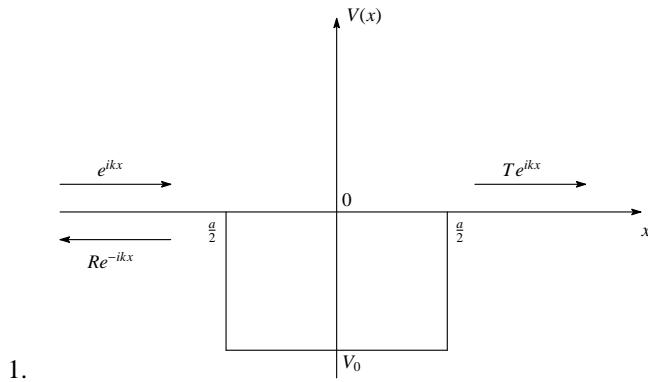


Fig 1: 井戸型ポテンシャル

Flux は次のように定義される .

$$\vec{J} = \operatorname{Re} \left(\psi^* \frac{\hbar}{im} \nabla \psi \right) = \frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*] \quad \cdots (1)$$

今の場合 x 成分を考えると ,

$x < -a/2$ のとき

$$\begin{aligned} J_{x,I} &= \operatorname{Re} \left[(e^{-ikx} + R^* e^{ikx}) \frac{\hbar}{im} ik (e^{ikx} - R e^{-ikx}) \right] \\ &\quad (\text{I} = (-\infty, -a/2)) \\ &= \frac{\hbar k}{m} \operatorname{Re} \left[\left\{ 1 - |R|^2 + (R^* e^{2ikx} - R e^{-2ikx}) \right\} \right] \\ &= \frac{\hbar k}{m} (1 - |R|^2) \end{aligned} \quad \cdots (2)$$

$-a/2 < x < a/2$ のとき

$$J_{x,II} = \frac{\hbar k}{m} (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \quad (\text{II} = (-a/2, a/2)) \quad \cdots (3)$$

$x > a/2$ のとき

$$J_{x,III} = \frac{\hbar k}{m} |T|^2 \quad (\text{III} = (a/2, \infty)) \quad \cdots (4)$$

よって入射波 , 反射波 , 透過波に対するフックスはそれぞれ

$$J_{\text{in}} = \frac{\hbar k}{m}, \quad J_{\text{re}} = \frac{\hbar k}{m} |R|^2, \quad J_{\text{tr}} = \frac{\hbar k}{m} |T|^2 \quad \cdots (5)$$

フックスの保存により

$$\begin{aligned} \frac{\hbar k}{m} (1 - |R|^2) &= \frac{\hbar k}{m} (|\alpha|^2 - |\beta|^2) = \frac{\hbar k}{m} |T|^2 \\ 1 &= |R|^2 + |T|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ .

2. 入射波は $x = \pm a/2$ で一部が反射し、残りが透過する。 $x = a/2$ で反射した波は再び $x = -a/2$ で反射波と透過波に分かれ、さらに $x = -a/2$ で反射した波は再び $x = a/2$ で反射波と透過波に分かれる。このように $-a/2 < x < a/2$ の両端では何度も波が反射と透過を繰り返す。従って、最終的に $a/2 < x$ の領域に出てくる波 $T e^{ikx}$ はそれらの波の重ね合わせになっていると考えられる。この結果、透過波の位相が入射波の位相からずれる。また、同様の理由で $R e^{-ikx}$ の位相も入射波の位相からずれているはずである。
3. schrödinger eq. は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x) \quad \cdots (6)$$

である。

井戸の外側 ($|x| > a/2$) では $V(x) = 0$ であつて $\psi(x) = T e^{ikx}$ (or, $e^{ikx} + R e^{-ikx}$) を式 (6)) に代入すると

$$\frac{\hbar^2}{2m} k^2 = E \quad \cdots (7)$$

を得る。

他方、井戸の内側 ($|x| < a/2$) のときは $V(x) = -V_0$ であり $\psi(x) = \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx}$ を式 ((6)) に代入して

$$\frac{\hbar^2 p^2}{2m} = V_0 + E \quad \cdots (8)$$

を得る。式 ((7)), ((8)) から

$$p = \sqrt{k^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2}} \quad \cdots (9)$$

となる。

4. 波動関数は $x = \pm a/2$ で滑らかに接続される。

$$(x = a/2 =: b) \\ \begin{cases} T e^{ikb} = \alpha e^{ikb} + \beta e^{-ikb} \\ ikT e^{ikb} = ip(\alpha e^{ikb} - \beta e^{-ikb}) \end{cases} \quad \cdots (10)$$

$$(x = -b) \\ \begin{cases} e^{-ikb} + R e^{ikb} = \alpha e^{-ipb} + \beta e^{ipb} \\ ik(e^{-ikb} - R e^{ikb}) = ip(\alpha e^{-ipb} - \beta e^{ipb}) \end{cases} \quad \cdots (11)$$

式 ((4)) より

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{T e^{ikb}}{2p} \begin{bmatrix} (p+k)e^{-ipb} \\ (p-k)e^{ipb} \end{bmatrix} \quad \cdots (12)$$

これを式 ((4)) に代入し、 R を消去すると

$$T = \frac{e^{-ika}}{\cos(pa) - i \frac{p^2+k^2}{2kp} \sin(pa)} \quad \cdots (13)$$

が得られた。

5. 保存の式 ($|R|^2 + |T|^2 = 1$) より, 完全透過するのは $|T|^2 = 1$ の時である. 式 ((13)) より

$$\begin{aligned} |T|^2 &= \frac{1}{\cos^2(pa) + \left(\frac{p^2+k^2}{2kp}\right)^2 \sin^2(pa)} = 1 \\ (p^2 - k^2)^2 \sin^2(pa) &= 0 \end{aligned} \quad \cdots (14)$$

$V_0 \neq 0$ であるから $p \neq k$. よって

$$pa = n\pi \Leftrightarrow (ka)^2 = (n\pi)^2 - \frac{2ma^2V_0}{\hbar^2} \quad (n \in \mathbf{Z}_{>0}) \quad \cdots (15)$$

但し最後の変形には式 ((9)) を用いた.

ここで求めた条件は一種の干渉現象を考えることができる. 井戸型のポテンシャルの幅 a が半波長の整数倍

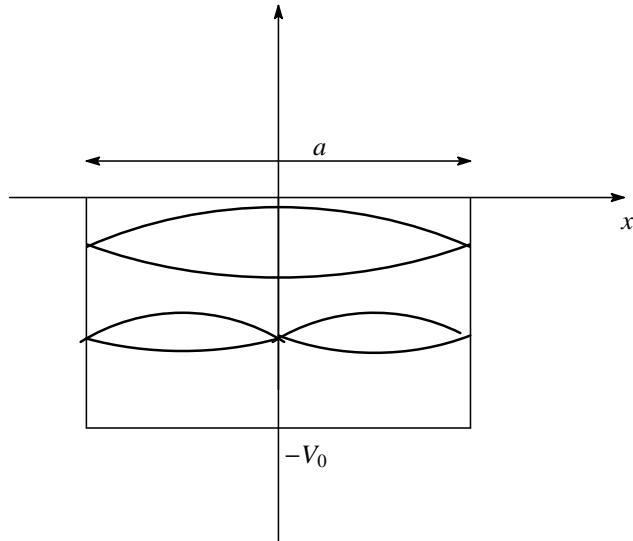


Fig 2: 干渉現象

を含むとき, 定在波が生じる(図 2). 定在波が生じると, 波動関数は常に $x = \pm a/2$ で節になる. よって, 入射波は反射することなく井戸を越えることが出来る. 定在波が生じる条件は

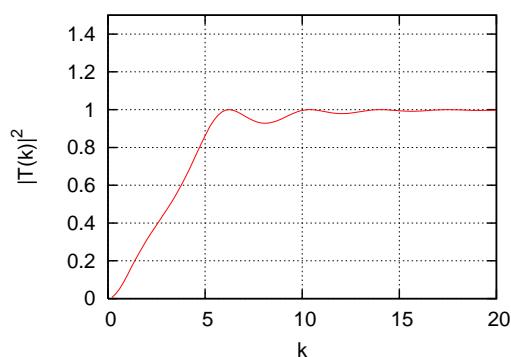
$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{p} \times n \quad (n \in \mathbf{Z}_{>0}) \quad \cdots (16)$$

と現されるが, これは確かに式 ((15)) に等しい.

6.

$$|T(k)|^2 = \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2} \right)^2 \frac{\sin^2(pa)}{p^2 k^2} \right]^{-1}$$

を図示すると図 3 のようになる. 透過係数はだんだんと増していく下縁の包絡線と 1 の間を振動する.

Fig 3: $|T(k)|^2$ の振る舞い

第 2 問 解答

1. 箱の中の schrödinger eq. は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = E\psi \quad \cdots (1)$$

ψ を変数分離して $\psi = X_1(x)X_2(y)X_3(z)$ として式 ((1)) に代入し, ψ でわると

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{X''_1(x)}{X_1(x)} + \frac{X''_2(y)}{X_2(y)} + \frac{X''_3(z)}{X_3(z)} \right) = E \quad \cdots (2)$$

左辺の第 1 項, 第 2 項, 第 3 項は定数である必要があり, それぞれ $E_1, E_2, E_3 (> 0)$ とおくと式 ((2)) は

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} X''_i &= E_i X_i \\ k_i^2 &\equiv \frac{2mE_i}{\hbar^2} \end{aligned}$$

とおくと

$$X_1(x) = e^{ik_1 x}, X_2(y) = e^{ik_2 y}, X_3(z) = e^{ik_3 z} \quad \cdots (3)$$

よって波動関数は

$$\psi = e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} \quad \cdots (4)$$

規格化すると

$$\int_{\text{BOX}} d^3x \psi^\dagger \psi = L^3$$

より

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} \quad \cdots (5)$$

ただし, 周期的境界条件より波数の満たす条件は $X_i(\xi + L) = X(\xi)$ ($\xi = x, y, z$)

$$e^{ik_i L} = 1 \Rightarrow k_i L = 2\pi n_i \quad (n_i \in \mathbf{Z}) \quad \cdots (6)$$

固有エネルギーは

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + E_3 \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \end{aligned} \quad \cdots (7)$$

2. ((6)) より, 波数空間では状態数は一辺 $(2\pi/L)$ の格子状に分布している. このとき半径 $[k, k + dk]$ の間に含まれる状態数を数えると, スピンの自由度に気をつけて

$$2 \times \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3} = L^3 g(\epsilon) d\epsilon \quad \cdots (8)$$

$\epsilon = k^2 \hbar^2 / 2m$ より $k dk = m/\hbar^2 d\epsilon$ であるから式 ((8)) の左辺は

$$2 \times \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3} = \frac{4\pi L^3}{\hbar^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon \quad \cdots (9)$$

$$g(\epsilon) = \frac{4\pi}{\hbar^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} \quad \cdots (10)$$

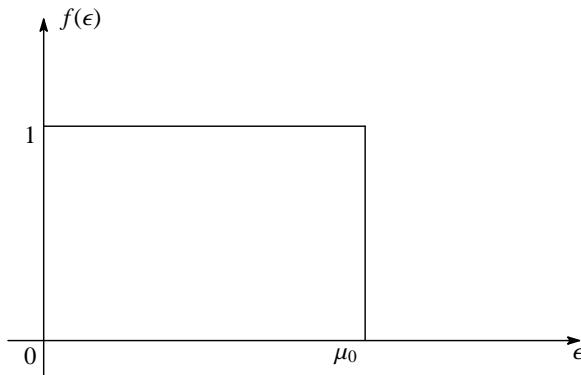


図 4: Fermi Distribution Function

3. 電子数密度は

$$n = \frac{N}{L^3} = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) f(\epsilon) \quad \cdots (11)$$

とかける。ここで $f(\epsilon)$ は Fermi 分布関数であり

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$$

である。今 $T = 0$ であるから $\beta \rightarrow \infty$ であり分布関数は図 4 のようになる 電子は Fermi ポテンシャル以下の状態に収まっており式 ((11)) は以下のようになる。

$$\begin{aligned} n &= \int_0^{\mu_0} d\epsilon g(\epsilon) = \int_0^{\mu_0} d\epsilon \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} \\ &= \frac{8\pi}{3h^3} (2m)^{3/2} \mu_0^{3/2} \end{aligned}$$

4. 電子が飛び出す条件は $v_z (> 0)$ が

$$\frac{1}{2} m v_z^2 > V \quad \cdots (12)$$

であることである。 v_z がこの条件を満たすとき, J_n は題意により図 5 の直方体の中に含まれる電子の総数に等しい。波数が $[k, k + dk]$ にある単位体積あたりの電子状態の数は

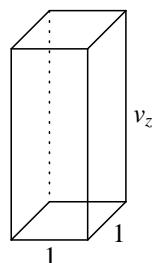


図 5: 単位体積から単位時間に流れ出す電子が含まれる

$$\frac{2}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z$$

であるから

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int_{v_z > \sqrt{2V/m}} dk_z \int_{\mathbf{R}} dk_x \int_{\mathbf{R}} dk_y g(k) f(k) \\
 &= \int_{v_z > \sqrt{2V/m}} dk_z \int_{\mathbf{R}} dk_x \int_{\mathbf{R}} dk_y \frac{2v_z}{(2\pi)^3} \\
 &\times \frac{1}{\exp\left[\beta\left(\frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - \mu\right)\right] + 1} \quad \cdots (13)
 \end{aligned}$$

5. ((12)) より

$$\begin{aligned}
 \exp\left(\beta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)\right) &> \exp(\beta(V - \mu)) \\
 \beta(V - \mu) \gg 1 \Rightarrow \exp(\beta(V - \mu)) &\gg 1
 \end{aligned}$$

よって ((4)) の被積分関数の指數関数部分は

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\exp\left[\beta\left(\frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - \mu\right)\right] + 1} \\
 &= \exp\left[-\beta\left(\frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - \mu\right)\right]
 \end{aligned}$$

とかける。従って

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int_{v_n > \sqrt{2V/m}} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \frac{2v_z}{(2\pi)^3} \\
 &\times \exp\left[-\beta\left(\frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - \mu\right)\right] \\
 &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{\beta\hbar} \exp(\beta\mu) \int_{\sqrt{2mV/\hbar}}^{\infty} dk_z \exp\left[-\frac{\beta\hbar^2 k_z^2}{2m}\right] \\
 &= \frac{4m\pi}{(2\pi\hbar)^3 \beta^2} \exp\{-\beta(V - \mu)\}
 \end{aligned}$$

とかける。

第 3 問 解答

この問題はとても簡単なので解答を読む前に自分でやってみてください。僕も一応解きましたが、でもなんだか三番の平均値が取りうる物理的な意味あたりで答えがしつくりとしません。

- 一般的に電磁場をあわらしてもいいのですが、この問題での一般性は失ないので + z 方向に進行しているとして具体的に表現してしまいます。

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_o \sin(wt - kz + \phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots (1)$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_o \sin(wt - kz + \phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots (2)$$

このとき力は x 成分しかなく、ちょっと書き下してみると、

$$F_x = -eE_o \sin(wt - ky + \phi) \left(1 + v_y \times \frac{B_o}{E_o} \right) \quad \cdots (3)$$

となり、B が無視できるためには $v_y \leq c$ であればよい。

- ちゃんと初期条件を考えて運動方程式をたてる。

$$x(t_0) = x_0, \quad v_x(t_0) = 0 \quad \ddot{x} = -eE_x \quad \cdots (4)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad v_y(t_0) = 0 \quad \ddot{y} = 0 \quad \cdots (5)$$

$$z(t_0) = z_0, \quad v_z(t_0) = 0 \quad \ddot{z} = 0 \quad \cdots (6)$$

これを解くと、

$$x(t) = x_0 + \frac{eE_0}{xw^2} \sin(wt - ky_0 + \phi) \quad \cdots (7)$$

$$v_x(t) = \frac{eE_0}{xw} \cos(wt - ky_0 + \phi) \quad \cdots (8)$$

運動エネルギーを u(t) と置くと、

$$u(t) = \frac{1}{2} \frac{e^2 E_o^2}{mw^2} \cos^2(wt - ky_0 + \phi) \quad \cdots (9)$$

- 2 で求めた運動エネルギー u(t) の平均値を求める。

$$\begin{aligned} < u(t) > &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{1}{2} \frac{e^2 E_o^2}{mw^2} \cos^2(wt - ky_0 + \phi) dt \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{2} \frac{e^2 E_o^2}{mw^2} \int_t^{t+T} \cos^2(wt - ky_0 + \phi) dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^2 E_o^2}{mw^2} \frac{T}{2} \\ &= \frac{e^2 E_o^2}{4mw^2} \end{aligned} \quad \cdots (10)$$

物理的意味は、仕事をされない、周波数が高いときに 0 になるとか。。

4. 光の強度 I がポインティングベクトルの一周期平均に相当することより、

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |S(\hat{t})| d\hat{t} \\
 &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |E \times \frac{B}{\mu_0}| d\hat{t} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{e^2 E_o^2}{m w^2} \frac{T}{2} \\
 &= \frac{E_0^2}{2Z_0}
 \end{aligned} \quad \cdots (11)$$

よって、 $E_0 = \sqrt{2Z_0 I}$

5. 最小値というのが気になるが… 3 の答えを使うと、

$$U = \frac{e^2 Z_0 I \lambda^2}{8\pi^2 mc^2} \quad \cdots (12)$$

6. 問題の条件のとき運動エネルギーの平均値は

$$U < 9.6 \times 10^{-19} [J] \quad \cdots (13)$$

このとき粒子の速さの上限は、

$$\frac{1}{2} m v^2 < 9.6 \times 10^{-19} \quad \cdots (14)$$

上式に電子の質量 $m = 9 \times 10^{-31} [kg]$ を代入すると、

$v \approx 1.5 \times 10^6 [m/sec]$ となり、これは光速より二桁小さいので 1 で考察した条件を満たしていると考える。

第 4 問 解答

ガンマ線と物質の相互作用について

- 物質を Δx 通るとカウント数が $Y\mu\Delta x$ 減少するので、

$$-\frac{dY}{dX} = \mu Y \quad \cdots (1)$$

これを初期値 $X = 0$ で $Y = Y_0$ の元で解くと、

$$Y = Y_0 e^{-\mu X} \quad \cdots (2)$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{X} \ln \frac{Y_0}{Y} \quad \cdots (3)$$

- 実験でカウントしているのは、 Y, Y_0 の 2 つの量であるので、

$$\Delta\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial Y}\Delta Y\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial Y_0}\Delta Y_0\right)^2} \quad \cdots (4)$$

$$= \frac{1}{X} \sqrt{\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y_0}} \quad \cdots (5)$$

ただし、 Y, Y_0 の統計義差をそれぞれ $\sqrt{Y}, \sqrt{Y_0}$ とした。

- (放射線の実験テキスト参照)

(a) コンプトン散乱、曲線は B

(b) 電子陽電子対生成、曲線は C

曲線 A の過程は光電効果であり、図は以下のようになる。

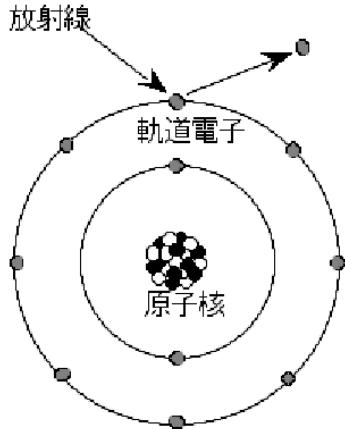


図 6: 光電効果の模式図

. 粒子崩壊の計算

- 反変ベクトルとして、四元運動量ベクトル $(E/c, \vec{p})$ をとる。

原子核反応が起こっている平面を xz 平面として問題文に与えられたローレンツ変換を用いると、

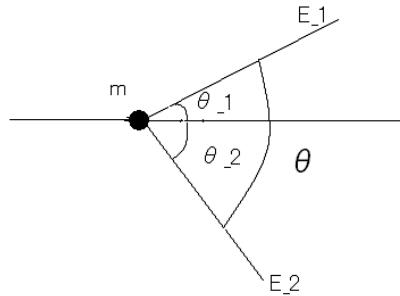
$$\begin{pmatrix} E_L/c \\ p_{Lx} \\ p_{Ly} \\ p_{Lz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_C/c \\ p_{Cx} \\ p_{Cy} \\ p_{Cz} \end{pmatrix} \quad \cdots (6)$$

ここでガンマ線は質量ゼロであるので、 $E = pc$ が成立する。

また、 $p_{Lx} = p_C \cos \theta_L, p_{Lz} = p_C \sin \theta_L$ であるとする。

$\theta_C = 60^\circ, E_C = 1.4\text{MeV}, \beta = 0.8, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{0.6}$ として解くと、 $E_L = 0.6\text{MeV}$ を得る。

2. π^0 中間子の実験室系での速度を βc とする。 $E_1 = p_1 c, E_2 = p_2 c$ として、運動量の保存より



$$m\gamma\beta c = p_1 \cos \theta_1 + p_2 \cos \theta_2 \quad \cdots (7)$$

$$0 = p_1 \sin \theta_1 - p_2 \sin \theta_2 \quad \cdots (8)$$

式(7) $\times \sin \theta_1 -$ 式(8) $\times \sin \theta_2$ より

$$m\gamma\beta \sin \theta_1 c = p_2 \sin \theta \quad \cdots (9)$$

式(7) $\times \cos \theta_1 +$ 式(8) $\times \sin \theta_1$ より

$$m\gamma\beta \cos \theta_1 c = p_1 + p_2 \cos \theta \quad \cdots (10)$$

式(9) と式(10) を辺々 2乗して足すと、

$$(m\gamma\beta c)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos \theta \quad \cdots (11)$$

$$= \left(\frac{E_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{c}\right)^2 + 2\frac{E_1 E_2}{c^2} \cos \theta \quad \cdots (12)$$

ここで $\beta\gamma$ は、エネルギー保存則より

$$(m\gamma\beta c^2)^2 + (mc^2)^2 = (E_1 + E_2)^2 \quad \cdots (13)$$

をみたすので、式(11) (13) より

$$2E_1 E_2 (1 - \cos \theta) = (mc^2)^2 \quad \cdots (14)$$

を得る。

第 5 問 解答

1. j 番目と $j+1$ 番目の反射面からの回折光の光路差は $D(\sin \alpha - \sin \beta)$ で与えられるから、求める位相差 ϕ は

$$\phi = 2\pi \times \frac{D(\sin \alpha - \sin \beta)}{\lambda} \quad \cdots (1)$$

また、 n を整数とすると回折光が強くなる条件は、

$$D(\sin \alpha - \sin \beta) = n\lambda \quad \cdots (2)$$

2. j 番目の反射面からの回折光の点 P における電場は

$$E_j = E_0 \exp\{i\omega t - i(j-1)\phi\} \quad \cdots (3)$$

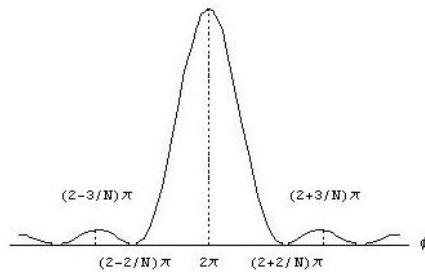
と書けるから、

$$\begin{aligned} E_{tot} &= \sum_{j=0}^{N-1} E_j = \sum_{j=0}^{N-1} E_0 \exp(i\omega t - ij\phi) \\ &= E_0 \exp(i\omega t) \frac{1 - e^{-iN\phi}}{1 - e^{-i\phi}} \end{aligned} \quad \cdots (4)$$

3. 前問の結果より、

$$\begin{aligned} |E_{tot}|^2 &= |E_0|^2 \frac{(1 - e^{iN\phi})(1 - e^{-iN\phi})}{(1 - e^{i\phi})(1 - e^{-i\phi})} \\ &= |E_0|^2 \frac{1 - \cos N\phi}{1 - \cos \phi} \\ &= |E_0|^2 \left(\frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \right)^2 \end{aligned} \quad \cdots (5)$$

となるから、 $|E_{tot}|^2$ の $\phi = 2\pi$ 近傍での振舞いは下図のようになる。



- 4.

$$\phi(\Delta\lambda) = 2\pi \times \frac{D(\sin \alpha - \sin \beta)}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{2\pi C}{\lambda + \Delta\lambda} \quad \cdots (6)$$

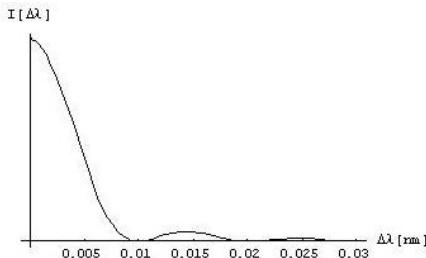
とおくと、一次回折光では $\phi(0) = 2\pi$ より $C = \lambda$ である。

回折格子の全面が一様に回折に寄与することから、 S_2 における光の強度を $I(\Delta\lambda)$ とおくと、

$$I(\Delta\lambda) \propto |E_{tot}|^2 = |E_0|^2 \frac{\sin^2 \frac{N\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} \quad \cdots (7)$$

であるから、A を定数として

$$I(\Delta\lambda) = A \left[\frac{\sin \frac{N\pi}{1+\frac{\Delta\lambda}{\lambda}}}{\sin \frac{\pi}{1+\frac{\Delta\lambda}{\lambda}}} \right]^2 \quad \cdots (8)$$



と書ける。(8) 式に $N = 60000$ 、 $\lambda = 600nm$ を代入し、 $I(\Delta\lambda)$ を図示すると図のようになる。

また、最初に極小点が現れるとき、3. の結果より

$$\frac{\pi}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}} = (1 - \frac{1}{N})\pi \quad \cdots (9)$$

であるからこれを解いて

$$\Delta\lambda = \frac{1}{N-1}\lambda = 1.0 \times 10^{-2}nm \quad \cdots (10)$$

5. スリット S_1 と S_2 においても回折が起こり、光が広がるため。
 6. 光電子増倍管の原理光子が光電面に当たると、光電効果により電子を放出する。放出された電子は電場によって加速され、ダイノードをたたく。このときダイノードより多数の電子が放出される。この放出された電子は次のダイノードとの間にかけられた電場によって加速され、次のダイノードに当たり、さらに多くの電子を放出する。これを繰り返し、一つの光子から多数の電子が生成され、電流として観測する。
- 波長感度特性長波長の光子に対する感度は主に光電陰極の光の吸収の減少と光電子に与えられるエネルギーの減少で決められる。波長が長くなると光電子は光電陰極の表面から離脱することのできるエネルギーを持たなくなり、感度はゼロに近づく。
- 一方、短波長側の応答は光が光電子放出層に到達するまでに通過する窓の性質によって決まる。窓の遮断波長より短い光に対しては感度が悪くなる。

第 6 問 解答

1.

$$\delta Q = Tds \quad \cdots (1)$$

2. $G = H - TS$ 、 $H = U + pV$ 、第一法則 $dU = \delta Q - pdV$ より、

$$dG = dU + Vdp + pdV - TdS - SdT \quad \cdots (2)$$

$$= \delta Q + Vdp - Tds - SdT \quad \cdots (3)$$

$$= Vdp - SdT \quad \cdots (4)$$

3. (2) 式より偏微分して、

$$-\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = S \quad \cdots (5)$$

次に、 G/T を T で偏微分すると、

$$\left(\frac{\partial(G/T)}{\partial T}\right)_p = -\frac{G}{T^2} + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p \quad \cdots (6)$$

$$= -\frac{G}{T^2} - \frac{S}{T} \quad \cdots (7)$$

となるので、

$$-T^2\left(\frac{\partial(G/T)}{\partial T}\right)_p = G + ST = H \quad \cdots (8)$$

となる。

4. エントロピーは状態数 W を用いて、 $S = k \ln W$ と表せるので、エントロピー変化 ΔS_C は、

$$\Delta S_C = N_A(k \ln 10^{100} - k \ln 1 = 100k \ln 10) \quad \cdots (9)$$

$$= R \cdot 100 \ln 10 \quad \cdots (10)$$

$$\approx 8.3 \cdot 100 \ln 10 \quad \cdots (11)$$

$$= 1.909 \times 10^3 \quad \cdots (12)$$

$$\approx 1.9 \times 10^3 [J/K] \quad \cdots (13)$$

$$\cdots (14)$$

となる。

5.

$$dH = dG + Tds + SdT = Vdp + Tds \quad \cdots (15)$$

圧力は変化しないそうなので、

$$\Delta H = T\Delta S_C = 90 \times 1909 = 171810 \approx 1.7 \times 10^5 [J] \quad \cdots (16)$$

となる。

2003年度

2003年度 入学試験 一般教育科目

問題 1

次の英文はある国際研究集会の案内文である。これを読み、設問 1~4 に答えよ。

2nd Announcement - 6th International Interferometry Workshop October 1-3, 2003, US Atomics, San Diego, USA

Venue, Dates and Organizers

The 6th International Interferometry Workshop will be held at the main campus of US Atomics, in San Diego, California. The meeting duration is three days, October 1-3. The local scientific organizers are E.Kepler and T.Planck of UCLA, while US Atomics is providing meeting facilities and administrative support by Alice Newton.

Meeting Format

As at previous meetings, we wish to have a true ‘workshop’ format with opportunities for extensive interaction and discussion amongst participants. To this end, the meeting will consist of oral presentations (10-20 min duration) with scheduled periods for (a).

Workshop Dinner, Facility Visit

A dinner will be organized for the workshop participants, at participants’ own cost - details to be announced later. A visit to the US Atomics facility will be arranged for those interested (please (b) if you are interested when responding).

Registration and Abstracts

All potential attendees should register by completing and returning the attached Foreign Visitor Form to Alice Newton by August 17, 2003 (see security requirements, below). US citizens should complete only the name and contact details, and indicate their citizen status. In order to prepare the scientific program an (c) should be sent to E.Kepler by August 22. Please submit electronically as either a Word or PDF file.

Proceedings

As at previous meetings, participants should submit copies of their (d) for inclusion in the CD-ROM which will be distributed to all the participants after the workshop. Participants are also encouraged to submit a written (e) for the Proceedings as a more complete record of their work, with a maximum length of 10 pages.

Security Requirements

As a DOE facility, access to the US Atomics site is restricted. All non-US citizens MUST (f) and return the accompanying “Foreign Visitor Form” (attached below). All prospective foreign attendees should return this form as soon as possible, no later than 45 days before the meeting (August 17, 2003).

Hotel Accommodations and Transport

Accommodation at a discounted rate is available in a number of local hotels. A hotel reservation form follows below, which includes web links. All participants are requested to return it to Alice Newton. With regard to transport, you will find it more flexible if you can (g) a car and drive yourself. For those not renting, details of shuttle vans and public transport will be provided later.

Visitor Information

Information for visitors to US Atomics is available at <http://web.usat.com/visitors/> which provides links to maps, information on things to (h) and see in the vicinity, airport information, etc. The online map shows the location of a number of the local hotels.

UCLA: University of California, Los Angeles

1. 研究集会参加者が文中の人物 Alice Newton に送らなければならない書類を全て列挙せよ。ただし、英語、日本語どちらで答えるてもよい。
2. この案内文中で、「後日案内する」とされている項目を全て列挙せよ。ただし、英語、日本語どちらで答えるてもよい。
3. 文中の (a) ~ (h) に当てはまる語を以下のリストから選択せよ。ただし、同じ語を二回以上選択してはならない。
abstract, complete, discussion, do, indicate, paper, presentations, rent
4. 下記の状況設定のもとで、Dr. E. Kepler 宛の英文手紙をかけ。必要ならば適当に情報を追加してよい。

差出人の名前は夏目三四郎で、本郷大学の学生である。ごく最近、この研究集会の主題に関連した画期的な実験結果を得た。そこで、この研究集会に出席し、発表したいと思うが、参加申し込みの締め切り日はすでに過ぎている。

問題 2

次の英文を読んで、設問 1, 2, 3 に答えよ。

The second law of thermodynamics is the law of decay. It says that isolated systems tend to become more disordered as time passes: that iced and hot tea soon become indistinguishable, that all living creatures must sicken and die, and that all machines must someday wear out.

Consider a room which is divided into two sections, A and B, by an impermeable partition where there is a pinhole. The air on both sides is at the same pressure and temperature. Randomly moving air molecules, some fast and some slow, pass through the pinhole in either direction. It may be unlikely, but surely it is possible, that most of the molecules passing from A to B happen to be fast, while most of those passing from B to A happen to be slow. If the process continues long enough, region B becomes unbearably hot while region A becomes frigid. The second law of thermodynamics is flouted! However, the probability of this occurrence is unimaginably tiny. It is as unlikely as flipping a fair coin a billion billion times and coming up heads every time. It is so unlikely as to be, for any practical purpose or otherwise, impossible.

Enter James Clerk Maxwell, the nineteenth-century physicist. He proposed a scheme to evade the second law that does not rely on chance. “Now consider a creature,” he wrote, “who knows the paths of all the molecules, but who can do no work but to open and close the hole in the diaphragm.” This hypothetical being, known as *Maxwell’s demon*, allows fast molecules to pass from A to B and slow molecules to pass from B to A. All others find the door closed. In this case, a temperature difference between the two regions will certainly develop. The second law is undone “by the intelligence of a very observant and neat-fingered being.”

There is a loophole to this argument; you can’t fool Mother Nature. The system consisting of room, diaphragm, door, and demon is not isolated. The metabolism of the imaginary being must be taken into account. Whether it be microbe, machine, or genetically engineered monster, it must be connected to the outside world to take its sustenance and eject its waste products. When these are taken into account, the order created in the room is necessarily compensated, or more than compensated, by the disorder produced outside its walls.

flout : (規則を) 無視する、侮辱する evade : (巧みに) 避ける、逃れる

diaphragm : 障壁

metabolism : (新陳) 代謝

microbe : 微生物

sustenance : 食物、栄養物

1. 文中の下線部を和訳せよ。
2. この英文では、「マックスウェルの悪魔」が存在して熱力学の第 2 法則が破れることがあり得ると言っているのか、あり得ないと言っているのか、理由も含めて 200 字程度の日本語で答えよ。
3. 热力学の第 2 法則を表す具体的な例を 50 words 程度の英語で示せ。ただし、この英文とは別の例を挙げること。

問題 1

変数 x についての 2 次以下の次数の多項式のなす線形空間を V とする。

線形写像 $F : V \rightarrow V$ を以下のように定める。

任意の $p(x) \in V$ に対して $F(p(x)) = p(ax + b)$

ここで a, b は定数で、 $a \neq 1$ とする。以下の間に答えよ。

1. $F(x^2 + x + 1)$ を求めよ。
2. V の基底を $e_0(x) = 1, e_1(x) = x, e_2(x) = x^2$ と選ぶ。このとき F の表現行列 M , すなわち

$$(F(e_0(x)), F(e_1(x)), F(e_2(x))) = (e_0(x), e_1(x), e_2(x))M$$

となる行列 M を求めよ。

3. 線形写像 F の固有値、固有ベクトルを求めよ。
4. 任意の自然数 k について、 F を $e_1(x)$ に k 回作用させて得られる V の元を求めよ。
5. 任意の自然数 k について、 F を $e_2(x)$ に k 回作用させて得られる V の元を求めよ。

問題 2

1. $u_k(x, t) = e^{ikx+i\omega t}$ とおく。 $u = u_k(x, t)$ が、次の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を満たすように ω を定めよ。ただし、 a を正の定数、 x および t は実数とする。

2. 1. で得られた $u_k(x, t)$ を用いて、上の偏微分方程式の解を

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k u_k(x, t) dk$$

とおく。与えられた関数 $f(x)$ に対し、初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ をみたすように A_k を $f(x)$ を用いて表わせ。ただし、 k についての積分は実行しなくてよい。

3. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e^{-a^2 k^2 t} dk$ を求めよ。ただし、 y は定数で、 $t > 0$ とする。

4. 3. の結果を用いて 2. の k についての積分を実行し、初期値問題の解 $u(x, t)$ を求めよ。

5. $f(x)$ が次のように与えられているとする。

$$f(x) = \begin{cases} U & \text{if } |x| \leq L \\ 0 & \text{if } |x| > L \end{cases}$$

ただし、 U と $L(> 0)$ は定数とする。このとき、 $u(x, t)$ を $\operatorname{erf}(z)$ を用いて表わせ。ここで、全ての実数 z について

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy$$

と定義する。

問題 1 解答

全訳

2 度目の告知 第 6 回国際干渉計測研究集会
2003 年 10 月 1-3 日 アメリカ原子力機関, San Diego, USA

開催地 日程 主催者

第 6 回国際干渉計測研究集会が San Diego California の US Atomics のメインキャンパスで開かれます。集会の期間は 10 月 1-3 日の 3 日間です。地元の主催科学者は UCLA の E.Kepler と T.Planck です。一方、US Atomics は Alice Newton により集会施設と行政上の支援を提供します。

集会構成

前の集会のときのように私たちは参加者間の広範囲にわたる交流、議論の機会のための真の「研究集会」の構成したい。この目的のために集会は議論のための定められた時間を伴う口頭発表 (10-20 分) からなる。

集会での夕食 施設への訪問

夕食会が集会の参加者のために、参加者負担でおこなわれます。詳細は後で発表されます。US Atomics 施設への訪問は興味のある人のためにとりはかわられます。(興味があれば返答する際に示唆してください。)

登録とアブストラクト

参加する可能性のあるすべての人は 2003 年 8 月 17 日までに Alice Newton に、取り付けられた訪問外国人用紙を仕上げて返信することによって登録するべきです(下の(安全保障上、必要なこと)を見よ)。アメリカ国民は名前と連絡の詳細を仕上げ国民の身分を示すだけで十分です。科学プログラムを準備するため、8 月 22 日までに E.Kepler に要約を送るべきです。Word か PDF ファイルにして電子メールで提出してください。

議事

集会のあとで参加者に配布される CD-ROM に含むため、参加者は発表のコピーを提出するべきです。参加者はより完全な発表の記録として最大 10 ページで議事のために論文を提出することがすすめられます。

安全保障上、必要なこと

エネルギー省の施設なので US Atomics 施設へのアクセスは制限されます。アメリカ国民でないすべての人は外国訪問フォーム(下に取り付けられてる)を仕上げて返信しなければなりません。参加する見込みのあるすべての外国人は集会(2003 年 10 月 17 日)の 45 日前よりも前にできるだけ早く返信するべきです。

宿泊設備と移動

多くの地域ホテルで値引きされた値段で宿泊設備が利用可能です。ホテルの予約フォームは以下にあってウェブのリンクを含みます。すべての参加者は Alice Newton に返信することが求められます。移動に関しては車を借りて自分自身で運転することができればかなり融通がきくとわかるでしょう。借りない人たちにはシャトルバスや公共交通手段の詳細があとで提供されます。

訪問者情報

US Atomics への訪問者情報は <http://web.usct.com/visitors/> で利用可能でそれは地図へのリンク、近隣の観光情報、空港情報等を提供します。オンライン地図はたくさんの地域ホテルの位置を示します。

1. Foreign Visitor Form, hotel reservation form
2. dinner, details of shuttle vans and public transport
3. (a) discussion (b) indicate (c) abstract (d) presentations (e) paper (f) complete (g) rent (h) do
- 4.

University of Hongo.
Hongo Bunkyo, Tokyo
August 30, 2003

Mr. E.Kepler

University of California Los Angeles.

San Diego
U.S.A.

Dear Dr. E. Kepler,

My name is Sanshiro Natsume, a student of University of Hongo.
Recently I got an amazing experimental result related to the subject of
this workshop organized by you. So I wish I could attend the workshop
to present the results, but the deadline for application to attend is
over. Would you please make it so that I can attend the workshop?
I will be waiting for your reply.

Yours truly,
Sanshiro Natsume

問題 2 解答

全訳

熱力学第二法則は崩壊の法則である。それによると、時間が経過するに従い孤立系はより無秩序になりやすい。すなわち、氷で冷やしたお茶と熱いお茶はいつか見分けがつかなくなる。すべての生物は病気になり死ぬ。すべての機械はいつか使えなくなる、ということである。

ピンホールのある浸透性のない仕切りで二つの部分 A と B に分割された部屋を考えよう。両方での空気は等圧、等温である。中には速く、中には遅いランダムに動く空気の分子はピンホールをいずれかの方向に通り抜ける。A から B へ通るほとんどの分子がたまたま速い一方、B から A へ通るほとんどの分子がたまたま遅いことはありえないさうだが、もちろん可能性はある。もしその過程が十分長く続ければ領域 B は耐え難いほど熱くなる一方、領域 A は極寒になる。熱力学第二法則は無視されている！しかしながらこれが起こる確率は信じられないくらい小さい。それは公正なコインを何十億の何十億回投げて毎回表が出るくらいありえない。いかなる実用的な目的やそうでなくともそれは不可能なくらいありえない。

19世紀の物理学者、ジェームズ クラーク マックスウェルが現れる。彼は確率に依らない、第二法則を避ける案を提案した。「さあ、ある生き物を考えよう」彼は書いた、「それはすべての分子の経路を知っているが、隔壁の穴を開けたり、閉じたりする仕事しかできない。」マックスウェルの悪魔として知られる仮説上の存在は速い分子が A から B へ通り、遅い分子が B から A へ通ることを許容する。他のすべての人はドアが閉じているとわかる。この場合、二つの領域の温度差は確実に上昇する。第二法則は「非常に注意深く、適切な指をもつ存在の知性」によって破れる。

この議論には抜け穴がある。自然をだますことはできない。部屋、隔壁、ドア、悪魔からなる系は孤立していない。想像上の存在の代謝を考慮にいれないといけない。微生物、機械や遺伝的に設計された怪物であれ、栄養物をとり、廃棄物を排出するため、外部の世界とつながっていなければならない。これらが考慮されたとき、壁の外部で生み出された無秩序により、部屋でつくりだされた秩序は必然的に補われ、あるいは補われる以上のものがある。

1. マックスウェルは確率に依らない第二法則を避ける案を提案した。「さあ、ある生物を考えよう。」彼は書いた。「それは全ての分子の経路をしっているが、隔壁の穴を開けたり閉じたりする仕事しかできない。」マックスウェルの悪魔として知られるこの仮説上の生物は速い分子が A から B へ通り、遅い分子が B から A へ通ることを許容する。
2. 部屋、隔壁、ドア、悪魔から成り立てる系は孤立系ではない。またマックスウェルの悪魔の代謝も考える必要がある。それがいかなるものであれ、栄養物を摂取し、不要物を排出するために外部世界とつながっていなければならない。これらを考慮に入れるに、部屋で作り出した秩序は部屋の外部の無秩序によって補われ、熱力学第二法則が破れることはない。
3. Consider a system made of atoms whose spins are at first in a specific direction. As time passes by the direction of spins become isotropic. Thus the ferromagnetic system will turn to paramagnetic system.

問題 1 解答

1. F の定義より

$$\begin{aligned} F(x^2 + x + 1) &= (ax + b)^2 + (ax + b) + 1 \\ &= a^2x^2 + a(2b + 1)x + b^2 + b + 1 \end{aligned}$$

2. $F(e_0(x)) = 1, F(e_1(x)) = ax + b, F(e_2(x)) = a^2x^2 + 2abx + b^2$ だから

$$(1, \quad ax + b, \quad a^2x^2 + 2abx + b^2) = (1, \quad x, \quad x^2) M$$

となる M を求めればよい。従って

$$M = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & a & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

である。

3. 線形写像 F の固有値を λ 、固有ベクトルを $v(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ とおく。問題文に与えられた基底を用いると、固有ベクトルは

$$v = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

と表現できるので、 $Mv = \lambda v$ を満たす λ と $v \neq 0$ を求めればよい。固有方程式 $|\lambda I - M| = 0$ (I は単位行列)、すなわち

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -b & -b^2 \\ 0 & \lambda - a & -2ab \\ 0 & 0 & \lambda - a^2 \end{vmatrix} = 0$$

を解いて、固有値 $\lambda = 1, a, a^2$ を得る。これに対応する固有ベクトルの表現はそれぞれ、順に

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ a - 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b^2 \\ 2b(a - 1) \\ (a - 1)^2 \end{pmatrix}$$

である。まとめると、 F の固有値と固有ベクトルの組は

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1, \quad v_0(x) = 1 \\ \lambda_1 &= a, \quad v_1(x) = b + (a - 1)x \\ \lambda_2 &= a^2, \quad v_2(x) = b^2 + 2b(a - 1)x + (a - 1)^2x^2 \end{aligned}$$

である。

4. $e_1(x) = x$ は、固有ベクトルを用いて

$$e_1(x) = \frac{1}{a - 1}(-b v_0(x) + v_1(x))$$

と表せる。従って

$$F^k(e_1(x)) = \frac{1}{a - 1}(-b \lambda_0^k v_0(x) + \lambda_1^k v_1(x)) = \frac{1}{a - 1} [b(a^k - 1) + a^k(a - 1)x]$$

5. $e_2(x) = x^2$ は、固有ベクトルを用いて

$$e_2(x) = \frac{1}{(a-1)^2} (b^2 v_0(x) - 2b v_1(x) + v_2(x))$$

と表せる。従って

$$\begin{aligned} F^k(e_2(x)) &= \frac{1}{(a-1)^2} (b^2 \lambda_0^k v_0(x) - 2b \lambda_1^k v_1(x) + \lambda_2^k v_2(x)) \\ &= \frac{1}{(a-1)^2} [(a^k - 1)^2 b^2 + 2a^k(a^k - 1)(a-1)bx + a^{2k}(a-1)^2x^2] \end{aligned}$$

問題 2 解答

1. $u = u_k(x, t) = e^{ikx+i\omega t}$ を題意の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \cdots (1)$$

に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= i\omega u_k(x, t), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= (ik)^2 u_k(x, t) = -k^2 u_k(x, t). \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} i\omega &= -a^2 k^2 \\ \therefore \omega &= ia^2 k^2 \end{aligned} \quad \cdots (2)$$

と求められる。

2. 与式

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k u_k(x, t) dk \quad \cdots (3)$$

に $t = 0$ を代入すると

$$u(x, 0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k e^{ikx} dk. \quad \cdots (4)$$

これは Fourier 逆変換に他ならないので、Fourier 変換により

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad \cdots (5)$$

と求められる。

3. 題意の積分を

$$g(y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e^{-a^2 k^2 t} dk \quad \cdots (6)$$

とおく。すると、

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dy} &= \int_{-\infty}^{\infty} ik e^{iky} e^{-a^2 k^2 t} dk \\ &= -\frac{i}{2a^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} \left(\frac{d}{dk} e^{-a^2 k^2 t} \right) dk \\ &= -\frac{i}{2a^2 t} \left(\left[e^{iky} e^{-a^2 k^2 t} \right]_{-\infty}^{\infty} - iy \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e^{-a^2 k^2 t} \right) \\ &= -\frac{y}{2a^2 t} g(y) \quad (\because t > 0) \end{aligned} \quad \cdots (7)$$

従って、

$$\begin{aligned} g(y) &= g(0) \exp \left(-\frac{y^2}{4a^2 t} \right) \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp \left(-\frac{y^2}{4a^2 t} \right). \quad (\text{Gauss 積分}) \end{aligned} \quad \cdots (8)$$

以上から、題意の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e^{-a^2 k^2 t} dk = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4a^2 t}\right) \quad \cdots (9)$$

である。

3. (別解)

積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ibx} dx$ を計算する。ここで a, b は定数であり、 $a > 0$ である。これらは便宜上導入した文字であり、問で与えられた文字とは関係がない。

さて、考えている積分を変形すると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ibx} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-\frac{ib}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a}} dx \\ &= e^{-\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-i\alpha)^2} dx \quad \left(\alpha \equiv \frac{b}{2a}\right) \end{aligned} \quad \cdots (10)$$

となる。そこで、図 7 のような積分経路 C を考え、複素積分 $\oint_C e^{-az^2} dz$ を計算する。ここで X は十分大きい正の数である。また、図 7 では $\alpha > 0$ として経路を描いているが、 $\alpha < 0$ の場合も本質的に同じである。

まず、 e^{-az^2} は至るところ正則だから、Cauchy の積分定理より

$$\oint_C e^{-az^2} dz = 0. \quad \cdots (11)$$

一方、積分経路を $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ と分解し、その各々について $X \rightarrow \infty$ における積分を評価すると

$$\begin{aligned} \int_{C_1} e^{-az^2} dz &= \int_{-X}^X e^{-ax^2} dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \\ \int_{C_3} e^{-az^2} dz &= \int_X^{-X} e^{-a(x-i\alpha)^2} dx = - \int_{-X}^X e^{-a(x-i\alpha)^2} dx \rightarrow - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-i\alpha)^2} dx \\ \left| \int_{C_2} e^{-az^2} dz \right| &\leq \max_{z \in C_2} |e^{-az^2}| \cdot \int_{C_2} |dz| = e^{-a(X^2-\alpha^2)} \cdot \alpha \rightarrow 0 \\ \left| \int_{C_4} e^{-az^2} dz \right| &\leq \max_{z \in C_4} |e^{-az^2}| \cdot \int_{C_4} |dz| = e^{-a(X^2-\alpha^2)} \cdot \alpha \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となる。従って、 $X \rightarrow \infty$ で

$$\oint_C e^{-az^2} dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-i\alpha)^2} dx \quad \cdots (12)$$

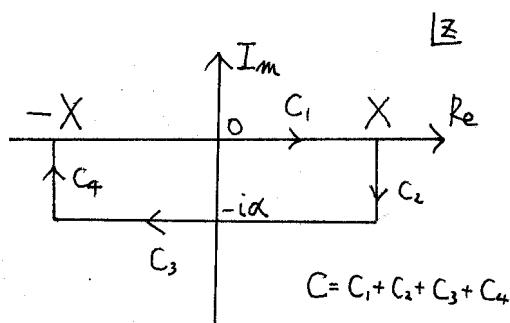


図 7: 3. (別解) における積分経路

が成り立つ。

以上、(11)(12) と Gauss 積分の公式から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-i\alpha)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \cdots (13)$$

が成立する。これと (10) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ibx} dx = e^{-\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \cdots (14)$$

であるから、求めるべき積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e^{-a^2 k^2 t} dk = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4a^2 t}\right) \quad \cdots (15)$$

である。

4. (3)(5) より

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ikx'} e^{ikx+i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{ik(x-x')} e^{-a^2 k^2 t} \quad (\because (2)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a^2 t}\right] \quad (\because (9)) \\ &= \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a^2 t}\right] \end{aligned} \quad \cdots (16)$$

と求まる。

5. 題意より

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{U}{2a \sqrt{\pi t}} \int_{-L}^L dx' \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a^2 t}\right] \\ &= \frac{U}{2a \sqrt{\pi t}} \cdot 2a \sqrt{t} \int_{\frac{-x-L}{2a \sqrt{t}}}^{\frac{-x+L}{2a \sqrt{t}}} e^{-y^2} dy \quad \left(y \equiv \frac{x'-x}{2a \sqrt{t}}\right) \\ &= \frac{U}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{-x+L}{2a \sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-x-L}{2a \sqrt{t}}\right) \right] \end{aligned} \quad \cdots (17)$$

と表される。

2003年度 入学試験 物理専門科目

問題 1

質量 m 、振動数 ω をもつ一次元調和振動子のハミルトニアン演算子 \mathbf{H} は

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{x}^2$$

で与えられる。ここで、 \mathbf{x} と \mathbf{p} はそれぞれ位置座標演算子と運動量演算子である。この系を解析するために、ハイゼンベルグ表示を用いる。また、演算子

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\mathbf{x}(0) + i\frac{\mathbf{p}(0)}{m\omega}), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\mathbf{x}(0) - i\frac{\mathbf{p}(0)}{m\omega})$$

を導入する。ここで、 $\mathbf{x}(0)$ と $\mathbf{p}(0)$ は時刻 $t = 0$ での演算子である。以下の問いに答えよ。

1. 演算子 $\mathbf{N} = a^\dagger a$ と a^\dagger との交換関係および \mathbf{N} と a との交換関係を求めよ。
2. 演算子 \mathbf{N} の固有状態を $|n\rangle$ とし、その固有値を n とすると、

$$\mathbf{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

が成り立つ。ここで、 $a^\dagger|n\rangle = C|n+1\rangle$ および $a|n\rangle = D|n-1\rangle$ であることを示し、係数 C と D を求めよ。ただし、係数 C と D は正の数とし、状態 $|n\rangle$ は $\langle n|n\rangle = 1$ と規格化されているとする。

3. 上の結果を用いて n がゼロ又は正の整数であることを証明せよ。

さて、ハイゼンベルグ表示では演算子 $\mathbf{x}(t)$ および演算子 $\mathbf{p}(t)$ は時刻 t に依存する。それらの演算子の時間変化はハイゼンベルグ方程式で与えられる。以下の問いに答えよ。

4. $\mathbf{x}(t)$ および $\mathbf{p}(t)$ についてのハイゼンベルグ方程式を書け。
5. 上記の方程式を解いて $x(t)$ と $p(t)$ を求め、それらが古典解と類似の時間変動をすることを示せ。
6. 期待値 $\langle n|\mathbf{x}(t)|n\rangle$ および $\langle n|\mathbf{p}(t)|n\rangle$ を求めよ。
7. 期待値 $\langle \lambda|\mathbf{x}(t)|\lambda\rangle$ および $\langle \lambda|\mathbf{p}(t)|\lambda\rangle$ が調和振動子の古典解と類似の時間変動を示すような状態 $|\lambda\rangle$ は、基底状態 $|G\rangle$ に演算子 a および a^\dagger を作用して作ることができる。つまり、この状態 $|\lambda\rangle$ は $|\lambda\rangle = F(a, a^\dagger)|G\rangle$ と書ける。関数 $F(a, a^\dagger)$ の具体例を示せ。ただし、基底状態は $a|G\rangle = 0$ を満たすものとする。また、状態 $|\lambda\rangle$ の規格化条件は無視してよい。

第2問

図のように N 個の単量体が連結された直線的な鎖状分子を考える。各単量体は図のように自由に変形し、長さ a の状態 α (エネルギー: $+\epsilon$) か長さ b の状態 β (エネルギー: $-\epsilon$) のいずれかを、隣り合う単量体とは独立にとることができるとする。

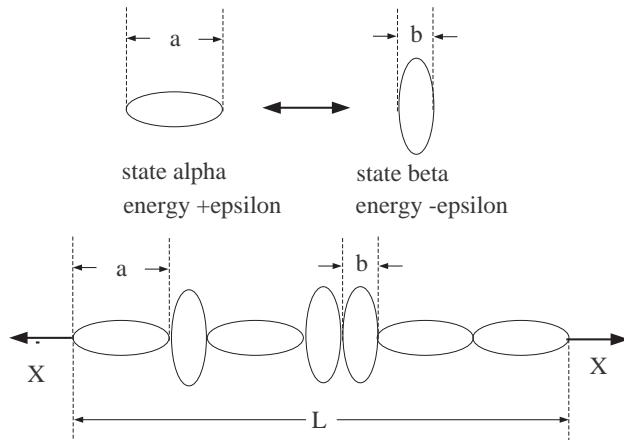


図 8:

鎖状分子が独立した状態にあって、熱平衡に達している場合（ミクロカノニカル分布）を考える。

- N_α 個が α 、 N_β 個が β の状態にいる場合を考える ($N = N_\alpha + N_\beta$)。鎖状分子の長さ L とエネルギー E_L を求めよ。また、この状態の熱力学的重率 $W(N_\alpha, N_\beta)$ を求め、鎖状分子のエントロピー S が次のようになることを示せ。

$$S = -k_B \left\{ N_\alpha \log \frac{N_\alpha}{N} + N_\beta \log \frac{N_\beta}{N} \right\} \quad \cdots (1)$$

ここで k_B はボルツマン定数である。Stirling の公式、 $\log n! = n \log n - n(n \gg 1)$ を用いてよい。また、 \log は自然対数とする。

つぎに、鎖状分子が温度 T の熱浴に接していて、一定の温度状態におかれている場合（カノニカル分布）を考える。

- 熱浴の状態密度を $\Omega(E_B)$ とする。鎖状分子と熱浴からなる全系のエネルギーを E_T 、状態 l にある鎖状分子のエネルギーを E_l とすれば ($E_T = E_B + E_l$) 等重率の原理により、状態 l の実現確率は $P(E_l)$ は、 l が指定された場合の微視的状態の数 $\Omega(E_T - E_l)\delta E$ に比例する。

$$P(E_l) \propto \frac{\Omega(E_T - E_l)\delta E}{\Omega(E_T)\delta E} \quad \cdots (2)$$

このことから、カノニカル分布では、状態 l の実現状態 $P(E_l)$ は、 $\exp(-E_l/k_B T)$ に比例することを示せ。ただし、熱浴は鎖状分子に比べて十分大きいものとする。また、熱浴の温度が $T = (\partial S / \partial E)^{-1}|_{E=E_T}$ で表せることに留意せよ。

- 一つの単量体の分配関数 Z_1 を示し、さらに鎖状分子の分配関数 Z_N を導け。
- 分配関数 Z_N より、Helmholtz の自由エネルギー F 、エントロピー S 、系の内部エネルギー E を求めよ。
- 比熱 C を求め、温度の関数として図示せよ。ただし縦軸を C/Nk_B とし、横軸を $k_B T/\epsilon$ とせよ。

つぎに、鎖状分子を温度 T の状態においてたまま、一定の張力 X で両端を引っ張り、長さ L となった場合を考える。このとき、この系では、熱力学第一法則 $TdS = dE - XdL$ が成立している。（ N 個の単量体からなる系を、非常に大きな N_T 個からなる非常に大きな系と考えることが出来る。）

6. 鎮状分子がエネルギー E_L で長さ L の状態にある確率 $p(E_L, L)$ は、熱浴を含む全系のエネルギーを E_T 、長さを L_T とすると、熱浴の状態密度 $\Omega(E_B) = \Omega(E_T - E_L, L_T - L)$ を用いて

$$p(E_L, L) \propto \frac{\Omega(E_T - E_L, L_T - L)\delta E}{\Omega(E_T, L_T)\delta E} \quad \cdots (3)$$

と書ける。 E_T 、 L_T に比べて、 E_L 、 L が十分微視的な料であることを利用して、

$$p(E_L, L) \propto \exp \left\{ \frac{1}{k_B T} (-E_L + XL) \right\} \quad \cdots (4)$$

であることを示せ。

7. 系の分配関数

$$Y = \sum_{N_\alpha=0}^N W(N_\alpha, N_\beta) p(E(N_\alpha, N_\beta), L(N_\alpha, N_\beta)) \quad \cdots (5)$$

について、 N_α に関する和を計算し、 $N, T, X, a, b, +\epsilon, -\epsilon$ を用いて表せ。

8. 分配関数より Gibbs の自由エネルギー G を求め、そこから鎮状分子の長さ L と張力 X に関する関係式を求めよ。

問題 3

電磁場中の電荷 q 、静止質量 m をもつ粒子の加速を考える。電場 \vec{E} 、磁場 \vec{B} の下で荷電粒子はローレンツ力

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \cdots (1)$$

を受ける。ここで、 \vec{v} は粒子の速度で、磁場 \vec{B} は常に z 方向に一様で一定、つまり、 $\vec{B} = (0, 0, B)$ とする。また、荷電粒子の運動に伴う電磁場の放出を無視する。

まず、粒子の速度は光速度 c に比べて十分小さく、したがって、相対論的効果を考えなくて良いとする。

1. 電場が存在せず、一様な磁場だけがある場合、粒子を時刻 $t = 0$ に初速度 $\vec{v} = (v_0, 0, 0)$ で $\vec{x} = (0, 0, 0)$ から放出した場合にこの粒子の時刻 t での速度と位置を求めよ。
2. 一様磁場に周期的に変動する電場 $\vec{E} = (-E \sin(\Omega t), -E \cos(\Omega t), 0)$ を加え、設問 1 と同じ初期条件で荷電粒子を放出した場合、時刻 t での粒子の速度を求めよ。ただし、 E は定数である。
3. $\Omega = qB/m$ のとき十分時間がたてば荷電粒子の運動エネルギーが時間とともに増大することを示せ。

次に、粒子の速度が光速度に比べて無視できない（相対論的）場合を考える。このときは粒子の運動量 \vec{p} 、エネルギー \mathcal{E} は相対論的表式

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad \mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

で与えられる。ここで、 $v = |\vec{v}|$ である。また、相対論的な場合も式 (1) で与えられるローレンツ力 \vec{F} を使って運動方程式は $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ と書ける。

4. 設問 1 と同じく一様な磁場だけがあり、電場がない場合、粒子の速度が相対論的のときも、運動方程式の両辺と速度 \vec{v} との内積をとることによって粒子の速さ v が運動中一定であることを示せ。
5. 前問までの結果を使って運動方程式を解き、粒子の速度 $\vec{v}(t)$ を求めよ。
6. 相対論的な場合の結果を考慮して、設問 3 と同じく一様な磁場と振動数 $\Omega = qB/m$ で変動する電場が存在する場合、粒子の運動エネルギー $(\mathcal{E} - mc^2)$ の増加はとまる。その理由を述べよ。ただし、最初荷電粒子の速さは光速に比べて小さいとして、具体的に相対論的な運動方程式を解く必要はない。

問題 4

宇宙探査機は燃料の不足を補うため、しばしばスイングバイという航法で加速を行うことがある。(例えばアポロ 13 号は月の重力を、火星探査機のぞみは地球の重力を使って加速した。) 中心力場の力学からこの原理について考える。

1. 2 次元の極座標系 (r, ϕ) を用いて中心力ポテンシャル $U(r)$ 中を運動する質量 m の質点の Lagrangian を書き、Euler-Lagrange の方程式を用いて角運動量の保存則を導け。
2. 図 1 のように質量 m の探査機が質量 M の惑星に対して距離 b の漸近線 SS' に沿って無限遠方から速さ v で進入し、漸近線 TT' に沿って出てゆくものとする。ただし、 $M \gg m$ の関係があり、惑星は静止しているとみなしてよい。惑星の位置を原点とし、探査機の座標を (r, ϕ) とするとき次式が成り立つことを示せ。

$$\dot{\phi} = \frac{vb}{r^2} \quad \cdots (1)$$

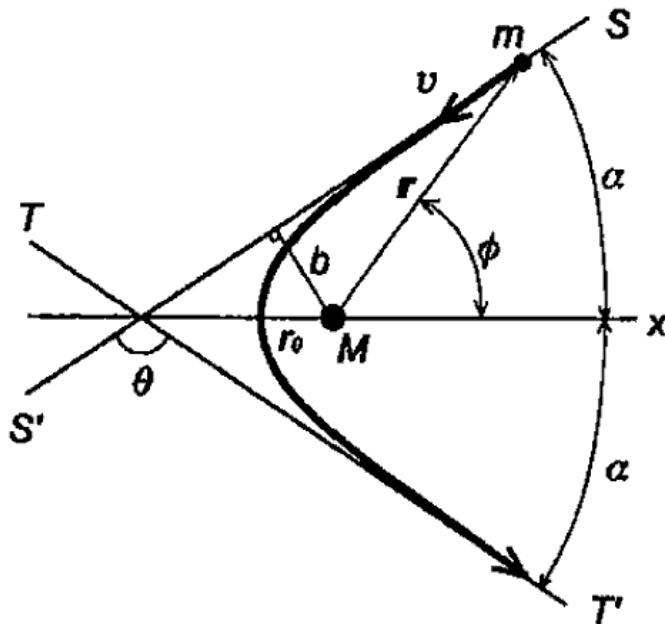


図 1:

3. 探査機が惑星に最も近づいた時の惑星までの距離 r_0 を、 v, b, M と重力定数 G を用いて表せ。ただし、ポテンシャル $U(r)$ は、 $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ と表される。
4. 探査機の (x, y) 座標系における速度を (v_x, v_y) とおくと、 v_x と ϕ の間に次の微分方程式が成立することを示せ。ただし、式(1)を用いてよい。

$$dv_x = -\frac{GM}{vb} \cos \phi d\phi \quad \cdots (2)$$

5. 入射前後における角度変化 θ が $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{GM}{v^2 b}$ で表されることを示せ。ただし、式(2)を用いてよい。
6. 図 2 のように惑星が速度ベクトル \vec{W} で太陽に対して運動していたところへ探査機がやってきた。探査機の太陽に対する相対速度ベクトルが入射前は \vec{v} 、出射後は \vec{u} であったとして、惑星の運動量の変化を無視せずに、入射前後における探査機のエネルギー変化、 $\frac{1}{2}m|\vec{u}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{v}|^2$ を求めよ。ただし、惑星の引力圏では、太陽からの引力は無視できるものとする。

7. 上の結果から探査機の加速が可能なことを示せ。また、増加した探査機のエネルギーはどこから来たか答えよ。

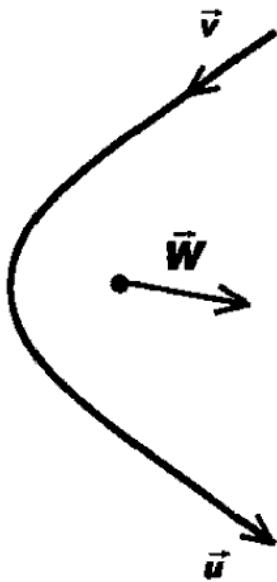


図 2:

問題 5

図 1 に NaI シンチレーションカウンター (NaI 検出器) の原理的な構成を示す。この検出器はタリウムを混入したヨウ化ナトリウム NaI(Tl) の結晶と光電子増倍管から出来ている。光電子増倍管の陽極から出力される電流パルスは抵抗 $R = 500 \text{ k}\Omega$ と電気容量 $C = 20 \text{ pF}$ からなる等価回路で表される出力部回路に送られるものとする。この NaI 検出器を用いて、線源から放射されるガンマ線の検出を行う。以下の設問に答えよ。

但し、光電子増倍管の陰極に光が入射してから增幅された電子群が陽極に達するまでの飛行時間は無視できるものとし、NaI(Tl) 結晶の蛍光減衰定数 $\tau = 230 \text{ ns}$ とする。また、NaI(Tl) 結晶の寸法は、入射ガンマ線との相互作用で生じる 2 次ガンマ線の平均自由行程よりも小さいが、2 次荷電粒子は NaI(Tl) 結晶内で完全に吸収される程度とする。

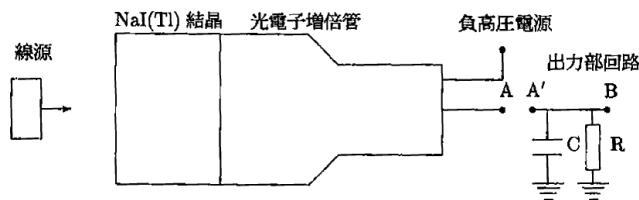


図 9: NaI(Tl) 検出器の原理的な構成

1. ガンマ線が NaI(Tl) の結晶中で起こす相互作用を 3 つ上げ、各々がどのような相互作用であるかを説明せよ。
2. (i) 図 1 で、点 A は光電子増倍管の陽極に同軸ケーブルでつながっているとする。点 A の出力をオシロスコープで見る場合、終端抵抗が必要であるが、その理由を述べ、接続の仕方を図示せよ。
(ii) 電気的に正しく終端されたオシロスコープを用いて、点 A におけるガンマ線から来る出力パルスはどのような波形に見えるかを図示せよ。また、点 A と点 A' を結線して出力部回路をつないだ場合、点 B におけるガンマ線からくるパルス波形を図示せよ。どちらの図に対しても、縦軸の電圧のスケールは任意でよいが、横軸の時間スケールが分かるように示すこと。
(iii) 前問の点 B における波形観察の際、電気的なノイズが高く、ガンマ線からのパルス波形が見づらかったとする。その原因が特定されていない場合、どのような工夫を試みるべきか、具体的な対処を 2 つあげよ。
3. 出力部回路からの出力を適当な閾値によって波高弁別して計数した。線源をおかない場合、10 分間で 600 カウントだった。線源をおいた場合、2 分間で 1000 カウントだった。
(i) 線源から放射されるガンマ線の計数率 (カウント/分) とその標準偏差を求めよ。
(ii) 線源から放射されるガンマ線の計数率を 1 % の精度で求めるには、合計何分間、線源を置いた計数を行えばよいか。但し、答えは分単位で小数点以下繰上げとする。また、線源をおかない計数をやり直さないとする。
4. 線源から放射されるガンマ線のエネルギーが、(a)0.5 MeV、(b)5 MeV の單一エネルギーの場合において、出力部回路からのパルスをエネルギーに換算した度数分布を予想して図示せよ。その際、各々の分布の中で、設問 1 の相互作用がどの成分を占めるかもわかるように示すこと。
5. 設問 4 の (a)、(b) の 2 種類の線源から放射されるガンマ線のエネルギーがおおよそ分かれているが、正確には分かっていないとする。NaI 検出器を 1 個だけを用いても、バックグラウンド放射能が高いこと、および、設問 1 の 3 つの相互作用が混在することにより、エネルギーを正確に求めることが困難が状況とする。このような場合でも、同じ NaI 検出器を複数組み合わせる工夫によって、ガンマ線のエネルギーを正確に求められる。設問 4 の (a)、(b) 各々の場合について、その工夫を図示し、ガンマ線のエネルギーが正確に求められる理由を説明せよ。

問題 6

液体ヘリウムの密度は、図 1 のように平行平板コンデンサーとコイルを並列につないだ LC 回路を作り、コンデンサーの間隙を液体ヘリウムで満たしてコンデンサーの容量を測定し、求めることができる。

ヘリウムの分極率を α とすると、密度 ρ と比誘電率 ϵ の間には次の式が成り立つ。ただし、 k は比例定数である。また、 ϵ は真空中の誘電率 ϵ_0 に対する誘電率の比であり、無次元の量である。

$$\frac{1}{k} \alpha \rho = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$$

ヘリウムの分極率は温度と圧力にほとんど依存しないことが知られているため、この実験方法は、密度の温度依存性、圧力依存性などを調べるときに用いられる。以下の設問に答えよ。

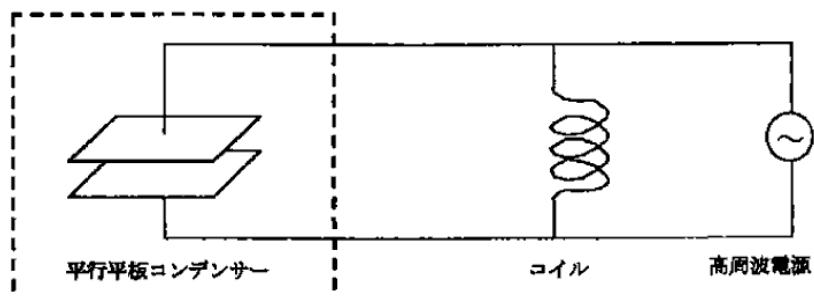


図 1

- 図 1 の LC 回路において、平行平板コンデンサーの間隙が真空のときの容量を C_0 、コイルのインダクタンスを L として共振振動数 (f_0) を求めよ。回路の抵抗、浮遊容量は考えなくてよい。
- 室温で図 1 の LC 回路の f_0 を測定したところ 10MHz となった。このとき、コイルのインダクタンスは $10\mu\text{H}$ 、コンデンサーの平行平板の面積は $1.0 \times 10^{-4}\text{m}^2$ であった。コンデンサーの間隙はいくらか。コンデンサーの間隙は真空とし、真空の誘電率 (ϵ_0) を $8.9 \times 10^{-12}\text{F/m}$ として求めよ。
- コンデンサーの間隙を真空に保ったまま、図 1 の点線で囲まれた部分の温度を下げて共振振動数を測定したところ、温度の低下と共に共振振動数が変化した。考えられる原因について述べよ。
- コンデンサーの間隙を液体ヘリウム (密度 ρ) で満たしたときの共振振動数 (f) を ρ の関数で表わし、4.2K の液体ヘリウム ($\rho = 1.3 \times 10^2\text{kg/m}^3$) で満たしたときの共振振動数を求めよ。 $\alpha/k = 1.1 \times 10^{-5}\text{m}^3/\text{kg}$ である。
- 共振振動数の測定精度が 1Hz のとき、液体ヘリウムの密度の測定精度がいくらになるか述べよ。
- 図 2 は、この方法を使って、液体ヘリウムの密度 ρ をある温度 T_0 (2.2K) の近傍で測定し、 T_0 での密度 ρ_0 に対する相対値を表わしたものである。この図をもとに、温度 T_0 付近での液体ヘリウムの密度の温度依存性の特徴とその原因について述べよ。
- 低温実験では、白金、炭素、ゲルマニウムなどの抵抗値を測定して 2 次温度計として利用することが多い。図 3 は、白金抵抗温度計と炭素抵抗温度計の抵抗値の温度依存性を示したものである。図 2 に示した液体ヘリウムの密度の温度依存性の測定には、どちらの温度計を用いるのが適当か、その理由と共に述べよ。
- 図 3 からわかるように、白金抵抗温度計の抵抗値が温度の増加と共に大きくなるのに対し、炭素抵抗温度計の抵抗値は温度の増加と共に小さくなる。それぞれの抵抗温度計の抵抗値が示す温度依存性の原因を述べよ。

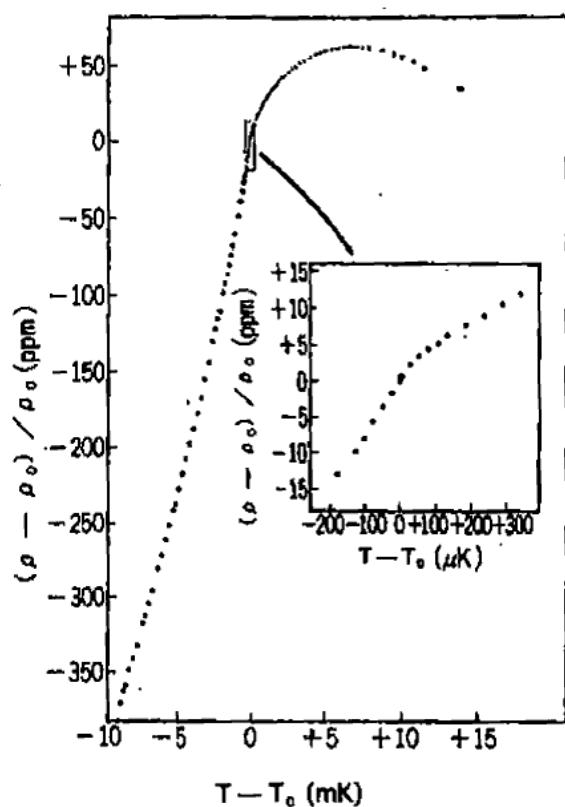


図 2

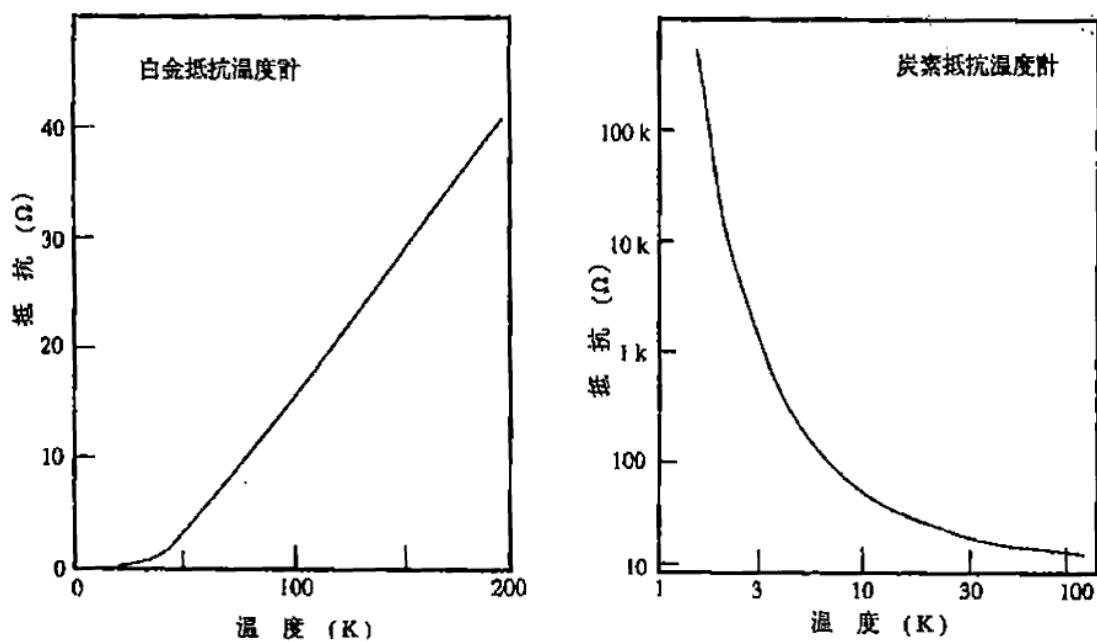


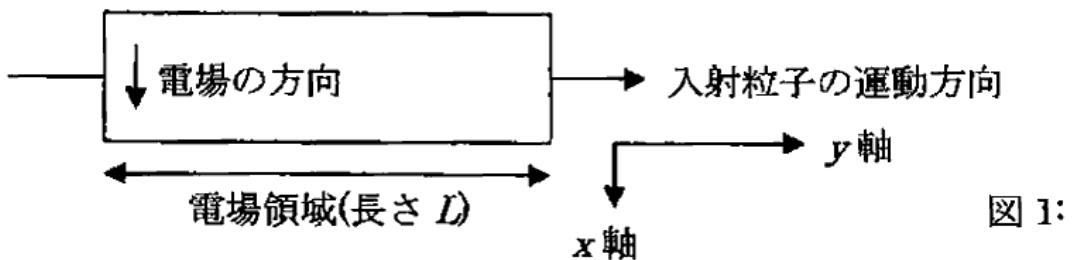
図 3

問題 7

高エネルギー加速器からの陽子ビームを金属標的にあてると、正に帯電した二次粒子として K 中間子の他、 π 中間子、 μ 粒子などが作られる。このうち、正に帯電した K 中間子をビームラインに誘導することを考える。荷電 K 中間子、荷電 π 中間子、中性 π 中間子の質量はそれぞれ、 $494 MeV/c^2$ 、 $135 MeV/c^2$ である。光速 c は $3.0 \times 10^8 m/s$ とする。全問にわたり、数値計算は有効数字 2 桁で求めよ。

金属標的に作られた二次粒子に、進行方向に垂直な磁場を与えると、運動量に比例した軌道半径の円運動をする。 $1.0 GeV/c$ の K 中間子を取り出すつもりで当たる磁場で、 K 中間子以外の粒子にも同じ軌道を飛行するものがある。磁場を通過した後、進行方向と垂直に一様電場を加えることで粒子を種類別に振り分けることができる。質量 m 、運動量 p の荷電粒子（電荷 e を持つ）が電場 E 中を通過するとき、相対論的な運動方程式 $d\mathbf{p}/dt = e\mathbf{E}$ を満たす。

1. 図 1 のように、この荷電粒子が電場領域に入射する方向を y 軸、それに垂直な電場の方向を x 軸にとる。荷電粒子が電場領域に入射したときの運動量を \mathbf{p}_0 とする。電場領域に入射したときから時間 t 経過した後の荷電粒子のエネルギー ϵ を求めよ。



2. 一般に荷電粒子のエネルギー ϵ 、運動量 \mathbf{p} と速度 v には $v = pc^2/\epsilon$ の関係がある。このことを用い、さらに時間積分することにより、荷電粒子の座標 x と y を求めよ。必要ならば、積分公式 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x$ を使うこと。
3. 長さ L の領域を出たときの荷電粒子の進行方向が y 軸となす角度を求めよ。
4. ふれ角が十分小さいとして、荷電 K 中間子のふれ角に比べ、同じ $1.0 GeV/c$ の運動量で入射した荷電 π 中間子のふれ角はおよそどのくらいになるか。

K 中間子を金属に入射し、その中で完全に停止させる。荷電 K 中間子は 63% が μ 粒子と μ 型ニュートリノに、21% が荷電 π 中間子と中性 π 中間子 (π^0) に二体崩壊する。ここでは π 中間子への崩壊に着目する。

中性 π 中間子は $\tau = 8.4 \times 10^{-17}$ 秒という非常に短い時間に崩壊し、2 つのガンマ線になる。実験室系で見たときの中性 π 中間子の静止座標系の移動速度を v とする。二つの系の間のローレンツ変換は $p' \sin \theta' = p \sin \theta$ および $p' \cos \theta' = p \cos \theta - E \gamma \beta / c$ で与えられる。ここで $\beta \equiv v/c$ 、 $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ である。 γ がついたものは重心系、そうではないものは実験室系を表す。 θ および、 θ' はそれぞれの系でビームの運動方向が静止座標系の移動方向となす角度を表す。

5. 中性 π 中間子の進行方向を x 軸にとると、2 つのガンマ線が x 軸について対称な方向に等しい運動量の絶対値をもって放出されたとする。このときガンマ線が x 軸となす角度を計算せよ。 β を用いてよい。

上述のように中性 π 中間子の寿命 τ は非常に短い。この寿命をどのように測定するかを考えよう。

6. 実験室で中性 π 中間子が飛行中に崩壊する。作られてから崩壊するまでの平均距離が 25 ミクロン程度となるためには、生成された中性 π 中間子のエネルギーはどのようなものでないといけないか。

中性 π 中間子は電磁相互作用をしないが、崩壊生成物であるガンマ線は物質中で対生成を起す。2 枚の金属薄膜を近接しておき、高エネルギー陽子ビームを当てると、薄膜中で中性 π 中間子が作られる。最初の薄膜中で生成された中性 π 中間子は短い距離をとんだ後崩壊し、2 個のガンマ線になる。ガンマ線になると一定の確率で、金属薄

膜中で対生成を起す。図 2 にあるように、一枚目の薄膜中で中性 π^0 中間子が作られ、薄膜の間で崩壊し、2枚目の薄膜中で対生成を起すものに着目する。

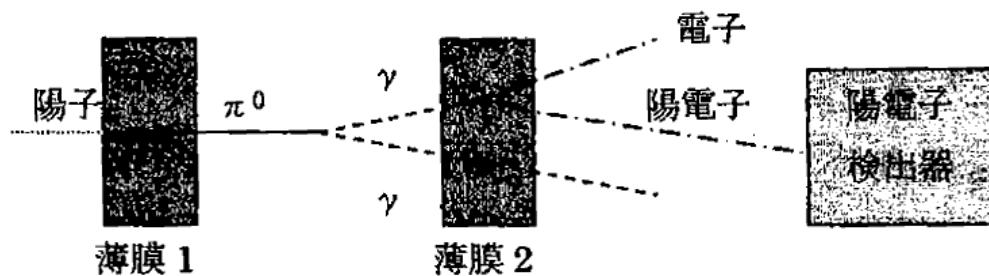


図 2:

7. 対生成で生じた陽電子をビーム進行方向の陽電子検出器で観測する。まず、2枚の薄膜を再接近させた状態で陽電子を計測し、その後、薄膜間の距離を d だけ増やして計測するよ。このときの陽電子の計測率の変化について説明せよ。
8. 薄膜間の距離の変化に対する感度を最も高くするためには、薄膜の厚さはどうとるべきか考察せよ。

問題 8

図 1 はヒトの眼の断面図である。眼に入射する光は、まず空気と角膜との境界面で屈折し、さらに水晶体の前面と後面で 2 度屈折し、網膜上に像を結ぶ。網膜上で光は電気信号におきかえられ、視覚情報として視神経を通して脳に伝えられる。

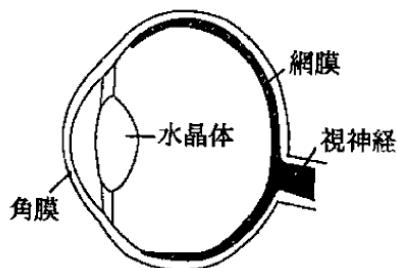
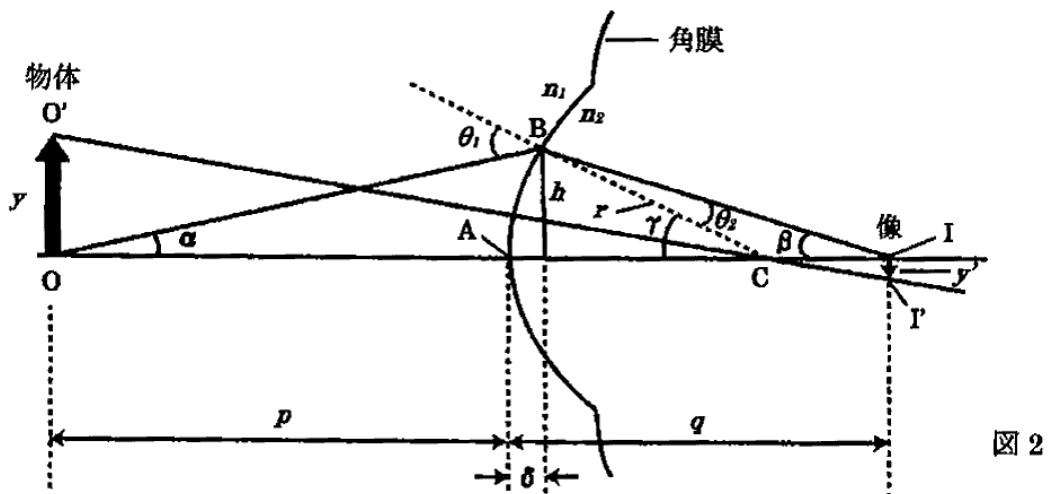


図 1

まず光学機器として眼をとらえよう。ヒトの眼全体で起こる光の屈折の大部分は空気と角膜の境界面で生じている。水晶体における屈折を無視した時の、角膜による像形成（図 2）を考える。物体 O' と角膜との距離を p 、角膜と像の形成位置 I との距離を q 、空気中および角膜内の屈折率を n_1 、 n_2 とする。角膜表面を球面の一部とみなし、その中心を C 、半径を r とする。



1. 光線 OBI に着目する。点 B と直線 OI との距離を h とし、図中の角 α ($\angle BOI$)、 β ($\angle BIO$)、 γ ($\angle BCO$) を h 、 p 、 q 、 r で表せ。なお、図中の距離 δ は p 、 q 、 r に比べて無視できるものとし、 α 、 β 、 $\gamma \ll 1$ ラジアンとする。
2. 光線 OBI の入射角、屈折角を θ_1 、 θ_2 とし、 θ_1 、 θ_2 、 n_1 、 n_2 間の関係式を示せ。ただし、 θ_1 、 $\theta_2 \ll 1$ ラジアンとする。
3. 設問 1、2 より n_1 、 n_2 、 p 、 q 、 r 間の関係式を求めよ。
4. 網膜における像の拡大率 m ($= y'/y$) を n_1 、 n_2 、 p 、 q で表せ。
5. $p = 25\text{cm}$ 、 $p = \infty$ の時、 q の値をそれぞれ有効数字 2 術で求めよ。ただし、 $n_1 = 1.00$ 、 $n_2 = 1.34$ 、 $r = 0.80\text{cm}$ である。
6. 設問 5 で求めた q の値と角膜と網膜との間の実際の距離 2.5cm を比べることにより、どのようなことが分かるか。水晶体の役割を含め説明せよ。

次に網膜上の像が視神経を介し脳へと投射される過程を考察する。

7. 各視神経は図 3 の点 A と点 A'、点 B と点 B' といった具合に、網膜上の特定の点と 1 次視覚野上の対応する点とを結ぶように配線される。このように各視神経が網膜上での相対的な位置を保ったままで 1 次視覚野に結合する結果、脳内において網膜上の像が再現される。カエルの視神経が、図 3 で示すような位置で切断されても再生する能力を持つことを利用し、視神経の正確な配線のパターンが遺伝的に決定されているのか、それとも学習によって獲得されるのかを検討する実験を考案せよ。
8. 実際には視神経の配線は、大部分、遺伝的に決定されていることがわかっている。したがって、各視神経と 1 次視覚野の特定の位置とを対応づける分子の存在が予想される。もし、このような分子（遺伝子にコードされていると仮定する）が視神経の数だけ必要であるとすると、遺伝子の数が断然不足することになる（視神経の数は 100 万のオーダーであるのに対し、ヒトの遺伝子の数は数万しかない）。この問題を回避するため生物がとっている戦略について考察せよ。

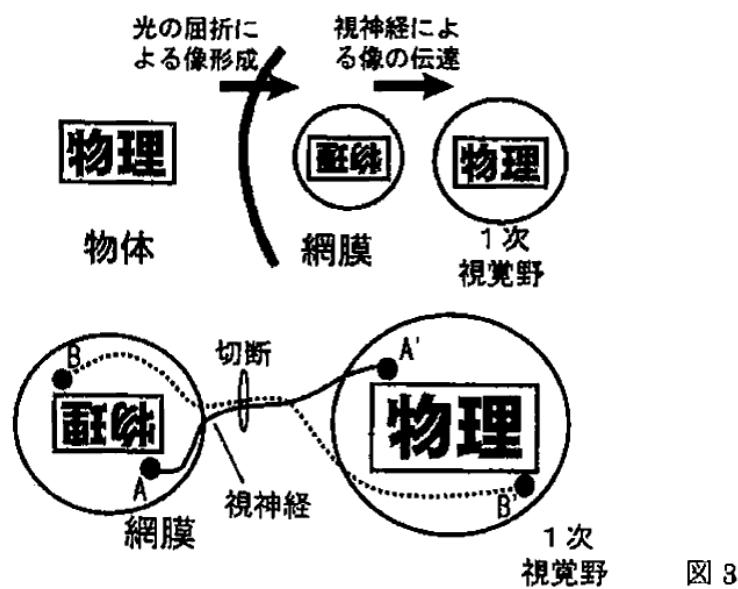


図 3

問題 9

幅 b を持つ矩形ポテンシャル障壁 $V(z)$ による一次元電子の散乱を考える。 $V(z)$ の左 ($z = -\infty$) から入射する電子の波動関数を ψ_l 、右から入射する電子のそれを ψ_r とすると、図 1 の様に $z < -b/2$ 及び $z > b/2$ で

$$\psi_l(z) = \begin{cases} \exp[ikz] + R \exp[-ikz] & z < -b/2 \\ T \exp[ikz] & z > b/2 \end{cases} \quad \cdots (1)$$

及び

$$\psi_r(z) = \begin{cases} T \exp[-ikz] & z < -b/2 \\ \exp[-ikz] + R \exp[ikz] & z > b/2 \end{cases} \quad \cdots (2)$$

と表される。ただし、 T, R はそれぞれ透過係数及び反射係数であり、 $T = e^{i\alpha} \sin(\gamma)$, $R = i e^{i\alpha} \cos(\gamma)$ の様に位相差 α と散乱振幅に関係した量 γ で表される。また、波数 k は電子のエネルギー E と質量 m を用いて次のように書ける。

$$k = \sqrt{2mE}/\hbar \quad \cdots (3)$$

1. 波動関数の一般解 ψ は

$$\psi(z) = \begin{cases} A_{-1} \exp[ikz] + B_{-1} \exp[-ikz] & z < -b/2 \\ A_0 \exp[ikz] + B_0 \exp[-ikz] & z > b/2 \end{cases} \quad \cdots (4)$$

の様に書ける（図 2）。一般解が線形独立解 ψ_r, ψ_l の重ね合わせで書ける事を利用して、 A_{-1}, B_{-1} と A_0, B_0 の関係式を導け。また、それを式 (5) の様に行列表示した時の、行列要素を α, γ で表せ。（ M は転送行列と呼ばれる。）

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_{-1} \\ B_{-1} \end{pmatrix} \quad \cdots (5)$$

図 1

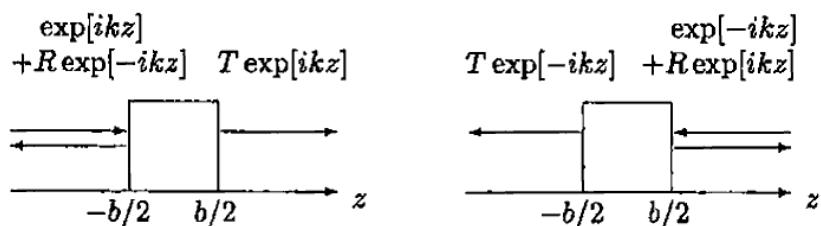
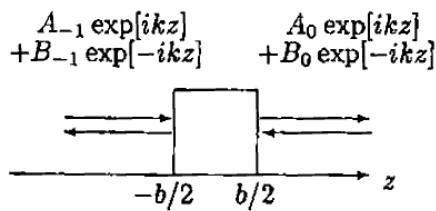
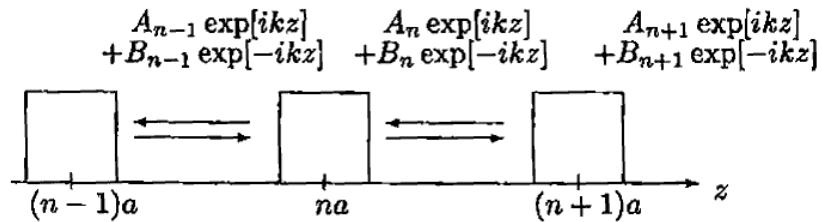


図 2



次に $V(z)$ が間隔 $a (> b)$ で等間隔に並んでいる時（すなわち一次元周期系）の電子状態を考える。図 3 のように波動関数 Ψ は $na < z < (n+1)a$ かつポテンシャルがゼロになる領域で $A_n \exp[ikz] + B_n \exp[-ikz]$ と書ける。今、

図 3



$-a + b/2 < z < a - b/2$ に注目し、 Ψ がこの領域で線形独立解 ψ_r, ψ_l の重ね合わせで書ける事を利用すると、ここでも式(5)が成り立つ事、また一般に以下の関係が成り立つ事がわかる。

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix} \quad \cdots (6)$$

2. 周期系の波動関数 Ψ はブロッホ条件 $\Psi(z+a) = \exp[iqa]\Psi(z)$ を満たす事が知られている。この条件を用いて A_n, B_n が満たすべき関係式を示せ。ただし、 q はブロッホ波数である。(波数 k は式(3)によって定義されるエネルギーの関数であり、ブロッホ波数 q とは直接関係するものではない事に留意せよ。)
3. ブロッホ条件と式(6)が同時に成り立つ時、 q と k は次の式で関係付けられる事を示せ。

$$\cos(qa) = \frac{\cos(ka + \alpha)}{\sin(\gamma)} \quad \cdots (7)$$

次に、 α, γ が波数 k を介して

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \frac{k}{k_c}, \quad \alpha = -c \frac{k}{k_c} \quad \cdots (8)$$

の様にエネルギーに依存している場合を考える。ただし、 k_c, c は定数であり、 $\pi/2 < k_c a - c$ を満たす。以下、 $0 < k < k_c$ で示されるエネルギー範囲で考えよ。

4. 式(7)の右辺の値を波数 k の関数としてプロットせよ。
5. $ka + \alpha$ が π の整数倍の時、式(7)を満たす実数の q が存在しない事を示し、その物理的意味を述べよ。
6. 実数の q が存在するための k の条件を k_c, c, a を用いて示せ。
7. $k_c a - c = 5\pi/2$ の場合、 q と E の関係式(すなわち分散関係)の概略図を示せ。

問題 1 解答

1. まず、 a と a^\dagger の交換関係を求める。

$$[a, a^\dagger] = \frac{m\omega}{2\hbar} \left\{ \left(\mathbf{x} + i\frac{\mathbf{p}}{m\omega} \right) \left(\mathbf{x} - i\frac{\mathbf{p}}{m\omega} \right) - \left(\mathbf{x} - i\frac{\mathbf{p}}{m\omega} \right) \left(\mathbf{x} + i\frac{\mathbf{p}}{m\omega} \right) \right\} \quad \cdots (1)$$

$$= \frac{i}{\hbar} [\mathbf{p}, \mathbf{x}] \quad \cdots (2)$$

ここで、 $\mathbf{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ より、 $[\mathbf{p}, \mathbf{x}] = -i\hbar$ であるから、

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad \cdots (3)$$

N と a^\dagger の交換関係は

$$\begin{aligned} [N, a^\dagger] &= Na^\dagger - a^\dagger N \\ &= a^\dagger aa^\dagger - a^\dagger a^\dagger a \\ &= a^\dagger (aa^\dagger - a^\dagger a) \\ &= a^\dagger [a, a^\dagger] \end{aligned} \quad \cdots (4)$$

昇降演算子の交換関係は $[a, a^\dagger] = 1$ だから

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger \quad \cdots (5)$$

N と a の交換関係は

$$\begin{aligned} [N, a] &= Na - aN \\ &= a^\dagger aa - aa^\dagger a \\ &= a[a^\dagger, a] \end{aligned} \quad \cdots (6)$$

昇降演算子の交換関係は $[a, a^\dagger] = 1$ だから

$$[N, a] = -a \quad \cdots (7)$$

2. まず $a^\dagger |n\rangle = C|n+1\rangle$ であることを示す。

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad \cdots (8)$$

において $|n\rangle$ の左から演算子 a^\dagger を作用させると

$$\begin{aligned} Na^\dagger &= a^\dagger aa^\dagger |n\rangle \\ &= a^\dagger (a^\dagger a + 1) |n\rangle \\ &= a^\dagger (n + 1) |n\rangle \\ &= (n + 1) a^\dagger |n\rangle \end{aligned} \quad \cdots (9)$$

一方 $|n+1\rangle$ も同じ固有値 $(n+1)$ を持つ演算子 N の固有関数なので $a^\dagger |n\rangle$ と $|n+1\rangle$ は定数倍すると一致する関係であり

$$a^\dagger |n\rangle = C|n+1\rangle \quad \cdots (10)$$

と書くことができる。C は次のようにして求められる。すなわち、

$$\langle n | a a^\dagger | n \rangle = \langle n | N + 1 | n \rangle = n + 1 \quad \cdots (11)$$

$$= |C|^2 \langle n+1 | n+1 \rangle = |C|^2 \quad \cdots (12)$$

よって $C = \sqrt{n+1}$ である。

次に $a|n\rangle = D|n-1\rangle$ であることを示す。

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad \cdots (13)$$

において $|n\rangle$ の右から演算子 a を作用させると

$$\begin{aligned} Na|n\rangle &= a^\dagger aa|n\rangle \\ &= (aa^\dagger - 1)a|n\rangle \\ &= an|n\rangle - a|n\rangle \\ &= (n-1)a|n\rangle \end{aligned} \quad \cdots (14)$$

一方 $|n-1\rangle$ も同じ固有値 $(n-1)$ を持つ演算子 N の固有関数なので $a|n\rangle$ と $|n-1\rangle$ は定数倍すると一致する関係であり

$$a|n\rangle = D|n-1\rangle \quad \cdots (15)$$

と書くことができる。D は次のようにして求められる。すなわち、

$$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = \langle n|N|n\rangle = n \quad \cdots (16)$$

$$= |D|^2 \langle n-1|n-1\rangle = |D|^2 \quad \cdots (17)$$

よって $D = \sqrt{n}$ である。

3. 与えられたハミルトニアン演算子は

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) \quad \cdots (18)$$

と書き換えることができるのでこの演算子の固有値方程式は

$$H|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle \quad \cdots (19)$$

となる。いま、

$$\begin{aligned} [a, H] &= \hbar\omega[a, a^\dagger a] \\ &= \hbar\omega(a^\dagger[a, a] + [a, a^\dagger]a) \\ &= \hbar\omega a \end{aligned} \quad \cdots (20)$$

$$\begin{aligned} [a^\dagger, H] &= \hbar\omega[a^\dagger, a^\dagger a] \\ &= -\hbar\omega a^\dagger \end{aligned} \quad \cdots (21)$$

演算子 H の固有値を E とし、 $|n\rangle$ に対して (17)、(18) を作用させると、

$$H(a|n\rangle) = (E - \hbar\omega)(a|n\rangle) \quad \cdots (22)$$

$$H(a^\dagger|n\rangle) = (E + \hbar\omega)(a^\dagger|n\rangle) \quad \cdots (23)$$

$a|n\rangle$ と $a^\dagger|n\rangle$ はそれぞれ固有値 $E - \hbar\omega$ 、 $E + \hbar\omega$ に属する固有関数だから a または a^\dagger を n 回 $|n\rangle$ に作用させて $a^n|n\rangle$ または $(a^\dagger)^n|n\rangle$ とすればそれぞれは $E \mp n\hbar\omega$ に属する固有関数である。

さて、 $|a|n\rangle|^2 = \langle n|a^\dagger a|n\rangle \geq 0$ なので

$$\langle a|(\frac{1}{\hbar\omega}H - \frac{1}{2})|n\rangle = \frac{1}{\hbar\omega}E - \frac{1}{2} \geq 0$$

となる。よって、 $E \geq \frac{1}{2}\hbar\omega$ 。

これらより、 n はゼロまたは正の整数である。

4. 時間に依存するシュレディンガー方程式は、

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(x, t) = H\Psi(x, t) \quad \cdots (24)$$

のことより、形式的に、

$$\Psi(x, t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t} \Psi(x, 0) \quad \cdots (25)$$

と書くことができる。このとき、 A という物理量の期待値 $\langle A \rangle$ は

$$\langle A \rangle = \langle \Psi(x, t) | A | \Psi(x, t) \rangle \quad \cdots (26)$$

$$= \langle \Psi(x, 0) | e^{i\frac{H}{\hbar}t} A e^{-i\frac{H}{\hbar}t} | \Psi(x, 0) \rangle \quad \cdots (27)$$

同様に、時間に依存する位置演算子 $\mathbf{x}(t)$ は

$$\mathbf{x}(t) = \exp(-\frac{1}{i\hbar}H(t-t_0))\mathbf{x} \exp(\frac{1}{i\hbar}H(t-t_0)) \quad \cdots (28)$$

と表されるから、この両辺を微分することによって

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{x}(t), H] \quad \cdots (29)$$

となる。時間に依存する運動量演算子もこれと同様にして、

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{p}(t), H] \quad \cdots (30)$$

5. ハイゼンベルグ表示でハミルトニアン H は

$$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}(t)^2 + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{x}(t)^2 \quad \cdots (31)$$

ここで、

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}(t)^2, H] &= \frac{1}{2m}[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)^2] \\ &= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p}(t)[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)] + [\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)]\mathbf{p}(t) \right) \\ &= \frac{1}{m}i\hbar\mathbf{p}(t) \end{aligned} \quad \cdots (32)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}(t)^2, H] &= \frac{m\omega^2}{2}[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t)^2] \\ &= \frac{m\omega^2}{2} \left(\mathbf{x}(t)[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t)] + [\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t)]\mathbf{x}(t) \right) \\ &= -m\omega^2 i\hbar\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad \cdots (33)$$

であるから、 $\mathbf{x}(t)$ および $\mathbf{p}(t)$ のハイゼンベルグ方程式は

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{1}{m}\mathbf{p}(t) \quad \cdots (34)$$

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -m\omega^2\mathbf{x}(t) \quad \cdots (35)$$

と書ける。

(34) および (35) より

$$\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = -\omega^2\mathbf{x}(t) \quad \cdots (36)$$

初期条件は演算子の定義式 (28) において $t = 0$ を代入して $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$ (ハイゼンベルグ表示の演算子の $t = 0$ における演算子はシュレディンガー表示の演算子に等しい)。これを用いて (36) を解くと、

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} \cos(\omega t) + \mathbf{p} \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t) \quad \cdots (37)$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p} \cos(\omega t) - \mathbf{x} m\omega \sin(\omega t) \quad \cdots (38)$$

であるので、 $\mathbf{x}(t)$ と $\mathbf{p}(t)$ は古典解と類似の時間変動をすることが分かる。

6. 定義式より、

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \quad \cdots (39)$$

$$\mathbf{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^\dagger) \quad \cdots (40)$$

より、 $\langle n|\mathbf{x}|n \rangle = \langle n|\mathbf{p}|n \rangle = 0$ だから

$$\langle n|\mathbf{x}(t)|n \rangle = \langle n|\mathbf{x} \cos(\omega t)|n \rangle + \langle n|\mathbf{p} \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t)|n \rangle \quad \cdots (41)$$

$$= \cos(\omega t) \langle n|\mathbf{x}|n \rangle + \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t) \langle n|\mathbf{p}|n \rangle \quad \cdots (41)$$

$$= 0 \quad \cdots (42)$$

$$\langle n|\mathbf{p}(t)|n \rangle = \langle n|\mathbf{p} \cos(\omega t)|n \rangle + \langle n| - \mathbf{x} m\omega \sin(\omega t)|n \rangle \quad \cdots (43)$$

$$= \cos(\omega t) \langle n|\mathbf{p}|n \rangle - m\omega \sin(\omega t) \langle n|\mathbf{x}|n \rangle = 0 \quad \cdots (43)$$

$$= 0 \quad \cdots (44)$$

となる。

7. $|\lambda\rangle = e^{\lambda a^\dagger}|0\rangle$ のコヒーレント状態を考える。ここで λ は複素数である。

このとき、(37) より

$$\langle \lambda|\mathbf{x}(t)|\lambda \rangle = \langle \lambda|\mathbf{x}|\lambda \rangle \cos(\omega t) + \langle \lambda|\mathbf{p}|\lambda \rangle \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t) \quad \cdots (45)$$

ここで、

$$\langle \lambda|\mathbf{x}|\lambda \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \lambda|(a + a^\dagger)|\lambda \rangle \quad \cdots (46)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \{ \langle \lambda|a|\lambda \rangle + \langle \lambda|a^\dagger|\lambda \rangle \} \quad \cdots (47)$$

となるが、ここでコヒーレント状態は以下のように展開できるから、

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \cdots (48)$$

これを利用して、

$$a|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \lambda |\lambda\rangle \quad \cdots (49)$$

$$\langle \lambda|a^\dagger = \lambda^* \langle \lambda| \quad \cdots (50)$$

とできる。したがって、

$$\langle \lambda|\mathbf{x}|\lambda \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \{ \lambda \langle \lambda|\lambda \rangle + \lambda^* \langle \lambda|\lambda \rangle \} = \langle \lambda|\lambda \rangle \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\lambda + \lambda^*) \quad \cdots (51)$$

同様に、

$$\langle \lambda | \mathbf{p} | \lambda \rangle = -i \langle \lambda | \lambda \rangle \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (\lambda - \lambda^*) \quad \cdots (52)$$

これらの値は単なる定数なので、(37) と (38) をコヒーレント状態 $|\lambda\rangle$ で期待値を出せば、古典解と同様の振動を意味することが示される。したがって $F(a, a^\dagger)$ の具体例は

$$F(a, a^\dagger) = e^{\lambda a^\dagger} \quad \cdots (53)$$

である。

第2問 解答

1. 热力学的重率とは、指定された値に対して可能な量子状態数であるので

$$W(N_\alpha, N_\beta) = \frac{N!}{N_\alpha! N_\beta!} \quad \cdots (1)$$

2. エントロピー S は、Stirling の公式を用いて、

$$S = k_B \log W = k_B [N \log N - (N_\alpha \log N_\alpha) - (N_\beta \log N_\beta)] = -k_B \left(N_\alpha \log \frac{N_\alpha}{N} + N_\beta \log \frac{N_\beta}{N} \right) \quad \cdots (2)$$

3. δE が小さい場合、

$$\Omega(E)\delta E = W \quad \cdots (3)$$

となるので、

$$p(E_l) \propto \exp \left[\frac{S(E_T - E_l) - S(E_T)}{k_B} \right] \quad \cdots (4)$$

熱浴は十分大きいので $E_T \gg E_l$ 、これをふまえて $S(E_T - E_l) - S(E_T)$ を展開すると、

$$S(E_T - E_l) - S(E_T) = -E_l \left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{E=E_T} + \frac{1}{2} E_l^2 \left. \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} \right|_{E=E_T} + \dots \quad \cdots (5)$$

オーダーで考えれば、第二項以降は第一項に E_l/E_T をかけたものと同程度の大きさしかなく、第一項に比べて無視できるので、 $T = (\partial S / \partial E)^{-1}|_{E=E_T}$ も用いて

$$P(E_l) \propto \exp(-E_l/k_B T) \quad \cdots (6)$$

4. $\beta = 1/k_B T$ として、

$$Z_1 = e^{-\beta\epsilon} + e^{\beta\epsilon} = 2 \cosh \beta\epsilon \quad \cdots (7)$$

$$Z_N = Z_1^N = (2 \cosh \beta\epsilon)^N \quad \cdots (8)$$

- 5.

$$F = -k_B T \log Z_N = -N k_B T \log(2 \cosh \beta\epsilon) \quad \cdots (9)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = N k_B \left[\log(2 \cosh \beta\epsilon) - \frac{\epsilon}{k_B T} \tanh \beta\epsilon \right] \quad \cdots (10)$$

$$E = F + TS = -N\epsilon \tanh \beta\epsilon \quad \cdots (11)$$

- 6.

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = N k_B (\beta\epsilon)^2 \frac{1}{\cosh^2 \beta\epsilon} \quad \cdots (12)$$

関数形は $y = C/Nk_B$, $x = k_B T/\epsilon$ として

$$y = \frac{1}{x^2 \cosh^2(\frac{1}{x})} \quad \cdots (13)$$

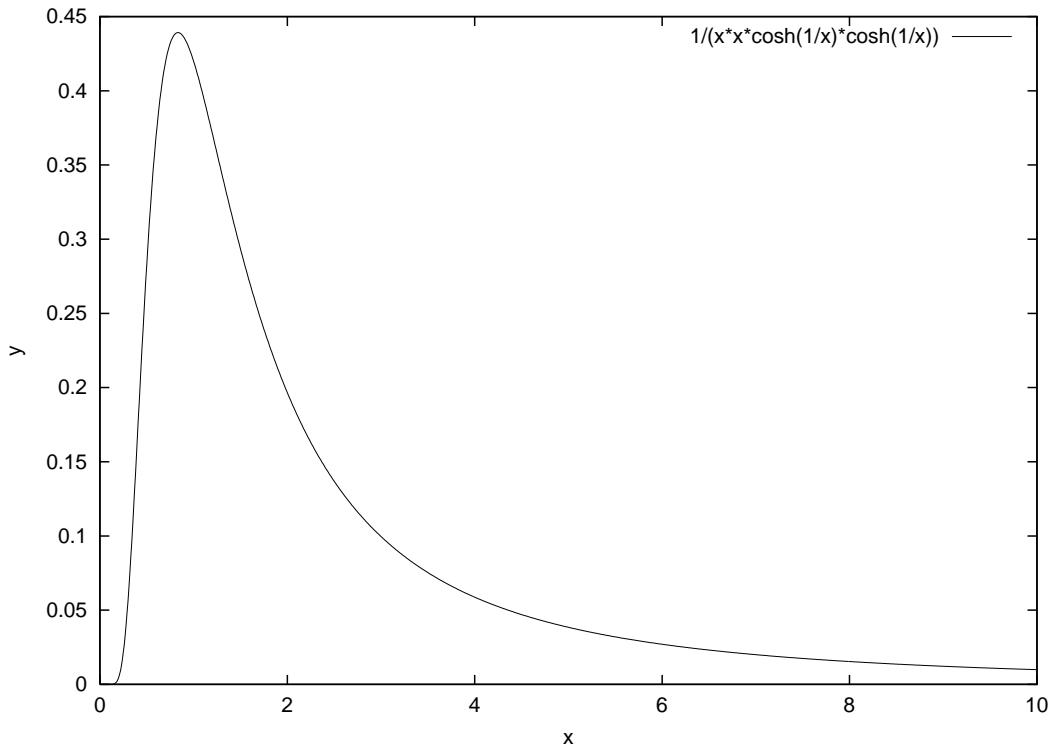


図 10:

7. 2 番と同様に

$$p(E_L, L) \propto \exp \left[\frac{S(E_T - E_L, L_T - L) - S(E_T, L_T)}{k_B} \right] \quad \cdots (14)$$

$E_T \gg E_L, L_T \gg L$ より $S(E_T - E_L, L_T - L) - S(E_T, L_T)$ を展開すると、

$$\begin{aligned} S(E_T - E_L, L_T - L) - S(E_T, L_T) &= -E_L \frac{\partial S}{\partial E} \Big|_{E=E_T} - L \frac{\partial S}{\partial L} \Big|_{L=L_T} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(E_L^2 \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} \Big|_{E=E_T} + 2E_L L \frac{\partial^2 S}{\partial E \partial L} \Big|_{E=E_T, L=L_T} + L^2 \frac{\partial^2 S}{\partial L^2} \Big|_{L=L_T} \right) + \dots \end{aligned}$$

オーダーで考えると、第二項以降は第一項に $E_L/E_T, L/L_T$ をかけたもの程度の大きさしかなく、第一項に比べて無視できるので、 $T = (\partial S / \partial E)^{-1}|_{E=E_T}$ と $T dS = dE - X dL$ を用いると、

$$S(E_T - E_L, L_T - L) - S(E_T, L_T) = \frac{-E_L + XL}{T} \quad \cdots (15)$$

$$\therefore p(E_L, L) \propto \exp \left\{ \frac{1}{k_B T} (-E_L + XL) \right\} \quad \cdots (16)$$

8. $L(N_\alpha, N_\beta) = N_\alpha a + N_\beta b, E_L(N_\alpha, N_\beta) = N_\alpha \epsilon - N_\beta \epsilon$ と、二項定理 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = (a+b)^n$ を用いて、

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{N_\alpha=0}^N \frac{N!}{N_\alpha! N_\beta!} e^{\beta(-E_L+XL)} \\ &= \sum_{N_\alpha=0}^N \frac{N!}{N_\alpha! (N-N_\alpha)!} \left[e^{\beta(aX-\epsilon)} \right]^{N_\alpha} \left[e^{\beta(bX+\epsilon)} \right]^{N-N_\alpha} \\ &= \left[e^{\beta(aX-\epsilon)} + e^{\beta(bX+\epsilon)} \right]^N \end{aligned}$$

9.

$$G = -k_B T \log Y = -N k_B T \log [e^{\beta(aX-\epsilon)} + e^{\beta(bX+\epsilon)}] \quad \cdots (17)$$

また、 $G = F - XL, dG = -SdT - LdX$ より、

$$L = -\frac{\partial G}{\partial X} = \frac{N [ae^{\beta(aX-\epsilon)} + be^{\beta(bX+\epsilon)}]}{e^{\beta(aX-\epsilon)} + e^{\beta(bX+\epsilon)}} \quad \cdots (18)$$

問題 3 解答

1. 磁場の中の荷電粒子は進行方向と垂直な方向に $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ の力を受ける。最初は相対論効果を考えなくてもよい場合を考える。

磁場は仕事をしないので荷電粒子の速さは一定であり、進行方向と垂直に一定の力が働き続けるので、 xy 平面内で円運動を行う。運動方程式は

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{qB}{m} \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} \quad \cdots (1)$$

である。この方程式は v_x, v_y それぞれについての線形 2 階同次微分方程式に変形することができ、

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x, \quad \frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y \quad \cdots (2)$$

により、解は三角関数の線形重ね合わせ $v_{x,y} = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ となる。ここに $\omega = qB/m$ と定める。 $v_x(0) = v_0, v_y(0) = 0$ を代入することにより、

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad \cdots (3)$$

となる。時間について積分を行って初期条件を代入することにより、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{mv_0}{qB} \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) - 1 \end{pmatrix} \quad \cdots (4)$$

となる。

2. 運動方程式 (1) は変更されて、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{q}{m} \begin{pmatrix} -E \sin(\Omega t) + v_y B \\ -E \cos(\Omega t) - v_x B \end{pmatrix} \quad \cdots (5)$$

となる。1. と同じように 2 階の微分方程式に変形すると今度は非同次となり、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[-\frac{qE}{m} \sin(\Omega t) + \frac{qB}{m} v_y \right] = -\frac{qE\Omega}{m} \cos(\Omega t) + \frac{qB}{m} \left[-\frac{qE}{m} \cos(\Omega t) - \frac{qB}{m} v_x \right] \\ &= -\frac{qE}{m} \left(\Omega + \frac{qB}{m} \right) \cos(\Omega t) - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_x \end{aligned} \quad \cdots (6)$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = \frac{qE}{m} \left(\Omega + \frac{qB}{m} \right) \sin(\Omega t) - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_y \quad \cdots (7)$$

となる。 v_x に関する 2 階非同次線形微分方程式を解くことを考える。定数変化法を用いればよい。すなわち同次方程式 (2) の第 1 式の一般解は

$$v_x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \quad \cdots (8)$$

であった。今はこれに非同次項 $\varphi(t) = -\frac{qE}{m} \left(\Omega + \frac{qB}{m} \right) \sin(\Omega t)$ が加わっているだけである。定数変化法の精神は (6) の特殊解として C_1, C_2 の代わりに t 依存の変数に置き換えたものを持ってきて、問題の微分方程式を満たすものをひとつ見つけることである。これがみつかれば後は元の非同次項のない微分方程式の一般解 (3)) に足すだけで一般解が求まる。

$$v_x = c_1(t) \cos(\omega t) + c_2(t) \sin(\omega t) \quad \cdots (9)$$

すると、

$$\frac{dv_x}{dt} = c'_1 \cos(\omega t) + c'_2 \sin(\omega t) - c_1 \omega \sin(\omega t) + c_2 \omega \cos(\omega t) \quad \cdots (10)$$

となる。定数 c_1, c_2 を

$$c'_1 \cos(\omega t) + c'_2 \sin(\omega t) = 0 \quad \cdots (11)$$

となるように選ぶと、

$$\frac{dv_x}{dt} = -c_1 \omega \sin(\omega t) + c_2 \omega \cos(\omega t) \quad \cdots (12)$$

となる。さらに微分して、

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -c'_1 \omega \sin(\omega t) + c'_2 \omega \cos(\omega t) - c_1 \omega^2 \cos(\omega t) - c_2 \omega^2 \sin(\omega t) \quad \cdots (13)$$

問題の微分方程式に代入すると、

$$-c'_1 \omega \sin(\omega t) + c'_2 \omega \cos(\omega t) = -\frac{qE}{m} (\Omega + \omega) \cos(\Omega t) \quad \cdots (14)$$

となる。(11),(14)から

$$c'_1(t) = \frac{qE}{m\omega} (\Omega + \omega) \cos(\Omega t) \sin(\omega t) \quad \cdots (15)$$

$$c'_2(t) = -\frac{qE}{m\omega} (\Omega + \omega) \cos(\Omega t) \cos(\omega t) \quad \cdots (16)$$

と解かれ、これらを積分して(9)式に代入することにより、

$$v_x(t) = -\frac{qE}{m\omega} (\Omega + \omega) \cos(\omega t) \left[\frac{\cos(\Omega + \omega)t}{2(\Omega + \omega)} - \frac{\cos(\Omega - \omega)t}{2(\Omega - \omega)} \right] - \frac{qE}{m\omega} (\Omega + \omega) \sin(\omega t) \left[\frac{\sin(\Omega + \omega)t}{2(\Omega + \omega)} + \frac{\sin(\Omega - \omega)t}{2(\Omega - \omega)} \right] \quad \cdots (17)$$

という特殊解が求まる。従って、一般解は

$$\begin{aligned} v_x(t) &= C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) - \frac{qE}{m\omega} (\Omega + \omega) \cos(\omega t) \left[\frac{\cos(\Omega + \omega)t}{2(\Omega + \omega)} - \frac{\cos(\Omega - \omega)t}{2(\Omega - \omega)} \right] \\ &\quad - \frac{qE}{m\omega} (\Omega + \omega) \sin(\omega t) \left[\frac{\sin(\Omega + \omega)t}{2(\Omega + \omega)} + \frac{\sin(\Omega - \omega)t}{2(\Omega - \omega)} \right] \\ &= C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{qE}{m(\Omega - \omega)} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad \cdots (18)$$

と求まる。初期条件は $v_x(0) = v_0, v'_x(0) = 0$ (i.e. $v_y(0) = 0$) ので、 $C_1 = v_0, C_2 = -c_2(0) = 0$ となる。以上から、

$$v_x(t) = \left(v_0 - \frac{qE}{m(\Omega - \omega)} \right) \cos(\omega t) + \frac{qE}{m(\Omega - \omega)} \cos(\Omega t) \quad \cdots (19)$$

と求まる。同様にして v_y も

$$v_y(t) = -\left(v_0 - \frac{qE}{m(\Omega - \omega)} \right) \sin(\omega t) - \frac{qE}{m(\Omega - \omega)} \sin(\Omega t) \quad \cdots (20)$$

と分かる。

3. $\Omega = \omega = \frac{qB}{m}$ の場合には、例えば (15)(16) 式の箇所から解き直さなくてはならない。この場合に (15)(16) を積分し特殊解を求める。

$$v_x(t) = -\frac{qE}{m} \left[\frac{1}{2\omega} \cos(\omega t) + t \sin(\omega t) \right] \quad \cdots (21)$$

これを同次方程式の一般解 $v_x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ に付け加える際に、第 1 項は係数 C_1 に込めてしまうことができる。これを考慮した上で初期条件を適用すると v_x の解は

$$v_x(t) = v_0 \cos(\omega t) - \frac{qE}{m} t \sin(\omega t) \quad \cdots (22)$$

となる。同じ様にして v_y の解は

$$v_y(t) = -v_0 \sin(\omega t) - \frac{qE}{m} t \cos(\omega t) \quad \cdots (23)$$

である。以上より、運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2) = \frac{m}{2}v_0^2 + \frac{q^2 E^2}{2m}t^2 \quad \cdots (24)$$

となり、時間の 2 乗に比例して増加することが分かる。

4. 運動方程式に相対論的補正を加えた場合、 γ ファクターが運動量にかかるため、

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right] = \frac{qB}{m} \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} \quad \cdots (25)$$

となる。 \vec{v} との内積を取ると右辺が消えるので、

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \cdots (26)$$

である。両辺に $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$ をかけて整理すると、

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right]^2 = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{v^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \text{time independent} \quad \cdots (27)$$

であることが分かる。すなわち、速さ v は時間によらず一定である。

5. 以上より、運動方程式 (1) において γ は時間微分の外に出すことができる。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{qB}{m\gamma} \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} \quad \cdots (28)$$

となる。あとは 1. 番と全く同様に解くことができて、

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = -v_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \text{where } \omega = \frac{qB}{m\gamma} \quad \cdots (29)$$

である。

6. 最初は非相対論的に運動を開始し、3. 番で求めたように速さが増加してゆく時間発展を取る。速さが増加して γ が無視できなくなってくる（相対論的）と運動方程式 (28) で速さの変化が押さえられてゆく。そのとき、回転周期 ω が電場の周期 Ω からずれるために、粒子の振舞は 3. 番のようなエネルギー増加の挙動から、2. 番のようなエネルギーが平均的に一定の振舞いに切り替わる。その時点で運動エネルギーの正味の増加は抑えられてしまうことになる。

【別解】 .

1. 運動方程式 (1) について、 $w = v_x + i v_y$ を考えることによって、問題を 1 階の微分方程式に落とすことができる。

$$\frac{dw}{dt} = -i \frac{qB}{m} w \quad \cdots (30)$$

これに初期条件 $w(0) = v_0$ を適用すると解として $w(t) = v_0 e^{-i\omega t}$ が求まる ($\omega = \frac{qB}{m}$)

2. 上と同様に行うと運動方程式 (5) は

$$\frac{dw}{dt} = -i \frac{q}{m} (E e^{-i\Omega t} + B w) \quad \cdots (31)$$

となる。やはり定数変化法を用いてこれを解く。同次方程式である (30) 式の定数部分を変化させたものとして、 $w(t) = C(t) e^{-i\omega t}$ を考え、これを (31) 式に代入すると、

$$C'(t) e^{-i\omega t} = -i \frac{qE}{m} e^{-i\Omega t} \quad \cdots (32)$$

が求まる。よって、

$$C(t) = \frac{qE}{m(\Omega - \omega)} e^{-i(\Omega - \omega)t} \quad \text{i.e.} \quad w(t) = \frac{qE}{m(\Omega - \omega)} e^{-i\Omega t} \quad \cdots (33)$$

という $w(t)$ の特殊解が得られ、これを同次方程式の一般解に足すことで $w(t)$ の一般解となる。初期条件を適用して実部虚部を分離すると、(20) 式と同じ式が得られる。

2 元ベクトルを残したまま 1 階非同次線形微分方程式の解き方を敷衍しても、同等の解答が得られ、また同じように簡潔である。

問題 4 解答

1. 粒子の Lagrangian は、

$$\begin{aligned} L &= \frac{p^2}{2m} - U(r) \\ &= \frac{1}{2}m(i^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r) \end{aligned}$$

と書ける。これを以下の Euler-Lagrange 方程式に代入すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0$$

したがって、角運動量 $mr^2\dot{\phi}$ が保存されることが示された。

2. 無限遠での探査機の角運動量は mvb であるから、1 で得られた角運動量の保存則より、

$$mr^2\dot{\phi} = mvb$$

$$\dot{\phi} = \frac{vb}{r^2}$$

3. 1 の Lagrangian を以下の Euler-Lagrange 方程式に代入すると、 $\dot{\phi} = \frac{vb}{r^2}$ を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= 0 \\ mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{d}{dt}(m\dot{r}) &= 0 \\ m\frac{v^2b^2}{r^3} - \frac{GMm}{r^2} - m\ddot{r} &= 0 \end{aligned}$$

という式が成り立つ。これは下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= m\frac{v^2b^2}{r^3} - \frac{GMm}{r^2} \\ &= -\frac{d}{dr}\left(\frac{mv^2b^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r}\right) \end{aligned}$$

ここで、上の式の右辺を $-\frac{d}{dr}\tilde{U}(r)$ とすれば、 $\tilde{U}(r)$ は有効ポテンシャルとなる。無限遠で探査機のもつエネルギーは、 $\frac{1}{2}mv^2$ であるから、

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{mv^2b^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r}$$

の解が r_0 となる。これを解くと、

$$r_0 = \frac{-GM + \sqrt{G^2M^2 + v^4b^2}}{v^2}$$

となる。

4. x 方向の力について考える。

重力の方向の x 方向の力は、

$$-\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right)\cos\phi = -\frac{GMm}{r^2}\cos\phi$$

となるから、以下の式が成り立つ。

$$m\ddot{x} = -\frac{GMm}{r^2}\cos\phi$$

ここで、 $\dot{x} = v_x$ と書くと、

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{GMm}{r^2} \cos \phi$$

両辺に $\frac{dt}{d\phi} = \frac{1}{\dot{\phi}}$ をかけると、

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{d\phi} &= -\frac{GM}{r^2 \dot{\phi}} \cos \phi \\ &= -\frac{GM}{vb} \cos \phi \end{aligned}$$

したがって、

$$dv_x = -\frac{GM}{vb} \cos \phi d\phi$$

が示された。

5. (2) の両辺を積分すると、

$$v_x \Big|_{\text{入射前}}^{\text{出射後}} = -\frac{GM}{vb} \sin \phi \Big|_{\text{入射前}}^{\text{出射後}}$$

ここで、左辺の変化について考えると、 $2v \sin \frac{\theta}{2}$ となる。また、右辺は入射前の無限遠で $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ 、出射後の無限遠で $\phi \rightarrow -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$ となることより、以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} 2v \sin \frac{\theta}{2} &= \frac{GM}{vb} \{ \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}) \} \\ &= \frac{GM}{vb} 2 \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

これをまとめると、

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{GM}{v^2 b}$$

が示される。

6. 前提として、惑星の運動量は変化は考えるが、速度単体の変化は微小なため、無視するものとする。

このとき、惑星の静止系で見ると、探査機は双曲線軌道を描くので、入射速度と出射速度が等しくなる。これを式で書くと、

$$|\vec{v} - \vec{W}| = |\vec{u} - \vec{W}|$$

両辺を 2乗してまとめると、

$$|\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 2(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{W}$$

したがって、入射前後における探査機のエネルギー変化は、

$$\frac{1}{2}m|\vec{u}|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = m(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{W}$$

と得られる。

7. 太陽の静止系で見た探査機の速度ベクトルの変化 ($\vec{u} - \vec{v}$) は、惑星の静止系で見た速度ベクトルの変化 (($\vec{u} - \vec{W}$) - ($\vec{v} - \vec{W}$)) に等しい。このとき、入射速度ベクトルによって、 $\vec{u} - \vec{v}$ の方向は変わるが、それを上手く選んでやれば、 $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{W} > 0$ とすることができます。この条件下で、6. で求めた入射前後における探査機のエネルギー変化が正となるので、探査機は加速可能なのである。

次に、そのエネルギー変化量の起源は、惑星の公転エネルギーである。以下でそれを示す。

まず、運動量保存の法則より、探査機出射後の惑星の運動量を \vec{W}' とすると、

$$m\vec{v} + M\vec{W} = m\vec{u} + M\vec{W}'$$

と書ける。したがって、

$$\vec{W}' = \vec{W} + \frac{m}{M}(\vec{v} - \vec{u})$$

これを用いて、惑星の運動エネルギーの変化量 $\frac{1}{2}M(|\vec{W}'|^2 - |\vec{W}|^2)$ を求めると、

$$\frac{1}{2}M(|\vec{W}'|^2 - |\vec{W}|^2) = -m(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{W}$$

と得られる。ちなみに、この計算において、 $(\frac{m}{M})^2$ の項は微小であるので無視した。これは、6. で求めた探査機の運動エネルギー変化の符号を変えたものに等しい。つまり、惑星が失ったエネルギーを探査機が受け取ったのである。したがって、探査機得たエネルギーの源が惑星の公転の運動エネルギーであることが示された。

問題 5 解答

1. •光電吸収

光電吸収とは、入射ガンマ線光子が原子に束縛された電子と相互作用して全てのエネルギーを失い消失し、その電子が原子から飛び出す現象である。この場合入射光子エネルギー $h\nu$ からもとの殻の電子の結合エネルギー E_b を差し引いた値の運動エネルギーを持つ光電子が吸収原子の電子殻の一つから作られる。光子が物質の原子によって吸収されるのは、原子の束縛電子によるものであって、自由電子による吸収は起こらない。運動量保存則よりこの過程で原子が反跳するが、反跳エネルギーは大変小さいので通常は無視できる。光電効果の起こる確率は、結合エネルギーが大きいほど、すなわち束縛電子と核との結びつきが強いほど大きい。これは、 $h\nu$ の光子の吸収では、電子の得る運動エネルギー E が、 $E = h\nu - E_b$ と表されることからも分かるように、 E_b の大きい電子ほど飛び出す運動エネルギーが小さく、核に与える運動量が小さいからである。 K 電子の結合エネルギーより大きい場合は光電効果の 80% 以上が K 電子によるものとなり、また K 電子の結合エネルギー以下では K 電子による光電効果は起きない。他の殻についても同様であることから、各結合のエネルギーに相当する光子のところで吸収端を持つことになり、光電効果断面積は光子のエネルギーが小さくなるに従って不連続に増加する。一般的に光電効果断面積はシンチレーションカウンターの原子番号 Z の 5 乗に比例して増大し、低エネルギーにおいては $(h\nu)^{-7/2}$ 、高エネルギーにおいては $(h\nu)^{-1}$ に比例する。

•コンプトン散乱

コンプトン散乱とは、入射ガンマ線光子が原子に束縛された電子と相互作用して反跳電子と散乱ガンマ線光子になる現象である。この場合散乱角に依存してこれら二つにエネルギーが分配される。光子のエ

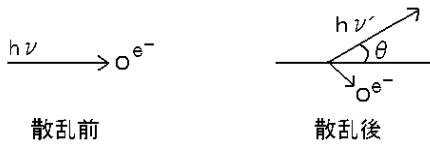


図 11: コンプトン散乱

ネルギーが電子の結合エネルギーに比較して十分大きくなつて電子を自由電子と見なすことが出来るなると、非弾性散乱を受ける。図 11 の様に、散乱前は電子が静止していたと仮定して、散乱前の光子のエネルギーを $h\nu$ 、散乱光子のエネルギーを $h\nu'$ 、電子の静止質量エネルギーを m_0c^2 、散乱角を θ とすると、エネルギーの関係は

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}(1 - \cos\theta)}$$

で表される。これより、コンプトン散乱によって得られる電子の運動エネルギー E は、

$$0 \leq E \leq \frac{\frac{h\nu}{m_0c^2}}{1 + 2\frac{h\nu}{m_0c^2}} \cdot h\nu$$

となり、連続的なエネルギー分布を取ることが分かる。これより、入射光子のエネルギーが非常に大きくなると、電子が得られる運動エネルギーは $E = h\nu - \frac{m_0c^2}{2} \approx h\nu - 0.26 \text{ [MeV]}$ に近づくことが分かる。また、コンプトン散乱断面積はシンチレーションカウンターの Z に比例する。しかし光電効果は 1 回だけ起こるものではなく複数回起こり得るので、このため、全エネルギーをシンチレーションカウンター内で電子に与えることになると、光電効果とほぼ同じエネルギーを与えることになるので、これにより光電効果と同等のイベントにもなりうる。また、これより、シンチレーションカウンターが大型になれば、コンプトン散乱が複数回行われる確率があがるため、光子の全エネルギーに相当する光電効果によるイベント数が見かけ上増えることになる。大型のシンチレーションカウンターでは光電効果よりもコンプトン散乱による全エネルギーに相当するイベントの割合が大きく、光電効果の断面積を用いて光電ピーク効率を計算することはできない。

•電子対生成

電子対生成とは、入射ガンマ線光子の完全な消滅位置に電子と陽電子の対を生成する現象で、NaI の原子核内で陽子近傍の強い電場によって起こるものである。電子陽電子対を生成するには $2m_0c$ のエネルギーが必要なので、この過程がエネルギー的に可能となるには 1.02 MeV 以上のガンマ線エネルギーが必要である。1.02 MeV を超えた分のガンマ線エネルギーは電子陽電子の運動エネルギーとなる。また、電子対生成断面積は Z^2 に比例し、 $(h\nu - 2m_0c^2)$ に比例する。しかし、 Z の大きい物質などの場合や高エネルギーの場合は Z^2 はよい近似とはならない。対生成できた電子、陽電子のうち、陽電子が対消滅により消滅すると 2 個の 0.51 MeV の光子を生ずるが、この光子は吸収される場合及びそのまま外に出る場合があり、二つとも吸収された場合はシンチレーションカウンター内で光子が消費したエネルギーが全て発光に寄与することになるので、これは、光電効果に含まれることになる。また、一つも吸収されない、または一つのみ吸収の場合のピークが、それぞれ光電ピークより 1.02 MeV、0.51 MeV 低いピークを作ることになるので、3 つのピークが 0.51 MeV で並ぶことになる。この光子が吸収されずにコントン散乱を起こすことで連続的な分布を作ることになる。

2. (i) ケーブルの特性インピーダンスを Z_0 としてケーブルの終端に抵抗 Z を繋ぐと反射が起こり、その反射波の入射波に対する相対的波高 r は

$$r = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$$

で表される。ここで、 Z_0 は、単位長さ当たりの抵抗であり、 Z は同軸ケーブルの先に付ける抵抗値である。よって終端抵抗には $Z = Z_0$ となるものを選ばなければ $r \neq 0$ となるので反射波が存在し、OscilloScope 上でその反射波も観測されることになり、正しい入射波を見ることが出来なくなる。よって、 $Z = Z_0$ とすることで、入射波のみを見ることが出来、繋ぎ方は図 12 の様になる。一般的に Z_0 は 50Ω であり、終端抵抗として $Z = 50 \Omega$ をとる。

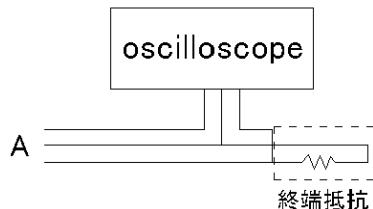


図 12: 終端抵抗の繋ぎ方

- (ii) NaI(Tl) 結晶とガンマ線との相互作用で出来た高エネルギーの電子は、結晶内を通過することで他の電子を価電子帯から伝導体へ上げて数多くの電子正孔対を作る。このとき正孔はすばやく活性化物質の位置へ移動してそれを電離し、一方電子は結晶中を自由に移動して電離された活性化物質に出会うまで動く。そこで電子は活性化物質の位置に落ち込んで独自の励起エネルギー状態を持った中性の不純物配位を形成する。この状態から基底状態へある半減期(蛍光減衰定数)をもって遷移することで可視領域の光子が放出されるので、光子の放出量は指数関数的になる。この時電子の移動時間等は非常に短いので無視してよく、光電子増倍管からの出力パルスは光子の放出量に比例するので点 Aにおいては $V_A(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ という形で表される。この場合 $\tau = 230 \text{ ns}$ だから、その概形は図 13 の様になる。次に点 A、コンデンサ、抵抗に流れる電流をそれぞれ I 、 I_1 、 I_2 とすると $I = I_1 + I_2$ が成り立つ。一方 $I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ 、 $I_1 = C \frac{dV_B}{dt}$ 、 $I_2 = \frac{V_B}{R}$ だから、これらを代入して

$$I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = C \frac{dV_B}{dt} + \frac{V_B}{R}$$

この微分方程式を V_B について解く。まず左辺が 0 の場合の解は $V_B(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$ 、但し $T = RC$ 、A は時間

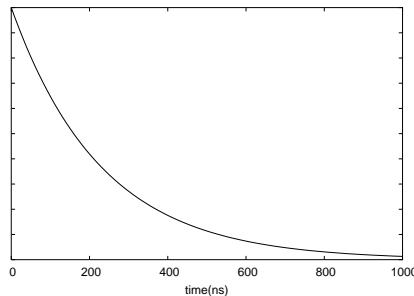


図 13: 点 A における出力

によらない定数である。次に $A = A(t)$ として上式に代入して計算すると、

$$\frac{dA}{dt} = \frac{RI_0}{T} e^{\left(\frac{t}{T} - \frac{t}{\tau}\right)}$$

$$\therefore A(t) = RI_0 \frac{\tau}{\tau - T} e^{\left(\frac{t}{T} - \frac{t}{\tau}\right)}$$

よって

$$V_B = RI_0 \frac{\tau}{\tau - T} e^{-\frac{t}{\tau}} + Ae^{-\frac{t}{T}}$$

初期条件は $t = 0$ の時 $V_B = 0$ だから、 $A = -RI_0 \frac{\tau}{\tau - T}$ 、結局

$$V_B = RI_0 \frac{\tau}{\tau - T} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

となる。 $T = 10\mu s$ だから、その概形は図 14 の様になる。

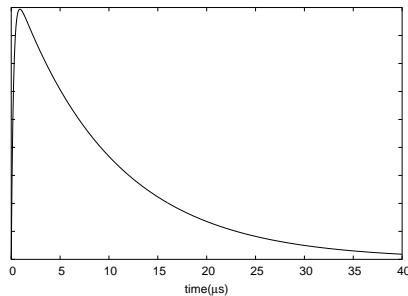


図 14: 点 B における出力

- (iii) Discriminator のスレッショルドを用いて低いノイズをカットしたり、出力の先にハイパスフィルター やローパスフィルターを付けてノイズを落としたり、出力を増幅させて S/N 比を改善したりする。他にも、PMT のゲインが安定していないことも考えられる。これを解決するには、まず、同程度の Rate を長い時間 NaI(Tl) 検出器に入射させ続けることで慣らす。また、印加電圧が高いとゲインが印加電圧や PMT の中のダイノードの段数に大きく依存するために、例えば Microchannel Plate 等なるべく低い段数のものを用いたり、印加電圧をできるだけ低くて済むようにしたりする。印加電圧が高いとゲインが一定にならないだけでなく、ノイズも増やしてしまう可能性もあるため、あまりよくない。

3. (i) 一事象当たりの確率は同じ状況で測定し、計数時間が放射線の半減期に比べて短いことを仮定すれば一定であり、かつその確率は低い。また、試料中の原子核の総数が大きい。これより、反応が起こる確率 p が小さく、試行回数 n 大きい場合は、2 項分布で起きる確率 $P(x)$ は $\frac{n!}{(n-x)!} \simeq n^x (1-p)^{n-x} \simeq e^{-pn}$ を用いて、

以下のようにポアソン分布の近似に近似できることになる。

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &\approx \frac{(pn)^x e^{-pn}}{x!} \\ &= \frac{(\bar{x})^x e^{-\bar{x}}}{x!} \end{aligned}$$

ここで、 \bar{x} は分布の平均値であり、 $\bar{x} = pn$ である。これより、ポアソン分布の近似が十分に成立しているものと仮定できるので、よって、ガンマ線のカウント数を m としたとき、その標準偏差は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{x=0}^n (x - \bar{x})^2 \cdot P(x) = pn = \bar{x} \\ \sigma &= \sqrt{\bar{x}} \end{aligned}$$

よって、 $\sigma = \sqrt{m}$ で与えられる。線源をおかない場合の計数率は $m_1 = 600[10\text{min}] = 60[\text{min}]$ 、標準偏差は $\sigma_1 = \sqrt{m_1} \approx 24[10\text{min}] = 2.4[\text{min}]$ となる。次に線源をおいた場合を考えると、全体の計数率は $m = 1000[2\text{min}] = 500[\text{min}]$ 、標準偏差は $\sigma = \sqrt{m} \approx 32[2\text{min}] = 16[\text{min}]$ となる。よって線源から放射されつるガンマ線の計数率は $m_2 = m - m_1 = 440[\text{min}]$ 、誤差伝播より $\sigma_2 = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_1^2} \approx 16[\text{min}]$ となる。

(ii) 必要なカウント数を N 、要する時間を $m[\text{min}]$ とすると全体の計数率と標準偏差は

$$n_{tot} = \frac{N}{m} [\text{min}^{-1}], \quad \sigma_{tot} = \frac{N}{\sqrt{m}} [\text{min}^{-1}] \quad \cdots (1)$$

よって線源については

$$n_s = \frac{N}{m} - n_1 = \frac{N}{m} - 60 [\text{min}^{-1}], \quad \sigma_s = \sqrt{\sigma_{tot}^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{\frac{N}{m^2} + 6} [\text{min}^{-1}] \quad \cdots (2)$$

(i) より $N \approx 500m$ なので

$$n_s = 440 [\text{min}^{-1}], \quad \sigma_s = \sqrt{\frac{500}{m} + 6} [\text{min}^{-1}] \quad \cdots (3)$$

精度を 1 % とするには

$$\frac{\sigma_s}{n_s} = \frac{1}{10^2} \quad \therefore m \approx 37.4 [\text{min}] \quad \cdots (4)$$

なので、時間は 38 分必要である。

4. (a) 0.5 MeV のとき

0.5 MeV におけるガンマ線の NaI(Tl) シンチレーターにおける断面積は

コンプトン散乱 > 光電効果 $\gg 0$ = 電子対生成

であるので、これよりグラフは以下のようになる。

ここで、後方散乱ピークがない理想的な場合は、その部分が点線で示してある。電子対生成によるピークは電子静止質量の 2 倍のエネルギーよりも小さいので起こらず、全エネルギーピークはこの場合は問題の設定から大半は光電効果によるものである。

(b) 5 MeV のとき

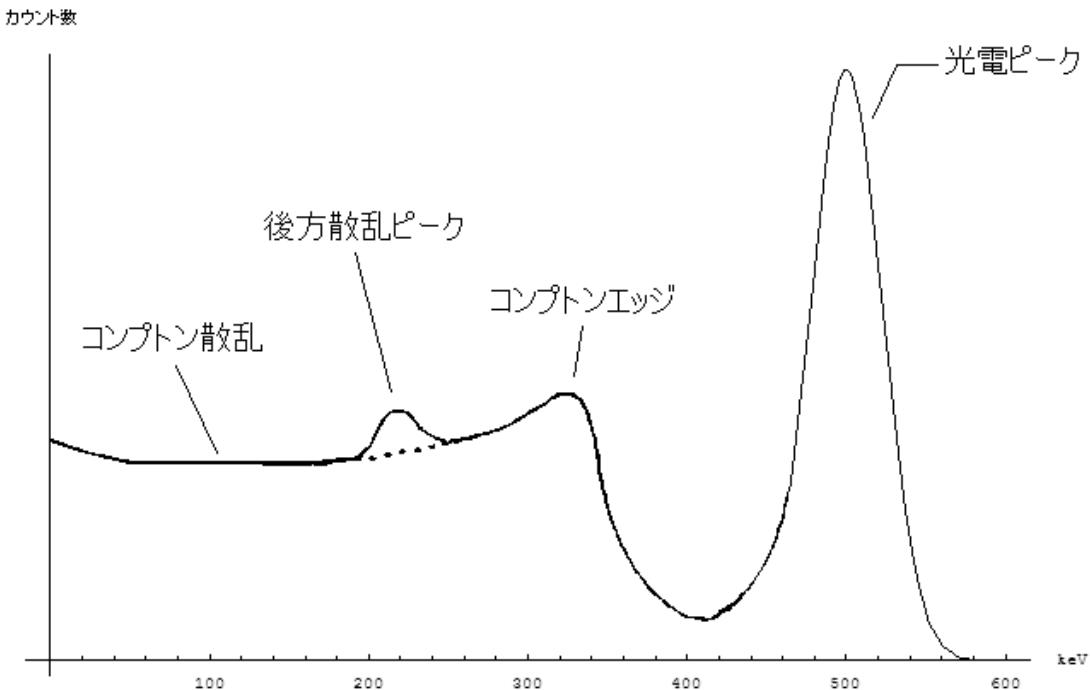


図 15: 0.5 MeV における度数分布

この場合は入射ガンマ線のエネルギーが大きいために断面積が、

$$\text{コンプトン散乱} > \text{電子対生成} \gg \text{光電効果} \approx 0$$

となり、また、NaI(Tl) 結晶の寸法は、入射ガンマ線との相互作用で生じる 2 次ガンマ線の平均自由行程よりも小さいが、2 次荷電粒子は NaI(Tl) 結晶内で完全に吸収される程度という問題の設定から、コンプトン散乱及び電子対生成による全エネルギーピークはほとんど得られず、光電効果はほとんど起こらないので、全エネルギーピークはほとんど無くなる。うちわけのほとんどは、コンプトン散乱したものが光電効果によって全エネルギーを落としたり、電子対生成したとの、陽電子による電子との対消滅による 2 本の 511 keV のガンマ線が光電効果を起こすなどの、複数の効果の組み合わせによるため、一意に (a) のときのように光電効果によるピークとは決めることが出来ない。また、度数分布は以下のようになり、ここでも (a) と同様に後方散乱ピークがない理想的な場合は、点線で示してある。電子対生成によるピークが 2 本見えるのは、陽電子が電子と対消滅したときに出来るガンマ線が 0 本、1 本、2 本検出器内にエネルギーを落とすことがあるからであり、この問題設定では、NaI(Tl) 結晶の大きさがさほど大きくないことから、2 本とも全エネルギーを落とす確率は小さいので、全エネルギーより 511 keV 及び 1022 keV 小さい 2 つのピークが主に見えるためである。グラフの形状は、NaI(Tl) 結晶の大きさに依存し、大きくすればするほど相対的に全エネルギーピークが増え、その他のピークが減ることになる。問題の設定より NaI(Tl) 結晶の大きさは、6 割の確率で 2 次ガンマ線が相互作用すると仮定してグラフは作った。

5. (a) 0.5 MeV のとき

0.5 MeV におけるガンマ線の NaI(Tl) シンチレーターにおける断面積は

$$\text{コンプトン散乱} > \text{光電効果} \gg 0 = \text{電子対生成}$$

であり、コンプトン散乱と光電効果の断面積のオーダーはほぼ同じであるので、このことから、実験装置としては、コリメーター等を用いてまずガンマ線源から出てきたガンマ線が全て検出器に入るようとする。便宜上

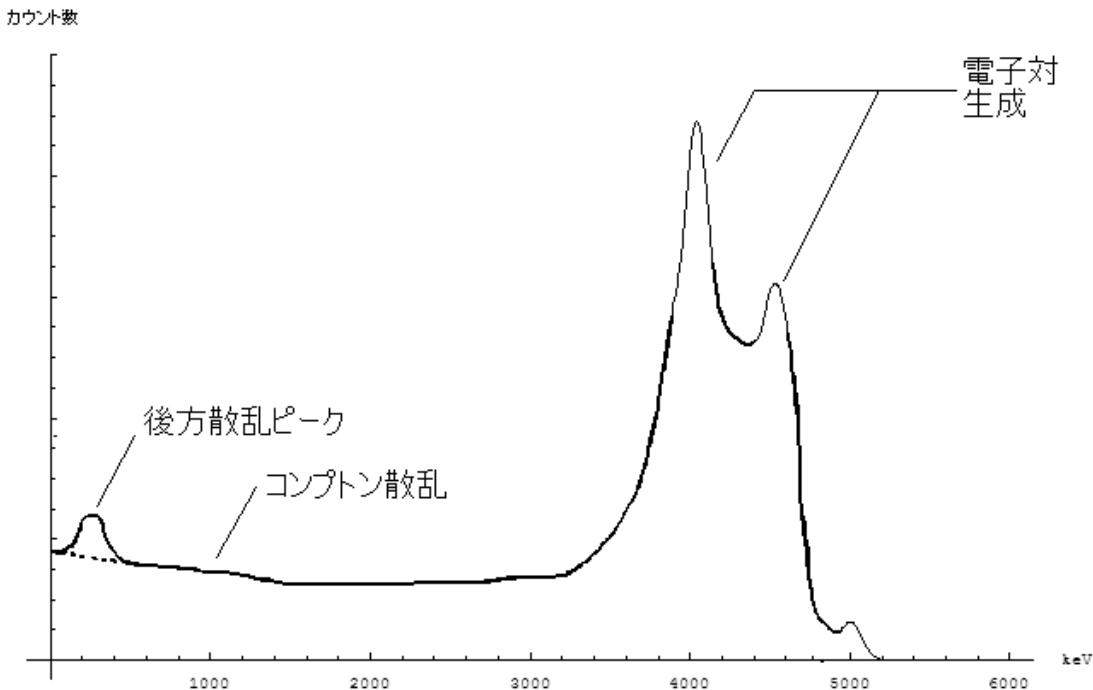


図 16: 5 MeV における度数分布

この検出器を検出器 A と呼ぶことにする。このまま測定すれば、結果は上記の断面積のとおりに前問のグラフで書けとあったようになり、連続的なコンプトンピーク及びコンプトンエッジと全エネルギーピークである光電ピークとバックグラウンドが主に見えることになるので、まず、検出器とガンマ線源を大量の検出器で 4π 覆う。理想的には NaI(Tl) よりも BGO 等を使いった方がよいのだが問題の設定上 NaI(Tl) を用いることとする。そして、外側の覆っている全ての検出器を便宜上検出器 B と呼ぶことにする。ここで、A \overline{B} という逆計数測定を行う。すると、検出器 B を鳴らしたものはカウントされなくなるので、検出されるイベントがどのようなものがあるかを検討すると、

(i) 光電効果

入射ガンマ線は全エネルギーを検出器 A で失っており、全エネルギーピークを形成し、また検出器 B は鳴らさないので、カウントされる。

(ii) コンプトン散乱

1 回のコンプトン散乱によりガンマ線が失うエネルギーは運動量保存則及びエネルギー保存則からすぐ計算できるように全てではなく、全エネルギーを失わない。これにより、ガンマ線が検出器 A の外に逃げるものがある。もちろんコンプトン散乱は 1 回ではなく、複数起こる可能性もあり、また光電効果等も起こる可能性があるので、全エネルギーを失う可能性もある。これは検出器が大きくなると、光電ピークと呼ばれる全エネルギーピークが増えることに該当する。これより、検出器 A で全エネルギーを失わなかつたイベントは検出器 B も鳴らすことになるので、このイベントは落ちる。当然全エネルギーを検出器 A で失えば検出器 B は鳴らないので、このイベントはカウントされることになる。

(iii) 電子対生成

この場合は入射エネルギーが電子の 2 倍の質量よりも小さいので起こらないが、仮に起こった場合でも、生成された電子と陽電子はすぐにとまり、ここで陽電子は電子と対消滅して、2 本の 511 keV のガンマ線を作るが、この 2 本のガンマ線もコンプトン散乱で議論したのと同様に、検出器 A で全エネルギーを失わなければ検出器 B をならすことに鳴るので、カウントされなくなり、結局全エネルギーを落とした場合のみのイベントが残ることになる。

(iv) バックグラウンド

バックグラウンドは、覆われている中のところで発生して、それが検出器 A において全エネルギーを落と

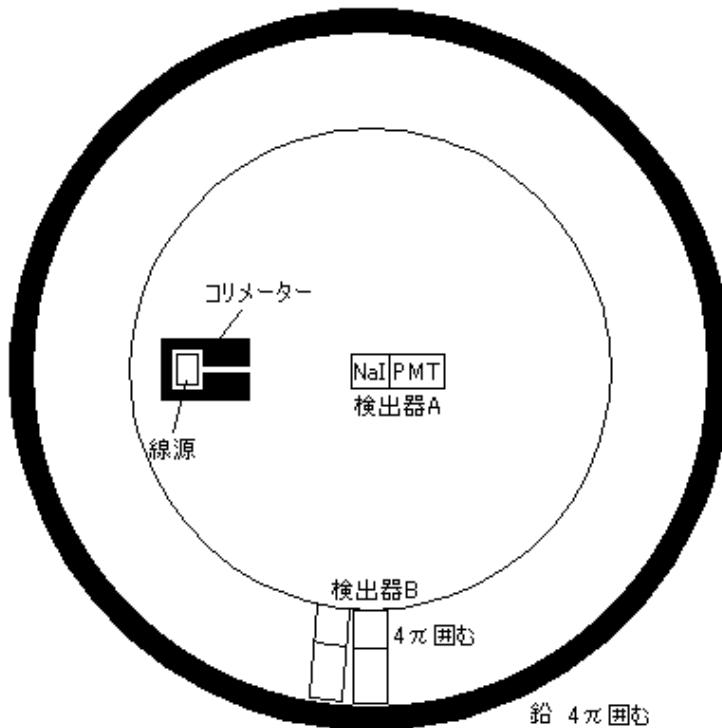


図 17: (a) の実験装置の配置

すという、ほとんど考えられないケースを除くと、必ず検出器 B も鳴ることになるので、これより、バックグラウンドによるイベントも落ちることになる。

以上から、全エネルギーピークのみが残ることになる。これは、NaI(Tl) 結晶の寸法は、入射ガンマ線との相互作用で生じる 2 次ガンマ線の平均自由行程よりも小さいが、2 次荷電粒子は NaI(Tl) 結晶内で完全に吸収される程度という問題の設定から、おそらくほぼ全ての全エネルギーピークは光電ピークからなると考えられる。これより、バックグラウンドを排除して、さらに全エネルギーのピークのみを取り出すことが可能となる。また、さらに検出器全体を鉛で覆うと、よりバックグラウンドを除くことが出来る。これにより、環境放射線のガンマ線や、アルファ線は鉛の厚さを数 cm 程度にしておくことで鉛中で止まり、検出器内に入らないで済み、二次宇宙線がバックグラウンドとして残ることになる。二次宇宙線は高エネルギーの μ 粒子が主で、残りが電子であり、その運動エネルギーのオーダーは GeV であるので、これを鉛で止めるためには、最小電離損失が $-\frac{dE}{dx} \approx 2 \text{ [MeV cm}^2/\text{g]}$ であるので、NaI の密度が 3.67 g/cm^3 であることから $-\frac{dE}{dx} \approx 7 \text{ [MeV/cm]}$ であり、メートルのオーダーの厚さ以上の鉛で覆う必要があり、あまり現実的でなく、カミオカンデのように山の中でやるなどしないといけなくなる。また、回路のノイズやバックグラウンドを減らすために Discriminator を取り付け、線源から放射されるガンマ線のエネルギーがおよそ分かっていることから、エネルギーに対してスレッショルドを設け、エネルギーの上限と下限を設置したほうがよいと考えられる。これにより内側の検出器 A に対して μ 粒子が 1 MeV 以下のエネルギーを落とす確率は最小電離損失の値より、極めて小さいので、バックグラウンドがさらに除ける。線源から出たガンマ線が荷電粒子であるアルファ線やベータ線程では無いが空気との相互作用が起こることを考慮すると、できたら、これらの装置は空気による影響を無くすために真空槽に入れたほうがよい。

(b) 5 MeV のとき

この場合は入射ガンマ線のエネルギーが大きいために断面積が、

コンプトン散乱 > 電子対生成 > 光電効果 ≈ 0

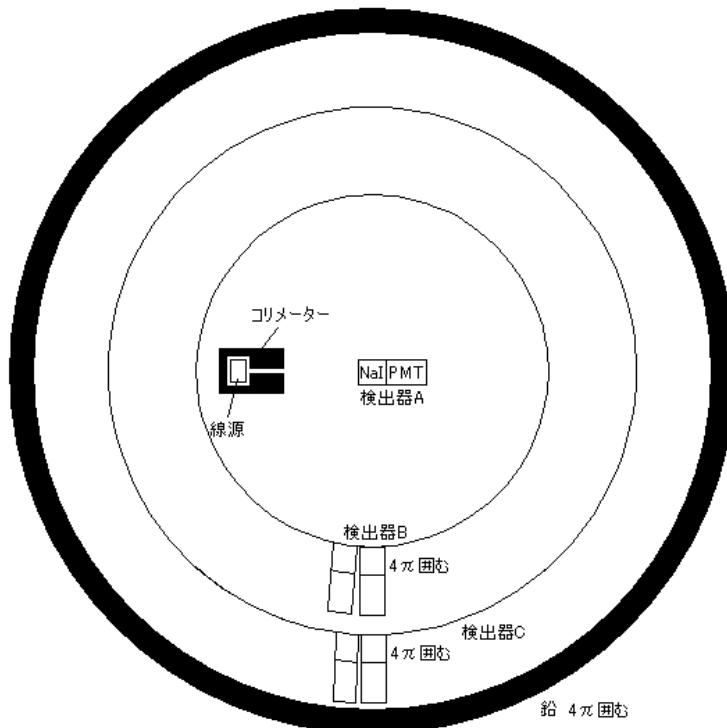


図 18: (b) の実験装置の配置

となるので、問題の設定から、コンプトン散乱及び電子対生成による検出器 A における全エネルギーピークはほとんど得られないで、(a) で考えた方法は使えないことがわかる。これより、同じ検出器を使っていることから、同じ印加電圧を光電子増倍管にかけてやれば、増幅率も同じであり、同じエネルギーのガンマ線を入射させてやれば、得られる電流は同じである（当然 2 項分布の確率過程でありゆらぎは当然存在する）ということが仮定できる。つまり、(a) と同じように装置を組み立てるが、今度は検出器 A 及び検出器 B からの出力電流の全電流をまとめたものを考える。そうすると、検出器 A 及び検出器 B で全エネルギーを失う場合、これらを合計したものが全エネルギーとなり、全エネルギーを測定することができる。このままだと検出器 A 及び検出器 B において全エネルギーを失うイベントのみを拾うことが出来ずまたバックグラウンドが存在するので、検出器 A 及び線源と検出器 B の外側にさらに検出器で覆って、それを (a) での検出器 B のような逆計数にすることで、検出器 A 及び検出器 B で全エネルギーを失わなずにさらに外にエネルギーが漏れた場合のイベントを落とし、またバックグラウンドを含むイベントを除くことができる。この検出器のことを検出器 C と呼ぶことにする。本当はこの逆計数用にはプラスチックシンチレーターとかの方がよいと考えられる。そしてさらにその外側を、環境放射線が止まる程度の数 cm 程度の鉛などの遮蔽で (a) と同様に覆う。また、主なバックグラウンドである μ 粒子の Stopping Power が (a) で書いた通り $-\frac{dE}{dx} \approx 7$ [MeV/cm] で表されるので、NaI(Tl) 結晶の大きさは正確には書かれてはいないが、NaI シンチレーター中で 5 MeV 前後という低いエネルギーを落とす確率は少なく、Discriminator によって検出器 A 及び検出器 B のエネルギーのスレッショルドを、上限 6 MeV 程度にしておくことでバックグラウンドによるイベントをより減らすことができると考えられる。さらに、同時計測における Timing を光速で走るところから計算して少し余裕を持たせて合わせるようにし、一イベント当たり検出器 A 及び検出器 B のうちエネルギーがその中で落とされた検出器の数があまりにも多いイベントや、一イベント当たりの電流を流した検出器に対し下限のスレッショルドも Discriminator で設けることでエネルギーの小さいものを除くことにより、全エネルギーを落としきれていないイベントやバックグラウンドの影響を除くことができると考えられる。最終的には全体として和が 5 MeV 前後のところにくるピークを上下のスレッショルドをかけて残してやれば求めたい全エネルギーピークを見ることが出来る。(a) と同様に、(b) の装置もできたら真空槽に入れたほうがよい。

問題 6 解答

1. キルヒ霍フの法則を閉回路に適用した $\frac{1}{C_0} \int I dt + L \frac{dI}{dt} = 0$ において $I \propto e^{i\omega_0 t}$ (ω_0 : 共振角周波数) を代入すると、

$$\frac{I}{iC_0\omega_0} + i\omega_0 LI = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$$

したがって、求める共振振動数は

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} \quad \cdots (1)$$

である。

2. コンデンサーの容量 C_0 は、平板の面積を S 、間隙の長さを d とすると、

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad \cdots (2)$$

であるから、式(1)(2)より、

$$d = \epsilon_0 LS (2\pi f_0)^2$$

ここへ $f_0 = 10[\text{MHz}]$, $L = 10[\mu\text{H}]$, $S = 1.0 \times 10^{-4}[\text{m}^2]$ を代入すると、

$$d = 3.5 \times 10^{-5}[\text{m}] = 35[\mu\text{m}]$$

3. 温度が下がると、コンデンサーの平板が熱収縮して式(2)の S が減少する。これによって C_0 が小さくなり、共振振動数 f_0 は上昇する。

(注) なお、平板間を支えている支柱が収縮することで d も減少することが考えられるが、式(2)の分子の S は面積の次元を持つのに対して、分母の d は距離の次元であるから、分子がより強く効いて C_0 は減少するだろう。

4. コンデンサーの間隙を液体ヘリウムで満たしたときの容量は、比誘電率 ϵ を用いて、

$$C = \epsilon \epsilon_0 \frac{S}{d} = \epsilon C_0 \quad \cdots (3)$$

と書ける。また問題で与えられた式

$$\frac{\alpha}{k}\rho = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$$

を ϵ について解くと、

$$\epsilon = \frac{1 + 2\alpha\rho/k}{1 - \alpha\rho/k} \quad \cdots (4)$$

である。この 2 式(3)(4)を用いると、共振振動数は次のように書ける。

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{f_0}{\sqrt{\epsilon}} = \sqrt{\frac{1 - \alpha\rho/k}{1 + 2\alpha\rho/k}} f_0 \quad \cdots (5)$$

いま、

$$\frac{\alpha}{k}\rho = 1.43 \times 10^{-3} \ll 1$$

であるから、 $\alpha\rho/k$ の 2 次以上の項を無視すれば、次のように近似できる。

$$\begin{aligned} f &\simeq \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha\rho}{k}\right) \left(1 - \frac{\alpha\rho}{k}\right) f_0 \\ &\simeq (1 - \frac{3}{2} \frac{\alpha\rho}{k}) f_0 \\ &= 9.979[\text{MHz}] \end{aligned} \quad \cdots (6)$$

5. 測定精度 $\Delta f = 1[\text{Hz}]$ のとき、共振振動数 f と $f + \Delta f$ とを識別できるとする。これに対応して、液体ヘリウムの密度を ρ 、 $\rho - \Delta\rho$ とすると、 $\alpha\rho/k$ が 1 に対して十分に小さい範囲では、式 (6) が使えるから、

$$\begin{aligned} \frac{f}{f_0} &\simeq 1 - \frac{3}{2} \frac{\alpha\rho}{k} \\ \frac{f + \Delta f}{f_0} &\simeq 1 - \frac{3}{2} \frac{\alpha(\rho - \Delta\rho)}{k} \end{aligned}$$

辺々を引くことで、

$$\Delta\rho = \frac{2}{3} \frac{k}{\alpha} \frac{\Delta f}{f_0} = 6 \times 10^{-3}[\text{kg/m}^3] = 6[\text{g/m}^3]$$

が密度の測定精度となる。

6. T_0 より高い温度では、通常の液体に多く見られるように温度が高くなるにしたがって密度が低くなる性質があるのに対し、 $T = T_0$ 以下では温度の上昇にともなって密度が上昇している。また、 $T = T_0$ では密度にカスプが見られる。

密度 ρ はギブスの自由エネルギー G と $\rho \propto \frac{N}{V} \propto \frac{1}{\frac{\partial G}{\partial p}}$ の関係にあり、 $T = T_0$ に密度のカスプがあることから、ギブス自由エネルギーは 1 階微分にカスプがあり、 T_0 に 2 次相転移点を持つことが予想される。実際、液体ヘリウム ${}^4\text{He}$ は $T_0 = 2.2[\text{K}]$ が λ 点と呼ばれる 2 次の相転移点であることが知られており、これを境にして高温側は He I と呼ばれる常流動相、低温側は He II と呼ばれる超流動相であるので、これが密度の温度依存性の由来であると考えられる。

7. 図 2 での液体ヘリウムの測定温度は $2.2[\text{K}]$ 前後であるから、この範囲で温度に対する抵抗の変化が大きい炭素抵抗温度計の方が測定に適していると考えられる。

8. (白金抵抗温度計) 白金の格子結晶を構成する原子は、その平衡位置付近で格子振動を行う。この格子振動が格子配列の周期性を乱し、結晶内を移動する電子と電子 - 格子相互作用を起こすことで電気抵抗の原因となっている。高温では格子振動の影響が強く効くため、電気抵抗が大きくなる。

(炭素抵抗温度計) 炭素抵抗温度計は半導体としての性質を持つと考えられる。価電子帯から伝導体へバンドギャップを超えて電子が励起されると、伝導体の伝導電子と価電子帯のホールの両方が電気伝導を担うキャリアとなる。温度が高くなると、この励起される電子の数が増加してキャリアが増えるために電気抵抗は減少する。

問題 7 解答

1.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} &= e \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_x(0) \\ p_y(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ p_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \cdots (1)$$

$$\begin{pmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eEt \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \cdots (2)$$

Einstein's equation $\frac{\epsilon^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$ より、

$$\epsilon^2 = (c^2 p^2 + m^2 c^4)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots (3)$$

$$= [c^2(p_0^2 + e^2 E^2 t^2) + m^2 c^4]^{\frac{1}{2}} \quad \cdots (4)$$

2. $\mathbf{p} = m\gamma c\beta$ 、 $\epsilon = m\gamma c^2$ より、 $\mathbf{p} = \epsilon \cdot \frac{\beta}{c}$ の関係式が常に成り立っているので、 $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{\epsilon}$ の関係に式 (4) を代入して、

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \frac{c^2}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + c^2 e^2 E^2 t^2}} \begin{pmatrix} eEt \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \cdots (5)$$

$v_x(t)$ 成分を時間積分すると、

$$\int_0^t dt' \frac{ec^2 Et'}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + c^2 e^2 E^2 t'^2}}$$

ここで、 $\alpha \equiv \frac{m^2 c^2 + c^2 p_0^2}{c^2 e^2 E^2}$ とおくと、

$$\begin{aligned} &= \int_0^{t^2} dt' \frac{c}{2\sqrt{t'^2 + \alpha}} \\ &= \left[c(t'^2 + \alpha)^{\frac{1}{2}} \right]_0^{t^2} \\ &= c \left\{ c(t^2 + \alpha)^{\frac{1}{2}} - \alpha^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

ここで α を元の形に戻すと、

$$= \frac{1}{eE} \left\{ \sqrt{c^2 e^2 E^2 t^2 + (m^2 c^4 + c^2 P_0^2)} - \sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2} \right\}$$

次に、 $v_y(t)$ 成分を時間積分すると、

$$\int_0^t dt' \frac{c^2 P_0}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2 + c^2 e^2 E^2 t'^2}}$$

ここで、 $\beta = \frac{c^2 e^2 E^2}{m^2 c^4 + c^2 P_0^2}$ とおくと、

$$\begin{aligned} &= \frac{c^2 P_0 / \beta}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2}} \int_0^t d(\beta t') \frac{1}{\sqrt{1+(\beta t')^2}} \\ &= \frac{c^2 P_0 / \beta}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2}} \sinh^{-1} \beta t \\ &= \frac{c P_0}{e E} \sinh^{-1} \left(\frac{c e E t}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2}} \right) \end{aligned}$$

以上から、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e E} \left(\sqrt{(m^2 c^4 + c^2 P_0^2) + (c e E t)^2} - \sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2} \right) \\ \frac{c P_0}{e E} \sinh^{-1} \left(\frac{c e E t}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2}} \right) \end{pmatrix} \quad \cdots (6)$$

3. $y = L$ のとき、 $\tan \theta = \frac{v_x}{v_y} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_x}{v_y} \right)$ であるから、

まず、 t と L の関係は (6) から、

$$L = \frac{c P_0}{e E} \sinh^{-1} \left(\frac{c e E t}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2}} \right)$$

であり、(5) から $\frac{v_x}{v_y}$ も求まり、上式とあわせて

$$\frac{v_x}{v_y} = \frac{c E t}{P_0} = \frac{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2}}{c P_0} \sinh \left(\frac{e E L}{c P_0} \right)$$

ゆえに、

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2} c P_0}{\sinh \left(\frac{e E L}{c P_0} \right)} \right] \quad \cdots (7)$$

… (8)

4. 揺れ角が十分小さいときには $\theta \sim \frac{v_x}{v_y}$ と近似してよい。

$$\theta = \left(1 + \frac{m^2 c^2}{P_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sinh \left(\frac{e E L}{c P_0} \right)$$

$P_0 = 1.0 [Gev]$ 、 $m_\kappa = 494 [Mev/c^2]$ 、 $m_\pi = 140 [Mev/c^2]$ を用いて、

$$\frac{\theta_\pi}{\theta_\kappa} \sim \frac{\left(1 + \frac{m_\pi^2 c^2}{P_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{m_\kappa^2 c^2}{P_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1+0.140^2}{1+0.494^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots (9)$$

$$\simeq 0.91 \quad \cdots (10)$$

… (11)

5. π^0 の静止系 (実験室系を基準として π^0 静止系に, をつける) で崩壊をみると崩壊 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ のエネルギー保存則と運動量保存則は、

$$\begin{cases} \text{エネルギー保存則 } m_{\pi^0}c^2 = cP_1' + cP_2' \\ \text{運動量保存則 } 0 = \mathbf{P}_1' + \mathbf{P}_2' \end{cases} \cdots (12)$$

γ 線が x 軸に対して対称に運動しているのだから、 x' 軸に対しても対称に運動するはずである。また、運動量保存則から γ 線は π^0 静止系では反対向きに飛び散る。よって、 $\mathbf{P}'_1 = P'_y \mathbf{y}'$ 、 $\mathbf{P}'_2 = -P'_y \mathbf{y}'$ であるから、

$$m_{\pi^0} = 2P_{y'} \quad ie. P_{y'} = \frac{m_{\pi^0}c}{2}$$

4 元運動量 $(\frac{\epsilon}{c}, P_x, P_y, P_z)$ は反変ベクトルなので $\mathbf{P}_{\gamma_1}^{\mu'} = \left(\frac{m_{\pi_0}c}{2}, 0, \frac{m_{\pi_0}c}{2}, 0 \right)$ 、 $\mathbf{P}_{\gamma_2}^{\mu'} = \left(\frac{m_{\pi_0}c}{2}, 0, -\frac{m_{\pi_0}c}{2}, 0 \right)$ である。これを実験室系に戻すと、

$$\mathbf{P}^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} \mathbf{P}^{\nu} \quad ie. \mathbf{P}^{\nu} = (\Lambda_{\nu}^{\mu'})^{-1} \mathbf{P}^{\mu'}$$

matrix 表示では、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{c} \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\epsilon'}{c} \\ P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\epsilon'}{c} \\ P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{m_{\pi_0}\gamma c}{2} \\ \frac{m_{\pi_0}\gamma\beta c}{2} \\ \frac{m_{\pi_0}c}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

γ_2 について同様に計算すれば、 y 成分が反転した結果を得る。

$$\mathbf{P}_{\gamma_1} = \begin{bmatrix} \frac{m_{\pi_0}\gamma c}{2} \\ \frac{m_{\pi_0}\gamma\beta c}{2} \\ \frac{m_{\pi_0}c}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{\gamma_2} = \begin{bmatrix} \frac{m_{\pi_0}\gamma c}{2} \\ \frac{m_{\pi_0}\gamma\beta c}{2} \\ -\frac{m_{\pi_0}c}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \cdots (13)$$

γ 線が x 軸となす角度は $\tan \theta = \frac{|v_y|}{|v_x|} = \frac{1}{\gamma\beta}$ より、 $\theta = \tan^{-1}(\frac{1}{\gamma\beta})$ である。

6. π^0 静止系での $\tau' = 8.4 \times 10^{-17} \text{ sec}$ は実験室系では $\tau = \gamma\tau'$ である。 v 一定として、 $\gamma\tau'$ 時間にすすむ距離は $v\gamma\tau' = 25 \mu\text{m}$ であるから、 $\gamma = \frac{\beta\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ を代入して、

$$\frac{c\beta\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}} = 25 \times 10^{-6} \text{ sec}$$

簡単のために以下の置き換えを行えば、

$$A \equiv \frac{25 \times 10^{-6} \text{ sec}}{c\tau'} = 995 \text{ sec/m} \quad \beta^2 = \frac{A^2}{1+A^2}$$

よって、中性 γ 線のエネルギーは

$$\epsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mc^2}{1 - \frac{A^2}{1+A^2}} \simeq \sqrt{1+A^2} mc^2 \simeq A mc^2 \quad \cdots (14)$$

$$\simeq 1.3 \times 10^9 eV \quad \cdots (15)$$

7. 空気中での γ 線の減衰長を X_{air} とおき、簡単のため $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ の崩壊機構を問題 5 で指定された方向の γ 線絞つて考える。薄膜を距離 d だけ離すことによって γ 線が大気中を余計に走ることになる距離は $d \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2 \gamma^2}}$ であるから、 γ 線の輸送方程式、

$$\frac{N_\gamma}{x} = -\frac{N_\gamma}{X_{air}} \quad \cdots (16)$$

をといて、 $N_{\text{薄膜 } 2} = N_0(1 - e^{-\frac{d \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2 \gamma^2}}}{X_{air}}})$ であるので、その後の $\gamma \rightarrow e^+ e^-$ の対生成過程で電子が飛んで検出器の方に向いてゆくものの粒子分布は同一とみなせるので陽電子の検出器における計測率は $1 - e^{-\frac{d \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2 \gamma^2}}}{X_{air}}}$ 倍になる。

8. 薄膜 2 中で起こる反応は 2 つある。1 つは γ 線からの対生成、また 2 つめは対生成された陽電子が金属中の電子と対消滅を起す反応である。簡単のために薄膜中を走る距離を薄膜自身の厚さ (L) と同じとする。次に薄膜 2 中の、対生成による γ 線の減衰長を X_γ 、対消滅による陽電子線の減衰長を X_{e^+} とおけば、薄膜 2 中 l の距離で γ 線が崩壊したものの粒子数は前問の $N_{\text{薄膜 } 2}$ を用いて、

$$N_{\text{薄膜 } 2} \text{ を出て行く陽電子数} = \sum_l N_{\text{薄膜 } 2} e^{-\frac{l}{X_\gamma}} \left(1 - e^{\frac{L-l}{X_{e^+}}} \right) \quad \cdots (17)$$

$$= \int_0^L l dl N_{\text{薄膜 } 2} e^{-\frac{l}{X_\gamma}} \left(1 - e^{\frac{L-l}{X_{e^+}}} \right) \quad \cdots (18)$$

$$= N_{\text{薄膜 } 2} \left[X_\gamma \left(1 - e^{-\frac{L}{X_\gamma}} \right) - \frac{X_{e^+} X_\gamma}{X_{e^+} - X_\gamma} \left(e^{-\frac{L}{X_{e^+}}} - e^{-\frac{L}{X_\gamma}} \right) \right] \quad \cdots (19)$$

よって、これが最大となるような L にすればよい。よって陽電子の消滅が γ 線の崩壊より dominant な薄膜ではなるべく薄く、陽電子の消滅より γ 線の崩壊が十分な薄膜ではなるべく厚くすればよい。

問題 8 解答

1. $\alpha, \beta, \gamma \ll 1$ より、 $\alpha \approx \tan \alpha = h/p$ 、以下 β, γ も同様に考えて

$$\alpha = \frac{h}{p} \quad \beta = \frac{h}{q} \quad \gamma = \frac{h}{r} \quad \cdots (1)$$

2. 異なる媒質の境界における入射角、屈折角、媒質の屈折率の関係式は、 $\theta_1, \theta_2, n_1, n_2$ を用いて

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \cdots (2)$$

と書ける。 $\theta_1, \theta_2 \ll 1$ より、 $\sin \theta_1 \approx \theta_1, \sin \theta_2 \approx \theta_2$ から、

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \cdots (3)$$

3. $\triangle ABC$ に注目すると、 $\theta_1 = \alpha + \gamma, \triangle IBC$ に注目すると、 $\theta_2 = \gamma - \beta$

設問 2 の結果 $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$ から $n_1(\alpha + \beta) = n_2(\gamma - \beta)$

これに設問 1 の値を代入し、両辺に出てくる h を消去して、

$$n_1 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \right) = n_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \quad \cdots (4)$$

4. 設問 3 で得られた式を変形して、

$$r = \frac{(n_2 - n_1)pq}{n_1 q + n_2 p} \quad \cdots (5)$$

像の拡大率 m は

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{q - r}{p + r} = \frac{q - \frac{(n_2 - n_1)pq}{n_1 q + n_2 p}}{p + \frac{(n_2 - n_1)pq}{n_1 q + n_2 p}} = \frac{(n_1 q + n_2 p)q - (n_2 - n_1)pq}{(n_1 q + n_2 p)p + (n_2 - n_1)pq} = \frac{n_1 q}{n_2 p} \quad \cdots (6)$$

ゆえに、

$$m = \frac{n_1 q}{n_2 p} \quad \cdots (7)$$

5. 設問 3 で得られた式を変形して、

$$q = \frac{\frac{n_2}{n_1}}{\left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \quad \cdots (8)$$

問題に与えられているように、 $n_2/n_1 = 1.34, 1/r = 1/0.80 = 1.25$ (1/cm) なので、

$$q = \frac{1.34}{0.34 \times 1.25 - \frac{1}{p}} \quad \cdots (9)$$

$p = 25$ (cm) のとき、 $1/p = 0.04$ (1/cm)

$$q_{\text{opt}} = \frac{1.34}{0.34 \times 1.25 - 0.04} = 3.48 \cdots \approx 3.5 \quad \cdots (10)$$

$p = \infty$ のとき、 $1/p = 0$

$$q_{\text{inf}} = \frac{1.34}{0.34 \times 1.25} = 3.15 \cdots \approx 3.2 \quad \cdots (11)$$

したがって、 $p = 25$ (cm) のとき $q_{\text{opt}} = 3.5$ (cm)、 $p = \infty$ のとき $q_{\text{int}} = 3.2$ (cm)

6. 設問 5 で求めた q の値は、いずれも角膜と網膜との間の実際の距離 2.5cm よりも大きいため、網膜上に像を結ぶようにするためには、像を近くに結ぶためのレンズとしての働きを持つ器官が必要であり、これが水晶体である。設問 5 の結果からわかるように、物体との距離は見る対象によって変化し、それに応じて空気と角膜の間の屈折だけを考えた時に像を結ぶ位置は変化するので、像の位置を網膜上に持っていくためにレンズとしての水晶体は焦点距離を変化させる必要がある。これは水晶体を周りで支えるチル小体と毛様筋の弛緩・収縮と水晶体自身の弹性により、水晶体の厚みを変化させることで対応している。物体との距離が近いほど、より近くに像を結ぶために、水晶体は厚くなり、レンズとしての焦点距離は短くなる。
7. 孵化後間もなく目を手術して上下さかさまに移植し直し、視覚情報を学習できないようにしばらく暗室で生育させた視神経再生後のカエルを用いる。簡単なところでは、まずこのカエルを明るい場所に移してエサを与え、エサが取れるかどうか観察してみればよい。エサがまともに取れなかったら、正しい配線パターンは学習により獲得されるものだと結論づけられる。これだけだと、エサが取れた場合には他の感覚に依存している可能性がある。人間の脳における学習のように、カエルの視神経の配線パターンが後天的に獲得されるなら、暗い場所で生育されていて視覚情報の学習できなかった時期に確立された配線パターンから、明るい場所で生育されている過程において正しく配線がつなぎ変わることが予想される。したがって、ある図形を見せたときに脳内において電気信号が伝わって来て刺激を受信する位置を何らかの方法¹でマーキングし、暗室から出した直後と、しばらく明るい場所で生育させた後で、脳内で信号が観測される部位の位置パターンに変化があるか調べればよい。変化があれば、配線パターンは学習によって獲得されるものであり、変化がなければ、遺伝的にプログラムされたものである。
8. 各視神経と一次視覚野の特定の位置を対応づける分子があったとしても、一対一対応であると考えることは不可能である。考えられる機構として、
1. 細胞間接着力に勾配がある。
 2. 少数の物質が、場所によって濃度勾配を形成しており、これが視神経の結合部位に影響を与えている。前者の場合、場所により接着力が異なるとなると、マッピングがうまく維持できない可能性がある²ので、後者のように考えるのが自然である³。

記述部分の解答には確固たる自信はありません。もし間違っていたらごめんさい...m(_ _)m 適当に自分で訂正を入れて下さい。

¹ 視野地図は実際に 2DG(2-デオキシグルコース) 法を用いて可視化することができる。細胞は、放射性ラベルした 2DG をグルコースと区別することなく取り込むが、代謝することはできず、オートラジオグラフィーにより、貯留した 2DG を可視化することができる。高い活動を示し、エネルギー源として多くのグルコースを必要とする細胞が高くラベルされる。

² 例えばプラモデルを作るときに、はじめから接着剤をべたべた塗ってしまうとうまく作れないであろう。あらかじめパーツをはめてくつつくべきところを確認してから接着しないといけない。これは生体内の細胞接着でも同じことである。

³ この考え方自体は実際に昔からあったらしいが、実験的に解明され始めたのは 1995 年とごく最近のことである。この実験結果は、『網膜の神経細胞は、鼻から耳方向に行くにつれて EphA3 というレセプター分子の密度が高くなり、中脳視蓋（一次視覚野は大脳にある部位だが、その中継部位）ではこのレセプターに結合する ephrin-A2 というリガンド分子の密度が前から後ろに行くに従って高くなっている、レセプター密度の低い視神経はリガンド密度の高い視蓋細胞表面と結合していた。』というものである。レセプターにリガンドが結合することで細胞にシグナルを伝達するのだが、フリーのレセプターとリガンドが十分量存在して、レセプター、リガンドの結合、解離が平衡反応だとすると、単純な化学反応論に従うとしてよい。すると、レセプター密度 R 、リガンド密度 L として、シグナルの強さは $R \cdot L$ と考えてよい。網膜の各場所から出た視細胞は、共通のシグナル強度の標準値 S を持つとすると、視神経の軸索先端の成長円錐は今受けているシグナル強度 $R \cdot L$ と、標準値 S との差が小さくなるようにサーボしながら動く、という仮定を考えることができる。これをサーボ機構モデルといい、視神経のマッピングにおける最近の有力なモデルである。勿論生体内ではさらに正確なマッピングのための様々な機構が働いていることが予測される。ただし、院試ではここまで知識は要求されないと思うが...。

問題 9 解答

1. 一般解が ψ_l, ψ_r の波動関数の重ね合わせとして、

$$\psi = a\psi_l + b\psi_r$$

として得られるとおく。(1),(2) 式を上式に代入して (4) を比較することにより次の式が得られる。

$$\begin{cases} A_{-1} \exp[ikz] + B_{-1} \exp[-ikz] = a \exp[ikz] + aR \exp[-ikz] + bT \exp[-ikz] \\ A_0 \exp[ikz] + B_0 \exp[-ikz] = aT \exp[ikz] + b \exp[-ikz] + bR \exp[ikz] \end{cases} \cdots (1)$$

従って、

$$A_{-1} = a, \quad B_{-1} = aR + bT \cdots (2)$$

$$A_0 = aT + bR, \quad B_0 = b \cdots (3)$$

a, b を消去することにより関係式

$$\begin{cases} A_0 = TA_{-1} + (B_{-1} - RA_{-1})\frac{R}{T} \\ B_0 = (B_{-1} - RA_{-1})\frac{1}{T} \end{cases} \cdots (4)$$

が立つ。転送行列 M を構成すると、

$$M = \begin{pmatrix} T - \frac{R^2}{T} & \frac{R}{T} \\ -\frac{R}{T} & \frac{1}{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\alpha}}{\sin(\gamma)} & i \cot(\gamma) \\ -i \cot(\gamma) & \frac{e^{-i\alpha}}{\sin(\gamma)} \end{pmatrix} \cdots (5)$$

2. 周期系の波動関数であることより

$$\Phi(z+a) = A_{n+1} e^{ika} e^{ikz} + B_{n+1} e^{-ika} e^{-ikz} \cdots (6)$$

である。また、Bloch 条件より

$$\Phi(z+a) = e^{iqa} \Phi(z) = A_n e^{iqa} e^{ikz} + B_n e^{iqa} e^{-ikz} \cdots (7)$$

(14),(15) より求める関係式は、

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n e^{i(q-k)a} \\ B_{n+1} = B_n e^{i(q+k)a} \end{cases} \cdots (8)$$

となる。

3. 1,2 の結果と問題文中の (6) を用いると、

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \cdots (9)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \operatorname{cosec}(\gamma) & i \cot(\gamma) \\ -i \cot(\gamma) & e^{-i\alpha} \operatorname{cosec}(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \cdots (10)$$

となる。これを解くと、

$$\begin{pmatrix} A_n e^{i(q-k)a} \\ B_n e^{i(q+k)a} \end{pmatrix} \sin(\gamma) = \begin{pmatrix} A_n e^{i\alpha} + iB_n \cos(\gamma) \\ -iA_n \cos(\gamma) + B_n e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \cdots (11)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_n (e^{i(q-k)a} \sin(\gamma) - e^{i\alpha}) = iB_n \cos(\gamma) \\ B_n (e^{i(q+k)a} \sin(\gamma) - e^{-i\alpha}) = -iA_n \cos(\gamma) \end{cases} \cdots (12)$$

2 式を用いて、 A_n, B_n を消去すると、

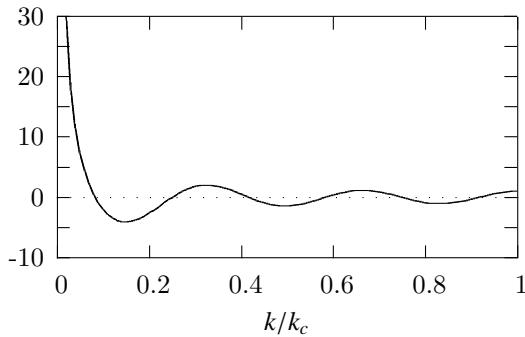
$$\cos(qa) = \frac{\cos(ka + \alpha)}{\sin(\gamma)} \quad \cdots (13)$$

となる。

4.

$$ka + \alpha = \frac{k}{k_c}(k_c a - c) > \frac{\pi}{2} \frac{k}{k_c} = \gamma \quad \cdots (14)$$

であることから、グラフは $0 < k < k_c$ の範囲では以下のようになる。(図は $k_c a - c = 6\pi$ の場合を示した。)



5. $ka + \alpha = n\pi$ (n は整数) のとき、 $|\cos(ka + \alpha)| = 1$ であり、また $\gamma = \frac{\pi}{2} \frac{k}{k_c}$ ($0 < k < k_c$) のとき $\sin(\gamma) < 1$ であるので、

$$\left| \frac{\cos(ka + \alpha)}{\sin(\gamma)} \right| > 1 \quad \cdots (15)$$

となる。従って題意のような q は存在しない。

この条件は上図のグラフが ± 1 の直線ではさまれた領域の中にはないことを意味している。従って、 $\cos(qa) = \frac{\cos(ka + \alpha)}{\sin(\gamma)}$ を満たす実数 q は存在せず Bloch 条件を満たせないので、そのような周期系の波動関数は存在しないことが分かる。したがって、 $ka + \alpha = n\pi$ で計算されるエネルギーの準位が禁止される。

6. $|\cos(qa)| \leq 1$ 、つまり $\left| \frac{\cos(\frac{k}{k_c}(k_c a - c))}{\sin(\frac{\pi}{2} \frac{k}{k_c})} \right| = \left| \frac{\cos(\frac{k}{k_c}(k_c a - c))}{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \frac{k}{k_c})} \right| \leq 1$ であればよい。このとき、
- $$-\frac{\pi}{2} \frac{k}{k_c} + \frac{\pi}{2}(2n+1) \leq \frac{k}{k_c}(k_c a - c) \leq \frac{\pi}{2} \frac{k}{k_c} + \frac{\pi}{2}(2n+1) \quad (n \text{ は整数}) \quad \cdots (16)$$

であるので、 k について解くと、

$$\frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{k_c a - c}{\pi} + \frac{1}{2}} \leq \frac{k}{k_c} \leq \frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{k_c a - c}{\pi} - \frac{1}{2}} \quad \cdots (17)$$

という条件を得る。ただし、 $0 < k < k_c$ であるので、 $n = 0, 1, 2, \dots$ であり、さらに場合分けすると、

$$\begin{cases} \frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{k_c a - c}{\pi} + \frac{1}{2}} \leq \frac{k}{k_c} \leq \frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{k_c a - c}{\pi} - \frac{1}{2}} & \left(n \leq \frac{k_c a - c}{\pi} - 1 \right) \\ \frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{k_c a - c}{\pi} + \frac{1}{2}} \leq \frac{k}{k_c} \leq 1 & \left(\frac{k_c a - c}{\pi} - 1 < n \leq \frac{k_c a - c}{\pi} \right) \end{cases} \quad \cdots (18)$$

(ただし、 $n = 0, 1, 2, \dots$)

を得る。以上の範囲以外の n が存在しないことは (25) 式から分かる。

7. 6. の結果に $k_c a - c = \frac{5\pi}{2}$ を代入すると、

$$\frac{k_c}{3}(n + \frac{1}{2}) \leq k \leq \frac{k_c}{2}(n + \frac{1}{2}) \quad \cdots (19)$$

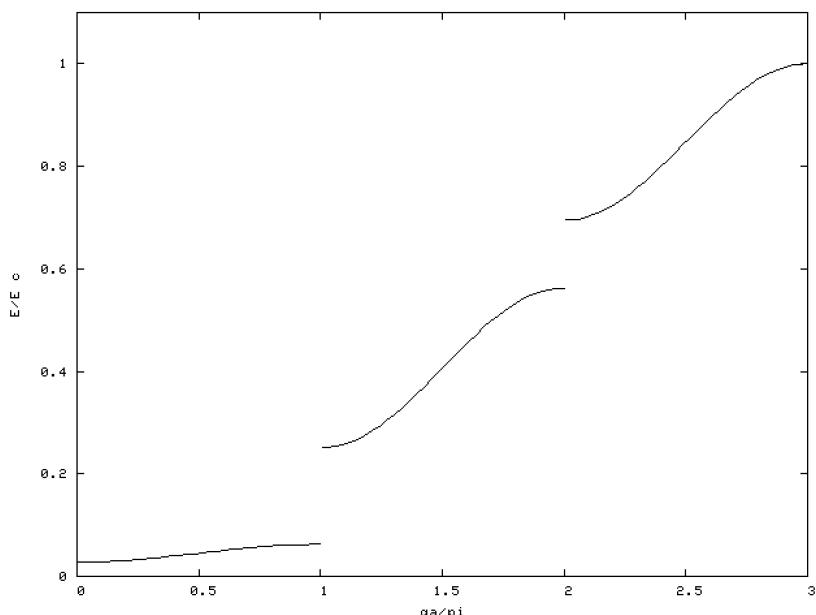
となる。さらに $0 < k < k_c$ を満たすような n を選ぶと許されるのは結局、

$$\frac{1}{6}k_c \leq k \leq \frac{1}{4}k_c, \quad \frac{1}{2}k_c \leq k \leq \frac{3}{4}k_c, \quad \frac{5}{6}k_c \leq k < k_c \quad \cdots (20)$$

のみ。さらに、 $E_0 \equiv \frac{\hbar k_c^2}{2m}$ とすれば、エネルギー E について、

$$\frac{1}{36}E_0 \leq E \leq \frac{1}{16}E_0, \quad \frac{1}{4}E_0 \leq E \leq \frac{9}{16}E_0, \quad \frac{25}{36}E_0 \leq E < E_0 \quad \cdots (21)$$

となる。従って分散関係の概略は以下のようになる。



2002年度

2002年度 入学試験 一般教育科目

問題 1

次の論説を読み、設問(i)-(iv)に答えよ。(配点 60 点)

Scientific understanding has probably (a) more in the past 50 years than in all previous history. Its applications have made our lives (b). Increasingly, however, we recognize unintended (c) consequences of our well-intentional activities.

In the United Kingdom, and in Europe more generally, every week seems to bring a new (d), report, or debate on "science and society". And a good thing too. I believe we need to do a better job of deliberately asking what kind of world we want – subject to the opportunities offered by scientific advances and the constraints that science clarifies – rather than just letting things happen. A recent (e) shows that 84% of Britons think that "scientists and (f) make a valuable contribution to society" and 68% think that "scientists want to make life better for the average person". But the real issue, as the same (g) showed, is that roughly 50% thought that the pace of current scientific advance was too fast for (h) to keep up with through effective (i) and regulation. So how best to conduct the dialogue, as old as democracy itself, between government (j) and the public in complex scientific areas, in a way that fosters trust?

I begin with the principles set out by the UK office of Science and Technology into the history of bovine spongiform encephalopathy^{注1}: Consult widely and get the best people, but also make sure dissenting voices are heard; recognize and admit uncertainty; and above all, be open and publish all advice. Try to separate risk assessment from risk management, and aim at management that is proportional to the risk involved. Whenever possible, make the facts and uncertainties clear and leave it to individuals to choose (for instance, whether to eat beef off the bone or not).

All this is easier said than done. Even when risk can be assessed, people's subjective views may be different (people feel that cars are safer than trains, even though they are more than a hundred times more dangerous). ア)そして、問題はしばしば既知の科学の枠外にあり、リスクは推測するしか仕方がない。学校、大学、クイズ番組(*1)などを通じ、確立された知識に基づき確実に答えを出せるもの、として科学をとらえている一般市民にとって、このことは特に受容しがたい。 It is easy to say "let all voices be heard", but many will bring other agendas to the debate, and the resulting babble of voices is uncomfortable for a civil servant used to confidential anonymous, and consensual advice to a minister. However, these admitted and awkward costs of wide and open consultation, and of open admission of uncertainty, are outweighed by their trust-promoting benefits. And anyway, the world that deferred to authority, advised by confidential cabals, has gone. I do not mourn its passing.

I see the recent UK debate and decision about extending the limited use of embryonic stem cells^{注3} from research on human fertility^{注4} to other specified therapeutic^{注5} uses as a model for the イ) above principles in action. There were three years of wide-ranging debate, engaging scientist, lawyers, ethicists, patient groups, and the general public in its many forms. Then free votes (not constrained by party positions in both the Lower and Upper Houses of Parliament, against a background of lobbying for and against; much technical information and misinformation; medical benefits for some; and ethical anguish for others. Clear decisions (by more than 2 to 1 in both houses) were made to allow the research to proceed, under well-specified constraints. ウ)This is democracy in action, notwithstanding the complexity of the science.

adapted from Science 292 2001

注1: bovine spongiform encephalopathy - 牛海綿状脳症(いわゆる狂牛病), 注2: クイズ番組 - quiz shows, 注3: embryonic stem cells - はい幹細胞, ES 細胞, 注4: fertility - 不妊治療, 注5: therapeutic - 治療の

1. (a) から (j) までの空欄には、以下のどの語をいれるのが適当か、選択せよ（同じ語が複数の欄に入ることもある）
1) policymakers, 2) engineers, 3) poll, 4) committee, 5) better, 6) shrinked, 7) oversight, 8)expanded, 9) worse, 10)adverse, 11)effective, 12)government, 13)election, 14) scientists
2. 下線部 ア) を英訳せよ。
3. 下線部 イ) が指し示す'principles' とは何か、日本語で簡潔に箇条書きせよ。
4. 下線部 ウ) の'This' の内容を、日本語 1 行程度で要約せよ。

問題 2

次の説明文を読み、設問 (i)-(iv) に答えよ。(配点 40 点)

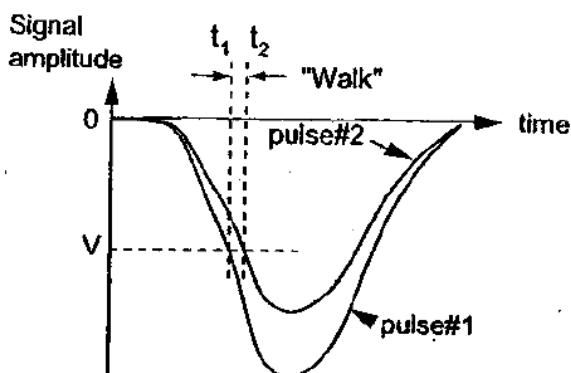
Time spectroscopy involves the measurement of the time relationship between two events. A particularly difficult problem in timing is to obtain a logic signal^{注 1} that is precisely related in time to the event. Some type of time pickoff circuit^{注 2} is employed to produce a logic output pulse that is consistently related in time to the beginning of each input of signal. To understand the use of timeing electronics it is important to understand some of the problems associated with timing. Three important sources of error can occur in time pickoff measurements: walk, drift, and jitter. Walk is the time movement of the output pulse relative to its input pulse, due to variations in the shape and the amplitude of the input pulse. Drift is the long-term timing error introduced by component aging and by temperature variations in the time pickoff circuitry. Jitter is the timing uncertainty of the pickoff signal that is caused by noise in the system and by statistical fluctuations of the signals from the detector.

A leading-edge method, which is the simplest means of deriving a time pickoff signal, produces an output logic pulse when the input signal crosses a fixed threshold level. A primary disadvantage of this technique is that the time of occurrence of the output pulse from a leading-edge trigger is a function of the amplitude and rise time^{注 3} of the input signal. This time walk relationship restricts the usefulness of the leading-edge trigger as an accurate time pickoff device to those applications that involve only a very narrow range of input signal amplitudes and rise times.

(adapted from EG&G ORTEC catalog)

注 1 : logic signal - 論理回路, 注 2 : time pickoff circuit - タイミング信号生成回路, 注 3 : rise time - 立上がり時間

1. 正確なタイミング測定で問題となる三つの要素を日本語で簡潔に説明せよ。
2. どんな信号に対してリーディングエッジ (leading-edge) 法が適用できるかを日本で述べよ。
3. 文中の下線部を和訳せよ。
4. 次の図は'walk' を説明するための図である。図中のキーワード (t_1 , t_2 , V, pulse #1, pulse #2) をすべて用いて、'walk' を英語 5 行以内で説明せよ。



問題 1

定数ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を用いた微分方程式

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \vec{v} \times \vec{x}$$

を考える。

1. 上の方程式に A を用いて

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A \bullet \vec{x}$$

という形に書き換える。行列 A を求めよ。

2. 次の性質を持つ正規直行基底 $\vec{e}_i (i = 1, 2, 3) (\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \delta_{ij})$ と係数 $\lambda (\lambda > 0)$ を求めよ。

$$\vec{v} \times \vec{e}_1 = \lambda \vec{e}_2, \quad \vec{v} \times \vec{e}_2 = -\lambda \vec{e}_1, \quad \vec{v} \times \vec{e}_3 = 0$$

3. 上で得られた結果を用いると、行列 A は実直行行列 U を用いて

$$A = U \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^t, \quad UU^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とかけることを示せ (ただし U^t は U の転地行列)。また U 求めよ。

4. \vec{x} を基底 \vec{e}_i を用いて

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 q_i(t) \vec{e}_i$$

と展開する。係数 $q_i(t)$ に対する微分方程式に書き下し、その一般解を求めよ。また解の振る舞いを定性的に論じよ。

問題 2

球対称の関数 $u(t, r)$ に対する波動方程式は、以下のように書くことができる：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

ここで、 r は動径座標、 t は時間座標、 c は速度の次元の定数である。以下の間に答えよ。

1. 上の偏微分方程式の一般解を求めよ。なおここで一般解とは 2 個の任意関数で表された解を指す。
2. 初期条件、 $t = 0$ で $u = e^{-r^2/(2r_0^2)}$ 、 $\partial u / \partial t = 0$ の場合の $t > 0$ に対する解を求めよ。ただし、 r_0 は波束の広がりをあらわす実定数である。
3. 初期条件、 $t = 0$ で $u = 0$ 、 $\partial u / \partial t = e^{-r^2/(2r_0^2)}$ の場合の $t > 0$ に対する解を求めよ。
4. 3 で求めた関数を、時間に対してフーリエ変換せよ。ただしここでフーリエ変換は、

$$U(\omega, r) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, r) e^{i\omega t} dt$$

と定義する。

5. $g(\omega) \equiv U(\omega, r = 0)$ は、 ω の関数である。 $g(\omega)$ が最大値となる ω の値を求めよ。

問題 1 解答

1. (a) 8 , (b) 5 , (c) 10 , (d) 1 , (e) 3 , (f) 2 , (g) 3 , (h) 12 , (i) 4 , (j) 1
2. And risk can only be assumed for the problem often lies beyond the framework of science. It is difficult to accept this fact, for ordinary people who through schools, university and quiz shows think of sciences as something that always have definite answers based on established knowledge.
3.
 - 各分野のスペシャリストを集め、意見を聞く。
 - 不確定要素の存在を認識する。
 - すべての議論を公開し、透明性を増す。
 - リスクの評価をしっかり行い、そのマネジメントを考える。
 - 不確定な部分は明確にし、できるだけ個人の判断に任せること。
4. 各分野の専門家が集まり、民意を反映する仕組みを通して、ES 細胞の取り扱いに関するシステムを作ったこと。

問題 2 解答

1.
 - walk - input pulse の形状や振幅のばらつきを測定器が時間の違いだと認識してしまうこと。
 - drift - 部品の老朽化、pick off circuit の熱的なばらつきによる（長期で表れる）タイミングエラー
 - jitter - システムのノイズと測定器の統計誤差が原因となる pick off signal のタイミング不確定性
2. input signal の振幅、立上り時間の range が狭いもの
3. 一番単純なタイミング生成回路の原理であるリーディングエッジ方では、input signal がある threshold level を横切る時に output logic pulse が生成される仕組みになっている。
4. In this graph the time pick off circuit recognizes pulse #1 at t_1 , when it crosses V. Pulse #2 on the other hand is recognized at t_2 , by the same reason. Even though two pulses occurred at the same time, the circuit counts pulse #2 after pulse #1. This difference or movement in time is called “walk”.

問題 1 解答

1. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると、 \vec{v} と \vec{x} の外積は、

$$\vec{v} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ -2x_3 - x_1 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

よって、

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = \vec{v} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \vec{x}$$

ゆえに求める行列は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

2. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$, ($a^2 + b^2 = 1$) とおくと、

$$\vec{v} \times \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a+b \\ -2b \\ 2a \end{pmatrix} = \lambda \vec{e}_2$$

この関係式を、 $\vec{v} \times \vec{e}_2 = -\lambda \vec{e}_1$ に代入すると、

$$\vec{v} \times \lambda \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2a-2b \\ -5a-b \\ -a-5b \end{pmatrix}, \quad -\lambda^2 \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda^2 a \\ -\lambda^2 b \end{pmatrix}$$

これより、

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda = \sqrt{6}$$

ゆえに、

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

3. $\vec{x} = q_1 \vec{e}_1 + q_2 \vec{e}_2 + q_3 \vec{e}_3$ とおくと、(2) より、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

上を形式的に $\vec{x} = U \vec{q}$ とかくことにする。

ここで、(2) で導入した \vec{e}_i の性質から、

$$\vec{v} \times \vec{x} = q_1(\vec{v} \times \vec{e}_1) + q_2(\vec{v} \times \vec{e}_2) + q_3(\vec{v} \times \vec{e}_3) = \lambda q_1 \vec{e}_2 - \lambda q_2 \vec{e}_1 = U \begin{pmatrix} \lambda q_2 \\ -\lambda q_1 \\ 0 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{x} = U\vec{q}$ より、 $\vec{q} = U^{-1}\vec{x}$ (なぜならば U は実直行行列)

これを前の式に代入すれば、 $\vec{v} \times \vec{x} = U \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^T \vec{x}$

(1) で書き換えた関係から、 A は上の $U \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^T$ であることが分かる。

また、 $U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

4. $\vec{x} = \sum_{i=1}^3 q_i(t) \vec{e}_i$ を $\frac{d}{dt} \vec{x} = \vec{v} \times \vec{x}$ に代入して、両辺の \vec{e}_i の係数を比較すれば、

$$\dot{q}_1(t) = -\lambda q_2(t), \quad \dot{q}_2(t) = \lambda q_1(t), \quad \dot{q}_3(t) = 0$$

これより、

$$q_1(t) = A e^{i\lambda t} + B e^{-i\lambda t}, \quad q_2(t) = -iA e^{i\lambda t} + iB e^{-i\lambda t}, \quad q_3(t) = \text{Const.}$$

\vec{x} が実のベクトルであるとすると、 \vec{q} も実のベクトルなので、 $A = -B$ であることが必要である。よって、

$$q_1(t) = 2A \cos(\lambda t), \quad q_2(t) = 2A \sin(\lambda t), \quad q_3(t) = \text{Const.}$$

解の振る舞いは、 \vec{v} を中心軸とする円運動を表していると考えられる。

これは回転座標系で見たベクトル \vec{x} の変化が、角速度ベクトルを $\vec{\omega}$ とすると、

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{x}$$

となることを示している。

問題 2 解答

1. 右辺の $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ は $\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$ と書き換えることができるので、新たに $u(t, r) \equiv \frac{\chi(t, r)}{r}$ と定義すれば、関数 $\xi(t, r)$ について、

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} = c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}$$

が成立する。これは 1 次元の波動方程式で一般解は

$$\chi(t, r) = f(r - ct) + g(r + ct)$$

(ダランベールの解。 $f(r - ct)$ が r の正方向に、 $g(r + ct)$ が r の負方向に進む波を表す。) よって、与えられた偏微分方程式の一般解は、

$$u(t, r) = \frac{1}{r} \{f(r - ct) + g(r + ct)\}$$

2. 初期条件より、

$$\begin{cases} f(r) + g(r) = re^{-r^2/2r_0^2} \\ f'(r) - g'(r) = 0 \end{cases}$$

よって、 $f(r) = g(r) = \frac{1}{2}re^{-r^2/(2r_0^2)}$ 1 で得られた結果に代入して、

$$u(t, r) = \frac{1}{2r} \left\{ (r - ct)e^{-(r-ct)^2/(2r_0^2)} + (r + ct)e^{-(r+ct)^2/(2r_0^2)} \right\}$$

3. 初期条件より、

$$\begin{cases} f(r) + g(r) = 0 \\ f'(r) - g'(r) = -\frac{1}{c}re^{-r^2/(2r_0^2)} \end{cases}$$

よって、 $f(r) = \frac{r_0^2}{2c}e^{-r^2/(2r_0^2)}$, $g(r) = -\frac{r_0^2}{2c}e^{-r^2/(2r_0^2)}$ 1 で得られた結果に代入して、

$$u(t, r) = \frac{r_0^2}{2c} \frac{1}{r} \left\{ e^{-(r-ct)^2/(2r_0^2)} - e^{-(r+ct)^2/(2r_0^2)} \right\}$$

4. 3 で求めた $u(t, r)$ のフーリエ変換は、

$$\begin{aligned} U(\omega, r) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t, r) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{r_0^2}{2c} \frac{1}{r} e^{-r^2/(2r_0^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-c^2 t^2/(2r_0^2) + (i\omega + \frac{cr}{r_0^2})t} - e^{-c^2 t^2/(2r_0^2) + (i\omega - \frac{cr}{r_0^2})t} \right\} dt \end{aligned}$$

ここで Gauss 積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2+bt} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$$

を用いれば、

$$\begin{aligned} U(\omega, r) &= \frac{r_0^2}{2c} \frac{1}{r} e^{-r^2/2r_0^2} \frac{\sqrt{2\pi r_0^2}}{c} \left\{ e^{\frac{r_0^2}{2c^2}} (i\omega + \frac{cr}{r_0^2})^2 - e^{\frac{r_0^2}{2c^2}} (i\omega - \frac{cr}{r_0^2})^2 \right\} \\ &= \sqrt{2\pi i} \frac{r_0^3}{rc^2} e^{-\frac{r_0^2}{2c^2}\omega^2} \sin\left(\frac{r}{c}\omega\right) \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}g(\omega) \equiv U(\omega, r=0) &= i\sqrt{2\pi} \frac{r_0^3}{c^3} \omega e^{-\frac{r_0^2}{2c^2}\omega^2} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\omega}{c}r)}{\frac{\omega}{c}r} \\&= i\sqrt{2\pi} \frac{r_0^3}{c^3} \omega e^{-\frac{r_0^2}{2c^2}\omega^2}\end{aligned}$$

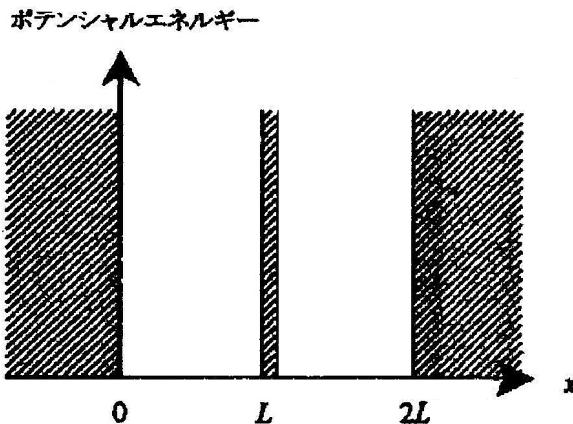
$$|g(\omega)| \propto \omega e^{-r_0^2 \omega^2 / (2c^2)}$$

$$\frac{d}{d\omega} \left(\omega e^{\frac{r_0^2}{2c^2}\omega^2} \right) = \left(1 - \frac{r_0^2}{c^2}\omega^2 \right) e^{\frac{r_0^2}{2c^2}\omega^2} = 0$$

とすると、 $\omega = c/r_0$ の時、 $g(\omega)$ 最大。

2002年度 入学試験 物理専門科目

問題 1



高さ無限大の壁に囲まれたばは $2L$ の一次元井戸型ポテンシャルに、高さ無限大で幅が L 二比べて十分小さいポテンシャル障壁を設け、質量 m の粒子を左半分（幅 L ）に閉じ込める（図 1）。井戸型ポテンシャルの底をエネルギーの原点とする。

1. 粒子が量子力学的な基底状態にあるとして、そのエネルギー E_0 を求めよ。
2. ポテンシャル障壁を突然取り去って、粒子が幅 $2L$ のポテンシャル全体を動けるようにする。この時、粒子が基底状態にある確率を求めよ。また、エネルギー期待値はいくらか。
3. ポテンシャル障壁を取り去った時刻から t 秒後の粒子の波動関数を $\psi(x, t)$ とする。今仮に $\psi(x, t)$ がわかったとしよう。時刻 t において粒子の位置を観測したとき、粒子が井戸の左半分で見つかる確率は、この $\psi(x, t)$ を用いてどのように書けるか。ただし、 $\psi(x, t)$ は規格化されているとする。
4. 上記の $\psi(x, t)$ の表式を求めよ。ただし級数和はそのまま残して良い。
5. 今度は設問 1 の状態からポテンシャル障壁を極めてゆっくりと右端まで動かす場合について考えよう。このようなゆっくりとしたポテンシャルの変化に対しては断熱定理が成り立ち、粒子は連続的に移り代わることのできる量子数の同じ固有状態にとどまる。このことを使って、粒子が幅 $2L$ のポテンシャル井戸全体を動けるようにした後の粒子のエネルギー期待値を、設問 1 で求めた E_0 を用いて表せ。
6. 上記の断熱定理が成り立つことを、以下の手順で示せ。左側のポテンシャル井戸幅が a の時に粒子が取りうる固有状態を $\phi_n(x, a)$ その固有エネルギーを $e_n(a)$ (n は負でない整数) と書く。 $\phi_n(x, a)$ は規格直交化されているものとする。 $t = 0$ で基底状態にいた粒子の、時間 t での波動関数を次のように展開する。

$$\phi(x, t) = \sum_n c_n(t) \phi_n(x, a) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t e_n(\tau) d\tau} \quad \cdots (1)$$

a が時間に依存することに注意して、時間に依存する波動方程式から、係数ベクトル C_n の満たすべき関係式が次の形に書けることを示し、 a や t によらない係数行列 J_{mn} の表式を求めよ。

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = - \sum_m c_m(t) \frac{1}{a} \frac{da}{dt} J_{mn} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^t e_n(\tau) - e_m(\tau) d\tau \right) \quad \cdots (2)$$

ただし、 $J_{mn} = 0$ である。次にこの関係式を用いて、ある条件の下で断熱定理が成り立つことを説明せよ。

7. ポテンシャル井戸の左半分に閉じ込められた粒子を、運動エネルギー e_0 の子・ん粒子だとする。設問 5 と同様に壁をゆっくりと（断熱的）右端まで動かしたあとのエネルギーが、設問 5 で求めた量子系の結果と同じ出ることを示せ。ただし、粒子は壁と弾性衝突（跳ね返り係数 1）であるとし、壁を動かしている間に粒子は壁と十分多くの回数衝突するとせよ。

問題 2

イオン半径のほぼ等しい 2 種の元素 A、B を高温で溶かして均一に混ぜ合わせて、その後急冷して、温度 T で合金（固溶体）を作る。元素 A、B は濃度比によらず格子定数が一定の単純立方格子を作ると仮定する。また、原子 A と A、B と B が最近接で隣合う時の相互作用エネルギーは等しくその大きさを a_{AB} と B が最近接で隣合うときの相互作用エネルギーの大きさを b であるとし、これ以外には相互作用は働かないとする。A どうし、B どうしがとなりあう方が、A、B がとなりあうよりもエネルギーが低く、 a_{AB} が満たされているとする。ただし、合金中の A、B の原子数濃度は等しいとする。

1. 格子点 i が A 原子で占められている時を $\sigma_i = 1$ 、B 原子で占められている時を $\sigma_i = -1$ とする変数 σ_i を使うと、この合金のモデルのハミルトニアンは、

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} (P\sigma_i\sigma_j + Q) \quad \cdots (1)$$

という形に書けることを示し、P と Q を a, b を用いてあらわせ。ただし、 $\langle i,j \rangle$ は最近接格子の組みである。ここで今の場合、A、B が 50 % ずつなので、対称性から化学ポテンシャルの項 $-\mu \sum_i \sigma_i$ は必要ないことを注意しておく。

2. この系の場合、 σ_i の平均値 $p = \langle \sigma_i \rangle$ の値はいくらか。
3. ハミルトニアンの中の相互作用を表す項 $\sigma_i\sigma_j$ を定数 m を用いて、 $(\sigma_i + \sigma_j)m - m^2$ と置き換える近似を行ない、

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} P((\sigma_i + \sigma_j)m - m^2) + Q \quad \cdots (2)$$

と表す。m を設問 2 で決まっている σ_i の一様な平均値 $m = p = \langle \sigma_i \rangle = \langle \sigma_j \rangle$ で与えるならば、この近似は相互作用の相手を平均値で置き換えることになり、「平均場近似」と呼ばれる。しかし、ここではより一般に m をパラメタと考える。すなわち、上記の近似での平均値 m が設問 2 で与えられる系全体の平均値 p と関係なく与えられるとした時に、上記のハミルトニアンで与えられる系の分配関数 Z と自由エネルギー F を m、N, a, b および温度 T の関数として表せ。ただし系の全格子点数は N であり、周期的境界条件下にあるとしてよい。以下、ボルツマン定数を k_B とする。

4. 設問 3 で求めた自由エネルギー F を m が小さいと考えて m の 4 次まで展開した表式は $F = u + vm^2 + wm^4$ と書ける。u, v, w を N, T, a, b を用いて表せ。
5. もしも m が自由に選べて、設問 4 で展開して 4 次まで求めた自由エネルギーが最小になる m が実現されるとすると、m は温度の関数としてどのように振舞うか。 $k_B T > 2(b - a)$ の範囲でおおざっぱに m と T の関係を表すグラフもかけ。
6. 設問 4 で求めた自由エネルギーの表式を用いて、この系の温度を下げる時に、この合金系の熱平衡状態でどのような相転移が生ずるか、説明せよ。ただし A、B の組成比が決まっている時に、物体全体では σ_i の平均値 m の値は設問 2 の値で決まっていて固定されていることに注意せよ。

問題 3

真空中に無限に長い直線状導線と半径 $R[\text{m}]$ の無限に長い中空の円筒導体が図 1 のように置かれている。導線は円筒の中心 O から x 軸方向に $x_0[\text{m}]$ ($0 \leq x_0 < R$) の位置にあるものとする。任意の点 A (中心 O から距離 $r[\text{m}]$ 、 x 軸からの角度 $\phi[\text{rad}]$) での動径方向と円周方向の電場を $E_r, E_\phi[\text{V/m}]$ 、磁束密度を $B_r, B_\phi[\text{Wb/m}^2]$ として、以下の設問に答えよ。ただし、真空中の誘電率と透磁率を ϵ_0, μ_0 とし、SI 単位系 (MKSA 単位系) を用いるものとする。

まず、導線が円筒の中心 O にある場合 ($x_0 = 0$) を考える。以下の設問に答えよ。

1. 導線に電流 $I[\text{A}]$ が紙面の下から上の方向に、円筒導体にはその反対方向に電流 $I[\text{A}]$ が一様に流れているとする。円筒内 ($r < R$) 及び円筒外 ($r > R$) の各領域で、磁束密度 $B_r, B_\phi[\text{Wb/m}^2]$ を求めよ。
2. 導線が $\lambda[\text{C/m}]$ の線電荷密度 (単位長さ当たりの電荷) で一様に帯電している場合を考える。ただし、円筒は接地されているものとする。
 - (a) 円筒内 ($r < R$) 及び円筒外 ($r > R$) の各領域で、電場 $E_r, E_\phi[\text{V/m}]$ を求めよ。
 - (b) 円筒面に生じる面電荷密度 $\sigma[\text{C/m}^2]$ と単位長さ当たりの総電荷量 $\lambda_t[\text{C/m}]$ を求めよ。
 - (c) 円筒が接地されずに絶縁されていた場合、電場は円筒内と円筒外でどうなるか。ただし、絶縁前に帯電はされていないものとする。

次に、導線が円筒導体の中心 O からずれている場合 ($0 < x_0 < R$) を考える。以下の問いに答えよ。

3. 設問 1 と同様に、導線に電流 $I[A]$ が紙面の下から上の方向に、円筒導体にはその反対方向に電流 $I[A]$ が一様に流れている。円筒外 ($r > R$) での磁束密度 $B_r, B_\phi[Wb/m^2]$ を求めよ。
4. 設問 2 と同様に、導線が $\lambda[C/m]$ の線電荷密度（単位長さ当たりの電荷）で一様に帯電している。ただし、円筒は接地されているものとする。
 - (a) 円筒導体に対する電気映像が、中心 O から x 軸方向に R^2/x_0 離れた位置にある線電荷密度 $-\lambda$ の無限に長い導線であることを示し、円筒内での電場 $E_r, E_\phi[V/m]$ を求めよ。
 - (b) 円筒面に生じる面電荷密度 $\sigma[C/m^2]$ を求めよ。
 - (c) 円筒を左右半分に分けて考えた時、 $x > 0$ の部分 ($0^\circ \leq \phi < 90^\circ$ 及び $270^\circ < \phi \leq 360^\circ$) と $x < 0$ の部分 ($90^\circ < \phi < 270^\circ$) の半円筒面に帯電する単位長さ当たりの電荷 $\lambda_+, \lambda_- [C/m]$ をそれぞれ求め、

$$\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} = S \cdot x_0 \quad \cdots (1)$$

となる S を求めよ。ただし、 $x_0 \ll R$ として考えよ。

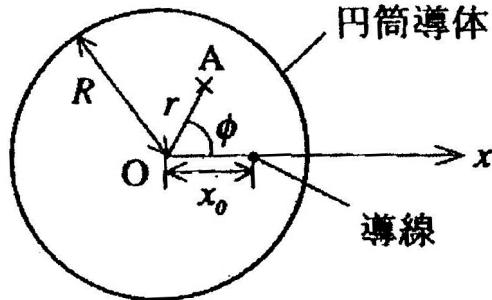


fig. 19:

問題 4

1. 半径 a 、厚さ $d(\ll a)$ 、一様な密度 ρ の薄い円盤の、中心を通り面に垂直な軸のまわりの慣性モーメント I_z 、および中心を通り面に平行な軸のまわりの慣性モーメント I_x を求めよ。

2. 半径 a 、質量 M の一様な球の、質量中心を通る軸のまわりの慣性モーメントが

$$I = \frac{2}{5} Ma^2 \quad \cdots (1)$$

であることを示せ。

3. この球を摩擦のある水平な面に置き、中心の高さを中心に向かって水平に突いて初速 v_0 を与えた。球と面の静止摩擦係数を μ 、動摩擦係数を μ' とするとき、球が滑らずに転がるようになるまでの時間と、それまでに質量中心が進む距離を求めよ。また滑らずに転がるようになってからの質量中心の速さ v と回転の角速度 ω を求めよ。ただし、以下の設問も含め、転がり摩擦は無視するものとする。
4. 図 1 のように、面が前方で傾斜角 θ の上り斜面になっているとする。 θ がある値より大きいと、滑らずに転がってきた球は滑りながら斜面を上るようになる。その θ の値を求めよ。ただし、斜面の下端は図 1 のように十分短い範囲で緩やかに変化しており、斜面全体にわたって摩擦係数は水平な部分と同じであるとする。



5. 前方の斜面の部分に摩擦があり球が滑らずに転がって上る場合と、斜面の部分が滑らかで摩擦がない場合には、球はどちらが高くまで上ることができるか。理由を付けて答えよ。

問題 5

物理実験において、測定値とその誤差の取り扱いは非常に重要である。これらに関する以下の設問に答えよ。

1. 実験誤差は大きく系統誤差と統計誤差の 2 つに分けられる。統計誤差は測定値をばらつかせるもので、多くの場合には一定の確率分布に従う。一方、系統誤差とはどういう内容のものか。例を挙げて簡潔に（100 字程度で）説明せよ。

以下の設問では、統計誤差だけを考え、その確率分布はガウス分布に従うと仮定する。

2. ある物理量の測定を同一条件で N 回行なったとする。これらの測定は独立で、 i 回目の測定値が x_i であったとする。もっとも確からしい物理量の値（最尤値） X は最小二乗法の考え方により、

$$S = \sum_{i=1}^N (x_i - X)^2 \quad \cdots (1)$$

を最小にする X として求められる。 X を求めよ。

3. 設問 2 の場合、測定の標準偏差はどのように求められるか。
4. 設問 2 の場合、最尤値 X の誤差（真の値からの差の絶対値） δX はどのように推定されるか。 N を大きくしたときに、その誤差はどのようになるか。
5. 設問 2 および 4 の結果、最尤値とその誤差がそれぞれ X 、 δX であった。一方、独立な物理量の測定を同様に行ない、最尤値とその誤差がそれぞれ δY 、 Y であった。このとき、物理量の和、 $X + Y$ 、に対する誤差を導け。結果だけでなく、どうしてそうなるかを説明せよ。ただし、 $\delta X \ll |X|$ 、 $\delta Y \ll |Y|$ とする。
6. 設問 5 と同様に、物理量の積 XY 、および商 X/Y に対する誤差を導け。
7. ある物理量 X に対する M 個の設定値 $X_k (k = 1, \dots, M)$ について、それと相関のある物理量 Y を測定した。1 つの設定値 X_k に対して N 回の測定を繰り返し、設問 2 および 4 の方法で、最尤値 Y_k とその誤差 δY_k を求めた。 X_k と Y_k の間には直線関係が予想されたので、 $Y_k = pX_k + q$ の関係式で近似したい。最小二乗法の考え方を用いて、もっとも確からしい p と q の値を求めよ。ただし、 X_k の誤差はないものとする。

問題 6

図 1 に示すように炭素イオン（荷電状態 $q = +2$ ）が水素プラズマを通過するときの荷電状態の変化およびエネルギー損失を測定する実験を行った。炭素イオンの入射エネルギーは核子あたり 350keV（速度は $8.2 \times 10^6 \text{ m/s}$ ）である。以下の設問に筋道を示して答えよ。必要であれば以下の値を用いよ。

炭素の質量数 $A = 12$ 、原子番号 $Z = 6$ 、光速度 $3.0 \times 10^6 \text{ m/s}$ 、核子質量 $m/n = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 、電荷単位 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。また、必要であれば $\exp(2.0) = 7.4$ の値を用いよ。

この実験において水素プラズマは陽子と電子に完全に電離し、それぞれの密度は空間的に一様で n であり、また時間的にも定常な状態であるとする。その厚さを d とする。

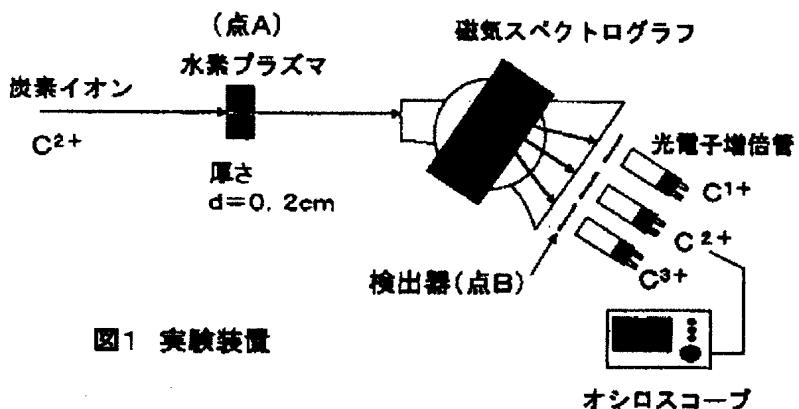


図 1 実験装置

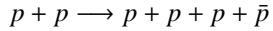
図 20: 実験装置

- 炭素イオンは水素プラズマ内の陽子および自由電子と相互作用をして、電子が剥ぎ取られる電離と、自由電子を捕獲する再結合が行われ荷電状態が変化する。その反応断面積をそれぞれ σ_i 、 σ_r とする。これらの値は衝突のエネルギー、運動量によらないものとする。プラズマに N_0 個の $q = +2$ のイオンが入射されるとする。以下の設問において、一度変化した炭素イオンの荷電状態がさらに変化する現象は無視してよい。
 - プラズマ表面から炭素イオンの進む方向に向かっての距離を x とするとき ($0 \leq x \leq d$)、 x の点で $q = +2$ に留まっているイオンの数 $N_2(x)$ を表す式を求めよ。
 - イオンは再結合により $q = +1$ 、電離により $q = +3$ 、となるが、入射点から x までの間に生成される、それぞれのイオンの数 $N_1(x)$ 、 $N_3(x)$ を表す式を求めよ。
 - $\sigma_i = 1.0 \times 10^{-17} \text{ cm}^2$ 、 $\sigma_r = 1.0 \times 10^{-22} \text{ cm}^2$ 、 $n = 1 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ 、 $d = 0.2 \text{ cm}$ とする時、プラズマ通過後、荷電状態が $q = +1, +2, +3$ 状態となっている割合はいくらか。
- プラズマ通過後の荷電状態を調べるために図 1 に示すように磁気スペクトログラフ（図中で紙面に垂直に磁場をかけ、荷電粒子を曲げる装置）を用いて炭素イオンの荷電分布を調べた。スペクトログラフの磁束密度 $B = 0.1 \text{ T}$ （ここで $T = \text{Wb/m}^2$ ）とする時、スペクトログラフ内の $q = +1, +2, +3$ に対応する曲率半径 $r_{h01}, r_{h02}, r_{h03}$ はいくらか。
- 上記磁気スペクトログラフの磁場を測定したい。
 - 磁束密度の方向、つまり S 極と N 極を確かめたい。電池と針金を持ちいて確かめるにはどうすればよいのか。図を描いて説明せよ。
 - 磁束密度 B を測定する方法を一つあげ、その原理を簡単に説明せよ。

4. プラズマ中のイオンのエネルギー損失 ΔE を、プラズマで g ち（図中の点 A）から検出器（点 B）までの飛行時間を測定して求める。プラズマが無いときとある時の飛行時間差 Δt と ΔE の関係式を求めよ。但し点 A から点 B までの距離を L_0 とする。 $L_0 = 4\text{m}$ 、炭素イオンのエネルギーが核子あたり $E = 350\text{keV}$ の時、 $\Delta t = 5$ ナノ秒であった。 ΔE はいくらになるか。
5. 前問において用いるイオン検出器として、プラスティックシンチレーター、NaI シンチレーターの 2 種類を用意した。上記の実験に用いるのはどちらのシンチレーターが適当であるかを理由を示して述べよ。

問題 7

相対論的な高エネルギー陽子 (p) ビームを静止している陽子 (p) ターゲットに照射することにより、陽子 (p) と反陽子 (\bar{p}) の対を生成する反応:



を考える。ここで陽子の質量を m_p ($= 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$)、陽子の電荷を e ($= 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)、真空中の光速度を c ($= 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$) とする。

1. 左手座標系で $+z$ 方向に磁束密度の大きさが B (Wb/m^2) の一様磁場をかけたとする。実験室系で運動量の大きさが P_p (kg m/s) の高エネルギー陽子が x 軸上を $+x$ 方向に磁場と垂直に入射された場合、陽子は回転運動を始める。その回転軸と回転方向を磁場と陽子の運動方向も含めて図示せよ。また、その回転運動の曲率半径を P_p 、 B 、 e を用いて表せ。
2. 陽子と反陽子の持つ固有の物理量のうち、等しくなる例と異なる例をそれぞれ 2 つずつ挙げよ。
3. 設問 2. で挙げた陽子と反陽子の性質の差異を用いて、陽子と反陽子を区別する手段を 2 通り簡潔に述べよ。
4. 上記反応の始状態で x 軸上を $+x$ 方向に入射されたビーム陽子が実験室系で持つ運動量の大きさを P_p とする。ビーム陽子とターゲット陽子の実験室系での全エネルギーと運動量を P_p 、 m_p 、 c を用いて各々書き表せ。また、ビーム陽子が重心系で持つ運動量の大きさを P_p^* とする。ビーム陽子とターゲット陽子の重心系での全エネルギーと運動量を P_p^* 、 m_p 、 c を用いて各々書き表せ。ただし、本設問以下においては磁場はかかっていないものとする。
5. 上記反応を生じさせるのに必要な高エネルギー陽子ビームの実験室系での最低運動エネルギー E_{min} を m_p と c を用いて表せ。
6. 陽子ビームの運動エネルギーを上記反応の起こる最低運動エネルギー E_{min} とする。この反応の始状態を重心系で見たときに、実験室系で静止していたターゲット陽子の重心系での速さ v^* は光速度 c の何倍になるかを計算せよ。また、始状態の反陽子の実験室系での運動量の大きさを m_p と c を用いて表せ。

問題 8

図 1 は、ある球状タンパク質の熱転移（熱によるアンフォールディング転移）を、示差走査型熱量計と 230nm における円二色性を用いて測定した結果を示す。測定は 1 気圧の一定圧力下にて行った。A は、タンパク質水曜鋸気の熱量計データ、B はタンパク質を溶かした緩衝溶液の熱量計データ、C は円二色性の温度依存性を示す。図 1 のデータより、温度 T におけるアンフォールディング転移の熱力学量（標準 Gibbs 自由エネルギー変化 $\Delta G(T)$ エンタルピー変化 $\Delta H(T)$ エントロピー変化 $\Delta S(T)$ など）を求めることができる。図 2 は、このようにして得られた熱力学量をもとに、 ΔG の温度依存性を描いた理論曲線である。以下の間に答えよ。ただし、このタンパク質の熱転移は二状態転移で近似できるものとする。

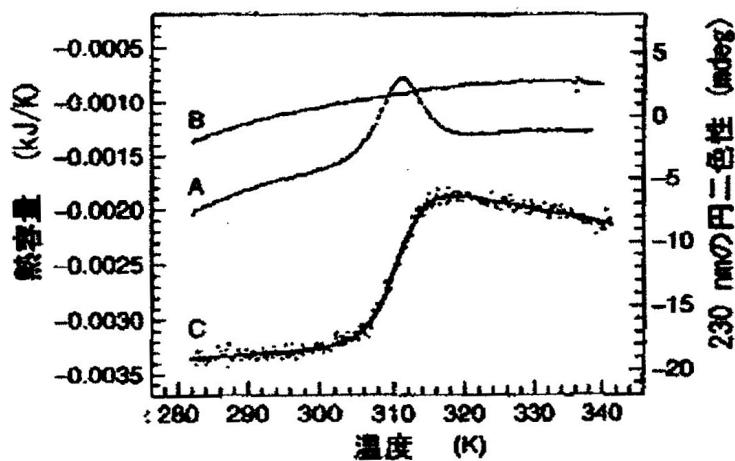


図 21: ある球状タンパク質の熱転移。A:示差走査型熱量計による測定結果。B:示差走査型熱量計のベースライン（Aと同じ測定を溶媒緩衝液に対して行った）。C:円二色性の測定結果（点は測定点、実線は転移曲線を示す）。

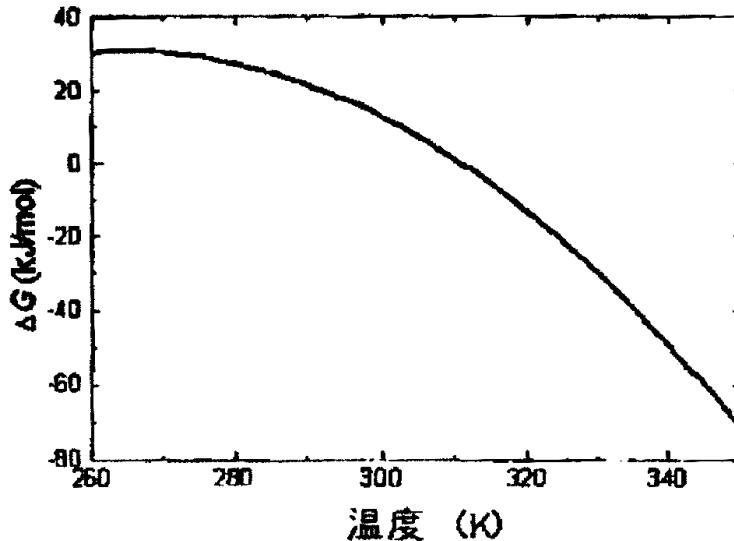
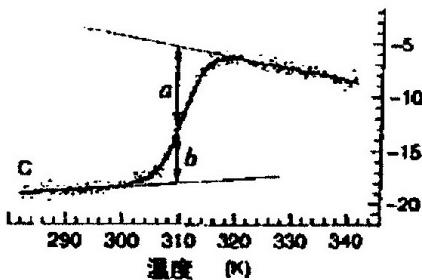


図 22: ΔG の温度依存。

1. 二次相転移が成立するので、図 1 中の C の転移曲線より転移前後の円二色性の温度依存を直線的に外挿し、転移領域での転移の割合 f_{app} を $f_{app} = b/(a+b)$ として求めることができる（下図参照）。このとき、転移領域における転移の平衡定数 K と標準自由エネルギー変化 ΔG はどのように与えられるかを示せ。



2. 平衡定数 K と熱転移の vant' Hoff エンタルピー変化 ΔH_{vH} に関する以下の関係式

$$\Delta H_{vH} = RT^2 \frac{\partial \ln K}{\partial T} \quad \cdots (1)$$

を導く。ただし、ここで R は気体定数を表す。必要であれば、自由エネルギーとエンタルピーおよびエントロピーに関する関係式 $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ を用いてよい。

3. 熱量計により直接観測したエンタルピー変化 ΔH_{cal} を図 1 中の A と B より求めることができる。その方法について、必要であれば図を描いて、説明せよ。
4. ΔH_{vH} と ΔH_{cal} の間にはどのような関係が成立するか。また、熱転移が二状態間転移では近似できず、中間状態を伴う場合、これらの間の関係はどうなるか。
5. 热転移点の温度 T_m 、熱転移に伴う定圧熱容量変化 ΔC_p とし、 C_p は温度に依らず一定と見なすことができる。このとき、任意の温度 T における、自由エネルギー変化 $\Delta G(T)$ は以下の関係式で表されることを示せ。

$$\Delta G(T) = \Delta H(T_m) + \Delta C_p \cdot (T - T_m) - T \left(\Delta S(T_m) + \Delta C_p \ln \frac{T}{T_m} \right) \quad \cdots (2)$$

6. 図 1 中の C のデータでは、230nm の円二色性の強度が熱転移に伴って減少している。円二色性とタンパク質の立体構造との関係について述べ、熱転移に伴う円二色性の変化が立体構造のどのような変化によりもたらされたかを説明せよ。
7. タンパク質の熱転移は、一般に、大きな ΔC_p を伴うため、 ΔG の温度依存には図 2 のような曲率が生じ、タンパク質は T_m における熱転移とともに、低温側の T_c においても冷却転移を示す（ T_c が水の氷点より低くなり、現実には観測できないことが多い）。タンパク質の熱転移と冷却転移の起こる分子的なメカニズムについて、それぞれ、知れることを述べよ。

問題 9

慣性モーメント I を持った異核 2 原子分子の回転運動について、次の間に答えよ。ただし、ボルツマン定数を k_B とし、比熱は 1 分子あたりの比熱とする。

1. 古典統計力学を使って、この系の温度 T での回転運動の比熱を求めよ。
2. この系の回転運動を表すハミルトニアンは

$$H = \frac{L^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{2I} \cdot \frac{-1}{\sin^2 \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial^2 \phi} \right) \quad \cdots (1)$$

である。回転量子数 l ($l = 0, 1, 2, \dots$) を使って、このハミルトニアンの固有値 E_l とその縮重重度 g_l を表せ（導出過程は不要）。

3. この系の分配関数 Z とエネルギー期待値 $\langle E \rangle$ を、 E_l 、 g_l 、温度 T を使って表せ。
4. 低温極限で有効な近似を用いて Z の表式を求め、その近似の範囲で、系の比熱 $C(T)$ を E_l 、 g_l 、 T を使って表せ。またその近似が成り立つ条件について述べよ。

次に慣性モーメント I の等角 2 原子分子の回転運動について考える。2 つの原子の原子核はともにスピン $1/2$ のフェルミ粒子であるとして、次の間に答えよ。ただし電子系の合成スピンはゼロであるとする。

1. 核の合成スピンはどのような値を取りうるかを考え、それぞれの場合について回転運動のエネルギー固有値と縮重重度を求めよ。
2. 設問 5 で求めたエネルギー固有値の具体的な表式を使って、低温極限での回転運動の比熱を求めよ。
3. 十分高温で熱平衡に達した分子気体を急冷した直後に測定した低温比熱 C_1 と、熱平衡を保ちながらきわめてゆっくり冷却した後測定した低温比熱 C_2 では、違いがあったという。その理由として考えられることを簡単に述べよ。ただしいずれの場合も、分子気体は冷却後も気体のままであったとする。

問題 1 解答

1. 固有値は $E_n = \frac{-n^2 h^2}{8mL}$ 、固有関数は $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$ と求まるので、 $n = 1$ を代入する。
2. u_n を障壁を取り去ったあとの固有関数とする。
これらでの基底状態の展開係数 $a_n = \langle u_n | \psi_{init} \rangle$ は前問を使うと、

$$a_n = \int_0^L \left(\sqrt{\frac{1}{L}} \sin \frac{n\pi x}{2L} \right) \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L} \right) dx \quad \cdots (1)$$

積分を実行して a_n は

- n が偶数の時 0
- $n = 4m + 1$ の時 $\frac{-4\sqrt{2}}{(n^2-4)\pi}$
- $n = 4m + 3$ の時 $\frac{4\sqrt{2}}{(n^2-4)\pi}$

となるから、求める確率 $P = |a_1|^2 = \frac{32}{9\pi^2}$ となる。

期待値は展開する固有関数系によらないので E_0

3. $\int_0^L |\psi(x)|^2 dx$
4. $\psi(x, t) = \sum_n a_n u_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$ に、 a_n, u_n, E_n の値を代入する。
5. $E_0/4$
6. 波動方程式に代入して整理して両辺に ψ^* をかけて積分すると

$$J_{mn} = a \int_0^a \psi_n^* \frac{\psi_m}{da} dx \quad \cdots (2)$$

$\psi_n^*(a, t)$ の値は最初の問題で求まっているからこれを代入して

$$J_{mn} = \frac{2nm(-1)^{n-m}}{n^2 - m^2} \quad \cdots (3)$$

となり a や t によらない。断熱定理は $\frac{da}{dt}$ が a に比べ小さいという意味で壁がゆっくり動く時に成り立つ。

7. 古典的粒子が壁にぶつかって壁を動かしたときにした仕事の分だけエネルギーを失ったと考えてみると、壁の位置変化 Δa 、粒子のエネルギー変化 ΔE とすると、

$$\Delta E = -(2mv)(2a/v)^{-1} \Delta a \quad \cdots (4)$$

これを整理すると $\frac{\Delta E}{E} = -2 \frac{\Delta a}{a}$ より、 E が a の 2 乗に反比例することがわかる。

問題 2 解答

1. $P = (a - b)/2, Q = (a + b)/2$
2. 0
3. 格子の形を考慮すると一粒子ハミルトニアンは

$$H = 3(a - b)m\sigma_i + 3/2((a + b) - (a - b)m^2) \quad \cdots (1)$$

であるから、

$$Z = \left(2 \cosh \frac{3(a - b)m}{kT} \right)^N e^{-\frac{3N}{2kT}((a+b)-(a-b)m^2)} \quad \cdots (2)$$

$$F = -kTN \log \left(2 \cosh \left(\frac{3(a - b)m}{kT} \right) \right) + \frac{3N}{2}((a + b) - (a - b)m^2) \quad \cdots (3)$$

となる。

4. $\log(2 \cosh(x))$ を展開すると $\log 2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$ になることを利用して

$$u = \frac{3N}{2}(a + b) - kTN \log 2 \quad \cdots (4)$$

$$v = -\frac{9(b - a)^2 N}{2kT} + \frac{3N(b - a)}{2} \quad \cdots (5)$$

$$w = \frac{27N(a - b)^4}{4(kT)^3} \quad \cdots (6)$$

5. F を m で微分してそれを 0 とおく。無次元パラメータ $\xi = kT/(b - a)$ を導入すると、 $\xi < 3$ で m が 0 でない値をとり、 $m = \frac{\xi}{3} \sqrt{3 - \xi}$ となるのでこれをグラフに書けば良い。

6. 相分離

問題 3 解答

1. • $r < R$ のとき

アンペールの法則より、

$$2\pi r \cdot B_\phi = \mu_0 I \text{ から } B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} [Wb/m^2] \quad \cdots (1)$$

(向きは紙面の上から見て反時計回り) $\cdots (2)$

$$B_r = 0 [Wb/m^2] \quad \cdots (3)$$

- $r > R$ のとき

導線を流れる電流と円筒を流れる電流の向きが逆なので、アンペールの法則より、

$$B_r = 0 [Wb/m^2] \quad \cdots (4)$$

$$B_\phi = 0 [Wb/m^2] \quad \cdots (5)$$

2. (a)

- $r < R$ のとき

ガウスの法則より

$$(2\pi r)\Delta l E_r = \frac{\lambda \Delta l}{\epsilon_0} \quad \cdots (6)$$

$$\text{ゆえに中心から外へ向かう向きに } E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} [V/m] \quad \cdots (7)$$

$$\text{また、 } E_\phi = 0 [V/m] \quad \cdots (8)$$

- $r > R$ のとき

接地されているので円筒には $-\lambda$ の電荷が誘起されるので円筒の外から見ると内部の総電荷は 0 になる。よってガウスの法則より、

$$E_r = 0 [V/m] \quad \cdots (9)$$

$$E_\phi = 0 [V/m] \quad \cdots (10)$$

$$\cdots (11)$$

(b)

接地されているの円筒には $-\lambda$ の電荷が誘起される。よって、

$$\lambda_t = -\lambda [C/m] \quad \cdots (12)$$

このとき円筒面内に生じる面電荷密度は σ は、

$$\sigma = -\frac{\lambda}{2\pi R} [C/m^2] \quad \cdots (13)$$

(c)

絶縁前に帯電していないので、円筒面上の全電荷は 0 となり、この円筒面から出る電束は 0 である。ゆえに、電場は円筒内と円筒外で等しくなり、 $E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} [V/m]$, $E_\phi = 0 [V/m]$ となる。

3. $r > R$ においては、円筒上の電流が作る磁場は、原点に置いた無限に長い導線を流れる電流が作る磁場と等しい。そこで、原点に置かれた無限に長い導線を流れる電流（流れる向きは紙面の上から下）と x_0 に置かれた無限に長い導線を流れる電流（流れる向きは紙面の下から上）の作る磁場の重ね合わせを考えればよい。ここ

で、原点からの距離 $r_1[\text{m}]$ 、 x 軸からの角度 $\phi_1[\text{rad}]$ での磁場を $B_{r1}[\text{Wb}/\text{m}^2]$ 、 x_0 からの距離 $r_2[\text{m}]$ 、 x 軸からの角度 $\phi_2[\text{rad}]$ での磁場を $B_{r2}[\text{Wb}/\text{m}^2]$ とする。このとき、

$$B_{r1} = 0 \quad B_{\phi 1} = \frac{\mu I}{2\pi r_1} \quad \dots (14)$$

$$B_{r2} = 0 \quad B_{\phi 2} = \frac{\mu I}{2\pi r_2} \quad \dots (15)$$

$\dots (16)$

重ね合わせて、

$$B_\phi = -B_{\phi 1} + B_{\phi 2} \cos \alpha = -\frac{\mu I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{\cos \alpha}{r_2} \right) \quad \dots (17)$$

$$B_r = -B_{\phi 2} \sin \alpha = -\frac{\mu I}{2\pi r_2} \sin \alpha \quad \dots (18)$$

ただし、

$$r_1 = r \quad \dots (19)$$

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + x_0^2 - 2r_1 x_0 \cos \phi_1} \quad \dots (20)$$

$$= \sqrt{r^2 + x_0^2 - 2rx_0 \cos \phi_1} \quad \dots (21)$$

$$\phi_1 = \phi \quad \dots (22)$$

$$\alpha = \phi_1 - \phi_2 \quad (\alpha < \frac{\pi}{2}) \quad \dots (23)$$

また、

$$\frac{x_0}{\sin \alpha} = \frac{r_2}{\sin \phi_1} \text{ より} \quad r_2 \sin \alpha = x_0 \sin \phi_1 \quad \dots (24)$$

$$\frac{\cos \alpha}{r_2} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{r_2} \quad \dots (25)$$

を用いて整理すると、

$$B_r = \frac{\mu I x_0 \sin \phi}{2\pi(r^2 + x_0^2 - 2rx_0 \cos \phi)} \quad [\text{Wb}/\text{m}^2] \quad \dots (26)$$

$$B_\phi = -\frac{\mu I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{r - x_0 \cos \phi}{r^2 + x_0^2 - 2rx_0 \cos \phi} \right) \quad [\text{Wb}/\text{m}^2] \quad \dots (27)$$

4. (fig.23) のように O,B,C,D,E をとる (問題文の図にある A と同一平面上であり、C,B の x 座標はそれぞれ $x_0, \frac{R^2}{x_0}$ である。)

このとき $\triangle ODB, \triangle OCD$ は $x_0 : R = R : \frac{R^2}{x_0}$ より相似なので $DB = l_1$ とすると、 $CD = \frac{R}{x_0} l_1$ となる。ここで B から ρ_2 かつ C から ρ_3 離れた点の電位は $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_3} + (\text{定数})$ と表されるので、 $\rho_2 = l_2, \rho_3 = \frac{R}{x_0} l_2$ とすると、 $\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{x_0}{R} = (\text{定数})$ となるので、円筒面での電位が等電位となり接地された条件を満たすので、電気映像は $\frac{R^2}{x_0}$ 離れた $-\lambda$ の無限に長い導線である。

次に円筒内での磁場を求める。 $\angle DCB = \phi_2, \angle DBE = \phi_3, DC = r_2, DB = r_3$ とする。このとき B,C における導線上の電荷が作る電場 $E_{r2}, E_{r3}, E_{\phi 2}, E_{\phi 3}$ は

$$E_{r2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_2} \quad E_{\phi 2} = 0 \quad \dots (28)$$

$$E_{r3} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_3} \quad E_{\phi 3} = 0 \quad \dots (29)$$

$\dots (30)$

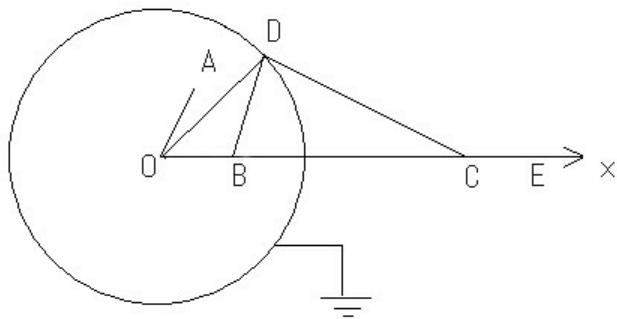


fig. 23:

よって、A 点での電場はこれらを重ね合わせて、

$$E_r = E_{r2} \cos \theta_2 + E_{r3} \cos \theta_3 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos \theta_2}{r_2} - \frac{\cos \theta_3}{r_3} \right) \quad \cdots (31)$$

$$E_\phi = E_{r2} \sin \theta_2 + E_{r3} \sin \theta_3 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sin \theta_2}{r_2} - \frac{\sin \theta_3}{r_3} \right) \quad \cdots (32)$$

… (33)

ただし、 $i = 2, 3$ について

$$\theta_i \equiv \phi_i - \phi \quad \cdots (34)$$

$$r_i^2 = r^2 + x_i^2 - 2rx_i \cos \phi \quad (x_2 = x_0, x_3 = \frac{R^2}{x_0}) \quad \cdots (35)$$

また、 $i = 2, 3$ について

$$\text{正弦定理より}、\frac{\sin \theta_i}{r_i} = \frac{x_i}{r_i^2} \sin \phi \quad \cdots (36)$$

$$\frac{\cos \theta_i}{r_i} = \pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}}{r_i} = \frac{r - x_0 \cos \phi}{r_i^2} \quad \cdots (37)$$

… (38)

となるので、

$$E_\phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{x_0}{r^2 + x_0^2 - 2rx_0 \cos \phi} - \frac{x_0 R^2}{x_0^2 r^2 + R^4 - 2rx_0 R^2 \cos \phi} \right) \sin \phi \quad [V/m] \quad \cdots (39)$$

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{r - x_0 \cos \phi}{r^2 + x_0^2 - 2rx_0 \cos \phi} - \frac{x_0^2 r - xR^2 \cos \phi}{x_0^2 r^2 + R^4 - 2rx_0 R^2 \cos \phi} \right) \quad [V/m] \quad \cdots (40)$$

(b) 円筒面に生じる面電荷密度は

$$\sigma = -\epsilon_0 E_r|_{r=R} = \frac{\lambda}{2\pi(R^2 + x_0^2 - 2Rx_0 \cos \phi)} \left(R - \frac{x_0^2}{R} \right) \quad [C/m^2] \quad \cdots (41)$$

(c) $x_0 \ll R$ より、

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\pi R^2(1 + \frac{x_0^2}{R^2} - 2\frac{x_0}{R} \cos \phi)} (R - \frac{x_0^2}{R}) \simeq \frac{\lambda}{2\pi R^2} (R - \frac{x_0^2}{R})(1 + 2\frac{x_0}{R} \cos \phi) \quad \cdots (42)$$

よって、

$$\lambda_+ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma R d\phi + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sigma R d\phi \quad \cdots (43)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi R} (R - \frac{x_0^2}{R})(\pi + 4\frac{x_0}{R}) \quad [C/m] \quad \cdots (44)$$

$$\lambda_- = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sigma R d\phi \quad \cdots (45)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi R} (R - \frac{x_0^2}{R})(\pi - 4\frac{x_0}{R}) \quad [C/m] \quad \cdots (46)$$

これより、

$$\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} = \frac{4x_0}{\pi R} \quad \cdots (47)$$

となり、

$$S = \frac{4}{\pi R} \quad [/m] \quad \cdots (48)$$

となる。

問題 4 解答

1. 慣性モーメント I は、軸からの距離を r として、

$$I = \int_V d^3r r^2 \rho \quad \cdots (1)$$

と表される。

従って、中心を通り面に垂直な軸を取った場合の円盤の慣性モーメント I_z は、円盤の面上での中心からの距離を r 、回転角を θ 、厚さの方向を z として表した円柱座標 (r, θ, z) を用いて

$$I_z = \int_0^d dz \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\theta r r^2 \rho = 2\pi\rho \int_0^a r^3 = \frac{1}{2}\pi\rho da^4 \quad \cdots (2)$$

一方、中心を通り面に平行な軸を取った場合の慣性モーメント I_x は、中心を原点とし、軸を x 軸、円盤の面を xy 平面とした正規直交座標を用いて

$$I_x = \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dy \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz (z^2 + y^2) \rho = \frac{1}{4}\pi\rho da^4 + \frac{1}{12}\pi\rho d^3 a^2 \quad \cdots (3)$$

$d \ll a$ として小さな項を無視すれば

$$I_x = \frac{1}{4}\pi\rho da^4 \quad \cdots (4)$$

となる。

2. 極座標で計算すると、中心軸からの距離は $r \sin \theta$ となる。

また、球が一様であれば、密度 ρ は $\rho = \frac{3M}{4\pi a^3}$ によって与えられる。

この ρ を用いて、慣性モーメント I は

$$I = \int_0^a dr \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi r^2 r^2 \sin^2 \theta = 2\pi\rho \left(1 - \frac{2}{3}\right) \int_0^a dr r^4 = \frac{8}{15}\pi\rho a^5 \quad \cdots (5)$$

ρ を代入すると、

$$I = \frac{2}{5}Ma^2 \quad \cdots (6)$$

が得られる。

3. 運動を始めた球は摩擦力を受けながら運動し、並進運動の速度 v が回転の速度 $a\omega$ と等しくなったときに、球の面との接点が面に対して静止する。これ以降は球は転がって運動し始め、摩擦が働くかなくなつて⁴一定の速度および角速度で運動するようになる。

球が滑っているとき、接点で働く摩擦力の大きさは、球を支える垂直抗力が Mg であることから $Mg\mu'$ であり、初速による球の進行方向と逆向きに働く。

運動方程式を立てると、並進運動の速度 v については

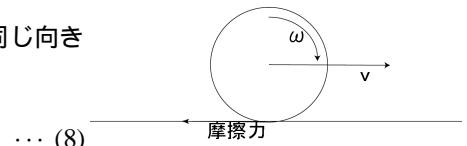
$$M \frac{dv}{dt} = -Mg\mu' \quad \cdots (7)$$

回転については、正の向きの回転によって球がはじめの進行方向と同じ向きに進むように ω の正の方向を取って

$$I \frac{d\omega}{dt} = Mg\mu' a \quad \cdots (8)$$

I は慣性モーメントであり、前の問題より $I = \frac{2}{5}Ma^2$ である。

⁴ 球と面の接点は常に面に対して静止



初期条件 $v = v_0, \omega = 0$ から、球の運動は

$$v = v_0 - Mg\mu't \quad \cdots (9)$$

$$\omega = \frac{5g\mu'}{2a}t \quad \cdots (10)$$

に従う。

回転を始めるときの条件 $v = a\omega$ より、このときの時刻を求める

$$t = \frac{2v_0}{7g\mu'} \quad \cdots (11)$$

このときの速度および角速度は、

$$v = \frac{5}{7}v_0, \omega = \frac{5v_0}{7a} \quad \cdots (12)$$

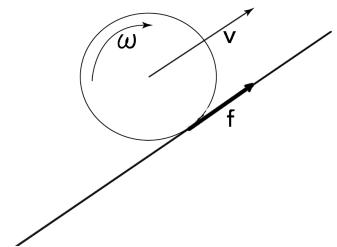
4. 球が坂を上り始めると、重力および接点での摩擦力に従って運動し始める。坂を上る方向の速度を v 、球が坂を上る方向に運動するような回転の方向を ω と取り直す。

斜面の下端は十分短い範囲で緩やかに変化しているため、球は問 3 で求めた速度および角速度を保ったまま斜面を上り始めると考えて良い。

坂を上る方向を力の正の向きにとって、摩擦力を f として表すと、球の速度及び角速度が従う運動方程式は

$$M \frac{dv}{dt} = -Mg \sin \theta + f \quad \cdots (13)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = -af \quad \cdots (14)$$



によって与えられる。

重力は球全体に一様に働き、垂直抗力は球の中心に向かって働くので、これらによるモーメントは考えなくて良い。

球に働く垂直抗力が $Mg \cos \theta$ であるから、 f は最大で $Mg\mu \cos \theta$ までの大きさを取る。

斜面が緩やかであれば、球は接点が面に対して静止し続ける条件 $v = a\omega$ を満たすように運動し、転がったまま斜面を上る。このとき、 $\dot{v} = a\dot{\omega}$ を満たすので、 f は

$$-\frac{a^2 f}{I} = -g \sin \theta + \frac{f}{m}$$

即ち

$$f = \frac{2Mg}{7} \sin \theta \quad \cdots (15)$$

を満たす。

斜面が急な場合、 f の最大の条件から式 (15) を満たすような f が存在しなくなると、球の接点は面に対して静止できずに滑り出すことになる。

従って、球が滑り出すような最小の θ は

$$Mg\mu \cos \theta = \frac{2Mg}{7} \sin \theta \quad \cdots (16)$$

によって与えられる。 θ を計算すると、

$$\theta = \arctan\left(\frac{7\mu}{2}\right) \quad \cdots (17)$$

この場合、摩擦力は $f = Mg\mu \cos \theta$ となり、 $\dot{v} < a\dot{\omega}$ となって球は空回りし始める。滑り出した後は $f = Mg\mu' \cos \theta < Mg\mu \cos \theta$ より $\dot{v} < a\dot{\omega}$ の関係が続くため、球は空回りし続けることになる。

5. 球が最大の高さまで上ったとき、並進運動速度 v は 0 となる。

摩擦があつて球が滑らずに上る場合、 $v = a\omega$ より、最大の高さまで上った時点で $v = \omega = 0$ となって、球の運動エネルギーは 0 になる。転がつて運動している限り摩擦力は仕事をしないので、系の力学的エネルギーは保存されている。従つて、この場合、斜面を上り始めたときの球の全運動エネルギーと等しい位置エネルギーを得る高さまで球は斜面を上ることができる。

一方、摩擦がない場合、球にモーメントは働くないので回転は止まらず、最大の高さまで上った時点でも球は運動エネルギーを持つ。このときの位置エネルギーは斜面を上り始めたときの球の全運動エネルギーよりも低い。

以上より、摩擦がある場合の方が球は高い位置まで上ることができる。

問題 5 解答

- 測定値を真の値から一様にずらすような誤差。例えば、ある温度 T で定規で棒の長さを測る場合、定規の変形による目盛間隔の一様なずれや、温度制御が不充分なために棒の熱膨張によるずれが原因となりうる。原理的には完全除去可能。
- S が極小値をとればよいので、 S を X について偏微分して、

$$\sum_{i=1}^N (x_i - X) = 0 \quad \cdots (1)$$

より、

$$X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \cdots (2)$$

が得られる。これは測定値 x_i の算術平均になっている。

- 最尤法を用いてとく。尤度関数 L を以下のように定義する。

$$L \equiv \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^N} \exp -\frac{S}{2\sigma^2} \quad \cdots (3)$$

L が極大値をとるような σ が測定の標準偏差なので、

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = 0 \quad \cdots (4)$$

を計算して、

$$\sigma = \sqrt{\frac{S}{N}} \quad \cdots (5)$$

が得られる。 X の値は前問で求めたものである。

標準偏差の式としては N ではなく $N-1$ となっているものもありますが、そちらを導くのは少し面倒です。限られた時間内での解答と言う意味では上記のものでもよいように思います。テイラーという人の“計測における誤差解析入門”という本がきちんと導いていたので、気になる方は参照して下さい。東京化学同人から翻訳が出てます。

- まず、2変数関数について誤差の伝播則を導く。この導出はもっと変数が多い場合にもあてはまる。独立変数 x, y の関数 $f(x, y)$ を考える。 x_i, y_i は測定値で、誤差は小さいと仮定する。最尤値 X, Y のまわりでテイラー展開して1次の項まで残すと、

$$f(x_i, y_i) - f(X, Y) = \frac{\partial f}{\partial X}(x_i - X) + \frac{\partial f}{\partial Y}(y_i - Y) \quad \cdots (6)$$

となる。 $f(x, y)$ の標準偏差 σ_f^2 は

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [f(x_i, y_i) - f(X, Y)]^2 \quad \cdots (7)$$

なので、はじめの等式を両辺を2乗して和をとると、

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right)^2 \sigma_y^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - X)(y_i - Y) \quad \cdots (8)$$

が得られる。この式の右辺第3項は x と y が独立変数なので、多数回の測定では消える。よって、誤差の伝播は以下の式に従う。

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right)^2 \sigma_y^2 \quad \cdots (9)$$

これを独立な n 変数に拡張して、問題 2 でもとめた X を x_1, x_2, \dots, x_n の関数とみなして適用する。 x_i は同一の物理量の測定値なので、標準偏差はすべて等しく前問で求めた σ である。また、 $\partial X / \partial x_i = 1/N$ がすべての i について成り立つから、最尤値 X の標準偏差、つまり誤差 δX は、

$$\delta X = \sqrt{N \frac{1}{N^2} \sigma^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \cdots (10)$$

となる。 N を大きくした場合、 σ はほとんど変化しない（ずっと同じ条件のもとで測定をしているので、誤差も同じような出現の仕方をするはずです。）ので、 δX はゆるやかに減少していくことになる。

5. 誤差は前問で導いた法則に従って伝播するので、 $X + Y$ について伝播則を適用すると、

$$\delta(X + Y) = \sqrt{\delta X^2 + \delta Y^2} \quad \cdots (11)$$

である。

6. 前問と同様に、

$$\delta(XY) = \sqrt{Y^2 \delta X^2 + X^2 \delta Y^2} \quad \cdots (12)$$

$$\delta(X/Y) = \frac{X}{Y} \sqrt{\frac{\delta X^2}{X^2} + \frac{\delta Y^2}{Y^2}} \quad \cdots (13)$$

と計算できる。

7. 表記を簡単にするため、以下の量を定義しておきます。まず、重み w_k を、

$$w_k \equiv \frac{1}{\sigma_{Y_k}^2} \quad \cdots (14)$$

次に、 Δ として、

$$\Delta \equiv \sum k = 1^M w_k X_k^2 \sum k = 1^M w_k - \left(\sum k = 1^M w_k X_k \right)^2 \quad \cdots (15)$$

なお、 σ_{Y_k} と、 δY_k は、以下の関係があります。問題 4 を参照して下さい。

$$\frac{\sigma_{Y_k}}{\sqrt{N}} = \delta Y_k \quad \cdots (16)$$

これで準備完了です。文体を変えて解答に入ります。

尤度関数 L を以下のように定義する。

$$L \equiv \frac{1}{\prod_{k=1}^M \sqrt{2\pi} \sigma_{Y_k}} \exp \left[- \sum_{k=1}^M \frac{w_k(Y_k - pX_k - q)^2}{2} \right] \quad \cdots (17)$$

これを最大にするような p, q もっとも確からしい値なので、

$$\frac{\partial L}{\partial p} = 0 \quad \cdots (18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \cdots (19)$$

を計算して、以下の式が得られる。

$$p \sum_{k=1}^M w_k X_k + q \sum_{k=1}^M w_k = \sum_{k=1}^M w_k Y_k \quad \cdots (20)$$

$$p \sum_{k=1}^M w_k X_k^2 + q \sum_{k=1}^M w_k X_k = \sum_{k=1}^M w_k X_k Y_k \quad \cdots (21)$$

(ちなみに、この連立方程式を行列で書いた時の係数行列の行列式が Δ です。) これらを解いて、

$$p = \frac{\sum_{k=1}^M w_k X_k Y_k \sum_{k=1}^M w_k - \sum_{k=1}^M w_k X_k \sum_{k=1}^M w_k Y_k}{\Delta} \quad \cdots (22)$$

$$q = \frac{\sum_{k=1}^M w_k X_k^2 \sum_{k=1}^M w_k Y_k - \sum_{k=1}^M w_k X_k \sum_{k=1}^M w_k X_k Y_k}{\Delta} \quad \cdots (23)$$

この式に σ_{Y_k} と δY_k の関係式を用いれば答が得られる。

このような問題を重みつき最小 2 乗法というそうです。

問題 6 解答

1. (i) $x + \Delta x$ における $q = +2$ のイオンの数を $N_2(x + \Delta x)$ とする。ここで、

$$\sigma = \sigma_i + \sigma_r \quad \cdots (1)$$

とすると、

$$N_2(x + \Delta x) = N_2(x) - N_2(x) \times n\sigma\Delta x \quad \cdots (2)$$

となる。これから、

$$\frac{N_2(x + \Delta x) - N_2(x)}{\Delta x} = -N_2(x) \times n\sigma \quad \cdots (3)$$

となる。 $\Delta x \rightarrow 0$ として、

$$\frac{dN_2(x)}{dx} = -n\sigma N_2(x) \quad \cdots (4)$$

をえる。 $N_2(0) = N_0$ を考慮してこの微分方程式の解は

$$N_2(x) = N_0 \exp(-n\sigma x) \quad \cdots (5)$$

となる。

- (ii) (i) と同様にして、

$$N_1(x + \Delta x) = N_1(x) + n\sigma_i N_2(x) \Delta x \quad \cdots (6)$$

より、

$$\frac{dN_1(x)}{dx} = n\sigma N_2(x) \quad \cdots (7)$$

を得る。

ここで、 $N_2(x) = N_0 \exp(-n\sigma x)$ と、 $N_1(0) = 0$ から、この微分方程式の解は、

$$N_1(x) = \frac{\sigma_i}{\sigma} \times N_0 \times (1 - \exp(-n\sigma x)) \quad \cdots (8)$$

である。

同様にして、

$$N_3(x) = \frac{\sigma_r}{\sigma} \times N_0 \times (1 - \exp(-n\sigma x)) \quad \cdots (9)$$

をえる。

- (iii) $\sigma_i = 1.0 \times 10^{-17} \text{ cm}^2$, $\sigma_r = 1.0 \times 10^{-22} \text{ cm}^2$, $n = 1 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, $d = 0.2 \text{ cm}$ である。よって、

$$\begin{aligned} N_2(0.2) &= N_0 \exp(-0.2 \times n \times \sigma_i) \times \exp(-0.2 \times n \times \sigma_r) \\ &= N_0 \exp(-2) \times \exp(-2 \times 10^{-5}) \\ &\approx N_0 \exp(-2) \\ &= N_0 \times 1/7.4 \end{aligned} \quad \cdots (10)$$

である。また、

$$N_1(x) = \frac{\sigma_i}{\sigma} \times N_0 \times (1 - N_2(x)) \quad \cdots (11)$$

より、

$$\begin{aligned} N_1(0.2) &= \frac{1.0 \times 10^{-17}}{1.0 \times 10^{-17} + 1.0 \times 10^{-22}} \times N_0 \times (1 - N_2(0.2)) \\ &\approx 1 \times N_0 \times (1 - 1/7.4) \\ &= N_0 \times 6.4/7.4 \end{aligned} \quad \cdots (12)$$

である。

同様に、

$$N_3(x) = \frac{\sigma_r}{\sigma} \times N_0 \times (1 - N_2(x)) \quad \cdots (13)$$

より、

$$\begin{aligned} N_3(0.2) &= \frac{1.0 \times 10^{-22}}{1.0 \times 10^{-17} + 1.0 \times 10^{-22}} \times N_0 \times (1 - N_2(0.2)) \\ &= \frac{1}{1 + 10^5} \times N_0 \times (1 - 1/7.4) \\ &\approx 10^{-5} \times N_0 \times 6.4/7.4 \\ &= N_0 \times 6.4/7.4 \times 10^{-5} \end{aligned} \quad \cdots (14)$$

である。

以上から、

$$N_1(0.2) : N_2(0.2) : N_3(0.2) = 6.4 : 1 : 6.4 \times 10^{-5} \quad \cdots (15)$$

となる。

2. 磁束密度 B における、質量 m 、電荷 q の粒子の曲率半径 ρ は、

$$m \frac{v^2}{\rho} = qvB \quad \cdots (16)$$

より、

$$\rho = \frac{mv}{qB} \quad \cdots (17)$$

となる。ここで、

$$m = 12 \times 1.7 \times 10^{-27} \quad \cdots (18)$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{20.4 \times 10^{-27} \times 8.2 \times 10^6}{1 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.1} \\ &= 5.1 \times 2.1 \\ &= 10.71 \approx 11(m)\end{aligned}\cdots (19)$$

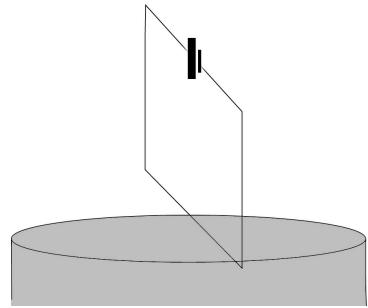
である。また、 $\rho_2 = \rho_1/2$ より、

$$\begin{aligned}\rho_2 &= 10.7/2 \\ &= 5.35 \\ &\approx 5.4(m)\end{aligned}\cdots (20)$$

であり、同様に、 $\rho_3 = \rho_1/3$ より、

$$\begin{aligned}\rho_3 &= 10.7/3 \\ &\approx 3.6(m)\end{aligned}\cdots (21)$$

である。



3. (i) 右図の装置を用いて、針金がどちらに動くかで B の向きを決定する。

(ii) 磁気モーメント μ を角運動量 $J = \hbar I$ を用いて、 $\mu = \gamma J$ で定義する。これは静磁場 $H = \frac{B}{\mu_0}$ 内では、角速度 $\omega = -\gamma H$ で回転運動をする。この ω の大きさを測ることで、磁場の大きさを決定する。

4. プラズマがない時の速度、エネルギーを v_0 、 E_0 、ある時の速度、エネルギーを v_1 とする。すると、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = E_0 \cdots (22)$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = E_0 - \Delta E \cdots (23)$$

となる。

これから、

$$\Delta E = \frac{1}{2}m \times (v_0^2 - v_1^2) \cdots (24)$$

である。また、

$$\frac{L}{v_1} - \frac{L}{v_0} = t \Leftrightarrow v_1 = \frac{v_0 L}{v_0 \Delta t + L} \cdots (25)$$

である。

(25),(26) から

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_0^2 \times \left(1 - \frac{L^2}{(v_0 \Delta t + L)^2}\right) \cdots (26)$$

値を代入して、

$$\begin{aligned}\Delta E &= 350 \times \left(1 - \frac{16}{(4 + 8.2 \times 5 \times 10^{-3})^2}\right) \\&= 350 \times (1 - (1 + 10.25 \times 10^{-3})^{-2}) \\&= 350 \times (1 - (1 - 2 \times 10.25 \times 10^{-3})) \\&= 350 \times 20.5 \times 10^{-3} \\&= 7.175\end{aligned}$$

よって、 $\Delta E = 7.2(kV)$ である。

5. この実験のように、高速粒子の測定にはプラスティックシンチレーターのほうが向いている。なぜなら、NaI シンチレーターは蛍光減衰時間がプラスティックシンチレーターに比べて、100 倍以上長くて、早い計測には向かないからである。

問題 7 解答

1. 運動方程式は、

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \left(\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \quad \cdots (1)$$

と書ける。式 (1) の両辺に \mathbf{p} を内積して、

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}} &= e\mathbf{p} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \\ \frac{d}{dt} \mathbf{p}^2 &= 0 \\ p^2 &= \text{Const.} = P_p^2 \end{aligned} \quad \cdots (2)$$

さて、式 (1) を陽に書くと、

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} v_y B \\ -v_x B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_x = \dot{x}$ 等より、

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eyB + C_1 \\ -exB + C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

今、 $t = 0$ で $x = y = z = 0$ 、 $p_x = P_p$, $p_y = p_z = 0$ とすると、

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eyB + P_p \\ -exB \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを式 (2) に代入して、

$$\begin{aligned} (eyB + P_p)^2 + (-exB)^2 &= P_p^2 \\ x^2 + \left(y + \frac{P_p}{eB}\right)^2 &= \left(\frac{P_p}{eB}\right)^2 \end{aligned} \quad \cdots (3)$$

よって陽子は中心 $(0, -\frac{P_p}{eB}, 0)$ 、半径 $\frac{P_p}{eB}$ の円運動をする。(図略)

2. 等しい物理量: (静止)質量、寿命、スピン 等異なる物理量: 電荷、磁気モーメント
3. 陽子と反陽子は電荷が反対であることを用いる。
 - (i) 電場をかけ、陽子と反陽子を splitting させる。
 - (ii) 磁場をかけ、陽子と反陽子の回転方向が逆であることを利用する。
4. 実験室系ではターゲットは静止しているので、全運動量 \mathbf{P} は、

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ビーム陽子とターゲット陽子にはそれぞれ相対論的な関係式

$$E^2 = (pc)^2 + (m_p c^2)^2$$

が成立するから、全エネルギー E は、

$$E = \sqrt{(P_p c)^2 + (m_p c^2)} + m_p c^2$$

となる。重心系 ($\mathbf{p}_{beam} + \mathbf{p}_{target} = 0$) でも同様に

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{0} \\ E &= 2 \sqrt{(P_p^* c)^2 + (m_p c^2)}\end{aligned}$$

となる。

5. 重心系での全エネルギー M が生成粒子の（静止）質量の和より大きいときに反応が起こる。4 元ベクトルの内積は Lorentz invariant だから、実験室系と重心系でこの値は等しく、

$$\begin{aligned}\left(\frac{E_{beam} + E_{target}}{c}\right)^2 - (\mathbf{p}_{beam} + \mathbf{p}_{target})^2 &= \left(\frac{M}{c}\right)^2 \\ M &= \sqrt{2(m_p c^2)^2 + 2m_p c^2 E_{beam}}\end{aligned}$$

$M \geq 4m_p c^2$ であれば良いので、 $E_{beam} = E_{min} + m_p c^2$ に注意して、

$$E_{min} = 6m_p c^2$$

6. ターゲット陽子に固定した実験室系から x 軸方向に v^* だけ boost した系が重心系になるとする。（この時ターゲット陽子の速度は $-v^*$ となる。）このとき、 E, \mathbf{P} は Lorentz 変換に従い、 E', \mathbf{p}' に変換される。具体的には $\beta^* = \frac{v^*}{c}$ として、

$$\begin{cases} p'_{beam}^x = \frac{p_{beam}^x - \beta^* \frac{E_{beam}}{c}}{\sqrt{1-\beta^{*2}}} \\ p'_{target}^x = \frac{p_{target}^x - \beta^* \frac{E_{target}}{c}}{\sqrt{1-\beta^{*2}}}\end{cases}$$

いま、 $E_{kin} = E_{min} = 6m_p c^2$ より、 $E_{beam} = 7m_p c^2$ 、 $E_{target} = m_p c^2$ 、 $p_{target}^x = 0$ であり、ビーム粒子についての相対論的な関係式より $p_{beam}^x = 4\sqrt{3}m_p c$ が導ける。これらを上式に代入して、 $p'_{beam} + p'_{target} = 0$ を用いれば、

$$\beta^* = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$E_{kin} = E_{min}$ の時、終状態の運動量は z 成分のみで、4 粒子に等分配される（重心系でみると生成した粒子はすべて静止しているので、生成した粒子の運動量の大きさは等しい）ので、 $p_{\bar{p}} = \sqrt{3}m_p c$

問題 8 解答

1. 物質 k の一分子当たりの標準自由エネルギーを $\mu_k^0(T)$, 一分子当たりの自由エネルギーを $\mu_k(T, p)$ とおくと, 活量 a_k は以下の式で定義される:

$$\mu_k(T, p) = \mu_k^0(T) + k_B T \ln a_k. \quad \cdots (1)$$

また, 物質 k と物質 k' の間での 二状態転移における 平衡定数 $K(T)$ は次式で定義される:

$$K(T) = \frac{a_{k'}}{a_k}. \quad \cdots (2)$$

反応系を理想溶液で近似すると, 活量はモル分率によって近似される. すなわち, 所与の転移の割合 f_{app} を用いて, 平衡定数は次のように計算される:

$$K(T) = \frac{f_{app}}{1 - f_{app}}. \quad \cdots (3)$$

一方で式 (1), (2) より,

$$K(T) = \exp\left(\frac{\mu_{k'}(T, p) - \mu_{k'}^0(T) - (\mu_k(T, p) - \mu_k^0(T))}{k_B T}\right),$$

となるが, 各温度において熱平衡状態に達していたのであれば, $\mu_k(T, p) = \mu_{k'}(T, p)$ が成り立つ. これより上の式は以下のように変形できる:

$$K(T) = \exp\left(-\frac{\mu_{k'}^0(T) - \mu_k^0(T)}{k_B T}\right). \quad \cdots (4)$$

以上から標準自由エネルギー ΔG は分子数 N と転移の割合 f_{app} によって,

$$\begin{aligned} \Delta G &= N(\mu_{k'}^0(T) - \mu_k^0(T)), \\ &= -Nk_B T \ln K(T), \\ &= RT \ln \frac{1 - f_{app}}{f_{app}}, \end{aligned} \quad \cdots (5)$$

と計算される. ただし, 得られた ΔG は二状態転移を仮定しているため, model dependent である.

2. Gibbs の自由エネルギーは, $G = H - TS$ によって表されるので,

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T},$$

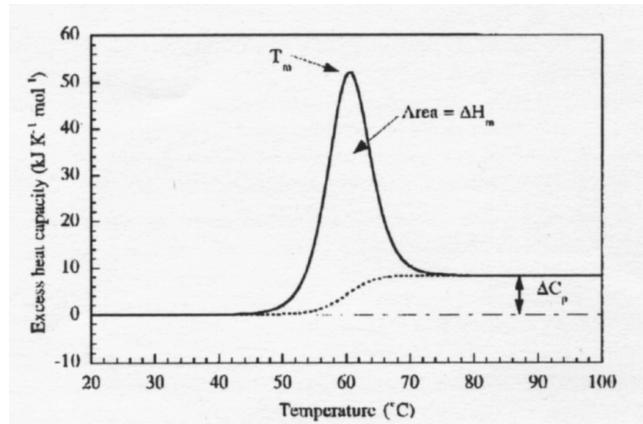
が成り立つ. 故に, 偏微分の線形性から,

$$\Delta S = -\frac{\partial \Delta G}{\partial T}. \quad \cdots (6)$$

$\Delta G = \Delta H - T \Delta S$ を, 上の式と式 (5) の二行目を用いて変形すると,

$$\begin{aligned} \Delta H &= -RT \ln K + T \frac{\partial}{\partial T} RT \ln K, \\ &= RT^2 \frac{\partial \ln K}{\partial T}, \end{aligned} \quad \cdots (7)$$

が得られる. これは二状態転移を前提とした van't Hoff のエンタルピー変化に他ならない.



3. 溶液の DSC の読みから溶質の DSC の読みを引いた上に, C_p の変化によって生じる back ground を引く. 残されたピークの面積が ΔH_{cal} となる.

ΔH_{cal} は back ground の引き方に不定性が残るもの, ただし図は本問用に作ったものではなく, Chem.Rev.1997, 97,1251-1267 から転載した.

model independent である.

4. 二状態遷移が事実であれば,

$$\Delta H_{cal} = \Delta H_{vH}, \quad \cdots (8)$$

他に中間状態をともなうのであれば,

$$\Delta H_{cal} \neq \Delta H_{vH}, \quad \cdots (9)$$

となる. むしろ, 二種類の enthalpy の比 $\Delta H_{cal}/\Delta H_{vH}$ が, 1 からどの程度ずれているかが反応機構が二状態遷移で記述できるか否かの指標となる.

5. 低圧条件下では,

$$dH = C_p dT,$$

$$dS = \frac{\delta Q}{T},$$

$$= \frac{C_p dT}{T},$$

が成り立つため, C_p が一定の系ではある温度 T_0 について,

$$H(T) = H(T_0) + C_p(T - T_0),$$

$$S(T) = S(T_0) + C_p \ln \frac{T}{T_0},$$

が成り立つ. これを用いると, 異なる C_p の二系間での自由エネルギーの変化は, $\Delta G = \Delta H - T \Delta S$ に基づいて,

$$\begin{aligned} \Delta G(T) &= \Delta H(T) - T \Delta S(T), \\ &= \Delta H(T_m) + \Delta C_p (T - T_m) \\ &\quad - T \left(\Delta S(T_m) + \Delta C_p \ln \frac{T}{T_m} \right), \end{aligned} \quad \cdots (10)$$

と計算される. ただし, T_0 として転移温度 T_m をとった.

$\Delta G(T)$ は, $T = T_m \exp \left(-\frac{\Delta S(T_m)}{\Delta C_p} \right)$ でピークを持つ上に凸な関数である. $\frac{\Delta S(T_m)}{\Delta C_p}$ が小さいならば, $\Delta G(T)$ は $T = T_m$ 以外に低温側にもう一つ零点をもつことが可能である.

6. 有機化合物の立体構造のうち, ある種の官能基, 不斉炭素原子及び α -ヘリックスは, 左右の円偏光についての吸収率が系統的に異なっていることが知られている。folding-unfolding 転移においては, 主に α -ヘリックスの螺旋構造が解けることによって円二色性が変化すると思われる。
7. 注:論文に疎水, 親水基と水との相互作用が比熱の gap を生じているとの記述もあり, 解答として満足なものが間に合いませんでしたので改訂もしくは訂正に譲ります。

問題 9 解答

参考) オルソ水素、パラ水素

1. Hamiltonian の回転部分は、 $H_{rot} = \frac{1}{2I} \left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} p_\phi^2 \right)$ と書けるので partition function は、

$$\begin{aligned} Z_{rot} &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^\infty dp_\theta \int_{-\infty}^\infty dp_\phi \exp \left\{ -\frac{1}{k_B T} \frac{1}{2I} \left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} p_\phi^2 \right) \right\} \\ &= \frac{2Ik_B T}{\hbar^2} \end{aligned}$$

である。従って Helmholtz の free energy は、

$$F = -k_B T \ln Z_{rot} = -k_B T \ln \frac{2Ik_B T}{\hbar^2}$$

となる。 $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ $C = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)$ だから、

$$C = k$$

$$(別) \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_{rot} = k_B T, C = \frac{\partial E}{\partial T} = k$$

2. $\Lambda \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ の固有値は $l(l+1)$ であるから、

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I}$$

縮重重度は $g_l = 2l+1$ 。

3. partition function は

$$Z_{rot} = \sum_{l=0}^{\infty} g_l \exp \left(-\frac{E_l}{k_B T} \right)$$

またエネルギーは $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$ として、 $\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_{rot}$ であるから、 β の微分を T の微分に書き換えて、

$$\langle E \rangle = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} g_l \exp \left(-\frac{E_l}{k_B T} \right) \right\}$$

4. 低温ではほとんど回転励起はしないと考えられるので、級数を $l=1$ までとて、

$$Z_{rot} = 1 + 3 \exp \left(-\frac{E_1}{k_B T} \right)$$

とできる。 $(E_0$ は簡単なので、数字に直してしまった。) 前問の結果を用いれば比熱は、

$$\begin{aligned} C &= \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \frac{3E_1}{\exp \left(\frac{E_1}{k_B T} + 3 \right)} \\ &= \frac{3E_1^2}{k_B T^2} \frac{\exp \left(\frac{E_1}{k_B T} \right)}{\left[\exp \left(\frac{E_1}{k_B T} \right) + 3 \right]^2} \end{aligned}$$

5. 核の合成スピンは $1, 0, -1$ をとりうる。このうち $s=1, -1, 0$ の片方は spin triplet を作り（対称スピン波動関数）、 $s=0$ のもう片方は spin singlet を作る（反対称スピン波動関数）。このスピン波動関数を用いて全体の波動関数は、（回転波動関数） \times （スピン波動関数）で表される。さて、核が fermion であることから、この波動関数は全体として反対称でなくてはならず、

1. (対称) \times (反対称)
2. (反対称) \times (対称)

のみ許される。ここで、回転の波動関数が $l:even$ の時対称、 $l:odd$ の時反対称であることを考えると、エネルギー固有値は、

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I}$$

で変わらず、ただ 1. の時 $l:even$ 、2. の時 $l:odd$ になる。同様に縮重重度は $g_l = 2l + 1$ で 1. の時 $l:even$ 、2. の時 $l:odd$ になる。

6. 5. の事情を加味すると partition function は、

$$Z_{rot} = 3Z_{rott} + 1Z_{rots}$$

となる。ただし、

$$Z_{rott} \equiv \sum_{l=0, even} (2l+1) \exp\left(-\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Ik_B T}\right)$$

$$Z_{rots} \equiv \sum_{l=odd} (2l+1) \exp\left(-\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Ik_B T}\right)$$

低温極限では 4. と同様にして求められる。やはり $l=1$ までをとると、 $Z_{rott} = 1, Z_{rots} = 3 \exp\left(-\frac{\hbar^2}{Ik_B T}\right)$ となるので、比熱は

$$C = \frac{3}{4} C_{rott} + \frac{1}{4} C_{rots} = 0$$

7. 核が spin triplet を作っている場合の分子と singlet を作っている場合の分子の数を考えてみる。partition function の比が個数比になることに注意する。即ち、

$$n \equiv \frac{N_{rott}}{N_{rots}} = \frac{3Z_{rott}}{1Z_{rots}}$$

十分高温では Z の中の exponent を Taylor 展開して一次項を取るという近似が許されるので、実際計算してみると $n = 3$ と見なせる。同様の計算を低温極限で行うと、 $n = 0$ となる。実際の実験では高温状態から冷却すると準静的過程にくらべ、急速に冷却することになる。するともはや平衡状態の統計力学は正しい結果を与える、実際には $n=3$ で「凍り付いたまま」低温状態に移行することになる。すると比熱は $C = \frac{3}{4} C_{rott} + \frac{1}{4} C_{rots}$ で計算できることになる。一方で低温極限では $n=0$ となるので、比熱は $C = C_{rots}$ で与えられることになる。 C_{rott} と C_{rots} は高次項を計算してみれば分かるように微妙に違うので、上の二通りの場合で比熱が異なることになる。

2001 年度

2001 年度 入学試験 一般教育科目

英語

[第 1 問] 次の文章は 1938 年に理論物理学者 Fritz London (1900-1954) が液体ヘリウムの超流動転移の物理的起源を解明した論文から抜粋したものである。これを読み、以下の設問 (i), (ii), (iii) に答えよ。

In his well-known papers, Einstein has already discussed a peculiar condensation phenomenon of the ‘Bose-Einstein’ gas; but in the course of time the degeneracy of the Bose-Einstein gas has rather got the reputation of having only a purely imaginary existence. Thus it is perhaps not generally known that this condensation phenomenon actually represents a discontinuity of the derivative of the specific heat (phase transition of third order). In the accompanying figure the specific heat (C_V) of an *ideal* Bose-Einstein gas is represented as a function of T/T_c where

$$T_c = \frac{\hbar^2}{2\pi m^* k_B} \left(\frac{n}{2.615} \right)^{2/3},$$

With m^* = the mass of a He atom and with the molar volume $\frac{N_l}{n} = 27.6 \text{ cm}^3$ one obtains $T_c = 3.09 \text{ K}$. For $T \ll T_c$ the specific heat is given by

$$C_V = 1.92R(T/T_c)^{3/2}$$

and for $T \gg T_c$ by

$$C_V = \frac{3}{2}R \left\{ 1 + 0.231 \left(\frac{T_c}{T} \right)^{3/2} + 0.046 \left(\frac{T_c}{T} \right)^3 + \dots \right\}$$

The entropy at the transition point T_c amounts to $1.28R$ independently of T_c .

(ア) 液体ヘリウムの λ (ラムダ) 点は実際にはむしろ 2 次の相転移に近いが、ボ - ス・AINSHUTAIN 統計における凝縮現象との関係を連想しない方が難しいくらいである。 λ 点の温度 (2.17 K) とそこでエントロピーの実験値 ($\sim 0.8 R$) はこの考えを支持している。ただし、液体ヘリウムを理想気体として扱うような現実に比べて単純化し過ぎたモデルの場合、高温で $C_V = (3/2)R$ となり、実験とは合わない。And also for low temperatures the ideal Bose-Einstein gas must, of course, give too great a specific heat, since it does not account for the gradual ‘freezing in’ of the Debye frequencies.

According to our conception the quantum states of liquid helium would have to correspond, so to speak, to both the states of the electrons and to Debye vibrational states of the lattice in the theory of metals. It would, of course, be necessary to incorporate (イ) this feature into the theory before it can be expected to furnish quantitative insight into the properties of liquid helium.

λ 点：液体ヘリウムの超流動転移点 R ：気体定数

Debye frequencies: デバイ周波数

(i) AINSHUTAIN の理論はこの London の論文が発表されるまで、どのように受け取られていたか簡単に説明せよ。

(ii) 下線部 (ア) を英訳せよ。

(iii) 下線部 (イ) の this feature とは何を指すか、説明せよ。

[第2問] 次の文章は、米国のある大学の附属実験施設のユーザー向け安全教育資料からの抜粋である。この英文を読んで以下の設問(i) (ii)に答えよ。なお、*印のついた単語は文末の単語表を参考にしてよい。

Welcome to SSSR*. We hope that your stay here will be enjoyable as well as safe. These guidelines are intended to call your attention to safety concerns which you may encounter at SSRL/SLAC* and to encourage you to be alert for and avoid hazardous situations.

Construction Safety

Construction sites often present unfamiliar hazards at SSRL. (ア) In general, you should detour around construction sites.

If your work requires you to enter a construction area, observe warning signs (HARD HAT* AREA, etc) and watch for hazards overhead and underfoot.

Cryogenic* Safety

The hazards from cryogenic substances are:

Extreme cold - Cryogenic liquid and their boil-off vapors can rapidly freeze skin and eye tissue. Wear insulated gloves and safety glasses when transferring liquid.

Expansion ratio - Use properly designed dewars,* transfer lines with properly designed safety devices in working order. Never trap cold liquid in a closed volume without a relief valve. As the liquid warms the pressure can increase 1000 fold.

Asphyxiation* - In small spaces (such as experimental hutches) ensure adequate ventilation. Boil-off vapors can displace air.

Electrical equipment safety

Normal safe laboratory electrical practice is expected of all staff and users at SSRL. The SSRL staff are available to assist with design and construction of equipment, particularly with regard to interlocks and other safety aspects. When working on equipment that could undergo unexpected energization or start up release energy that may cause injury to personnel, then application of the SLAC lock and tag program must take effect. (イ) This program is where the source of energy i.e. electrical pneumatic,* hydraulic* is locked out in a safe position by the person working on the device. This assures that control of the energy source remains in the hands of the person working on the equipment and that the hazard has been disabled.

Energy procedures: (ウ) If you encounter someone hung up on a live circuit, do not touch him! Either turn off the electrical source or use a non-conducting pole to break the connection. If the person is unconscious perform CPR* if necessary and call for help. After an electrical shock, keep the victim warm and quiet. Get medical help.

SSRL: Stanford Synchrotron Radiation Laboratory

SLAC: Stanford Linear Accelerator Center

hard hat: ハelmet

cryogenic: 低温の

dewar: デュワー (寒剤容器)

asphyxiation: 窒息

pneumatic: 空気圧の

hydraulic: 水圧 (油圧) の

CPR: 心肺蘇生

(i) 下線部(ア)(イ)(ウ)を和訳せよ。

(ii) 寒剤の取り扱いに関する以下の質間に 20 words 以上の英文で答えよ。

What kind of hazard is expected if cold liquid is trapped in a closed vessel without a relief valve?

数学

[第 1 問]

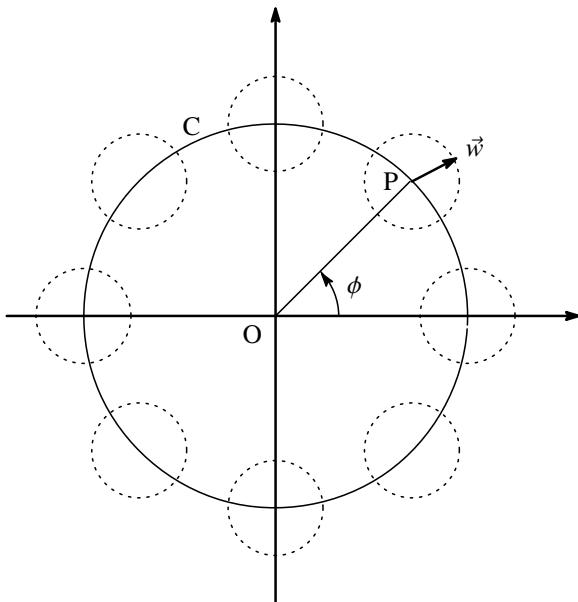
2×2 の実行列 : $A = \begin{pmatrix} 1 - \gamma \cos 2\phi & -\gamma \sin 2\phi \\ -\gamma \sin 2\phi & 1 + \gamma \cos 2\phi \end{pmatrix}$ に関する以下の設問に答えよ。ただし, $0 < \gamma < 1$ であるものとする。

(i) 行列 A の固有値 λ_+, λ_- を求めよ ($\lambda_+ > \lambda_-$ とする)。

(ii) λ_+ と λ_- に対応する規格化された固有ベクトル \vec{w}_+, \vec{w}_- を求めよ。

(iii) $U A U^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$ のように A を対角化する行列 U を求めよ。また, この行列 U が表す変換はどのような操作に対応しているか簡単に述べよ。

(iv) 下図のように, 単位円 C 上の点 $P(\cos \phi, \sin \phi)$ において上述の行列 A が定義されているものとし, この点 P を原点とした任意のベクトル \vec{w} を, 点 P を原点としたベクトル $A\vec{w}$ へ変換する。この写像によって, 図に点線で示された 8 つの円はどのように変形するか。答案用紙に簡単に図示して説明せよ。



[第 2 問]

三次元ラプラス方程式は、極座標を用いて

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right) U(r, \theta, \varphi) = 0, \quad \cdots (1)$$

$$\hat{L}^2 \equiv - \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \quad \cdots (2)$$

と表せる。また、球面調和関数 $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ は、

$$\hat{L}^2 Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad \cdots (3)$$

を満たす ($\ell = 0, 1, 2, \dots$; $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$)。

(i) ラプラス方程式の解 $U(r, \theta, \varphi)$ を $R_\ell(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ と変数分離したとき、 $R_\ell(r)$ の満たす微分方程式を求めよ。

(ii) 設問 (i) で得られた微分方程式から $R_\ell(r)$ の独立な二つの基本解 $A_\ell(r), B_\ell(r)$ を求めよ。

$U(r, \theta, \varphi)$ に対する境界条件が球面上で与えられれば、設問 (ii) で得られた $A_\ell(r)$ と $B_\ell(r)$ を用いて、

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [\alpha_{\ell m} A_\ell(r) + \beta_{\ell m} B_\ell(r)] Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad \cdots (4)$$

と展開し、境界条件に合うような係数 $\alpha_{\ell m}, \beta_{\ell m}$ を持つ解を求めることができる。具体的に、 $r = a$ 及び b (ただし $b > a > 0$ とする) での境界条件が

$$U(a, \theta, \varphi) = 0, \quad U(b, \theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi \quad \cdots (5)$$

と与えられているとき、以下の問いに答えよ。

(iii) $\sin \theta \cos \varphi$ を $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ を用いて表せ。ただし、 $Y_{00}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$, $Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$ (複号同順), $Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$ を用いてよい。

(iv) 境界条件 (5) と $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ の直交条件

$$\int d\Omega Y_{\ell' m'}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell' \ell} \delta_{m' m} \quad \cdots (6)$$

から係数 $\alpha_{\ell m}, \beta_{\ell m}$ を決定せよ。

英語 解答

[第 1 問]

全訳

AINSHULTAIN は彼の有名な論文で，“ボーズ-AINSHULTAIN” 気体の特殊な凝縮現象について既に議論しているが、やがて、ボーズ-AINSHULTAIN 気体の縮退は、単なる仮想的な存在でしかないと幾分言われるようになった。このように、この凝縮現象が本当は（3次の相転移である）比熱の微分係数の不連続性を表しているという事は、おそらく一般に知られていないのである。添付されている図で理想ボーズ - AINSHULTAIN 気体の比熱が T/T_c の関数として表されている。ここで、

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m^* k_B} \left(\frac{n}{2.615} \right)^{2/3}.$$

m^* はヘリウム原子の質量で、1モル当たりの体積を $\frac{N}{n} = 27.6 \text{ cm}^3$ として、 $T_c = 3.09[\text{K}]$ を得る。比熱は $T \ll T_c$ では、

$$C_V = 1.92R(T/T_c)^{3/2}$$

$T \gg T_c$ では、

$$C_V = \frac{3}{2}R \left\{ 1 + 0.231 \left(\frac{T_c}{T} \right)^{3/2} + 0.046 \left(\frac{T_c}{T} \right)^3 + \dots \right\}$$

と与えられる。転移点 T_c でのエントロピーは、 T_c に限り無く $1.28R$ に達する。

液体ヘリウムの λ (ラムダ) 点は実際にはむしろ 2 次の相転移に近いが、ボーズ-AINSHULTAIN 統計における凝縮現象との関係を連想しない方が難しいくらいである。 λ 点の温度 (2.17 K) とそこで得られるエントロピーの実験値 ($\sim 0.8R$) はこの考えを支持している。ただし、液体ヘリウムを理想気体として扱うような現実に比べて単純化し過ぎたモデルの場合、高温で $C_V = (3/2)R$ となり、実験とは合わない。そしてまた、理想ボーズ-AINSHULTAIN 気体は、低温でもちろん大変高い比熱を与えなければならない。デバイ周波数から徐々に「凍結していく」事を説明しないからである。

我々の考えからすると、液体ヘリウムの量子状態は、いわゆる、金属の理論においての結晶格子の電子状態とデバイ振動状態の両方に對応しなければならないであろう。もちろん、この特徴をその理論に組み入れる事が必要であり、そうして初めて金属の理論が液体ヘリウムの性質への定量的な洞察を与えると期待できるのである。

解答例

1. ボーズ - AINSHULTAIN 気体は単なる仮想的な存在でしかないと受け取られていた。
2. Actually the lambda point of liquid helium can be rather represented as phase transition of second order, but it would be hard not to associate it with a condensation phenomenon in Bose-Einstein statistics. The temperature at the lambda point and the experimental value of the entropy at the temperature support this idea. Though the model dealing liquid helium as ideal gas is much more simplified than actual case, one obtains $C_V = \frac{3}{2}R$ for high temperature, which doesn't correspond with the experimental value.
3. 液体ヘリウムの量子状態が金属の理論での電子状態と結晶格子のデバイ振動状態の両方に對応するという性質。

[第 2 問]

全訳

SSRL へようこそ。安全である事はもちろん楽しくこちらに滞在して頂ければと思います。これらのガイドラインにより、あなたが SSRL/SLAC で直面するかもしれない安全に関する事柄へ注意を向け、そして危険な状況を注意して回避して欲しいと思います。

工事における安全

工事現場ではしばしば SSRL で普段起こらない危険が引き起こされます。(ア) 一般に、工事現場の周りを迂回して下さい。もしあなたの仕事が工事現場に入る必要のあるものであれば、警告の表示(ヘルメット着用領域など)をよく見て、頭上や足元でも危険に注意して下さい。

低温についての安全

低温物質による危険は次のようなものです。

極低温……低温の液体とその沸騰した蒸気で急速に皮膚や目の神経組織が凍り得ます。液体を移動させる時は、断熱性の手袋と安全メガネをつけて下さい。

膨張率……適当に設計されたデュワーを用い、適当に設計された安全装置を稼動させて、導管を移動させて下さい。決して安全弁無しで密閉した容器に低温の液体を閉じ込めてはいけません。液体が温まるにつれて圧力は 1000 倍に上がり得ます。

窒息……(実験小屋といった) 小さな空間では十分な換気を確実に行って下さい。蒸発した気体が空気を追い出すことがあります。

電気機器の安全性

SSRL の全てのスタッフと利用者は、実験室で正常に、安全に電気を使用するように求められています。SSRL のスタッフは機器の設計や組み立て、特に運動装置や他の安全面で手伝う事が出来ます。予期せぬエネルギー供給、つまり、人に怪我をさせる恐れのあるエネルギー解放を起こしうる機器で仕事をするときは、SLAC ロックや追跡用電子タグプログラムを利用すると必ず効果があるでしょう。(イ) このプログラムは、エネルギー源、即ち、電気、空気圧、水圧、をその機器で仕事をしている人によって安全な位置に締め出すものです。これによりエネルギー源の制御は、その機器で働く人の手に留まり災害が起こらなくなるのです。

緊急時の手順 : (ウ) もし誰かが電流の通じている回路上で動けなくなっているのに出くわしたら、その人に触れてはいけません！ 電源を切るか、絶縁体の棒を用いて接続を切って下さい。もしその人が意識不明であったら、必要であれば心配蘇生法を施し、助けを呼んで下さい。電気的なショックの後は、被害者を暖かく静かにさせて下さい。お医者さんを呼びましょう。

解答例

1. 全訳参照
2. As the cold liquid warms the pressure in the vessel can increase 1000 fold. The high pressure may destroy the vessel, which will cause injury to personnel.

数学 解答

[第 1 問]

(i) A の固有値方程式は

$$\lambda^2 - \lambda + (1 - \gamma^2) = 0 \iff (\lambda - 1 - \gamma)(\lambda - 1 + \gamma) = 0 \iff \lambda = 1 \pm \gamma$$

よって $\lambda_+ = 1 + \gamma, \lambda_- = 1 - \gamma$.

(ii) 今, $\cos \phi \neq 0$ としておく。 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_+ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{cases} (1 - \gamma \cos 2\phi)x - \gamma \sin 2\phi \cdot y = (1 + \gamma)x \\ -\gamma \sin 2\phi \cdot x + (1 + \gamma \cos 2\phi)y = (1 + \gamma)y \end{cases} \implies x : y = (-\sin 2\phi) : (1 + \cos 2\phi)$$

よって

$$\vec{w}_+ = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos 2\phi)}} \begin{pmatrix} -\sin 2\phi \\ 1 + \cos 2\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \cos \phi} \begin{pmatrix} -2 \sin \phi \cos \phi \\ 2 \cos^2 \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}.$$

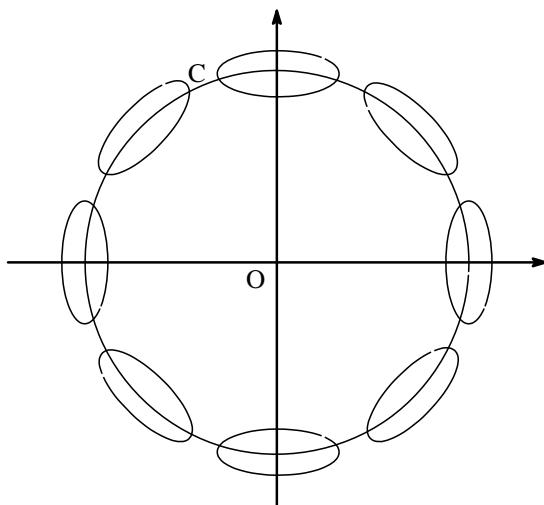
(途中で根号には絶対値をつけるべきだが、後の議論に支障はない。) 同様にして, $\vec{w}_- = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$.

一方で, $\cos \phi = 0$ のときも上で求めたベクトルが固有ベクトルになっている。

(iii) (ii) で求めた \vec{w}_+, \vec{w}_- を用いて, $U = {}^t(\vec{w}_-, \vec{w}_+) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$.

この行列が表す変換は、位置ベクトルを原点周りに $-\phi$ だけ回転させる操作に対応している。

(iv) 次の図のように、各々の円は C の動径方向に $(1 - \gamma)$ 倍、接線方向に $(1 + \gamma)$ 倍される。



[第 2 問]

$$(i) \quad R_\ell(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) を \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right) U(r, \theta, \varphi) = 0 に代入すると ,$$

$$\begin{cases} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r R_\ell(r) \right\} - R_\ell(r) \frac{\hat{L}^2}{r^2} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = 0 \\ \frac{1}{R_\ell(r)} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r R_\ell(r) \right\} - \frac{1}{Y_{\ell m}(\theta, \varphi)} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = 0 \\ \left\{ r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial}{\partial r} - \ell(\ell+1) \right\} R_\ell(r) = 0 \end{cases} \cdots (1)$$

これが $R_\ell(r)$ の満たす微分方程式である。

$$(ii) \quad R_\ell(r) = r^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n (c_0 \neq 0) とおいて (i) の答の式に代入すると , r^\lambda の係数について$$

$$\begin{aligned} [\lambda(\lambda-1) + 2\lambda - \ell(\ell+1)] c_0 &= 0 \\ \lambda^2 + \lambda - \ell(\ell+1) &= 0 \\ (\lambda - \ell)(\lambda + \ell + 1) &= 0 \\ \lambda &= \ell, -\ell - 1 \end{aligned}$$

また , $r^{\lambda+n}$ の係数について

$$\begin{aligned} (\lambda + n)(\lambda + n - 1) c_n + 2(\lambda + n) c_n - \ell(\ell + 1) c_n &= 0 \\ (\lambda + n - l)(\lambda + n + l + 1) c_n &= 0 \end{aligned}$$

よって

a) $\lambda = \ell$ のとき , $n(n+2\ell+1)c_n = 0$, ゆえに $n \neq 0, -2\ell - 1$ ならば $c_n = 0$

b) $\lambda = -\ell - 1$ のとき , $(n-2\ell-1)nc_n = 0$, ゆえに $n \neq 0, 2\ell + 1$ ならば $c_n = 0$

このことから独立な 2 つの基本解として

$$A_\ell(r) = r^\ell, B_\ell(r) = r^{-\ell-1}$$

が求められる。

(iii) 次のように表される。

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \phi &= \frac{1}{2} \sin \theta \cdot e^{i\phi} + \frac{1}{2} \sin \theta \cdot e^{-i\phi} \\ &= -\sqrt{\frac{2\pi}{3}} Y_{1,1}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{2\pi}{3}} Y_{1,-1}(\theta, \varphi) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \{-Y_{11}(\theta, \varphi) + Y_{1,-1}(\theta, \varphi)\} \end{aligned}$$

(iv) 直交条件より

$$\int d\Omega Y_{lm}(\theta, \varphi) U(b, \theta, \varphi) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{2\pi}{3}} & (\ell = 1, m = 1) \\ \sqrt{\frac{2\pi}{3}} & (\ell = 1, m = -1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

よって $U(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [\alpha_{\ell m} A_{\ell}(r) + \beta_{\ell m} B_{\ell}(r)] Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ を代入して、

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot a + \beta_{11} \cdot \frac{1}{a^2} = 0 \\ \alpha_{11} \cdot b + \beta_{11} \cdot \frac{1}{b^2} = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \\ \Rightarrow \alpha_{1,1} = -\frac{b^2}{b^3 - a^3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}}, \quad \beta_{1,1} = \frac{a^3 b^2}{b^3 - a^3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}}. \end{cases}$$

同様にして

$$\alpha_{1,-1} = \frac{b^2}{b^3 - a^3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}}, \quad \beta_{1,-1} = -\frac{a^3 b^2}{b^3 - a^3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}}.$$

その他の $\alpha_{\ell m}, \beta_{\ell m}$ については 0 である。

2001 年度 入学試験 物理専門科目

問題 1

ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \quad \cdots (1)$$

で記述される 1 次元調和振動子を考えよう。ここで \hat{p} は運動量演算子、 \hat{x} は位置演算子。この系は演算子

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}, \quad \cdots (2)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p} \quad \cdots (3)$$

を用いて調べることが出来る。以下の間に、解答に至る筋道を添えて答えよ。

1. (1) 式のハミルトニアンを a, a^\dagger を用いて表せ。また、 a, a^\dagger の物理的意味を述べよ。
2. 基底状態 $|0\rangle$ は関係 $a|0\rangle = 0$ を満たす。これを用いて座標表示の基底状態波動関数 $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ を求めよ。また、第一励起状態の波動関数 $\psi_1(x)$ を求めよ。ここでは規格化は考えなくてよい。
3. 基底状態 $|0\rangle$ に演算子 a^\dagger の指数関数をほどこして得られる状態

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^\dagger)|0\rangle, \quad \alpha \text{は任意の複素数} \quad \cdots (4)$$

はコヒーレント状態と呼ばれる。

- (i) コヒーレント状態が演算子 a の固有状態になっていることを示せ。
- (ii) コヒーレント状態の間の内積 $\langle \beta^* | \alpha \rangle$ を計算せよ。ただし $\langle \beta^* | = \langle 0 | \exp(\beta^* a)$ である。
- (iii) コヒーレント状態が n 番目の励起状態を含む確率を求めよ。
- (iv) コヒーレント状態について不確定性関係を調べよう。座標の期待値 $\langle \hat{x} \rangle \equiv \langle \alpha^* | \hat{x} | \alpha \rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle$ と座標の二乗の期待値 $\langle \hat{x}^2 \rangle \equiv \langle \alpha^* | \hat{x}^2 | \alpha \rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle$ を計算し、座標の不確定さの二乗

$$(\Delta x)^2 = \langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \rangle \quad \cdots (5)$$

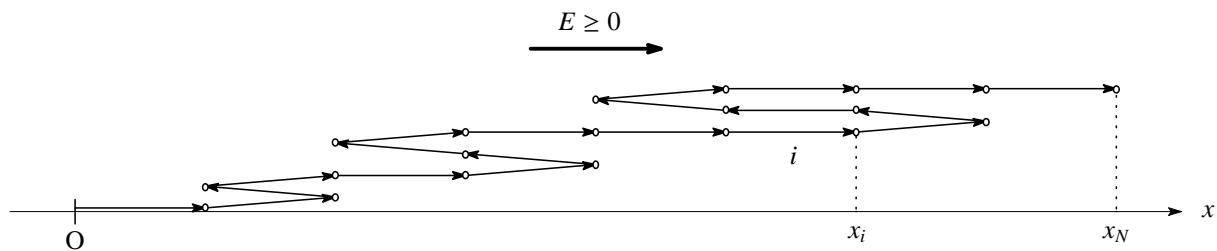
を求めよ。

- (v) 同様に運動量の不確定さの二乗 $(\Delta p)^2 = \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle$ を計算し、不確定性関係を確かめよ。

問題 2

図のように、矢印で表される要素 N 個が x 方向に繋がった鎖状分子を考える。各要素はそれぞれ長さ b で、矢印の先端に電荷 $Q (> 0)$ をもつ。各要素は、矢印が $+x$ 方向に向くか、 $-x$ 方向に向くかの二つの状態のみ取りうるものとする。これを、 i 番目要素の状態変数 μ_i を導入し、 $\mu_i = +1$ または -1 で表す。1 番目要素の矢印の始点が点 $O (x = 0)$ に固定されていて、大きさ E の電場 ($E \geq 0$) が $+x$ の向きにかけられているものとする。また、この鎖状分子は温度 T の熱浴に接しているものとする。

電荷は外部電場 E とだけ相互作用し、電荷間の相互作用は無視できるものとする。また、 x と垂直方向への分子の広がりは無視できるものとし、ボルツマン定数を k_B として、以下の問に、解答に至る道筋を添えて答えよ。



1. まず、 $E = 0$ の場合を考える。

- (i) 分子の端点の位置 x_N の関数としてこの分子のエントロピー S を求めよ。ただし、 $L = bN$ とし、 $N, x_N/b \gg 1$ であるとして、必要であれば Stirling の公式、すなわち、 $x \gg 1$ のとき

$$\log x! \sim x \log x - x + \dots$$

を用いよ。

- (ii) 端点位置を x_N に保つために、この端点に加えなければならない力 X と x_N との関係を導け。

- (iii) $N \gg x_N/b (\gg 1)$ の場合、 X と x_N との関係式は近似的にどのように与えられるか。 x_N を外力 X に対する分子の伸びとみたとき、この分子はどのような弾性体と言えるか。

2. 次に、 $E > 0$ の場合を考える。

- (i) E が与えられたもとでのこの鎖状分子の分配関数 Z_N を、変数 $A \equiv bQE/k_B T$ を用いて表せ。

- (ii) i 番目要素の μ_i の平均値 $\langle \mu_i \rangle$ を求めよ。

- (iii) この鎖状分子の長さの平均値 $\langle x_N \rangle$ について、電場が十分小さい極限、 $NA \ll 1$ 、での表式を求めよ。 $\langle x_N \rangle$ を外力の総和 NQE に対する分子の伸びとみたとき、前問 1 (c) との関連を論ぜよ。

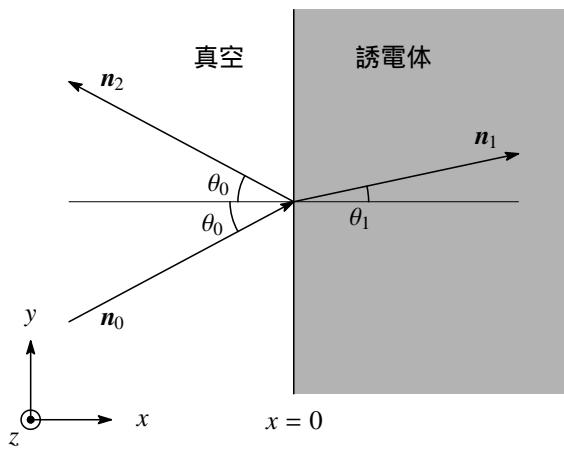
問題 3

角振動数 ω の単色電磁波が真空から誘電体に入射する場合を考える。Maxwell の方程式は次のように与えられる。

$$\nabla \cdot (\epsilon E) = 0, \quad \nabla \cdot B = 0,$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \nabla \times \left(\frac{B}{\mu}\right) = \frac{\partial(\epsilon E)}{\partial t}.$$

ここで E は電場, B は磁場, ϵ は誘電率, μ は透磁率を表す。図のように、3 次元空間において $x < 0$ が真空, $x > 0$ が誘電体であるとする。真空中の誘電率, 透磁率をそれぞれ ϵ_0, μ_0 で表し, 誘電体の誘電率は $\epsilon_1 (> \epsilon_0)$, 透磁率は μ_1 で与えられるものとする。電場, 磁場はそれぞれ, 入射波に対しては $E_0(r, t), B_0(r, t)$, 屈折波に対しては $E_1(r, t), B_1(r, t)$, 反射波に対しては $E_2(r, t), B_2(r, t)$ とする。以下の間に, 解答に至る筋道を添えて答えよ。



1. 真空と誘電体の境界 $x = 0$ において,

$$E_{0,t}(0, y, z, t) + E_{2,t}(0, y, z, t) = E_{1,t}(0, y, z, t) \quad \cdots (1)$$

$$\epsilon_0 [E_{0,x}(0, y, z, t) + E_{2,x}(0, y, z, t)] = \epsilon_1 E_{1,x}(0, y, z, t) \quad \cdots (2)$$

$$B_{0,t}(0, y, z, t) + B_{2,t}(0, y, z, t) = B_{1,t}(0, y, z, t) \quad \cdots (3)$$

が成立する。ここで添字の t は各ベクトルの真空と誘電体の境界に平行な成分, 添字の x は x 成分を表す。

(i) (1) 式が成立することを示せ。

(ii) 誘導電荷密度 ρ と電場 E の間には関係式 $\epsilon_0 \nabla \cdot E = \rho$ が成立する。誘電体の表面 ($x = +0$) における電荷の面密度 $\sigma(y, z, t)$ を $E_{1,x}(0, y, z, t)$, ϵ_0 , ϵ_1 を用いて表せ。

2. 入射波の方向が xy 面にあるように座標軸をとり, x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ で表す。入射波の進行方向の単位ベクトルを $n_0 = \hat{x} \cos \theta_0 + \hat{y} \sin \theta_0$ ($0 < \theta_0 < \pi/2$) とし, 入射波の磁場 $B_0(r, t)$ が z 方向に直線偏光している場合,

$$B_0(r, t) = \hat{z} B_0 \exp[i(k_0 n_0 \cdot r - \omega t)]$$

を考える。入射波の電場は,

$$E_0(r, t) = E_0 \exp[i(k_0 n_0 \cdot r - \omega t)]$$

と表す。

- (i) k_0 を $\omega, \epsilon_0, \mu_0$ を用いて表せ。
- (ii) 入射波の電場の振幅 E_0 を $B_0, \hat{z}, k_0, n_0, \omega$ を用いて表せ。

3. 屈折波, 反射波の磁場をそれぞれ,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) &= \hat{z}B_1 \exp[i(k_0 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{r}, t) &= \hat{z}B_2 \exp[i(k_0 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)]\end{aligned}$$

と表す。 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ はそれぞれ屈折波, 反射波の進行方向の単位ベクトルであり, これらを

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 &= \hat{x} \cos \theta_1 + \hat{y} \sin \theta_1, \\ \mathbf{n}_2 &= -\hat{x} \cos \theta_0 + \hat{y} \sin \theta_0\end{aligned}$$

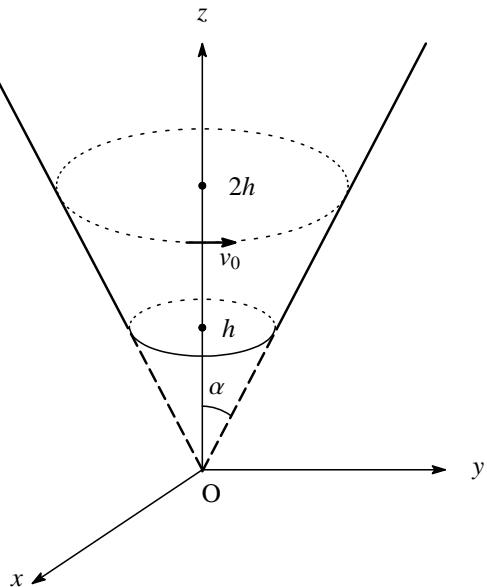
と表す。

- (i) (3) 式を用いて入射角 θ_0 と屈折角 θ_1 の関係式を求めよ。
- (ii) (1) 式と (3) 式を用いて B_1, B_2 を求めよ。答は $k_0, k_1, \theta_0, \theta_1, B_0$ を用いて表せ。
- (iii) $\theta_0 + \theta_1 = \pi/2$ のとき, 何が起こるか。

問題 4

図のように頂角が α の円錐を切り、鉛直軸に沿って逆さにして作った漏斗状の滑らかな面がある。切り口の高さを h として、この斜面上の質量 m の質点の運動を考える。以下の間に、解答に至る筋道を添えて答えよ。

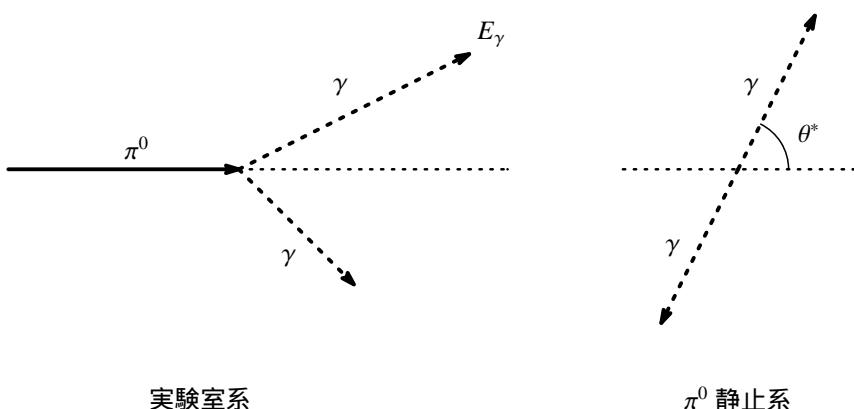
1. 鉛直方向に z 軸をとり、質点の座標を円柱座標 (z, θ) で表したとき、質点の斜面上の運動のラグランジアンを求めよ。ただし、重力の加速度定数を g とする。
2. この系の保存量を求めよ。
3. 質点が高さ $2h$ の斜面上で水平に初速度 v_0 で運動を始めたとする。初速度の違いによる質点の運動の違いについて述べよ。



問題 5

パイ中間子に関連する以下の間に、解答に至る筋道を添えて答えよ。

1. 陽子ビームを水素ターゲットに当てて中性パイ中間子 π^0 を生成するための、陽子ビーム運動エネルギーのしきい値を求めよ。但し、陽子の質量は $940 \text{ MeV}/c^2$ 、 π^0 の質量 (m_π) は $135 \text{ MeV}/c^2$ とする。(MeV は 10^6 電子ボルト)
2. π^0 は 2 つの光子 (γ) に崩壊し、 γ の角分布は π^0 の静止系で等方的であることが知られている。
 - (i) エネルギー E_π の π^0 からの崩壊における γ のエネルギー E_γ を、 π^0 の静止系での γ の放出角 θ^* (図参照) で表し、 E_γ の分布が一様であることを示せ。
 - (ii) エネルギー 30 GeV の π^0 の崩壊において、2 光子の間の角度の最小値を求めよ (GeV は 10^9 電子ボルト)
 - (iii) 一般に、高エネルギー π^0 ($E_\pi \gg m_\pi c^2$) の崩壊で 2 光子の間の角度分布は、その最小値の近くに鋭いピークを持つ。この理由を説明せよ。
3. 重水素に負電荷のパイ中間子 π^- を吸収させることによりパイ中間子原子が作られ、これが 2 個の中性子となる反応 ($\pi^- + d \rightarrow n + n$) が実際に観測されている。
 - (i) π^- のパリティを P_{π^-} としたとき、この反応の始状態の全角運動量とパリティを求めよ。ただし、この反応は π^- がパイ中間子原子の基底軌道に落ちてから起こるとし、また、 π^- のスピンは 0、重陽子は陽子と中性子の 3S_1 の束縛状態であり、陽子と中性子のパリティは等しいことが知られているものとする。
 - (ii) 中性子はスピン $1/2$ のフェルミ粒子であることから、終状態の全スピンと軌道角運動量の間にどのような関係があるかを述べよ。
 - (iii) 全角運動量が保存されることから導かれる、終状態がとりうる可能な全スピンと軌道角運動量の組み合わせを全て記せ。
 - (iv) これらより、 π^- のパリティを決定せよ。



問題 6

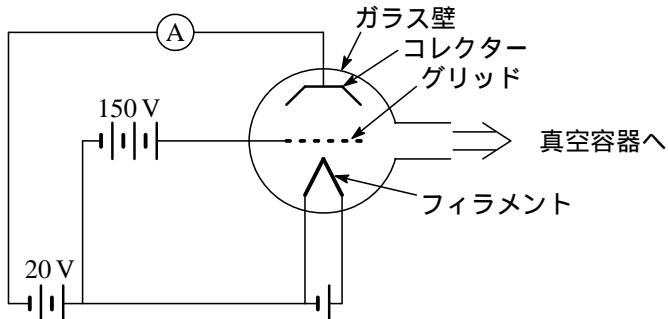
1. 以下の間に、解答に至る筋道を添えて答えよ。

(i) ある気体の圧力が 1.0×10^{-5} Pa, 温度は 0°C の状態にある。この気体 1.0cm^3 中に気体分子は何個あるか。ここで、気体は理想気体とみなせるとし、1 気圧を 1.0×10^{-5} Pa, アボガド数を 6.0×10^{23} 個, 標準状態 (0°C, 1 気圧) の理想気体 1 モルの体積を $22l$ とする。

(ii) 加速された電子がこの気体分子に衝突すると、電子の運動エネルギーによって分子は電離してイオンとなる。この気体中で長さ 1.0cm を持つ領域に電流密度 1.0mA/cm^2 の電流が流れているとき、単位体積あたり 1 秒間に何個のイオンが生成されるか。ここで、この電子の衝突による分子の電離断面積を $3.0 \times 10^{-16}\text{cm}^2$ とし、素電荷を $1.6 \times 10^{-19}\text{C}$ とする。また、電流の流れている体積内の圧力は常に一定で、生成されたイオンは直ちに遠方に飛び去り、単位体積内では電子と気体分子の衝突は最大 1 回までとする。

2. 高真空中で使用する電離真空計では、電離させた残留気体分子によるイオン電流を測定し、その電流値を真空中に換算している。

(i) 次の図は、電離真空計の模式図である。この真空計の動作原理を図中のフィラメント、グリッド、コレクターという言葉を使用して説明せよ。



(ii) 表には、ある電離真空計において、希ガスの真空中 1.0×10^{-6} Pa のとき検出されるイオン電流値が、希ガス原子の種類別に示されている。このように希ガス原子の種類によってイオン電流値が異なる理由を定性的に説明せよ。

気体	He	Ne	Ar	Kr	Xe
イオン電流値 (nA)	0.1	0.3	1.3	1.7	2.4

(iii) 電離真空計では、フィラメントから放出された電子がグリッドに衝突する際に発生する軟 X 線が原因となってイオン電流以外の電流が流れ、正確な真空中度が測定できない。どのような電流が発生するかを述べよ。また、この効果を減少させ、高い真空中度まで測定できるようにするために、フィラメント、グリッド、コレクターのうちどれかを工夫すればよい。どのようにすればこの効果を減少させることができると述べよ。

3. 電離真空計はロータリーポンプで排気できる程度の真空中では通常使用しない。その真空中度で使用できる真空計をひとつ例にあげて、その動作原理を簡単に説明せよ。

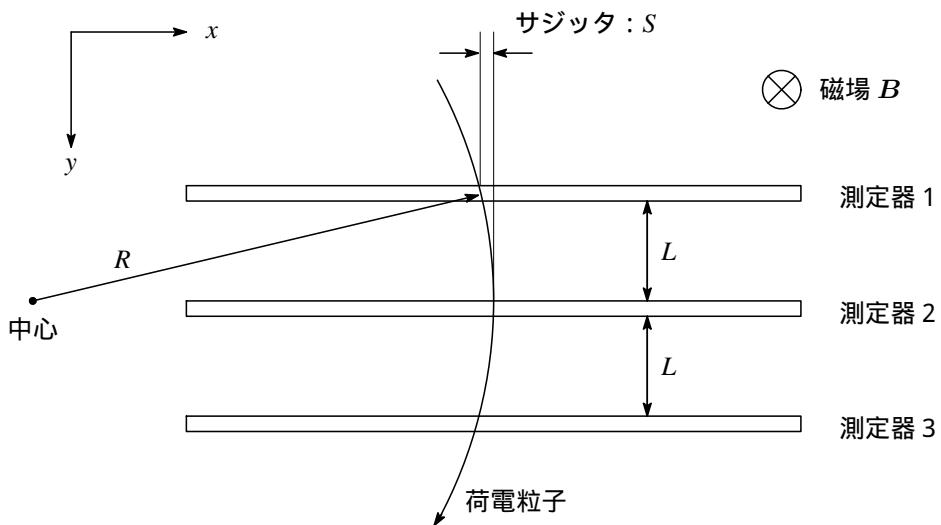
問題 7

電子と同じ電荷 e を持ち運動量 p [GeV/c] を持つ素粒子が一様磁場 B [Tesla] のもとで円運動をする。円運動の半径 R [m] は

$$R = \frac{p}{0.3B} \quad \cdots (1)$$

に従う。

図のような装置を考える。磁場 B は紙面に垂直方向を向いており、3 枚の平板状の位置検出器を、図の紙面では垂直に、等間隔 L で設置してある。矢印のついている円弧は荷電素粒子の軌跡である。なお、 L は円運動の半径 R に比べて十分小さい場合を考える。このような装置をマグネティック・スペクトロメータと呼んでいる。以下で、各位置検出器は有限な位置分解能を持つとして運動量測定について考えるが、運動量の測定誤差を δp とした場合に $\delta p/p$ を運動量分解能と定義する。以下の間に、解答に至る筋道を添えて答えよ。



1. よりよい運動量分解能を得るためにには強い磁場、測定器のより広い間隔、よりよい位置分解能が必要であることを直観的に説明せよ。また、運動量が小さい場合と大きい場合とどちらが運動量分解能が高いか答えよ。

2. 以上の傾向を定量的に調べるために以下の設問に答えよ。なおここでは簡略化のため、荷電粒子は x - y 面内に入射し、円運動の中心は図のように 2 の測定器面上にあるとする。まず、図の S をサジッタと呼ぶ。
 - (i) サジッタ S を L と R の関数で表せ。 $L \ll R$ であることを考慮して近似を用いること。さらに、(1) 式を用いてサジッタ S を L と p の関数で表せ。
 - (ii) サジッタに誤差 δS があると考え、 δp を $L, B, p, \delta S$ の関数で表せ。
 - (iii) この誤差の原因是測定器による誤差である。測定器 1, 2 および 3 は、等しい z 座標を持つ面上において x 方向のみ測定するとし、各測定器の位置分解能 (x 方向) は同じ値 σ を持つと仮定して、サジッタ S の誤差 δS を σ の関数で表せ。
 - (iv) 以上により、 $\delta p/p$ を L, B, p, σ の関数で表せ。

3. 現実に、マグネティック・スペクトロメータを設計する際に、上記以外の要因も含めて、どのような点に留意せねばならないかを論ぜよ。

問題 8

1. 図 (a) のような幅 L , 高さ U_0 の箱形ポテンシャル障壁に, 左側から入射するエネルギー E ($U_0 > E > 0$) を持つ粒子の 1 次元的な運動を考える。以下の間に, 解答に至る道筋を添えて答えよ。なお, 入射粒子の波動関数を e^{ikx} (ただし, $\hbar^2 k^2 / 2m = E$, $k > 0$, m は粒子の質量) とする。電子間相互作用は無視してよい。

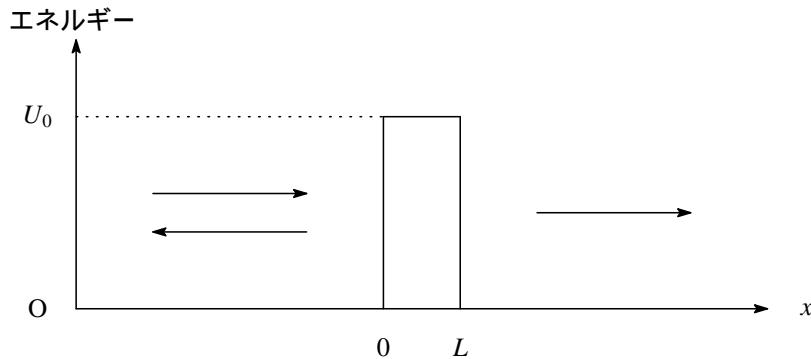


図 (a)

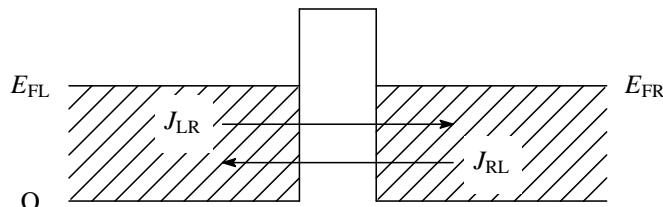


図 (b)

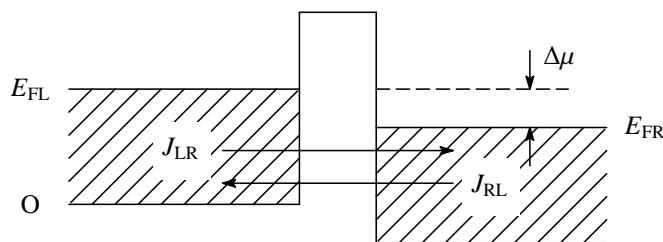


図 (c)

(i) $x < 0$, $0 \leq x \leq L$, $x > L$ の各領域における粒子の波動関数をそれぞれ $\phi_L(x)$, $\phi_R(x)$, $\phi_{>L}(x)$ として, その一般的な関数形を書け。例えば, $Ae^{ikx} + \dots$ のように, 適当な係数 A, \dots を使って記述してよい。

(ii) 関数 $\phi_L(x)$, $\phi_R(x)$, $\phi_{>L}(x)$ が満たすべき境界条件を書け。

(iii) 電荷 $-e$ を持つ電子が右方へ入射するときに, 障壁の透過率を T として, 単位時間当たりに障壁を透過する電子の電荷の総量 (電流) j を求めよ。但し, エネルギー E を持つ電子は単位長さ当たり n の密度を持つとする。

2. この系に電子を詰めた場合の電気伝導を考えよう。なお, 全電子の密度を N , 電子のスピン縮重重度を 2 とする。

(i) 先ず, 1 次元自由電子気体の, エネルギー E に対する単位長さ当たりの状態密度 $D(E)$, 及び絶対零度

におけるフェルミ速度 v_F を , m , h (プランク定数) , N を用いて表せ。

- (ii) 図 (a) に示した , 障壁がある系におけるエネルギー分布を図 (b) のように表す。すなわち , 障壁の左側と右側の電子のフェルミ・エネルギーを , それぞれ E_{FL} , E_{FR} , 温度 T における分布関数をそれぞれ $f_L(E, T)$, $f_R(E, T)$ とする。なお , 電子気体は低温で縮退しているものとする。このとき , 1 次元導体を左から右へ流れる全電流 J は , 障壁を境として左から右に流れ込む電子による全電流 J_{LR} と , 右から左に流れ込む電子による全電流 J_{RL} の差 ($J = J_{LR} - J_{RL}$) として与えられる。 J_{LR} は

$$J_{LR} = -\frac{e}{2} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2E}{m}} D(E) f_L(E, T) [1 - f_R(E, T)] T(E) dE \quad \cdots (1)$$

で与えられることを説明せよ。

- (iii) 図 (c) に示すように , 障壁の両端間に僅かの電圧 ΔV を加えて左側の電子のフェルミ・エネルギーを右側より $\Delta\mu$ ($\ll E_{FL} \approx E_{FR}$) だけ高くすると , 全電流が ΔJ だけ発生する。温度を絶対零度として ΔJ を計算し , $G = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta J}{\Delta V}$ で与えられる電気伝導度が

$$G = \left(\frac{2e^2}{h} \right) T(E_{FL})$$

と表せることを示せ。なお , $\Delta\mu$ と ΔV の間には $\Delta\mu = -e\Delta V$ の関係がある。

3. 上記のような導体系を作るために , 材料として Fe と n 形 Si を準備した。しかし , 両材料は見かけが似ているので区別がつかなくなってしまった。物理的な測定によって , 両者を見分けたい。Fe , n 形 Si を区別するために行うべき実験を 2 つ挙げよ。(理由も添えて , 各 40 字以内で)。ただし , 比重 , 硬度 , 光沢 , 化学反応の違いは除く。

問題 9

1. 神経細胞の膜電位は、細胞膜をはさむ細胞内外のイオン濃度差および細胞膜の選択的イオン透過性に依存している。

- (i) 1mol の溶質が細胞内へと細胞膜を通過する際の自由エネルギー変化 ΔG は

$$\Delta G = -2.3RT \log_{10}(C_o/C_i) + zFV$$

で表される。ここで $R = 2.0 \times 10^{-3}$ kcal/K·mol は気体定数、 T は K で表した絶対温度、 C_o は細胞外部での溶質の濃度、 C_i は細胞内部での溶質の濃度、 z は溶質のもつ電荷の価数、 $F = 23$ kcal/V·mol はファラデー定数、 V はボルトで表した膜電位（細胞内電位）である。この式より、イオンの平衡電位を表すネルンストの式を導け。

- (ii) 静止状態において、神経細胞の細胞内電位は細胞外に対して負である。これは静止時の細胞膜が、或るイオン種に対して特に高い透過性をもつからである。下の表は、ヤリイカの巨大軸索における細胞内外の主なイオン種の濃度を示したものであるが、これを参照し、細胞膜が上記のイオン種のみを通すとした場合、その膜電位（細胞内電位）をネルンストの式を用い求めよ。ただし温度は 20°C とせよ。

イオン種	細胞内 (millimol/l)	細胞外 (millimol/l)
K ⁺	400	20
Na ⁺	50	440
Cl ⁻	51	560

- (iii) 活動電位（神経インパルス）の発生時においては、膜電位は一過性に正となる。この際起こる膜のイオンの透過性の一連の変化について、その分子機構を含め説明せよ。

- (iv) 神経インパルスは通常軸索基部において発生し軸索先端部へ向かい一方向に伝播する。途中から反対方向へと逆行しない理由を述べよ。

2. ショウジョウバエの eyeless 遺伝子の機能欠失変異体では眼の形成が起らなくなる。

- (i) このことは eyeless 遺伝子が眼の形成に必要であることを示している。さらにこの遺伝子が眼の形成に十分な働きをもつかを調べるにはどのような実験を行えばよいかを述べよ。

- (ii) 上記の実験から eyeless 遺伝子は眼の形成に必要かつ十分な活性をもつことが知られている。またこの遺伝子はある種の転写因子をコードすることが分かっている。以上のことから eyeless 遺伝子の働きについて推察せよ。

問題 1 解答

$$1. \quad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p}, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p}$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a), \quad \cdots (1)$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a) \quad \cdots (2)$$

であるから、これらを与えたハミルトニアンに代入して、

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2 \\ &= \frac{1}{2m} \left[i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a) \right]^2 + \frac{m\omega^2}{2} \left[\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a) \right]^2 \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} (aa^\dagger + a^\dagger a). \end{aligned} \quad \cdots (3)$$

交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ より従う a と a^\dagger の間の交換関係：

$$[a, a^\dagger] = 1 \iff aa^\dagger = 1 + a^\dagger a \quad \cdots (4)$$

を使えば、ハミルトニアンは

$$H = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + a^\dagger a \right) \quad \cdots (5)$$

の形に書かれる。

a, a^\dagger の物理的意味については次の通り。調和振動子の $n (= 1, 2, \dots)$ 番目のエネルギー固有値を E_n 、これに属する固有状態を $|n\rangle$ としたとき、 $|n\rangle$ に a を作用させた状態 $a|n\rangle$ は、固有値 $E_n - \hbar\omega$ を持った調和振動子のエネルギー固有状態となり、また $|n\rangle$ に a^\dagger を作用させた状態 $a^\dagger|n\rangle$ は、固有値 $E_n + \hbar\omega$ を持った調和振動子のエネルギー固有状態となる。このように調和振動子のエネルギー固有状態に作用したとき、エネルギー $\hbar\omega$ を持つ量子をそれぞれ消滅、生成する意味で、 a, a^\dagger はそれぞれ消滅演算子、生成演算子と呼ばれる。また、ハミルトニアンの表式 (5) に現れた $a^\dagger a \equiv \hat{N}$ は個数演算子と呼ばれ、 $\hat{N}(a^\dagger)^n |0\rangle = n(a^\dagger)^n |0\rangle$ が成り立つことから、 \hat{N} の固有値は調和振動子の基底状態の上に励起しているエネルギー量子 $\hbar\omega$ の数を表す。

$$2. \quad a|0\rangle = 0 \text{ より } \langle x|a|0\rangle = 0。これを計算して、$$

$$\begin{aligned} &\left\langle x \left| \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right| 0 \right\rangle = 0 \\ &\iff \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right) \right] \psi_0(x) = 0 \\ &\iff \left(\frac{m\omega}{\hbar} x + \frac{d}{dx} \right) \psi_0(x) = 0. \end{aligned} \quad \cdots (6)$$

これより基底状態の波動関数は

$$\psi_0(x) = \text{Const.} \exp \left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 \right) \quad \cdots (7)$$

と書ける⁵。

また第一励起状態は $|1\rangle \propto a^\dagger |0\rangle$ として得られるから、規格化を考えなければ第一励起状態の波動関数は

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \langle x|1\rangle \propto \left\langle x \left| \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right| 0 \right\rangle \\ &= \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right) \right] \psi_0(x) \\ &= \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) = \text{Const.} x \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)\end{aligned}\quad \cdots (9)$$

と求められる⁶。

3.

(i) $|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle$ の両辺に左から a を作用させる：

$$\begin{aligned}a|\alpha\rangle &= a \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left[(a^\dagger)^n a + n (a^\dagger)^{n-1} \right] |0\rangle \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^{n-1}}{(n-1)!} |0\rangle = \alpha \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle \\ &= \alpha |\alpha\rangle.\end{aligned}\quad \cdots (12)$$

従ってコヒーレント状態は消滅演算子 a の固有値 α に属する固有状態である。

(ii) $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ の両辺に第 n 励起状態のケットを作用させて，

$$\langle n|a|\alpha\rangle = \langle n|\alpha|a\rangle \iff \sqrt{n+1} \langle n+1|\alpha\rangle = \alpha \langle n|\alpha\rangle. \quad \cdots (13)$$

これより，

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} \frac{\alpha}{\sqrt{n-2}} \cdots \frac{\alpha}{\sqrt{1}} \langle 0|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle \quad \cdots (14)$$

であるが，ここに

$$\langle 0|\alpha\rangle = \left\langle 0 \left| \exp(\alpha a^\dagger) \right| 0 \right\rangle = \left\langle 0 \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} \right| 0 \right\rangle = \langle 0|1|0\rangle = 1 \quad \cdots (15)$$

⁵ 規格化するならば， $\langle 0|0\rangle = \int |\psi_0(x)|^2 = 1$ より Const. を求めればよい。結果は

$$\psi_0(x) = (\pi^{1/4} \sqrt{\eta})^{-1} \exp[-x^2/(2\eta^2)] \quad \cdots (8)$$

と書ける。ここに調和振動子の長さのスケールを決めるパラメータ $\eta \equiv \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ を導入した。

⁶ 先程の η を用いれば規格化した形で

$$\psi_1(x) = (\pi^{1/4} \sqrt{\eta^{3/2}/\sqrt{2}})^{-1} x \exp[-x^2/(2\eta^2)] \quad \cdots (10)$$

と書ける。一般に第 n 励起状態の波動関数 $\psi_n(x)$ は， $\xi \equiv x/\eta$ ， n 次のエルミート多項式 $H_n(\xi)$ を用いて，規格化した形で

$$\psi(\xi) = (2^n n!)^{-1/2} [m\omega/(\pi\hbar)]^{1/4} \exp(-\xi^2/2) H_n(\xi) \quad \cdots (11)$$

と書ける。 $H_0(\xi) = 1$ ， $H_1(\xi) = 2\xi$ ， $H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$ ，…。

であるから、 $\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$ となる。従ってフォック状態の基底 $\{|n\rangle\}_{n=0,1,2,\dots}$ による $|\alpha\rangle$ の展開は、

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\alpha\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \cdots (16)$$

となる。同様にして $\langle \beta^*| = \sum_m \frac{(\beta^*)^m}{\sqrt{m!}} \langle m|$ であるから、これらの内積は、

$$\langle \beta^*|\alpha\rangle = \sum_{n,m} \frac{(\beta^*)^m}{\sqrt{m!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle m|n\rangle = \sum_n \frac{(\beta^*\alpha)^n}{n!} = \exp(\beta^*\alpha) \quad \cdots (17)$$

と計算される。

(iii) $|\alpha\rangle$ の規格化を考えると、3-(b) の解答で $\beta = \alpha$ として、 $\langle \alpha|\alpha\rangle = \exp(|\alpha|^2)$ であるから、規格化されたフォック状態は

$$|\alpha_{normal}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\exp(|\alpha|^2)}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

と表される。従って、コヒーレント状態が第 n 励起状態を含む確率 $|P_n|$ は、

$$P_n = |\langle n|\alpha_{normal}\rangle|^2 = \frac{1}{\exp(|\alpha|^2)} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad \cdots (18)$$

で与えられる。

(iv) 座標の期待値 $\langle \hat{x} \rangle$ 、座標の二乗の期待値 $\langle \hat{x}^2 \rangle$ はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle &= \langle \alpha^* | \hat{x} | \alpha \rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle = \left\langle \alpha^* \left| \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a) \right| \alpha \right\rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha^* + \alpha), \end{aligned} \quad \cdots (19)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle &= \langle \alpha^* | \hat{x}^2 | \alpha \rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle = \left\langle \alpha^* \left| \frac{\hbar}{2m\omega} (a^\dagger + a)^2 \right| \alpha \right\rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle \alpha^* \left| \left((a^\dagger)^2 + a^\dagger a + (1 + a^\dagger a) + a^2 \right) \right| \alpha \right\rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left[(\alpha^*)^2 + 2|\alpha|^2 + \alpha^2 + 1 \right] \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left[(\alpha^* + \alpha)^2 + 1 \right] \end{aligned} \quad \cdots (20)$$

と計算される。(20) の計算途中で交換関係 (4) を使った。これらより座標の不確定さ Δx の二乗は

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &= \langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left[(\alpha^* + \alpha)^2 + 1 \right] - \left[\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha^* + \alpha) \right]^2 \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \end{aligned} \quad \cdots (21)$$

と求められる。

(v) 前問 (d) と同様にして、運動量の期待値 $\langle \hat{p} \rangle$ 、運動量の二乗の期待値 $\langle \hat{p}^2 \rangle$ はそれぞれ、

$$\begin{aligned}\langle \hat{p} \rangle &= \langle \alpha^* | \hat{p} | \alpha \rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle = \left\langle \alpha^* \left| i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a) \right| \alpha \right\rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle \\ &= i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\alpha^* - \alpha),\end{aligned}\cdots (22)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{p}^2 \rangle &= \langle \alpha^* | \hat{p}^2 | \alpha \rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle = \left\langle \alpha^* \left| -\frac{m\hbar\omega}{2} (a^\dagger - a)^2 \right| \alpha \right\rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle \\ &= -\frac{m\hbar\omega}{2} \left\langle \alpha^* \left| \left((a^\dagger)^2 - a^\dagger a - (1 + a^\dagger a) + a^2 \right) \right| \alpha \right\rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle \\ &= -\frac{m\hbar\omega}{2} \left[(\alpha^*)^2 - 2|\alpha|^2 + \alpha^2 - 1 \right] \\ &= \frac{m\hbar\omega}{2} \left[1 - (\alpha^* - \alpha)^2 \right]\end{aligned}\cdots (23)$$

と計算される。これらより、運動量の不確定さ Δp の二乗は

$$\begin{aligned}(\Delta p)^2 &= \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 \\ &= \frac{m\hbar\omega}{2} \left[1 - (\alpha^* - \alpha)^2 \right] - \left[i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\alpha^* - \alpha) \right]^2 \\ &= \frac{m\hbar\omega}{2}\end{aligned}\cdots (24)$$

と求められる。以上より、不確定性関係は

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \iff \Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}\cdots (25)$$

となり、コヒーレント状態は、座標とその正準共役な運動量について、両者の不確定性の積を最小にする状態であることが判る。(つまり古典的描像に最も近い。)

問題 2 解答

$+x$ 方向を向く要素の個数を N_+ , $-x$ 方向を向く要素の個数を N_- とする。

$$N = N_+ + N_-, \quad x_N = b(N_+ - N_-) \quad \cdots (1)$$

$$\text{より } N_+ = \frac{bN + x_N}{2b} = \frac{N}{2} \left(1 + \frac{x_N}{L}\right), \quad N_+ = \frac{bN - x_N}{2b} = \frac{N}{2} \left(1 - \frac{x_N}{L}\right) \quad \cdots (2)$$

1. $E = 0$ の場合

(i) $N, |x_N|/b \gg 1$ より $N_+, N_- \gg 1$ として Stirling の公式を用いると

$$S = k_B \log W, \quad W = \frac{N!}{N_+! N_-!} \quad \cdots (3)$$

$$\begin{aligned} S &= k_B (\log N! - \log N_+! - \log N_-!) \\ &\simeq k_B (N \log N - N - N_+ \log N_+ + N_+ - N_- \log N_- + N_-) \\ &= k_B (N \log N - N_+ \log N_+ - N_- \log N_-) \\ &= k_B \left[N \log N - \frac{N}{2} \left(1 + \frac{x_N}{L}\right) \log \left\{ \frac{N}{2} \left(1 + \frac{x_N}{L}\right) \right\} - \frac{N}{2} \left(1 - \frac{x_N}{L}\right) \log \left\{ \frac{N}{2} \left(1 - \frac{x_N}{L}\right) \right\} \right] \\ &= k_B \left[N \log N - \frac{N}{2} \left(1 + \frac{x_N}{L}\right) \log \frac{N}{2} - \frac{N}{2} \left(1 + \frac{x_N}{L}\right) \log \left(1 + \frac{x_N}{L}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{N}{2} \left(1 - \frac{x_N}{L}\right) \log \frac{N}{2} - \frac{N}{2} \left(1 - \frac{x_N}{L}\right) \log \left(1 - \frac{x_N}{L}\right) \right] \\ &= k_B N \left[\log 2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_N}{L}\right) \log \left(1 + \frac{x_N}{L}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_N}{L}\right) \log \left(1 - \frac{x_N}{L}\right) \right] \end{aligned} \quad \cdots (4)$$

(ii) $E = 0$ なので、内部エネルギー U は分子の形状によらない。Helmholtz の自由エネルギー $F = U - TS$, $dF = -SdT + Xdx_N$ より外力 X を求めると次のようになる。

$$X = \left. \frac{\partial F}{\partial x_N} \right|_T = -T \left. \frac{\partial S}{\partial x_N} \right|_T \quad \cdots (5)$$

$$= k_B T N \left[\frac{1}{2L} \log \left(1 + \frac{x_N}{L}\right) + \frac{1}{2L} - \frac{1}{2L} \log \left(1 - \frac{x_N}{L}\right) - \frac{1}{2L} \right]$$

$$= \frac{k_B T}{2b} \log \frac{1 + x_N/L}{1 - x_N/L} \quad \cdots (6)$$

(iii) $x_N/L \ll 1$ のとき

$$X = \frac{k_B T}{2b} \left[\log \left(1 + \frac{x_N}{L}\right) - \log \left(1 - \frac{x_N}{L}\right) \right] \simeq \frac{k_B T}{2b} \left(\frac{x_N}{L} + \frac{x_N}{L} \right) = \frac{k_B T}{Nb^2} x_N \quad \cdots (7)$$

関係式 (7) はこの分子が Hooke の法則（外力 X が変位 x_N に比例する）に従うゴム状の弾性体であることを表している。

2. $E > 0$ の場合

(i) $x_i = bm_i$ とする。

$$\sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \mu_j = \sum_{i=1}^N (N+1-i)\mu_i \quad \cdots (8)$$

より、エネルギーを $H(= U)$ として

$$-\beta H = \frac{bQE}{k_B T} \sum_{i=1}^N m_i = A \sum_{i=1}^N (N+1-i)\mu_i \quad \cdots (9)$$

したがって、分配関数 Z_N は

$$Z_N = \sum_{\mu_i=\pm 1} e^{-\beta H} \quad \cdots (10)$$

$$\begin{aligned} &= (e^{NA} + e^{-NA})(e^{(N-1)A} + e^{-(N-1)A}) \cdots (e^A + e^{-A}) \\ &= \prod_{l=1}^N (e^{lA} + e^{-lA}) \end{aligned} \quad \cdots (11)$$

(ii) (11) より μ_i の平均値は

$$\langle \mu_i \rangle = \frac{e^{A(N+1-i)} - e^{-A(N+1-i)}}{e^{A(N+1-i)} + e^{-A(N+1-i)}} = \tanh A(N+1-i) \quad \cdots (12)$$

となる。

(iii) $|x| \ll 1$ のとき、 $\tanh x \approx x - x^3/3$ なので、電場が十分小さい極限 $NA \ll 1$ で

$$\begin{aligned} \langle x_N \rangle &= b \left\langle \sum_{i=1}^N \mu_i \right\rangle = b \sum_{i=1}^N \langle \mu_i \rangle = b \sum_{i=1}^N \tanh A(N+1-i) \\ &\approx b \sum_{i=1}^N A(N+1-i) = \frac{1}{2} N(N+1)Ab = \frac{(N+1)b^2}{2k_B T} (NQE) \end{aligned} \quad \cdots (13)$$

$$NQE \approx \frac{2k_B T}{Nb^2} \langle x_N \rangle \quad (N \gg 1) \quad \cdots (14)$$

(14) の外力 NQE は微視的な力の合力である。一方、(7) の外力 X は、 $dF = -SdT + Xdx_N$ で定まる巨視的な熱、統計力学的力である。(7) と (14) を比較すると、外力の総和 NQE は端点に働く $X = NQE/2$ の張力に相当することが分かる。 $1/2$ の因子がついたのは、始点に近い要素 i の電荷に働く力が、実効的な張力 X にほとんど寄与しないためである。

補足 前問 1(c) $E = 0$ で、一定の外力 X が端点に働いている場合、 X 一定のカノニカル分布（このとき、エネルギー $H(= U)$ は一定なので考えなくて良い）により、鎖状分子の長さ $\langle x_N \rangle$ を求めるところになる。

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{x_N} W e^{\beta X x_N} \quad (W \text{ は端点位置が } x_N \text{ となる状態数}) \\ &= \sum_{\mu_i=\pm 1} \exp \left(\beta X b \sum_i \mu_i \right) = \left(e^{\beta X b} + e^{-\beta X b} \right)^N = 2^N (\cosh \beta X b)^N \end{aligned} \quad \cdots (15)$$

$$\langle x_N \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log Z_N}{\partial X} = Nb \tanh(\beta X b) \approx \frac{Nb^2}{k_B T} X \quad \cdots (16)$$

(16) の最後で $\beta X b \ll 1$ とした。これは 1(c) の $N \gg x_N/b$ に対応する。よって

$$X = \frac{k_B T}{Nb^2} \langle x_N \rangle \quad \cdots (17)$$

となり、(7) と同じ結果が得られる。

問題 3 解答

真電荷と伝導電流のない等方一様な媒質を考えているので、Maxwell 方程式は次のようにになる。

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0 \quad \cdots (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \cdots (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \cdots (3)$$

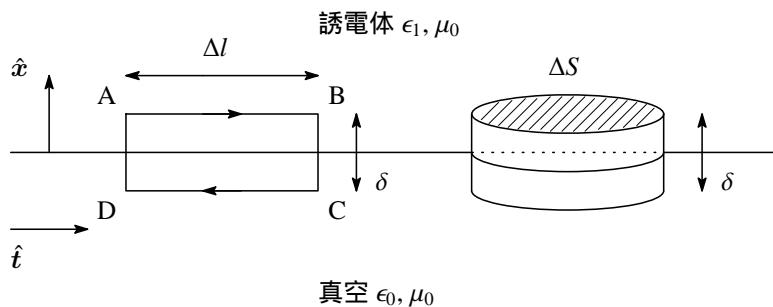
$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \frac{\partial (\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} \quad \cdots (4)$$

誘電率 $\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1 (> \epsilon_0) & \text{誘電体 } x > 0 \\ \epsilon_0 & \text{真空 } x < 0 \end{cases}$

透磁率 $\mu = \mu_0$

以下、真空 ($x < 0$) の電場、磁場を E_v, B_v 、誘電体 ($x > 0$) の電場、磁場を E_d, B_d で表す。

1. 図 24: 境界面 $x = 0$ における電磁場の接線成分 (左)、法線成分 (右) の連続性



- (i) 境界面に平行な任意の単位ベクトルを \hat{t} とし、 x 軸方向 (法線方向) の単位ベクトルを \hat{x} とする。図 24 (左) のような長方形の積分路 ABCD ($\overline{AB} = \Delta l, \overline{BC} = \delta$) をとり、これを縁とする平面 S 上で (3) の両辺を面積分する。

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \cdots (5)$$

磁場 \mathbf{B} は有限なので、 $\delta \rightarrow 0$ とすると (右辺) $\rightarrow 0$ となる。(左辺) に Stokes の定理を適用すると

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} &= \oint_{ABCD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} && \text{Stokes の定理} \\ &\rightarrow \int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{CD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} && (\delta \rightarrow 0) \\ &= (E_{d,t} - E_{v,t}) \Delta l = 0 \\ \therefore E_{v,t}(0, y, z, t) &= E_{d,t}(0, y, z, t) && (\Delta l \rightarrow 0) \end{aligned} \quad \cdots (6)$$

(4) についても同様にして

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0 && (\delta \rightarrow 0) \\ \oint_{ABCD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &\rightarrow (B_{d,t} - B_{v,t}) \Delta l = 0 && \end{aligned} \quad \cdots (7)$$

次に、図 24(右)のような底面積 ΔS 、高さ δ の円柱 V を考え、その表面を S とする。(1) の両辺を V で積分すると Gauss の定理より

$$\int_V \nabla \cdot (\epsilon E) dV = \int_S \epsilon E \cdot dS \quad \text{Gauss の定理} \quad \cdots (8)$$

$$\rightarrow (\epsilon_1 E_{d,x} - \epsilon_0 E_{v,x}) \Delta S = 0 \quad (\delta \rightarrow 0)$$

$$\therefore \epsilon_0 E_{v,x}(0, y, z, t) = \epsilon_1 E_{d,x}(0, y, z, t) \quad (\Delta S \rightarrow 0) \quad \cdots (9)$$

以上(6), (9), (7)より境界 $x = 0$ において、(10), (11), (12)がそれぞれ成り立つ。

$$E_{0,t}(0, y, z, t) + E_{2,t}(0, y, z, t) = E_{1,t}(0, y, z, t) \quad \cdots (10)$$

$$\epsilon_0 [E_{0,x}(0, y, z, t) + E_{2,x}(0, y, z, t)] = \epsilon_1 E_{1,x}(0, y, z, t) \quad \cdots (11)$$

$$B_{0,t}(0, y, z, t) + B_{2,t}(0, y, z, t) = B_{1,t}(0, y, z, t) \quad \cdots (12)$$

(ii)

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad \cdots (13)$$

(13)を(8)~(9)と同様にして V で積分すると

$$\epsilon_0 E_{1,x}(0, y, z, t) - \epsilon_0 [E_{0,x}(0, y, z, t) + E_{2,x}(0, y, z, t)] = \sigma(y, z, t) \quad \cdots (14)$$

境界条件(11)より

$$\sigma(y, z, t) = (\epsilon_0 - \epsilon_1) E_{1,x}(0, y, z, t) \quad \cdots (15)$$

2. 各波数成分について独立に Maxwell 方程式は成り立つ。真空中 $x < 0$ では

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad \cdots (16)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \omega \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega), \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = -\epsilon_0 \mu_0 \omega \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \quad \cdots (17)$$

となる。

(i) $k_0 n_0$ 成分(E_0)について考えると(17)より

$$k_0 \mathbf{n}_0 \times (k_0 \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_0) = -\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \mathbf{E}_0 \quad \cdots (18)$$

$$(k_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E}_0) k_0 \mathbf{n}_0 - (k_0 \mathbf{n}_0 \cdot k_0 \mathbf{n}_0) \mathbf{E}_0 = -\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \mathbf{E}_0 \quad \cdots (19)$$

(19)の(左辺)第1項は(16)より0なので

$$k_0^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \quad \therefore k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \quad \cdots (20)$$

(ii) (17), (20)より

$$\mathbf{E}_0 = \frac{-k_0 B_0}{\epsilon_0 \mu_0 \omega} \mathbf{n}_0 \times \hat{z} = \frac{\omega B_0}{k_0} \hat{z} \times \mathbf{n}_0 \quad \cdots (21)$$

3. 屈折波と反射波の電場振幅 E_1, E_2 についても(21)と同様にして

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\omega B_1}{k_1} \hat{z} \times \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\omega B_2}{k_0} \hat{z} \times \mathbf{n}_2 \quad \cdots (22)$$

が成り立つ。

(i) (12)より

$$B_0 \exp[i(k_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] + B_2 \exp[i(k_0 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = B_1 \exp[i(k_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad \cdots (23)$$

これが任意の y, z, t で成り立つためには

$$k_0 n_{0,y} = k_0 n_{2,y} = k_1 n_{1,y} \implies k_0 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 \quad \cdots (24)$$

(iii)

$$(23), (24) \text{ より} \quad B_0 + B_2 = B_1 \quad \cdots (25)$$

$$(10), (22), (24) \text{ より} \quad \frac{\omega B_0}{k_0} \cos \theta_0 - \frac{\omega B_2}{k_0} \cos \theta_0 = \frac{\omega B_1}{k_1} \cos \theta_1 \quad \cdots (26)$$

(25), (26) を解いて

$$B_1 = \frac{2k_1 \cos \theta_0}{k_1 \cos \theta_0 + k_0 \cos \theta_1} B_0, \quad B_2 = \frac{k_1 \cos \theta_0 - k_0 \cos \theta_1}{k_1 \cos \theta_0 + k_0 \cos \theta_1} B_0 \quad \cdots (27)$$

(iii) $\theta_0 + \theta_1 = \pi/2$ のとき, $\sin \theta_0 = \cos \theta_1$, $\sin \theta_1 = \cos \theta_0$ が成り立つ。 (24) を用いると (27) は

$$\frac{B_1}{B_0} = \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_0}{\cos \theta_0 \sin \theta_0 + \sin \theta_1 \cos \theta_1} = 1 \quad (\because \cos \theta_0 \sin \theta_0 = \sin \theta_1 \cos \theta_1) \quad \cdots (28)$$

$$\frac{B_2}{B_0} = \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0 - \sin \theta_1 \cos \theta_1}{\sin \theta_0 \cos \theta_0 + \sin \theta_1 \cos \theta_1} = 0 \quad \cdots (29)$$

となる。また、電場振幅は (21), (22) より

$$\frac{k_1 E_1}{k_0 E_0} = \frac{B_1}{B_0} = 1, \quad \frac{E_2}{E_0} = \frac{B_2}{B_0} = 0 \quad \cdots (30)$$

となる。したがって、磁場が入射面 (xy 平面) に垂直に偏光している場合 (このとき電場は入射面と平行), $\theta_0 + \theta_1 = \pi/2$ で反射がなくなる。このときの入射角 $\theta_0 = \theta_B$ (Brewster 角)。

問題 4 解答

1. 重心エネルギーの原点を O とする。 (z, θ) を xyz 座標で表すと $\begin{pmatrix} z \tan \alpha \cos \theta \\ z \tan \alpha \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$ なので、速度は

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \tan \alpha \cos \theta - z \dot{\theta} \tan \alpha \sin \theta \\ \dot{z} \tan \alpha \sin \theta + z \dot{\theta} \tan \alpha \cos \theta \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \text{ その大きさは}$$

$$v^2 = (\dot{z} \tan \alpha)^2 + (z \dot{\theta} \tan \alpha)^2 + \dot{z}^2$$

である。これより、求めるラグランジアン \mathcal{L} は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[(\dot{z}^2 + z^2 \dot{\theta}^2) \tan^2 \alpha + \dot{z}^2] - mgz \quad \cdots (1)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{z}^2}{\cos^2 \alpha} + z^2 \dot{\theta}^2 \tan^2 \alpha\right) - mgz. \quad \cdots (2)$$

2. θ は循環座標であるから $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$ が保存し、また \mathcal{L} の式は t を含まないので全エネルギーも保存する。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mz^2 \dot{\theta} \tan^2 \alpha$$

よって、 $z^2 \dot{\theta}$ 及び全エネルギー E が保存する。

3.

$$z^2 \dot{\theta} = 4h^2 \cdot \frac{v_0}{2h \tan \alpha} = \frac{2hv_0}{\tan \alpha}. \quad \cdots (3)$$

またエネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}m[(\dot{z}^2 + z^2 \dot{\theta}^2) \tan^2 \alpha + \dot{z}^2] + mgz \quad \cdots (4)$$

$$= \frac{1}{2}m\left[4h^2 \cdot \left(\frac{v_0}{2h \tan \alpha}\right)^2 \tan^2 \alpha\right] + mg \cdot 2h \quad \cdots (5)$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 + 2mgh \quad \cdots (6)$$

(3) 式を代入して整理すると、

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \dot{z}^2 + (2hv_0)^2 \frac{1}{z^2} + 2gz = v_0^2 + 4gh, \quad \cdots (7)$$

$$\frac{dt}{dz} = \dots = \pm \sqrt{\frac{-2g \cos^2 \alpha}{z^2} (z - 2h) \left(z^2 - \frac{v_0^2}{2g} z - \frac{hv_0^2}{g}\right)} \quad \cdots (8)$$

また (7) 式を時間微分すると、

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \left(4h^2 v_0^2 \frac{1}{z^3} - g\right) \cos^2 \alpha \quad \cdots (9)$$

となることが分かる。これより、 $\frac{v_0^2}{2h} - g \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$ の時、開始状態から質点は $\begin{cases} \text{上} \\ \text{下} \end{cases}$ 向きに進み始める。

(i) $|v_0| > \sqrt{2hg}$ のとき

質点は上向きに進み始める。その後 $z = \left[\frac{(2hv_0)^2}{g} \right]^{\frac{1}{3}}$ の位置で $z = z(t)$ の函数は変曲点を迎える、 $z = \frac{v_0(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16gh})}{4g}$ において $\frac{dz}{dt} = 0$ となって、再び z は減少し始める ($\frac{dz}{dt}$ の符号が + から - に変わる)。そしてまた $z = \left[\frac{(2hv_0)^2}{g} \right]^{\frac{1}{3}}$ で変曲点を迎える、 $z = 2h$ で $\frac{dz}{dt} = 0$ となって、再び z は増加し始め、これを繰り返す。つまり、

$$2h \leq z \leq \frac{v_0(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16gh})}{4g}$$

で振動する。

(ii) $|v_0| = \sqrt{2hg}$ のとき … この時は $z = 2h$ で円軌道を保つ。

(iii) $|v_0| < \sqrt{2hg}$ のとき

質点は下向きに進み始め、 $z = \left[\frac{(2hv_0)^2}{g} \right]^{\frac{1}{3}}$ で変曲点を迎える、 $z = \frac{v_0(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16gh})}{4g}$ で $\frac{dz}{dt} = 0$ となり … 同様に考えるが、 $z = h$ に底があるので少し注意が必要である。具体的には $z = \frac{v_0(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16gh})}{4g}$ と $z = h$ の大小を見ればよい。

(i) $\sqrt{\frac{2hg}{3}} \leq |v_0| < \sqrt{2hg}$ のとき

このときは質点は底に触れることがなく（等号のときは、触れても影響を受けない）

$$\frac{v_0(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16gh})}{4g} \leq z \leq 2h$$

で滑らかに振動する。

(ii) $|v_0| < \sqrt{\frac{2hg}{3}}$ のとき

このときは $z = h$ で下向きの速度を持っているので、開口から落下してしまう。

問題 5 解答

1. まず、重心系で



という反応を考察する。図 25 のように、反応前は、2 つの陽子が同じエネルギー E_p' で反対向き（互いに近づく向き）に運動する。そして E_p' がしきい値をとるととき、反応後は 3 粒子が静止する。

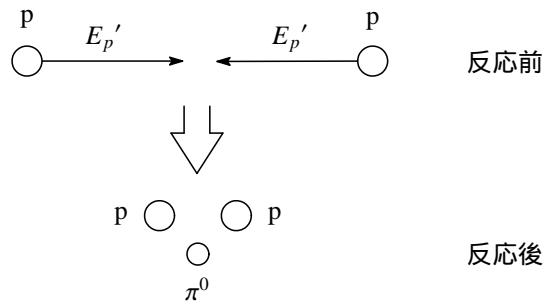


図 25: 重心系から見た、最低エネルギーでの π^0 生成反応

この場合についてエネルギー保存則を用いると、

$$\begin{aligned} 2E_p' &= 2m_p^2 c^2 + m_\pi^2 c^2 \\ \Rightarrow E_p' &= \frac{2m_p^2 c^2 + m_\pi^2 c^2}{2} \end{aligned} \quad \cdots (2)$$

より、重心系で見たときの陽子のエネルギー E_p' のしきい値が求まった。

ところで、反応前の陽子の速さを v とし、 $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ とするとき、

$$E_p' = m_p \gamma c^2 \quad \cdots (3)$$

という関係式に (2) 式を代入して γ を求めることができる。

$$\gamma = \frac{E_p'}{m_p c^2} = \frac{2m_p^2 + m_\pi^2}{2m_p} \quad \cdots (4)$$

次に、反応を実験室系で考察する。反応後の 3 粒子の実験室系での速さを v とするとき、 $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ は、(4) 式で求めた γ に等しい。このことに注意し、実験室系においてエネルギー保存則を用いると、

$$\begin{aligned} T_p + 2m_p c^2 &= 2m_p \gamma c^2 + m_\pi \gamma c^2 \\ &= \frac{(2m_p + m_\pi)^2}{2m_p} c^2, \\ T_p &= \left(2m_\pi + \frac{m_\pi^2}{2m_p}\right) c^2 \\ &= \left(2 \times 135(\text{MeV}/c^2) + \frac{(135(\text{MeV}/c^2))^2}{2 \times 940(\text{MeV}/c^2)}\right) c^2 \\ &= 280 (\text{MeV}) \end{aligned} \quad \cdots (5)$$

より求めるべきしきい値が求まった。

- (i) まず、 π^0 静止系で考える。崩壊において、 π^0 の静止エネルギー $m_\pi c^2$ が 2 つの γ 線のエネルギー E'_γ になるので、

$$E'_\gamma = \frac{m_\pi c^2}{2} \quad \cdots (6)$$

である。また、運動量の大きさは、

$$p'_\gamma = \frac{E'_\gamma}{c} = \frac{m_\pi c}{2} \quad \cdots (7)$$

である。

これらをローレンツ変換して実験室系でのエネルギー E_γ を求める。そのために、実験室系の π^0 静止系に対する速度 β 、 γ を求めたい。 γ は、実験室系で見たときの π^0 のエネルギーとの関係から次のように求まる。

$$E_\pi = m_\pi \gamma c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi c^2} \quad \cdots (8)$$

また、 β は γ との関係から次のように求まる。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow \beta = -\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = -\sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi c^2}{E_\pi}\right)^2} = -\sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi c^2}{E_\pi}\right)^2} \quad \cdots (9)$$

(実験室系は重心系に対して、入射 π^0 粒子の運動方向と逆方向に動いているので、 β の符号はマイナスになっている。) 従ってローレンツ変換により、実験室系でのエネルギーは

$$\begin{aligned} \frac{E_\gamma}{c} &= \gamma \left(\frac{E'_\gamma}{c} - \beta p'_\gamma \cos \theta^* \right) \\ &= \frac{E_\pi}{m_\pi c^2} \left(\frac{m_\pi c}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi c}{E_\pi}\right)^2} \frac{m_\pi c^2}{2c} \cos \theta^* \right) \\ &= \frac{E_\pi}{2c} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi c^2}{E_\pi}\right)^2} \cos \theta^* \right) \\ \Rightarrow E_\gamma &= \frac{E_\pi}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi c^2}{E_\pi}\right)^2} \cos \theta^* \right) \end{aligned} \quad \cdots (10)$$

となる。

次に、 γ 線の微小エネルギー幅 dE_γ に対応する断面積を $d\sigma$ とおくと、求めるスペクトルの縦軸にあたる量は $\frac{d\sigma}{dE_\gamma}$ であり、次のようにして計算できる。

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{d\theta^*} \frac{d\theta^*}{dE_\gamma} \quad \cdots (11)$$

ただし、 $d\Omega$ は π^0 静止系で見たときの微小立体角である。まず、 π^0 静止系においては γ 線の角分布は等方的であることから、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \text{Const} \quad \cdots (12)$$

である。また、 π^0 静止系において、 π^0 の位置を中心とする半径 1 の球面のうち、 $\theta^* \sim \theta^* + d\theta^*$ に対応する部分の面積は $2\pi \sin \theta^* d\theta^*$ であるから、

$$\frac{d\Omega}{d\theta^*} \propto \sin \theta^* \quad \cdots (13)$$

である。そして、(10) 式より、

$$\frac{d\theta^*}{dE_\gamma} = \frac{1}{\frac{dE_\gamma}{d\theta^*}} \propto \frac{1}{\sin \theta^*} \quad \cdots (14)$$

である。従って、(12) 式、(13) 式、(14) 式より、

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} = \text{Const}' \quad \cdots (15)$$

となり、 E_γ の分布が一様であることが示された。

- (ii) 図 26 のように x, y 方向及び角度 θ_1, θ_2 を定義する。(6) 式、(7) 式、(8) 式、(9) 式を用いて、ローレンツ

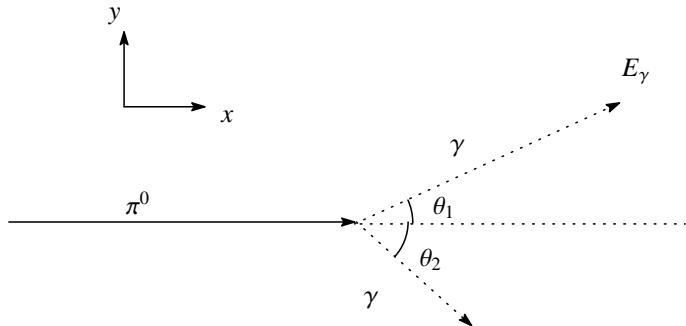


図 26: 実験室系での π^0 崩壊反応

変換により、実験室系での γ の運動量の x 方向成分を求める

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma \left(p' \cos \theta^* - \beta \frac{E'_\gamma}{c} \right) \\ &= \frac{E_\pi}{m_\pi c^2} \left(\frac{m_\pi c}{2} \cos \theta^* + \sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi c^2}{E_\pi} \right)^2} \frac{m_\pi c}{2} \right) \\ &= \frac{E_\pi}{2c} \left(\cos \theta^* + \sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi c^2}{E_\pi} \right)^2} \right) \\ &\approx \frac{E_\pi}{2c} (1 + \cos \theta^*) \end{aligned} \quad \cdots (16)$$

ただし、 π^0 のエネルギー $E_\pi = 30$ (GeV) は、 π^0 の静止エネルギー $m_\pi c^2 = 135$ (MeV) と比較して十分大きいと近似した。一方、 y 方向の運動量については、ローレンツ変換の影響を受けないので、

$$p_y = \frac{m_\pi c}{2} \sin \theta^* \quad \cdots (17)$$

である。このことから、実験室系での角度 θ_1 を求める

$$\tan \theta_1 = \frac{p_y}{p_x} = \frac{\frac{m_\pi c}{2} \sin \theta^*}{\frac{E_\pi}{2c} (1 + \cos \theta^*)} = \frac{m_\pi c^2}{E_\gamma} \frac{\sin \theta^*}{1 + \cos \theta^*} \quad \cdots (18)$$

である。ただし、前述のように $m_\pi c^2 \ll E_\pi$ であるから、少なくとも 2 光子の成す角を最小値にするような θ^* に対しては、 $\tan \theta_1$ の値は非常に小さく、

$$\theta_1 \approx \tan \theta_1 = \frac{m_\pi c^2}{E_\gamma} \frac{\sin \theta^*}{1 + \cos \theta^*} \quad \cdots (19)$$

と近似できる。同様にしてもう一方の γ の角度 θ_2 についても求めると、

$$\theta_2 \approx \frac{m_\pi c^2}{E_\gamma} \frac{\sin \theta^*}{1 - \cos \theta^*} \quad \cdots (20)$$

となる。2 光子の成す角は、(19) 式+(20) 式、で計算できて、

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 &= \frac{m_\pi c^2}{E_\gamma} \left(\frac{\sin \theta^*}{1 + \cos \theta^*} + \frac{\sin \theta^*}{1 - \cos \theta^*} \right) \\ &= \frac{m_\pi c^2}{E_\gamma} \frac{2}{\sin \theta^*} \\ &\geq \frac{2m_\pi c^2}{E_\gamma} \quad (\text{等号成立は } \theta^* = \frac{\pi}{2} \text{ の時}) \\ &= \frac{2 \times 135 \text{ (MeV)}}{30 \text{ (GeV)}} \\ &= 9.0 \times 10^{-3} \text{ (rad)} \end{aligned} \quad \cdots (21)$$

より、2 光子間の角度の最小値が求まった。

- (iii) $m_\pi c^2 \ll E_\pi$ が成り立ち、かつ放出角が $\theta^* = 0, \pi$ 付近以外の値をとる場合について考える。このとき 2 光子間の角度は (21) 式、のようになり、最小値と同程度のオーダーの非常に小さい値になる。 π^0 静止系においては γ 線の角分布は等方的であるから、これは、放出角が $\theta^* = 0, \pi$ 付近の値をとる場合を除く大部分の崩壊に対して、2 光子間の角度がほぼ最小値に等しくなることを意味している。従って、角度分布は最小値付近に鋭いピークをもつ。

3.

- (i) π^- がパイ中間子原子の基底状態に落ちてから反応が起こることから、 π^- と d の間の軌道角運動量の大きさは 0 である。また、問題文にあるとおり、 π^- のスピンの大きさは 0 である。そして、重陽子が 3S_1 の束縛状態にあることから、重陽子のスピンの大きさ（陽子と中性子からなる系の全角運動量）は 1 である。以上の角運動量を全て合成すると、始状態の全角運動量の大きさは 1 であることがわかる。

次にパリティを求める。一般に、 n 粒子から成る系のパリティ P は、それらの粒子間の相対運動の軌道角運動量の大きさを l_1, l_2, \dots, l_N （粒子数 n のとき、独立な軌道角運動量の数 N は、 $N = n - 1$ ）とし、それぞれの粒子のパリティを P_1, P_2, \dots, P_n とすると、

$$P = (-1)^{l_1+l_2+\dots+l_N} P_1 P_2 \dots P_n \quad \cdots (23)$$

で表せる。

重陽子が 3S_1 の束縛状態にあることから陽子と中性子の間の軌道角運動量の大きさは 0 である。そして、陽子と中性子のパリティは等しいことから、重陽子のパリティは

$$P_d = (-1)^0 P_p P_n = 1 \quad \cdots (24)$$

である。一方、前述のように、 π^- と d の間の軌道角運動量の大きさは 0 であるから、系全体のパリティは、

$$P = (-1)^0 P_d P_\pi = P_\pi \quad \cdots (25)$$

である。

- (ii) まず、終状態の全スピンが 1 のときを考える。全スピンが 1 のとき、波動関数のスピン部分は粒子の入れ替えに関して対称である。一方、中性子がフェルミオンであることから、（スピン部分も含めた）波動関数が粒子の入れ替えに関して反対称である。従って、波動関数の空間部分は粒子の入れ替えに関して反対称でなければならない。そして、波動関数の空間部分が粒子の入れ替えに関して反対称なら、軌道角運動量の大きさは奇数である。以上より、終状態の全スピンが 1 のとき軌道角運動量の大きさは奇数である。

一方，終状態の全スピンが 0 のとき，波動関数のスピン部分が粒子の入れ替えに関して反対称であることから，同様の議論により，軌道角運動量の大きさは偶数であることがわかる。

- (iii) 全角運動量が保存されることから，終状態の全角運動量は 1 である。ここで，もし全スピンが 0 だとすると，全角運動量の大きさは軌道角運動量の大きさに一致する。ところが，(b) の結果より，全スピンが 0 のとき軌道角運動量は偶数でなければならないので，全角運動量は 1 になりえない。従って，全スピンは 1 であり，軌道角運動量は奇数である。ところで，軌道角運動量の大きさを L とすると，全スピンが 1 であることから，全角運動量の大きさは $L-1, L, L+1$ のいずれかになる。従って，全角運動量が 1 になるためには，軌道角運動量の大きさも 1 でなくてはならない。以上より，可能な組み合わせは $S = 1, L = 1$ のみである。

- (iv) 軌道角運動量の大きさが 1 であることから，終状態のパリティは

$$P = (-1)^1 P_n P_n = -1 \quad \cdots (26)$$

である。この問題で考察している反応は，強い相互作用による反応であるから，反応の前後でパリティは保存する。(弱い相互作用による反応ではパリティが保存しないことがある。) 従って，(25) 式，と (26) 式を等しいとおいて，

$$P_\pi = -1 \quad \cdots (27)$$

より π^- のパリティが決定された。

問題 6 解答

1.

- (i) 一般に $pV = nRT$ という関係により気体の圧力 , 体積 , モル数 (即ち分子数) 温度は関係付けられている。ここで題意より常圧 , 0°C における気体分子数の関係式が与えられているから , これを用いて 0°C , 1.0×10^{-5} Pa における 1.0cm^3 中の気体分子の総数は ,

$$\frac{6.0 \times 10^{23} \times 1.0 \times 10^{-5} \times 1.0}{1.0 \times 10^5 \times 22 \times 10^3} = 2.73 \times 10^9$$

より , 2.73×10^9 個と求まった。

- (ii) 電離断面積と , 分子の総数及び電子の総数の積が全電離分子数を与える。このことより , (a) の結果と , 題に与えられている結果を用いて ,

$$\frac{1.0 \times 10^{-3}}{1.6 \times 10^{-19}} \times 3.0 \times 10^{-16} \times 2.73 \times 10^9 = 5.12 \times 10^9$$

となることから , 答えは毎秒 5.12×10^9 個と求まった。

2.

- (i) フィラメントに電流を流すことにより , フィラメントは熱せられ , その表面から熱電子を発生させる。その熱電子を , フィラメントグリッド間に電圧をかけ , 加速してやる。すると , その事により , 热電子は気体分子に衝突し , 陽イオンを発生させる。ここで発生した陽イオンは陽極となるコレクターに細くされ , 電流となって観測される。この時 , フィラメント-グリッド間に流れる電子電流と , フィラメント-コレクター間に流れるイオン電流の間には単純な比例関係が成り立ち , また同様にイオン電流は真空計内部の圧力に比例する。これらのことより , 電子電流を一定に保って測定を実施すれば , イオン電流を測定することは即ち圧力を測定することにつながり , この事を利用して真空計の圧力を測定するのである。

- (ii) イオン電流の値はその気体の衝突断面積に左右される , 衝突断面積は電子の運動エネルギーと気体の種類に依存するが , 一義的には気体分子の大きさによると考えてよい。特にそれは希ガス元素の場合その反応性の乏しさから逆に顕著であると考えてよい。このことは大きな分子ほど衝突断面積が大きくなると考えてよく , これにより分子量が増えるほどイオン電流が大きくなることが予想でき , 実際にそうなっていることが確かめられている。

- (iii) グリッドに衝突する際 , 制動放射により放出される X 線はコレクターに到達した後に光電効果を起こしてコレクターの表面から電子を飛び出させる。このことが系に余計な電流を流すこととなり , 誤差の原因となっている。このような誤差を小さくするにはコレクターの材質として電子を飛び出させるための仕事関数を出来るだけ大きくするようなものを選べばよい。その事により , 光電効果により発生する電子の量を抑えることが出来 , 高真空度までの測定が可能となるのである。

3. 電離真空計が使えないような高い圧力で使用できる圧力計としては、ピラニゲージがある。ピラニゲージの測定子は金属フィラメントであり、電流が流されて加熱されている。気体分子の衝突によって熱エネルギーが運び去られるが、圧力が高いほど失う熱エネルギーが多く、フィラメントの温度が下がる。温度の低下によって電気抵抗が下がるので、この変化を測定することで圧力を知ることができる。

問題 7 解答

1. よりよい運動量分解能を得るには、観測点 3 点により作られる三角形の外接円の半径を精度良く観測できればよく、これは作られる三角形を大きくすれば誤差が相対的に小さくなり達成することができる。この前提をもとに諸パラメータの大きさをどのようにすればよいかを以下論ずることにする。

- 位置分解能 σ について：

これは明らかに、三角形の大きさを正確に決めるには小さい方が良く議論するまでも無い。

- B, L, p について：

三角形の辺の長さが大きくなるときの条件として L が大きく、サジッタ S が大きいほうが良いと思われる。そのため $R \gg L$ の時には R が小さいほうが良いことになり、

$$R = \frac{p}{0.3B} \quad \cdots (1)$$

より B は大きくしたほうが良く、 p が小さいときのほうが精度良く測定することができる。

2.

(i) 図より $S = R - R \cos \theta$, $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{R} \right)^2$ 。以上より

$$S = \frac{L^2}{2R} = 0.15 \frac{BL^2}{p} \quad \cdots (2)$$

(ii) (a) より $p = 0.15 \times \frac{BL^2}{S}$ 。よって

$$\delta p = 0.15 \times \frac{BL^2}{S^2} \delta S = \frac{p^2}{0.15 \times BL^2} \delta S \quad \cdots (3)$$

(iii) $\delta S = x_2 - x_1$ 。よって

$$\delta S = \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2} = \sqrt{2}\sigma \quad \cdots (4)$$

(iv) $\frac{\delta p}{p} = \frac{\sqrt{2}\sigma p}{0.15BL^2}$

3. これまで論じてきた測定計画を忠実に再現できれば、上に述べた測定精度で測定することができるが、実際にはこの実験を阻害する要因がある。

次にその改善策を示していきたいと思う。(ただしここでは粒子の種類の同定などの機構については考えず、 p を精度良く測定することについて論ずることにする。)

この実験では(1)式が成り立つという仮定のもとに考えており、換言すれば粒子がこの式に従って運動すれば理想通りに行くものと思われる。そのためには

- 測定器 1 ~ 3 の間では運動量一定
- 測定器のなかでは磁場一定で電場は存在しない(ドリフトを起こさせないため)

の二つの条件を満たすようにすることが重要になり、

- 装置内は十分な真空度を保つ
- 乾板を薄くする
- 磁場の大きさが変化しない程度に装置を小さくするか、磁場を一様に保つ工夫を考える

といったことに留意すべきであると思われる。

問題 8 解答

1.

(i)

$$\begin{cases} \phi(x) = e^{ikx} + Ae^{-ikx} \\ \phi(x) = Be^{\rho x} + Ce^{-\rho x} \\ \phi(x) = De^{ikx} \end{cases} \cdots (1)$$

と表せる。ここで

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \rho = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

である。

(ii) $x = 0$ で対数微分すると,

$$k \frac{1-A}{1+A} = \rho \frac{B-C}{B+C} \cdots (2)$$

 $x = L$ で対数微分すると,

$$\rho \frac{Be^{\rho L} + Ce^{-\rho L}}{Be^{\rho L} - Ce^{-\rho L}} = ik \cdots (3)$$

以上が満たすべき境界条件である。

(iii) 与えられた透過率を改めて T_r とおき⁷ , 右側に透過する Flux を j_{trans} とすると

$$j_{\text{trans}} = \frac{\hbar k}{m} |D|^2 = \frac{\hbar k}{m} T_r = \sqrt{\frac{2E}{m}} T_r$$

電子の密度は n なので、全電流は

$$j = -e \sqrt{\frac{2E}{m}} n T_r(E) \cdots (4)$$

2.

(i) 1 次元自由電子気体の単位長さ当たりの状態密度は、スピンを考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{dp}{h} &= 2 \cdot \frac{1}{h} \sqrt{\frac{m}{2E}} dE = D(E) dE \\ \therefore D(E) &= \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2m}{E}} \end{aligned} \cdots (5)$$

絶対零度では電子は縮退しているので

$$N = \int_0^\infty D(E) f(E) dE = \int_0^{E_F} D(E) dE = \frac{2\sqrt{2mE_F}}{h}$$

よって Fermi 速度は

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} = \frac{Nh}{2m} \cdots (6)$$

⁷設問 2 (b) での温度 T と紛らわしいため。

- (ii) この系が、電圧差を一定に保たれた定常状態にあることに注意する。式(4)より、エネルギー E を持つ $f_L(E)D(E)dE$ の電子が左の系から右の系に定常的に流れ込むが、そのうち $f_R(E)$ の割合で、左にいた電子は右にいた電子を押し出すだけである。ゆえに、

$$J_{LR} = -e \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2E}{m}} D(E) f_L(E) [1 - f_R(E)] T(E) dE \quad \cdots (7)$$

同様の流れが右から左に向かっても存在するので、

$$J_{RL} = -e \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2E}{m}} D(E) f_R(E) [1 - f_L(E)] T(E) dE \quad \cdots (8)$$

(iii)

$$\begin{aligned} \Delta J &= -e \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2E}{m}} D(E) [f_L(E) - f_R(E)] T(E) dE \\ &= -e \int_{E_{FR}}^{E_{FL}} \sqrt{\frac{2E}{m}} D(E) T(E) dE \\ &= -e \int_{E_{FR}}^{E_{FL}} \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2m}{E}} T(E) dE \\ &= -\frac{2e}{h} \int_{E_{FR}}^{E_{FL}} T(E) dE \\ &\approx -\frac{2e}{h} T(E_{FL}) \Delta \mu \\ &= -\frac{2e}{h} T(E_{FL})(-e \Delta V) \end{aligned} \quad \cdots (9)$$

よって

$$G = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta J}{\Delta V} = \left(\frac{2e^2}{h} \right) T(E_{FL}) \quad \cdots (10)$$

3.

- Fe は強磁性を持ち磁石にくっつくが、n 形 Si はくっつかない。(30 字)
 - Fe は温度上昇とともに抵抗が増大するが、n 形 Si はキャリアーが増えたため減少する。(40 字)
- など。

問題 9 解答

1.

- (i) イオンが平衡電位を達成しているときは、自由エネルギー変化はどちらへのイオンの移動に対しても 0 でなければならない。よって

$$zFV = 2.3RT \log_{10}(C_o/C_i)$$

これから

$$V = 2.3 \frac{RT}{zF} \log_{10}(C_o/C_i)$$

が導かれる。尚、実はこれは $V = \frac{RT}{zF} \ln(C_o/C_i)$ と書き直せる。

- (ii) 静止状態での細胞膜は主に K^+ を透過させることが知られている。ここで、細胞内と細胞外での K^+ の濃度の差から、膜電位を求めよう。

$$zFV = 2.3RT \log_{10}(C_o/C_i)$$

を使えば

$$1 \times 23[\text{kcal}/\text{V}\cdot\text{mol}] \times V[\text{V}] = 2.3 \times 2.0 \times 10^{-3}[\text{kcal}/\text{K}\cdot\text{mol}] \times 293[\text{K}] \log_{10} \left(\frac{20 \text{ [millimol}/\ell]}{400 \text{ [millimol}/\ell]} \right)$$

これより $V = 0.1 \times 2 \times 0.001 \times 293 \times \log[1/20] = -0.0762$ 、よって $V_{K^+} = -76[\text{mV}]$ 。

- (iii) 静止状態での神経細胞細胞膜は前問で述べたように主に K^+ を透過させ、更に $Na^+K^+ channel$ によって細胞内の Na^+ 濃度を低く保つことによって結果的に細胞内静止電位を K^+ の平衡電位にほぼ等しい $-70[\text{mV}]$ 付近に保っている。しかし、活動電位の発生時においては次のような変化がおきる。

活動電位とは、脱分極の閾値を越えた電位であるが、細胞膜が閾値を越えて脱分極すると、活動電位が発生する。その際、まず、脱分極地点の電位依存性 Na^+ チャンネルが開き、細胞膜の Na^+ 透過性が激増する。これにより、電位の勾配により Na^+ の細胞内への流入が起こり、それが周辺に脱分極を引き起こす。

しかしこの脱分極も次の変化が引き続いて起こることにより終焉する。まず、電位依存性 K^+ チャンネルが開くことにより K^+ の細胞外への流出が起こる。このことを再分極というが、これにより細胞内の電位が低下し、電位依存性の K^+, Na^+ チャンネルは両方とも閉じる。これらの変化は僅か $1[\text{msec}]$ 程度で終了する。

- (iv) 神経インパルスが周辺部に広がっていく過程は上の問題で述べた。さて、ここではその伝達が一方向である理由を述べよう。

神経インパルスが伝達する際、細胞膜は脱分極、再分極を経てもとの状態に戻るが、膜が次の活動電位を発生させる状態になるには脱分極、再分極を経るだけの時間が必要となる。膜が次の活動電位を発生させる状態になる前の状態を不活性状態と呼ぶ。

このことにより、今まさに脱分極が起こっている部位は片方向にしかその神経インパルスを伝達できないのである。なぜならほんの少し前に脱分極が起こっていた側は不活性状態になっているので脱分極が引き起こされないからである。

2.

- (i) *eyeless* 遺伝子が目の形成に必要であることは問題文で与えられたように示すことができる。しかしこれが目の形成に十分であることはどのように示したらよいだろうか。

そのためにはこの遺伝子だけにより、本来目が形成されない所にも複眼が形成されることを示せばよいだろう。

具体的には次のようにすればよい。任意のプロモーターにより発現可能な GAL4 を持つ個体と、UAS 配列 (GAL4 にのみ反応し、活性化する領域) にコントロールされる eyeless をもつ個体を交配させ、結果として、GAL4 のプロモーターに対応した転写活性化因子により eyeless が発現する仕組みを持つ子供ができる。その転写活性化因子が存在する場所で眼がつくられることが示されれば良い。

余談ではあるが、このことは実際に示されている。

註： 実際には GAL4 などの知識は要求されないと考えられる。「本来は目が形成されない所を形作ることになる DNA の部位（正確には成虫原基）に eyeless 遺伝子を挿入することによって複眼が形成される」旨を書けば良い。

- (ii) 複眼のような複雑な組織を形成するのに、高々ひとつの遺伝子が作る蛋白質のみで対応できるとは考えにくい。また、この遺伝子が転写因子（あるプロモータを活性化させる分子）をコードしていることから、この eyeless 遺伝子は複眼を形成するための様々な遺伝子の転写活性をも活性化させるのであると考えられる。つまり、eyeless 遺伝子は複眼形成のためのマスター遺伝子であると考えられる。

2000年度

2000年度 入学試験 一般教育科目

英語

1. 次の文を読んで、自ら考えるところを 英語で、20 行程度で記せ。

Nuclear power plants currently provide about 18% of the world's electricity. Although global demand for electricity is increasing, this figure is expected to fall as the construction of new nuclear power stations winds down. Some in the nuclear industry, however, are fighting back, arguing that the only way to meet demand while cutting emissions of greenhouse gases is to build more nuclear power plants.

But this fight back comes at a bad time for the industry. Last year a nuclear worker in Japan died after mishandling enriched uranium. Historically, governments invested heavily in the nuclear industry following the oil crisis in the 1970's. The price of oil then fell, new reserves of oil and gas were discovered. However, much of the optimism within the nuclear industry comes from its environmental credentials. The International Energy Agency estimates that world energy demand in 2020 will be two-thirds more than 1995 levels, and in 1997 at the Kyoto conference industrialized nations pledged to cut greenhouse-gas emissions to 5% below 1990 levels by 2012. Nuclear energy produces almost no greenhouse gases.

Japan remains committed to nuclear power, despite recent problems, and produces about one-third of its electricity from nuclear sources. Japan expects to increase its nuclear capacity by more than 20% over the next two decades.
(adapted from *Physics World*, April 2000)

2. 次の英文は、ノーベル平和賞を受賞した或る物理学者の文章である。これを読み以下の設問に答えよ。

(i) 下線部 (a),(b) を和訳せよ。

(ii) 科学者になろうとする人に筆者が提唱していることを日本語で(直訳ではなく、自分の言葉で)説明せよ。

The tremendous advances in pure science made during the 20th century have completely changed the relation between science and society. Through its technological application, science has become a dominant element in our lives. It has enormously improved the quality of life. It has created great perils, threatening the very existence of the human species. Scientists can no longer claim that their work has nothing to do with the welfare of the individual or with state policies.

However, (a) many scientists still cling to an ivory tower mentality founded on precepts such as "science should be done for its own sake", "science is neutral", and "science cannot be blamed for its misapplication." This amoral attitude is in my opinion actually immoral, because it eschews personal responsibility for the likely consequences of one's actions.

The ever-growing interdependence of the world community offers great benefits to individuals, but by the same token it imposes responsibilities on them. Every citizen must be accountable for his or her deeds. This applies particularly to scientists, for the reasons I have outlined. It is also in their interest, because the public holds scientists responsible for any misuse of science. (b) The public has the means to control science by withholding the purse or imposing restrictive regulations. It is far better that scientists themselves take appropriate steps to ensure responsible application of their work.

Professional organization of scientists should work out ethical codes of conduct for their members, including the monitoring of research projects for possible harm to society. It is particularly important to ensure that new entrants into the scientific profession are made aware of their social and moral responsibilities. One way would be to initiate a pledge for scientists, a sort of Hippocratic oath, to be taken at graduation. As in the medical profession, the main value of such an oath might be symbolic, but I believe it would stimulate young scientists to reflect on the wider consequences of their intended field of work before embarking on a career in academia or industry.

I like the pledge initiated by the Student Pugwash Group in the United States, which has already been signed by thousands of students from many countries. It reads: "I promise to work for a better world, where science and technology are used in socially responsible ways. I will not use my education for any purpose intended to harm human beings or the environment. Through my career, I will consider the ethical implication of my work before

I take action. While the demands placed upon me may be great, I sign this declaration because I recognize that individual responsibility is the first step on the path to peace.”

(precept: guide for behavior, eschew: keep oneself away from)

(adapted from *Science*, **288**(1999))

数学

1. 4 次元ユークリッド空間の部分空間 V_1, V_2 を

$$V_1 \equiv \{ \text{条件 } x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \text{ と } x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ \text{を共に満足するベクトル } \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の集合} \}$$

$$V_2 \equiv \{ \text{条件 } 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \text{ と } 3x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ \text{を共に満足するベクトル } \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の集合} \}$$

とする。

(i) V_1, V_2 はそれぞれ何次元の空間か？

(ii) V_1 と V_2 に共通に含まれるベクトルを求めよ。

(iii) 空間 $V_1 \cap V_2$ は何次元か？

2. 原点を中心とし、周辺を固定した半径 a の薄い円形膜の振動を考えよう。平行位置からの変位を u とする。極座標を用い $u = u(r, \theta, t)$ とする時、円形膜の振動は波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \cdots (1)$$

に従う（簡単のため方程式に現れる係数を 1 とおいた）。以下の設問に答えよ。

(i) n 次のベッセル関数 $J_n(x)$ は微分方程式

$$\frac{d^2 J_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d J_n(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0 \quad \cdots (2)$$

を満たす。 $J_n(x)$ の j 番目の零点を ξ_{nj} とする時、次の直交関係

$$\int_0^1 x J_n(\xi_{nj} x) J_n(\xi_{nl} x) dx = 0, \quad j \neq l \quad \cdots (3)$$

が成り立つことを証明せよ。

(ii) 境界条件 $u(a, \theta, t) = 0$ と初期条件 $u(r, \theta, 0) = F(r, \theta), \left[\frac{\partial u(r, \theta, t)}{\partial t} \right]_{t=0} = 0$ を満たす波動方程式の解を変数分離の方法で求めよ。（1）で議論した直交関係を用いてよい。

3. 未知関数 $x(t)$ に関する常微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \beta^2 x(t) = f(t) \quad \cdots (4)$$

について以下の設問に答えよ。ここで、 α および β は正の定数とする。

(i) この方程式をフーリエ変換を用いて調べ、未知関数 x を

$$x(\omega) = C(\omega)f(\omega) \quad \cdots (5)$$

の形で表せ。ただし $x(\omega), f(\omega)$ は $x(t), f(t)$ のフーリエ変換とする。

(ii) $f(t) = \delta(t)$ (デルタ関数) の場合を考える。（1）の結果を用い留数定理を適用して解 $x(t)$ を以下の場合について求めよ。

(i) $\alpha < \beta$

(ii) $\alpha = \beta$

(iii) $\alpha > \beta$

英語 解答

1. 全訳

原子力発電は現在世界の電力のおよそ 18% をまかなっている。世界の電力需要は増加しているが、この数値からは減るものと見こまれている。新規の原発の建設が減っているからである。しかし、原発業界の一部は反撃する。温室効果ガスの排出を抑えつつ需要にこたえるには、もっと原発をつくるしかないと。

しかしこの反撃も時期が悪い。昨年日本では、濃縮ウランの軽率な取りあつかいによってひとりが亡くなっている。歴史的に見れば、政府は 1970 年代の石油危機以来、原発業界にかなりの投資をしてきた。その後石油の価格はさがり、新たな油田やガス田も発見されたが、業界内部は上にあげたような環境配慮の面から楽観的であった。国際エネルギー機関は 2020 年の世界のエネルギー需要は 1995 年の 5/3 倍になるとしている。一方、1997 年の京都会議では工業先進国は 2012 年には温室効果ガスの排出を 1900 年より 5% 少なくすると誓った。原子力はほとんど温室効果ガスを出さないのである。

日本は昨今の不祥事にもかかわらず原子力に依存している。実際、日本の電力の 1/3 は原発によるものである。日本は原発による発電をこれからの 20 年で 20% 以上増やすことを計画している。この行動は他の先進国とは異なっている。

解答例 I focus the discussion in the following on the claim that nuclear plants produce no greenhouse gases, which is seemingly mentioned to imply that they are somewhat ‘safer’ to the environment.

We often hear that global warming, caused possibly by greenhouse gases emitted by us and accumulated in the air already is threatening us, for example small island countries in the South Pacific are said to disappear under the water in the near future. Although the debate whether there is global-warming, or if there is, whether the cause is the human emission of greenhouse gases have not yet been settled even scientifically, to start eliminating the emission in this stage is politically correct I think, because it seems to me that we will need oil not only as the source of energy, but also as the source of many chemicals, and that the latter need will last even if all energy can be produced from something other than oils. In this respect, nuclear plants are certainly good, they use no oils, emit no greenhouse gases, etc.

But of course nuclear fuel must be handled with great care, during and after its use. The accident last year in Japan is just one example. You know many others, including one at Chernobyl. The point is that even though otherwise very safe, once an accident spreads the radioactive elements around, the damage caused is enormous and lasts quite long. And even if a plant ends its life with no accident, the waste produced and the plant itself is dangerously radioactive, so they are to be watched by us, not just us living today but including generations many many after us. Considering this, the cost imposed for human beings total is I think formidably big. Maybe to decrease the emission of carbon dioxide quickly we must first rely on the nuclear plants. But we should bear in mind that it is only an intermediate step to a more, truly safer way of getting energy.

2. 全訳

20 世紀における純粋科学の大いなる進歩は、科学と社会の関係を完全に変えた。科学技術の応用を通して、科学は我々の生活の支配的要素となった。科学は生活水準を大いに向上させた。科学は大変な危険物をも生み出し、それは人類の存在をも脅かしている。科学者は自分たちの研究が個人の幸福や国家の方針と無関係であるなどとはもはや言っていない。

しかしながら、(a)多くの科学者はまだ、「科学はそれ自身のためになされるべきである」「科学は中立である」「科学は誤用を非難され得ない」といった格言に基づく象牙の塔的な思考に固執している。この道徳観念を欠いた態度は、私の考えでは、実際不道徳である。何故ならば、自分の行動によってもたらされるかもしれない結果に対する個人の責任を避けているからである。

国際社会の相互依存性は増大する一方であり、そのことは個人に大きな利益をもたらすと同時に個々人に責任を課している。民間人各々が自分の行為に責任を持たなければならない。私が概説したような理由によって、

このことは特に科学者に当てはまる。そのことはまた、科学者のためもある。何故ならば大衆は科学の誤用の責任が科学者にあると考えているからである。(b) 大衆は、財源を抑えるとか制限的な規則を設けるといった、科学を統制する手段を持っている。科学者自らがその研究の応用に責任を持つことを確実にするため適切な措置をとればなお一層良い。

社会に対してもたらされ得る危害を調査するプロジェクトを監視することも含めて、科学者の専門組織は構成員向けに研究上の倫理規約を設けるべきである。科学に携わる職業に新規に就く者に自身の社会的・道徳的責任を自覚させることは特に重要である。1つの方法は、卒業時に同意すべき科学者の誓約（一種のヒポクラテスの誓い）を設けることであろう。医学の職においてのように、そのような誓いの主たる価値は象徴的であるだろうが、その誓いが若い科学者に学界や産業でのキャリアに漬ぎ出す前に研究の専攻分野の帰結についてより広くじっくり考えさせるきっかけを与えるであろうと私は信じている。

私は合衆国の学生パグウォッシュグループが提唱した誓約が気に入っている。それは既に多くの国々の何千もの学生によって署名されている。それにはこう書かれている；「私は、科学と技術が社会的に責任を持って用いられるようなより良い世界を実現するよう努めることを誓います。私は、人類や自然環境に害を与えることを意図した如何なる目的のためにも私の受けた教育を用いません。私はこの職につく限りにおいて、行動する前に私の研究の倫理的影響を良く考えます。私に課された要求は大きいかもしれません、私は個々の責任が平和への道における第一歩であるということを認識しているのでこの宣言に署名します。」

(*Science*, 288(1999) より)

解答例：科学者になろうとする人に筆者が提唱していること 科学は大いに発展し、その応用は我々の生活水準の向上に貢献すると同時に人類・自然環境に有害なものをも生み出している。科学が個人の幸福から国家間の利害までも左右するほどの強大な影響力を獲得した今、もはや科学者が研究成果の応用に関して無責任な態度をとることは許されない。科学者は実際的な科学による害を調査するのみならず、研究上の倫理規約を自らに課すべきである。卒業して科学研究の世界に羽ばたく前に、何らかの誓いを立て、科学を扱う者としての責任、科学者としての倫理をよく見つめなおしておくべきである。即ち、科学者を志す者は研究の応用に関して研究者としての自分の責任をまず自覚すべきである、と筆者は提唱しているのである。

数学 解答

1. 式の番号を以下のように定める。4 次元ユークリッド空間の部分空間を考えているので各変数は実数である。

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \quad \cdots (1)$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad \cdots (2)$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \quad \cdots (3)$$

$$3x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \quad \cdots (4)$$

(i) (1), (2) より、

$$V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_3 = x_1 + 2x_2, x_4 = 3(x_1 + x_2)\} \quad \cdots (5)$$

よって V_1 は 2 次元 の空間。

(3), (4) より、

$$V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = (-2x_3 + x_4)/3, x_2 = (-2x_3 + 4x_4)/3\} \quad \cdots (6)$$

よって V_2 は 2 次元 の空間。

(ii) $x_3 = x_1 + 2x_2, x_4 = 3(x_1 + x_2)$ を $x_1 = (-2x_3 + x_4)/3$ に代入し、整理して $x_2 = -2x_1$ を得る。

$x_3 = x_1 + 2x_2, x_4 = 3(x_1 + x_2)$ と $x_2 = (-2x_3 + 4x_4)/3$ からも $x_2 = -2x_1$ を得るので、

$$V_1 \cap V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_2 = -2x_1, x_3 = x_1 + 2x_2, x_4 = 3(x_1 + x_2)\} \quad \cdots (7)$$

$$= \{c(1, -2, -3, -3) | c \text{ は任意の実数}\} \quad \cdots (8)$$

となる。よって $c(1, -2, -3, -3)$ (c は任意の実数) が V_1, V_2 に共通に含まれる。

(iii) 上の結果 (8) より $V_1 \cap V_2$ は 1 次元 である。

2. (i) $J_n(x)$ が (2) を満たすから、 α, β を任意の実数として

$$\frac{d}{dx} \left\{ x \frac{dJ_n(\alpha x)}{dx} \right\} + \left(\alpha^2 x - \frac{n^2}{x^2} \right) J_n(\alpha x) = 0 \quad \cdots (9)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ x \frac{dJ_n(\beta x)}{dx} \right\} + \left(\beta^2 x - \frac{n^2}{x^2} \right) J_n(\beta x) = 0 \quad \cdots (10)$$

(9) $\times J_n(\beta x) - (10) \times J_n(\alpha x)$ を $[0, 1]$ で積分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \left[J_n(\beta x) \frac{d}{dx} \left\{ x \frac{dJ_n(\alpha x)}{dx} \right\} - J_n(\alpha x) \frac{d}{dx} \left\{ x \frac{dJ_n(\beta x)}{dx} \right\} \right] + (\alpha^2 - \beta^2) \int_0^1 x J_n(\alpha x) J_n(\beta x) dx \\ &= x \left\{ J_n(\beta x) \frac{dJ_n(\alpha x)}{dx} - J_n(\alpha x) \frac{dJ_n(\beta x)}{dx} \right\} \Big|_0^1 + (\alpha^2 - \beta^2) \int_0^1 x J_n(\alpha x) J_n(\beta x) dx \end{aligned}$$

となる。

α, β が $J_n(x)$ の異なる零点である場合を考える。右辺の第 1 項は、(2) より、

$$\bullet n = 0 \text{ のとき、 } dJ_n(x)/dx = -x(d^2 J_n(x)/dx^2 + J_n(x)) \rightarrow 0 (x \downarrow 0)$$

$$\bullet n > 0 \text{ のとき、 } (n^2 - x^2) J_n(x) = x(x d^2 J_n(x)/dx^2 + dJ_n(x)/dx) \rightarrow 0 (x \downarrow 0)$$

となるので 0 であるから、

$$\int_0^1 x J_n(\alpha x) J_n(\beta x) dx = 0$$

となる。

(ii) まず、(1) の解で $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ と変数分離でき、初期条件

$$\left[\frac{\partial u(r, \theta, t)}{\partial t} \right]_{t=0} = 0 \quad \cdots (11)$$

を満たすものを求める。

$\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ とおき、(1) に代入して整理すると

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} / T = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) / \psi \quad \cdots (12)$$

を得るので、両辺の値は r, θ, t によらない定数である。これを $-\lambda^2$ とおく。

$\partial^2 T / \partial t^2 = -\lambda^2 T$ の解で、値が実数かつ (11) を満たすものは $T(t) \propto \cos \lambda t$ なるものに限られる。

$\psi(r, \theta)$ に関する方程式を R, Θ で書き直して整理し、 $R' = dR/dr, \Theta' = d\Theta/d\theta$ のように略記すると

$$r^2 \left(\frac{R'' + R'/r}{R} + \lambda^2 \right) = -\frac{\Theta''}{\Theta}$$

両辺は r, θ によらないので r^2 とおける。

$\Theta'' = -r^2 \Theta$ なので、 ν が整数の場合に限り一価の独立な実数解 $\Theta(\theta) \propto \sin \nu \theta, \Theta(\theta) \propto \cos \nu \theta$ がある。

$R(r)$ についての方程式は、 $x = \lambda r$ と変数変換すると

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial R}{\partial x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0$$

となるから、 $r \geq 0$ で有限な実数解は $R(r) = J_\nu(\lambda r)$ に限られる。

境界条件 $u(a, \theta, t) = R(a)\Theta(\theta)T(t) = 0$ より、 $R(a) = J_\nu(\lambda a) = 0$ なので、 $\xi_{\nu j}$ を J_ν の j 番目の零点として $\lambda = \xi_{\nu j}/a$ と書ける。

以上より、(11) と境界条件を満たす (1) の解は

$$\varphi_{\nu j}^{(1)} = J_\nu \left(\frac{\xi_{\nu j}}{a} r \right) \sin \nu \theta, \varphi_{\nu j}^{(2)} = J_\nu \left(\frac{\xi_{\nu j}}{a} r \right) \cos \nu \theta$$

の形のものに限られる。これらが、2 個の解の積を半径 a の円 S の内部で積分することで定義される内積に関して直交することを示す。(厳密には完全直交系をなすことを示すべきであろう)

θ に関して先に積分すれば、 $\varphi_{\nu j}^{(1)}$ と $\varphi_{\nu' j'}^{(2)}$ が直交すること、および $\nu \neq \nu'$ のとき $\varphi_{\nu j}^{(i)}$ と $\varphi_{\nu' j'}^{(i)}$ が直交する ($i = 1, 2$) ことがわかる。

よって、 ν が等しく j が異なる場合で、 θ に関する積分が消えない場合を考えればよいが、このとき (i) の結果より

$$\int_S \varphi_{\nu j}^{(i)} \varphi_{\nu j}^{(i)} dS = \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \nu \theta d\theta \right) \int_0^a r J_\nu \left(\frac{\xi_{\nu j}}{a} r \right) J_\nu \left(\frac{\xi_{\nu j}}{a} r \right) = 0$$

となる ($x = r/a$ と置換して積分すればよい)。

従って、(上の解が完全直交系をなすことを認めれば) 初期条件 $u(r, \theta, 0) = F(r, \theta)$ を満たす解は、

$$a_{\nu j}^{(1)} = \int_S F(r, \theta) J_\nu \left(\frac{\xi_{\nu j}}{a} r \right) \sin \nu \theta dS / \int_S J_\nu^2 \left(\frac{\xi_{\nu j}}{a} r \right) \sin^2 \nu \theta dS$$

および

$$a_{\nu j}^{(2)} = \int_S F(r, \theta) J_\nu \left(\frac{\xi_{\nu j}}{a} r \right) \cos \nu \theta dS / \int_S J_\nu^2 \left(\frac{\xi_{\nu j}}{a} r \right) \cos^2 \nu \theta dS$$

を用いて、

$$u(r, \theta, t) = \sum_{\nu} \sum_j J_\nu \left(\frac{\xi_{\nu j}}{a} r \right) (a_{\nu j}^{(1)} \sin \nu \theta + a_{\nu j}^{(2)} \cos \nu \theta) \cos \frac{\xi_{\nu j}}{a} t$$

となる。

3. (i)

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} x(\omega) d\omega \quad \cdots (13)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(\omega) d\omega \quad \cdots (14)$$

を (4) に代入し、 t に関する微分と ω での積分の順序を交換して

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} [(-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \beta^2)x(\omega) - f(\omega)] d\omega = 0 \quad \cdots (15)$$

を得る。これが任意の t に対して成り立つので、

$$(-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \beta^2)x(\omega) = f(\omega)$$

すなわち $C(\omega) = -\omega^2 + 2i\alpha\omega + \beta^2$ となる。

(ii) $f(t) = \delta(t)$ のとき、フーリエ変換の定義により

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \delta(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

であるから、フーリエ変換可能な解 $x(t)$ があるとき、 $x(t)$ は

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} x(\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{f(\omega)}{C(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^{i\omega t}}{(\omega - i\alpha)^2 - \beta^2 + \alpha^2} d\omega \quad \cdots (16)$$

で与えられることがわかる。ここで、 $g(\omega) = -e^{i\omega t}/((\omega - i\alpha)^2 - \beta^2 + \alpha^2)$ とおく。

(i) $\alpha < \beta$

$\gamma = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ とおくと、 $g(\omega)$ の極は $\omega = i\alpha \pm \gamma$ である。

$\alpha > 0$ より、極はどちらも上半平面にあるので、 $t < 0$ のとき (16) によって $x(t) = 0$ となる。

$t > 0$ のとき、図 (27) に示した上側の経路 C に沿った積分は

$$\int_C g(\omega) d\omega = 2\pi i (\text{Res}(g, i\alpha + \gamma) + \text{Res}(g, i\alpha - \gamma)) = 2\pi e^{-\alpha t} \frac{\sin \gamma t}{\gamma}$$

となり、半円の半径を R とすれば、 $R >> \alpha, \beta$ のとき $|g(\omega)| = O(R^{-2})$ なので、 $R \rightarrow \infty$ のとき半円部分の積分は 0 に収束する。よって

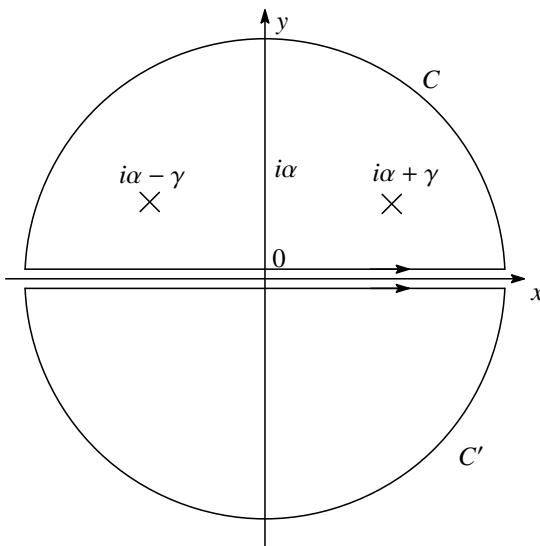
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega = e^{-\alpha t} \frac{\sin \gamma t}{\gamma}$$

となる。

以上から、

$$x(t) = \Theta(t) e^{-\alpha t} \frac{\sin \gamma t}{\gamma} = \Theta(t) e^{-\alpha t} \frac{\sin \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} t}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$$

を得る。

図 27: $\alpha < \beta$ の場合の積分経路(ii) $\alpha = \beta$ このとき、 $g(\omega)$ は $\omega = i\alpha$ に 2 位の極を持つ。 $f(z)$ が $z = z_0$ に n 位の極を持つとき、

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]$$

であるから、

$$\text{Res}[g(\omega), i\alpha] = \lim_{\omega \rightarrow i\alpha} \frac{d}{d\omega} (-e^{i\omega t}) = -ite^{-\alpha t}$$

となる。

 $t > 0$ のとき、図 (27) の C に沿って積分すると半円部分は (i) と同様に $R \rightarrow \infty$ で消えるので、

$$x(t) = 2\pi i \text{Res}[g(\omega), i\alpha] = te^{-\alpha t}$$

 $t < 0$ のとき、図 (27) の C' に沿って積分すると半円部分が消え、 $x(t) = 0$ となる。

よって、

$$x(t) = \Theta(t)te^{-\alpha t}$$

が得られる。

(iii) $\alpha > \beta$

$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ と定める。

$\alpha > \gamma > 0$ より、極はどちらも上半平面にあるので、 $t < 0$ のとき (16) によって $x(t) = 0$ となる。

$t > 0$ のとき、図 (28) に示した上側の経路 C に沿った積分は

$$\int_{C'} g(\omega) d\omega = 2\pi i (\text{Res}(g, i\alpha + i\gamma) + \text{Res}(g, i\alpha - i\gamma)) = 2\pi e^{-\alpha t} \frac{\sinh \gamma t}{\gamma}$$

となり、半円の半径を R とすれば、 $R >> \alpha, \beta$ のとき $|g(\omega)| = O(R^{-2})$ なので、 $R \rightarrow \infty$ のとき半円部分の積分は 0 に収束する。よって

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega = e^{-\alpha t} \frac{\sinh \gamma t}{\gamma}$$

となる。

以上から、

$$x(t) = \Theta(t) e^{-\alpha t} \frac{\sinh \gamma t}{\gamma} = \Theta(t) e^{-\alpha t} \frac{\sinh \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} t}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$$

を得る。

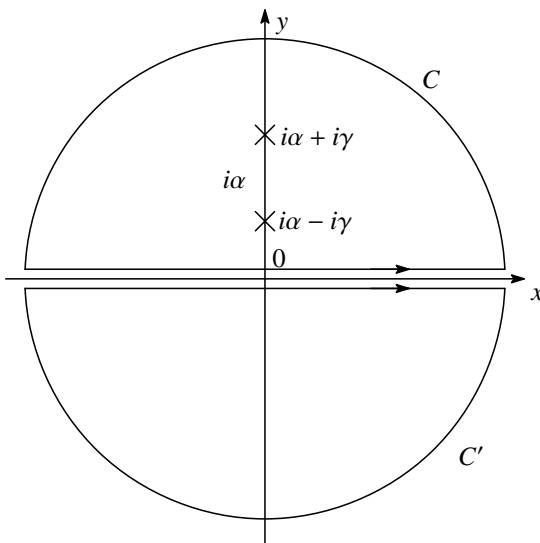
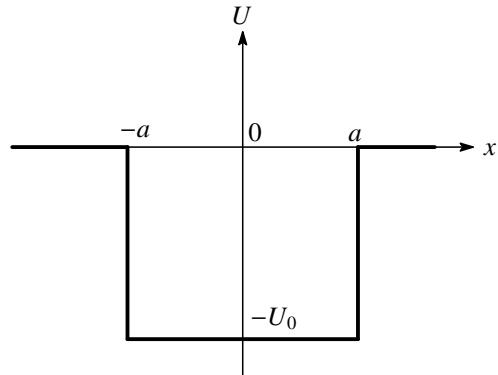


図 28: $\alpha > \beta$ の場合の積分経路

(注) 境界条件が指定されていないので、一般解は 2 個の積分定数を含むが、問題文の指示に従って解くと $t < 0$ で $x(t) = 0$ を満たす解のみが得られる。

2000年度 入学試験 物理専門科目

問題 1



図のような 1 次元の井戸型ポテンシャル $U(x)$

$$U(x) = \begin{cases} -U_0 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

の中での質量 m の粒子の束縛状態 (エネルギー $E < 0$) を考える。

1. まず、量子力学の不確定性関係を使ってこの問題を考える。

- (i) 粒子がポテンシャル U に束縛されていることから、直感的には粒子の位置の不確定性 Δx は a 程度だと考えられる。そこで、 $\Delta x = a$ として粒子の運動量の不確定性 Δp を求めよ。
- (ii) 運動量の大きさ p は Δp より大きいと考えて、(i) の結果から粒子の束縛状態が存在するためにはポテンシャルの深さ U_0 にどのような条件が必要と思われるか。

2. 実は上で求めた束縛状態が存在する条件は正しくなく、どんなに浅いポテンシャルに対しても束縛状態が存在する。

- (i) Schrödinger 方程式を使って束縛状態 ($E < 0$) の波動関数 $\psi(x)$ を求めよ。その際、エネルギー E と U_0, a, m の関係式を導け。(波動関数の規格化は考えなくてよい。)
- (ii) 1(ii) の結果に反してどのような U_0 の値に対しても束縛状態が存在することを示せ。
- (iii) $U_0 \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$ のときに E を求めよ。
- (iv) 2(iii) の場合に粒子がポテンシャル井戸の外側にいる確率 $P(|x| > a)$ と内側にいる確率 $P(|x| < a)$ の比 $R = P(|x| > a)/P(|x| < a)$ を求めよ。また、これから 1(ii) の考え方が正しくなかった理由を述べよ。

問題 2

スピンが 1 次元格子上の各点にあり、格子点の数が N (N は偶数) の模型を考察する。そのハミルトニアンは

$$H = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1}$$

とする。ここで周期的境界条件を課し、 σ_{N+1} は σ_1 を意味するものとし、かつ $\sigma_i (i = 1, 2, \dots, N)$ は ± 1 の値をとるものとする。この模型の各状態は $(\uparrow \downarrow \uparrow \cdots)$ のようなスピンの配置によってあらわされる。

1. この模型の状態数は全部でいくつか。
2. J が正の場合と負の場合について基底状態のスピン配置を書け。
3. 前問の場合、基底状態のエネルギーとその縮重重度を求めよ。

以下では J が正の場合のみを考える。

4. 第 1 励起状態のスピン配置を書け。そのエネルギーと縮重重度を求めよ。
5. 全てのエネルギー固有値とその縮重重度を求めよ。ただし 2 項係数

$${}_N C_M \equiv \frac{N!}{M!(N-M)!}$$

を用いよ。

6. 前問の結果を用いて、この系の分配関数を求めよ。ただし温度は T とし、ボルツマン定数は k_B とする。必要に応じて

$$(1+x)^N = \sum_{M=0}^N {}_N C_M x^M$$

を使ってよい。

7. N が無限大の極限での 1 格子点あたりの自由エネルギーが

$$-k_B T \ln \left[2 \cosh \left(\frac{J}{k_B T} \right) \right]$$

であらわされることを示せ。

8. 前問の結果を用いて、1 格子点あたりのエネルギーとエントロピーを求めよ。高温でのエントロピーの漸近的ふるまいを求めよ。

問題 3

時間、空間座標に依存する電荷分布 $\rho(\mathbf{r}', t')$ と電流分布 $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$ がある。これらによって誘起される電磁ポテンシャルは、ローレンツ条件のもとで、次のように表わせる(以下、MKSA 有理単位系を用いる):

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \quad \cdots (1)$$

ϵ_0 と μ_0 はそれぞれ真空の誘電率と透磁率で、光速は $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ と書ける。また、 t' は $t, \mathbf{r}, \mathbf{r}', c$ で定まる量であり、次の設問で考察する。

1. 電磁波が伝わる時の遅延効果を考慮して、式(1)の t' を決定せよ。
2. 電荷 e を持つ点粒子の運動を考え、その位置座標を $\mathbf{x}(t')$ とする。このとき、 $\rho(\mathbf{r}', t')$ と $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$ をディラックの関数を用いて表わせ。
3. この点粒子がつくる遠方 ($|\mathbf{r}| = r \gg |\mathbf{x}|$) での電磁ポテンシャルは、点粒子の速度 \mathbf{v} が光速に比べて充分小さい場合には、(1) 式の $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ を $1/r$ で近似して求めることが出来る。この電磁ポテンシャルが、 \mathbf{v}/c の 1 次までの近似で、以下のように表わせることを示せ:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}(t_0)}{c} \right), \quad c\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\mathbf{v}(t_0)}{c}. \quad \cdots (2)$$

但し、 $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$, $t_0 = t - r/c$ である。

4. 前問の結果から、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ と磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}$ の遠方での主要項($1/r$ に比例する項)が、点粒子の加速度 \mathbf{a} を用いて以下のように表わせることを示せ:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}(t_0)), \quad c\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}(t_0). \quad \cdots (3)$$

ここで、ベクトル積の公式 $\mathbf{X} \times (\mathbf{Y} \times \mathbf{Z}) = \mathbf{Y}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Z}) - \mathbf{Z}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})$ を使って良い。

5. (3) 式を用いて以下の設間に答えよ。

- (i) 点粒子が、図 1 のように、一定の振幅 b と一定の振動数で x 軸上を単振動しているとする。このとき、原点から距離 r だけ離れた球面上 ($r \gg b$ とする) で、点粒子の運動の一周期あたりに、電磁波の強度が最大となる場所はどこか? 理由をつけて答えよ。
- (ii) 点粒子が、図 2 のように、一定の半径 b と一定の角振動数で xy 平面上を回転運動しているとする。このとき、原点から距離 r だけ離れた球面上 ($r \gg b$ とする) で、点粒子の運動の一周期あたりに、電磁波の強度が最大となる場所はどこか? 理由をつけて答えよ。

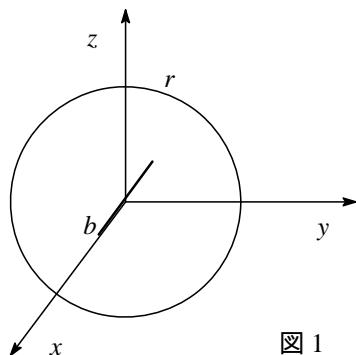


図 1

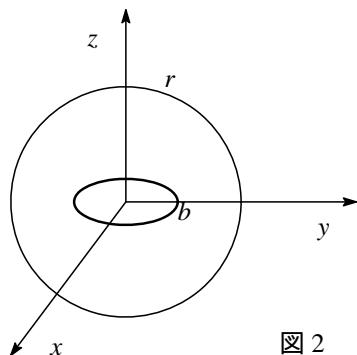


図 2

問題 4

ロケットの等加速度運動を相対論的に考察する。以下では一次元的な運動のみを考え、静止した観測者の系で時刻 t におけるロケットの座標を $x(t)$ と書く。

1. ロケットに固定された時計が示す時間を固有時間 τ と呼ぶ。観測系における時刻 t_1 から t_2 の間の固有時間の経過は光速を c として

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2}$$

で与えられることをローレンツ変換を用いて示せ。ここでローレンツ変換とは、ある座標系 (t, x) とそれに対して x 軸方向に速度 v で運動している座標系 (t', x') の間では次のように定義される。

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}ct - \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}x$$

$$x' = -\frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}ct + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}x$$

2. 相対論的な速度ベクトルおよび加速度ベクトルは

$(u^\mu) = (c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau})$, $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$, ($\mu = 0, 1$) で記述される。このとき常に

$$u^\mu u_\mu = c^2, \quad u^\mu a_\mu = 0 \quad \cdots (1)$$

が成立することを示せ。ただし $u^\mu v_\mu \equiv u^0 v^0 - u^1 v^1$

3. 以下ではロケットの等加速度運動、すなわち運動する物体の静止系において正方向に定数 $g (> 0)$ で加速されている状況を考察する。このときロケットの加速度ベクトルが $a^\mu a_\mu = -g^2$ をみたすことを示せ。またそれと(1)を用いて u^μ に対する次の運動方程式を導け。

$$\frac{du^0(\tau)}{d\tau} = \frac{g}{c} u^1(\tau) \quad \frac{du^1(\tau)}{d\tau} = \frac{g}{c} u^0(\tau) \quad \cdots (2)$$

4. 初期条件 $\tau = 0$ で $t = x = \frac{dx}{d\tau} = 0$ という初期条件のもとに運動方程式 (2) を解き、 t, x をロケットの固有時間 τ の関数として求めよ。
5. これから例えば g を地表の重力加速度 ($\approx 10 \text{m/s}^2$) とした場合、地球から銀河の中心まで行くのに（距離約 3 万光年）ロケットの固有時間はどれくらい経過するか。有効数字一桁で答えよ。ただし $\ln(10) \approx 2.3$, 1 年 $\approx 3.1 \times 10^7$ 秒を用いて良い。
6. 地球からこのロケットを観測するために、信号を光速で送りそれがロケットで反射して返ってくるまでの時間を計測する。時刻 t に送った信号が返ってくるまでの時間間隔を求めよ。特にこの観測が不能になるのはどのような場合か理由とともに考察せよ。

問題 5

雲母薄膜は図 1 に示すように、厚さが一定の段差 Δd からなるステップ構造をしており、その厚さ d_j は場所により異なり、次式で与えられる。

$$d_j = d_0 + j\Delta d \quad \text{但し } j : \text{整数}$$

この薄膜を光の反射率の高い基板上に貼りつけて上方から見ると、上記の異なった厚さ d_j のステップごとに、異なった波長 λ_j の色が見える。

1. このように見える理由を述べ、 λ_j と d_j 、および雲母の屈折率 n との関係を示せ。但し、 n の波長依存性は無視する。

さて、可視光を用いてこのステップの高さを測定するデバイスを考案した。その準備として、まず複屈折について復習する。

水晶のような、光学的に異方な(複屈折性を持つ)透明光学媒質中を光が伝搬すると、互いに直交した偏光面と異なった屈折率 n_1, n_2 を持つ光(正常光と異常光)にわかれれる。これらの偏光方向をそれぞれ x 軸、 y 軸とし、単色平面波光の伝搬方向を z 軸とする。水晶に入射する直線偏光した波長 λ の単色光電場 E の偏光方向と x 軸のなす角を 45° とする。水晶に入射後の x 軸、 y 軸方向の電場成分は次式であらわされる。

$$\begin{aligned} E_x &= A \cos(k_1 z - \omega t) / \sqrt{2}, & E_y &= A \cos(k_2 z - \omega t) / \sqrt{2} \\ k_1 &= 2\pi n_1 / \lambda, & k_2 &= 2\pi n_2 / \lambda. \end{aligned}$$

ただし、入射位置を $z = 0$ とする。光の伝搬する方向の結晶の厚さが x に依存し、 $D(x)$ で与えられるとき、出射位置における x, y 2 つの偏光方向の電場を次のようにあらわす。

$$\begin{aligned} E_x &= A \cos(k_1 D - \omega t) / \sqrt{2} = A \cos(\Phi(D, t)) / \sqrt{2} \\ E_y &= A \cos(k_2 D - \omega t) / \sqrt{2} = A \cos(\Phi(D, t) + \delta(D)) / \sqrt{2} \end{aligned}$$

2. この時、位相差 $\delta(D)$ を屈折の異方性 $\Delta n = n_2 - n_1$, λ, D などを用いてあらわせ。

デバイスの構造を、図 2 に示す。 x 軸に対して、 $+45^\circ$ 方向(図 2 の P_A 方向)の偏光成分のみを通過する偏光板 A が配置されている。その右側に、厚さが $D(x)$ のくさび形の水晶板、そのさらに右に、もう一枚の検光板を、 -45° 方向(図 2 の P_B 方向)の偏光成分のみを通すようにおのの配置する。くさび形の頂角は充分小さいので、入射面に垂直に z 軸方向に入射した単色光は、水晶への入射、出射に際して屈折しないものとする。

3. このときの検光板 B を通過してきた光電場 E_B を求めよ。それを用いて、光の強度 I を位相差 $\delta(D)$ の関数として求めよ。

4. 位相差 $\delta(D)$ がどのような値の場合に、通過光強度が最大になるか。

頂角 $\theta = 0.1\text{mrad}$ のくさび形の水晶と偏光板、検光板及び検光板に密着した細いスリットを用いて、図 3 に示すようなデバイスを作った。それに白色光を垂直に入射した。ここで、水晶の Δn の波長依存性を無視できるとする。

5. スリットの位置を x 軸方向に動かすと、通ってくる光の波長が変わる。その理由を説明せよ。

人の目は可視光領域では数 nm のスペクトル差を容易に検出できる。雲母薄片に白色光を垂直入射し、その反射光がデバイスに垂直入射した白色光の通過光と同じ色になるように、デバイスのスリット位置を動かす。この時の移動量は常に 2.5mm の整数倍であった。

6. 雲母の二種類の色に対応するようにして決めたスリットの二箇所の位置の水晶の厚さの差は、やはりある一定値 ΔD の整数倍である。 ΔD の値を求めよ。

7. 単位ステップ高さ Δd と ΔD との間の関係を求めよ。
8. 雲母の屈折率 $n = 1.5$ 、水晶の屈折率の異方性 $\Delta n = 0.009$ を用いて、雲母薄片のステップ構造の最小単位ステップの高さ δd を求めよ。

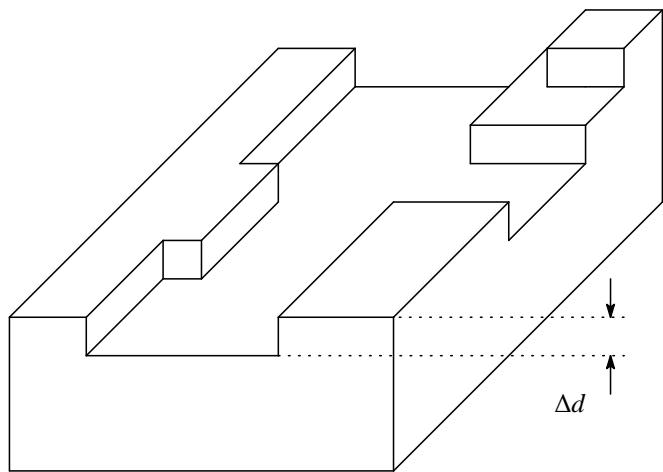


図 1
ステップ構造

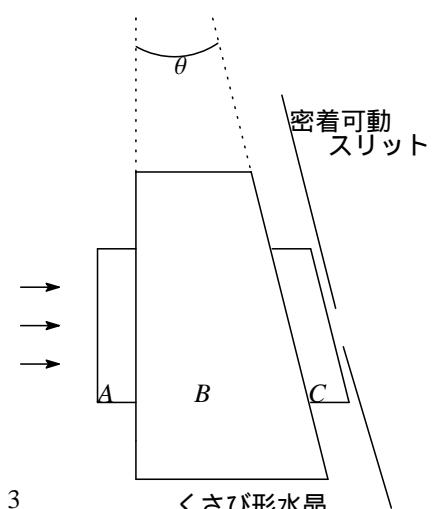


図 3
くさび形水晶

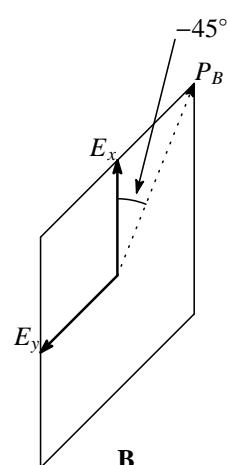
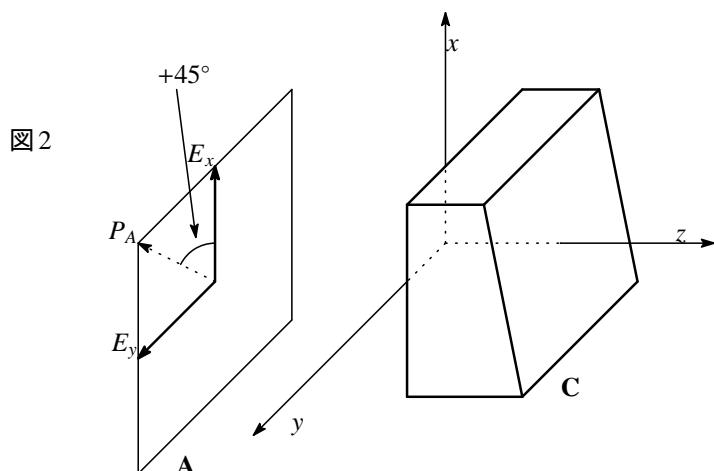


図 2

問題 6

1. ある半導体試料のホール係数の温度依存性を測定したところ、図 1 のように A,B,C の 3 つの温度域でそれぞれ特徴的な振る舞いが見られた。これに関して以下の間に答えよ。但し、この半導体の伝導体の底は等方的で単一の極小をもつ単純な構造を持つものとする。また、この試料には単一種類のドナー（電子供与体）のみが含まれ、アクセプター（電子受容体）はないものとする。必要ならば次の数値を参考にせよ：

$$\text{素電荷 } e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad \text{自然対数 } \ln 10 = \log_e 10 = 2.30$$

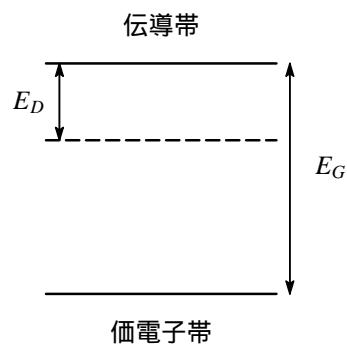
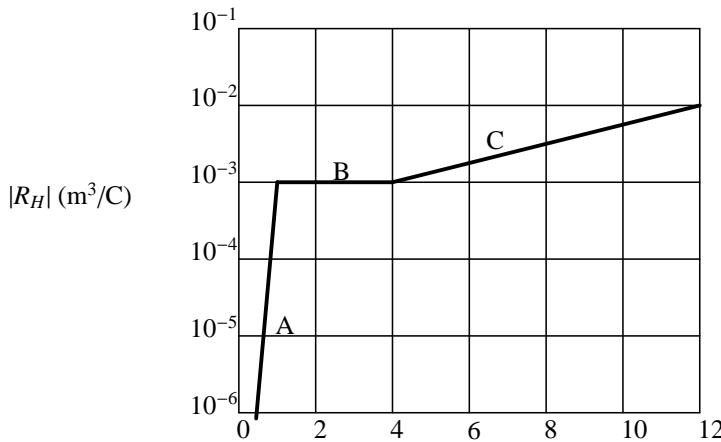


図 1
 $1/T (\times 10^{-3} \text{ K}^{-1})$

- (i) 室温 (300K) におけるキャリアー密度 (電子密度) を求めよ。
- (ii) 前問で求めたキャリアー密度の値は、そのまま、この試料に含まれるドナー不純物の濃度を与えることになる。その理由を説明せよ。
- (iii) ドナー準位の束縛エネルギー E_D (伝導体の底を基準とした値) を求めよ。
- (iv) 前問で求めたエネルギーに相当する電磁波は次のどの波長領域に属するか、次のうちから選べ。

ラジオ波/マイクロ波/赤外線/可視光/紫外線/X 線

- (v) 半導体中のドナー束縛状態は、イオン化したドナー不純物 D^+ のクーロン場に電子が束縛されたものである。この束縛状態を水素原子モデルにならって考えてみよう。水素原子の基底状態の束縛エネルギー E_0 は

$$E_0 = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{m_0 e^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV} \quad (\epsilon_0 : \text{真空の誘電率}, m_0 : \text{電子の質量})$$

である。今の場合、水素原子モデルと異なる点は、a) 電子が真空中ではなく誘電率 ϵ の媒質中にあること、および、b) 結晶の周期ポテンシャルの効果によって電子の有効質量 m^* が自由電子のそれとは異なること、の 2 点である。これらのこと考慮して、ドナー束縛エネルギー E_D を E_0 、 m^*/m_0 、 ϵ/ϵ_0 によって表わせ。

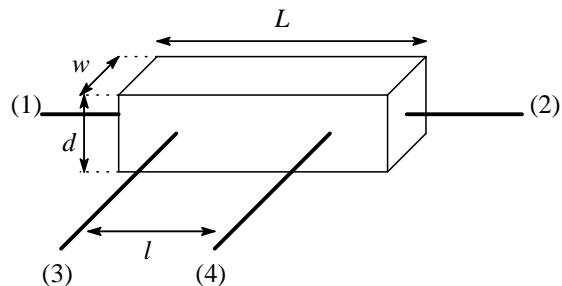
- (vi) $\epsilon/\epsilon_0 = 10$ であるとして、この半導体中のドナー束縛状態について、水素原子のボーア半径に対応する長さを求めよ。その長さを、結晶の原子間距離及びドナー不純物原子間の平均距離と比較することにより、上記の水素原子モデルによる近似が正当化されることを示せ。

2. ある物質を短冊型に切り出した試料に図 2 のように電極をつけ、端子 1-2 間に定電流電源をつなぎ、端子 1-2 間および端子 3-4 間にそれぞれ高入力インピーダンスの電圧計をつないで測定を行った。図中に示した各部の寸法は $L = 5 \text{ mm}$, $l = 3 \text{ mm}$, $w = 1 \text{ mm}$, $d = 0.1 \text{ mm}$ である。

- (i) 端子 1-2 間に一定電流 $I = 0.1 \text{ mA}$ を流したところ、端子 1-2 間には $V_{1-2} = 90.0 \text{ mV}$, 端子 3-4 間には $V_{3-4} = 24.0 \text{ mV}$ の電圧が発生した。この物質の電気抵抗率 ρ を計算せよ。

(ii) 電気抵抗率の測定では、このように試料の 4 本の電極をつけて、電流端子と電圧端子を別々にすることがしばしば行われる。何の為に、そのようにするのかを説明せよ。

(iii) 実際の測定では、電流を $I = +0.1\text{mA}$ としたとき $V_{3-4} = +24.8\text{mV}$ で、 $I = -0.1\text{mA}$ としたときは $V_{3-4} = -23.2\text{mV}$ であった。(問 (i) で用いた $V_{3-4} = 24.0\text{mV}$ はそれらの平均を取ったものである。) このように、電流を反転した時に電圧の大きさが同じにならない原因として、どのような物理的現象が考えられるか。

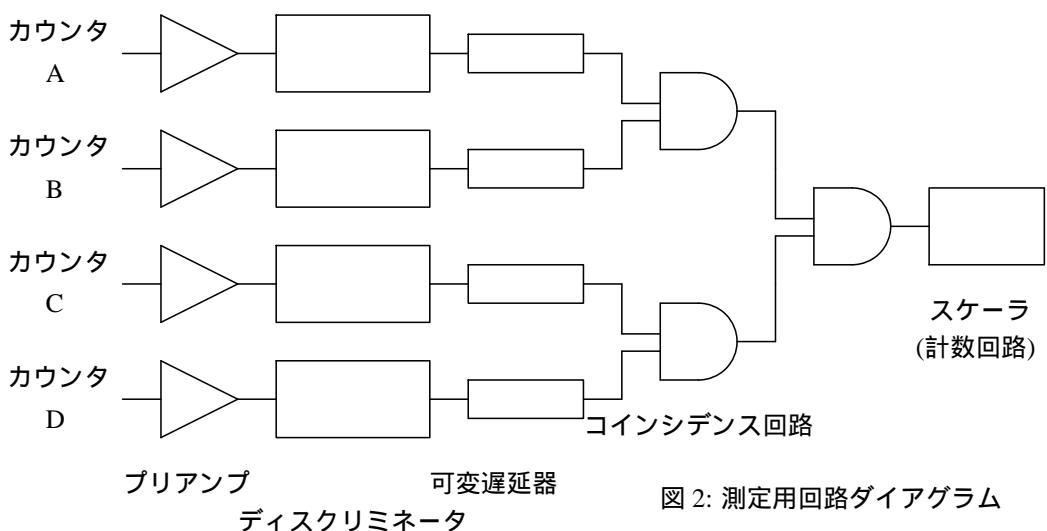


問題 7

図 1 のようなセットアップで、地上において宇宙線を測定する実験を行った。カウンター B と C との間には鉛の板が積めるようになっている。

1. カウンター A ~ D では荷電粒子が通過したことを測定する。荷電粒子の通過を測定する装置としては、一般にどのようなものがあるか。一つ選んでその原理を簡単に説明せよ。
2. カウンターから出てくる信号を図 2 の回路によって計数した。
 - (i) ディスクリミネータは、入力信号があるレベル以上の場合に、一定の時間幅 τ を持つ矩形波を出力する装置である(図 3)。このしきい値のレベルを調整するとき注意すべき点を述べよ。
 - (ii) コインシデンス(同時計数)回路は、2つの入力信号に時間的な重なりがある場合に出力パルスを出す。カウンター A からは毎秒 N_A カウント、カウンター B からは毎秒 N_B カウントの頻度で、コインシデンス回路に信号が入るものとする。それぞれの信号の幅を τ 秒とした時、A と B からの独立な信号が偶然重なってコインシデンス回路から出力が出る頻度はいくらか求めよ。(ただし、A と B の同時計数の頻度は N_A と N_B に比べてずっと少ないものとする。)また、図 2 の可変遅延器はなぜ必要か答えよ。
 - (iii) 偶然によるコインシデンス(同時計数)が多すぎると測定が困難になるが、その場合どのような対策を施したら良いか。
 - (iv) カウンターや回路には、一度信号が来るとすぐには次の信号を受け付けない不感時間がある。この測定装置と回路全体の不感時間は T 秒であった。スケーラーで測定された計数を毎秒 S カウントとすると、眞の計数はいくつか。
 - (v) カウンター B と C の間の鉛の板の枚数を変えながらスケーラーのカウント数を記録すると、図 4 のようになった。図の x、y に対応する宇宙線粒子はそれぞれ以下にあげる粒子のうちどれか答えよ。また、それらの粒子は鉛の中でどういう過程でエネルギーを失うのか説明せよ。

(I) 電子、(II) ニュートリノ、(III) ミュー粒子(ミューオン)



3. 宇宙線に含まれるミュー粒子を鉛の板で止めてその寿命を測りたい。ミュー粒子は、およそ 2 マイクロ秒で電子とニュートリノ 2 つに崩壊する。

- (i) 300MeV/c の運動量を持つミュー粒子を止めるのに必要な鉛の厚さを図 5 より求めよ。ここで、 R は飛程（荷電粒子を止めるのに要する物質量 (g/cm^2)）、 M は粒子の質量、 β は粒子速度を光速度で割ったもの、また $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とする。ただし、ミュー粒子の質量は $106\text{MeV}/c^2$ 、鉛の密度は $11.35\text{g}/\text{cm}^3$ である。
- (ii) 前問で求めた厚さの鉛の板をカウンター B と C の間に置いた。カウンター A、B、C を使ってミュー粒子の寿命を測るにはどのようにしたら良いか。図 2 のようなダイアグラムを書いて説明せよ。この測定では実験誤差としてどのようなものが重要か考察せよ。また、カウンター D を使わない理由を書け。

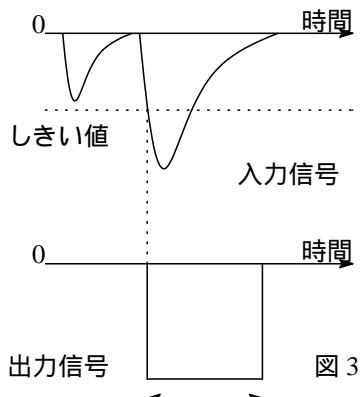


図 3

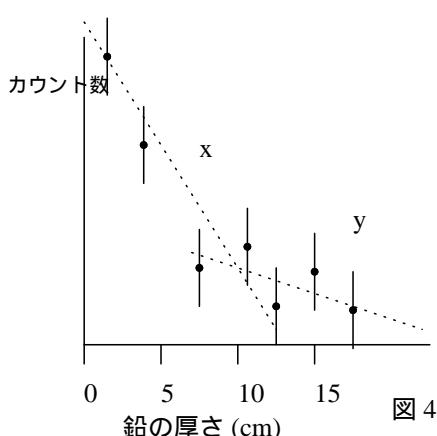


図 4

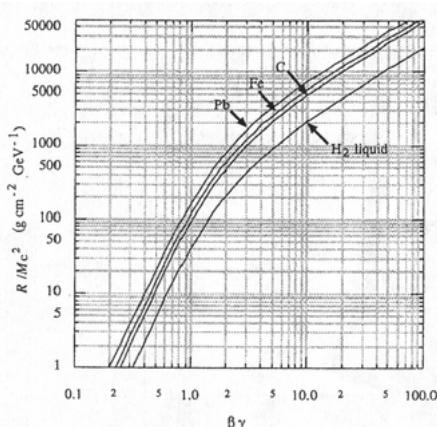
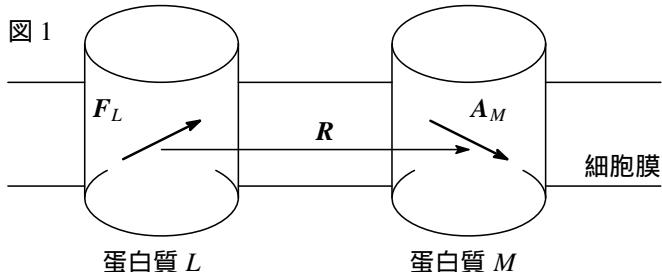


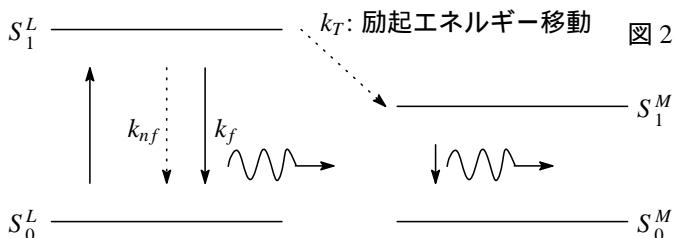
図 5

問題 8

図 1 のように、細胞の膜上にある円筒型蛋白質が並進拡散している。蛋白質が衝突した時に安定な複合体を作ったかどうかを判定するために、蛋白質間の励起エネルギー移動を測定する方法について、以下の間に答えよ。

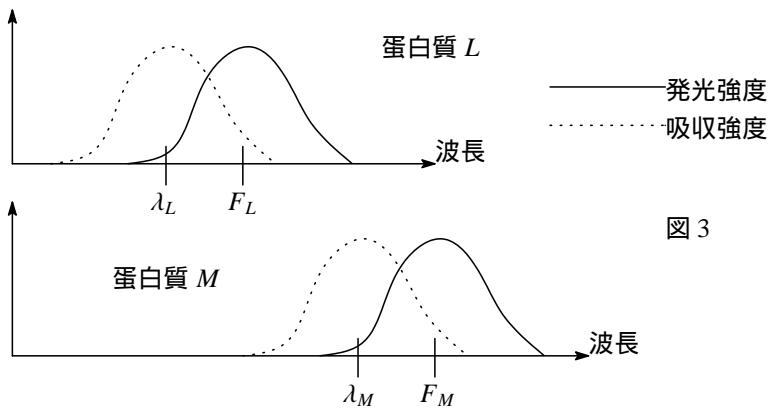


- 蛋白質に結合させた発光体は、基底状態 S_0 と第一励起状態 S_1 を持ち、可視光で励起されるとする。図 2 のように 2 つの異なる蛋白質 L 、 M 内に存在する発光体の電子状態を $(S_0^L, S_1^L), (S_0^M, S_1^M)$ とする。可視光により蛋白質 L の電子が S_0^L から S_1^L に励起された。 S_1^L は S_1^M よりごくわずかエネルギー順いが高いとする。発光体が励起状態 S_1 から S_0 に遷移する時に、発光を伴う速度定数を k_f 、無輻射的に遷移する時の速度定数を k_{nf} とする。ただし速度定数とは単位時間あたり吸収・発光する発光体の割合である。まず蛋白質 L の発光体を $t = 0$ で励起したとき、時間 t で励起状態にある発光体の数 $N(t)$ を k_f, k_{nf} を用いて表わせ。また時間 t での発光強度 $F(t)$ を表わせ。



- 蛋白質 L 内の発光体の励起された電子のエネルギーが S_1^L から S_1^M に移動することを、励起エネルギー移動という。このとき、蛋白質間の励起エネルギー移動は発光遷移双極子モーメント F と吸收遷移双極子モーメント A の双極子相互作用で起こる。励起エネルギー移動の速度定数 k_T は、 $k_T = \alpha k_f J \kappa^2 / R^6$ と書ける。ここで κ^2 は配向因子と呼ばれ、 F や A の方向に依存する量である。蛋白質 L の発光遷移双極子モーメントは F_L 、蛋白質 M の吸收遷移双極子モーメントは A_M のように表わす。 R は F_L と F_R の間の距離ベクトルであり、 J は蛋白質 L の発光スペクトルと蛋白質 M の吸収スペクトルの重なりの大きさである。 α は比例定数である。
 - 励起エネルギー移動がないときとある時の励起状態の蛋白質 L の発光体の寿命を τ と τ' とする。 $1/\tau$ と τ/τ' を上に定義した速度定数を用いてあらわせ。
 - 励起エネルギー移動が起こり τ' が τ の $1/2$ になる距離を R_0 とするとき、 R_0 はどのように書けるか。但し τ, τ' を使わずに書くこと。さらに τ/τ' を R, R_0 の関数として表わすとどうなるか。
 - 配向因子 κ^2 は F_L と A_M の相対角度は位置によって大きく変化するし、この相対配置を試料溶液中の蛋白質で決定するのは一般に大変困難である。従って τ/τ' の値の観測だけでは、蛋白質 L と M の距離 R の変化を決定することは出来ない。ところが、発光体が蛋白質内で 3 次元方向に全く自由に速く運動している時は、 κ^2 の値は $2/3$ であり、このときは蛋白質 L と M の距離を計算することが出来る。 $\kappa^2 = 2/3$ の場合、蛋白質 L と M が複合体を作った場合と、複合体を作らずおたがい離れて 2 次元膜上を運動している時とを比べる。蛋白質 L の τ'/τ は R/R_0 の変化に対してどのように変化するか。定性的に図示し、縦軸と横軸に特徴的な値を記入せよ。但しこのとき、蛋白質の直径は同じ $R_0/2$ であるとし、発光体の中心は円筒型蛋白質の中心と一致するとする。

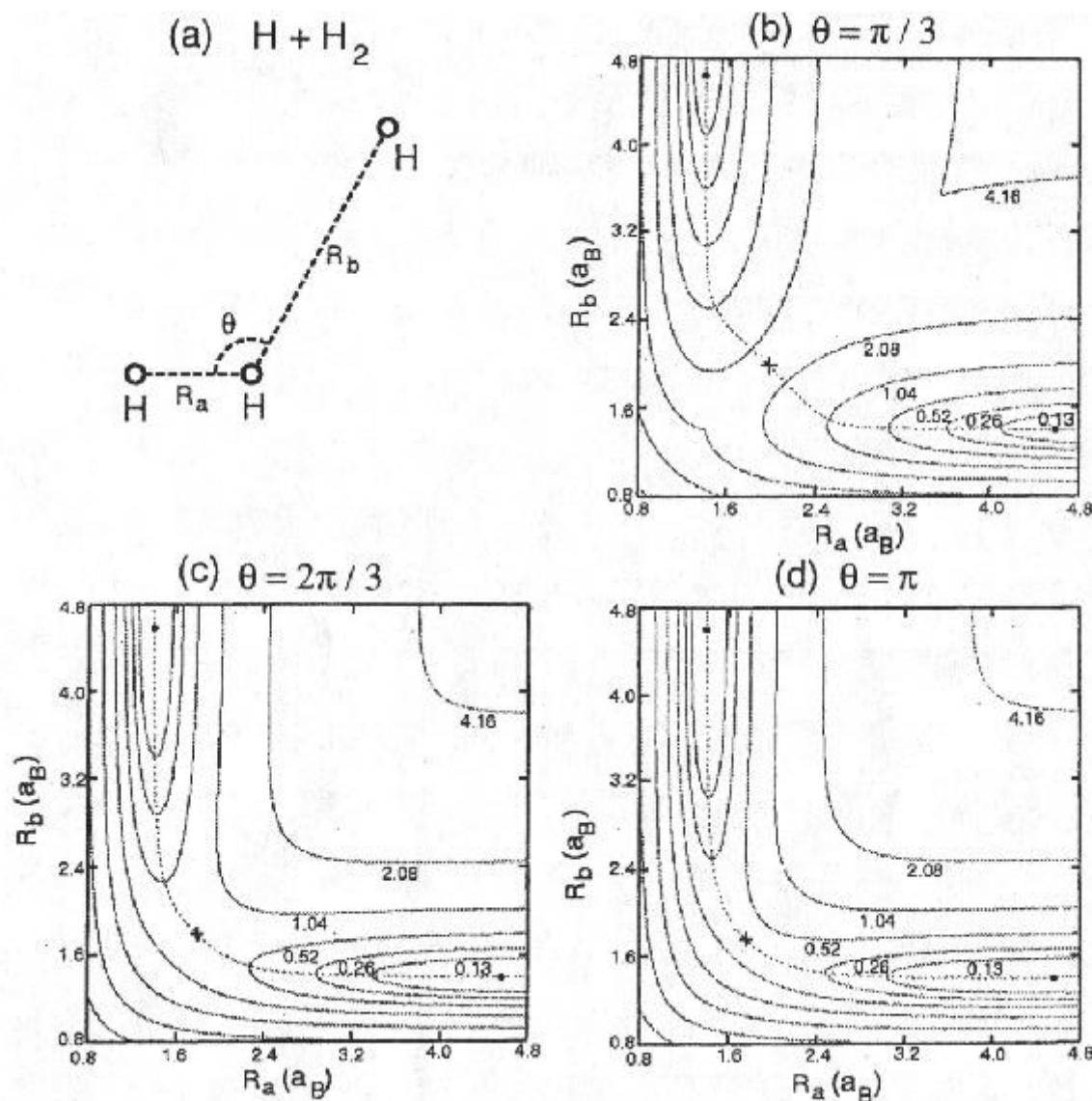
3. 蛋白質 L と M が単独で存在する場合の吸収スペクトルと発光スペクトルを図 3 に示す。 L と M の吸収強度の最大値の波長を各々 λ_L と λ_M とし、 L と M の発光強度の最大値の波長を各々 F_L と F_M とし、 $\lambda_L < F_L < \lambda_M < F_M$ とする。ここで注意すべきは、現実の蛋白質は複雑な構造を持っているので、 L と M の吸収、発光は種々の要因により図 3 のように幅の広いスペクトルを持つ。発光スペクトルを測定することで、実験的に蛋白質 L と M の間に、励起エネルギー移動が起こったか、そうでないかを判定できる。どの波長で励起し、どの発光スペクトル測定を行えば判定できるか。図 3 にならって図示して解答せよ。



問題 9

水素分子の衝突によるパラ水素分子 (*p*-H₂) からオルト水素分子 (*o*-H₂) への化学反応 (水素原始間の結合の組替え) に関連して、以下の設問に答えよ。

1. まず、水素分子をボルン・オッペンハイマーの断熱近似で考えよう。2つの陽子がそれぞれ $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ の位置に固定されている時の2電子系の基底状態エネルギー (断熱ポテンシャル) を $U_2(|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|)$ と書こう。これは $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| = R_0 = 1.40a_B$ (a_B はボーワー半径) で最小となる。陽子の運動を考える際には、この $U_2(|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|)$ が陽子間相互作用ポテンシャルを与えることになる。なお、陽子の質量 M は電子の質量 m の 1840 倍である。
 - (i) 2つの陽子の運動は重心運動と相対運動に分離できるが、このうち、相対運動に関するシュレーディンガー方程式を $U_2(|\mathbf{R}|)$ を使って書き下せ。但し、 $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ である。
 - (ii) この方程式の角度成分に注目し、相対距離 $|\mathbf{R}|$ は R_0 と近似して、2陽子系の回転運動のエネルギー固有値 E_L を M や R_0 を使って表わせ。ここで、 $L = 0, 1, 2, \dots$ である。さらに、 $\hbar^2/m a_B^2 = 27.2\text{eV} = 3.2 \times 10^5\text{K}$ であることを使って、 $E_1 - E_0$ の値を K 単位で求めよ。
 - (iii) 陽子は核スピンが $\frac{1}{2}$ であるが、*p*-H₂ とは2つの陽子の核スピンが反平行なもの (合成核スピンが 0)、*o*-H₂ とはそれが平行のものである。それぞれの分子について、許される L の状態とその縮重重度を述べよ。
 - (iv) 合成核スピンがゼロの基底状態にある水素分子と重水素分子 D₂ について解離エネルギーをはかったところ、それぞれ 4.46eV, 4.54 eV であることが分かった。これから、水素分子のゼロ点振動エネルギーの大きさを具体的に求めよ。なお、重水素の原子核は質量が $2M$ で、核スピンは 1 である。
2. 次に、H+H₂ 系を考えよう。この場合の断熱ポテンシャルは核スピンには依らず、図(29)(a)で定義された3つの変数、 R_a, R_b および θ の関数となる。図(29)(b)–(d)には、その断熱エネルギー $U_3(R_a, R_b, \theta)$ の代表的な θ の値における様子が等高線の形で表示されている。なお、各等高線の値は最小値 (図中の黒丸で示した点における $U_3(R_a, R_b, \theta)$ の値で、これはあまり θ にはよらない。) から測ったエネルギーの増加分 (eV の単位) である。この図を参考にしながら、次の各間に答えよ。
 - (i) $U_3(R_a, R_b, \theta)$ を最小にする $\{R_a, R_b\}$ の組のうち、小さいほうはほぼ R_0 と等しいので、 $U_3(R_A, R_B, \theta)$ の最小値は自由な水素原子のエネルギーと $U_2(R_0)$ の和にほぼ等しいことがわかる。しかしながら、より詳しく見ると、実際の最小値はその和よりも約 2meV ほど低くなっている。この余分の引力エネルギーが何に由来するかを述べよ。
 - (ii) R_a と R_b がともに無限大となるとき、 $U_3(R_a, R_b, \theta)$ は θ によらずに、ある一定値に近づく。その一定値の具体的な値を求めよ。
 - (iii) 図(29)(b)–(d)で、黒丸の点と十字印の点とを貫く点線経路に沿ったエネルギー変化の様子を参考にして、ビーム上の水素原子を打ちこんで基底状態にあるパラ水素分子と衝突させることによって得られるオルト水素分子がもっとも良く検出されるのは、元のビームの方向から見てどの角度であるか、推論せよ。
 - (iv) この化学反応を気相中 300K で行うと、270K で行った場合よりも 3.6 倍の収量の増加が見られた。このことから、この反応に関連した活性化エネルギー E_a を eV の単位で求めよ。ただし、 $\ln 3.6 = 1.3$ である。得られた E_a と図(29)(b)–(d)の十字印で示された点におけるエネルギーの値との関係を議論せよ。

図 29: $\text{H} + \text{H}_2$ 系における断熱ポテンシャル

問題 1 解答

1. (i) 不確定性関係は $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ であるから、

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2a}.$$

- (ii) 領域 $|x| < a$ でのエネルギーを考えると、

$$E = \frac{p^2}{2m} - U_0 \geq \frac{(\Delta p)^2}{2m} - U_0 \geq \frac{\hbar^2}{8ma^2} - U_0,$$

即ち、以下の条件が必要と思われる；

$$U_0 \geq \frac{\hbar^2}{8ma^2} - E.$$

2. (i) Schrödinger 方程式は

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -\frac{2m[E - U(x)]}{\hbar^2}\psi(x).$$

束縛状態を考えるので $-U_0 < E < 0$ であって、

$$k = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(E + U_0)}}{\hbar}$$

とおくと、 $|x| \rightarrow +\infty$ で $\psi(x) \rightarrow 0$ となり、かつ連続な $\psi(x)$ は以下の形に限られる；

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{k(x+a)} \sin \delta & x < -a \\ A \sin(\kappa(x+a) + \delta) & -a < x < a \\ Ae^{-k(x-a)} \sin(2\kappa a + \delta) & x > a \end{cases}.$$

A は規格化定数であるが、位相 δ については、波動関数の位相の不定性によって $-\frac{\pi}{2} \leq \delta < \frac{\pi}{2}$ を考えれば十分である。対数微分 $\frac{d}{dx} \ln \psi(x) = \frac{\psi'}{\psi}$ も連続でなければならないから、 $x = \mp a$ でその条件を考えると、

$$k = \kappa \cot \delta, \quad -k = \kappa \cot(2\kappa a + \delta).$$

これら 2 式はそれぞれ

$$0 < \delta < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < 2\kappa a + \delta - n\pi < 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

であることを示唆している。また、簡単な書き換えによって

$$\sin \delta = \frac{\hbar \kappa}{\sqrt{2mU_0}}, \quad \sin(2\kappa a + \delta - n\pi) = -\frac{\hbar \kappa}{\sqrt{2mU_0}}$$

であるから、これら 2 式から δ を消去して次の超越方程式を得る；

$$\frac{n\pi}{2} = \kappa a + \arcsin \frac{\hbar \kappa}{\sqrt{2mU_0}}. \quad \cdots (1)$$

但し、 $0 < \arcsin < \frac{\pi}{2}$ とする。上の超越方程式の右辺は E の単調増加関数であるから、 n の値はエネルギー準位の低い順に一対一対応している。特に、正整数 n の取り得る値は

$$n = 1, \dots, 1 + \left[\frac{2a \sqrt{2mU_0}}{\pi \hbar} \right]$$

である。([…] は Gauss 記号である。)

- (ii) U_0 の値に依らず、超越方程式 ((1)) には $n = 1$ の解が必ず存在する。実際、 $n = 1$ では方程式が

$$\cos \kappa a = \frac{\hbar \kappa}{\sqrt{2mU_0}} \equiv \zeta \kappa a, \quad \zeta \equiv \frac{\hbar}{a \sqrt{2mU_0}} \gg 1$$

だから、直線 $y = \zeta \kappa a$ と曲線 $y = \cos(\kappa a)$ は $0 < \kappa a < \frac{\pi}{2}$ において必ず 1 つの交点を持つことを考えれば解の存在は明らかである。

(iii) 条件より、 $n = 1$ の準位のみが存在する。求める準位 E は上方程式の解である。条件から、 $\kappa a \ll 1$ と考えられるから、 $\cos \kappa a$ を Taylor 展開して

$$1 - \frac{(\kappa a)^2}{2} \simeq \zeta \kappa a.$$

更に $(\kappa a)^2 = \left(\frac{\cos \kappa a}{\zeta} \right)^2 \simeq 1/\zeta^2$ と近似すると、

$$1 - \frac{1}{2\zeta^2} \simeq \zeta \kappa a.$$

これを解いて、 $\frac{ma^2}{\hbar^2} U_0$ の 1 次まで残すと、

$$E \simeq -\frac{2ma^2}{\hbar^2} U_0^2.$$

(iv) ここまで現れた式で $n = 1$ としたものを用いて、

$$\begin{aligned} R &= \frac{\int_{-\infty}^a |\psi(x)|^2 dx + \int_a^\infty |\psi(x)|^2 dx}{\int_{-a}^a |\psi(x)|^2 dx} \\ &= \frac{(\sin^2 \delta + \sin^2(2\kappa a + \delta)) \int_a^\infty e^{-2k(x-a)} dx}{\int_{-a}^a \sin^2(\kappa(x+a) + \delta) dx} \\ &= \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2mU_0 ka} \\ &= \frac{\hbar^2}{2ma^2 U_0} - 1. \end{aligned}$$

条件から、 $R \gg 1$ であることは明らかだから、相対的に井戸の外の方が井戸の中より粒子の存在確率は大きく、粒子の位置の揺らぎ Δx は井戸のスケール a よりも大きいはずである。従って $\Delta x = a$ とする見積もりが過小であった為に不確定性関係による議論は正しくなかったと考えられる。

問題 2 解答

1. 全状態数 2^N

2. 基底状態

$$\begin{cases} J > 0 & \uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow \text{ or } \downarrow\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\downarrow \\ J < 0 & \uparrow\downarrow\uparrow \cdots \uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow\downarrow \cdots \downarrow\uparrow \end{cases}$$

3. 基底状態のときエネルギーと縮重重度はそれぞれ

$$\begin{cases} J > 0 & -NJ & 2 \\ J < 0 & -N|J| & 2 \end{cases}$$

4. 第一励起状態

$$\begin{array}{c} \uparrow\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\downarrow \\ \uparrow\uparrow\downarrow \cdots \downarrow\downarrow \\ \vdots \\ \uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\downarrow \end{array}$$

エネルギーは $-(N-4)J$

輪っかになっていて上のスピン配置がそれぞれ N 通りずつあるので縮重重度は $N(N-1)$

5. エネルギー固有値とその縮重重度

N 個鎖があるので、そのうち $2M$ 個で up,down が区切れている状態を整数 $M(0 \leq M \leq N/2)$ で指定することにすると、

エネルギー固有値は $-(N-4M)J$

縮重重度は N 個の鎖から $2M$ 個選びそれぞれについて 2 状態ずつあるので ${}_N C_{2M}$
全部足すと

$$2({}_N C_0 + {}_N C_2 + {}_N C_4 + \cdots + {}_N C_N) = 2^N$$

が確かめられる。

6. 偶数について足し合わせるとき

$${}_N C_0 + {}_N C_2 x^2 + {}_N C_4 x^4 + \cdots + {}_N C_N x^N = ((1+x)^N - (1-x)^N)/2$$

を利用する。

分配関数 Z は $\beta = k_B T$ として

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{M=0}^{N/2} 2 {}_N C_{2M} \exp(\beta(N-4M)J) \\ &= 2 \exp(\beta NJ) \sum_{M=0}^{N/2} {}_N C_{2M} \exp(-\beta 4MJ) \\ &= \exp(\beta NJ) \left\{ (1 + \exp(-\beta 2J))^N - (1 - \exp(-\beta 2J))^N \right\} \\ &= (\exp(\beta J) + \exp(-\beta J))^N - (\exp(\beta J) - \exp(-\beta J))^N \\ &= 2^N \{(\cosh \beta J)^N - (\sinh \beta J)^N\} \end{aligned}$$

と計算できる。 $(x = \exp(-\beta 2J)$ として上の式を使う。)

7. $N \rightarrow \infty$ では

$$Z \rightarrow 2^N (\cosh \beta J)^N$$

となる。自由エネルギー F は $F = -\frac{1}{\beta} \ln Z$ より

$$F = -Nk_B T \ln \left[2 \cosh \left(\frac{J}{k_B T} \right) \right]$$

1 個あたりの自由エネルギーは N で割ればよいので

$$\frac{F}{N} = -k_B T \ln \left[2 \cosh \left(\frac{J}{k_B T} \right) \right]$$

8. エネルギーは $E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$ 、エントロピーは $S = (E - F)/T$ より求まる。計算すると

$$\frac{E}{N} = -J \tanh \beta J$$

$$\frac{S}{N} = -\frac{J}{T} \tanh \beta J + k_B \ln \left[2 \cosh \left(\frac{J}{k_B T} \right) \right]$$

となる。高温極限 $T \rightarrow \infty (\beta \rightarrow 0)$ では

$$\frac{E}{N} \rightarrow 0$$

$$\frac{S}{N} \rightarrow k_B \ln 2$$

$\exp(-\beta E_M) \rightarrow 1$ となるので全ての状態が同じ確率でおこる。エネルギーは平均値 0 になっている。エントロピーについては 1 個あたり up,down の 2 状態が同確率で起きることを意味している。

問題 3 解答

以下点電荷は座標の原点の近くにいるとする。

1. 光は速度 c で伝わるから、 $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$.
2. 全空間に渡る積分が e なので、 $\rho(\mathbf{r}', t') = e\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t'))$. よって $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = e\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t'))d\mathbf{x}(t')/dt'$.
3. $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 1/r$ と近似するとます

$$c\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{c\mu_0}{4\pi r} \int e\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t'))\mathbf{v}(t')d^3r' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int e\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t'))\frac{\mathbf{v}(t')}{c}d^3r' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\mathbf{v}(t')}{c},$$

一方

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int e\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t - r/c))d^3r'$$

は $\partial|\mathbf{r}|/\partial\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}$ から $\partial|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\partial\mathbf{r}' = -\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}'$ に注意すれば

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{x}(t')}{dt'}}{c}\right)^{-1} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}(t')}{c}\right)$$

4. まず

$$c\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\mathbf{v}(t')}{c}$$

は ∇ が $1/r$ に作用すると $\propto r^{-2}$ になるので、 ∇ が t' に作用するもののみが残り、 $\nabla t' = -\hat{\mathbf{r}}/c$ なので、

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{-\hat{\mathbf{r}}}{c} \times \frac{\mathbf{a}(t_0)}{c} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}(t_0),$$

一方波動帯では横波になっていて、進行方向は $\hat{\mathbf{r}}$ だから

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\hat{\mathbf{r}} \times c\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}(t_0)).$$

5. 電磁波の強度は電場も磁場も同じだから、磁場だけ考える。

- (i) $\hat{\mathbf{r}}$ と x 軸のなす角を θ とすると、 $|\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}| \propto |\mathbf{a}| \sin \theta$ であるから、振幅は $\theta = \pi/2$, i.e. yz 平面内が一番大きい。
- (ii) z 軸となす角が θ の各点での強度を考える。 \mathbf{a} のベクトル $\hat{\mathbf{r}}$ に垂直な成分だけが効くが、双極子は $\hat{\mathbf{r}}$ に垂直な平面から θ 傾いた平面をまわっているので、 $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}$ 方向の成分は振幅 $|a|$ で振動していて、 $\hat{\mathbf{z}}$ と $\hat{\mathbf{r}}$ のなす平面内の成分は振幅 $|a| \cos \theta$ で振動している。よって強度は $1 + \cos^2 \theta$ 型の角度分布をするので、最大は $\theta = 0$ すなわち z 軸上がもっとも強い。

問題 4 解答

特殊相対論において、等加速度運動とはどのようなものだろうか。等速直線運動と異なり、あらゆる系から見てガリレイ運動学的な加速度運動を行うことは明らかに不可能である。なぜなら、十分な時間がたてばある慣性系から見てその運動は、光速を超てしまう⁸。しかし、相対論においても等加速度運動と呼ぶにふさわしい運動が存在し、その最ももっともらしい定義は本問で与えられるものである。実際、一様な場のなかでの粒子の運動はこのような結果をもたらす。参考書:「相対性理論入門」ランダウ・ジューコフ著、東京図書。

1. 固有時刻 τ とそこから微小固有時間 $d\tau$ 経た時刻 $\tau + d\tau$ を考える。その時、観測系では時刻 t と $t + dt$ が対応し、観測系から見た粒子の位置を x 、速度を $v = \frac{dx(t)}{dt}$ とおく。ここで、ローレンツ変換より、

$$c\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}ct - \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}x$$

$$c(\tau + d\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}c(t + dt) - \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}(x + dx)$$

が成り立つので、辺々引き算して、

$$cd\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}cdt - \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}dx$$

ここで、 $dx = vdt$ より、

$$d\tau = \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(c - \frac{v^2}{c} \right) dt = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - v^2} dt$$

となる。よって、これを t_1 から t_2 まで積分して、

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2}$$

を得る。

2.

$$u^\mu u_\mu = c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left[c^2 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]$$

であるが、一方 1 より、

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

なので、

$$u^\mu u_\mu = \frac{1}{1 - (v/c)^2} (c^2 - v^2) = c^2$$

である。

次に、今得た $u^\mu u_\mu = c^2$ の両辺を τ で微分して、

$$a^\mu u_\mu + u^\mu a_\mu = 0$$

を得るが、与えられた計量では $u^\mu v_\mu = u_\mu v^\mu$ なので、これは、直ちに $u^\mu a_\mu = 0$ を意味する。

3. 物体の静止系で、 $a^\mu = (\frac{du^0}{d\tau}, g)$ となるべきであるが、1 より $dt = d\tau$ なので、 $u^0 = c$ であるから、 $a^\mu = (0, g)$ 。故に、

$$a^\mu a_\mu = -g^2$$

これはローレンツスカラーとして共変な式なのでどの系でも正しい。

⁸光速になる瞬間までをガリレイ運動学的な等加速度運動を相対論的に扱い、相対論的な等加速度運動と定義することもやろうとすれば可能である。が、この定義は慣性系によってしまうのでローレンツ変換に共変な量で書き表すことができない。

運動方程式を導くために使う式は、

$$(u^0 + u^1)(u^0 - u^1) = c^2 \quad \cdots (1)$$

$$\frac{u^0}{a^1} = \frac{u^1}{a^0} \quad \cdots (2)$$

$$(a^0 + a^1)(a^0 - a^1) = -g^2 \quad \cdots (3)$$

である（指示されている式を変形しただけ）。ここで、(1) と (3) の比を取って、

$$\frac{u^1 + u^0}{a^0 + a^1} \frac{u^1 - u^0}{a^0 - a^1} = \frac{c^2}{g^2}$$

となるが、(2) と加比の理より、

$$\left(\frac{u^0}{a^1}\right)^2 = \left(\frac{u^1}{a^0}\right)^2 = \left(\frac{c}{g}\right)^2$$

を得る。符号をうまく取れば、答えの運動方程式、

$$\frac{du^0(\tau)}{d\tau} = \frac{g}{c} u^1(\tau) \quad \frac{du^1(\tau)}{d\tau} = \frac{g}{c} u^0(\tau)$$

が導かれる⁹。

4. 微分方程式の対角化は容易であり、辺々足したり引いたりすれば良い。対角化した微分方程式は

$$\frac{d}{d\tau}(u^0 + u^1) = \frac{g}{c}(u^0 + u^1)$$

$$\frac{d}{d\tau}(u^0 - u^1) = -\frac{g}{c}(u^0 - u^1)$$

となり、一般解として、

$$u^0 = A \exp\left(\frac{g}{c}\tau\right) + B \exp\left(-\frac{g}{c}\tau\right), \quad u^1 = A \exp\left(\frac{g}{c}\tau\right) - B \exp\left(-\frac{g}{c}\tau\right)$$

を得る（ A, B は定数。）。初期条件より、

$$A + B = c, \quad A - B = 0$$

なので、定数を決定できて、解は、

$$u^0 = c \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right), \quad u^1 = c \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)$$

となる。さらに、 u の定義より、 t, x はそれぞれを積分すれば求まるので、

$$t = \frac{c}{g} \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)$$

$$x = \frac{c^2}{g} \left[\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) - 1 \right]$$

である。積分定数は初期条件を加味してうまくえらんである。

5. 4 で求めた x の式から、 τ を計算するが、十分時間がかかると思われる所以、 $\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) - 1$ は $\frac{1}{2} \exp\left(\frac{g}{c}\tau\right)$ で近似してよい。これより、

$$\tau = \frac{c}{g} \ln\left(\frac{2xg}{c^2}\right) = \frac{3 \cdot 10^8}{10} \ln\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 3.1 \cdot 10^7 \cdot 10}{(3 \cdot 10^8)^2}\right) \approx 10[\text{年}]$$

となる。

⁹ 符号であるが、(2) の条件から 複号同順で u と a の符号が同じか違うかまでは求まる。 g の定義を考えればこの答えがふさわしいことは自明である。なぜ符号の紛れが生じたかであるが、用いたのはローレンツスカラーの式のみである。ローレンツスカラーは符号反転に対して不变であるので、符号反転した運動方程式も導かれたわけである。

6. まず、ロケットの運動 $x(\tau)$ を $x(t)$ に書き換えよう。双曲線関数の公式を用いて、

$$x = \frac{c^2}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2} t^2} - 1 \right)$$

となる。求める時間間隔を s とおけば、解くべき方程式は、

$$\frac{cs}{2} = \frac{c^2}{g} \left[\sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2} \left(t + \frac{s}{2} \right)^2} - 1 \right]$$

である。両辺を 2 乗して、 s について解けば、

$$s = \frac{gt^2}{c - gt} > 0$$

を得る。 s が正でなくてはならないので、 $t < c/g$ が必要となる。この時刻はガリレイ運動学においてはロケットが光速に到達する時刻である。もちろん相対論的な運動を考えているのでこの解釈は正しくないが、結局等加速度運動は固定系から眺めると十分時間が経つと $x = c(t - t_0)$ に漸近する。よって、ある程度時間が経ってしまうと光速で追いかけても追いつけなくなってしまうことがわかる。なお比較のためにガリレイ運動学ではこの半分の時間で到達できなくなることを付け加えておく。

問題 5 解答

1. 理由 雲母薄膜どうしの接合面では反射がほとんど起こらないと考えられる。従って、雲母薄膜に入射した光は雲母と基盤の接合面および、雲母と真空（または空気）の接触面の 2 つの面においてのみ反射が起こるとして良い。

2 つの異なる面で反射してきた光は異なる光路を進んできているから、その間に光路差が生ずる。この光路差と波長（またはその整数倍）が一致する光については、2 つの異なる面で反射した光どうしが強め合うように干渉し、反射強度が大きくなる。一方、その条件を満たさない波長を持つ光に関しては、2 つの光どうしが弱め合うように干渉し、反射強度が小さくなる。

色がついて見えるのは強め合う条件を満たす光であり、光路差は 2 つの面の間の距離、すなわち雲母薄膜の厚さによるから、異なるステップごとに違った色が見える。

関係式 2 つの反射面の間の距離は d_j であるから、それぞれの面で反射する光の光路差は $2nd_j$ である。これが λ_j の整数倍なのだから、

$$2nd_j = l\lambda_j \quad (l = 1, 2, 3, \dots) \quad \cdots (1)$$

である。

2. $\delta(D)$ の定義から、

$$\begin{aligned} \delta(D) &= (k_2 D - \omega t) - (k_1 D - \omega t) \\ &= (k_2 - k_1)D \\ &= \frac{2\pi D}{\lambda} (n_2 - n_1) \\ &= \frac{2\pi D \Delta n}{\lambda} \end{aligned} \quad \cdots (2)$$

である。

3. 光電場の P_A, P_B の方向の成分を E_a, E_b とおく。このとき、 E_x, E_y との関係は、

$$\begin{pmatrix} E_a \\ E_b \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

$$R \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

である。以下、 x, y 方向を基底としたベクトルには x, y の添字を、 P_A, P_B 方向を基底としたベクトルには a, b の添字をつけるものとする。

水晶板を通過した光電場を $E_0 = (E_{0x}, E_{0y}) = (E_{0a}, E_{0b})$ 、偏光板 B を通過した光電場を $E_B = (E_{Bx}, E_{By}) = (E_{Ba}, E_{Bb})$ とおくと、これらは以下の関係式を満たす。

$$\begin{pmatrix} E_{0a} \\ E_{0b} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_{Bx} \\ E_{By} \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} E_{Ba} \\ E_{Bb} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_{Ba} \\ E_{Bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0b} \end{pmatrix} \quad (\text{偏光板の性質より。})$$

E_0 は与えられているから、これをもとに計算すると、

$$E_{0b} = \frac{A}{2} \alpha(D, t)$$

$$(\alpha(D, t) \equiv \{\cos(\Phi(D, t)) - \cos(\Phi(D, t) + \delta(D))\})$$

よって, E_B は,

$$\begin{pmatrix} E_{Ba} \\ E_{Bb} \end{pmatrix} = \frac{A}{2} \alpha(D, t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{あるいは}, \quad \begin{pmatrix} E_{Bx} \\ E_{By} \end{pmatrix} = \frac{A}{2} \alpha(D, t) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

である.

$\alpha(D, t)$ を変形すると,

$$\frac{A}{2} \alpha(D, t) = A' \cos(\Phi(D, t) - \phi)$$

$$\left(A' \equiv A \sqrt{\frac{1 - \cos(\delta(D))}{2}} \right)$$

$$\left(\sin\phi = \frac{\sin(\delta(D))}{A'}, \quad \cos\phi = \frac{1 - \cos(\delta(D))}{A'} \right)$$

となる. よって, 強度 $I = (\epsilon_0/2)A'^2$ は,

$$I = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{1 - \cos(\delta(D))}{2} A^2$$

となる.

4. 3. の結果より,

$$\delta(D) = (2l + 1)\pi \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \cdots (3)$$

のとき, 強度が最大となる.

5. スリットを通ってくる光は, 4. で求めた条件を満たす波長のものが主な成分となっている. 2. より, 通過する水晶の厚さ D が変化すれば, 条件を満たす波長は変化する. スリットの位置を x 軸方向に動かすということは, D を変化させるということだから, それにより通ってくる光の波長が変化する.
6. スリットを x 軸方向に dx だけ動かしたとき, 光が通過する水晶の厚さが dD だけ変化したとすると, その関係は,

$$\begin{aligned} dD &= \sin(0.1 \times 10^{-3}) dx \\ &\simeq 10^{-4} dx \end{aligned}$$

である. スリットの x 軸方向への 2.5mm の移動に対応する D の変化が ΔD だから,

$$\Delta D \simeq 2.5 \times 10^{-7} \quad [\text{m}]$$

である.

7. いま, 可視光の波長域が $\Delta\lambda$ に比べて大きく, (1) 式における自然数 l を一定値 l_0 として扱って良いとする.(この仮定が成り立たなければ, このようなデバイスで $\Delta\lambda$ を測定するのは難しい.)

雲母の, 2 種類の色に対応する雲母の厚さ d_j を d_1, d_2 とし, 光の波長を λ_1, λ_2 とおく. さらに, それらに対応する色が見えるときのスリットの位置の水晶の厚さを D_1, D_2 とおく.

上に書いた仮定が成り立つとき, λ_1, λ_2 の差が可視光の波長域に比べて小さいから, スリットを適切にずらすことによって (3) 式における l を一定にすることができる. この値を l_1 とする. このとき, $\delta(D)$ は一定になるから,

$$\frac{D_1}{\lambda_1} = \frac{D_2}{\lambda_2}$$

である. $\Delta D \equiv |D_1 - D_2|$, $\Delta\lambda \equiv |\lambda_1 - \lambda_2|$ の 2 次の項が無視できるとすると, (2), (3) 式より,

$$\Delta D = \frac{2l_1 + 1}{2\Delta n} \Delta\lambda$$

であることが分かる.

一方, $\Delta d \equiv |d_1 - d_2|$ と $\Delta\lambda$ の関係は, (1) 式より,

$$\Delta d = \frac{l_0}{2n} \Delta\lambda$$

であるから,

$$\Delta d = \frac{l_0}{2l_1 + 1} \frac{\Delta n}{n} \Delta D \quad \cdots (4)$$

である.

8. Δd の大きさを求めるためには, l_0, l_1 を決めなくてはならない. これらの値は, (1), (2), (3) 式において, 波長 λ が可視領域に含まれるように決まるものであり, d, D の大きさによって変わる. これを決めるための情報は特にないので, $l_0 = 1, l_1 = 0$ として考えることとする.

このとき, (4) 式および 6. より,

$$\Delta d = 1.5 \times 10^{-9} \text{ [m]}$$

である.

問題 6 解答

1. (i) 図より 300K での R_H は $10^{-3} \text{m}^3/\text{C}$ である。キャリア密度を n とすると $|R_H| = 1/ne$ なので、 $n = 6.25 \cdot 10^{21} / \text{m}^3$ 。

 (ii) ドナー不純物が n 個、伝導帯準位が $N \gg n$ 個あるとすると、伝導帯にいるキャリアーの数は $nN/(N + n \exp(E_D/kT))$ できまると考えられる。よって R_H は定数 + $\exp(E_D/kT)$ と振る舞う。B ではキャリアーの数が一定になっているので、ドナーから伝導体に移りうるキャリアーはみな移ってしまっていることが判る。一方で、価電子帯からの励起が効くのは図の A に移ってからであるから、室温でのキャリアーの数はドナーの数に一致する。

 (iii) C のかたむきから $T \ln n \propto \ln 10 \times 10^3 \text{K}/8$ 、よって $E_D = k_B 288 \text{K} \sim 0.025 \text{eV}$ 。

 (iv) これは $\hbar c/E_D \sim 8 \mu\text{m}$ に相当するので、マイクロ波。

 (v) 単純に比例計算から、 $E_D = E_0(\epsilon/\epsilon_0)^{-2}(m^*/m_0)^{-1}$ 。

 (vi) エネルギーとボーア半径は逆比例するので、ドナー束縛状態のボーア半径は水素原子の $13.6 \text{eV}/0.025 \text{eV} = 5.5 \cdot 10^2$ 倍で 29nm 。Si の格子定数は 2.3\AA だからこれは充分に広く、電子の質量を有効質量として、物質の誘電率を用いて計算することを妥当にしている。また、ドナー濃度からドナー間隔は 54nm 、これはボーア半径の倍程度であり、電子密度は指数関数的に落ちるので、ほかのドナー原子を考えない近似を妥当にしている。
2. (i) $V_{3-4} = I\rho l/(wd)$ より $\rho = V_{3-4}wd/(Il) = 8 \Omega \cdot \text{mm}$ 。

 (ii) 電流の流れている端子を用いて電圧を測ると、小さい試料の場合は端子の線内での電圧降下が馬鹿にならないので、電流の流れない端子を別に用意して測定する。四端子法と呼ばれる。

 (iii) よわい整流作用？

問題 7 解答

1. 荷電粒子の通過を測定する装置の一つとして、シンチレーションカウンターがある。シンチレーションカウンターは、シンチレーター（蛍光体）と光電子増倍管とからできている。

荷電粒子がシンチレーターの中に入射すると、シンチレーター中の電子と相互作用し、電子を励起させる。励起した電子は、基底状態にもどるときに光子を放出する。この光子は光電面に集められ、電子とカップリングして光電子になる。

光電子が光電子増倍管のなかの電極にぶつかると、二次電子が放出される。この際、電子の数は増幅される。電子は、この衝突・増幅を何回かくりかえした後、アノード（陽極）に入射して電流をながす。

以上がシンチレーションカウンターの原理である。

解答作成者からの注) ほかに、GM 管、比例計数管、霧箱などがありますが、原理については各自で調べてください。

2. (i) カウンターから出てくる信号には、環境放射線によるものが混ざっている。しかし、環境放射線のエネルギーは、宇宙線のエネルギーにくらべて小さい。つまり、ディスクリミネーターのしきい値を、環境放射線のエネルギーより大きく、宇宙線のエネルギーより小さいレベルに設定すれば、宇宙線による信号だけをとりだすことができる。

- (ii) カウンター A の信号の立ち上がりの前後 $\pm \tau$ の間にカウンター B の立ち上がりがあれば、コインシデンスが生ずる。カウンター A の立ち上がり前後 $\pm \tau$ は、1 秒当たり $N_A \cdot 2\tau$ あり、この間にカウンター B が立ち上がる所以さらに N_B を掛けて結局答えは毎秒 $2N_A N_B \tau$ カウントとなる。

可変遅延線がない場合、宇宙線があるカウンターに入ってから別のカウンターに入るまでに時間差が生じたり、回路の違いによってコインシデンス回路に信号がとどくまでに時間差が生じたりする。可変遅延線は、これらの時間差を調整し、同じ宇宙線による信号が同時にコインシデンス回路に入るようにするために必要である。

- (iii) 偶然による同時計数が多すぎる場合、カウンターの数をふやして、すべての信号のコインシデンスをとればよい。 i 番目のカウンターから信号が出力される時間の割合を $\alpha_i (< 1)$ とすると、すべてのカウンターからの信号が重なる確率は、 $\prod \alpha_i$ となり、カウンターの数をふやせばふやすほど小さくなることがわかる。

- (iv) 実際に測定した時間は 1 秒間あたり $1 - TS$ 秒なので、真の計数は毎秒 $S / (1 - TS)$ カウントである。

- (v) ニュートリノは物質とほとんど相互作用しないため無視する。

鉛の板を透過しにくい粒子の方が、鉛を厚くしたときのスケーラーのカウント数の減り方は大きく、そちらが x に対応する。電子は μ 粒子より質量が小さいため、散乱されやすいので、電子の方が鉛の板を透過しにくいと考えられる。よって、x が (I) 電子、y が (III) μ 粒子だと考えることができる。

これらの粒子は、主に電磁相互作用によって電子や原子核に散乱され、制動輻射で光子を放出してエネルギーを失う。

3. (i) μ 粒子が 300 MeV の運動量をもつので、

$$\beta\gamma = \frac{pc}{Mc^2} = 2.83$$

となる。すると、問題で与えられた図から

$$\frac{R}{Mc^2} = 1.5 \times 10^3 [\text{g} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{GeV}^{-1}]$$

が得られる。 Mc^2 は 0.106 GeV なので、

$$R = 1.5 \times 10^3 \times 0.106 = 1.6 \times 10^2 [\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}]$$

となる。鉛の密度は $11.35 [\text{g}/\text{cm}^3]$ なので、 μ 粒子を止めるのに必要な鉛の厚さは、

$$\frac{1.6 \times 10^3}{11.35} = 14 [\text{cm}]$$

だとわかる。

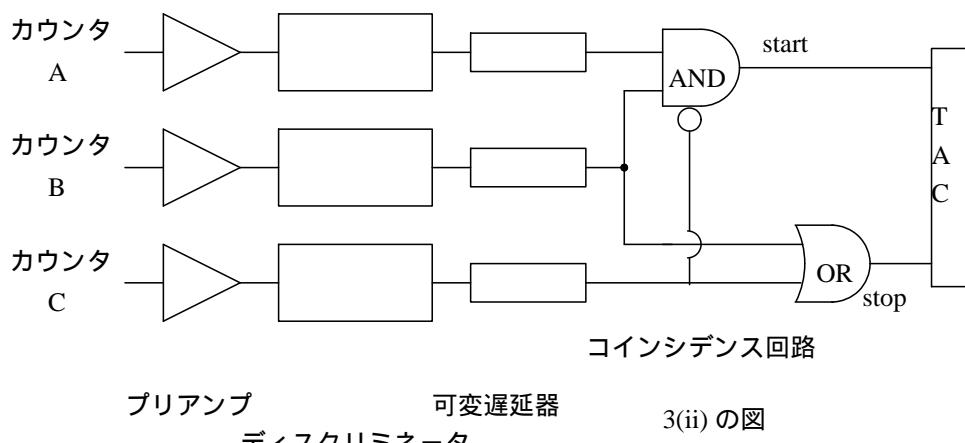
- (ii) 図の TAC とは Time to Analog Converter のことで、start が入力されてから stop が入力されるまでの時間をアナログパルスに変換する回路である。まず、カウンター A、B を使って、 μ 粒子が入射したときに start に入力する。 μ 粒子が鉛の板で止まり、C がならなかつたことを確認するため、C の出力を NOT しておく。

しばらくすると μ は崩壊して電子を放出する。この電子をカウンター B または C で検出して、stop 信号に入力する。こうやって出力されるパルスをデジタル化して、横軸に時間、縦軸に頻度をとったヒストグラムにすると、このグラフは $A \exp(-t/\tau)$ (τ は μ 粒子の寿命) という式でフィットできる。こうして μ 粒子の寿命を求めることができる。

可変遅延器の設定であるが、start 信号に関しては、あまり A、B からの信号が C よりはやく AND に到達すると C が鳴らなかつたのを確認する以前に start 信号が出てしまうこと、またあまりはやく B からの信号が OR に到達すると、start 信号を生成した B の信号がまた stop を生成してしまいお話にならないことを注意して設定すべきである。

この実験では、環境放射線や別の μ がカウンター C に入射しても stop 信号が出てしまい、ヒストグラムに影響を与える。これらバックグラウンドの大きさが十分小さくないと、上のフィットは正しくなくなる。その場合は、 $A \exp(-t/\tau) + B$ という形でフィットする。別に環境放射線のみの計数を測っておいてそれからバックグラウンドを推定することもできよう。

カウンター D を使わない理由は、必要ないからである。 μ 粒子は鉛の板で止めてしまうので、カウンター D に到達しない。 μ 粒子の崩壊の際に生成する電子は、カウンター B、C で検出するので、やはりカウンター D は必要ない。



問題 8 解答

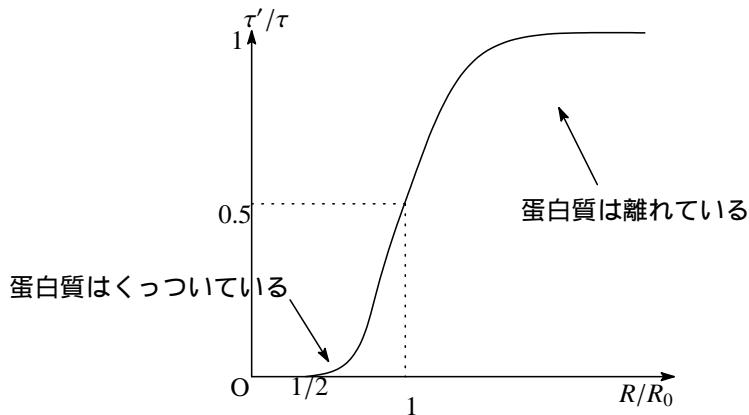
- dt の間に $N(t)(k_f + k_{nf})dt$ だけ減るので、 $dN/dt = -(k_f + k_{nf})N$ である。よって $N(t) = N(0) \exp(-(k_f + k_{nf})t)$ 。また $F(t) = k_f N(t) = k_f N(0) \exp(-(k_f + k_{nf})t)$ 。
- (i) 寿命とは数が $1/e$ になる時間のことである。よって励起エネルギー移動がなければ $\tau = (k_f + k_{nf})^{-1}$ 、励起エネルギー移動があれば $\tau' = (k_f + k_{nf} + \alpha k_f J \kappa^2 R^{-6})^{-1}$ 。よって

$$\frac{\tau}{\tau'} = \frac{k_f + k_{nf} + \alpha k_f J \kappa^2 R^{-6}}{k_f + k_{nf}}.$$

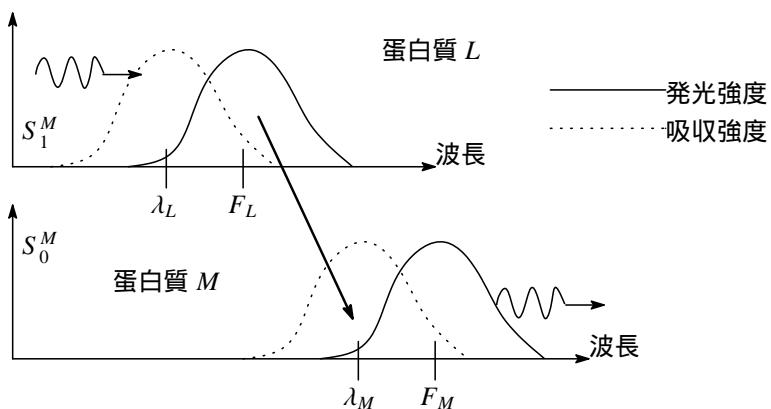
(ii) 直前の式を $= 2$ と置いて $\alpha k_f J \kappa^2 R_0^{-6} = k_f + k_{nf}$ 、よって $R_0 = (\alpha k_f J \kappa^2 / (k_f + k_{nf}))^{1/6}$ 。また

$$\frac{\tau}{\tau'} = 1 + \left(\frac{R_0}{R}\right)^6.$$

(iii) 蛋白質 L と M が接した時の双極子間の距離は $R_0/2$ である。よって $\tau'/\tau = 1/(1 + (R/R_0)^6)$ はおよそ以下のようになる:



- L を λ_L で励起し、 M の F_M の波長の光を観測すれば良い。すなわち、 λ_L で励起された L が F_L で発光し、それがスペクトルに重なりのある M の λ_M から吸収され、結局 F_M で放射されるからである(図)。



問題 9 解答

1. (i) 陽子の重心まわりの換算質量は $M/2$ なので、シュレーディンガー方程式は

$$E\psi(\mathbf{R}) = -\frac{\hbar^2}{M} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} \psi(\mathbf{R}) + U_2(|\mathbf{R}|)\psi(\mathbf{R})$$

である。

- (ii) 上式ハミルトニアンは球対称なので波動関数を角運動量の固有値で展開すれば

$$\frac{\hbar^2 L(L+1)}{r^2 M} - \frac{\hbar^2}{2Mr^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + U_2$$

となる。振動状態による r 部分のエネルギー期待値の変化を小さいと考えれば、回転運動によるエネルギー固有値は

$$\frac{\hbar^2 L(L+1)}{MR_0^2}$$

と求まる。特に

$$E_1 - E_0 = \frac{\hbar^2(1 \cdot 2 - 0 \cdot 1)}{MR_0^2} = \frac{\hbar^2}{(1840m)(1.40a_B)^2} = \frac{3.2 \times 10^5}{1840 \cdot 1.40^2} \text{K} = 88.7 \text{K}.$$

- (iii) 陽子はフェルミオンだから、2 陽子系の波動関数は軌道部分とスピン部分をともに交換したとき符号を変えねばならぬ。軌道波動関数は L の偶奇に従って符号を変え、スピン波動関数は全スピン 0 のときが奇で全スピンが 1 のときは偶だから、

- $p\text{-H}_2$: $L = 0, 2, 4 \dots$ 縮重度はそれぞれ 1, 5, 9 ...;
- $o\text{-H}_2$: $L = 1, 3, 5 \dots$ 縮重度はそれぞれ 3, 7, 11 ...

となる。

- (iv) $U_2(R)$ の最小まわりを $U_2(R_0) + \frac{1}{2}k(R - R_0)^2 + \dots$ と展開するとその中を動く質量 M の振動子のゼロ点エネルギーは

$$\frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{M}}$$

である。よって合成核スピン 0 の水素分子の基底状態のエネルギーは $(\hbar/2)\sqrt{k/M}$ 。一方でスピン 1 ふたつからスピン 0 をつくるとスピン波動関数は対称だから（なぜならベクトルふたつを内積してスカラーをつくる操作は対称だから）合成核スピンゼロの重水素分子の基底状態の角運動量は $L = 1$ である。よって

$$\frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{M}} + 4.46 \text{eV} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{2M}} + \frac{\hbar^2 \cdot 1 \cdot 2}{2MR_0^2} + 4.54 \text{eV}$$

以上より $(\hbar/2)\sqrt{k/M} = 0.299 \text{eV}$ 。

2. (i) 水素原子が水素分子に近づくことによって双方の中間状態に誘起される双極子間の相互作用によるエネルギー。van der Waals 力。
- (ii) 3 つの水素原子のそれぞれの電子が $1s$ 状態にあることによるエネルギー。すなわち Rydberg 定数の 3 倍で $-3 \times 13.6 \text{eV} = -40.8 \text{eV}$ 。
- (iii) 越えなければならないポテンシャルの峠がもっとも低いのは $\theta = \pi$ のときである。角が θ の方向から近づいて角が θ の方向へぬけて行くと $\pi - 2\theta$ だけ曲があるので、結局ビームの入射方向から 180° まわっても来た方向へ生成分子は飛んでいくと考えられる。
- (iv) 平衡反応ではなくて、一方向に反応が進むとして、越えなければならないエネルギーの峠を E_a とすると、収量は $\exp(-E_a/kT)$ に比例すると考えられる。 $\exp(-E_a/k(300\text{K}) / \exp(-E_a/k(270\text{K})) = 3.6$ から $E_a = 0.30 \text{eV}$ と求まる。これは図の (d) の峠の高さとほぼ一致しているので、この峠を抜けて反応が起こったと考えられる。

1999年度

1999年度 入学試験 一般教育科目

教育 英語

1. 次の英文を読み以下の設問に答えよ。

I propose to analyze "Talking about Science." How is it best done? Why is it that a subject presented by A is thrilling account which leaves a deep impression, whereas the very same material presented by B is dull and boring and produces no impression whatever? How should we present our branch of science to fellow scientists who work in quite another field? How can we present science to those who have little or no scientific background, as if often the case with men of high ability who are important in affairs of state? How can we make the non-scientist understand why its study means so much to us, a passion they sometimes find very difficult to understand?

What is a basic character of a (ア)"talk"? I think it can be expressed by saying that its primary object is to create a state of mind, or point of view, not to convey information. I can perhaps illustrate what I mean by dwelling on the vast difference between the spoken and written account. Under the heading "talk," I am not including a course of lectures where students take notes and the lectures follow each other as a composite whole. Nor do I include the "get together" of two or three experts in the same line of research, for which no rules are necessary. I am considering the hour's talk to an audience whose interest one has to arouse. The written account can also aim at creating a viewpoint, but its main function is to be a storehouse of information. The argument can be meaty and condensed. It can be packed with tables, graphs, and mathematical equations. This is possible because the reader can always pause and digest it at his leisure, going back over parts which he finds to be difficult. I do not mean to imply that one can be irresponsible in a talk, but one need not cross all the "t's" and dot all the "i's." In fact, the talk would be spoiled by attempt to do so.

A talk is therefore different altogether from a (イ)"paper." To my mind the governing factor which determines its art form is this: The success of the way in which the subject has been presented is measured by the extent to which the average number of the audience remembers it next day.

This may seem an obvious statement, but if we use this principle as a yardstick to assess a lecture we have listened to, or in planning to a lecture of our own, it creates a very significant viewpoint. The value of a lecture is not to be measured by how much one manages to cram into an hour, how much important information has been referred to, or how completely it covers the ground. It is to be measured by how much a listener can tell a friend about it next morning. If we honestly put this question to ourselves and think how little we can remember of talks we have heard, it gives us a sense of proportion and of values in planning a lecture and makes us realize that what we say will go over the heads of audience if we set our sights too high. I would like now to list what I believe to be some of the considerations which apply in planning a talk.

For instance, suppose we ask how many points can we hope to "get over" in an hour? I think the answer should be "one." If the average member of the audience can remember with interest and enthusiasm one main theme, the lecture has been a great success. I like to compare the composition of a lecture to that of a picture. Of course this is dangerous ground on which to venture, because art experts differ so much among themselves. But in simple terms, is it not held that a picture should have one main center of interest? It may have numerous subsidiary features, but the composition is so cunningly arranged that when the eye falls on these and follows their placing it is subtly led back to the main center of interest and does not fall out of picture frame. A lecture should be like that. There should be one main theme, and all the subsidiary interesting points, experiments, or demonstrations should be such that they remind hearer of the theme. As in a picture, so in a lecture, the force of the impression depends upon a ruthless sacrifice of unnecessary detail. It can be richly endowed with exciting details, but they must be of such a kind that recollection of them inevitably brings the main theme back to mind. In other words, the lecture must compose in the sense of having a pattern because it is this pattern which helps so much to impress it on one's memory.

A lecture is made or marred in the first 10 minutes. This is the time to establish the foundations, to remind the audience of things they half know already, and to define terms that will be used. Again this seems obvious, but I have listened to so much splendid material lost to the audience because the lecturer failed to realize that it did not know what he was talking about, whereas, if the precious first 10 minutes had been spent on preparation, he would have carried his listeners with him for the rest of the talk.

Here a most important principle comes in which I think of as the “detective story” principle. It is a matter of order. How dull a detective story would be if the writer told you who did it in the first chapter and then gave you the clues. Yet how many lectures do exactly this. One wishes to give the audience the esthetic pleasure of seeing how puzzling phenomena become crystal clear when one has the clue and thinks about them in the right way. So make sure the audience is first puzzled.

We all know the tendency to go to sleep in lectures; how often have I felt ashamed at doing so myself. Though the best lecturer can never entirely escape from producing this effect, there is much that can be done to minimize it. A continuous even delivery is fatal. There is something hypnotic about it which induces sleep. Pauses and changes of tempo are essential. Above all, jokes have a marked and enduring effect.

The Art of Talking about Science, Lawrence Bragg; Science 154(1966)1614 より抜粋

- (i) 答者は、下線部(ア)の talk と下線部(イ)の paper との本質的な相違は何だといっているのか、また、successful talk とはどのようなものだと言っているのか、簡潔に日本語で説明せよ。
 - (ii) 答者が、successful talk をする上で、speaker が配慮すべきものとしてあげている事柄を 4 つ、日本語で箇条書きにして述べよ。
 - (iii) 枠で囲った二つのパラグラフに共通したひとつの副題を付けたい。以下の 5 つの副題から最も適したものを見つけて述べよ。
- (ア) A Detective Story
 (イ) The Arousing of Interest
 (ウ) Tempo and Jokes
 (エ) Giving Clues
 (オ) The Best Lecturer

2. 以下の文章を英訳せよ。ただし、必要であれば以下の単語を参考にせよ。

differential operator, simultaneity, transmitting medium, Galilean transformation

- (i) Schrödinger 方程式と古典的なエネルギー運動量の方程式を比べてみると、少なくとも自由粒子に対しては、エネルギーと運動量が波動関数 ψ に作用する、以下の微分作用素に対応するものと考えられる。
- $$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} , \quad p \rightarrow -i\hbar \nabla$$
- (ii) Michelson と Morley の有名な実験は、光速が、観測者、媒質、光源の間の相対運動に無関係にすべての方向に対して同じであることを示した。
 - (iii) したがって、古典力学を不变に保つガリレイ変換は正しくなく、光速を一定とするような別の変換に置き換えられねばならない。
 - (iv) Einstein は、このような変換が必然的に、従来の時間と同時性の概念を変更してしまうことを明らかにした。

教育 数学

1. 2 次元空間におけるベクトル場 $E(x, y)$ の各成分 $E_x(x, y), E_y(x, y)$ は、必要な階数まで微分可能であるとして、以下の設問に答えよ。

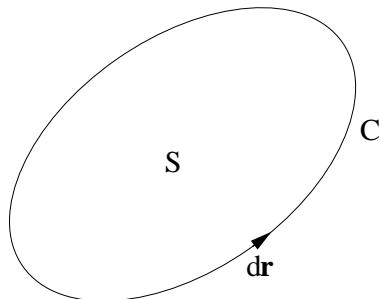
(i) $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ のとき、あるスカラー場 $\varphi(x, y)$ が存在して、

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \text{ と表せることを示せ。}$$

但し、次の関係を用いて良い。

$$\iint_S \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (E_x dx + E_y dy)$$

ここで S は閉じた道 C で囲まれる領域の内部であり、線積分の向きは反時計回りである。



(ii) $\mathbf{E} = (x^2 - y^2, -2xy)$ のとき $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ となることを示し、設問 (i) における $\varphi(x, y)$ を求めよ。

(iii) 点 (x, y) における接線が、設問 (ii) の $\mathbf{E}(x, y)$ と平行になる曲線群 $\Psi(x, y) = a$ ($a = \text{定数}$) を決定せよ。

2. (i) 行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを全て求めよ。ただし、固有ベクトルは正規化せよ。

- (ii) 次の行列

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により、設問 (i) の行列 \mathbf{A} を変換して得られる行列 $\mathbf{B} = \mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{X}^\dagger$ を考える。ただし、 \mathbf{X}^\dagger は \mathbf{X} のエルミート共役行列である。行列 \mathbf{B} の固有値、固有ベクトルを示せ。ただし、固有ベクトルは正規化せよ。

- (iii) エルミート行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ($i, j = 1, \dots, n$) の固有値を α_i ($i = 1, \dots, n$) とする。それらに関して次の 2 つの量、

$$F = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2, \quad G = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$$

を考える。設問 (i) の \mathbf{A} に対して F と G を求めよ。

- (iv) 設問 (iii) の F と G の関係を、一般のエルミート行列 \mathbf{A} に対して述べよ。

3. 時刻 $t = 0$ において $x = 0$ に強さ 1 の熱を加えたときの、1 次元空間におけるその後の熱の伝導は、方程式

$$\left(\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) G(x, t) = -\delta(x)\delta(t) \quad (\kappa \text{ は正定数}) \quad \cdots (1)$$

の解 $G(x, t)$ によって記述される。ただし、 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。また $t = -\infty$ で $G(x, t) = 0$ とする。

(i) $G(x, t)$ のフーリエ変換 $g(k, \omega)$ を次の式で定義する:

$$G(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega \quad \cdots (2)$$

このとき $g(k, \omega)$ の満たすべき方程式を式 (1) より導き、 $g(k, \omega)$ を求めよ。

(ii) 設問 (i) で求めた $g(k, \omega)$ を式 (2) に代入し、 ω 積分を実行せよ。

(iii) 設問 (ii) に続いて k 積分を実行し、 $G(x, t)$ を求めよ。ただし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi} \quad \cdots (3)$$

を用いてよい。

教育 物理

1. ロケットを垂直上方に打ち上げて、地球の重力圈を脱したい。時刻 t におけるロケットの高さ、速度および質量をそれぞれ $h(t)$, $v(t) = \frac{dh}{dt}$, $M(t)$ 、ロケットから噴射されるガスの、ロケットに対する相対速度を u とする。重力加速度を $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 、地球の半径を $R = 6370 \text{ km}$ として、以下に答えよ。なお、相対速度 u は一定であるとし、空気抵抗は無視せよ。
 - (i) 地球の重力圈を脱出するためには噴射が終わったときの速度がある値（脱出速度： v_{esc} ）を越えている必要がある。噴射終了時の高度は R に比べて十分小さいとして v_{esc} を求めよ。
 - (ii) ロケットの運動方程式は、

$$M \frac{dv}{dt} = -u \frac{dM}{dt} - Mg$$
 で与えられる。この式を導け。
 - (iii) 燃料の噴射時間を Δt とし、噴射開始時および噴射終了時の全質量をそれぞれ、 $M_i = M(t_0)$, $M_f = M(t_0 + \Delta t)$ とおくとき、この間の速度変化 $\Delta v = v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)$ を求めよ。また、噴射時間内の速度変化 Δv を増やすにはどうしたらよいかを述べよ。
 - (iv) 簡単のため、ロケットの加速度は一定であるとし、 $\frac{dv}{dt} = ng$ とおく。ここに、加速度係数 n は、乗組員や機内の装置に支障が生じないように選ばれた定数である。噴射開始時の質量 M_i と噴射終了時の質量 M_f の差がすべて燃料であるとして、燃料噴射時間 Δt 、噴射による速度変化 Δv 、および高度変化 Δh を求めよ。
 - (v) 燃料の燃焼温度を $T \text{ K}$ とするとき、燃料ガスの噴射速度 u は、燃料の分子がこの温度の下で持つ平均の運動エネルギーから決まる平均速度を超えない。燃料分子の質量を m 、ボルツマン定数を k として、燃料分子の平均速度 u_0 をあらわせ。また、 $u = u_0$ が実現できたとして、燃料ガスの噴射速度を大きくするには、どうしたらよいかを述べ、最良の燃料として何を選んだらよいかを言え。
 - (vi) 燃焼温度を $T = 2000 \text{ K}$ 、 $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ 、陽子の質量 m_p を $1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ で与えられるとき、設問 (v) で選んだ燃料から期待される最高噴射速度を求めよ。
 - (vii) 実際のロケットでは、構造上、噴射開始時および噴射終了時の全質量の比 $\frac{M_i}{M_f}$ は、高々4程度にしかできない。燃料ガスの噴射速度を $u = 3 \text{ km/s}$ 、加速度係数を $n = 4$ として、期待される最終速度を求め、脱出速度と比較せよ。この結果と設問 (v) と (vi) の結果から、脱出速度を得るためにどういう工夫をしたらよいかを論ぜよ。ただし、 $\ln 2 = \log_e 2 = 0.7$ とおけ。
2. 半径 a の円形断面を持つ無限に長い直線導線がある。電流が流れていないと、導線内の電荷分布は一様で、正電荷密度は $\rho_+ = \rho_0$ 、伝導電子による負電荷密度は $-\rho_- = -\rho_0$ であるが、電流を流すと、負電荷密度 $-\rho_-$ には $-\rho_0$ からのずれが生じる。これに関連した次の各設間に答えよ。
導線の内外で誘電率および透磁率は、それぞれ真空中の値 ϵ_0 , μ_0 を用いてよい。
 - (i) 外部電場が加わると電子は平均の移動速度（ドリフト速度）で流れる。この結果生ずる一様で定常な電流密度 j を電子の電荷密度 $-\rho_-$ と電子のドリフト速度 $v (> 0)$ で表せ。
 - (ii) この電流が導線の内外に作る磁場（磁束密度 B ）を、導線の中心からの距離 r の関数として求め、その向きを図示せよ。
 - (iii) この磁場が導線内の一箇の伝導電子に作用するローレンツ力の大きさを、電子のドリフト速度 v と磁場の大きさで表し、その向きを図示せよ。
 - (iv) 伝導電子は、設問 (iii) で求めた磁場からのローレンツ力を受けているにもかかわらず定的に運動している。それは磁場のローレンツ力をうち消す電場が作られているからである。この電場を求め、その向きを図示せよ。
 - (v) これまでの結果をもとに、電流が流れると電荷分布がどう変化するかを簡潔に説明せよ。

(vi) 実際に変化した電荷分布を求めよ。ただし、正電荷密度を ρ_+ 、負電荷密度を $-\rho_-$ とおき、各電荷密度を ρ_0 と v で表し、電流が流れていらない場合からの変化を求めよ。

(vii) 断面積 1 mm^2 の導線に 1 A の電流が流れるときの電子のドリフト速度を計算し、上で求めた電荷密度の変化の割合を評価せよ。ただし、銅の質量密度は $9 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 、原子量は 63.55 であり、原子 1 個あたり自由電子が 1 個あるとする。また、素電荷は $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 、アボガドロ定数は $6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ 、真空の光速度は $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ とする。

3. (i) 図 1 に示すような実験器具で、単色光を使ったヤングの干渉実験を行った。光を単スリット A に通した後、複スリット B、C を通過させると、複スリットから回折した光が干渉し、その結果、スクリーン上に明暗の干渉縞ができる。複スリット B と C の間隔は、 $d = 30 \mu\text{m}$ 、複スリットとスクリーンとの間の距離は $a = 5 \text{ cm}$ であった。光は赤色で、波長は $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ である。この時、スクリーン上で観察される干渉縞の間隔（明線と明線の間隔） s を求めよ。

B、C の各々のスリットの幅は十分狭いとしてよい。

- (ii) 次に、図 2 に示すような配置に変えた（垂直上方から見た図）。つまり、図 1 のスクリーンの位置にレンズを置き、スクリーンをその後方に移動させ、複スリットの拡大像をスクリーンに写し出した。使用したレンズは、直径 $L = 2 \text{ cm}$ で焦点距離 $f = 4.5 \text{ cm}$ のものである。この時、ピントのあった像を得るには、レンズとスクリーンの間の距離 b を何 cm にすればよいか。また、スクリーン上に輝線として写し出された複スリットの像の間隔 D は何 mm か。

- (iii) 図 2 の配置のまま、複スリットを、B と C の間隔 $d = 2 \mu\text{m}$ のものに交換した。すると、スクリーン上に写し出された複スリットの像が 2 本の輝線ではなく、1 本の輝線として観察された。ルーペでスクリーン上の像を拡大してみても、輝線は 1 本のままであった。なぜ、複スリットの間隔が狭い場合には 2 本の輝線に分離して観察されないのか、理由を説明せよ。

- (iv) スクリーン上で 2 本の輝線として観察される複スリットの最小間隔 d_0 を求めよ。

- (v) 設問 (iii) の観察で、 d_0 が狭い場合でも複スリットの像が 2 本に分離された輝線としてスクリーン上に写し出されるようにしたい。光源の波長を変えない場合、どのような工夫をすればよいか。また波長を変えてよい場合は、どのようにすればよいか。各々理由を付けて答えよ。

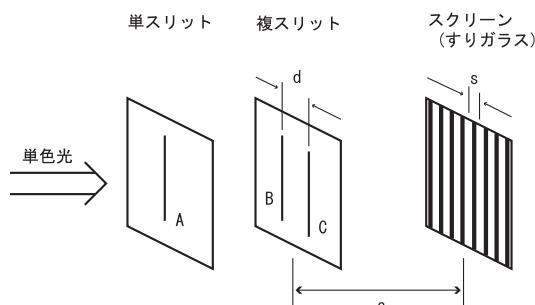


図 1

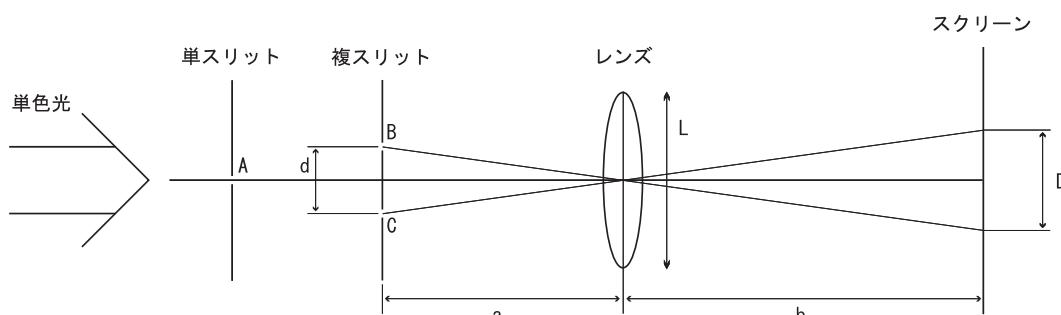


図 2

教育 英語 解答

1. 全訳

“Talking about Science”について分析してみよう。どうやつたら一番うまくできるのだろうか。Aによって発表された題材は深い印象を残すスリリングなものであるのに対し、同じものがBによって発表されると退屈で全く印象を残さないのはなぜだろうか。全く別の分野の科学者に自分の分野のことについて発表するにはどうしたらよいのだろうか。政治家によくいるような、科学の知識がほとんど、あるいは全くない人々に科学について話すにはどうしたらできるだろうか。科学者以外の人達にその研究が重要な意味を持っている理由、すなわち彼らにとっては時に非常に理解しがたいものである情熱をどのようにしたらわかってもらえるだろうか。

“Talk”の基本的な特徴は何であろうか。それは“Talk”の第一の目的は情報を伝えることではなく、心の状態すなわち考え方を築くことである、と言い表されると思う。私の言いたい事はおそらく言葉による説明と活字による説明との大きな違いをよく考えてみることで説明できるだろう。見出しの“Talk”には、学生がノートを取ったり一つ一つの講義がお互いにフォローしてできあがるような講座は含まれない。また、同じ研究分野の2、3人の専門家の、何ら規則も必要としないような集まりも含まない。私が言っているのは限られた時間内で聴衆の興味を引き起こさなければならない話のことである。活字による説明も物の見方を築くこともできるが、その主な目的は情報の蓄積である。その議論は内容が豊かで濃い。表やグラフ、数式を含みうる。これは読者がいつも都合の良い時に小休止してまとめ、難しいと思った部分に立ち戻ることができるからこそ可能なのである。Talkの際に無責任であって良いといっているのではなく、細かいところにまで気を使う必要はないといっているのである。実際、そんなことをしようとしたらTalkは台無しになってしまうだろう。

それゆえTalkは「論文」とは全く異なるものである。私の考えではその技術の形式を決定する主な要因は次のようなものである。「題材を発表した方法の成果は次の日にそれを覚えている聴衆の平均数の程度で測られる。」

これは当たり前の意見のように思えるかもしれないが、もし自分が聞いた講義を評価する基準としてこの原理を使ったり、あるいは自分自身の講義の計画を立てる際に使えばとても重要な観点が生み出されるのである。講義の価値は1時間にどれだけの量を詰め込むのかにでも、どれだけ多くの重要な情報に触れたかにでも、基礎をどれだけしっかりと押さえたかにでも測られるのではない。翌朝にどれだけの聞き手が友達にそれについて話せるかで測られるのである。もし我々科学者がこの問題を正直に受け止め、自分が聞いた講義をどれほど思い出すことができないのかということを考えれば、我々は講義の計画を立てる際に判断力と価値観が備わるし、目標を高くしすぎると我々の言っていることが聴衆の理解を超てしまうことに気付く。ここで、Talkを準備する際に利用する配慮であると私が思うもののうちいくつかを挙げたいと思う。

例えば、1時間にどれだけのポイントを理解させることができるか尋ねてみよう。答えは「一つ」だと私は思う。もし聴衆の中の平均的な人が強い興味を持って一つのメインテーマを覚えているなら、その講義は大成功である。講義と写真の構成を比べてみよう。もちろんこれはやるには危険な試みである。なぜなら芸術家には非常に多種多様な人たちがいるからである。しかし、簡単に言ってしまうと絵画には興味の核となるものが一つあるとは考えられないだろうか。絵画には多くの副次的な特徴があるが、その構成は非常に巧妙に仕組まれているので、その特徴に目をやり、配置を追っていくと興味の核に引き戻され絵の枠からはみ出ないのである。講義もそのようであるべきである。一つのメインテーマがあり、副次的な興味、実験、実証というものはすべて聞き手にテーマを思い出させるようなものであるべきなのである。絵画のように講義でも、印象に残るかどうかは不必要な細かい点をバッサリと切り落とせるかどうかにかかっているのである。講義にはもともと刺激的な細部が豊富にあるかもしれないが、その細部はそれらを思い出していくと必然的にメインテーマを思い起してしまうようなものでなくてはならない。言い換えれば講義はあるパターンを持つという意味で構成されていなければならない。なぜならこのパターンで人の記憶に印象を残すことができるからである。

講義は最初の10分で成否が決まってしまう。これは話の土台を作り、聴衆に彼らがすでに半分知っていることを思い出させ、使われる用語を定義するための時間である。やはりこれも明らかなことに思えるが、素晴らしい題材であっても講演者が自分の話を聴衆はわかっていない事を理解できていないために、聴衆が取り残

されてしまっているものを私は聞いたことがある。が、もし貴重な最初の 10 分を下準備に充てていたなら残りの話にも聞き手はついていくことができただろう。

ここで私が「推理小説」の原理と思っているとても重要なものを教えよう。問題なのは順番である。もし作者が最初の章に誰がやったかを教え、手がかりを与えてしまったら推理小説はつまらない物になってしまうだろう。しかしこれと同じ事をやっている講演者がどんなに多いことか！問題解決の糸口をつかみ、その現象について正しく考えた時、不可解な現象がいかに明白なものになっていくのかを見ていく感覚的な楽しさを聴衆に味わってもらいたいのだ。だから最初は聴衆を戸惑わせるようにするといい。

講義の際に居眠りをしがちだという事はみんなわかっているし、私自身居眠りをして何度も恥ずかしい思いをしたことが知らない。どんなにいい講演者でさえ全く眠気を誘わないなんて事はありえないが、眠気を誘うのを最小限に食い止めておくためにできることはたくさんある。ずっと同じように話すのは致命的だ。眠気を誘う催眠術のようなものがあるのだ。緩急をつけるのが大切である。とりわけジョークの効果は際立っているし、長持ちする。

(i) • 相違

“talk”は物の見方を構築するための物であるのに対して、“paper”は情報の蓄積を目的とする。

• successful talk とは

話の内容を次の日に覚えている人が数多くいるような講義。

- (ii)
- ある一つのメインテーマを伝えるように構成を考えること
 - 話の始めの 10 分間にこれから話す内容の下準備をすること
 - 聴衆には話の始まりで戸惑わせること
 - 聴衆が眠らないように話に緩急をつけ、ジョークを言うこと

- (iii) (ア) 1 つ目のパラグラフのみに該当。不適切。

(イ) 両方のパラグラフの内容を持っているといつてもいいかもしれない。正解。

(ウ) 2 つ目のパラグラフのみに該当。不適切。

(エ) 1 つ目のパラグラフのみに該当。不適切。

(オ) どちらのパラグラフの主題でもない。不適切。

2. (i) Comparing the Schrödinger equation with the classical energy-momentum equation, we can see that, at least for a free particle, energy and momentum correspond to the differential operators which act on the wave function ψ , as follows:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} , \quad p \rightarrow -i\hbar \nabla$$

- (ii) The famous experiment by Michelson and Morley showed that the speed of light is constant for all directions, irrespective of the relative motion among the observer, the transmitting medium, and the source.
- (iii) Therefore, the Galilean transformation, under which classical mechanics is invariant, is found to be incorrect and should be replaced by another, under which the speed of light is constant.
- (iv) Einstein showed that such a transformation would inevitably change the concept of time and simultaneity which had been believed differently before.

教育 数学 解答

1. (i)

$$\oint_C (E_x dx + E_y dy) = \iint_S \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

の時、固定点 $O(x_0, y_0)$ から $P(x, y)$ までの線積分は経路に依らないから

$$\varphi(x, y) = \int_O^P (E_x dx + E_y dy)$$

とおける。この場合、線積分が経路に依らないので、まず x 軸に平行に $(x_0, y_0) \rightarrow (x, y_0)$ と動かし、次に y 軸に平行に $(x, y_0) \rightarrow (x, y)$ と動かす経路を取ると、

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0}^x E_x(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y E_y(x, y) dy$$

と書くことができる。従って、この式より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= E_x(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial E_y}{\partial x} dy \\ &= E_x(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \quad \left(\because \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \right) \\ &= E_x(x, y_0) + E(x, y) - E_x(x, y_0) \\ &= E(x, y) \end{aligned}$$

また、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = E_y(x, y)$$

が得られる。よって、

$$\mathbf{E} = \text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$$

と書ける。

(ii)

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = -2x. \quad \therefore \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int_O^{(x,y)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \varphi(0, 0) \\ &= \int_O^{(x,0)} E_x dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} E_y dy + C \quad (C \text{ は定数}) \\ &= \int_{(0,0)}^{(x,0)} (x^2 - y^2) dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (-2xy) dy + C \\ &= \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + C \end{aligned}$$

(iii) $\Psi(x, y) - a = 0$ の法線が $E(x, y) = (x^2 - y^2, -2xy)$ と直交すれば良い。

$$\nabla[\Psi(x, y) - a] \cdot \mathbf{E}(x, y) = 0$$

ここで例えれば

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2xy \quad \cdots (1)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = x^2 - y^2 \quad \cdots (2)$$

を取ることができる。(3) より

$$\Psi(x, y) = x^2y + C(y) \quad (C(y) \text{ は } y \text{ だけの関数})$$

これを(3)に代入して

$$x^2 + C'(y) = x^2 - y^2$$

$$C'(y) = -y^2 \quad \therefore C(y) = -\frac{1}{3}y^3 + c \quad (c \text{ は定数})$$

$$\therefore \Psi(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3 + c$$

よって求める曲線群は

$$\Psi(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3 = a \quad (a \text{ は定数})$$

2. (i)

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^2(1 - \lambda) + 2\lambda = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

より固有値は $-1, 0, 2$.

固有値が -1 の時、長さ 1 の固有ベクトルとして $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

固有値が 0 の時、長さ 1 の固有ベクトルとして $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

固有値が 2 の時、長さ 1 の固有ベクトルとして $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

よって

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が求める正規化された固有ベクトルである。

(ii)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\mathbf{X}^\dagger &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{X}^\dagger = \mathbf{X}^{-1}$$

(i) で求めた各固有ベクトルを $a \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおき、 $\mathbf{P} = (a, b, c)$ として

行列 \mathbf{P} を定めると、

$$\mathbf{AP} = \mathbf{A}(a, b, c) = (a, b, c) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{PQ}$$

となっているので、 $\mathbf{A} = \mathbf{PQP}^{-1}$ と書ける。

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{XAX}^\dagger = \mathbf{XAX}^{-1} = \mathbf{X}(\mathbf{PQP}^{-1})\mathbf{X}^{-1} \\ &= \mathbf{XPQ}(\mathbf{XP})^{-1}\end{aligned}$$

であるので、

$$\mathbf{B}(\mathbf{XP}) = \mathbf{XPQ}$$

よって

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{Xa}, \mathbf{Xb}, \mathbf{Xc}) &= (\mathbf{Xa}, \mathbf{Xb}, \mathbf{Xc}) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1 \cdot \mathbf{Xa}, 0 \cdot \mathbf{Xb}, 2 \cdot \mathbf{Xc})\end{aligned}$$

と書けるので、 \mathbf{B} の固有値は $-1, 0, 2$ であり、 $\mathbf{Xa}, \mathbf{Xb}, \mathbf{Xc}$ は \mathbf{B} の固有ベクトルとなっている。また

$$\begin{aligned}(\mathbf{Xa}, \mathbf{Xa}) &= (a, \mathbf{X}^\dagger \mathbf{Xa}) \\ &= (a, a) \quad (\because \mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} = \mathbf{E}) \\ &= 1 \quad (\because a \text{ は単位ベクトル})\end{aligned}$$

よって \mathbf{Xa} は単位ベクトルであることが言える。

以上より、 $\mathbf{Xa}, \mathbf{Xb}, \mathbf{Xc}$ は \mathbf{B} の正規化された固有ベクトルであることが言える。よって求めるベクトルは、

$$\mathbf{Xa} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Xb} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Xc} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\begin{aligned}F &= \sum_{i=1}^3 |\alpha_i| = |-1|^2 + |0|^2 + |2|^2 = 5 \\ G &= \sum_{i,j=1}^3 |a_{ij}|^2 = 5\end{aligned}$$

(iv)

$$\mathbf{B} = (b_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

とおく。

エルミート行列 \mathbf{A} はユニタリ行列 \mathbf{U} を用いて、

$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{AU} = \mathbf{B}$$

のように対角化できる。

まず、

$$\sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = F \quad \cdots (3)$$

が成り立つ。

以下では、和記号を明記しない場合を除いては、同じ添字が 2 度現れたときには和を取るものとすると、

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2 &= \sum_{i,j=1}^n |(\mathbf{U}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{U})_{ij}|^2 \\
 &= (\mathbf{U}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{U})_{ij} \overline{(\mathbf{U}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{U})_{ij}} \\
 &= (U_{ik}^{-1} a_{kl} U_{lj}) (U_{mi} \bar{a}_{mn} U_{jn}^{-1}) \\
 &= \delta_{mk} \delta_{ln} a_{kl} \bar{a}_{mn} \\
 &= a_{kl} \bar{a}_{kl} \\
 &= G
 \end{aligned} \quad \cdots (4)$$

ここで、ユニタリ行列に関する次の性質を用いた。

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1}$$

$$\overline{\mathbf{U}}^\dagger = \mathbf{U}^\text{T}$$

$$\overline{\mathbf{U}} = (\mathbf{U}^{-1})^\text{T}$$

(3)(4) より、

$$F = G$$

が成り立つ。

3. (i) (2) 式と

$$\delta(x)\delta(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(kx-\omega t)}$$

を (1) 式に代入すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (-\kappa^2 k^2 + i\omega) g(k, \omega) e^{i(kx-\omega t)} = - \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(kx-\omega t)}$$

従って、 $g(k, \omega)$ の満たすべき方程式は、

$$(\kappa^2 k^2 - i\omega) g(k, \omega) = 1$$

従って、

$$g(k, \omega) = \frac{1}{\kappa^2 k^2 - i\omega}$$

である。

(ii) (i) で求めた $g(k, \omega)$ を (2) に代入すると、

$$G(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\kappa^2 k^2 - i\omega} e^{i(kx-\omega t)}$$

これを ω について積分する。今、

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\kappa^2 k^2 - i\omega}$$

なる I を考えるとする。 $z = \kappa^2 k^2 - i\omega$ とおくと、

$$\begin{cases} I = \frac{i}{2\pi} \int_{r+i\infty}^{r-i\infty} dz \frac{e^{zt}}{z} e^{-\kappa^2 k^2 t} \\ r = \kappa^2 k^2 \end{cases}$$

となる。さて、ステップ関数 $\theta(t)$ は、

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{R-i\infty}^{R+i\infty} dz \frac{e^{zt}}{z} = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (R \text{ は任意の実数})$$

ということが、留数定理から分かる。従って I は、

$$I = \theta(t)e^{-\kappa^2 k^2 t}$$

である。従って、

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \theta(t)e^{-\kappa^2 k^2 t} e^{ikx}$$

(iii) 設問 (ii) の結果より

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \theta(t) \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left[-\kappa^2 t \left(k - \frac{ix}{2\kappa^2 t}\right)^2\right] \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \theta(t) \sqrt{\frac{\pi}{\kappa^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}\right) \end{aligned}$$

教育 物理 解答

1. (i) 重力加速度は、次のように表される。(M_e : 地球の質量)

$$g = \frac{GM_e}{R^2} \quad \cdots (1)$$

またエネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}Mv_{\text{esc}}^2 - G\frac{MM_e}{R+h} = 0 \quad \cdots (2)$$

(1), (2), $R \gg h$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_{\text{esc}}^2 &= G\frac{M_e}{R} = gR \\ v_{\text{esc}} &= \sqrt{2gR} \approx 1.1 \times 10^4 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

- (ii) 時間 dt に噴射されるガスの質量を dm とすると、ガスの受ける力積は鉛直上向きを正とすると $dm = -dM$ より

$$-u dm = u dM$$

よって、ロケットの受ける力積は $-u dM$

したがって、噴射によりロケットが受ける力積は $-u \frac{dM}{dt}$ なので

$$M \frac{dv}{dt} = -u \frac{dM}{dt} - Mg$$

- (iii) 運動方程式より

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u}{M} \frac{dM}{dt} - g$$

これを積分すれば

$$\Delta v = u \log \frac{M_i}{M_f} - g\Delta t \quad \cdots (3)$$

Δv を大きくするには

- 噴射速度 u を大きくする
- M_i/M_f を大きくする (燃料の量を増やす)

- (iv) $\frac{dv}{dt} = ng$ より

$$v = ng(t - t_0) + v(t_0)$$

$$h = \frac{1}{2}ng(t - t_0)^2 + v(t_0)(t - t_0) + h(t_0)$$

よって、

$$\Delta v = ng\Delta t$$

これを (3) に代入して

$$(1+n)g\Delta t = u \log \frac{M_i}{M_f}$$

ゆえに

$$\Delta t = \frac{1}{1+n} \frac{u}{g} \log \frac{M_i}{M_f}$$

$$\Delta v = \frac{n}{1+n} u \log \frac{M_i}{M_f}$$

$$\Delta h = \frac{1}{2} \frac{n}{(1+n)^2} \frac{u^2}{g} \left(\log \frac{M_i}{M_f} \right)^2 + v(t_0) \frac{1}{1+n} \frac{u}{g} \log \frac{M_i}{M_f}$$

(v) エネルギー等分配則より、分子の内部構造の自由度を f とすると、(たとえば 2 原子分子なら $f = 2$)

$$\frac{1}{2}mu_0^2 = \frac{3+f}{2}kT$$

よって

$$u_0 = \sqrt{\frac{3+f}{m}kT}$$

噴射速度を大きくするには、燃料の分子の質量を小さくするか、 f が大きいものを選べばよい。最良の燃料は水素。

(vi) ${}^{10}m \simeq 2m_p = 3.4 \times 10^{-27} [\text{kg}]$

$$u_0 = \sqrt{\frac{5 \times 1.4 \times 10^{-23} \times 2000}{3.4 \times 10^{-27}}} = 6.4 \times 10^3 [\text{m/s}]$$

(vii) $v(t_0) = 0$ とすると

$$v_f = \frac{4}{5} \times 3 \times 10^3 \times 2 \times 0.7 = 3.4 \times 10^3 [\text{m/s}]$$

これは v_{esc} よりもかなり小さい。 v_{esc} を得るには、 u を上げる、つまり、燃焼温度を上げる必要がある。これには、水素と、それを燃やすのに必要な酸素の混合比を変える方法がある。

混合比の変更のみで十分な温度が得られるか確実でなく、限界があるようであれば、ロケットの一部を逆方向に運動量を与えて切り離すなどの方法を組み合わせる必要が生じる。

2. (i) $j = \rho_- v$

(ii) アンペールの法則より

0.(i) $r \leq a$ の時

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0 j}{2} r$$

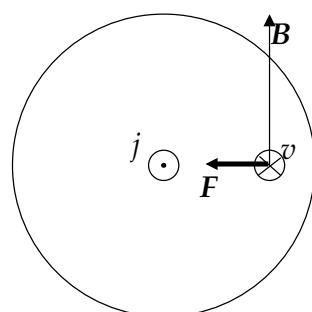
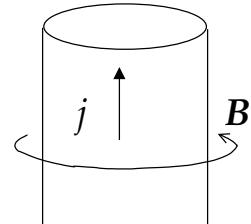
0.(ii) $r \geq a$ の時

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi a^2$$

$$B = \frac{\mu_0 j a^2}{2r}$$

(iii)

$$F_{\text{Lorentz}} = evB (\text{中心内向き})$$

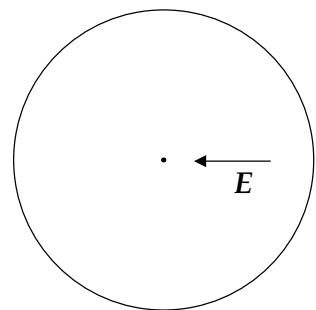


¹⁰より現実的には、液体水素と液体酸素を反応させてできた水分子を噴射することになるので、分子量 $18m_p$ 、 $f = 6$ を用いなければならない、との指摘がある。問題文では燃料として蓄えられた物質の分子量=噴射する分子の分子量となっているように読めるので、そこまで求められているかはわからない。(2003 年度注)

(iv) ガウスの法則より (E は外向きを正とする)

$$2\pi rlE = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_0 - \rho_-)l\pi r^2$$

$$E = \frac{\rho_0 - \rho_-}{2\epsilon_0}r \text{ (中心内向き)}$$



(v) 負電荷が多く分布する。

(vi) $\rho_+ = \rho_-$ より $\Delta\rho_+ = 0$. また、 $F_{\text{Lorentz}} + (-e)E = 0$ より

$$ev \frac{\mu_0 \rho_- v}{2} r = e \frac{\rho_- - \rho_0}{2\epsilon_0} r$$

$$\frac{v^2}{c^2} \rho_- = \rho_- - \rho_0 \quad \left(c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \right)$$

$$\therefore -\rho_- = -\frac{\rho_0}{1 - v^2/c^2}$$

$$\simeq -\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \rho_0$$

$$\therefore \Delta(-\rho_-) = -\frac{v^2}{c^2} \rho_0$$

(vii) 電子の数密度を n とすると

$$n = \frac{9 \times 10^3 [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}] \cdot 6 \times 10^{23} [\text{mol}^{-1}]}{63.55 \times 10^{-3} [\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}]} \simeq 8.4 \times 10^{28} [\text{m}^{-3}]$$

$$\rho_- = 1.6 \times 10^{-19} [\text{C}] \cdot 8.4 \times 10^{28} [\text{m}^{-3}] \simeq 1.3 \times 10^{10} [\text{C} \cdot \text{m}^{-3}]$$

$$j = \frac{1 [\text{A}]}{10^{-6} [\text{m}^2]} = 10^6 [\text{A} \cdot \text{m}^{-2}]$$

$$\therefore v = \frac{j}{\rho_-} \simeq 7.6 \times 10^{-5} [\text{m/s}] \simeq 8 \times 10^{-5} [\text{m/s}]$$

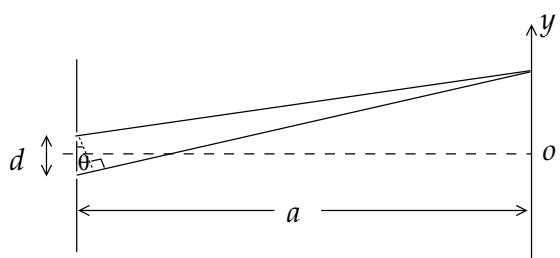
$$\therefore \frac{\Delta\rho_-}{-\rho_0} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \simeq 6 \times 10^{-26}$$

1. (i)

$$d \sin \theta = m\lambda$$

$$\frac{dy}{a} = m\lambda$$

$$\therefore s = \frac{a}{d} \lambda = 1 \times 10^{-3} \text{m} = 1 \text{mm}$$



(ii) 公式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ より

$$b = \frac{af}{a-f} = 45 \text{cm}$$

$$D = \frac{b}{a} d = \frac{45}{5} \cdot 30 \mu\text{m} = 0.27 \text{mm}$$

(iii) $d = 2\mu\text{m}$ より $s = 15\text{mm}$ 。一方、レンズの半径は 10mm 。

よって、レンズには 0 次回折光の情報しか来ていないのでスリットが単スリットである時と同じ状況になっている。だから、スクリーンにはまるで単スリットから出た光のような像がうつる。

(iv) 1 次回折光がレンズを通ればよい。レンズの半径は 1cm だから

$$d_0 = \frac{5\text{cm} \times 0.6\mu\text{m}}{1\text{cm}} = 3\mu\text{m}$$

(v) (i) 波長を変えない時

レンズを大きくする。

半径 1.5cm 以上にすれば 1 次回折光がレンズを通るから。

(ii) 波長を変える時

波長を短くする。

s が小さくなつて 1 次回折光がレンズを通るから。

1999 年度 入学試験 物理専門科目

専攻 問題 1

図 1 のような 1 次元ポテンシャル $V(x)$ すなわち

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty & (|x| > d + a \text{ のとき}), \\ V(x) &= 0 & (d + a > |x| > d \text{ のとき}), \\ V(x) &= V_0 & (|x| < d \text{ のとき}), \end{aligned}$$

の中に質量 m の粒子が一個入っている系を考える。このように、1 次元シュレディンガー方程式でポテンシャルエネルギーが 1 次元座標 x の関数として $V(x) = V(-x)$ を満たすとき、ハミルトニアン

$$H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

の固有関数 Ψ は $\Psi(x) = \Psi(-x)$ であるパリティが偶のものと $\Psi(x) = -\Psi(-x)$ であるパリティが奇のものに分かれることに注意して、以下の問い合わせに答えよ。但し \hbar はプランク定数である。

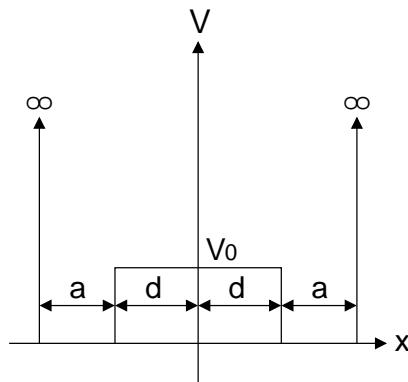


図 1

1. この系のエネルギー固有値 E を決める式を $E < V_0$ の条件が満たされている場合について求めよ。
2. 基底状態と第一励起状態の波動関数をそれぞれ $|\Psi_0\rangle$ と $|\Psi_1\rangle$ とし、エネルギー固有値をそれぞれ $E = E_0, E_1$ とする。 $E_1 < V_0$ が満たされる場合に、 $|\Psi_0\rangle$ と $|\Psi_1\rangle$ の概形を x の関数として描け。
3. V_0 が有限で d が無限大の極限をとった時の E_0, E_1 を $\overline{E}_0, \overline{E}_1$ とする。 $\overline{E}_0, \overline{E}_1$ を一意的に決める式を求めよ。
4. d が大きいが有限であるとする。 \overline{E}_0 を用いて、 $\Delta \equiv E_1 - E_0$ の d 依存性はどうなっているかを議論せよ。
5. $|\Psi_0\rangle$ と $|\Psi_1\rangle$ を $|R\rangle$ と $|L\rangle$ の 1 次結合で表せ。
6. $|R\rangle$ と $|L\rangle$ を基底とする表現をとって、ハミルトニアンを 2 行 2 列の行列で表せ。
7. $t = 0$ に粒子の波動関数が右の井戸に存在する状態 $|R\rangle$ で表わされていたとき、トンネリングによって時刻 t に粒子が左の井戸の状態 $|L\rangle$ に移っている確率を Δ を用いて表わし、得られた Δ 依存性の物理的意味を議論せよ。

専攻 問題 2

電離層では空気分子は電子と陽イオンに電離されたプラズマ状態にある。電離層を伝搬する電磁波を考える。電離層は全体として中性であり電磁波に対して陽イオンは重いので動かず電子だけが動くとする。電子の質量は m 、電荷を $-e$ とし、また電子密度は n として常に一様であるとし、伝搬する電磁波によって生ずる磁場が電子の運動に及ぼす効果は無視できるものとする。平面波（周波数 ω 、波数 k ）が電離層に垂直入射したとして以下の問いに答えよ。なお Maxwell 方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \cdots (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \cdots (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \cdots (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j} \quad \cdots (4)$$

と書かれる（左が C.G.S. 系、右が M.K.S. 系）。ここで \mathbf{E} は電場、 \mathbf{B} は磁束密度、 \mathbf{j} は電流密度、 ϵ_0 は真空の誘電率、 μ_0 は真空の透磁率をあらわす。必要ならば $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ の公式を用いてよい。また C.G.S. 系、M.K.S. 系のいずれの単位系を用いててもよい。

1. プラズマ中に誘起される電流密度 \mathbf{j} は、入射する電磁波の電場ベクトル \mathbf{E} と電気伝導度 σ を用い、 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ と書くことができる。まず外部磁場がゼロとして、電離層の電気伝導度 σ を周波数 ω の関数として書け。
2. k と ω の間の分散関係を求め電離層の屈折率 ($n \equiv ck/\omega$) を計算せよ。次に $\omega < \omega_p$ のとき電磁波は伝搬できないことを示し、その物理的意味を説明せよ。ここで ω_p はプラズマ周波数であり C.G.S. 系では $\sqrt{4\pi n e^2 / m}$ 、M.K.S. 系では $\sqrt{n e^2 / m \epsilon_0}$ で与えられる。

次に電磁波の伝搬方向に一定磁場 B_0 がかかったとする。このとき磁場に対して右回りと左回りに円偏光した電磁波は異なる伝搬の仕方をする。 z 方向に伝搬する円偏光した電磁波の電場ベクトルは $\mathbf{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} \pm i\hat{y})$ (\hat{x}, \hat{y} は各々 x 方向及び y 方向の単位ベクトルで、+ 符号は右回り、- 符号は左回り) と書けることを用い、以下に答えよ。

3. 右回り左回りそれぞれの電磁波に対する電離層の電気伝導度を ω, ω_c の関数として書け。ここで ω_c はサイクロトロン周波数であり C.G.S. 系では eB_0/mc 、M.K.S. 系では eB_0/m で与えられる。
4. 右回り左回りそれぞれの電磁波に対する屈折率を ω, ω_p 及び ω_c の関数として求めよ。またこのとき一方の電磁波は $\omega < \omega_p$ でも電離層を伝搬できることを示せ。

専攻 問題 3

低温を得る方法の 1 つに磁性体の断熱消磁がある。磁性体のモデルとして結晶格子の各格子点 i に $1/2$ のスピンが存在する系を考える。磁性体と外部磁場 H の相互作用は、

$$\mathcal{H}_1 = -\mu H \sum_i \sigma_i$$

と表される。ただし σ_i はスピンの向きに応じて $+1$ 又は -1 の値を取る変数で、 μ は磁気モーメントである。以下の設問ではスピン以外の自由度は考えなくて良い。

まず、異なる格子点上のスピン間に相互作用がないとして次の 1. から 3. の問い合わせに答えよ。

1. 1 格子点あたりの自由エネルギーとエントロピーを温度 T 、磁場 H の関数として求めよ。
2. i) $H = 0$ の場合、ii) H が有限で小さいとき、iii) H が大きいとき、の 3 つの場合について、1 格子点当たりのエントロピーを温度 T の関数として定性的にグラフで示せ。
3. 最初、磁場 H_i のもとで、磁性体が温度 T_i の熱浴と接して熱平衡状態にあった。次に熱浴との接触を絶ち、磁性体を外界から孤立させて磁場を H_f までゆっくり下げた。このときの磁性体の温度 T_f 求めよ。

これまで、スピン間の相互作用を無視しているために、3. の問い合わせで $H_f = 0$ とすると不合理な結果が生じる。一方現実の磁性体では、隣接する格子点上のスピンの間に相互作用が働き、このため低温で強磁性は反強磁性などの秩序状態が実現する。この事を考慮して以下の問い合わせに答えよ。

4. 3. の問い合わせで $H_f = 0$ とすると、どのような不合理な結果が生じるか、述べよ。
5. 現実の磁性体に対して $H_f = 0$ としたとき、磁性体の温度 T_f はどうなるか、定性的に論じよ。
6. 最近接格子点上のスピン間に強さ J の相互作用があるとき、1 格子点当たりの自由エネルギーは

$$F = -kT \log 2 - \frac{(\mu H)^2 + J^2 z/2}{2kT}$$

で与えられることが知られている。ここで、 k は Boltzmann 定数、 z は 1 つの格子点に対する最近接格子点の数である。

この系に対して、3. の問い合わせで述べた断熱消磁を実行した。この過程で系の状態は常にある温度に対するカノニカル分布で表されると仮定して、最終磁場 H_f における温度 T_f を H_f の関数として求め ($0 \leq H_f \leq H_i$)、結果を図示せよ。ただし $kT \gg \mu H \gg |J| \sqrt{z}$ と仮定する。

専攻 問題 4

1. 図 1 は Kelvin の電気秤であり、天秤 L のおもり M の値を変化させることで、固定電極 A に加えた電圧を測定できる。

B は接地された可動電極（極板面積 S ）、G は接地されたガード電極（固定）で B の周囲を取り囲んでいる。A、G の極板間隔を d 、重力加速度を g 、空気の誘電率は真空の誘電率 ϵ_0 と同じとして、以下の問い合わせよ。

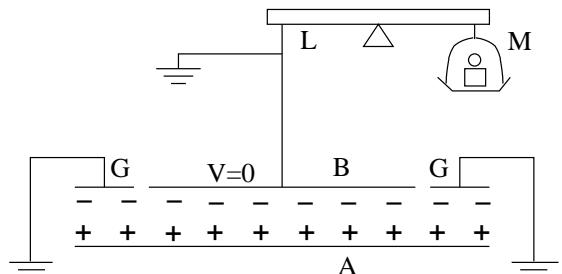


図 1

- (i) A に加えた電圧 V (B に対する電位) を測定する手順を、実際に測定することを想定してなるべく詳しく記述し、 V を求める式を導け。（ちなみに、Kelvin は実際には A に既知の電位を与え誘電率 ϵ_0 を測定するためにこの秤を用いた。）
- (ii) ガード電極 G を配置する意味を答えよ。
2. 受動回路素子（抵抗 R、コンデンサー C、コイル L）のインピーダンスを正確に測定する方法にブリッジ法がある。この方法は、未知のインピーダンス Z_x と既知の（可変）インピーダンス Z_i ($i = 1 \sim 3$) を使い、ブリッジをバランスすることで Z_x を精密に測定する方法である。測定には必要に応じて周波数可変な信号源を用いることが出来るものとして、以下に答えよ。
- (i) 理想的なコイル L_x の未知のインダクタンス L_x を、既知の純抵抗 R_1, R_2, R_3 を用いてブリッジ法で測定するための回路図を示し、 L_x を求める方法を解説せよ。
- (ii) 現実的には理想的な受動素子は存在せず、寄生成分と呼ばれる避けられないインピーダンス成分が存在する。たとえばコイルのインダクタンス L_i には、直列に巻線抵抗 R_i 、並列に巻線間分布容量 C_i が存在する（図 2）。(i) で考えた回路で用いた L_x に寄生成分がある場合、寄生成分の値を推定する方法を簡潔に論じよ。
-
- 図 2
3. 太陽電池では、シリコンの pn 接合部分にバンドギャップ（約 0.6eV）よりも大きなエネルギーをもつ 1 個の光子が当たったときに電子 - 正孔が生じ、それらが界面電場により互いに逆方向にドリフトすることで、2 つの電極間に光起電力が発生する。必要ならば、光速度 $c = 3.0 \times 10^8$ [m/s]、素電荷 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ [C]、Planck 定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}$ [J·s]、Boltzman 定数 $k = 1.4 \times 10^{-23}$ [J/K] を用い、以下の問い合わせよ。
- (i) 太陽電池に光を照射した際プラス極になるのは、p 型、n 型のどちらに接続した電極か。理由を付けて答えよ。
- (ii) 温度 T [K] の光源（黒体）の単位面積から単位時間に放出される電磁場の全輻射エネルギー I [W/m²] は、 $I = \sigma T^4$ で与えられる。ここで $\sigma = 5.7 \times 10^{-8}$ [W/m²/K⁴] はシュテファンボルツマン定数である。今、太陽を温度 5.8×10^3 [K] の黒体とした時、単位時間に太陽から放出される総輻射量 P_0 [W] および地球軌道上（地球の大気圏外）における単位面積あたりの太陽輻射量 I_0 [W/m²] を概算せよ。なお、太陽の半径は 7.0×10^8 [m]、太陽までの距離は 1.5×10^{11} [m] である。
- (iii) 図 3、4 は、地球軌道上（地球の大気圏外）における単位面積あたりの太陽輻射光子数と標準的な太陽電池の量子効率を表している。このことから、5 cm × 5 cm の太陽電池を地球軌道上（地球の大気圏外）で太陽に正対して置き、両極を短絡したときに流れる電流量を見積もれ。

- (iv) よく晴れた日に (iii) の太陽電池を地表に置き太陽に正対させて測定したところ、(iii) で見積もった結果の約 65% しか電流が流れなかった。この食い違いの原因を説明せよ。

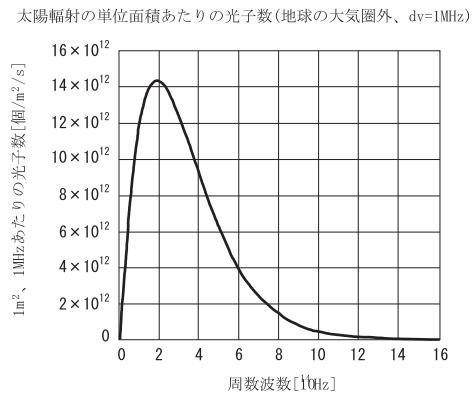


図 3

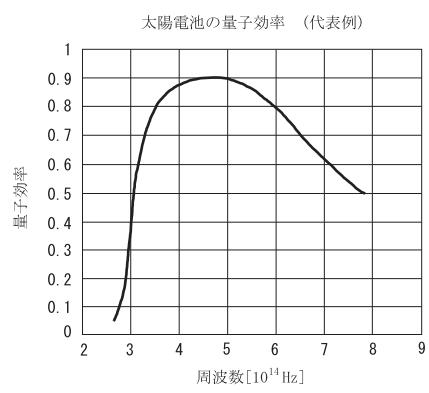
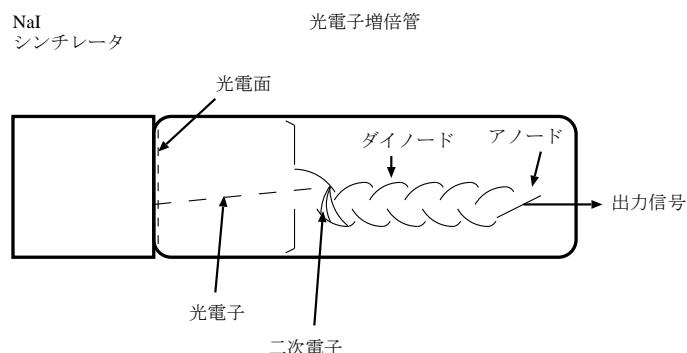


図 4

専攻 問題 5

高速の荷電粒子が物質中を通過すると、物質の電離や励起が起きる。ある種の物質は、荷電粒子通過で生じた励起状態が基底状態に戻るときに可視光領域で発光するので、それを利用して放射線検出に用いることが出来る。

代表的な物質として NaI 結晶シンチレーターがある (Na 及び I の質量数はそれぞれ 23 及び 127、原子番号はそれぞれ 11 及び 53、密度は、 3.7 g/cm^3 である)。NaI シンチレーターと光電子増倍管を組み合わせて放射線検出を行う装置を模式的に示した右図を参考にして、以下の問いに答えよ。



- 1kV の高電圧源が一台ある。これを用いて光電子増倍管を動作させるには、各電極(光電面、ダイノード、アノード)にどのように電圧を供給すればよいか、概略を示せ。また、アノードの出力を、放射線のエネルギーに比例した波高スペクトルとして記録するには、どのように信号処理をすればよいか、概略を示せ。
- NaI の前面から NaI の中心に向けてエネルギー 1MeV の単色電子線を入射し、波高スペクトルを記録したら、有限の巾を持ったピークが観測され、そのピーク巾(半値全巾)とピーク中心値の比率(分解能)は約 5% であった。分解能を決めている要因について論じよ。
- 今度は NaI の前面から NaI の中心に向けてエネルギー 1MeV の単色ガンマ線を入射し、波高スペクトルを記録した。NaI でガンマ線が測定できるのは何故か、簡潔に述べよ。また、どのような波高スペクトルが期待されるか、図で示し、説明を加えよ。
- NaI の前面に薄い鉛板を張り、板の厚さを変えながら、板を通過して NaI に入る放射線を測定した。線源の強さと測定時間は常に一定に保った。i) 1MeV の電子が入射するとき、ii) 1MeV のガンマ線入射するとき、の各々について、波高スペクトル(ピークの位置及び高さ等)が板の厚さとともにどう変化するか、概略を図示して説明せよ。
- ある線源からのガンマ線スペクトルを測定しようとしたが線源の強度が極めて弱く、宇宙線 μ 粒子がバックグラウンドとして問題となることがわかった。測定系にどのような対策を施せば、このバックグラウンドを取り除くことができるか具体的な方法を説明せよ。
- 太陽からは、毎秒 1cm^2 あたり 7×10^{10} 個のニュートリノが降り注いでいる。ニュートリノが NaI 結晶中の電子と相互作用をして、測定の邪魔になっていないか考えた。そのような相互作用は、1年間に何例ぐらい期待されるか計算式を示し、計算せよ。なお、NaI 結晶の大きさは $5\text{cm} \times 5\text{cm} \times 5\text{cm}$ の立方体とし、ニュートリノと電子との相互作用断面積は $1 \times 10^{-45}\text{cm}^2$ 、アボガドロ数は 6×10^{23} 、一年は約 3×10^7 秒とせよ。

専攻 問題 6

電子が 2 次元 (xy 面) 内のみを動くとした場合に、以下のような問題を考えてみよう。各問には解答に至る道筋を添えて答えよ。

1. 電子が面内では自由運動するとして Schrödinger 方程式を解き、波動関数 $\Psi(x, y)$ を求めよ。
以下では、電子の質量を m とし、電子のスピンや電子間の相互作用は無視せよ。
2. 一般に、状態密度 $D(E)$ という量を、エネルギーが E と $E + \delta E$ の間にある状態数が $D(E)\delta E$ となるような量として定義することができる。3 次元自由空間に対して、系の x, y, z 方向のサイズがそれぞれ L であり周期的境界条件をもつとして、 $D(E) \propto \sqrt{E}$ を示せ。
3. 2 次元運動の場合に、 x, y 方向のサイズがそれぞれ L であり周期的境界条件を持つとして、状態密度を求めよ。
4. x, y 面内にさらに、例えば

$$V(x, y) = V_0[\cos(2\pi x/a) + \cos(2\pi y/a)]$$

のような周期ポテンシャルが加わった場合を考えよう。一般に、このような周期ポテンシャルが加わった場合に、波動関数 Ψ はどのような形をとるか。

5. 上記ポテンシャルの場合のように Schrödinger 方程式が変数分離できる場合は、

$$V(x) = V_0 \cos(2\pi x/a)$$

というポテンシャル下での 1 次元 Schrödinger 方程式を解けばよい。このポテンシャルの振幅 V_0 が小さいとして摂動で扱い、この 1 次元問題に対してエネルギー・スペクトルがどのようになるか求めよ。

6. 2 次元での周期ポテンシャル問題に戻り、(i) エネルギー・スペクトルはどのような運動量又はそれに準ずるパラメータの関数として考えればよいのか、(ii) このとき、エネルギー・スペクトルは定性的にはどのような特徴をもつか、(iii) 絶対零度で電子を詰めた場合に、どのような場合に金属になり、どのような場合に絶縁体・半導体になるか、を答えよ。

専攻 問題 7

タンパク質の高次構造決定法として、(A) 電子顕微鏡法、(B) 円偏光二色性 (CD)、(C)X 線結晶回折、(D) 核磁気共鳴法 (NMR)、(E) 中性子散乱法などがある。

これらの方法のうちで、CD 法以外では、タンパク質を構成する各原子の座標を決定できる。

1. CD 法で決定できる高次構造は何か、また、それはタンパク質のどのような特徴を利用しているかを述べよ。また、この方法の長所は何か。
2. 電子顕微鏡では電子を 100kV 程度の電場で加速して用いる。
 - (i) この電子の波長 (λ) を非相対論的に求めよ (有効数字 1 術で良い)。但し、電子質量 ($m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg)、電子電荷 ($-e = -1.6 \times 10^{-19}$ C)、プランク定数 ($h = 6.6 \times 10^{-34}$ J·s) を用いよ。
 - (ii) 電子顕微鏡の分解能は 0.1nm 程度であり、上で求めた電子の波長と桁が違う。光学顕微鏡で得られる分解能は 200nm 程度であり、可視光の波長 (400 ~ 700nm) と同程度である。この理由を考察せよ。
3. X 線結晶解析ではタンパク質分子の単結晶を作製し、その回折強度を計測する。
 - (i) X 線回折強度がタンパク質分子の原子構造 (原子の種類及び配置) を反映するのはなぜか、簡潔に述べよ。
 - (ii) 回折強度の計測だけでは原子構造を解くことが出来ない場合が大半である。それは何故か。
 - (iii) どのような方法でこの困難を解決するか、概略を述べよ。
4. 核磁気共鳴法では重水中のタンパク質のスペクトルを観察し、タンパク質を構成する水素原子核のそれぞれを区別して同定・帰属付けを行う。
 - (i) 核磁気共鳴法は、一様磁場 \vec{B} 中に試料を置き、磁気能率が \vec{B} のまわりで歳差運動する周波数を、マイクロ波共鳴によって測定する手法である。 $B = 1\text{T}$ の磁場中での電子スピンの共鳴周波数が約 28GHz であることを既知として、同じ磁場中での水素原子核 (陽子) の共鳴周波数を概算せよ。なお、電子と陽子の g 因子は各々約 2 及び 5.6 である。
 - (ii) 重水を溶媒として用いるのは何故か。
 - (iii) タンパク質の異なる位置にある水素原子のスペクトルが異なるのは何故か。
 - (iv) この方法で決定できる分子量の上限 (約 20,000) を決定している要素は何かを考察せよ。
5. タンパク質と核酸の複合体を中性子線 (波長 0.1nm 程度) を用いて構造研究すると、X 線、電子線より有利な場合がある。どんな場合か、中性子の特徴と関連しつつ述べよ。

専攻 問題 8

1. 1,1,1-トリクロロエタン分子 ($\text{CH}_3\text{-CCl}_3$) の C-C 単結合の周りの内部回転を考える。 CCl_3 基の慣性モーメントは大きいので止まっていると仮定して、 CH_3 基の回転運動を取り扱う。

- (i) CH_3 基の C-C 軸周りの慣性モーメントを求めよ。ただし、C-H の核間距離を r 、C-H 結合と C-C 結合のなす角度を θ 、水素原子の質量を m とする。
- (ii) CH_3 基が C-C 軸周りに自由に回転しているとする。回転角を ϕ として、回転運動のハミルトニアンを導け。また、それをもとにシュレディンガー方程式を解いて、エネルギー準位を求めよ。ただし、 CH_3 基の C-C 軸周りの慣性モーメントは I としてよい。
- (iii) 実際は C-C 軸周りの回転は自由回転ではなく、水素と塩素との立体反発のために相互が接近する位置でのポテンシャルエネルギーは高くなり、遠ざかる位置でのポテンシャルエネルギーは低くなる。それを

$$V = \frac{V_3}{2}(1 - \cos 3\phi)$$

で表す。ここで、 ϕ はポテンシャルの一つの極小を 0 にとっており、 V_3 はポテンシャルの極大と極小の差を表すパラメーターである。もし、 V_3 が十分大きければ、 CH_3 基の C-C 軸周りの運動は、 $\phi = 0$ の近傍で調和振動子になることを示し、そのエネルギー準位を求めよ。

2. 次に、1,2-ジクロロエタン分子 ($\text{CH}_2\text{Cl}-\text{CH}_2\text{Cl}$) を考える。この分子の場合、C-C 結合周りの回転異性体として、トランス型とゴーシュ型が存在する。これらは室温で相互に移り変わることができるので単離精製はできない。従って、室温の気体、液体は異なる構造を持つ 2 種類の回転異性体の混合物として理解できる。

- (i) トランス型とゴーシュ型の立体構造を図示せよ。できれば、Newman 投影図を用いて表せ。
- (ii) 気体の 1,2-ジクロロエタンの赤外線吸収スペクトルを測定したところ、C-Cl 伸縮振動による吸収が、トランス型では 709 cm^{-1} の 1 本、ゴーシュ型では 675 cm^{-1} と 653 cm^{-1} の 2 本が測定された。なぜ、ゴーシュ型では C-Cl 伸縮による吸収が 2 本見えるのに、トランス型では C-Cl 伸縮による吸収が 1 本しか見えないのかを、トランス型、ゴーシュ型の分子構造及び赤外線吸収のメカニズムをもとに説明せよ。
- (iii) トランス型とゴーシュ型のエネルギー差 ΔE を求めたい。そのために様々な温度 T で赤外線吸収スペクトルを測定し、トランス型のバンドの強度 $I_t(T)$ とゴーシュ型のバンドの強度 $I_g(T)$ を求めた。このデータから ΔE を求める方法を説明せよ。
- (iv) 前問の実験の結果、気体状態ではトランス型が安定で、 $\Delta E/hc$ は 420 cm^{-1} であることがわかった。C-C 結合の回転角を ϕ として、内部回転のポテンシャルエネルギー曲線を ϕ の関数としてグラフに示せ。その際、ポテンシャルエネルギー曲線の極大値を決定する要因についても考慮せよ。また、トランス型、ゴーシュ型がどの ϕ に対応するかを書き入れよ。
- (v) 前問で示した ΔE の時、 290 K における気体状態でのトランス型、ゴーシュ型の存在比率を求めよ。ただし、光速 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ 、ボルツマン定数 $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ 、自然対数の底 $e = 2.7$ とする。

専攻 問題 1 解答

1. $\Psi_{\pm}(x) = \pm\Psi_{\pm}(-x)$ のような解がある。

(i) $0 \leq x \leq d$ のとき

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''_{1\pm}(x) + V_0\Psi_{1\pm}(x) &= E_{\pm}\Psi_{1\pm}(x) \\ \alpha_{\pm} &\equiv \frac{\sqrt{2m(V_0 - E_{\pm})}}{\hbar} \text{ として} \\ \Psi_{1\pm}(x) &= Ae^{\alpha_{\pm}x} + Be^{-\alpha_{\pm}x} \end{aligned}$$

• parity even のとき

$$\begin{aligned} \Psi_{1+}(x) &= \Psi_{1+}(-x) \text{ より } A = B \\ \therefore \Psi_{1+}(x) &= A_+ \cosh(\alpha_+ x) \end{aligned}$$

• parity odd のとき

$$\begin{aligned} \Psi_{1-}(x) &= -\Psi_{1-}(-x) \text{ より } A = -B \\ \therefore \Psi_{1-}(x) &= A_- \sinh(\alpha_- x) \end{aligned}$$

(ii) $d \leq x \leq d+a$ のとき

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''_{2\pm}(x) &= E_{\pm}\Psi_{2\pm}(x) \\ \beta_{\pm} &\equiv \frac{\sqrt{2mE_{\pm}}}{\hbar} \text{ として} \\ \Psi_{2\pm}(d+a) &= 0 \text{ の境界条件より} \\ \Psi_{2\pm}(x) &= B_{\pm} \sin(\beta_{\pm}(x - a - d)) \\ &\text{と書ける。} \end{aligned}$$

これらから E を求める。

• parity even のとき

$$\begin{cases} \Psi_{1+}(x) = A_+ \cosh \alpha_+ x \\ \Psi_{2+}(x) = B_+ \sin(\beta_+(x - a - d)) \end{cases}$$

境界条件より

$$\begin{cases} \Psi_{1+}(d) = \Psi_{2+}(d) \\ \Psi'_{1+}(d) = \Psi'_{2+}(d) \end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases} A_+ \cosh \alpha_+ d = -B_+ \sin \beta_+ a \\ A_+ \alpha_+ \sinh \alpha_+ d = B_+ \beta_+ \cos \beta_+ a \end{cases}$$

$$\therefore \alpha_+ \tanh \alpha_+ d = -\beta_+ \cot \beta_+ a$$

これにより E が求まる。

• parity odd のとき

$$\begin{cases} \Psi_{1-}(x) = A_- \sinh \alpha_- x \\ \Psi_{2-}(x) = B_- \sin(\beta_-(x - a - d)) \end{cases}$$

境界条件より

$$\begin{cases} \Psi_{1-}(d) = \Psi_{2-}(d) \\ \Psi'_{1-}(d) = \Psi'_{2-}(d) \end{cases}$$

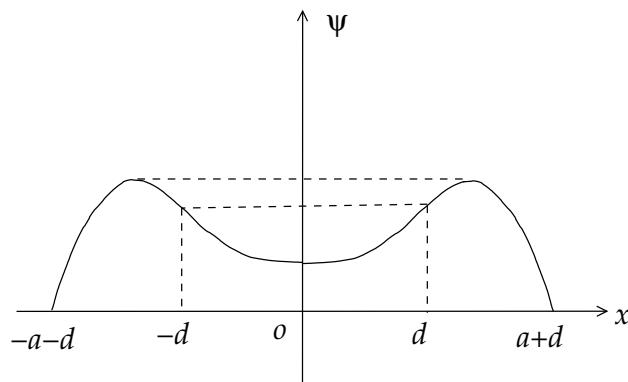
したがって

$$\begin{cases} A_- \sinh \alpha_- d = -B_- \sin \beta_- a \\ A_- \alpha_- \cosh \alpha_- d = B_- \beta_- \cos \beta_- a \end{cases}$$

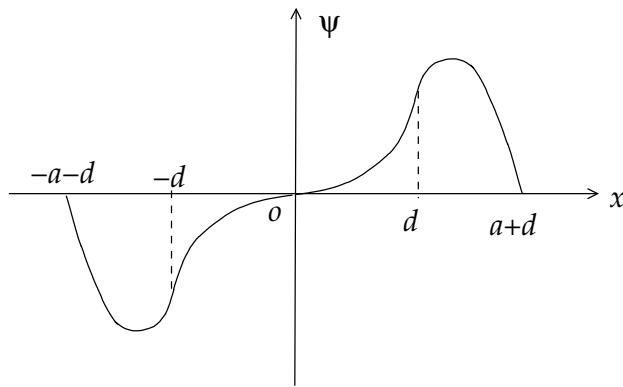
$$\therefore \frac{1}{\alpha_-} \tanh \alpha_- d = -\frac{1}{\beta_-} \tan \beta_- a$$

これにより E が求まる。

2. parity even のとき。



parity odd のとき。



3. $d \rightarrow \infty$ では

$$\tan \beta_\pm a = -\frac{\beta_\pm}{\alpha_\pm}$$

より、エネルギー準位は縮退していく

$$\overline{E}_0 = \overline{E}_1$$

エネルギーの値もこの式より求まる。

4.

$$\begin{aligned}\tanh \alpha x &= \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}} \\ &= \frac{1 - e^{-2\alpha x}}{1 + e^{-2\alpha x}}\end{aligned}$$

 x が十分大きいとすると

$$\begin{aligned}\tanh \alpha x &\sim (1 - e^{-2\alpha x})^2 \\ &\sim 1 - 2e^{-2\alpha x}\end{aligned}$$

したがって

$$\tan \beta_{\pm} a = -\frac{\beta_{\pm}}{\alpha_{\pm}} \mp 2 \frac{\beta_{\pm}}{\alpha_{\pm}} e^{-2\alpha_{\pm} d}$$

$$\begin{aligned}\alpha_0 &\equiv \frac{\sqrt{2m(V_0 - E_0)}}{\hbar}, \quad \beta_0 \equiv \frac{\sqrt{2mE_0}}{\hbar} \text{ とすると} \\ \beta_{\pm} a &= \pi - \frac{\beta_0}{\alpha_0} (1 \pm 2e^{-2\alpha_0 d})\end{aligned}$$

 β_+ は基底状態、 β_- は第一励起状態となるので

$$\Delta \equiv E_1 - E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} (\beta_-^2 - \beta_+^2) \cdots \propto e^{-2\alpha_0 d}$$

よって、 Δ は d に指数関数的に依存している。

5.

$$\begin{aligned}|\Psi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle) \\ |\Psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle - |L\rangle)\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}|R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi_0\rangle + |\Psi_1\rangle) \\ |L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi_0\rangle - |\Psi_1\rangle)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle R|H|R\rangle &= \frac{1}{2}(\langle\Psi_0| + \langle\Psi_1|)(E_0|\Psi_0\rangle + E_1|\Psi_1\rangle) = \frac{E_0 + E_1}{2} \\ \langle L|H|L\rangle &= \frac{1}{2}(\langle\Psi_0| - \langle\Psi_1|)(E_0|\Psi_0\rangle - E_1|\Psi_1\rangle) = \frac{E_0 + E_1}{2} \\ \langle R|H|L\rangle &= \frac{1}{2}(\langle\Psi_0| + \langle\Psi_1|)(E_0|\Psi_0\rangle - E_1|\Psi_1\rangle) = -\frac{E_1 - E_0}{2} = -\frac{\Delta}{2} \\ \langle L|H|R\rangle &= \frac{1}{2}(\langle\Psi_0| - \langle\Psi_1|)(E_0|\Psi_0\rangle + E_1|\Psi_1\rangle) = -\frac{E_1 - E_0}{2} = -\frac{\Delta}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore H \doteq \begin{pmatrix} \frac{E_0 + E_1}{2} & \frac{\Delta}{2} \\ \frac{\Delta}{2} & \frac{E_0 + E_1}{2} \end{pmatrix}$$

7. Schrödinger 表示で考える。

$$H|R(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |R(t)\rangle, |R(0)\rangle = |R\rangle$$

$$\therefore |R(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |R\rangle$$

$$e^{-iHt/\hbar} \doteq \sum_k \frac{(-it/\hbar)^k}{k!} \begin{pmatrix} \frac{E_0+E_1}{2} & -\frac{\Delta}{2} \\ -\frac{\Delta}{2} & \frac{E_0+E_1}{2} \end{pmatrix}^k$$

$$= \sum_k \frac{1}{k!} \frac{(-it/\hbar)^k}{2} \begin{pmatrix} E_0^k + E_1^k & E_0^k - E_1^k \\ E_0^k - E_1^k & E_0^k + E_1^k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-iE_0t/\hbar} + e^{-iE_1t/\hbar} & e^{-iE_0t/\hbar} - e^{-iE_1t/\hbar} \\ e^{-iE_0t/\hbar} - e^{-iE_1t/\hbar} & e^{-iE_0t/\hbar} + e^{-iE_1t/\hbar} \end{pmatrix}$$

$$\therefore |L|R(t)\rangle = \frac{1}{2} \langle L| \left\{ (e^{-iE_0t/\hbar} + e^{-iE_1t/\hbar}) |R\rangle + (e^{-iE_0t/\hbar} - e^{-iE_1t/\hbar}) |L\rangle \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (e^{-iE_0t/\hbar} - e^{-iE_1t/\hbar})$$

$$|\langle L|R(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4} (e^{-iE_0t/\hbar} - e^{-iE_1t/\hbar})(e^{iE_0t/\hbar} - e^{iE_1t/\hbar})$$

$$= \frac{1}{4} (2 - e^{-i\Delta t/\hbar} - e^{i\Delta t/\hbar})$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\Delta}{\hbar} t \right)$$

$$= \sin^2 \frac{\Delta}{2\hbar} t$$

これより、 Δ が大きい、つまり V_0 や d が小さい時ほど速く $|R\rangle \leftrightarrow |L\rangle$ の周期的遷移をすることがわかる。

専攻 問題 2 解答

以下、M.K.S. 系を利用する。

1. 電流は $j = -en\dot{x}$ であり、電場は一般に $E = E_0 e^{i(k \cdot x - \omega t)}$ と書ける。さて、

$$\frac{\partial j}{\partial t} = -en\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = -eE$$

より、

$$\sigma \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} E \quad \cdots (1)$$

となる。この式の左辺に、 $j = \sigma E$ の関係を代入して、

$$\sigma \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} E$$

となる。最後にこの式に E の具体形を代入して、

$$\sigma = i \frac{ne^2}{m\omega}$$

を得る。

2. Maxwell 方程式の式の両辺を t で微分すると、

$$\nabla \times \frac{\partial B}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial j}{\partial t}$$

となる。この式の左辺に Maxwell 方程式のと、問 1 で得た (1) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \nabla^2 E &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial j}{\partial t} \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{ne^2}{m} E \end{aligned} \quad \cdots (2)$$

を得る。この式に E の具体形を代入すると、

$$\begin{aligned} -k^2 &= -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 + \mu_0 \frac{ne^2}{m} \\ &= -\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right) \quad (\omega_p \text{ はプラズマ周波数}) \end{aligned}$$

となり、従って、

$$n \equiv \frac{ck}{\omega} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

を得る。

さて、 $\omega < \omega_p$ の時は屈折率は虚数となるため、電場が電離層に入射しても、電場は指数関数的に減少する。よって、電場は電離層を伝搬できずに、全反射される。

3. 電子の運動方程式は、

$$m\dot{v} = -eE - ev \times B_0$$

である。さて、

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\hat{x} \pm i\hat{y}) e^{i(kz - \omega t)} \quad \cdots (3)$$

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{2}} (\hat{x} \pm i\hat{y}) e^{i(kz - \omega t)} \quad \cdots (4)$$

$$B_0 = B_0 \hat{z} \quad \cdots (5)$$

と置くと、

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 &= \frac{v_0 B_0}{\sqrt{2}} (\hat{x} \pm i \hat{y}) \times \hat{z} e^{i(kz - \omega t)} \\ &= \pm i \frac{v_0 B_0}{\sqrt{2}} (\hat{x} \pm i \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned} \quad \cdots (6)$$

となる。よって、電子の運動方程式に(3),(3)式を代入して、

$$v_0(-im\omega \pm ieB_0) = -eE_0$$

より、

$$v_0 = \frac{-ieE_0}{m(\omega \mp \omega_c)} \quad (\omega_c \text{はサイクロトロン周波数}) \quad \cdots (7)$$

を得る。電流密度の大きさは、 $j_0 = -env_0$ と書けるので、

$$j_0 = -env_0 = \frac{ine^2}{m(\omega \mp \omega_c)} E_0$$

より、電気伝導度は、

$$\sigma = \frac{ine^2}{m(\omega \mp \omega_c)} \quad \cdots (8)$$

となる。

4. 問 2 で得た(2)式を利用して、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \\ \iff k^2 \mathbf{E} &= \mu_0 (\epsilon_0 \omega^2 + i\omega \sigma) \mathbf{E} \end{aligned}$$

となる。この式を屈折率の定義の形に変形すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 &= 1 + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \sigma \quad (\leftarrow (8) \text{式を代入}) \\ \iff n_{\pm}^2 &= 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m \omega (\omega \mp \omega_c)} \\ \iff n_{\pm}^2 &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega (\omega \mp \omega_c)} \end{aligned}$$

となるので、屈折率は、

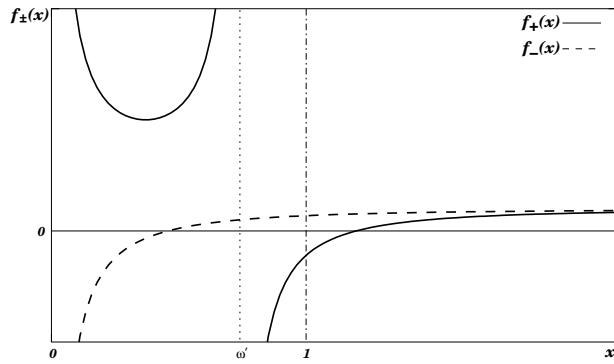
$$n_{\pm} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega (\omega \mp \omega_c)}}$$

となる。

さて、 $x \equiv \omega/\omega_p$, $\omega' \equiv \omega_c/\omega_p$ とおくと、

$$n_{\pm}(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{x(x \mp \omega')}} \quad \cdots (9)$$

となる。また、 $f_{\pm}(x) \equiv n_{\pm}^2(x)$ とすると、 $f_{\pm}(x) \geq 0$ となる周波数領域では電磁波が伝搬できることになる。次に $f_{\pm}(x)$ のグラフを示す。(ただし、 $\omega' < 1$ の場合)



このグラフから分かるように、 $x < 1$ つまり $\omega < \omega_p$ の領域でも $f_+(x) > 0$ となる領域があるため、この時 $n_+(x)$ は実数となる。従って、右回りの電磁波は $\omega < \omega_p$ でも伝搬できる。

専攻 問題 3 解答

1.

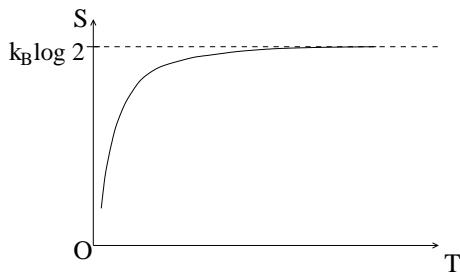
$$\begin{aligned} Z &= e^{\mu H/kT} + e^{-\mu H/kT} = 2 \cosh\left(\frac{\mu H}{kT}\right) \\ F &= -kT \log Z \\ &= -kT \log\left(2 \cosh\left(\frac{\mu H}{kT}\right)\right) \\ S &= -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_H \\ &= k \left[\log\left(2 \cosh\frac{\mu H}{kT}\right) - \frac{\mu H}{kT} \tanh\left(\frac{\mu H}{kT}\right) \right] \end{aligned}$$

2. (i) $H = 0$ のとき

$$S = k \log 2$$

(ii) H が有限で小さいとき

$$\begin{aligned} S &\simeq k \left[\log 2 + \log\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) - x^2 \left(1 - \frac{1}{3}x^2\right) \right] \quad (x = \mu H/kT) \\ &\simeq k \left[\log 2 + \frac{x^2}{2} - x^2 \right] \\ &= k \left[\log 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu H}{kT}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

(iii) H が大きいとき

$$F \simeq -\mu H \text{ より}$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_H = 0$$

3. エントロピー S が H/T の関数であることから、 $H_i \rightarrow H_f$ の変化（断熱的）でエントロピーの変化は 0 なので H/T の値も変化せず、

$$\frac{H_i}{T_i} = \frac{H_f}{T_f}$$

$$T_f = T_i \frac{H_f}{H_i}$$

となる。

4. エントロピー有限のまま $T \rightarrow 0$ となるので「 $T = 0$ のとき $S = 0$ である」という熱力学第 3 法則に反する。

5. スピン間に働く相互作用が磁場のような働きをするため外部磁場を 0 にしても、個々の格子点は磁場を感じ、温度は有限値を保つ。

6.

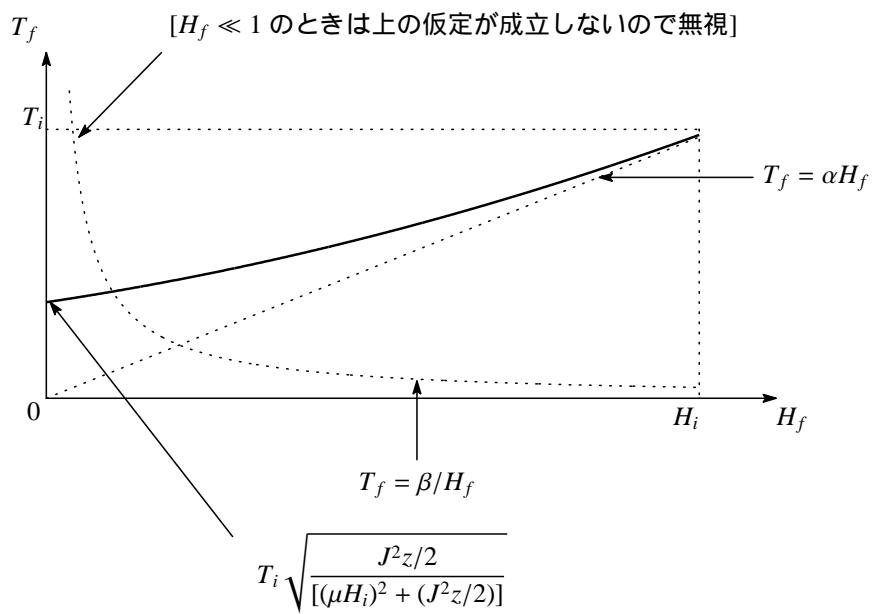
$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_H = -k \log 2 + \frac{1}{2kT^2} ((\mu H)^2 + J^2 z/2)$$

S が断熱消磁の仮定で一定とすると、

$$S(H_i, T_i) = S(H_f, T_f)$$

$$\frac{1}{kT_i^2} ((\mu H_i)^2 + J^2 z/2) = \frac{1}{kT_f^2} ((\mu H_f)^2 + J^2 z/2)$$

$$\begin{aligned} \therefore T_f &= T_i \sqrt{\frac{(\mu H_f)^2 + J^2 z/2}{(\mu H_i)^2 + J^2 z/2}} \\ &\simeq T_i \frac{H_f}{H_i} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{J^2 z}{2(\mu H_f)^2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{J^2 z}{2(\mu H_i)^2} \right) \quad [1 \gg J^2 z/(2(\mu H_i)^2), J^2 z/(2(\mu H_f)^2) \text{ と仮定}] \\ &\simeq T_i \frac{H_f}{H_i} \left(1 + \frac{J^2 z}{4\mu^2} \left(\frac{1}{H_f^2} - \frac{1}{H_i^2} \right) \right) \\ &= \alpha H_f + \frac{\beta}{H_f} \quad (\alpha, \beta \text{ は定数}) \end{aligned}$$



専攻 問題 4 解答

1. (i) まず A を接地し、その時点での AB 間の距離が d であることを確かめる。次に B を A に接触しないように支えておきながら極板 A に電圧 V を加える。B は A に引っ張られるので、おもり M を加減して AB 間の距離が d になるように調節する。

電極 B の電荷を Q_B 、電極 G の電荷を Q_G 、面積を S_G 、A,B の極板間隔を x とすると

$$\frac{Q_B}{S} = \frac{\epsilon_0 V}{x} \quad \dots (1)$$

$$\frac{Q_G}{S_G} = \frac{\epsilon_0 V}{d} \quad \dots (2)$$

である。 $x = d$ であるから電極 B にかかるクーロン力は

$$\frac{1}{2} Q_B E_{AB} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S}{d} V \frac{V}{d} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S V^2}{d^2}$$

これと Mg が等しくなるように M を選べばよくて、

$$\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S V^2}{d^2} = Mg$$

$$\therefore V = \sqrt{\frac{2Mg}{\epsilon_0 S}} d$$

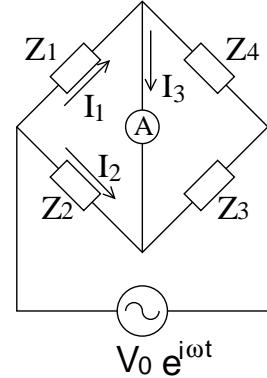
(ii) B の周辺において生じる静電界の不均一をなくす。また、AB 間の距離を d にする目安になる。

2. (i) 通常のブリッジ法は検流計に電流が流れなくなる様に可変抵抗でバランスを取るのであるが、ここではコイル 1 つ抵抗 3 つを使うという設定と思われる。これらの素子をブリッジ法の各辺に配置しても平衡は成り立たない。そこで検流計に流れる電流を信号源の周波数を変えて測定する事により、インダクタンスを測定する(図 5)。

$$Z_1 I_1 = Z_2 I_2 \quad \dots (3)$$

$$Z_4(I_1 - I_3) = Z_3(I_2 + I_3) \quad \dots (4)$$

$$Z_2 I_2 + Z_3(I_2 + I_3) = V_0 e^{i\omega t} \quad \dots (5)$$



Z_4 にはコイルを配置する。すなわち、

$$Z_1 = R_1 \quad Z_2 = R_2$$

$$Z_3 = R_3 \quad Z_4 = i\omega L_x$$

(1),(6) より

$$I_2 = \frac{Z_1(Z_3 + Z_4)}{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3} I_3 \quad \dots (6)$$

(1),(6) より

$$I_3 = \frac{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_2 Z_3 Z_4 + Z_3 Z_4 Z_1 + Z_4 Z_1 Z_2} V_0 e^{i\omega t}$$

$$\equiv \frac{i\omega L_x R_2 - R_1 R_3}{R + i\omega L_x r} V_0 e^{i\omega t}$$

(但し、 $R \equiv R_1 R_2 R_3$, $r \equiv R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$)

$$\therefore |I_3|^2 = \frac{R_1^2 R_3^2 + R_2^2 \omega^2 L_x^2}{R^2 + \omega^2 L_x^2 r^2} V_0^2$$

$$= \frac{R_2^2 + \frac{R_1^2 R_3^2}{\omega^2 L_x^2}}{r^2 + \frac{R^2}{\omega^2 L_x^2}} V_0^2 \quad \rightarrow \quad \frac{R_2^2}{r^2} V_0^2 \quad (\omega \rightarrow \infty)$$

I_3 を、周波数 ω を変えながら測定しプロットする。その形を理論値と比較してフィッティングを行えば L_x を求めることができる (V_0 の値は $\omega \rightarrow \infty$ とすれば求めることができる)。

(ii) まず、巻線抵抗 R_i を求める。

図 5において直流電源をつなげば、検流計に電流が流れなくなった時、ブリッジ法の平衡の式より $R_i = \frac{R_1 R_3}{R_2}$ となる。

次に図 6 のようにコイルと交流電源をつなぐ。現実のコイルのインピーダンスは

$$\begin{aligned} Z &= R_i + \frac{1}{\frac{1}{i\omega L_i} + i\omega C_i} \\ &= R_i + i \frac{\omega L_i}{1 - \omega^2 L_i C_i} \end{aligned}$$

$\omega^2 = \frac{1}{L_i C_i}$ で電流が最小になる。これによって $L_i C_i$ の値がわかる。また、

$$|Z| = \sqrt{R_i^2 + \left(\frac{\omega L_i}{1 - \omega^2 L_i C_i} \right)^2}$$

だから、適当な ω でインピーダンスを求めれば R_i , $L_i C_i$ は分かっているので L_i が求まる。すると C_i もわかる。

3. (i) 答え：p型

理由：接合部付近は正孔と電子が吸収しあって、キャリアが存在しない層（空乏層：depletion layer）ができる（図 7）。空乏層の p 型部分ではアクセプタの電荷、つまり負電荷があらわれる。n 型部分ではドナーの電荷、正電荷があらわれる。電荷分布は図 8 のようになるから、接合部付近では n 型 \rightarrow p 型の向きに電場が生じる。このため、光子が当たった時に生じる電子は n 型方向に、正孔は p 型方向に加速される。したがって p 型がプラス極になる。

(ii) 図 9 のような設定であるので

$$\begin{cases} P_0 = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2 \\ I_0 = \frac{P_0}{4\pi L^2} = \sigma T^4 \cdot \frac{R^2}{L^2} \end{cases}$$

に数値を代入して

$$\begin{cases} P_0 = 4.0 \times 10^{26} [\text{W}] \\ I_0 = 1.4 \times 10^3 [\text{W/m}^2] \end{cases}$$

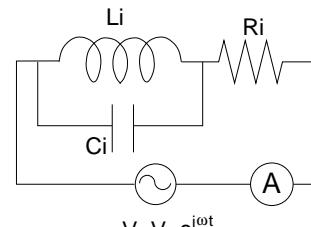


図 6

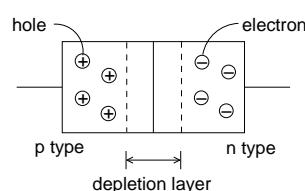


図 7

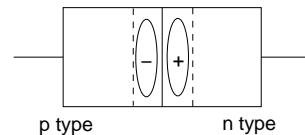


図 8

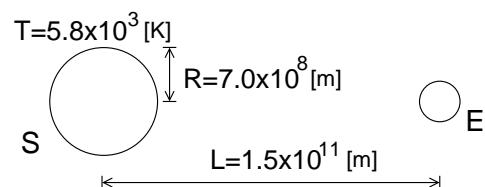


図 9

(iii) 図 10 のように 5 つにブロック分けをすると

$$\begin{aligned}
 (\text{太陽電池の出力電流}) &= \int d\nu (\text{光子数}) \times (\text{量子効率}) \times (\text{素電荷}) \\
 &= (\text{面積}) \times 10^8 \times \left(\sum_{\text{ブロック}} (\text{単位面積の光子数}) \times (\text{量子効率}) \right) \\
 &= (0.05)^2 \times 10^8 \times 1.6 \times 10^{-19} \{ (12 \times 10^{12}) \times 0.4 \\
 &\quad + (9 \times 10^{12}) \times 0.9 + (6 \times 10^{12}) \times 0.9 \\
 &\quad + (4 \times 10^{12}) \times 0.8 + (2 \times 10^{12}) \times 0.6 \} \\
 &= 0.908 \approx 0.9 [\text{A}]
 \end{aligned}$$

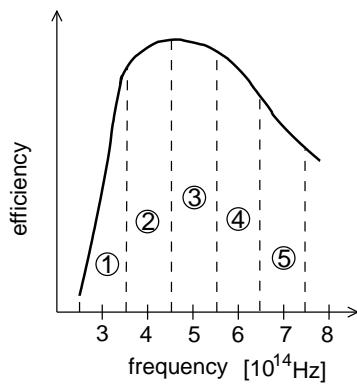
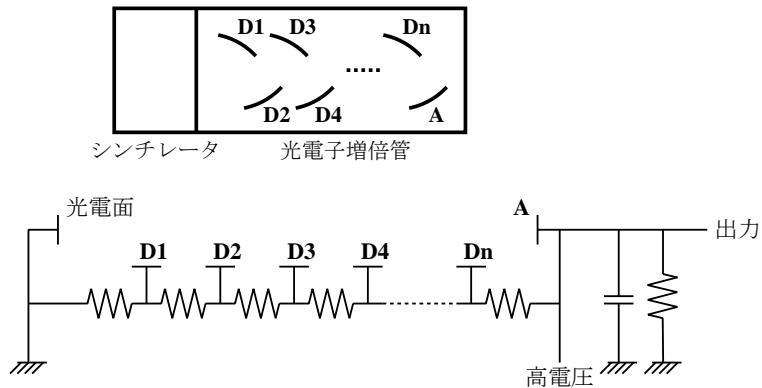


図 10

(iv) 太陽光の一部が大気に吸収、反射されたため。

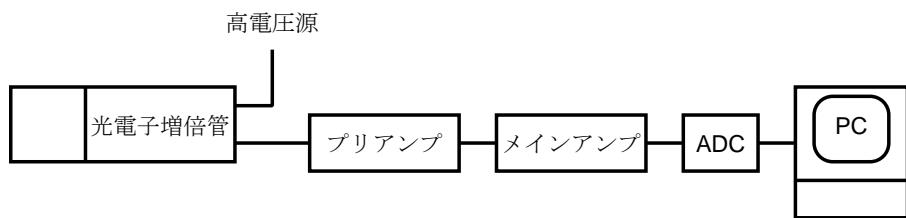
専攻 問題 5 解答

1. (電圧供給)



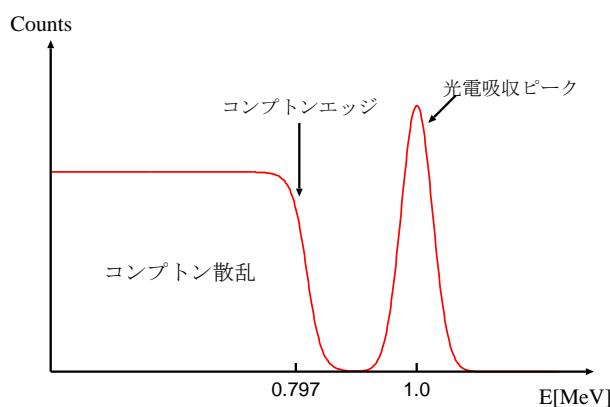
上図の様に電位が徐々に上がっていくように回路を作ればよい。

(アノード出力の信号処理)



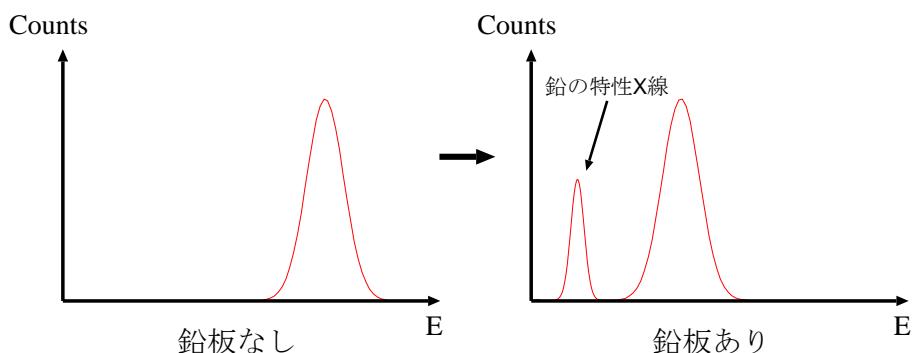
アノードの出力のパルスをアンプで整形したのち、ADC(Analog to Digital Converter)でデジタル信号に変換しコンピュータに取り込む。

2. 分解能を決めている要因としては、初期の発光現象における発光光子数の統計的変動と、光電面から放出される有効光電子数の統計的変動が考えられるが、NaI 結晶シンチレータは発光量が非常に多いため、発光光子数の統計的変動は小さい。また、アンプなどの周辺機器からの電気的雑音も分解能を悪くする。
3. γ 線は、物質との三種類の電磁相互作用 (光電効果、コンプトン散乱、電子対生成) により、電子を放出させる。その電子がシンチレータを励起することにより、 γ 線を測定することができる。



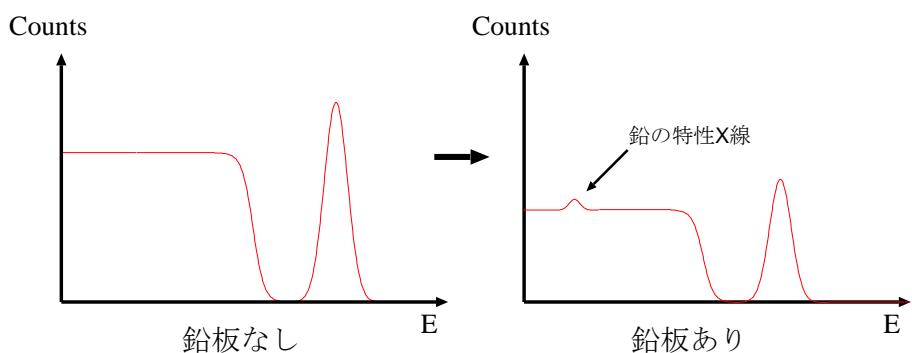
上図の様な光電吸收ピークと、コンプトン散乱のスペクトルが得られる。コンプトン散乱によるスペクトルは、散乱角 θ に依存するため、連続スペクトルとなり、 $\theta = 180^\circ$ の時、最大となる。これがコンプトンエッジである。電子対生成は、 $E_\gamma > 2m_e c^2$ (1.02 MeV) の場合にのみ起こるため、この場合は、電子対生成は起こらない。

4. (i) 1 MeV の電子が入射するとき、



電子は鉛板中の電子を散乱し、エネルギーを失うが、電子数は変化しない。従って、鉛板が厚くなるにつれて、ピークの位置が低エネルギー側へ移動するが、ピークの高さは変わらない。

(ii) 1 MeV の γ 線が入射するとき、



鉛板が γ 線を吸収するため、photon 数が減少する。従って、ピークの位置は変化しないが、ピークの高さが低くなる。

5. μ 粒子は物質との相互作用が弱いため、遮へいの効果は低い。従って、プラスチックシンチレータ等で主検出器全体を囲み、外部より入射してくる μ 粒子を検知して、主検出器の計数を除くという反同時計数を行なえばよい。

6. NaI 結晶中の電子の総数は、

$$(密度) \times (\text{体積}) \times (1/\text{分子量}) \times (N_A) \times (\text{NaI 一個当たりの電子数})$$

$$3.7 \times 5^3 \times \frac{1}{150} \times (6 \times 10^{23}) \times (53 + 11) = 1.2 \times 10^{26} \text{ 個}$$

従って、ニュートリノが NaI 結晶中の電子と相互作用する数は、一年間で、

$$(1.2 \times 10^{26}) \times (1 \times 10^{-45}) \times (7 \times 10^{10}) \times (3 \times 10^7) = 2.5 \times 10^{-1} \text{ 個}$$

従って、一年間で、約 2.5×10^{-1} 個検出される。

専攻 問題 6 解答

1. Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x, y) = E \Psi(x, y)$$

波数ベクトル k を $|k| \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ とすると、

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi = 0$$

とかける。解は平面波の和で

$$\Psi(x, y) = \sum_{\mathbf{k}} C(\mathbf{k}) e^{i(k_x x + k_y y)}$$

2. 状態密度とは、Fermion を絶対零度にして「詰めて」ゆく時、エネルギー E ではどのくらいの個数が詰まっているかを表したものである。この時運動量表示により Fermi 球で考えるのが一番簡単だろう。Schrödinger 方程式の解

$$\Psi_{\mathbf{k}}(x) = (const) \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

を周期的境界条件

$$\Psi_{\mathbf{k}}(x, y, z) = \Psi_{\mathbf{k}}(x + L, y, z) \quad (y, z \text{ についても同様})$$

に代入すると波数について

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, k_z = \frac{2\pi n_z}{L}$$

を得る。(但し、 $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

エネルギーは、

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} |\mathbf{k}|^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

とかける。電子をエネルギーの低い順に詰めてゆく時、エネルギー E 以下の電子の数 $N(E)$ は、

$$E \geq \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

という球内の格子点 (n_x, n_y, n_z) の数である。これは球の体積に等しいから

$$N(E) = \frac{4\pi}{3} (2mE)^{3/2} \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3$$

$E \sim E + \delta E$ にある状態数は、これを微分すればよくて、

$$D(E)\delta E = 2\pi(2m)^{3/2} \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 \sqrt{E} \delta E$$

よって、 $D(E) \propto \sqrt{E}$

3. 3 次元の場合同様にして

$$E \geq \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2)$$

という円内の格子点 (n_x, n_y) の数を数えると

$$N(E) = \pi 2mE \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right)^2$$

よって、

$$D(E)\delta E = \frac{mL^2}{2\pi\hbar^2} \delta E$$

4. Bloch の定理：周期的ポテンシャルに対する Schrödinger 方程式の解は $\Psi_k(r) = u_k(r) \exp(ik \cdot r)$ という形を持つ。但し $u_k(r)$ はポテンシャルと同じ周期性を持つ。
5. 格子定数 a 、周期境界条件より結晶の長さ $L = Na(N \in \mathbb{N})$ 。摂動を受ける前、自由電子に対する Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x) = E\phi(x)$$

$k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ とすると周期境界条件から

$$k = \frac{2\pi}{L} n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

となって波動関数は、

$$\phi(x) = \sum_k C_k \phi_k(x)$$

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}$$

と書ける。また、ポテンシャルについて

$$\begin{aligned} V_{kl} &\equiv \int_0^L \phi_k^* V(x) \phi_l dx \\ &= \int_0^L \frac{V_0}{L} \cos \frac{2\pi}{a} x e^{-i(k-l)x} dx \\ &= \begin{cases} \frac{V_0}{2} & |k-l| = 2\pi/a \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases} \end{aligned}$$

エネルギー摂動 1 次は

$$E_k^{(1)} = V_{kk} = 0$$

となり、2 次の摂動は

$$\begin{aligned} E_k^{(2)} &= \sum_l \frac{|V_{kl}|^2}{E_k^{(0)} - E_l^{(0)}} = \sum_{g=\pm 2\pi/a} \frac{(V_0/2)^2}{\frac{\hbar^2}{2m}(k^2 - (k+g)^2)} \\ &= \frac{mV_0^2}{2\hbar^2} \sum_g \frac{1}{-2kg - g^2} = \frac{mV_0^2}{2\hbar^2} \frac{2}{2\pi} \left(\frac{1}{2k - 2\pi/a} - \frac{1}{2k + 2\pi/a} \right) \\ &= \frac{mV_0^2}{4\hbar^2(k^2 - (\pi/a)^2)} \end{aligned}$$

よってエネルギーは

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{mV_0^2}{4\hbar^2(k^2 - (\pi/a)^2)}$$

となる。ただし、これは $k = \pm\pi/a$ のとき発散してしまう。波動関数は摂動 1 次まで考えて

$$\Psi_k = \phi_k + \sum_{g=\pm 2\pi/a} \frac{mV_0}{\hbar^2(k^2 - (k+g)^2)} \phi_{kg}$$

となるから、 $k = \pm\pi/a$ 付近では波動関数は ϕ_k と ϕ_{k+g} で表されることが予想できるので ($g = \mp 2\pi/a$)

$$\Psi_k = C_k \phi_k + C_{k+g} \phi_{k+g}$$

とおき、Schrödinger 方程式に代入する。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_k + V\Psi_k = \varepsilon_k \Psi_k$$

この式に左から ϕ_k^* をかけて積分すると、

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \varepsilon_k \right) C_k + \frac{V_0}{2} C_{k+g} = 0$$

左から ϕ_{k+g}^* をかけて積分すると、

$$\left(\frac{\hbar^2 (k+g)^2}{2m} - \varepsilon_k \right) C_{k+g} + \frac{V_0}{2} C_k = 0$$

この 2 式を連立して、 C_k, C_{k+g} が 0 でない解を持つには

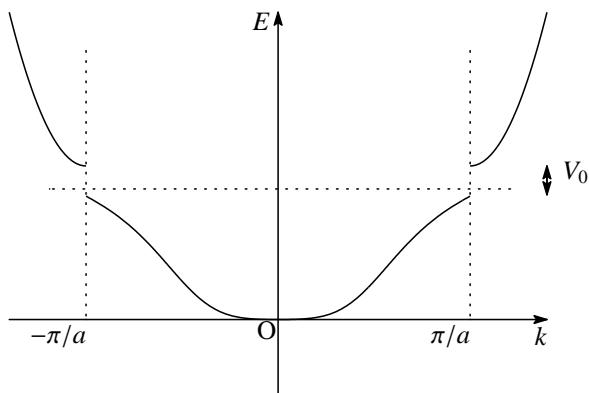
$$\begin{vmatrix} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \varepsilon_k & \frac{V_0}{2} \\ \frac{V_0}{2} & \frac{\hbar^2 (k+g)^2}{2m} - \varepsilon_k \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^2 - \left[\frac{\hbar^2}{2m} (k^2 + (k+g)^2) \right] \varepsilon_k + \frac{\hbar^4}{4m^2} k^2 (k+g)^2 - \frac{V_0^2}{4} &= 0 \\ \therefore \varepsilon_k = \frac{1}{2} \left[\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + \frac{\hbar^2}{2m} (k+g)^2 \pm \sqrt{\left[\frac{\hbar^2}{2m} (k^2 - (k+g)^2) \right]^2 + V_0^2} \right] \end{aligned}$$

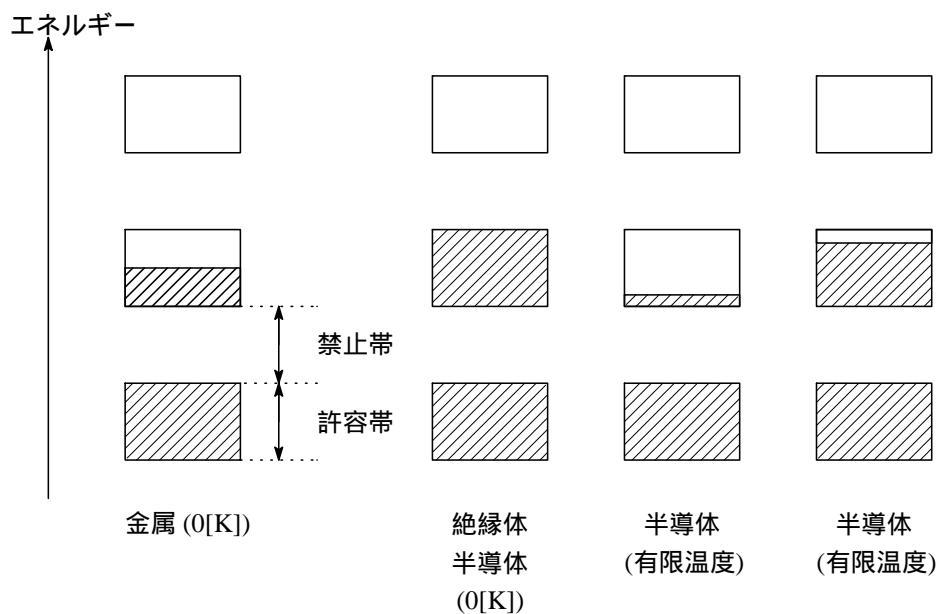
$k = \pi/a, g = -2\pi/a$ では、

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \pm \frac{V_0}{2}$$

V_0 のエネルギーギャップを生じる。



6. (i) エネルギースペクトルの基本的な形は周期境界条件によって量子化された波数ベクトル (\approx 運動量) の関数である。
- (ii) ポテンシャルエネルギーの振幅がエネルギーに比べ十分小さいときは電子は自由電子の様に振舞い、エネルギースペクトルは波数ベクトルの 2 次関数(連続スペクトル)である。ポテンシャルの影響が大きくなるとブリルアン・ゾーンの境界でエネルギーギャップが生じ、帯状のエネルギースペクトルとなる。ポテンシャルがエネルギーに比べ十分大きいと、電子は調和振動を行い、スペクトルは離散的になる。
- (iii) 0[K]において価電子がいくつかのバンドを完全に満たし、他のバンドを空にしていると絶縁体又は半導体。部分的に満たされているバンドがあると金属となる。半導体は有限温度で電子が伝導バンドへ励起される。



専攻 問題 7 解答

1. CD 法で決定できる高次構造は 2 次構造、特に α ヘリックスである。これは左及び右円偏光が光学活性な分子では異なる相互作用をするという性質による。CD 法の利点は他の方法に比べて容易に α ヘリックスの含有量を見積もることができるということである。また、低濃度のタンパク質溶液で測定可能であり、測定時間も短くてすみ容易に実験できることなども挙げられる。
2. (i) 電子線のエネルギーと運動量には

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eV$$

$$m_e v = \frac{h}{\lambda}$$

という関係があり、これより、波長 λ を求めると

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}} = 3.86 \cdots \times 10^{-12} [\text{m}]$$

となり、電子の波長は 4[pm] 程となる。

- (ii) 光学顕微鏡では凹凸レンズの組み合わせで色収差、球面収差を除くことができる。よって開口数で決まる回折収差のみが問題となるので波長と同程度の分解能が得られる。電子顕微鏡では、電磁レンズとして凸レンズしか作れないために色収差、球面収差を除くことができない。それゆえ、球面収差を適当な範囲内におさめるために開口数を小さくする必要があり、解像度が回折収差で制限されてしまうからである。また、入射粒子と原子との散乱の多くがエネルギーのやりとりがある非弾性散乱であること、電子と物質との相互作用から化学反応を起こし、ラジカルを形成してしまうために照射する電子数が限られてしまい雑音が多くなることなども挙げられる。
3. (i) X 線は、殻外電子と相互作用を起こし散乱するため、得られた回折像はタンパク質原子の電子密度を変換したものになっているために原子構造を反映している。

- (ii) 位相問題があるためである。反射 \vec{h} の回折強度 $I(\vec{h})$ と結晶構造因子 $F(\vec{h})$ との間には

$$I(\vec{h}) = |F(\vec{h})|^2$$

の関係がある。一方、結晶中の電子密度は

$$\rho(\vec{r}) = \sum \frac{1}{V} \sum_{\vec{h}} F(\vec{h}) \exp(-2\pi i \vec{h} \cdot \vec{r})$$

で表される。一般に構造因子 $F(\vec{h})$ は複素量であるが、回折強度からわかるのはその振幅で、結晶の電子状態を知るには位相を決める必要がある。

- (iii) 多重同型置換法または、多波長異常散乱法を用いればよい。

多重同型置換法とはもとの結晶とは別に重原子を付加した重原子同型置換体を複数個つくり、生じる強度変化から位相を決定する方法である。

多波長異常散乱法とは、分子内に X 線の波長に依存して原子散乱因子が変化する原子を含むときに行われ、波長を変えたときの強度変化から位相を決定する方法である。

4. (i) 共鳴周波数 ω_0 と因子 g との関係は

$$\omega_0 = gH$$

であるから、陽子の共鳴周波数 ω_{0p} は、電子の共鳴周波数を ω_{0e} とすると

$$\omega_{0p} = \omega_{0e} \frac{g_p}{g_e} \approx 78 [\text{GHz}]$$

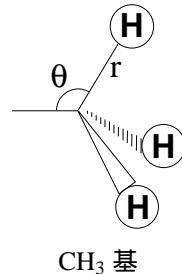
となり、約 78[GHz] 程である。 $(g_p, g_e$ はそれぞれ陽子、電子の因子)

- (ii) 水分子中の水素原子 H の核スピンが、核磁気共鳴に用いられる電磁波に応答してしまうため。
- (iii) プロトンがおかれた周囲の環境により、環電流効果などの影響で高磁場側にスペクトルがシフトする化学シフトが起こることや近傍プロトンの影響による spin-spin 相互作用で spin-spin 分裂をおこすことによりスペクトルが変化する。
- (iv) 分子量が多くなるとスペクトル量も多くなり、さらに、鈍いピークの存在によりスペクトルが隠れてしまいスペクトルが分離できなくなってしまうことによる。
5. 中性子線は、X 線のように殻外電子と相互作用するのではなく、原子核と強く相互作用するために水素分子がはっきり見え、かつ窒素分子を炭素・酸素分子と区別できる。タンパク質・核酸複合体は水分子を介して結合をつくっていることが多く、水分子がよく見える中性子線には利点がある。また、吸収断面積が小さいために物質透過力も強く、試料損傷が少ないこと、散乱が非弾性散乱であるためにエネルギー変化から散乱体の動力学的性質を知ることができるなどの利点もある。

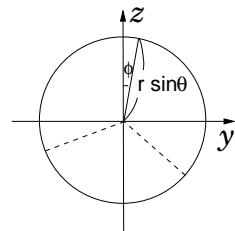
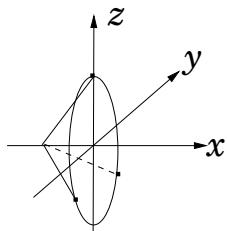
専攻 問題 8 解答

1. (i) 右の図より

$$\begin{aligned} I &= 3 \times m \times (r \sin \theta)^2 \\ &= 3mr^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$



(ii) CH_3 基において座標を以下のように定める。



この系の古典的なラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2$$

である。また、

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I \dot{\phi}$$

となる。これを用いると、古典的なハミルトニアンは、

$$H = p_\phi \dot{\phi} - L = \frac{1}{2I} p_\phi^2$$

となる。従って、 p_ϕ を演算子で置き換えて、量子論的なハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \frac{1}{2I} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

となる。

これをもとにシュレディンガー方程式をたてると

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2 \Psi(\phi)}{\partial \phi^2} = E \Psi(\phi)$$

この一般解は

$$\Psi(\phi) = A \sin k\phi + B \cos k\phi$$

但し、 $k^2 = \frac{2IE}{\hbar^2}$ である。

また、周期境界条件として $\Psi(\phi) = \Psi(\phi + 2\pi/3)$ が成り立たなくてはならないから

$$\frac{2}{3}\pi k = 2n\pi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

より

$$k = 3n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる。従って

$$E = \frac{9n^2\hbar^2}{2I} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

である。

(iii) V_3 が十分大きいとき、 ϕ は十分小さくなる。このとき $\cos \phi$ をテイラー展開して、整理すると

$$\begin{aligned} V &= \frac{V_3}{2}(1 - \cos 3\phi) \\ &= \frac{V_3}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{9}{2}\phi^2 + \frac{27}{8}\phi^4 - \dots \right) \right) \\ &\approx \frac{9}{4}V_3\phi^2 \end{aligned}$$

ここで $\frac{9}{2}V_3 = k'$ とおいてみれば $V = \frac{1}{2}k'\phi^2$ となり、 V_3 が十分大きいとき、 CH_3 基の C-C 軸周りの運動は調和振動子になることがはっきりする。

ポテンシャルエネルギーが、 $\frac{1}{2}kx^2$ の形で与えられている調和振動子のエネルギー E_n は以下の式で与えられることが知られている。

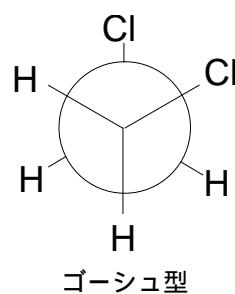
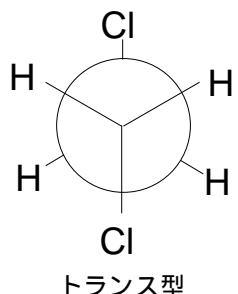
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \omega = \sqrt{k/m})$$

今、 $k = k' = \frac{9}{2}V_3$ 、 $I = m$ で置き換えてみれば、求めるエネルギー準位は

$$E = 3 \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \cdot \sqrt{\frac{V_3}{2I}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

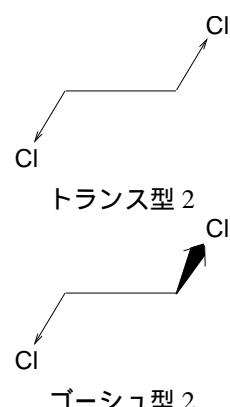
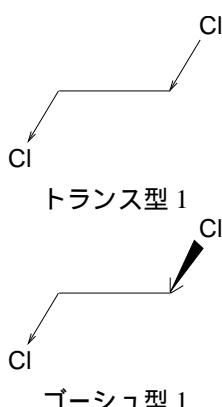
となる。

2. (i)



(ii) この 2 つの回転異性体における C-Cl 伸縮運動を考える。

このとき、それぞれの基準振動のモードは以下のようになる。



分子が電磁場と相互作用して光子を吸収あるいは生成するためには分子は少なくとも過渡的に光子に対応する振動数で振動する双極子を持っていなければならない。従って、トランス型 2 のような双極子モ-

メントの変化を生じないようなモードはスペクトルに寄与しない。ゆえに、トランス型 2 を除いたモードが各スペクトルに対応することになる。

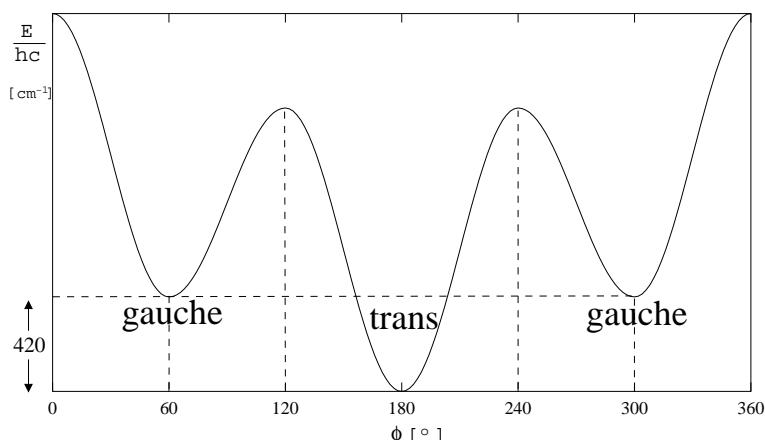
- (iii) バンドの強度比は、それぞれの準位をしめる分子数の比に等しい。この比は、2 つの準位間のエネルギー差が ΔE である時、

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{占有数 } N_g \\ \uparrow \\ E_g \\ \downarrow \Delta E \\ \text{占有数 } N_t \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \text{ゴーシュ型} \\ (g_g \text{ 重に縮退}) \\ \text{トランス型} \\ (g_t \text{ 重に縮退}) \end{array} & \begin{array}{l} I_g(T) = \frac{N_g(T)}{N_t(T)} = \frac{g_g}{g_t} \frac{e^{-\beta E_g}}{e^{-\beta E_t}} \\ = \frac{g_g}{g_t} \exp \left[-\frac{\Delta E}{k_B T} \right] \end{array} \end{array}$$

と表される。 $(g_g, g_t$ はそれぞれゴーシュ型、トランス型の縮退度である。)

よって、縦軸にこのバンドの強度比の対数を、横軸に $1/T$ を取ってグラフ用紙にプロットすると直線になり、その傾きは $-\Delta E/k_B$ である。これより、 ΔE が求まる。

- (iv) ポテンシャルエネルギーの変化は異なった炭素原子に結合している原子同士の回転に伴う電子反発の大きさの変化に由来している。Cl 原子は H 原子に較べ大きな電子雲を持っているため、Cl-Cl 反発や Cl-H 反発は H-H 反発よりも大きなエネルギーを持つ。 $\phi = 0, 2\pi$ では、Cl-Cl 反発が最も大きくなり、また、Cl-H 反発も最大になるためポテンシャルエネルギーは最大値を取る。 $\phi = 2/3\pi, 4/3\pi$ では、2 つの Cl-H 反発が最大値となるため極大値を取っている。



ポテンシャルエネルギーの変化



(v)

$$\begin{aligned} \frac{N_g}{N_t} &= \frac{g_g}{g_t} \exp \left[-\frac{hc}{k_B T} \frac{\Delta E}{hc} \right] \\ &= 2 \times 2.7^{-\frac{6.6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.4 \times 10^{-23} \times 290} \times 420 \times 10^2} \\ &= 0.274 \dots \end{aligned}$$

ゴーシュ型はトランス型の約 27 % 存在している。

1998年度

1998年度 入学試験 一般教育科目

教育 英語

1. 次の英文を読み、以下の設問に答えなさい

In 1961, during the very month that President John F. Kennedy launched the race to the moon, K. Watson, B. C. Murray and H. Brown of the California Institute of Technology noted the importance of the fact that some craters in the moon's polar regions are permanently in shadow. Rather than being subjected to two weeks of blistering rays from the sun each lunar month, these sites remain eternally dark and frigid. Such "cold traps", they argued, might snare water dumped on the lunar surface by crashing comets or spewed forth by lunar volcanoes. And over the aeons, inky crater floors near the poles might accumulate substantial amounts of ice. Those deposits would be immensely valuable to people on future lunar bases, who could distill water from them or separate out the oxygen and hydrogen to use as rocket propellant. It took nearly three decades, but the latest robot probe, Lunar Prospector, has seemingly confirmed that frozen caches of water can indeed be found on the moon.

Because none of the Apollo missions visited the moon's poles, the (ア)proposal of Watson, Murray and Brown had remained untested for 30 years. The first experimental indication came when the Department of Defense and National Aeronautics and Space Administration sent a probe called (aClementine into a polar orbit around the moon in 1994.

Clementine found evidence for ice by bouncing radar signals off the lunar surface and back to antennas on the earth. Some of the signals that were returned suggested that ice might be present near the moon's south pole. Yet Clementine uncovered no indications of ice at the north pole, even though the probe flew much lower there, and the radar experiment should have been more sensitive to ice on the surface.

A 1994 report by the late (bE. M. Shoemaker and two colleagues at the U.S. Geological Survey noted that the south pole of the moon contains "much larger" areas of permanent shadow than the north does, although just how much was hard to say. So Clementine's finding evidence for ice only in the south seemed to make some sense. But in 1997 (cthree radio astronomers reported that radar reflections of the type seen by Clementine could also be found for sunlit parts of the moon, casting doubt on this earlier indication of an icy southern pole. (イ)And the latest results from Lunar Prospector have completely reversed the bias that had, up to this point, placed the moon's south pole in the spotlight.

According to (dA. B. Binder of the Lunar Research Institute, the leader of the Lunar Prospector science team, measurements from the spacecraft show "about twice as much water ice in the north polar regions as in the south polar regions." Actually, the relevant instrument on Lunar Prospector can only sense the presence of hydrogen. The conclusion that the hydrogen detected is from water, Binder admits, is (ウ)"a leap of faith" but a logical one. The ice is apparently mixed with a great deal of rock, so that it makes a tiny fraction of the lunar soil. However, the ice-tinged soil may extend a couple of meters deep.

Binder does not yet know why the new results from Lunar Prospector show more ice in the north than in the south. He suggests that the shadow maps previously obtained from Clementine may have been misleading. Unfortunately the mystery remains unsolved for the moment: Lunar Prospector carries no camera, so the scientists cannot just take a quick look.

snare: 捕らえる

spewed: はき出される

aeons: 永遠

propellant: (ロケット等の) 推進剤

caches: 隠し場

leap: 跳躍

(i) 下線部(ア)の proposal とは何か説明せよ

(ii) 下線部(イ)を和訳せよ

- (iii) 下線部 (ウ) にはどういう意味が込められているか。
- (iv) 下線部 (a),(b),(c),(d) による主張点ないし観測結果を、その相互関係がわかるように要約せよ。
2. つるまきバネ (coil spring) に重りをぶら下げるとき、その自然長から $x(m)$ だけ伸びる。重りがバネに及ぼす力 $F(N)$ は、フックの法則 (Hooke's law) より、 $F = kx$ と書ける。この時の比例定数 $k(N/m)$ をそのバネのバネ定数 (spring constant) という。このフックの法則を確かめ、バネ定数 k を測定する実験を行った。その測定結果は下図のグラフに x と F の関係として与えられている。
- この実験を報告するレポートを英文で書け。ただし、1. 実験の目的、2. 実験方法、3. 結果、4. 考察、5. 結論 のセクションは、数行程度の記述で良い。必要ならば、解答用紙に適当な図を書き、それを参照しながら説明してもよい。

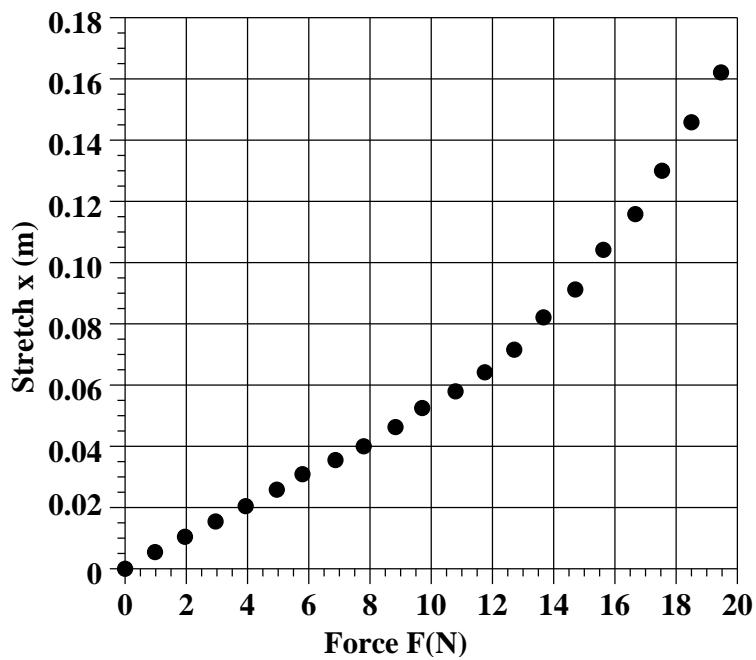


Fig. 1

教育 数学

1. 以下の設問に答えよ。

(i) α を実数としたときに次の積分を複素積分の方法を用いて求めよ。

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin \alpha x}{x}$$

(ii) 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x) = |x|$ のフーリエ級数展開を次のように表したとする:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad x \in [-\pi, \pi]$$

このとき $a_n (n = 0, 1, 2, \dots), b_n (n = 1, 2, \dots)$ を求め、この結果を用いて、次式を証明せよ。

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2. 3 行 3 列の実行列 $A = \{a_{ij}\}$ が与えられているとき、行列式 $\det[A - \lambda I]$ はパラメータ λ について 3 次の多項式となる。ただし、 I は単位行列である。上の行列式を次のように書くこととする:

$$F(\lambda) \equiv \det[A - \lambda I] = -\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R$$

このとき以下の設問に答えよ。

(i) 上の 3 次式の係数 P, Q, R は次のように表せることを示せ。

$$P = \text{Tr}A \quad Q = \frac{1}{2} (\text{Tr}A^2 - (\text{Tr}A)^2) \quad R = \det A$$

ここで、 Tr は行列の対角和を意味する。

(ii) 特に $P = 0$ のとき、行列 $A = \{a_{ij}\}$ が複素共役の固有値を持つための条件を Q, R を使って表せ。

3. $H_n(x) (n = 0, 1, 2, \dots)$ を x の n 次の多項式で次の性質を満たすものとする。

$$H_n(x) = x^n + (n \text{ より低次の多項式})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = 0 \quad (n \neq m)$$

(i) $n = 1, 2, 3$ について $H_n(x)$ を具体的に構成せよ。ただし次の積分公式を用いて良い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2m} e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \frac{(2m)!}{4^m m!} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

一般に n 次の多項式 $P(x)$ は $H_l(x)$ を用いて $P(x) = \sum_{l=0}^n c_l H_l(x)$ と展開できることを注意し、次の設問に答えよ。

(ii) $H_n(-x) - (-1)^n H_n(x) = 0$ となることを帰納法を用いて証明せよ。

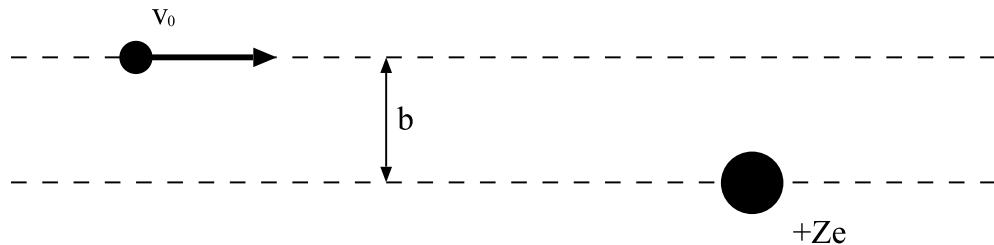
(iii) a_n を適当な係数として $H_n(x)$ が次の形の漸化式を満たすことを証明せよ。

$$x H_n(x) = H_{n+1}(x) + a_n H_{n-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = n H_{n-1}(x)$$

教育 物理

1. 電荷 $+Ze$ を持つ非常に重い原子核に向かって、質量 m 、電荷の q の荷電粒子が初速度 v_0 を持って無限遠から衝突パラメータ（無限遠での粒子の運動方向を延長して得られる直線と標的（ここでは原子核）との距離） b で近づくとき、次の問いに答えよ。ただし、粒子間にはクーロン力のみが働くものとし、原子核の反跳は無視する。また、クーロンの法則の比例定数は k とせよ。



- (i) 荷電粒子の描く軌道を、衝突パラメータ b が大きい場合と小さい場合（ただし $b > 0$ ）、および q の符号が正と負の場合、計四つの組み合わせについて、同一の図の中に定性的に描け。
 - (ii) 荷電粒子が持つ原子核の周りの角運動量 \vec{L} を、原子核を原点とする荷電粒子の位置ベクトル \vec{r} を用いて表わせ。
 - (iii) \vec{L} が保存することを示せ。
 - (iv) 衝突パラメータが b であるとき、 \vec{L} の大きさを求めよ。
 - (v) 軌道上で荷電粒子が原子核に最も近づく点における粒子間の距離を s とするとき、この点における荷電粒子の速さ v_s はどう表わされるか。
 - (vi) $q = +e$ とするとき、 s を求めよ。
2. 半径 a の球内に電荷が一様に分布している。球の外側には電荷はないものとする。球内の電荷分布を $\rho (> 0)$ として、以下の問いに答えよ。
- (i) 球の内外の電場の大きさ $E(r)$ を、球の中心からの距離 r の関数として求め、そのグラフを描け。
 - (ii) 同じく球の内外の静電ポテンシャル $\phi(r)$ を r の関数として求め、そのグラフを描け。ただし、無限遠での静電ポテンシャルを 0 とすること。
 - (iii) 無限遠から少しずつ電荷を持ってきてこのような電荷分布をつくるのに要する仕事 W_1 を計算せよ。
 - (iv) 球内および球外の空間の静電場のエネルギーをそれぞれ計算し、全空間の静電場のエネルギー W_2 を求めよ。
3. 媒質中を伝播する音は、媒質の密度の波である。 $\Delta\rho$ を平均密度 ρ からのずれとすると、 x 方向に伝播する音波は、波動方程式

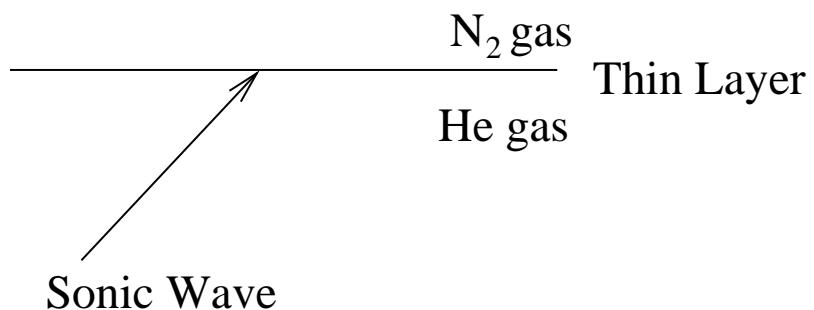
$$k \frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial t^2}$$

に従う。ここで k は、断熱過程での ρ に対する圧力 P の変化率

$$k = \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\text{adiabatic}}$$

である。媒質が、温度の T 理想気体である場合について、以下の問いに答えよ。ただし、理想気体の分子量を M 、定積比熱に対する定圧比熱の比を γ 、気体定数を R とする。

- (i) 理想気体の圧力 P が、 $P = \rho RT/M$ と表されることを示せ。
- (ii) k を、 M 、 γ 、 T および R を用いて表せ。ただし、断熱過程では、 $P/\rho^\gamma = \text{一定}$ であることを用いてよい。
- (iii) ヘリウムガス ($M = 4.0, \gamma = 5/3$) 中の音速は、同じ温度の窒素ガス ($M = 28.0, \gamma = 7/5$) 中の音速の何倍になるか、有効数字 2 桁で答えよ。
- (iv) 理想気体中に、片端を閉じ他端を開いた長さ l の管をおく。管の中の気柱にたつ音の基本定在波の振動数 v_0 を、音速を v として、求めよ。それに基づいて、ヘリウムガス中と窒素ガス中での v_0 の違いを簡潔に説明せよ。
- (v) 同じ温度のヘリウムガスと窒素ガスが、図のように薄膜で隔てられているとき、ヘリウムガス中から斜めに入射した音波はどのように進むか、図示し簡潔に説明せよ。



教育 英語 解答

1. 全訳

1961 年 J.F. ケネディー大統領が月へのレースを始めました。その月にカルフォルニア工科大学の K. ワトソンと B.C.Murray、H. ブラウンの三人はいくつかの月の極地域のクレーターは永久に影になっているという事実の重要性に言及した。月の時間で毎月二週間、焼けつくような太陽光線にさらされないのでこれらの地域は永久に暗く極寒のままである。彼らが議論するところによると、そのような「コールドトラップ」は彗星の衝突によって月の表面に投げ出された水や、月の火山の噴き出された水を捕らえ、長い間のち、極地方の真っ暗なクレーターの底に、大量の氷をため込んでいる可能性がある。その氷は未来の月面基地の人にとって非常に価値があり、蒸留して水を得たり、酸素と水素に分解してロケットの燃料に使ったりできる。30 年近く経ったが、最新のロボット探査機「ルナ・プロスペクター」は、凍った水の場所を本当に月の上で見つけることができると、うわべでは確かめた。

アポロ計画で月の極地方に訪れなかったので、3 人の案は 30 年間手つかずになってしまった。最初の実験的兆候は国防総省と NASA が 1994 年に月の極軌道に送った探査機、クレメンタインを打ち上げたときに来た。

クレメンタインは月の表面にレーダーを反射させて氷の証拠を得て、地球に送ってきた。帰ってきた信号のいくつかは氷が南極の近くにあるかも知れないということを示唆していた。しかし、クレメンタインは北極では南極より、より低く飛んでいるのにも関わらず、何の証拠も得られなかった。そして、レーダー実験は表面上の氷にもっと高感度にする方がよかった。

アメリカ地質調査部の故シューメーカーと二人の同僚の 1994 年の報告はどれくらいかは言い難いが、月の南極の方が、北極よりもより広い永久の影を含むことを指摘した。そうすると、クレメンタインが南極でしか氷の証拠を得られなかったのも理にかなうように思われた。しかし、1997 年、三人の電波天文学者は南極の氷のこの初期の証拠に疑いを投げかけ、クレメンタインに見られたレーダー反射のタイプは月の日が射す部分によっても見られることを報告した。(イ) そして、月の探査機の最新の結果は、この時点まででは南極には日が射すという傾向に完全に戻ってしまった。

「月探査チーム」の指導者で、ルナリサーチ学会の A.B.Binder によると、宇宙船での測定は南極よりも北極の方が二倍の氷や水を示している。実際はルナ・プロスペクターの関連のある計器は水素の存在を感じるだけである。観測された水素が水からという結論は Binder も認めているが、論理的な結論でなく、飛躍がある。氷は大量の岩石と混ざっているらしく、月の土の小さなかけらになっている。しかし、氷を含んだ土は 2 ~ 3 メートルの深さまで広がっているだろう。

Binder は未だ「ルナ・プロスペクター」からの新しい証拠が南極より北極により多くの氷がある理由がわかっていない。Binder はクレメンタインから得られた過去の影の地図が間違っているのではないかと言うことを提案している。不幸なことに、今はその謎を解かずに残っている。ルナ・プロスペクターはカメラを持っていかなかったので、科学者は素早く見ることはできない。

- (i) 月の極付近のクレーターは太陽の光が常に当たらないので、彗星の衝突や火山の噴火によって、月の表面に出た水を、氷としてため込んでいる可能性があり、その氷を未来の月面基地で利用するという案。
- (ii) 全訳を参照
- (iii) 水素の存在を感じただけで、それが水からのものだと判断してしまう飛躍。
- (iv) クレメンタインは月の表面から氷の存在を確認した。南極付近から氷の反応があり、北極付近からは何も反応がなかった。シューメーカー達の報告によれば、月の南極の方が北極よりも、より広い影がある。そうするとクレメンタインの結果が正しいようと思える。しかし、三人の電波天文学者はクレメンタインの得た氷の反応は月の日が射す部分からも見られることを報告した。また、A.B.Binder によれば、ルナ・プロスペクターによる測定は、南極よりも北極の方が二倍の氷があり、クレメンタインによる観測とは全く逆になっている。

2. ここにあげるのは一例。

(i) • Purpose

I did an experiment with a spring in order to make sure of Hooke's law and obtain the spring constant of it.

• Procedure

Fig. 2 shows the equipment of this experiment.

I hung a $M[\text{kg}]$ weight from the lower end of the spring and measured the stretch $x[\text{m}]$ of it.

• Results

Fig. 1(the graph in the problem paper) shows the results.

Here $F = Mg[\text{N}]$ is the value of the force pulling the spring and $g[\text{m/s}^2]$ is the gravitational acceleration.

And the self-weight of the spring is small enough by compared with M . So it was ignored.

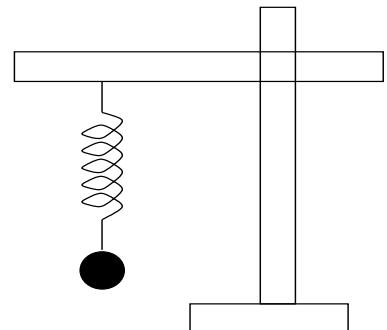


Fig.2

• Consideration

From Fig. 1 when F is less than 10[N], Hooke's law is obviously valid.

But, otherwise F is not in proportion to x .

• Conclusion

A certain length x_{max} exists and $F = kx$ (Hooke's law) is valid for $x < x_{max}$. And from Fig. 2, the spring constant $k[\text{N/m}]$ is about 194(for $x \leq 0.06$).

(ii) • The purpose of this experiment

I made sure of Hooke's law. I measured a spring constant k .

• The way of the experiment Procedure

I hanged weight on a coil spring. I examined a relation between the stretch x of the coilspring and the force F to pull the coilspring.

• The result

Fig.1 shows the relation between x and F .

• Consideration

If F is less than 12N, we find x and F follow Hooke's law. The spring constant k is $1.8 \times 10^2 [\text{N/m}]$. If F is stronger than 12N, x and F don't follow the law and F is less than kx .

• Conclusion

We can conclude that if F is weak sufficiently, the coilspring follows Hooke's law.

(iii) • Purpose

We make sure a coil spring follows Hooke's law and measure a spring constant $k[\text{N/m}]$.

• Method

We hanged a weight from the coil spring and measure its stretch.

• Result

Fig.1 shows the relationship between F , which is the force given to the coil spring and x , which is the stretch of the coil spring.

• Consideration

If F is smaller than about 12[N], the coil spring follows Hooke's law and the spring constant k is about 200[N/m].

If F is larger than about 12[N], x increases accelerately and the coil spring does not follow the hooke's law.

• Conclusion

A coil spring follows Hooke's law when the force givn to it is small. But if the force is large, it doesn't follow Hooke's law.

(iv) • Objective

The objective of this experiment is to confirm Hooke's law for a coil spring and measure the spring constant k of it.

• Experimental Method

The stretch x of the coil spring was measured for various weights having the different weight.

• Result

Fig.1 provides a plot of x against the force F acting on the copil spring. From Fig.1 it can be stated that x increases almost linearly up to 10[N], above which it increases superlinearly.

•Discussion

The result is consistent with Hooke's law up to 10[N]. Since $1/k$ is equal to the slope of the fitted straight line Figure. 1, the spring constant is 190[N/m].

•Conclusion

- It is confirmed that Hooke's law is valid up to 10[N] for this coil spring.
- The spring constant of this spring is 190[N/m].

教育 数学 解答

1. (i) まず、 $\alpha = 0$ のときは被積分関数は 0 なので明らかに

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin \alpha x}{x} = 0.$$

次に被積分関数は偶関数であるから、

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin \alpha x}{x} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{\sin \alpha x}{x}.$$

さらに、この積分は

$$\operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{e^{i\alpha x}}{x} \right]$$

とかける。

そこで、この積分を図のような積分路で計算する。積分路に囲まれた領域内には極は存在しないので、

$$\int_C \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz = 0.$$

$\alpha > 0$ のときは上半面で計算する。

大きな円弧状では $z = Re^{i\theta}$ とかける。この時、この円弧上の積分の寄与は

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi iRe^{i\theta} d\theta \frac{e^{i\alpha R(\cos \theta + i \sin \theta)}}{Re^{i\theta}} \right| = \left| i \int_0^\pi d\theta e^{-\alpha R \sin \theta} e^{i\alpha R \cos \theta} \right| \\ &\leq \int_0^\pi d\theta e^{-\alpha R \sin \theta} \end{aligned}$$

$\sin \theta$ は、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ で折り返し対称なので、

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{-\alpha R \sin \theta} \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{-\frac{2\alpha R \theta}{\pi}} = \frac{\pi}{\alpha R} (1 - e^{-\alpha R}) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

それゆえ、

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} dx \frac{e^{i\alpha x}}{x} + \int_\varepsilon^R dx \frac{e^{i\alpha x}}{x} + \int_{C_2} dz \frac{e^{i\alpha z}}{z} = 0.$$

この最後の項を計算する。 C_2 上では $z = \varepsilon e^{i\theta}$ であるから、この上では ε が微小だとすると

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz &= \int_\pi^0 \frac{e^{i\alpha \varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_\pi^0 d\theta e^{i\alpha \varepsilon e^{i\theta}} = i \int_\pi^0 \{1 + i\alpha \varepsilon e^{i\theta} + O(\varepsilon^2)\} d\theta \\ &= -i\pi. \end{aligned}$$

それゆえ、

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^R \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = i\pi.$$

$R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ として虚部をとると、

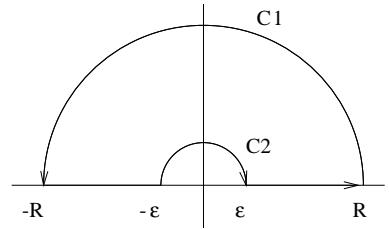
$$\int_0^\infty dx \frac{\sin \alpha x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

を得る。

$\alpha < 0$ の場合、

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin \alpha x}{x} = \int_0^\infty dx \frac{-\sin |\alpha| x}{x} = - \int_0^\infty dx \frac{\sin |\alpha| x}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

を得る。



(ii) まず、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \pi \delta_{m,n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0$$

であるから、

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = -\frac{2}{n^2 \pi} \{1 + (-1)^{n-1}\}$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{n^2 \pi} & \text{if } n = \text{odd} \\ 0 & \text{if } n = \text{even} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= 0 \quad \text{since } |x| \sin nx \text{ is odd}$$

以上から、

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)x).$$

この結果に $x = 0$ を代入すると、 $\cos((2n+1) \cdot 0) = 1$ であるから、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

を得る。

2. (i) $\lambda = 0$ とおくと、

$$F(0) = \det A = R$$

であるから、 $R = \det A$ は明らか。残りの項はすべて λ を含むから、 $\det [A - \lambda I]$ の λ を含む項を計算する。

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} - \lambda) \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} - a_{12} a_{21} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} + a_{13} a_{21} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} - \lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} - \lambda) \{a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a_{32} a_{23}\} - a_{12} a_{21} (a_{33} - \lambda) - a_{13} a_{21} (a_{22} - \lambda) + (\lambda \text{を含まない項})$$

$$= -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2$$

$$+ (-a_{11}a_{22} - a_{22}a_{33} - a_{11}a_{33} + a_{32}a_{23} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31})\lambda + (\lambda \text{を含まない項})$$

ここで、

$$\text{Tr}A^2 = \text{Tr} \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right)$$

$$= a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{22}^2 + a_{21}a_{12} + a_{23}a_{32} + a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{33}^2$$

$$= a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2(a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{32}a_{23})$$

であるから、

$$P = \text{Tr}A$$

$$Q = \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr}A^2 - (\text{Tr}A)^2 \right\}$$

を得る。

(ii) $P = 0$ のとき、

$$F(\lambda) = -\lambda^3 + Q\lambda + R$$

であるから、

$$F(\lambda) = 0$$

が実数解を 1 つだけ持つ条件を考えればよい。

まず、

$$F'(\lambda) = -3\lambda^2 + Q$$

であるから、

$Q \leq 0$ のとき、任意の R に対して $F(\lambda)$ は極値を持たず、単調である。それゆえ実数解を一つだけ持つ。
 $Q > 0$ のとき、 $F(\lambda)$ は $\lambda = \pm \sqrt{\frac{Q}{3}}$ で極値を持つ。 λ^3 の係数は負なので $\lambda = -\sqrt{\frac{Q}{3}}$ で極小、 $\lambda = \sqrt{\frac{Q}{3}}$ で極大値をとる。実数解を持つためには極値が同符号ならよいから、

$$F(\lambda) = -\lambda^3 + Q\lambda + R = \frac{1}{3}(-3\lambda^2 + Q)\lambda + \frac{2}{3}Q\lambda + R$$

に注意して、

$$F\left(-\sqrt{\frac{Q}{3}}\right) F\left(\sqrt{\frac{Q}{3}}\right) = R^2 - \frac{4}{27}Q^3 > 0$$

ならよい。これと上の $Q \leq 0$ を合わせて、求める条件は

$$R^2 - \frac{4}{27}Q^3 > 0$$

である。

3. (i) 明らかに $H_0(x) = 1$ であるから、

$$H_1(x) = x + C_1$$

$$H_2(x) = x^2 + C_2x + C_2'$$

$$H_3(x) = x^3 + C_3x^2 + C_3'x + C_3''$$

とおいて、直交性から未定係数を定める。ここで、 $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x^{2n+1} = 0$ (ただし、 $n = 0, 1, 2, \dots$) であることに注意する。

$H_1(x)$ について。

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_0(x) H_1(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} (x + C_1) \\ &= \sqrt{\pi} C_1 \end{aligned}$$

これより、 $C_1 = 0$ つまり、 $H_1(x) = x$.

次に $H_2(x)$ について。 $H_0(x)$ との内積から、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} (x^2 + C_2 x + C_2') \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sqrt{\pi} C_2' \end{aligned}$$

これより、 $C_2' = -\frac{1}{2}$. $H_1(x)$ との内積から、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x (x^2 + C_2 x + C_2') \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} C_2 \end{aligned}$$

それゆえ、 $C_2 = 0$. よって、 $H_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$

次に $H_3(x)$ について。 $H_0(x)$ との内積をとると、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} (x^3 + C_3 x^2 + C_3' x + C_3'') \\ &= C_3 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} + C_3'' \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \\ &= \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2} C_3 + C_3'' \right) \end{aligned}$$

それゆえ、 $C_3 = -2C_3''$.

$H_1(x)$ との内積から、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x (x^3 + C_3 x^2 + C_3' x + C_3'') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx x^4 e^{-x^2} + C_3' \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} \\ &= \sqrt{\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{C_3'}{2} \right) \end{aligned}$$

それゆえ、 $C_3' = -\frac{3}{2}$.

$H_2(x)$ との内積から、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) (x^3 + C_3 x^2 + C_3' x + C_3'') \\ &= C_3 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^4 e^{-x^2} + C_3'' \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} - \frac{C_3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} - \frac{C_3''}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \\ &= \sqrt{\pi} \left(\frac{3}{4} C_3 + \frac{C_3''}{2} - \frac{C_3}{4} - \frac{C_3''}{2} \right) \end{aligned}$$

これより、 $C_3 = 0, C_3'' = 0$.

以上をまとめて、

$$\begin{aligned} H_1(x) &= x \\ H_2(x) &= x^2 - \frac{1}{2} \\ H_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

(ii) 帰納法を用いる。

$$H_n(-x) - (-1)^n H_n(x) = 0$$

… (1)

$n = 0$ のとき、 $H_0(-x) - (-1)^0 H_0(x) = 1 - 1 = 0$ であるから、(1) は成り立っている。

次に $n = k - 1$ まで成り立っているとして、 $n = k$ のときを考える。ところで、

$$H_n(x) = x^n + C_n x^{n-1} + \dots$$

であるから、未定係数は n 個ある。一方、 $m = n - 1, \dots, 0$ に対しての直交条件から独立な条件は n 個ある。つまり、 $H_n(x)$ は一意的に決まる。

さて、 $0 \leq m < n$ のとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)$$

において $x \rightarrow -x$ とおきかえると、 $m < n$ に対しては (1) は成り立つので

$$0 = \int_{\infty}^{-\infty} d(-x) e^{-x^2} H_n(-x) H_m(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} (-1)^m H_n(-x) H_m(x)$$

となり、 $H_n(-x)$ は $H_n(x)$ と同じ直交条件を満たす。すなわち、 $H_n(-x)$ は $H_n(x)$ に定数倍を除いて一致する。ここで、そもそも

$$H_n(x) = x^n + (n-1 \text{ 次以下の多項式})$$

であったから、

$$H_n(-x) = (-1)^n x^n + (n-1 \text{ 次以下の多項式})$$

である。それゆえ、

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

が成り立つ。つまり、 $n = k$ に対しても (1) が成り立つ。

以上から、数学的帰納法により、すべての $n = 0, 1, \dots$ に対して

$$H_n(-x) - (-1)^n H_n(x) = 0$$

が成り立つ。

(iii) 再び数学的帰納法を用いる。

$n = 1$ のとき、

$$xH_1(x) = x^2 = H_2(x) + a_n H_0(x) = \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

となり、 $a_n = \frac{1}{2}$ とおけば

$$xH_n(x) = H_{n+1}(x) + a_n H_{n-1}(x) \quad \cdots (2)$$

が成り立つ。

次に $n = k - 1$ まで成り立っていると仮定すると、

$$xH_{k-1}(x) = H_k(x) + a_{k-1} H_{k-2}(x).$$

$n = k$ のとき、

$$xH_k(x) - H_{k+1}(x) = \sum_{l=0}^k c_l H_l(x)$$

とかける。ここでもしも $c_k \neq 0$ とすると右辺の最高次の項は x^k である。このとき、左辺は $x \rightarrow -x$ に対して $(-1)^{k+1}$ がかかるが、右辺の最高次の項には $(-1)^k$ がかかる。これは矛盾する。そのため、 $c_k = 0$ でなくてはならない。

$m < k$ に対して、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} (xH_k(x) - H_{k+1}(x))H_m(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_k(x)xH_m(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_k(x)(H_{m+1}(x) + a_m H_{m-1}(x)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_k(x)H_{m+1}(x) \end{aligned}$$

となる。これは $m+1 = k$ のときのみ 0 でない。つまり、

$$xH_k(x) - H_{k+1}(x) = c_{k-1}H_{k-1}(x)$$

とかける。

そこで、

$$a_k = c_{k-1}$$

とおけば (2) が成り立つ。

以上から、数学的帰納法から、すべての $n = 0, 1, \dots$ に対して (1) が成り立つ。

次に

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = nH_{n-1}(x)$$

について考える。

再び数学的帰納法を用いる。 $n = 1$ に対しては

$$\frac{d}{dx} H_1(x) = 1 = 1 \cdot H_0(x)$$

となり明らかに成り立つ。

次に $n = k - 1$ にたいして

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = nH_{n-1}(x) \quad \cdots (3)$$

が成り立っているとする。

すると、 $n = k$ に対して

$$H_n(x) = x^n + (n-1 \text{ 次以下の多項式})$$

であるから、

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = nx^{n-1} + (n-2 \text{ 次以下の多項式}) \quad \cdots (4)$$

となる。このため、

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = nH_{n-1}(x) + \sum_{l=0}^{n-2} c_l H_l(x)$$

とかける。

上と同様に $m < n$ に対して $H_m(x)$ との内積を考える。

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \left(\frac{d}{dx} H_n(x) \right) H_m(x) \\ &= \left[H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx H_n(x) \frac{d}{dx} (e^{-x^2} H_m(x)) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ H_n(x)(-2x)e^{-x^2} H_m(x) + H_n(x)e^{-x^2} \frac{d}{dx} H_m(x) \right\} \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x)xH_m(x) - \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} mH_n(x)H_{m-1}(x) \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x)(H_{m+1}(x) + a_m H_{m-1}(x)) \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x)H_{m+1}(x) \end{aligned}$$

これは $m + 1 = n$ のときのみ 0 でない。すなわち、上で、 $l = 0, 1, \dots, n - 2$ に対して $c_l = 0$.

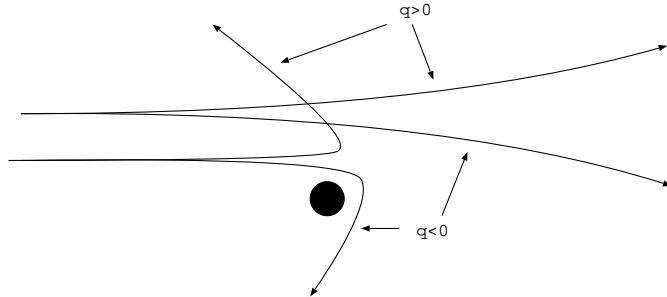
また、(4) より、 $c_{n-1} = n$ である。ゆえに

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = n H_{n-1}(x)$$

を得る。これにより、 $n = k$ のときも (3) が成り立つ。以上から数学的帰納法により、(3) が成り立つ。

教育 物理 解答

1. (i) 力は $\frac{kZeq}{r^2} \vec{r}$ (\vec{r} は原子核から荷電粒子の方向) で、 r^2 が小さいほど力は強いことに注意すると、



- (ii) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ なので、 $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times \vec{r}$ 。

ちなみに、 \vec{r} と \vec{v} の関係を求めておくと、荷電粒子の全エネルギーは、 $\frac{1}{2}mv^2 + k\frac{Zeq}{r}$ なので、エネルギーの保存より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + k\frac{Zeq}{r} \\ v^2 &= v_0^2 - \frac{Zeqk}{mr} \end{aligned} \quad \cdots (1)$$

- (iii) \vec{L} を時間微分すると、

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{r}) = m(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \vec{r} \times \vec{r}) = m(\vec{r} \times \vec{r})$$

運動方程式 $m\ddot{\vec{r}} = \frac{kZeq}{r^2} \vec{r}$ を使うと、これは 0 になる。よって示された。

- (iv) $|\vec{L}|$ を求める。保存するので、無限遠で求めればよい。

$$|\vec{L}| = m|\vec{r} \times \vec{v}| = m|\vec{r} \times \vec{v}_0| = mbv_0.$$

- (v) 一番近づいた時、 $\vec{v} \perp \vec{r}$ 。よって、 $|\vec{L}| = ms v_s = mv_0$ より、 $v_s = v_0 \frac{b}{s}$ 。

- (vi) (1) より、 $v_s^2 = v_0^2 - \frac{2Ze^2 k}{ms}$ よって、

$$\begin{aligned} \frac{v_0^2 b^2}{s^2} &= v_0^2 - \frac{2Ze^2 k}{ms} \\ s^2 - \frac{2Ze^2 k}{mv_0^2} s - b^2 &= 0 \\ s &= \frac{Ze^2 k}{mv_0^2} \pm \sqrt{\frac{Z^2 e^4 k^2}{m^2 v_0^4} + b^2}. \end{aligned}$$

$s > 0$ ので、+の方が答。

2. (i) 電荷分布が球対称なので、電場も球対称。

- $r > a$ のとき。Gauss の法則より、

$$\begin{aligned} \int E(r) dS &= 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} a^3 \rho \\ E(r) &= \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}. \end{aligned}$$

- $r < a$ のとき。内部電荷は $\frac{4\pi}{3} r^3 \rho$ より、

$$\begin{aligned} \int E(r) dS &= 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3} \rho \\ E(r) &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} r. \end{aligned}$$

よって、グラフにすると、

(ii) $\vec{E} = -\nabla\phi$ より、 $\phi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int E(r)dr$ なので、
 $r > a$ では、

$$\phi(r) = -\int \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} + A.$$

$r \rightarrow \infty$ で、 $\phi \rightarrow 0$ より、 $A = 0$ 。よって、 $\phi(r) = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}$ 。
 $r < a$ では、

$$\phi(r) = -\int \frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + B.$$

$r = a$ で連続より、

$$\begin{aligned} -\frac{\rho a^2}{6\epsilon_0} + B &= \frac{a^2 \rho}{3\epsilon_0} \\ B &= \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}. \end{aligned}$$

結局、 $\phi(r) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}$.

(iii) 微小な電荷を無限遠から何回か運んできた後、半径 a の電荷球の電荷密度が ρ' になっているとする。ここで、さらに微小な電荷 Δq を運んでくると、電荷球の電荷密度が $\Delta\rho = \frac{3}{4\pi a^3} \Delta q$ だけ増える。 $r \sim r + dr$ の微小体積の電荷密度を $\Delta\rho$ だけ増すのに必要な仕事は、

$$\left(-\frac{\rho'}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{a^2 \rho'}{2\epsilon_0} \right) 4\pi r^2 \Delta\rho dr.$$

よって、全球の電荷密度を $\Delta\rho$ だけ増すのに必要な仕事 ΔW は

$$\Delta W = \int_0^a \left(-\frac{\rho'}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{a^2 \rho'}{2\epsilon_0} \right) 4\pi r^2 \Delta\rho dr = \frac{2\pi}{\epsilon_0} \Delta\rho \rho' \frac{4}{15} a^5.$$

したがって、電荷密度を ρ にするまでに必要な仕事 W_1 は、

$$W_1 = \int \Delta W = \int_0^\rho \frac{2\pi}{\epsilon_0} \rho' \frac{4}{15} a^2 d\rho' = \frac{4\pi a^5}{15\epsilon_0} \rho^2.$$

(iv) 単位体積あたりの静電場のエネルギー u は、 $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ 。よって、球内では、

$$u_{in} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \frac{\rho^2}{9\epsilon_0^2} r^2 = \frac{\rho^2}{18\epsilon_0} r^2.$$

したがって、全部で、

$$U_{in} = \int \frac{\rho^2}{18\epsilon_0} r^2 d^3r = 4\pi \frac{\rho^2}{18\epsilon_0} \int_0^a r^4 d^3r = \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0} \frac{a^5}{5}.$$

球外では、

$$u_{out} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \frac{a^6 \rho^2}{9\epsilon_0^2 r^4} = \frac{\rho^2}{18\epsilon_0} \frac{a^6}{r^4}.$$

全部で、

$$U_{out} = \int \frac{\rho^2}{18\epsilon_0} \frac{a^6}{r^4} d^3r = 4\pi \frac{\rho^2}{18\epsilon_0} a^6 \int_a^\infty \frac{1}{r^2} d^3r = \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0} a^5.$$

以上より、全空間の静電場のエネルギーは、

$$W_2 = \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0} a^5 \left(\frac{1}{5} + 1 \right) = \frac{4\pi\rho^2}{15\epsilon_0} a^5.$$

3. (i) 理想気体の状態方程式は $PV = nRT$ で、気体の重さ m は $m = nM$ より、 $n = m/M$ で、 $PV = mRT/M$ 。
 $\rho = m/V$ より、

$$P = \frac{\rho RT}{M}. \quad \cdots (2)$$

(ii)

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = C \quad \cdots (3)$$

より、 $P = C\rho^\gamma$ である。よって、

$$k = \frac{dP}{d\rho} = C\gamma\rho^{\gamma-1}. \quad \cdots (4)$$

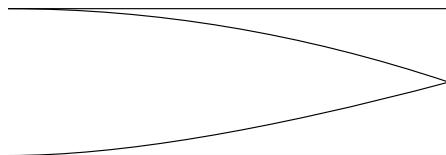
C を求める。(3) に (2) を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{RT}{M} \frac{1}{\rho^{\gamma-1}} &= C \\ C\rho^{\gamma-1} &= \frac{RT}{M}. \end{aligned}$$

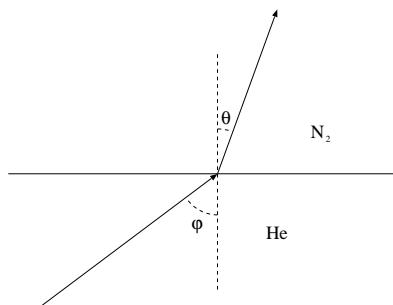
これを (4) に代入して、 $k = RT\gamma/M$

- (iii) 音速を v とすると、 $\Delta\rho = f(x-vt)$ とおけて、 $kf'' = v^2 f''$ 。よって、 $v = \pm\sqrt{k}$ 。従って、ヘリウムガスの音速は $\sqrt{\frac{RT}{4}} \frac{5}{3}$ 、窒素ガスの音速は $\sqrt{\frac{RT}{28}} \frac{7}{5}$ なので、ヘリウムガスの音速は、窒素ガスの音速の $\sqrt{\frac{5RT}{4}} \cdot \sqrt{\frac{28}{7RT}} \simeq 2.9$ 倍。

- (iv) 閉じた方は固定端で開いた方は自由端である。波長は図から $\lambda_0/4 = l$ で、 $\lambda\nu_0 = \nu_0$ よって、 $\nu_0 = \nu/\lambda_0 = \nu/4l$ 。したがって、ヘリウムガスのほうが窒素ガスより振動数が大きくなる。



- (v) 普通に、速さの速い方から遅い方への入射となる。角度は屈折の法則より、 $\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{v_N}{v_{He}}$ となる。



1998年度 入学試験 物理専門科目

専攻 問題 1

井戸型ポテンシャルの中に置かれた電子系の運動を考える。電子の運動は x 軸方向のみ考えればよく、それに直行する方向の運動は考えない。ポテンシャルは $-a < x < a$ (a は正の定数) で 0 で、 $x = -a$ および $x = +a$ に無限に高い壁をもつ。 i 番目 ($i = 1, 2, \dots$) の電子の座標を x_i とし、そのスピンを \vec{s}_i と表わす。またその電子のスピン波動関数については、上向きを $u_{\uparrow}(i)$ 、下向きを $u_{\downarrow}(i)$ とする。電子の質量を m として、以下の設問に答えよ。

- 1 個の電子をこの井戸型ポテンシャルの中に入れた時のエネルギー固有値を求めよ。ただし、下から n 番目 ($n = 1, 2, \dots$) のものを E_n とせよ。
- 電子はフェルミ粒子である。この事実は、この井戸型ポテンシャル内に 2 個の電子を入れた時に、それらの波動関数にどのような条件を課すか、述べよ。
- 2 個の電子をこの井戸型ポテンシャル内に入れたところ、最も低いエネルギー固有状態が実現された。この時のエネルギー固有値を求め、その状態での電子系の波動関数を、スピン部分まで含めて示せ。さらに、電子の合成スピン演算子

$$\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$$

に対して、この状態での $(\vec{S} \cdot \vec{S})$ の期待値を求めよ。以後 (\cdot) は内積を表わす。

- 設問 3 同じ場合で、2 番目に低いエネルギー固有状態が実現されていたとする。このエネルギー固有値に属する系の固有状態には、どのようなものがあり得るか。スピン部分まで含め、それらの波動関数を示せ。
- ここで電子間に

$$V = f \times (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) \times \delta(x_1 - x_2)$$

という相互作用が働くとする。ただし f は結合定数で、十分に小さい正の値をとるものとし、 $\delta()$ はデルタ関数を表わす。この相互作用が加わったとき、設問 3 で求めた状態のエネルギー固有値の変化を計算せよ。

- 設問 5 の相互作用 V が働いたとき、設問 3 の状態と、設問 4 で考えた状態（複数でもよい）は、どのように混ざるか答えよ。

専攻 問題 2

一様な磁場の中に置かれた強磁性体の、次のような模型を考える。

3 次元立方格子の各格子点 i に磁気モーメント σ_i が存在し、その磁場方向の成分は、 $\sigma_i = +1$ または $\sigma_i = -1$ の離散的な値をとる。隣り合う格子点 i, j の磁気モーメントは、相互作用のエネルギー $-J\sigma_i\sigma_j$ (J は正の定数) を持つ。磁場を h とするとき、系のハミルトニアンは、

$$H = -J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

で与えられる。ここで和 (i, j) は最近接の格子点の間のみをとるものとし、3 次元立方格子のサイズは十分に大きいものとする。

1. 系の温度を T として、以下の間に答えよ。

- (i) $T \rightarrow 0$ および $T \rightarrow \infty$ の極限における、系の磁気モーメントの配位の様子を述べよ。
 - (ii) 同じく $T \rightarrow 0$ および $T \rightarrow \infty$ の極限における、1 格子点あたりのエントロピーを求めよ。
 - (iii) (i) の結果を、自由エネルギー $F(T)$ の振る舞いにより説明せよ。
2. 磁気モーメントの熱力学的平均を近似的に求める（厳密解は求められていない）。そのため、原点の磁気モーメント σ_0 とその最近接格子点の磁気モーメントからなる部分系を考え、そのハミルトニアンを $H(\sigma_0)$ とする。
 - (i) $H(\sigma_0)$ において、原点以外の格子点の磁気モーメントを近似的に定数 m で置き換える。このとき、 $H(\sigma_0)$ によって決まる、磁気モーメントの熱力学的平均 $\langle \sigma_0 \rangle$ を求めよ。
 - (ii) $\langle \sigma_0 \rangle$ を m に等しいと置く事により、 m の満たす方程式を求めよ。
 - (iii) 磁場が 0 (すなわち $h = 0$) のとき、 m を温度 T の関数として定性的にグラフに書け。ここで設問 1 (i) の結果を考慮すること。
 - (iv) $m(T)$ が特異点となる温度 T_c を求めよ。

専攻 問題 3

Maxwell は、いくつかの実験事実から 4 つの方程式 (Maxwell 方程式)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \cdots (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \cdots (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \cdots (3)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \cdots (4)$$

を与え、電磁気学を完成させた。ただし \vec{E} は電場、 \vec{B} は磁束密度、 ρ は電荷密度、 \vec{j} は電流密度、 ϵ_0 は真空の誘電率、 μ_0 は真空の透磁率で、以下では真空中の電磁場のみを考える。

1. 式 1 は Gauss の法則を表す。

- (i) 閉じた中空の導体があると、導体の外部にある電荷が作る電場は、導体に囲まれた中空の導体には侵入できない。このことを、式 1 を用いて証明せよ。ただし、中空の空間には、もともと電荷は存在しなかったものとする。
- (ii) R_1 および $R_2 (R_1 > R_2)$ の半径をもつ 2 個の同心の中空導体球を用いて、Gauss の法則を実験的に検証したい。原理的にどのような手順で何を測定すれば良いか、答えよ。

2. Maxwell 方程式から電磁波の存在が予言される。

- (i) 電荷の保存則を用いて、Ampère の法則、すなわち、「ある閉曲線が囲む定常電流 I によって生じる磁場 \vec{B}/μ_0 をその閉曲線に沿って線積分すると、 I に等しい」を非定常電流の場合に一般化し、式 4 を導け。
 - (ii) ある瞬間に電流密度 \vec{j} が局所的に発生し、短時間で消滅したとする。その後の \vec{B} と \vec{E} はどのように変動するか。式 3 と 4 を用いて、直観的に説明せよ。
 - (iii) 電荷や電流の分布が無い場合、真空中を伝播する電磁波が存在することを導け。またその速度を、設問に与えられた量を用いて示せ。
3. 適当なスカラー場 (スカラーポテンシャル) ϕ とベクトル場 (ベクトルポテンシャル) \vec{A} を導入することにより、

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

と表せることを示せ。

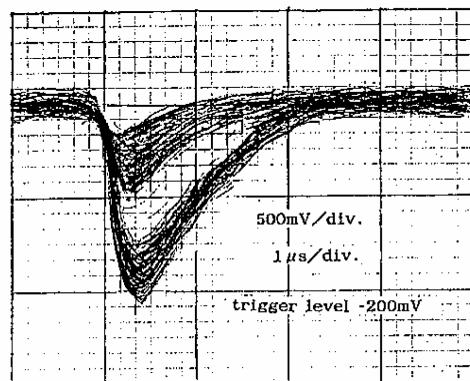
専攻 問題 4

電磁波は光速で伝わる波でありながら、粒子（光子）としても振る舞う。波長（またはエネルギー）帯によって、電磁波はいくつかの異なる名前で呼ばれ、またその検出法も異なる。

- 下の表にある A、B、C それぞれの電磁波（光子）について、対応する波長、周波数、エネルギーなどを求め、空欄を埋めた表を解答用紙に記せ。ただし、プランク定数は $h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{sec}$ 、光速度は $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ とする。

	波長	周波数	エネルギー	名称
A		80 MHz		
B	500 nm			
C		100 keV		

- 上の B 付近の周波数帯の光子を発生する現象を 1 つ挙げ、その基本過程を簡単に説明せよ。
- 実験室に、C のエネルギーを持った光子をランダムに発生する微弱な源がある。この光子を検出し、そのエネルギーを精度よく測定したい。この実験の全体の構成と、その中心となる検出器の原理を、図を用いて説明せよ。
- 上の実験あるいは他の精密測定を行なおうとしたところ、同じ建物のどこから来る、A の付近の周波数をもつた電磁波が、どうやらノイズとなって精密な測定を困難にしてるらしい。この電磁波の源となるべく早くつきとめたい。物理系の実験室によくあるような装置、あるいは簡単に製作または借用できるような道具だけを使って、この電磁波の源がどこにあるか探し出すような方法を考案し、説明せよ。複数の方法が考えられれば、それらを説明せよ。
- この源をつきとめたところ、それを停止または撤去することは不可能とわかった。この状況でなお、目的とする精密測定を実験室で行なうには、どのような対策を施せばよいか。具体的な方法と原理を説明せよ。
- 設問 5 で施した対策が効き、この電磁波からのノイズは抑えられた。そこで設問 3 の実験を再開したが、まだエネルギーの精密測定が困難であった。検出器からの信号をオシロスコープで多数重ねて見たところ、図のスケッチのように見えた。本来どのように見えるべきか、解答用紙にスケッチを示せ。またこの問題を引き起こしている原因として、どのようなものが考えられ、どんな対策がありうるか、列挙せよ。



図：オシロスコープで見た信号波形。

専攻 問題 5

1. 金属の内部に電場 \vec{E} が存在すると、 $\vec{i} = \sigma \vec{E}$ に従う電流密度 \vec{i} が生じる。ここで σ は導電率である。しかし $\vec{E} = 0$ の場合にも、金属内部の温度 T に勾配 $\text{grad } T$ が存在すると電子は高温部から低温部へ流れ、そのとき生じる電流密度は、 $\vec{i}_{th} = \kappa \sigma \text{grad } T$ と表される。この電流は熱電流、係数 κ は熱電能と呼ばれる。 κ は金属の種類ごとに異なるが、近似的には温度によらない定数とみなせる。以下の設問に答えよ。
- (i) 1種類の金属導線の両端に温度差 ΔT を与えても、持続的な電流は流れず、その代わりにその両端に熱起電力と呼ばれる電位差 ΔV が発生する。このときの ΔV と ΔT の関係を求めよ。また、この熱起電力が発生する理由を、電子の挙動を念頭において定性的に説明せよ。
 - (ii) 種類のことなる金属 (M と N) の導線を用いて図 1 のような閉回路を作り、それらの金属の接合部 P_1 と P_2 に温度差を与えると、この閉回路には持続的な電流が発生する。その理由を定性的に説明せよ。
2. 図 1 のような閉回路は、熱電対と呼ばれ、温度測定の素子として広く使われている。この素子を使った温度の測定法について、以下の設問に答えよ。
- (i) 図 1 の点 Q に、図 2 で示す回路の端子 Q₁、Q₂ を挿入することで、P₁ と P₂ の温度差を精度よく測定できる。ここで R は抵抗値の大きな標準抵抗、VR は可変抵抗、E は電池、G は検流計、A は電流計である。いま、P₁ を試料に接触させた状態で、VR を変化させて検流計を流れる電流をゼロに調整した。このとき電流計にながれる電流の値から、試料の温度と P₂ における温度との差が求められる。この測定法の原理と利点を述べよ。ただし、金属 M と N の組み合わせに対して、熱起電力と温度差との関係は既知とせよ。
 - (ii) いま、以上的方法で試料の絶対温度を求めたい。どうすればよいか、要点を概念図に基づいて説明せよ。
 - (iii) こうして測定した試料の温度の正しさを左右すると考えられる要因を列挙せよ。

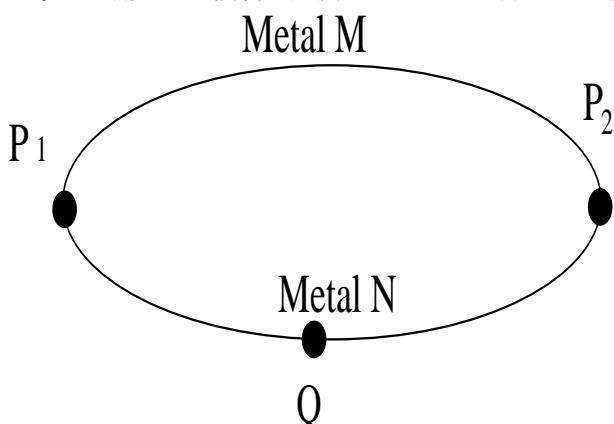


図 1：熱電対の概念図。

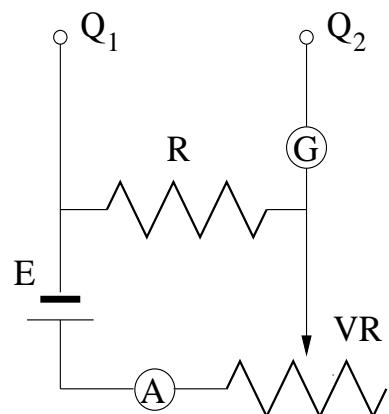


図 2：熱起電力の測定系の回路図。

専攻 問題 6

真空中では点電荷の間の静電相互作用はクーロンの法則に従うので、互いに 3Å 離れた一価の電荷の間には、約 460 kJ/mol(= 110 kcal/mol) の静電エネルギーが働く。しかし核酸やタンパク質などの生体分子は水中に存在するので、()のために、静電エネルギーは真空中の約 1/80 に減少する。また生理的条件下では、水中に多くの電解質イオンが存在するため、静電ポテンシャルはこれらの遮蔽効果により、さらに減少する。Debye-Hückel の理論によれば、このようなイオンの遮蔽効果を考慮したとき、位置 r における静電ポテンシャル $\phi(r)$ は

$$\nabla^2 \phi(r) = -\frac{1}{\epsilon} \sum_i n_i Z_i q \cdot \exp\left[-\frac{Z_i q \phi(r)}{kT}\right] \quad \cdots (1)$$

で与えられる。ここに和は異なるイオン種についてとるものとし、 ϵ は電解質溶液の誘電率、 q は素電荷、 k は Boltzmann 定数、 T は絶対温度、そして n_i と Z_i はそれぞれ第 i 種イオンの濃度（数密度）と電荷数（イオン価）を表す。以下の問い合わせに答えよ。

1. 上の()の中を埋めよ。
2. 上の式 (1) は、Poisson-Boltzmann の方程式と呼ばれる。この式はどのようにして導かれるかを説明せよ。
3. 静電エネルギーが熱エネルギーよりも十分に小さいときは、式 (1) は線形微分方程式

$$\nabla^2 \phi(r) = \kappa^2 \phi(r) \quad \cdots (2)$$

で表されることを示せ。ただし $\kappa^2 \equiv (q^2/\epsilon kT) \sum_i n_i Z_i^2$ とする。

4. 原点に電荷数 Z_0 の中心イオンをおき、他のイオンはその周りに球対称に分布していると仮定したとき、式 (2) の解を求めよ。またイオン濃度をゼロに近づけたとき、その解はどのようになるか。ただし、各イオンの大きさは無視できるほど小さいとする。
5. 設問 4 で、イオン濃度がゼロのときの静電ポテンシャルを $\phi_0(r)$ とする。 $\phi(r)$ が $\phi_0(r)$ の $1/e$ ($e = 2.7183..$) となるときの r を Debye 長（またはイオン雲団気の厚さ）という。温度が 25°C で、イオン強度 ($= \frac{1}{2} \sum_i n_i Z_i^2$) が生理的条件下の値 $8.4 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ (= 0.14 mol/liter) に等しい電解質の Debye 長を求めよ。ただし水溶液の誘電率を $\epsilon = 7.0 \times 10^{-10} \text{ Fm}^{-1}$ とし、 $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ および $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ を、用いてよい。
6. 二本の鎖よりなる DNA は、負に帯電したリン酸基をもち、リン酸基どうしの間隔は約 10Å である。これらの電荷が水溶液中のイオンにより遮蔽されることは、DNA の二重螺旋構造を安定化する上で重要である。いま DNA 水溶液中のイオン強度を生理的条件下の値よりさらに小さくしていったとき、DNA が熱融解する温度は、どのように変化すると期待されるか。理由を付して述べよ。
7. 簡単な Debye-Hückel の理論だけでは、核酸やタンパク質など生体分子のもつ立体構造の安定性を、定量的に説明できないことが知られている。これらの生体分子の立体構造安定性に大きく寄与している他の要因を二つ以上あげ、それらについて知るところを述べよ。

専攻 問題 7

高分子の稀薄溶液をごく少量だけ、試験管に入れた溶媒の上に静かに積層する。高分子は重力により試験管の底に向かって沈降を始めるが、十分に時間がたつと、試験管内の全体に一様な濃度で分布するようになる。これは高分子が熱運動する溶媒分子との衝突により、重力よりはるかに大きな揺動力を受けるためである。しかし、試験管を高速に回転するなどして、実効的に重力加速度の大きさを非常に大きくすると、高分子の濃度分布は一様ではなくなり、試験管の上部では薄く、底部では濃くなる。この現象から、高分子の分子量を求めることができる。問題を簡単にするために、一定で強い実効重力加速度 g が鉛直下向きに働くとして、以下の設問に答えよ。ただし高分子は球形をもつとし、高分子の分子量を M 、アボガドロ数を N_A をとする。

1. まず最初に、熱運動する溶媒分子との衝突により高分子が受ける揺動力を無視した場合を考える。
 - (i) 個々の高分子には、重力、浮力、およびストークスの法則による速度に比例した粘性抵抗力（比例定数 β ）が働く。1個の高分子に対する運動方程式を求めよ。ただし、注目している高分子の液面からの距離 x を（下向きを正とする）比容（単位質量の物体が占める体積）を V 、溶媒の密度を ρ とする。また稀薄溶液であることから、注目している高分子が他の高分子から受ける浮力は無視できる。
 - (ii) 粘性抵抗力が大きいために、高分子は一定の速度 s で試験管の底部に向かって沈降する。沈降速度 s を求めよ。
2. 次に、揺動力を考慮した場合を考える。この場合、高分子は重力により沈降すると同時に、揺動力により拡散する。拡散により単位時間に単位面積を法線方向に通過する高分子の数は、その方向の濃度勾配の大きさに比例する。その比例定数が高分子の拡散定数 D である。
 - (i) 液面から x の距離にある水平な単位面積を、試験管の上部から底部に向かって単位時間に通過する高分子の数 $j(x, t)$ を求めよ。ただし、 x の位置での高分子の濃度は $C(x, t)$ である。
 - (ii) 高分子の濃度 $C(x, t)$ の時間変化とその流れ $j(x, t)$ との関係を求めよ。
 - (iii) 設問 (i),(ii) の結果から、高分子の沈降現象を記述する方程式を求めよ。
 - (iv) 十分に時間が経つと、試験管内での高分子の濃度分布は時間に依存しない定常状態に達する。その理由を定性的に説明せよ。
 - (v) 定常状態に達したとき、 $x = x_1$ での濃度 C_1 と $x = x_2$ での濃度 C_2 の比 C_1/C_2 を測定すると、沈降速度と拡散定数の比 s/D が求められることを示せ。
 - (vi) 拡散定数 D と粘性係数 β は、AINSHUTAIN の関係式 $D = k_B T / \beta$ で結ばれている。ただし k_B はボルツマン定数、 T は溶液の温度である。 s/D から生体高分子の分子量 M が求められることを示せ。

専攻 問題 8

金属中の電子には、固体内をほぼ自由に動き回る価電子と、原子核近傍に局在する内殻電子がある。このうち価電子の状態を、自由電子模型により近似する。温度が十分低いとして、以下の問い合わせよ。

1. 価電子の状態を特徴づける物理量に、フェルミエネルギー ϵ_F がある。自由電子模型において、 ϵ_F がどのような物理的理由で決まるかを説明し、 ϵ_F と電子密度 n の関係式を導け。
2. ナトリウム(Na)の ϵ_F を eV 単位で概算せよ。ただし一価金属である Na(平均原子量 23) の比重は 0.97 であり、計算には以下の数値を用いても良い。

$$\frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529 \text{ Å} \quad \frac{me^4}{\hbar^2} = 27.2 \text{ eV}$$

ここで m, e はそれぞれ電子の質量と素電荷である。また、アボガドロ数は $6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ である。

適当な入射エネルギーで金属固体に打ち込まれた陽電子は、短時間に運動エネルギーを失って静止した後、電子と対消滅を起こす。このとき放出される 2 個の光子 (γ 線) の角度分布から、価電子の運動量分布についての情報が得られる。以下では、この陽電子消滅実験の原理について考えよう。

3. 陽電子が金属中で運動エネルギーを失う理由として、どのようなものが考えられるか。重要と思われる理由を 3 つあげよ。
4. 静止した陽電子が速さ v の電子と対消滅する場合、2 つの光子は重心系では正反対の方向に放出されるが、実験室系では 180 度から $\Delta\theta$ だけずれた方向に放出される。重心系で電子の初速度方向と光子(光速を c とする)の放射方向のなす角を θ としたとき、 $v, \Delta\theta, \theta$ の関係式を、 $\frac{v}{c} (\ll 1)$ の 1 次の精度で求めよ。
5. $\Delta\theta$ を測定することによって、金属のフェルミエネルギーを知ることが出来る。その理由を説明せよ。
6. 実際の金属には内殻電子もあるが、金属中に陽電子を打ち込んでも、上の方法で内殻電子に関する情報を得ることは難しい。その理由を簡単に説明せよ。

専攻 問題 1 解答

1. Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E\psi(x) \quad (|x| < a)$$

$$\psi(a) = \psi(-a) = 0$$

を解けばいい。解は、 $n=1,2,\dots$ として、

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) & n : \text{奇数} \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) & n : \text{偶数} \end{cases}$$

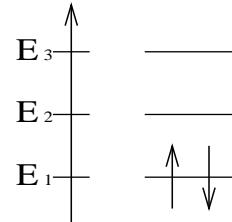
$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{8ma^2}$$

となる。

2. 「電子の入れ換えに対し、波動関数が反対称である」という条件。

3. 右図のように下から 2 つの電子をつめればエネルギー固有値最小。

$$E_{total} = E_1 + E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{4ma^2}$$



さて、波動関数は軌道の波動関数とスピンの波動関数との積であり、 $\psi_{total}(1,2) = \psi_{orbit}\psi_{spin}$ のようにかく。今は、

$$\psi_{orbit} = \psi_1(x_1)\psi_1(x_2) = \frac{1}{a} \cos\left(\frac{\pi x_1}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi x_2}{2a}\right)$$

で、電子の入れ換えに対し対称である。すると設問 2 の条件から ψ_{spin} は反対称でなくてはならない。よって、

$$\psi_{spin} = \frac{1}{\sqrt{2}}[u_\uparrow(1)u_\downarrow(2) - u_\downarrow(1)u_\uparrow(2)]$$

とわかる。

まとめると、

$$\psi_{total}(1,2) = \frac{1}{a} \cos\left(\frac{\pi x_1}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi x_2}{2a}\right) \frac{1}{\sqrt{2}}[u_\uparrow(1)u_\downarrow(2) - u_\downarrow(1)u_\uparrow(2)]$$

さて、合成スピン（大きさ S 、z 成分 S_z ）の波動関数は、

$$\begin{array}{ll} S = 1(\text{対称}) & S = 0(\text{反対称}) \\ S_z = 1 & u_\uparrow(1)u_\uparrow(2) \\ S_z = 0 & \frac{u_\uparrow(1)u_\downarrow(2) + u_\downarrow(1)u_\uparrow(2)}{\sqrt{2}} \\ S_z = -1 & u_\downarrow(1)u_\downarrow(2) \end{array}$$

表 1: 合成スピンの波動関数

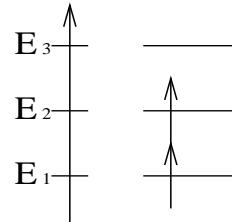
なので、今の ψ_{spin} は $S = 0, S_z = 0$ の固有関数。

$$S^2\psi_{total}(1,2) = 0(0+1)\psi_{total}(1,2) = 0$$

より、

$$\langle S^2 \rangle = 0$$

4. たとえば右図のように E_1 の所に電子 1 つ、 E_2 の所に電子 1 つのときである。 ψ_{total} が反対称になるために、 ψ_{orbit} が対称で ψ_{spin} が反対称となるか、 ψ_{orbit} が反対称で ψ_{spin} が対称とならなければならない。 ψ_{spin} の対称性の可能性は表 1 のようであるので、あり得る ψ_{total} は次の 4 つとなる。



$$\begin{aligned}\psi(2a, 1, 1) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)]u_\uparrow(1)u_\uparrow(2) \\ \psi(2a, 1, 0) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)]\frac{1}{\sqrt{2}}[u_\uparrow(1)u_\downarrow(2) + u_\downarrow(1)u_\uparrow(2)] \\ \psi(2a, 1, -1) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)]u_\downarrow(1)u_\downarrow(2) \\ \psi(2s, 0, 0) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)]\frac{1}{\sqrt{2}}[u_\uparrow(1)u_\downarrow(2) - u_\downarrow(1)u_\uparrow(2)]\end{aligned}$$

ここで、 $\psi(*\#, *, *)$ の第一引数は系のエネルギーが下から * 番目で軌道部分の対称性が#(a は反対称、s は対称)をあらわし、第二引数は $S = *$ 、第三引数は $S_z = *$ をあらわす。

5. 設問 3 でもとめた $\psi_{total}(1, 2)$ は設問 4 の記法で $\psi(1s, 0, 0)$ とかける。

$$S_1^2\psi(1s, 0, 0) = S_2^2\psi(1s, 0, 0) = \frac{3}{4}\psi(1s, 0, 0)$$

$$S^2\psi(1s, 0, 0) = 0$$

であるので、

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \psi(1s, 0, 0) = -\frac{3}{4}\psi(1s, 0, 0) \quad \cdots (1)$$

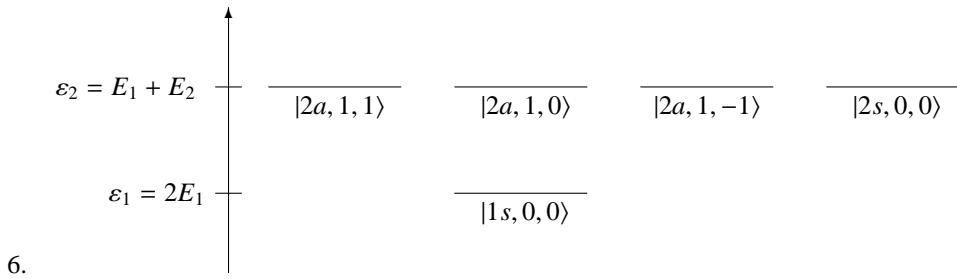
ここで $S^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) \cdot (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) = S_1^2 + S_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ より、

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = \frac{S^2 - S_1^2 - S_2^2}{2}$$

となることをもちいた。

$V = f\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \delta(x_1 - x_2)$ という摂動がかかったときの $\psi(1s, 0, 0)$ のエネルギー固有値の 1 次の変化 ΔE_{total} は

$$\begin{aligned}\Delta E_{total} &= \langle 1s, 0, 0 | V | 1s, 0, 0 \rangle \\ &\stackrel{(1)}{=} -\frac{3}{4}f\langle 1s, 0, 0 | \delta(x_1 - x_2) | 1s, 0, 0 \rangle \\ &= -\frac{3}{4}f \int dx_1 dx_2 \psi_1(x_1)^2 \psi_1(x_2)^2 \delta(x_1 - x_2) \\ &= -\frac{3}{4}f \int_{-a}^a dx \psi_1(x)^4 \\ &= -\frac{3}{4}f \frac{1}{a^2} \int_{-a}^a dx \cos^4\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \\ &= -\frac{9f}{16a}\end{aligned}$$



以上 5 つの状態ベクトルがどのように混ざるか考える。

$$\begin{aligned} \langle 2a, *, * | V | *, *, * \rangle &= \underbrace{\langle *, * | f \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 | *, * \rangle}_{\text{スピン部分}} \\ &\quad \int dx_1 dx_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)]}_{x_1=x_2 \neq 0} \\ &\quad \delta(x_1 - x_2) \underbrace{g(x_1, x_2)}_{\text{適当な関数}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 2s, 0, 0 | V | 1s, 0, 0 \rangle &= \langle 0, 0 | f \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 | 0, 0 \rangle \\ &\quad \int dx_1 dx_2 \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)] \\ &\quad \psi_1(x_1)\psi_1(x_2)\delta(x_1 - x_2) \\ &= \sqrt{2} \langle 0, 0 | f \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 | 0, 0 \rangle \int_{-a}^a \psi_1(x)^3 \psi_2(x) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}f}{a^2} \langle 0, 0 | \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 | 0, 0 \rangle \int_{-a}^a \underbrace{\cos^3\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}_{\text{奇関数}} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、以上 5 つの状態ベクトルから異なる 2 つを選んだ時、その行列要素 (V をはさんだもの) が 0 となるので、以上の 5 つの状態は V によって混ざらない。

専攻 問題 2 解答

1. (i) $T \rightarrow 0$ では $J > 0$ より、すべての磁気モーメントが同じ向きを向く。向いでは磁場の向き $T \rightarrow \infty$ では、バラバラの向きを向く。
(1 と -1 は同じ数)
- (ii) 全エントロピーは場合の数を W とすると $S = k \ln W$ より、 N 粒子とすると $T \rightarrow 0$ では状態は一つに定まり $S = 0$ 。よって、 $\frac{S}{N} = 0$
 $T \rightarrow \infty$ では、Sterling の公式を用いて（但し N は十分大とする。）

$$S = \ln_N C_{\frac{N}{2}} = k \left(\ln N! - 2 \ln \left(\frac{N}{2}! \right) \right) \simeq Nk \ln 2$$

$$\text{よって } \frac{S}{N} = k \ln 2$$

- (iii) $F = U - TS$ を最小にする状態が実現され、各々の極限でどうなるか考える。
 $T \rightarrow 0$ では $F \approx U$ でエネルギーつまり H の期待値を小さくすればよい。

$$H = -J \sum \sigma_i \sigma_j - h \sum \sigma_i$$

なので第 1 項は σ_i と σ_j が同じ方（積が 1）小さくなり第 2 項は h と σ_i が同じ方（積が 1）が小さくなるので H を小さくするには全部同じ向きで、 h の方向だと最小になる。

$T \rightarrow \infty$ では、 $F \simeq -TS$ となり、 S が大きくなるとよい。

$S = k \ln W$ （但し W は場合の数）で W が最大でが求める解であり、これは、1 と -1 が同じ数がでてくるバラバラの状態である。

2. (i)

$$H(\sigma_0) = (-6Jm - h)\sigma_0 \quad \cdots (1)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \langle \sigma_0 \rangle &= \frac{\sum_{\sigma_0=\pm 1} \sigma_0 e^{-\beta H(\sigma_0)}}{\sum_{\sigma_0=\pm 1} e^{-\beta H(\sigma_0)}} = \frac{e^{-\beta H(\sigma_0)} - e^{+\beta H(\sigma_0)}}{e^{-\beta H(\sigma_0)} + e^{+\beta H(\sigma_0)}} \\ &= \tanh(-\beta H(\sigma_0)) = \tanh(\beta(6Jm + h)) = \tanh \frac{6Jm + h}{kT} \end{aligned}$$

- (ii) $\langle \sigma_0 \rangle = m$ より

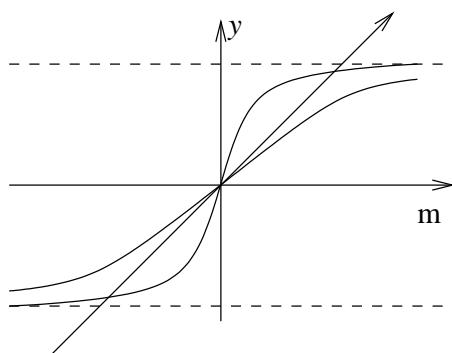
$$m = \tanh \frac{6Jm + h}{kT}$$

である。

- (iii) $h = 0$ より

$$\begin{cases} y = m \\ y = \tanh \frac{6Jm}{kT} \end{cases}$$

の交点が m の解である。



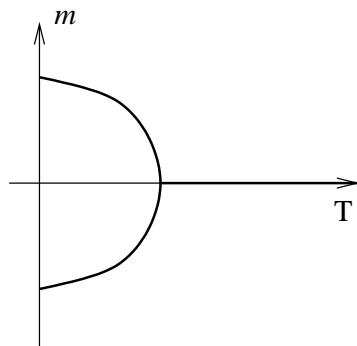
ある T_c を境に $m \neq 0$ の解が現れる。

$T_c < T$ で $m = 0$

$T \rightarrow 0$ では $\tanh \frac{6Jm}{kT} \rightarrow \pm 1$ より

$m \rightarrow \pm 1$

よってグラフは右のようになる。



(iv) (ii) より、 $h = 0$ に対して、 $m \neq 0$ なる解が存在する。 $T = T_c$ では、 $\tanh 6\beta Jm$ の $m = 0$ における傾きが 1 なので、

$$T_c = \frac{6J}{k_B}$$

である。

専攻 問題 3 解答

1. (i) 中空の空間には電荷が存在しない ($\rho = 0$) ので、1 より $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ 。

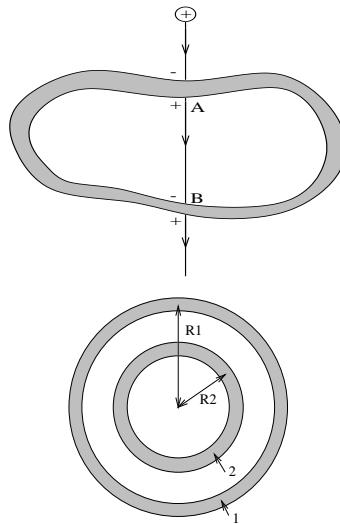
従って、中空の空間には電場の湧き出しやすいこみがなく、中空の空間に電場が侵入するとすれば、電気力線は右図のように導体内側表面の 2 点 A、B を結ぶことになる。

すると、2 点 A、B の間に電位差が生じることになるが、これは導体の各部分の電位が等しいことに反する。

よって、中空の空間には電場は侵入できない。

(ちなみに、導体の各部分の電位が等しいことは、電荷の移動が終了した状態では導体内部に電場が存在しないということから結論される)

- (ii) (i) より、導体球 1 の中空の空間には電場が侵入できないので、導体球 1 と導体球 2 の電位は等しいはずである。よって、導体球の外に置いた電荷の位置や量を変えても、導体球 1 と 2 の間の電位差が常に 0 であることを確かめればよい。



2. (i) S を任意の閉曲面、 V を S の内部の領域として、電荷保存則は

$$\int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad \cdots (1)$$

定常電流の時は

$$\int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = 0$$

が成立するが、非定常電流の時は

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{d}{dt} \int_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_S \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \quad \cdots (2)$$

2 を 1 に代入して

$$\int_S \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS = 0$$

が成立する。

従って、定常電流のときの Ampère の法則

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{r} = \mu_0 \int_{S'} \vec{j} \cdot \vec{n} dS \quad \cdots (3)$$

を非定常電流の場合に一般化するには、

$$\vec{j} \rightarrow \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

と置き換えて、

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_{S'} \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS \quad \cdots (4)$$

とすればよい。Stokes の定理より

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{S'} \nabla \times \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

であるから、4 は

$$\int_{S'} \nabla \times \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_{S'} \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS$$

となる。 S' は任意なので

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

これで、4 が導かれた

- (ii) 局所的な \vec{j} が一瞬生じると、4 によって近傍に \vec{B} が生じ、 \vec{B} の変化があるので 3 によって近傍に \vec{E} が生じ、 \vec{E} の変化があるので、再び 4 によって近傍に \vec{B} が生じる
 \vec{j} が消滅した後も、引き続き 3,4 によって \vec{E}, \vec{B} の変化がそれぞれ近傍に \vec{E}, \vec{B} を生むので、電磁波のパルスが空間を伝わっていく。

- (iii) $\rho = 0, \vec{j} = 0$ のとき、Maxwell 方程式は

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \cdots (5)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \cdots (6)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \cdots (7)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \cdots (8)$$

となる。7 の rot をとると

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

を使って

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B})$$

これに 5,8 を代入すると

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \cdots (9)$$

が得られる。同様に 8 の rot をとれば

$$\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \cdots (10)$$

が得られる。

9,10 は波動方程式であるから、電磁場の存在が示された。位相速度は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

である。

- (iv) $\operatorname{div} \operatorname{grad} = 0$ であるから、2 より

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \cdots (11)$$

なるベクトル場 \vec{A} が存在することが分かる。

11 を 3 に代入すると

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

ところが $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$ であるから

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \phi$$

なるスカラー場 ϕ が存在することが分かる。

専攻 問題 4 解答

1. 波長 λ と周波数 ν とは、 $c = \lambda\nu$ の関係にある。そして、エネルギー E は $E = h\nu$ から計算できる。

	波長	周波数	エネルギー	名称
A	3.75 [m]	80 [MHz]	3.2×10^{-7} [eV]	超短波
B	500 [nm]	600 [THz]	2.4 [eV]	可視光
C	12 [pm]	2.5×10^{19} [Hz]	100 [keV]	γ 線

[補足] B は電波と書けば充分かもしれない。折角なので理科年表から国際電気通信条約無線規則による電波の名称を挙げておこう。

波長 [m]	$10^{-4} \sim$	$10^{-3} \sim$	$10^{-2} \sim$	$0.1 \sim$	$1 \sim$	$10 \sim$	$100 \sim$	$10^3 \sim$	$10^4 \sim$	$10^5 \sim$
名称	サブミリ	ミリ	センチ	極超短	超短	短	中	長	超長	
略号	EHF	SHF	UHF	VHF	HF	MF	LF	VLF		

UHF, VHF はテレビをアンテナに繋ぐときに良く聞くでしょ？でも H って何の略なんだろう？

2. 可視光を発する現象を挙げればよい。もちろんいろいろある。

•白熱球

電流により加熱されたフィラメントの熱放射による発光。

•蛍光灯

蛍光管中を流れる電子によって励起されたガスの蛍光により蛍光管の内側に塗られた蛍光体が励起されて起きる発光。フォトoluminescence の一つ。

•発光ダイオード

順バイアスで生じる、正孔と電子の結合によって励起状態になった原子が基底状態に戻るときの発光。エレクトロルミネッセンスの一つ。

•可視光レーザー

離散的な準位を持つ系で、周りからエネルギーを与え、電子を励起させる。励起した電子が低いエネルギー状態に移るととき、そのエネルギー差に相当する周波数の光を放出する。

•Na ランプ

ランプの中に Na などの薄い蒸気を入れておく。ランプのフィラメントから発生する熱電子を電場を掛けて加速する。熱電子がある一定のエネルギー以上になって Na 原子に当たると束縛電子が励起される。その電子が再び基底状態に落ちるときに可視光領域の光を放つ。

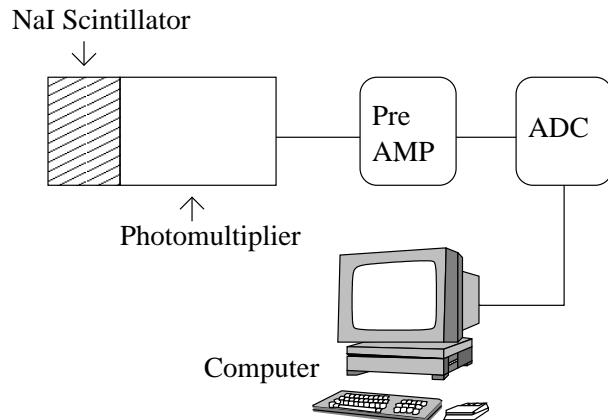
3. 計測したい電磁波は γ 線であり、光源は微弱であり、しかもそのエネルギーを精度よく測定したいから、NaI シンチレーターなどを用いるのがよい。

•NaI シンチレーターの原理

NaI は Na の結晶に微量の Tl を混入する。Tl がイオン化によって生じた電子を捕え、その電子が励起状態から基底状態に落ちるときに発光する。

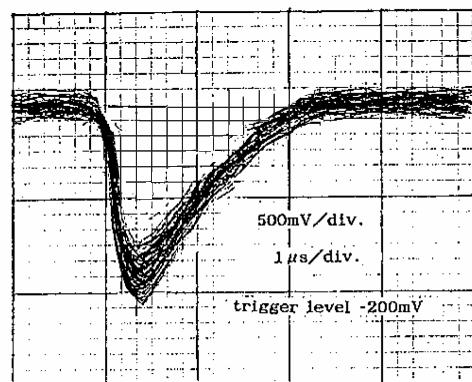
•実験の全体の構成

シンチレーターでの発光を光電子増倍管に入れる。フォトカソードに当たった光子は 10~20% の効率で光電子を放出する。管内の電場で加速された光電子は第 1 段のダイノードに衝突し、入射電子 1 個に対して 3~4 個の電子を光電効果により叩き出す。以下、この過程を繰り返し、ダイノードが 14 個あるとすれば、最終的にはだいたい 2×10^8 に増幅された電子パルスを得る。この電子パルスを AMP に通して ADC に入力して、その出力を computer に入力する。



4. いわゆる「電波」なのでアンテナを作ればよい。適当なコードやケーブル、つまり電線をぐるぐる巻いてループアンテナを作るのがよいと思われる。波長が数メートルなので直径 30cm ぐらいで 10 回ぐらい巻けば十分実用性がある。ループアンテナだと軸方向に指向性があるので電波源を探すのに都合が良い。アンテナからの出力は、ダイオードで整流して電流計につなぐか、オシロスコープでみる。電波が微弱であるときは整流して平滑してオペアンプで増幅されれば良い。
5. 実験室を金属で覆い静電遮蔽すれば良い。電磁波の波長より短い金網で十分である。もしも、電波源が小さいのであればそれ自体を覆った方が楽である。実験室と同じ建物内といっているのだから、コンピュータであろうが、ノイズがテレビの電波であったりして、偏光方向が分かっているのなら、全てを覆わなくても、偏光方向に垂直になるように金属でスリットを作れば良い。テレビの電波は垂直に偏光しているので、波長よりも十分短い間隔で水平にスリットを作れば大体の電磁波は吸収できる。
6. 信号の多い箇所が 2 つある。ピークの高い方が γ 線の光電効果による吸収に相当し、低い方は主にコンプトン散乱で、後方散乱や自然放射線、除ききれなかったノイズもあるだろう。

コンプトン散乱によるパルスを除くには、ディスクリミネーターをフォトマルと ADC の間に入れると良い。ディスクリミネーターはスレッショルド以下の電圧の信号を除くので、スレッショルドの値を適切に調整すれば、光電効果によるパルスだけを取り出すことが可能である。光電ピークがぼけているのは γ 線自体の広がり、およびフォトマルに掛る電圧が十分安定していないことによる。十分にウォームアップさせて回路を安定化させることが第一の対策である。



図：オシロスコープで見た信号波形。

専攻 問題 5 解答

1. (i)

$$\vec{i} = \sigma \vec{E} + \kappa \sigma \operatorname{grad} T$$

より、電流が流れなくなったときに、導線には

$$\vec{E} = -\kappa \operatorname{grad} T$$

の電場が生じていると考えて、

$$\Delta V = \int E dx = \int -\kappa \operatorname{grad} T = \kappa \Delta T$$

従って、

$$\Delta V = \kappa \Delta T$$

の熱起電力が生じる。

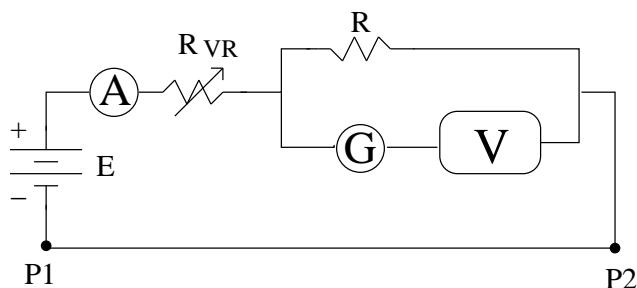
次に熱起電力が発生する理由を、電子の挙動を考慮して説明する。

温度勾配によって電子が高温側から低温側に流れるために電流が生じる。そのために電子が低温側に集まり、それらの電子による電場(高温 → 低温)が生じる。この電場は電子を高温側に戻す方向にできるため、ある程度低温側に電子が行くと、それ以上低温側に電子が流れなくなる。そのときの電子密度差による電場で熱起電力が発生する。

- (ii) 前問の議論から、金属が違えば熱起電力が異なることは明らかである。従って、2つの金属の熱起電力の電位差を打ち消すために定常電流が流れていなければならない。

2. (i) •原理

測定回路を書き直しておく。



図の V は金属導線 M,N による熱起電力差である。熱起電力と温度との関係は既知であるから V が分かれば良い。いま、検流計に流れる電流が 0 になるように可変抵抗を調節すれば、電流計で電流 i を計ることで $V = Ri$ の関係より熱起電力差が求められる。

•利点

- 電流計の値を読むだけで測定が行えるので簡単かつ正確。(可変抵抗の値や、金属 M,N の抵抗値が分からなくても良い。)
- 热電対に電流が流れないで、热電対にジュール熱が発生せず、試料の温度が変化しにくい。
- 電流計を流れる電流を I、検流計を流れる電流を i とする。また、熱電対の金属 M の抵抗値を r_M 、金属 N の抵抗値を r_N 、測定したい熱電対の電位差を V_{th} とおくと、

$$V_{th} = R(i + I) + (r_M + r_N)i$$

より R が十分大きいので、

$$\left| \frac{r_M + r_N}{R} \right| \ll 1$$

$$i \rightarrow i + \Delta i, I = 0 + \Delta I$$

としたとき、

$$V_{th} \sim Ri + R(\Delta i + \Delta I)$$

従って、誤差が評価しやすい。

– R が十分大きいので導線による電圧降下が無視できる。また、電流も小さくなるので回路で熱が発生しにくい。

(ii) T_1 を既知の温度にしておけば良い。(例えば水の 3 重点)

(iii) • 抵抗 R の精度

• 検流計と電流計の精度

• 試料と熱電対の断熱の具合い。(等温になっていなければならない。)

専攻 問題 6 解答

1. 水の誘電分極
2. 位置 r の静電ポテンシャルは $\phi(r)$ だから、この点でイオンが電荷 $Z_i q$ を持つ確率は Boltzmann 分布

$$e^{-Z_i q \phi(r) / kT}$$

に従う。それゆえ、位置 r での第 i 種イオンの密度は

$$n_i \exp\left[-\frac{Z_i q \phi(r)}{kT}\right]$$

となる。それゆえ、電荷密度は

$$\rho(r) = \sum_i n_i Z_i q \exp\left[-\frac{Z_i q \phi(r)}{kT}\right].$$

これと Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi(r) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon}$$

より、今 Poisson-Boltzmann 方程式

$$\nabla^2 \phi(r) = -\frac{1}{\epsilon} \sum_i n_i Z_i q \exp\left[-\frac{Z_i q \phi(r)}{kT}\right]$$

を得る。

3. 溶液全体は電気的に中性だから、

$$\sum_i n_i Z_i q = 0.$$

となる。さらに、

$$\left| \frac{Z_i q \phi(r)}{kT} \right| \ll 1$$

となることに注意して、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(r) &\approx -\frac{1}{\epsilon} \sum_i n_i Z_i q \left[1 - \frac{Z_i q \phi(r)}{kT} \right] \\ &= -\frac{1}{\epsilon} \sum_i n_i Z_i q + \frac{q^2}{\epsilon k T} \phi(r) \sum_i n_i Z_i^2 \\ &= \frac{q^2}{\epsilon k T} \sum_i n_i Z_i^2 \phi(r) \\ &= \kappa^2 \phi(r) \end{aligned}$$

を得る。

4. 球対称であるから、 $\phi(r) = \phi(r)$. この時、方程式は

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right)$$

を使って

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = \kappa^2 \phi(r).$$

一般に中性ではあっても媒質中を荷電粒子が運動する場合、周囲の電荷を引きずっているために余分に質量を纏っているように見える。これは電磁相互作用を運ぶ光子についても同様で、ポテンシャルは質量を持った光子によって媒介されるように見える。これは Yukawa 型相互作用だから、方程式を最初から解かずに、

$$\phi(r) = a \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

とおくことができる。ここで、 $a \propto Z_0, \alpha > 0$ である。これを方程式に代入すると、

$$aa^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r} = \kappa^2 a \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

$$a^2 = \kappa^2$$

$$\alpha = \kappa.$$

を得る。更に、上の述べた考察により、 $n_i \rightarrow 0$ のとき、イオンの衣による遮蔽効果は小さくなり、 $\phi(r)$ は Coulomb 相互作用に近づく。つまり、

$$\phi(r) \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Z_0}{r}.$$

であるから、これにより、

$$a = \frac{Z_0}{4\pi\epsilon}$$

がわかる。まとめると、

$$\phi(r) = \frac{Z_0}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-\kappa r}}{r}.$$

$n_i \rightarrow 0$ のとき、 $\kappa \rightarrow 0$ であって、

$$\phi(r) \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Z_0}{r}$$

となり、Coulomb 相互作用になる。

5. 上の考察から、

$$\phi_0(r) = \frac{Z_0}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r}$$

$$\phi(r) = \frac{Z_0}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

$$\frac{\phi(r)}{\phi_0(r)} = e^{-\kappa r}.$$

それゆえ、Debye 長は

$$r_D = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{\frac{q^2}{\epsilon kT} \sum_i n_i Z_i^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2q^2}{\epsilon kT}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_i n_i Z_i^2}}$$

$$\approx 8.18 \times 10^{-10} \approx 8.2 \text{ Å}$$

6. イオン強度を下げていくと

$$r_D \propto \frac{1}{\sqrt{\text{イオン強度}}}$$

であるから、 r_D は大きくなる。ここで、生理条件下では $r_D \approx 8.2 \text{ Å}$ で、DNA のリン酸基の間隔は 10 Å 程度であるから、イオン強度を下げていくと容易に Debye 長は 10 Å よりも大きくなり、互いに反発力を及ぼし、DNA は不安定になる。それゆえ、DNA が熱融解する温度は下がると期待される。

7. •イオンの大きさ

Debye-Hückel の理論ではイオンの大きさを無視して方程式を解いたが、実際はイオンは数Å程度の大きさを持つのでイオンの占めることができるは空間的領域は制限される。

•熱力学的要素

Debye-Hückel の理論はイオン同士の静電エネルギーのみを考慮したが、実際はエントロピーとエネルギーの兼ね合いによって構造が決まる。つまり、Gibbs 自由エネルギーが最小になるように原子が配置される。

•水素結合、van der Waals 相互作用

分子を構成している原子間の電気陰性度の差により偏極がおこり、そのために水素結合や van der Waals 力が働き立体構造を変化させる。なお、この力は分子を構成する原子のうち、互いに接近した組に対して働く。

専攻 問題 7 解答

1. (i) 1 個の高分子は図 1 の様に力を受けるので、運動方程式は

$$m\ddot{x} = \underbrace{mg}_{\text{重力}} - \underbrace{\beta\dot{x}}_{\text{抵抗}} - \underbrace{\rho\mu g}_{\text{浮力}}$$

となる。ただし、

$$m : \text{高分子 1 個の質量} = \frac{M}{N_A}$$

$$\mu : \text{高分子 1 個の体積} = mV = \frac{MV}{N_A}$$

で、これを上の式に代入すると

$$\frac{M}{N_A}\ddot{x} = \frac{M}{N_A}g - \beta\dot{x} - \rho g \frac{MV}{N_A} \quad \cdots (1)$$

となり、これが答え。

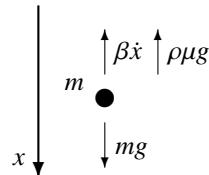


図 30: 高分子の受ける力

(注)...単位系は CGS 単位系を考えた。(すると、 N_A 個で質量 $M[\text{g}]$ となり上の様な式になる)。もし MKS 単位系にしたいならば、 M の代わりに $M/1000$ とすれば良い。

- (ii) $\dot{x} = s(\text{一定})$ の時、 $\ddot{x} = \dot{s} = 0$ より式 (1) は

$$0 = \frac{M}{N_A}g - \beta s - \rho g \frac{MV}{N_A} = \frac{Mg(1 - \rho V)}{N_A} - \beta s \quad \text{となる。よって、}$$

$$s = \frac{Mg(1 - \rho V)}{\beta N_A} \quad \cdots (2)$$

となり、これが答え。今回の問題では「試験管の上部では薄く、底部では濃くなる」とあり、 s は正の値だとわかるので、以下 s が正であるとする。

2. (i) $j(x, t)$ の符号が正となる向きと、 D が正の定数であることを踏まえて、(濃度の高い方から低い方へ拡散は起きる)

$$j(x, t) = \underbrace{sC(x, t)}_{\text{上から流れて来る分}} - \underbrace{D \frac{\partial}{\partial x} C(x, t)}_{\text{拡散して広がる分}} \quad \cdots (3)$$

- (ii) 粒子数保存より

$$\frac{\partial}{\partial t} C(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} j(x, t) = 0 \quad \cdots (4)$$

(マクスウェル方程式から出る電荷保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} j = 0$$

の 1 次元バージョン)

(iii) 式(4)の $j(x, t)$ に式(3)を代入すると (s は x や t に依らない定数),

$$\frac{\partial}{\partial t} C(x, t) + s \frac{\partial}{\partial x} C(x, t) - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} C(x, t) = 0 \quad \cdots (5)$$

となりこれが答え。

(iv) 高分子が重力によって下へ落ちてゆくため、時間が経つごとに上の方は濃度が低くなつて下の方は濃度が高くなつてゆき、上と下で濃度差が広がつてゆくが、濃度差があると拡散が起きて高濃度の方から低濃度の方へ高分子が流れてゆくので幾らかの高分子は上へ戻される。濃度差が大きくなると上の高分子の数が減るので下に落ちる量が減るのでに対し、拡散は濃度差が大きいほど強くなるので上に戻される量が増えるので、ある濃度差になった時点で收支が平衡状態となり、そこで定常状態となる。

(v) 定常状態の時 $\frac{\partial}{\partial t} C(x, t) = 0$ より、 $C(x, t) = C(x)$ として、式(5)は

$$sC'(x) - DC''(x) = 0 \quad (\text{'} \text{ は } x \text{ に関する微分})$$

となる。 $C'(x) \equiv f(x)$ として、前の式は

$$f'(x) = \frac{s}{D} f(x)$$

となるので、これを解くと

$$f(x) = A' e^{\frac{s}{D} x} \quad (A' \text{ は適当な定数})$$

となり、これを x で積分すると

$$C(x) = A e^{\frac{s}{D} x} + B \quad (A, B \text{ は適当な定数})$$

となる。さて、この $C(x)$ を(3)式(3)に代入すると

$$j(x) = s(A e^{\frac{s}{D} x} + B) - D \frac{s}{D} A e^{\frac{s}{D} x} = sB$$

となるが、 $x=0$ は液面で上から高分子は流れてこないので、 $j(0)=0$ でないと $C(0)$ が減つてしまい、定常状態ではない。よって $sB = 0$ で $s \neq 0$ より $B = 0$ となる。

よって、 $C(x) = A e^{\frac{s}{D} x}$ なので、

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C(x_1)}{C(x_2)} = \frac{A e^{\frac{s}{D} x_1}}{A e^{\frac{s}{D} x_2}} = e^{\frac{s}{D}(x_1 - x_2)}$$

となり両辺 \log をとって、

$$\log \frac{C_1}{C_2} = \frac{s}{D}(x_1 - x_2) \quad \frac{s}{D} = \frac{\log \frac{C_1}{C_2}}{x_1 - x_2} \quad \cdots (6)$$

となるので、 C_1, C_2, x_1, x_2 がわかれば s/D が求められることがわかる。

(vi) $s = \frac{Mg(1-\rho V)}{\beta N_A}$, $D = \frac{k_B T}{\beta}$ より、

$$\frac{s}{D} = \frac{\frac{Mg(1-\rho V)}{\beta N_A}}{\frac{k_B T}{\beta}} = \frac{Mg(1-\rho V)}{N_A k_B T} \quad \text{となる。}$$

よって、

$$M = \frac{N_A k_B T}{g(1-\rho V)} \frac{s}{D} \quad \cdots (7)$$

となり、(7)式の右辺は s/D の他はすべて計測可能な量なので、 s/D がわかれば M が求められることがわかる。

専攻 問題 8 解答

1. 電子は本来金属イオンの作る周期場、他の電子からのクーロン力等により複雑な運動をするが、それらの電子を理想フェルミ気体として扱うのが金属に対する自由電子模型である。

電子は一辺 L の箱に閉じ込められているとする。シュレディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

境界条件は

$$\psi(0, y, z) = \psi(L, y, z) = 0 \quad (y \text{ と } z \text{ についても同様})$$

である。この解は

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

ただし、

$$k_x = 0, \pm \frac{2\pi}{L}, \pm \frac{4\pi}{L}, \dots \quad (k_y, k_z \text{ についても同様})$$

従って \mathbf{k} 空間の体積要素 $(\frac{2\pi}{L})^3$ 当たりにただ一つの状態が存在する。

さて、フェルミ分布関数は

$$f_r = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$

で与えられる。ここで電子の総数 N は、スピンの自由度による因子 2 も考慮に入れれば

$$N = \frac{2}{(\frac{2\pi}{L})^3} \int f_r d^3k = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int f_r d^3k$$

とできる。

いま、金属において自由電子模型ならば、室温程度は事実上の絶対零度となる。よって $T \rightarrow 0$ の極限をとる。この時

$$f_r = \begin{cases} 0 & \epsilon > \mu \\ 1 & \epsilon < \mu \end{cases}$$

ここで f_r が不連続になる μ をフェルミエネルギー ϵ_F と呼ぶ。

フェルミ波数 k_F を $\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$ によって導入すれば

$$\begin{cases} k < k_F \text{ で } f_r = 1 \\ k > k_F \text{ で } f_r = 0 \end{cases}$$

となるので、

$$\begin{aligned} N &= \frac{2V}{(2\pi)^3} \int f_r d^3k \\ &= \frac{2V}{(2\pi)^3} \int_{k < k_F} d^3k \\ &= \frac{2V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} k_F^3 \\ &= \frac{V k_F^3}{3\pi^2} \end{aligned}$$

よって

$$k_F = (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}} \quad (n = \frac{N}{V} : \text{数密度})$$

従って最終的に

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}$$

としてフェルミエネルギーが求まる。つまりフェルミエネルギーは電子の数密度によって決定される。

2. 1で求めた式に値を代入する。

$$n = \frac{\text{電子の個数}}{\text{体積}} = \frac{Na \text{ の個数}}{\text{体積}} = \frac{6.02 \times 10^{23}}{\frac{23\text{g}}{0.97\text{g/cm}^3}}$$

によって

$$k_F = (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}} = 0.91 \text{Å}^{-1}$$

よって

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar^2}{me^2} \right)^2 \frac{me^4}{\hbar^2} k_F^2 = 3.2 \text{ eV}$$

となる。

3. 理由として

- 金属原子核との弾性散乱
- 金属電子によるクーロン散乱
- 制動放射

が考えられる。

4. 対消滅後の光子のエネルギーを E_1, E_2 とする。4 元運動量保存の式を立てると

$$E_1 + E_2 = 2mc^2 \quad \cdots (1)$$

$$\frac{E_1}{c} \cos \theta - \frac{E_2}{c} \cos(\theta + \Delta\theta) = mv \quad \cdots (2)$$

$$\frac{E_1}{c} \sin \theta - \frac{E_2}{c} \sin(\theta + \Delta\theta) = 0 \quad \cdots (3)$$

ここで運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ は mc^2 に比べて十分に小さいので無視した。

$\Delta\theta \ll 1$ として

$$(2) \rightarrow E_1 \cos \theta - E_2 \cos \theta + E_2 \sin \theta \Delta\theta = mcv \quad \cdots (4)$$

$$(3) \rightarrow E_1 \sin \theta - E_2 \sin \theta - E_2 \cos \theta \Delta\theta = 0 \quad \cdots (5)$$

(4) $\times \sin \theta - (5) \times \cos \theta$ より

$$E_2 \Delta\theta = mcv \sin \theta \quad \cdots (6)$$

(4) $\times \cos \theta + (5) \times \sin \theta$ より

$$E_1 - E_2 = mcv \cos \theta \quad \cdots (7)$$

(1) と (7) より

$$E_2 = mc^2 - \frac{1}{2}mcv \cos \theta \quad \cdots (8)$$

(6) と (8) より

$$(mc^2 - \frac{1}{2}mcv \cos \theta) \Delta\theta = mcv \sin \theta \quad \cdots (9)$$

$v\Delta\theta$ の項は無視して、結局

$$\Delta\theta = \frac{v}{c} \sin \theta \quad \cdots (10)$$

となる。

5. $\Delta\theta = \frac{v}{c} \sin \theta$ において、ある θ に対する $\Delta\theta$ を測定できれば電子の速度 v が求まる。全ての θ に対して $\Delta\theta$ を測定していく求めた v の中で最大のものを v_{max} とするとフェルミエネルギー ϵ_F は $\epsilon_F = \frac{1}{2}mv_{max}^2$ となる。よって $\Delta\theta$ を測定することで金属のフェルミエネルギーを知ることが出来る。
6. 伝導電子や外殻の電子と遭遇し、そこで対消滅してしまうから。

1997年度

1997 年度 入学試験 一般教育科目

教育 英語

- 次の文章は、中国の李鵬首相によって 1996 年 4 月に行なわれた中国における科学技術の役割についての講演の一部である。この文章を読んで以下の設問 (i) および (ii) に答えよ。

It has been eighteen years since China started to reform and open up to the rest of the world. During this period, the national economy has been developing rapidly, with an average annual growth rate of 9%. Recently, the Chinese People's Congress passed the next 5-year plan and a 15-year long-term development plan. The economy should maintain its good momentum with an estimated growth rate of 7 to 8% during the next 5 years and about 7% in the next century. In order to sustain this growth, we are undergoing two transitions — from a planned economy to a market economy and from growth by increased development to growth by increased economic efficiency. In addition, we are using two strategies — building the country through science and education and through sustainable development. It will take international cooperation to achieve these objectives.

Why can't China do it alone? Because we have many problems. For example, we started to talk about 9-year compulsory education in 1985, but this goal has still not been achieved and will only be 85% complete by the year 2000. In some areas, we can only achieve 6-year compulsory education. In addition, development is not balanced across regions of China. Coastal areas are more advanced, but the middle and western regions are far behind. China still has 65 million people living in absolute poverty; the natural environments they inhabit are extremely poor. This is not to say that there is no future for development in the western regions. They have abundant underground resources, but exploiting them will depend on science, technology, and education, as well as government subsidies.

The biggest problem in China, however, is agriculture. China must use 7% of the world's arable land to feed 22% of the world's population and has a shortage of water resources as well. Currently, only one-third of China's cultivated land produces high-yields; the other two thirds produce medium or low yields. To develop agriculture, we need both practical techniques and high technology. For instances, the use of hybrid rice can increase yields by another 20% (after the most recent 15% increase); and with biological engineering, we have bred a new variety of cotton which is genetically resistant to bollworms, which have plagued our cotton production in recent years. Although China carries out a rather strict family planning policy, the population still increases by 13 million every year, and we must solve the problems of providing food, adequate living conditions, education, and employment for the increased population. I believe that science and technology can help us do so.

Meteorology is another field to which we pay special attention, because it is especially important to China to reduce the effect of natural disasters. China is a country with frequent floods and droughts. Generally in a five-year period, we have two years with good harvests, two with average harvests, and one with disaster. We have dredged rivers and watercourses, built dams, and planted trees to prevent floods. But droughts are more serious than floods in China. Solving this problem will depend on more efficient use of water resources. China also suffers typhoon attacks. Therefore, meteorology is very important to agriculture and people's lives. Accurate forecasts can reduce damage. We have established a national meteorological network and jointed up with worldwide networks; we have used large computers to do forecasts. Currently we can make 5 to 7 days' advanced forecasts.

Chinese industry has high energy consumption, low efficiency, high materials consumption and low product quality. These problems also need science and technology solutions. In addition, our government needs to correctly handle the relation between basic research and applied science. Because applied science can increase productivity, it has been viewed as important by society. However, basic research is also important; its development can bring about breakthroughs. China is a developing country and cannot afford to spend a lot of money on basic research. But the government does appropriate some money for it, and wider international cooperation would help expand China's basic research capabilities.

Since the founding of the People's Republic, we have gradually established a scientific research system that encompasses almost all fields of study. However, this system was based on the old Soviet model. Research was mainly carried out by institutes of the Chinese Academy of Sciences (CAS) and of the various ministries. In developed countries, research is mainly done at universities and by companies. We have encouraged research institutions to establish relations with business enterprises and encouraged large companies to do their own scientific research. CAS has also pioneered in letting research institutes set up enterprises to enter the market.

Although China has made great strides in development, there are also many problems and difficulties, and it will take tens of years of arduous effort to solve them. We can't do it alone and would like to establish better cooperation with science and technology circles in the Asia-Pacific region and elsewhere in the world.

(Science 卷頭言より)

arable : 耕作に適する bollworm : 蛾の幼虫の一種 dredge : (しゅんせつ)する meteorology : 気象学

[設問]

- (i) 李鵬首相は、中国における科学技術の果たす役割を4つあげている。中国のどのような現状に対して、どのような役割を果たすのか、それぞれを箇条書きに整理して述べよ。
- (ii) 李鵬首相は、中国における科学研究を行うシステムと先進国のそれとはどのように違うと述べているか。また、この問題に対し中国はどのように対処していると述べているか。それを簡潔に述べよ。

2. 次の文章を読み、下記の下線(ア)および(イ)で示した部分を適切な日本語に訳せ。

Nearly a century ago, Basil Chamberlain opened his famous essay "English as She is Japped" with the sentence: "English as she is spoken and written in Japan forms quite an enticing study". We might well say the same thing today. Despite the tremendous effort and investment put into foreign-language teaching, Japan still abounds in the "Japlish" that Chamberlain found so entertaining.

Three years of English is obligatory in most junior high schools, followed by three more years in senior high school, and usually continuing for another two years for those attending university. But with all that, few Japanese — including those who end up as English teachers — can converse freely in the language or write it with any degree of proficiency. (ア)English, or more correctly Eigo, is taught as an academic exercise with so much attention to memorizing fine points of grammar and vocabulary that it ceases to be a means of communication. The examinations for which these methods prepare the student are in turn prepared by those who have gone through the same system, with the result that they do not test linguistic ability but merely the capacity to memorize relatively disconnected bits of information.

The situation becomes all the more ironic when one recalls that, despite the miseducation in English, thousands of English words have entered the Japanese language itself over the past few generations. Some of these loanwords represent new concepts for which there were no equivalents, or at least none that caught on, in Japanese itself. *Terebi* ("television") is an example. Others have rendered the old Japanese synonyms archaic, as *rabu-retta* ("love letter") did to *koibumi*. Still others coexist with Japanese words of the same meaning, such as *tsuma* and *waifu* ("wife"). Occasionally the foreign word carries a special meaning distinguishing it from the old Japanese word, as *raisu* (rice eaten on a plate with a fork) is differentiated from *gohan* (rice eaten in a bowl with chopsticks). Many English loanwords get new, restricted meanings in Japanese. Thus *mishin* ("machine") always means sewing machine.

Perhaps the most difficult class of all for the native speaker to recognize is the words that are abbreviated in much the same way that the Japanese abbreviate their own Chinese compounds. *Zenesuto* ("general strike") and *sabunado* ("subterranean promenade," i.e., an underground walkway) are two of them. Finally, some words are not standard English at all, but new inventions of the Japanese, such as *sarariiman* ("salary man"), which means a white-collar worker.

What helps to keep this *Eigo* from becoming English is that the words are written in the limited sound system of the Japanese syllabary, which produces pronunciations totally unrecognizable to the native ear. At the same time it retards the efforts of the Japanese to learn to speak English intelligibly. (イ)On the positive side, these loanwords have helped the Japanese to cope with the demands of an international, technological world. Perhaps in the same way that English, as Anglo-Saxon, was enriched and beautified — by Greek, French, and Latin — Japanese can hope to be improved by its contact with English. But for the moment at least, these hopes belong clearly to the future.

(Beverley D.Tuckerによる)

3. 下の文章の下線部を英訳せよ。

あるとき自動車王フォードが、予告なしにエジソンの研究室を訪れた。技師の一人が「先生は昼寝をしていらっしゃいます」とさえぎった。「あまり眠らないと聞いていますが」とフォード。「ええ、夜は少ししかお休みになりません。ただ、昼寝をたくさんなさるだけです」。ナポレオン(Napoleon)も4時間睡眠の人として名高い。しかし、彼は自分の睡眠時間を少なめに言う傾向があった。重要な会議や戦場に居合わせた者の証言によると、疲れ果てて睡眠不足を訴えることも多かったらしい。睡眠不足のために、重大な局面で何度か判断を誤った、と指摘する歴史家もいるそうだ。「Sleep Thieves」を書いた心理学者スタンレー・コレンは、エジソンやナポレオンの例を引き、人間には十分な眠りが必要だと力説する。彼によれば、 Chernobyl の惨事もスリーマイル島事故もチャレンジャーの爆発も、すべて関係者の睡眠不足が絡んでいた、という。

(朝日新聞 天声人語による)

教育 数学

1. 3 行 3 列の実行列

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & -1 \\ -1 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

について以下の設問に答えよ。

- (i) $A\vec{e}_1 = \lambda_1\vec{e}_1, A\vec{e}_2 = \lambda_2\vec{e}_2, A\vec{e}_3 = \vec{e}_2 + \lambda_2\vec{e}_3$ を満たす実数値 λ_1, λ_2 および R^3 の単位ベクトル $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ を求めよ。
ただし、 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ の第 2 成分は正とする。
- (ii) $A^n\vec{e}_1, A^n\vec{e}_2, A^n\vec{e}_3$ を $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ の一次結合で表せ。
- (iii) \vec{r}, \vec{d} を R^3 のベクトルとする。このときベクトル列 $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$ を $\vec{r}_0 = \vec{r}, \vec{r}_{n+1} = A\vec{r}_n + \vec{d}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) によって定める。ベクトル列の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{r}_n$ が任意の \vec{r}, \vec{d} について常に存在するような a の範囲を求めよ。

2. 関数 $y(x)$ に関する常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = f(x)$$

について以下の設問に答えよ。ただし ω は正の定数であり、 x の範囲は $x \geq 0$ とする。

- (i) $y = a(x) \cos \omega x + b(x) \sin \omega x$ とおいて上式に代入し、 $\frac{da}{dx}$ と $\frac{db}{dx}$ に対する関係式を求めよ。ただし、
 $\frac{da}{dx} \cos \omega x + \frac{db}{dx} \sin \omega x = 0$ とする。
- (ii) $a(x)$ と $b(x)$ を求めよ。
- (iii) $f(x) = 1/\lambda$ ($0 \leq x \leq \lambda$), 0 ($x > \lambda$) のとき、 $y(x)$ を求めよ。ただし λ は正の定数であり、 $x = 0$ で、
 $y = \frac{dy}{dx} = 0$ とする。
- (iv) (iii) で得られた $y(x)$ の $\lambda \rightarrow 0$ の極限を求めよ。

3. A,B 2 人があるゲームを繰り返し行なう。A が 2 回続けて勝つまでゲームを続ける。各々のゲームで A が勝つ確率は $2/3$ とする。

- (i) N 回目のゲームでも終了しない確率を x_N とする。 x_N を x_{N-1}, x_{N-2} で表せ。
- (ii) x_N を N の関数として求めよ。
- (iii) 行なわれるゲームの回数の期待値を求めよ。

教育 物理

1. 転がり迫る石の球に追われている人がトロッコに乗って逃げるときに、逃げきれるか否かを以下の手順で考察しよう。

(i) 勾配 θ の斜面を滑らずに転がり落ちる半径 r 、質量 m 、中心のまわりの慣性モーメント I の回転体（円板、球など）の運動を考えよう。重力加速度を g 、斜面の回転体によばす転がりまさつ力を F 、回転体の回転角を α 、斜面に沿って測った回転体の中心位置を x とする。

回転体の運動は以下の連立方程式によって決定される。回転に関する運動方程式 (2) を与えて方程式を完成させよ。

$$m\ddot{x} = mg \sin \theta - F \quad \cdots (1)$$

$$\cdots (2)$$

$$\dot{x} = r\dot{\alpha} \quad \cdots (3)$$

但し、 $\ddot{\cdot} \equiv d^2/dt^2$, $\dot{\cdot} \equiv d/dt$ である。

- (ii) 上の方程式 (1),(2),(3) を用いて回転体のエネルギー、

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 - mgx \sin \theta$$

が保存することを確認せよ。

- (iii) 以下の (a)、(b)、(c) に述べる三物体の運動は、 m, I を適当に定義すると、問 (i) の方程式 (1)、(2)、(3) に従う。

(a) 一個の車輪を考える。半径は、20cm、質量は 40kg であり、車輪の質量分布は一番外側の輪の部分に集中している円環（リング）であるとする。これが斜面をすべらずに転がり落ちる運動を考える。

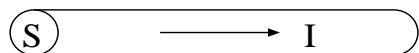
(b) トロッコを考える。トロッコを、一つの車輪からなり車軸の上に車台が乗っているものとモデル化する。車輪を (a) で考えた円環とし、それが質量の無視できる円盤により車軸とつながっており、車軸にはトロッコの車台の質量とそれに乗った人の質量をあわせた 360kg の重量がかかっているとする。車輪は斜面をすべらずに転がり落ちるとし、車軸のまさつは無視する。

(c) 石球を考える。質量 $M = 2.0 \times 10^4 \text{ kg}$ 、半径 $R = 1.0 \text{ m}$ の石球が斜面をすべらずに転がり落ちるとする。球の中心のまわりの慣性モーメントは $\frac{2}{5}MR^2$ で与えられる。

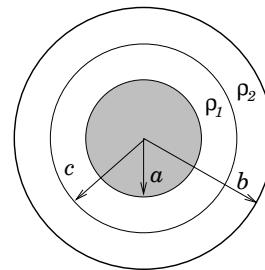
上の (a)、(b)、(c) のそれぞれの物体の、斜面に沿った方向の加速度を g_a, g_b, g_c とする。勾配 30 度の斜面を直線状下方に転がる場合に、 $g_a : g_b : g_c$ の比を求めよ。

- (iv) 問 (iii) の (b) に述べたトロッコが動き始めた時、石球の中心はトロッコ後端から 6.0m のところにあり、秒速 3.0m で迫っていた。トロッコの車高は石球の半径に等しいとすると、石球はトロッコに衝突するかしないかを判定し、後者の場合には約何 m まで接近するかを計算せよ。計算には $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ を用いよ。

2. (i) 図のように断面積 S 、長さ L の円柱導体に一様な定常電流 I が流れている。その抵抗 R は抵抗率 ρ により $R = \rho L/S$ と表せる。この導体中の電流密度 j （電流に垂直な単位断面積当たりの電流）はいくらか。また、導体中の電場 E と電流密度 j との関係を導け。



- (ii) 球形電極（半径 a ）と球殻電極（半径 b ）が同心に配置されており、それらの間は半径 c のところで 2 層の球殻に分けられ ($a < c < b$)。内側に抵抗率 ρ_1 の導体、外側に抵抗率 ρ_2 の導体が詰められている（右に断面図を示す）。電極間に電圧をかけ、一様な定常電流 I を流す。中心からの距離 r として、以下の間に答えよ。なお、実際に、球に細い穴をあけ中心の電極に導線をつなぐが、その穴と導線の影響は無視できるものとする。また、電極、導線の抵抗率も十分小さく無視できるものとする。



イ) 電流密度 j 、電極間の電場の強さ E を r の関数で表せ。

ロ) 電極間の電圧 V 、抵抗 R を求めよ。

ハ) 中心の電極表面にたまっている全電荷 Q を求めよ。

二) 異なる導体の境界面にたまっている全電荷 Q' を求めよ。

3. 気体の比熱においては、その体積を一定に保ちながら測る場合の定積比熱 $C_V = (\delta Q/dT)_V$ と、圧力を一定に保ちながら測る場合の定圧比熱 $C_p = (\delta Q/dT)_p$ とは値が異なる。但し、 T は温度、 V は体積、 p は圧力、 Q は熱量である。

- (i) 1 モルの理想気体の状態方程式を書き、これを用いて理想気体 1 モルの C_V と C_p の関係を導け。但し、気体定数を R とせよ。

- (ii) 理想気体が準静的な断熱変化をするときに

$$C_V dT + p dV = 0$$

が成り立つことを示せ。

- (iii) 理想気体が準静的な断熱変化をするときに

$$p V^{C_p/C_V} = \text{一定}$$

が成り立つことを示せ。

- (iv) ディーゼル機関ではシリンダー内で空気を圧縮して温度を上げ、重油の霧を点火させる。この圧縮が準静的かつ断熱的に行われ、空気は理想気体であると仮定しよう。重油の霧の点火温度が 627°C の場合、シリンダー内の空気の体積を何分の一に圧縮されればこの点火温度に達するか、有効数字 2 術で計算せよ。但し圧縮前の空気の温度は 27°C であり、空気の比熱比は $C_p/C_V = \frac{7}{5}$ であるとする。

教育 英語 解答

1. 全訳

中国が改革開放政策を始めて 18 年になる。この間、中国経済は年平均 9 % の成長率で急速に発展してきた。最近、中国人民大会で、次期 5 ヶ年計画と 15 ヶ年の長期発展計画が可決された。中国経済は、好ましい勢いを維持するべきであり、次の 5 年で 7 ~ 8 %、来世紀には約 7 % で成長すると予想している。このような成長を維持するために、我々は計画経済から市場経済へ、また開発による成長から経済効率をあげることによる成長へ という 2 つの変革を経験しようとしている。それに加え、我々は 2 つの計画 科学と教育、そして持続可能な発展によって国をつくること をすすめている。これらの目標を達成するためには、国際協力が必要となる。

何故、中国一カ国でそれを達成することができないのであろうか。中国は多くの問題を抱えているからである。例えば、我々は 1985 年に 9 カ年の義務教育を提案したのだが、この目標はまだ達成されておらず 2000 年までに義務教育を完全に受けることができるは 85 % にすぎないだろう。6 カ年の義務教育を達成しているにすぎない地域もある。さらに関発には地域格差がある。沿岸地域は発展しているが、中部と西部は遙かに遅れている。中国にはまだきわめて貧しい生活をしている人々が 6500 万人おり、彼らのおかれた環境は劣悪だ。西部地域に発展の見込みがないと言っても過言ではない。豊富な地下資源はあるがそれを開発できるかどうかは政府補助金だけでなく科学技術や教育にかかっている。

しかし、中国における最大の問題は農業である。中国は世界の農地の 7 % を使って人類の 22 % を養わなければならず、そのうえ水も不足している。現在、中国の農地で高い収穫をあげているのは 1/3 にしかすぎない。一方、残りの 2/3 は中程度か少ないのである。農業を発展させるためには実行可能で高度な技術が必要である。例えば、米の交配種をつかうと、(最近 20 % 増産したにもかかわらず)さらに 20 % も収穫を増やすことができる。また、バイオテクノロジーを使えば、近年綿花に損害を与えてきたワタキバガの幼虫に遺伝的に強い新種の綿花を産み出した。中国では、かなり厳しい家族計画政策が行われているが、人口はまだ年に 1300 万人ずつ増加しているため、増加した人々のために食料、環境、教育、雇用を供給しなければならない。私は、科学技術がこの問題を解決する助けになると信じている。

気象学も、我々が特に注目している分野である。というのも、中国にとっては災害の影響を減らすことが特に重要であるからだ。中国では、洪水や干ばつが多い。平均して、5 年のうち 2 年は豊作で、2 年は平均、1 年は災害にあう。我々は、洪水を避けるために、水路を掘り、ダムをつくり、植林してきた。しかし、中国では、干ばつは洪水より深刻である。この問題を解決できるかどうかは、水資源をより効率的に利用できるかにかかっているだろう。中国は、台風にも遭う。そのため、気象学は農業や人々の生活にとって重要である。正確に予報できれば、被害を減らすことができる。我々は、全国気象ネットワークを作り、世界のネットワークに参加してきた。そして、予報するために大型計算機を使用してきた。現在では、5 日 ~ 7 日先の予報をすることができる。

中国の産業は、エネルギーの消費が多いが効率は低く、資源消費量が多いが品質は低い。このような問題の解決にも、科学技術が必要である。それに加えて、政府は基礎研究と応用科学とを正確に関係づけることが必要である。応用科学は、生産性を向上させることができるため、社会にとって重要であると見なされてきた。しかし、基礎研究も重要である。というのも、基礎研究の発展によって、大躍進を遂げることができるからである。中国は発展途上国であるため、基礎研究に多額の費用を出す余裕はない。しかし、政府は基礎研究に十分な費用を出しており、より広い国際協力があれば、中国の基礎研究の研究能力をあげができるだろう。

人民共和国の設立以来、我々は、ほぼ全学問の研究領域を含む科学研究システムを設立しつつある。しかし、このシステムは旧ソビエトをもとにしている。研究は主に中国科学アカデミー (CAS) や、様々な国家機関の研究機関によって行われていた。先進国では、研究は主に大学や企業で行われている。我々は、研究機関が企業と関係を持ったり、大企業が独自の科学的研究を行うことを勧めている。CAS も、研究機関が市場に参入するために事業を起こすように率先してきた。

中国は、発展の中で研究が大きく躍進してきたが、多くの問題や困難も残っており、それを解決するには、

何十年も根気強く努力しなければならないだろう。我々は、独力でそれを成し遂げることはできない。アジア太平洋地域、そしてその他の地域の科学技術団体とよりよい協力関係を築きたいと考えている。

(i) 現状：沿岸地域は発展しているが、中西部地域は開発が遅れている。

役割：西部地域の豊かな地下資源を開発する。

現状：増え続ける人口を養うだけの食料と水が不足している。

役割：生命科学を用いて、農作物の生産性を向上させる。

現状：5年に1年は災害にあい、台風の被害にもよく遭う。

役割：気象学を用いて、予報し、被害を軽減する。

現状：中国の産業は効率が低く、品質も悪い。

役割：応用科学と基礎研究の研究を進めて、高効率、高品質を目指す。

(ii) 中国では科学研究は CAS や国家機関が行っているのに対し、先進国では主に大学や企業で行われている。

この問題に対し、中国では、これらの研究機関が企業と関係を持ったり、大企業が独自の科学的研究を行うことを勧めている。

2. 全訳

1世紀近く前、Basil Chamberlain はその有名なエッセイ “English as She is Japped” を次の文章はじめた。「日本において話されたり書かれたりする英語はきわめておもしろい研究となる。」今も同じことが言えよう。外国語教育に捧げられた莫大な努力と投資にも関わらず、日本には、いまだ Chamberlain が非常に面白がる “Japlish (和製英語)” が満ちている。

たいていの中学校では英語は3年間必修であり、それに続いて高校でさらに3年間、大学に進学するものは普通さらに2年間学ぶ。しかしそれにもかからず、最終的に英語教師になるものも含めて、日本人にはこの言語で自由に会話ができたりこれを書くことに多少なりとも熟練していたりするものはほとんどいないのである。(ア) “English”、もしくはより正確には「英語」は、学問の訓練として文法や語彙の細かい点を覚えることにあまりに多くの注意を払いすぎて教えられているため、伝達の手段でなくなってしまっているのである。この方法で生徒たちが(受験)準備する試験は、同じ制度を経験してきた人々によって今度はつくられており、その結果言語能力ではなく、単に知識の比較的ばらばらな断片を記憶する能力を試験することになる。

次のことを思い出すとき、この状況はいっそう皮肉なものとなる。つまり、英語の誤った教え方にもかかわらず多くの英単語が過去数世代にわたって日本語そのものに入ってきていていることである。これらの外来語のうちには、新しい概念を表すものがある。これら（の概念）には、それに相当する概念がなかったかまたは少なくとも日本語自身の中で受けいられなかつたのである。「テレビ」はその一例である。他には、「恋文」に対する「ラブレター」のように、古い日本語での同意語を死語にしたものもある。さらに他には、「妻」と「ワイフ」のように、同じ意味の日本語の単語と共に存しているものもある。時には、外来語は古い日本語の単語と異なる特別な意味を持つこともある。たとえば「ライス」（フォークで皿から食べる米）は「ごはん」（箸で茶碗から食べる米）とは区別される。多くの英語からの外来語は、日本語では新しい制限された意味を得る。それゆえに「ミシン」は常に縫い物に使う機械を意味している。

おそらく、（英語を）母国語とする人々にとって認識するのが全ての中でもっとも難しいのは、日本人が独自の漢字の熟語を短縮するのと全く同じやり方で短縮された単語である。ゼネストやサブナード（地下の散歩道）はその2つの例である。最後に、全く標準英語ではなく日本語の新たな発明であるもの、たとえばホワイトカラーを意味する「サラリーマン」などの単語もある。

「英語」が “English” になれない原因是、ネイティブな耳にとっては全く認識不可能な発音をつくりだす日本語の五十音という限られた音の体系で単語が書かれるということである。同時にこのことは、日本人が英語を明瞭に話すことを学ぼうとする努力を妨げている。（イ）肯定的な立場では、これらの外来語は日本人が国際的な科学技術の世界の要求に対処するのに役立ってきている。おそらくアングロサクソン語としての英語がギリシャ語、フランス語、ラテン語によって豊かになり美しくなったのと同じようにして、日本語も英語

との接触によって改良されていくことが望めるだろう。しかしすくなくともさしあたっては、これらの希望は明らかに先のものである。

3. Napoleon is also famous as a person who slept for only four hours. However, he had the tendency of telling others shorter hours of sleep than he actually had. According to those who were present with him at important meetings and battlefields, there were many occasions that he complained about physical exhaustion and lack of sleep. There are also historians who pointed out that Napoleon made a number of misjudgements during critical situations because of shortage of sleep.

[別解]

It is well known that Napoleon slept only four hours, but he tended to say less than he had actually slept. According to the testimony of those who happened to be present in the important conferences and battlefields, he often complained of his exhaustion and lack of sleep. It is said that some historians point out that he sometimes made wrong judgements during critical situations from lack of sleep.

教育 数学 解答

1. (i) 行列 A の固有値を λ とすると、

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - (a+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - (a+1) & 1 \\ 1 & -1 & \lambda - (a-1) \end{vmatrix} = (\lambda - a)^2 \{\lambda - (a+1)\}$$

から、 $\lambda_1 = a+1, \lambda_2 = a$ となる。それぞれに対する固有ベクトルを求める。

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

さらに、 $\vec{e}_3 = (x, y, z)$ とすると、 $A\vec{e}_3 = \vec{e}_2 + \lambda_2 \vec{e}_3$ に代入し、さらに、大きさが 1 なので、

$$x = 0, \quad y - z = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

第二成分が正であることを用いて解くと、 $x = 0, \quad y = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad z = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ となるから、

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

(ii) $B \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad J \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると、

$$BJ = JB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ となるから、} (J + B)^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & n\lambda_2^{n-1} & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

よって、

$$A^n \vec{e}_1 = \lambda_1^n \vec{e}_1, \quad A^n \vec{e}_2 = \lambda_2^n \vec{e}_2, \quad A^n \vec{e}_3 = n\lambda_2^{n-1} \vec{e}_2 + \lambda_2^n \vec{e}_3$$

(iii)

$$\vec{r}_n = A^n \vec{r}_0 + (E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) \vec{d}$$

と、任意の \vec{r}, \vec{d} に対して収束するので、 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ が、 \vec{r}, \vec{d} のとき、収束すれば良い。よって、 A^n と $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ が収束すればよい。

A^n が収束するための必要十分条件は、 $-1 < \lambda_1 \leq 1$ かつ $|\lambda_2| < 1$ なので、 $-1 < a \leq 0$ 。さらに、

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\alpha^{k-1} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$$

に注意して、 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ が収束するための必要十分条件は、 $|\lambda_1| < 1$ かつ $|\lambda_2| < 1$ なので、 $-1 < a < 0$ 。よって求める解は、 $-1 < a < 0$ である。

2. ドットは、 $\frac{dy}{dx}$ を表すものとする。 $(\frac{dy}{dx} \equiv \dot{y})$

(i) $\dot{a} \cos \omega x + \dot{b} \sin \omega x = 0$ に注意すると、

$$\ddot{y} = \omega(-\dot{a} \sin \omega x + \dot{b} \cos \omega x) - \omega^2 y \quad \therefore \omega(-\dot{a} \sin \omega x + \dot{b} \cos \omega x) = f(x)$$

(ii)

$$\begin{cases} \dot{a} \cos \omega x + \dot{b} \sin \omega x = 0 \\ -\dot{a} \sin \omega x + \dot{b} \cos \omega x = \frac{f(x)}{\omega} \end{cases}$$

$$\therefore \dot{a} = -\frac{f(x)}{\omega} \sin \omega x, \quad \dot{b} = \frac{f(x)}{\omega} \cos \omega x$$

$$\therefore a = -\int \frac{f(x)}{\omega} \sin \omega x dx, \quad b = \int \frac{f(x)}{\omega} \cos \omega x dx$$

(iii) $x = 0$ で $y = \dot{y} = 0$ より、 $a(0) = b(0) = 0$ であるから、

$$a = -\int_0^x \frac{f(x)}{\omega} \sin \omega x dx = \begin{cases} \frac{1}{\omega^2 \lambda} \cos \omega x - \frac{1}{\omega^2 \lambda} & 0 \leq x \leq \lambda \\ \frac{1}{\omega^2 \lambda} \cos \omega \lambda - \frac{1}{\omega^2 \lambda} & x > \lambda \end{cases}$$

$$b = \int_0^x \frac{f(x)}{\omega} \cos \omega x dx = \begin{cases} \frac{1}{\omega^2 \lambda} \sin \omega x & 0 \leq x \leq \lambda \\ \frac{1}{\omega^2 \lambda} \sin \omega \lambda & x > \lambda \end{cases}$$

以上まとめれば、

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega^2 \lambda} (1 - \cos \omega x) & 0 \leq x \leq \lambda \\ \frac{1}{\omega^2 \lambda} (\cos \omega(x - \lambda) - \cos \omega x) & x > \lambda \end{cases}$$

(iv) $\lambda \rightarrow 0$ では、 $x \neq 0$ のとき $x > \lambda$ なる λ がつねに存在するので、

$$y(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\omega^2 \lambda} (\cos \omega(x - \lambda) - \cos \omega x) = \frac{1}{\omega} \sin \omega x$$

これは、 $y(0)=0$ もみたしている。

3. (i)

$$x_N = \frac{1}{3}x_{N-1} + \frac{2}{9}x_{N-2}$$

(ii) $x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{9}$ であるから、

$$\left(x_N + \frac{1}{3}x_{N-1} \right) = \frac{2}{3} \left(x_{N-1} + \frac{1}{3}x_{N-2} \right) = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^N$$

$$\left(x_N - \frac{2}{3}x_{N-1} \right) = -\frac{1}{3} \left(x_{N-1} - \frac{2}{3}x_{N-2} \right) = -\left(-\frac{1}{3} \right)^N$$

従って、

$$x_N = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{N+1} + \left(-\frac{1}{3} \right)^{N+1}$$

(iii) N 回目におわる確率は、 $x_{N-1} - x_N$ であるから、求める期待値は、

$$\sum_{N=1}^{\infty} N(x_{N-1} - x_N) = \sum_{N=1}^{\infty} x_{N-1}$$

$$= \sum_{N=1}^{\infty} \left(2 \left(\frac{2}{3} \right)^N + \left(-\frac{1}{3} \right)^N \right)$$

$$= \frac{15}{4}$$

ただし、途中 $\sum_{N=1}^{\infty} Nx_N = \sum_{N=1}^{\infty} (N-1)x_{N-1}$ を用いた。

教育 物理 解答

1. (i)

$$I\ddot{\alpha} = rF$$

(ii) (1) 式に両辺 \dot{x} をかけて積分すると、

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = mgx \sin \theta - Fx + C_1$$

となる。ただし、 C_1 は積分定数である。同様にして、(2) 式に $\dot{\alpha}$ をかけて、(3) 式を使うと、

$$I\ddot{\alpha}\dot{\alpha} = rF\dot{\alpha} = F\dot{x} \quad \therefore \quad \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 = Fx + C_2$$

ただし、 C_2 は積分定数。従って、

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 - mgx \sin \theta = C_1 + C_2 = \text{一定}$$

(iii) (a)、(b)、(c) それぞれ以下のように m, I, r を定義すれば方程式 (1)、(2)、(3) に従う。

$$(a) m = 40 \text{ kg}, \quad I = 1.6 \text{ kgm}^2, \quad r = 0.2 \text{ m}$$

$$(b) m = 400 \text{ kg}, \quad I = 1.6 \text{ kgm}^2, \quad r = 0.2 \text{ m}$$

$$(c) m = 2.0 \times 10^4 \text{ kg}, \quad I = 8.0 \times 10^3 \text{ kgm}^2, \quad r = 1 \text{ m}$$

ここで、方程式 (1)、(2)、(3) から α, F を消去すると、

$$m\ddot{x} + \frac{I}{r^2}\ddot{x} - mg \sin \theta = 0 \quad \therefore \quad \ddot{x} = \frac{1}{1 + \frac{I}{mr^2}}g \sin \theta$$

\ddot{x} が斜面方向の加速度であるから、(a)、(b)、(c) それぞれの場合の値を代入すれば、

$$g_a : g_b : g_c = \frac{1}{2} : \frac{10}{11} : \frac{5}{7}$$

(iv) (iii) より、

$$g_b = \frac{10}{11}g \sin \theta = \frac{5}{11}g, \quad g_c = \frac{5}{7}g \sin \theta = \frac{5}{14}g$$

$t = 0$ で石球の中心 $x_c = 0$ 、トロッコの後端 $x_b = 6.0$ とすると、

$$x_b = 6 + \frac{1}{2}g_b t^2, \quad x_c = 3.0t + \frac{1}{2}g_c t^2$$

従って、石球とトロッコの距離 $x_b - x_c - 1$ を計算すると、

$$x_b - x_c - 1 = \frac{15}{308}g \left(t - \frac{154}{5g} \right)^2 - \frac{462}{10g} + 5 > 0$$

よって、石球とトロッコは衝突せず、また、もっとも接近するのは、 $t = \frac{154}{5g}$ のときで、その距離は、約 0.3m である。

2. (i)

$$j = \frac{I}{S}$$

また、この導体の両端の電圧を V とすると、

$$V = EL = IR$$

$$\therefore E = \frac{IR}{L} = \frac{I\rho L}{L S} = \rho j$$

$$(ii) (イ) j = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$E(r) = \rho j = \begin{cases} \rho_1 \frac{I}{4\pi r^2} & a < r < c \\ \rho_2 \frac{I}{4\pi r^2} & c < r < b \end{cases}$$

(口) (イ) の結果より

$$V = \int_a^b E dr = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{c} - \frac{\rho_2}{b} \right) I$$

$V = RI$ より

$$R = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{c} - \frac{\rho_2}{b} \right)$$

(ハ) ガウスの法則より

$$Q = 4\pi a \varepsilon_0 E(a) = \varepsilon_0 \rho_1 I$$

(二) (ハ) 同様、ガウスの法則より

$$Q' = \lim_{r \rightarrow c+0} 4\pi r \varepsilon_0 E(r) - Q = \varepsilon_0 I (\rho_2 - \rho_1)$$

3. (i) 状態方程式は、 $pV = RT$

また、 $\delta Q = pdV + dU$ を用いると、

$$\begin{aligned} C_V &= \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \frac{dU}{dT} \\ C_p &= \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p = \frac{dU}{dT} + p \left(\frac{dV}{dT} \right)_p = \frac{dU}{dT} + R \\ \therefore C_V + R &= C_p \end{aligned} \quad \cdots (1)$$

(ii) 断熱変化なので、 $\delta Q = 0$ 。よって

$$0 = pdV + dU = pdV + \frac{dU}{dT} dT = pdV + C_V dT \quad \cdots (2)$$

(iii) 状態方程式および式 (1) から、 $Vdp + pdV = RdT = (C_p - C_V)dT$ 。よって、式 (2) において dT を dp, dV に置き換えると、

$$C_p pdV + C_V V dp = 0 \quad \therefore d\left(pV^{\frac{C_p}{C_V}}\right) = 0$$

$$\therefore pV^{\frac{C_p}{C_V}} = \text{一定}$$

(iv) 圧縮前の圧力、体積をそれぞれ p_i, V_i とし、点火温度に達したとき、それぞれ p_f, V_f になったとすると、

$$p_i V_i^{\frac{7}{5}} = p_f V_f^{\frac{7}{5}}$$

それぞれの温度での状態方程式から、 p_i, p_f を消去すると、

$$300RV_i^{\frac{2}{5}} = 900RV_f^{\frac{2}{5}}$$

$$\therefore \left(\frac{V_f}{V_i} \right)^{\frac{2}{5}} = \frac{1}{3} \quad \therefore \frac{V_f}{V_i} = \frac{1}{9\sqrt{3}} \sim \frac{1}{16}$$

したがって、16 分の 1 に圧縮すれば良い。

1997 年度 入学試験 物理専門科目

専攻 問題 1

中心対称場の中の粒子の運動に対するシュレディンガー方程式は次のように与えられる。

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + [E - U(r)]\Psi = 0$$

ここで m および E はそれぞれ粒子の質量とエネルギー、また $U(r)$ は場のポテンシャルエネルギーである。ラプラス演算子 Δ は

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

で、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。

中心対称場の中の運動では角運動量が保存されるので、波動関数 Ψ の動径関数 $R_l(r)$ は次の方程式を満たす。

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_l + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(r)] R_l = 0$$

ここで l は粒子の角運動量である。以下では角運動量 $l = 0$ の動径関数 $R_0(r)$ について考えよう。

1. 井戸型ポテンシャル

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & , \quad r \leq r_0 \\ 0 & , \quad r > r_0 \end{cases}$$

において、以下の問いに答えよ。ただし、 U_0 は正の定数で $-U_0 \leq E \leq 0$ とする。

- (i) $r \leq r_0$ での $R_0(r)$ の形を求めよ。
- (ii) $r > r_0$ での $R_0(r)$ の形を求めよ。
- (iii) 上記の (i) と (ii) で求めた動径関数 $R_0(r)$ を $r = r_0$ でなめらかにつなぎ、粒子のエネルギー E と r_0 との関係式を求めよ。
- (iv) U_0 が充分に大きいとして、上の答えを用いて粒子の負のエネルギー準位と動径関数 $R_0(r)$ のゼロ点の数との関係を述べよ。

2. 次に中心対称なポテンシャルが

$$U(r) = \begin{cases} \frac{-\alpha}{r_0^2} & , \quad r \leq r_0 \\ \frac{-\alpha}{r^2} & , \quad r \geq r_0 \end{cases}$$

で与えられている。ここで $\alpha > 0$ とする。またここでは、 r_0 が小さい場合を考えて $r = r_0$ の近くでの動径関数 $R_0(r)$ の振る舞いについて考察する。

- (i) $r \leq r_0$ の領域で動径関数 $R_0(r)$ を求めよ。ただし、 r_0 は充分小さく、粒子のエネルギー E はポテンシャルエネルギー $(-\alpha/r_0^2)$ に比べて無視できるものとする。
- (ii) 動径関数 $R_0(r)$ は、 $r \geq r_0$ の領域でしかも $r = r_0$ の近くでは近似的に次の方程式を満たす。

$$\frac{d^2R_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_0}{dr} + \frac{\beta}{r^2} R_0 = 0$$

ただし、 $\beta = (2m/\hbar^2)\alpha$ である。この方程式の $r = r_0$ の近くの解を $R_0(r) \sim r^\alpha$ と形を仮定して求めよ。ただし、その解は β を用いて書くこと。

- (iii) 上記の (i) と (ii) で求めた動径関数 $R_0(r)$ が $r = r_0$ でなめらかにつながるものとして、 $r \geq r_0$ の領域の解を求める。
- (iv) 上で求めた解は $\beta < 1/4$ の場合と $\beta > 1/4$ の場合とでは振る舞いが大きく異なる。 $\beta > 1/4$ の場合に、 $r \geq r_0$ での動径関数 $R_0(r)$ のゼロ点の数に注目して、 $r_0 \rightarrow 0$ の極限で粒子の運動に何が起きるかを理由を上げて説明せよ。

専攻 問題 2

異なる媒質の境界面において、電磁波の満たす境界条件は一般に次のように与えられる。

$$E_t(\text{I}) - E_t(\text{II}) = 0 \quad \cdots (1)$$

$$D_n(\text{I}) - D_n(\text{II}) = Q \quad \cdots (2)$$

$$H_t(\text{I}) - H_t(\text{II}) = J \quad \cdots (3)$$

$$B_n(\text{I}) - B_n(\text{II}) = 0 \quad \cdots (4)$$

ここに、 E は電場、 D は電束密度、 H は磁場、 B は磁束密度である。添字 t、n は境界面に平行、垂直な成分をそれぞれ表わす。また、(I)、(II) は媒質を示し、 Q は表面電荷密度、 J は表面電流密度である。

1. マックスウェルの方程式とストークスの定理を用いて、式 (1) が成り立つことを示せ。
2. マックスウェルの方程式とガウスの定理を用いて、式 (2) が成り立つことを示せ。
3. 媒質 (II) が完全導体である場合、その表面において電磁波の満たすべき境界条件を求めよ。
4. 媒質 (I) が真空、媒質 (II) が完全導体とする。真空側 ($x < 0$) から導体面 (yz 平面) に入射する平面波の電磁波を考える。この入射平面波は単色で y 方向に偏光しており、

$$E_y = E_0 \exp(-2\pi i vt + ikx) \quad \cdots (5)$$

で与えられるとする。ここに v は電磁波の振動数、 k は波数である。これが金属表面 ($x = 0$) で反射されるとき、導体面に流れる表面電流密度を求めよ。また、その方向を示せ。ただし、真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ϵ_0, μ_0 とする。

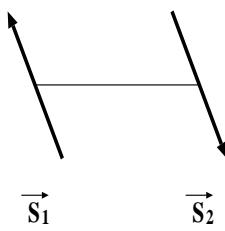
5. 次に、媒質 (I)、(II) が異なる誘電体であるとする。これが、 yz 平面を境に互いに接している。ここに、 $x < 0$ から (5) 式で与えられる平面波の電磁波が入射した。境界条件の式 (1)-(4) を適用し、 $x = 0$ の境界面における反射率（反射波と入射波の電場の比）および、透過率（透過波と入射波の電場の比）をそれぞれ求めよ。ただし、媒質 (I) の誘電率を ϵ_1 、媒質 (II) の誘電率を ϵ_2 とし、透磁率はいずれも μ_0 とする。
6. 平行な境界面をもつ誘電体の板が真空中に置かれている。その境界面に垂直な方向から電場の振幅が E_0 である平面波の電磁波が入射する。平面波の振動数を v 、板の厚さを L とするとき、この板を通過する電磁波の強度（ポインティングベクトルの大きさ）を求めよ。ただし、誘電体の誘電率を ϵ_1 、真空の誘電率を ϵ_0 とし、透磁率はいずれも μ_0 とする。
7. 前問で、振動数 v の電磁波に対して、透過する電磁波の強度が最大になるような L を求めよ。また、その時の透過強度の入射強度に対する比を求めよ。これらの結果についての物理的意味を考察し、簡潔に述べよ。以上の結果は、眼鏡の反射防止コーティングや干渉フィルターなどに広く応用されている。

専攻 問題 3

1. 大きさ $\frac{1}{2}$ のスピン 2 個が、次のハミルトニアンで相互作用している系を考える。

$$\mathcal{H} = JS_1^z \cdot S_2^z$$

以下、 $J > 0$ とする。固有値と固有状態を求めよ。



2. このスピン系に z 方向の磁場 H がかかるとハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = JS_1^z \cdot S_2^z - g\mu_B H(S_1^z + S_2^z)$$

と書くことができる。ここで μ_B はボーア磁子、 g は電子の g -因子で $g = 2$ である。この系が温度 T の熱浴と接して熱平衡にあるとき、その分配関数を計算せよ。

3. 温度 T における磁気モーメントの平均値

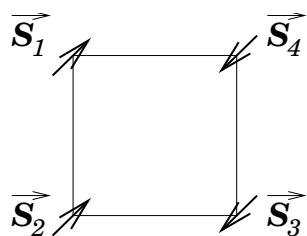
$$M = g\mu_B \langle S_1^z + S_2^z \rangle$$

を計算し、磁化率 $\chi = \lim_{H \rightarrow 0} M/H$ の温度依存性の様子を図示せよ。特に、 $k_B T \gg J$ 、 $k_B T \ll J$ での漸近形を求めよ。

4. 正方形の頂点に 4 個の大きさ $\frac{1}{2}$ のスピンがあって、隣り合ったスピニンと相互作用している。このときのハミルトニアンが

$$\mathcal{H} = J(S_1^z + S_3^z) \cdot (S_2^z + S_4^z)$$

と書けることに注目して、すべての固有状態のスピン量子数とエネルギー固有値を求めよ。



5. 上の 4 個のスピン系の低温での磁化率の漸近形、高温での磁化率の漸近形はどうなるか。理由をつけて答えよ。

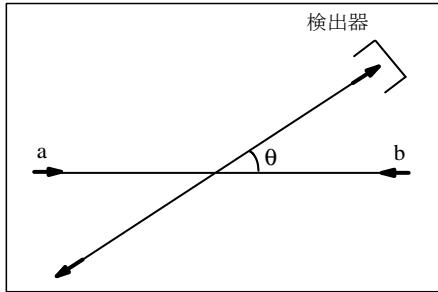
専攻 問題 4

下図は粒子 a と粒子 b が重心系で角度 θ へ散乱される様子を描いたものである。以下の問い合わせに答えよ。

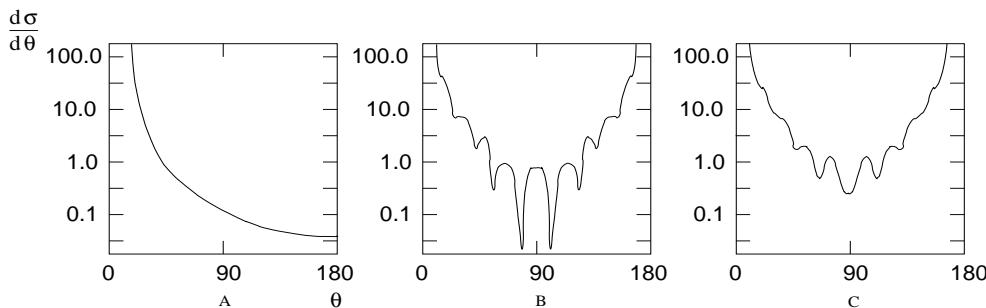
運動は非相対論的取り扱いでよい。また、質量数 A の原子核の半径は、 $r = 1.2 \cdot A^{\frac{1}{3}} \times 10^{-15} \text{ m}$ で与えられ、質量数 A の原子核の質量は、 $M_A c^2 = A \times 1000 \text{ MeV}$ と近似してよい。

必要に応じて、次の数値を参照せよ。

$$\hbar c = 200 \times 10^{-15} \text{ MeV} \cdot \text{m}, \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}, \quad 12^{\frac{1}{3}} = 2.3, \quad 13^{\frac{1}{3}} = 2.4$$



1. a と b が異種粒子の時の散乱振幅を $f(\theta)$ として、a と b が以下の場合について、それぞれの微分散乱断面積 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ を書き下せ。
 - (i) a と b とが異種粒子、
 - (ii) a と b とが同種粒子でスピン 0 のボソン、
 - (iii) a と b とが同種粒子でスピン $\frac{1}{2}$ のフェルミオン。
2. $^{12}_6\text{C}$ (スピン 0) と $^{13}_6\text{C}$ (スピン $\frac{1}{2}$) をそれぞれ加速イオンビームまたは標的として、 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$, $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$, $^{13}\text{C} + ^{13}\text{C}$ の 3 つの組み合わせについて散乱実験を行った。加速器で 10 MeV にまでイオンビームを加速したときの実験結果を下図に示した。重心系での角度で表示してある。但し、下図の縦軸 $\cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$ は微分散乱断面積、下図の横軸 $\cdot \theta$ は散乱角 (重心系) [度] を表す。



3. (i) a と b がともに ^{12}C と ^{12}C の時のドブロイ波長と重心系での運動エネルギー T を求めよ。
 (ii) ^{12}C 原子核の半径を R として、二つの原子核 ^{12}C と ^{12}C がちょうど接触している状態の距離 $2R$ の位置でのクーロンポテンシャルによるエネルギー V_C を求め、 $V_C > T$ を確かめよ。このことから、散乱過程がこの入射エネルギー (10 MeV) では主としてクーロン力によるものであることがわかる。
 (iii) 実験結果 A, B, C は、それぞれ a と b が ^{12}C と ^{13}C のどの様な組合せであるかを推論し、その理由を簡潔に述べよ。
4. 10 MeV のビームエネルギーにおいても非常に小さな確率ではあるが、原子核反応 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^{23}\text{Na}^* + p$ も起こる。ここで $^{23}\text{Na}^*$ は 440 keV の励起準位を表し、平均寿命 1.1×10^{-12} 秒で γ 線を放出して基底準位へおちる。

- (i) γ 線の波長を求めよ。
- (ii) 励起準位の自然幅を求めよ。
- (iii) なぜ非常に小さな確率でしか核反応は起きないのか。
- (iv) $^{23}\text{Na}^*$ の最大速度 v を求めよ。但し、簡単のために反応の Q 値を 0 とする。

$$[Q = 2M_{^{12}\text{C}} - (M_{^{23}\text{Na}^*} + M_p) = 0]$$

- (v) 放出される γ 線を、入射ビームの進行方向に置かれた γ 線検出器で観測した。測定される γ 線の最大ならびに最小エネルギーはいくらか。但し、生成された $^{23}\text{Na}^*$ イオンは、 10^{-12} 秒程度の時間で減速され標的に止まるものとする。放出された γ 線と標的物質との相互作用も無視する。
- (vi) γ 線と物質との相互作用にはどのようなものがあるか。
- (vii) γ 線の検出に NaI 検出器を使い、440 keV の γ 線を測定した。期待されるスペクトルの形を定性的に示し、どの様な相互作用が主に関与しているかをスペクトルの各部に記入せよ。

専攻 問題 5

物質の結晶構造や格子定数を求めたり、単結晶の方針を調べる簡便な方法として用いられる X 線回折写真法の代表的なものに、ラウエ法とデバイ・シュラー法がある。これらは、その目的、用いる X 線の種類、試料などに顕著な違いがある。

- 上記の 2 方法のそれについて、その目的、用いる X 線、試料の別を述べよ。

結晶の単位胞（単位格子）の 3 棱を表す基本ベクトル a_1, a_2, a_3 と

$$a_i \cdot b_j = \delta_{ij}$$

の関係にあるベクトル b_1, b_2, b_3 を基本ベクトルとする格子を逆格子という。また、 g_1, g_2, g_3 を整数とするとき、ベクトル

$$g = g_1 b_1 + g_2 b_2 + g_3 b_3$$

を逆格子ベクトルという。結晶の格子面（原子面）を表すのには、ミラー指数が用いられる。ミラー指数 (g_1, g_2, g_3) で表される格子面は、逆格子ベクトル g に垂直であり、互いに素なミラー指数 (g_1, g_2, g_3) で表される格子面の面間隔は、

$$d = 1/|g|$$

で与えられる。

入射 X 線および、反射 X 線の波数ベクトルをそれぞれ、 k_0 および k とすると、結晶による強い回折が起きる条件はラウエの条件

$$k - k_0 = g$$

で与えられる。ここで、 g は任意の逆格子ベクトルである。

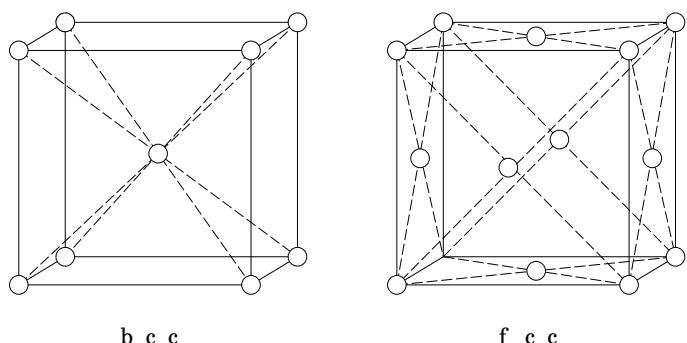
- ラウエの条件からプラグの条件が導かれることを示せ。

単位胞の中に n 個の原子を含む結晶からの回折線の振幅は、原子 i の原子散乱因子を $f_i(g)$ として、構造因子

$$F(g) = \sum_{i=1}^n f_i(g) \exp(2\pi i g \cdot r_i)$$

に比例する。ここで、 r_i は、原子 i の位置ベクトルである。

- 右図のように単位胞をとると、面心立方 (fcc) 構造および体心立方 (bcc) 構造のそれについて、波長 λ の X 線プラグ反射のミラー指数をプラグ角の小さい方から 3 つずつ挙げよ。ただし、結晶学的に同等な反射はひとつと数える。

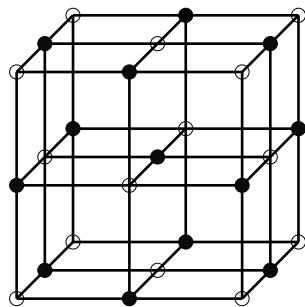


右の表は、銅 (fcc 構造) および鉄 (bcc 構造) を試料として、回折されたモリブデンの K_α 線 (波長 0.71 Å) について、 $\sin \theta_B$ (θ_B はプラグ角) の値を小さい方から 4 つ並べたものである。

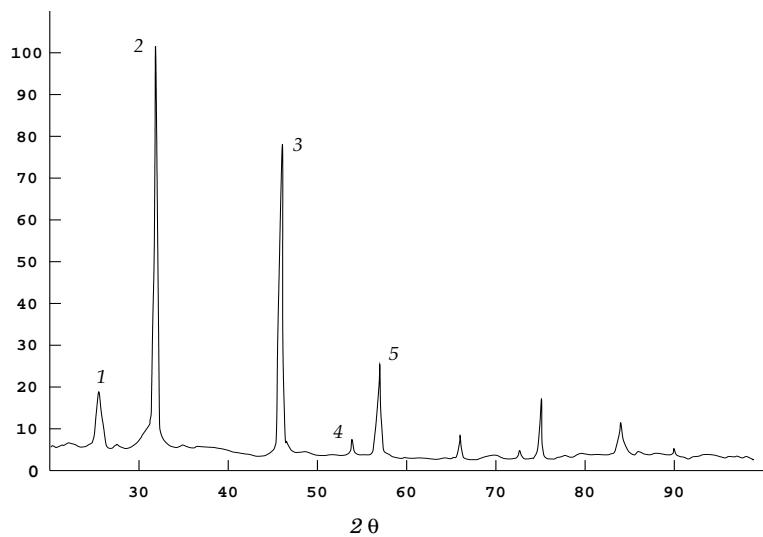
順位	試料 A	試料 B
1	0.175	0.170
2	0.248	0.196
3	0.303	0.278
4	0.350	0.326

4. 試料 A は銅・鉄のどちらか。

NaCl は岩塩型（右図）の結晶構造をなし、正イオンあるいは負イオンのみがつくる副格子はともに面心立方格子である。下図は、NaCl によって回折された銅の K_{α} 線の強度分布である。



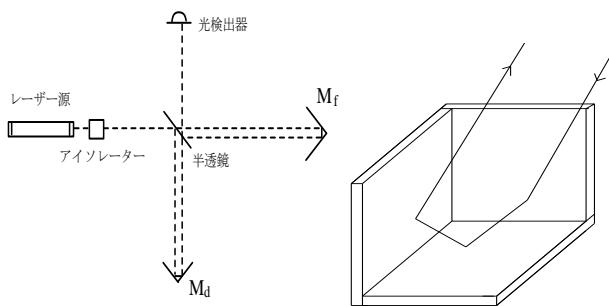
5. 下図において、ピーク 1・4 の強度は、2・3・5 に比べて極端に小さい。このような強度分布が現れる理由を説明せよ。



専攻 問題 6

図 1 は、レーザー干渉計を用いて、重力加速度を測定するための概念図である。反射鏡 M_d 、 M_f はコーナーリフレクターと呼ばれるもので、図 2 に示すように平面鏡を 3 枚互いに直交させたものである。 M_f は実験室系に固定し、 M_d をある位置から自由に落下させる。これに関する以下の設問に答えよ。

1. コーナーリフレクターに図 2 のように入射する光ビームは、入射方向と平行に戻る。これを示せ。
2. 自由落下中は、光検出器からは、図 3 のように変化する信号が得られる。変化する信号が中央線を切る時間を図 3 のように t_1 、 t_2 、 t_3 とするとき、光の波長を λ として、時刻 t_2 における平均の重力加速度を求めよ。



3. 重力加速度の相対測定精度を 10^{-9} としたい。 M_d に向かうレーザービームが理想的な平面波と仮定できる場合、ビーム光と鉛直線とのずれ角は、いくら以内でなければならないか。
4. 空気抵抗は大きい誤差になるので、 M_d (質量 100g 、断面積 10 cm^2) は真空中を落下させなければならない。落下速度が 3m/s の時、残留ガスによる加速度が重力加速度より 9 衡小さくなるために必要な真空度を求めよ (必要な真空度は 1mPa 以下であり、アボガドロ数は 6×10^{23} 、1 気圧は 10^5Pa 、1 モルの気体は室温・1 気圧で 20l の体積を占め、残留ガスの分子量を 30 とする)。
5. M_d はアースされた金属の管の中を落下する。 M_d が電荷を帯びていると、 M_d の落下加速度にどのような影響が生じるか。

専攻 問題 7

1. 次の方程式 (1) を満足する有界な 1 次元の関数 $\phi(x)$ を、フーリエ変換の方法によって求めたい。

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right) \phi(x) = \delta(x - a) \quad \cdots (1)$$

ただし $\delta(x)$ はデルタ関数であり、 λ は正の実数である。

- (i) $\phi(x)$ のフーリエ変換を $\hat{\phi}(k)$ とするとき、 $\hat{\phi}(k)$ の満たす方程式を求め、 $\hat{\phi}(k)$ を決定せよ。
(ii) $\phi(x)$ をもとめよ。

2. 振幅 $\psi(x, t)$ の満たす運動方程式が

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \cdots (2)$$

で表わせられる 1 次元の無限に長い弦の振動を、初期条件

$$(A) \dots \dots \psi(x, t=0) = |x - 2n\pi| - \frac{\pi}{2} \quad \cdots (3)$$

$(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$

$$(B) \dots \dots \frac{\partial \psi(x, t=0)}{\partial t} = 0 \quad \cdots (4)$$

を満たすように決定せよ。また、 $0 < t < \pi/2v$ の時間範囲で、 $\psi(x, t)$ がどのように変化するかを、述べよ。

3. 2 次元空間における関数 ψ は半径 a の円の外部で有界で、2 次元のラプラス方程式

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \cdots (5)$$

を満たし、円周上の極座標 (a, θ) で表される点では、

$$\psi(a, \theta) = \cos^2 \theta \quad \cdots (6)$$

という値をとる。 ψ を決定せよ。

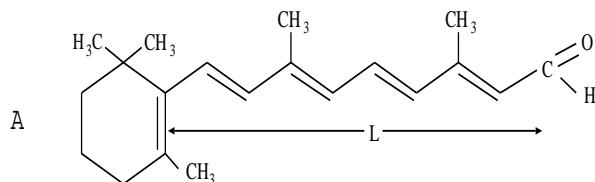
専攻 問題 8

1. Linus Pauling は 2 つのアミノ酸 ($H_2N-C\alpha R_jH-COOH$, $C\alpha$ は中心的位置にある炭素原子であり、 α -炭素と呼ばれ、 R_j はアミノ酸によって異なる側鎖を表す) がペプチド結合 (-CO-NH-) を通じて共有結合してできたジペプチドの立体的原子構造を解析した。その結果、CONH の 4 原子が一平面上にあるという興味ある意外な事実を掘んだ。彼はタンパク質分子の中でも、この 4 原子は常に同一平面上にあると考え、-ヘリックスや -シートのモデルを提唱した。
 - (i) どのような実験法を用いて、ジペプチドの立体的原子構造を明らかにしたかを 3 行以内で述べよ。(事実を知らない場合は、推察でよいが、推察の筋道を述べよ。)
 - (ii) Pauling は、CONH の 4 原子が一平面にあるという事柄を裏付ける別に事実にも気付いていた。それは何か。その事実と 4 原子が一平面上にあるという事柄の関係を述べよ。(事実を知らない場合は、推察でよいが、推察の筋道を述べよ。)
2. -ヘリックスの構造を考えよう。-ヘリックスの中ではアミノ酸残基 (-HN-C α R_jH-CO-) がラセン対称性を持って規則的に並んでいる。各 -炭素を貫く右巻きのラセンのピッチは、0.54 nm であり、ラセン軸方向を z 軸にとると、j 番目の -炭素の z 座標は 0.15 j (nm) である。この様な構造は z 軸方向に並んだ周期 c の一次元結晶と見なせる。
 - (i) 上記の数値を用いて、周期 c (True pitch と呼ばれる) を求めよ。
 - (ii) -ヘリックスの立体構造を安定化すると考えられる非共有結合について、考えられるだけの種類を挙げ、3 行以内で述べよ。(事実を知らない場合は、推察でよいが、推察の筋道を述べよ。)
3. -ヘリックスからなるタンパク質のうち一群のファミリーがあり、それらのタンパク質ではヘプタッド・モチーフ (Heptad motif) がある。これは、アミノ酸配列が 7 個を周期的に繰り返し、.....abcdefgabcdefgabcdefg.... となっており、ここで a と d は疎水性アミノ酸である。
 - (i) このモチーフをもつ -ヘリックスのなかでの疎水性アミノ酸残基の三次元的配置を図示し、その特徴を述べよ。
 - (ii) このモチーフをもつ -ヘリックスが二分子あると、水溶液中では互いに結合して、特徴ある四次構造を形成する。その特徴を述べよ。(事実を知らない場合は、推察でよいが、推察の筋道を述べよ。)

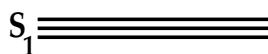
専攻 問題 9

生体物質は光吸収や蛍光発光を用いて、解析することが多い。電子の質量を m 、光速度を c 、プランク定数を h として、以下の問い合わせよ。

1. 図のような動物の目のレチナール様視物質 A の光吸収を論じる。



- (i) 電子の励起状態を求めよ。但し視物質のポリエン鎖（長さ L ）を一次元的に動く炭素原子の π 電子が光を吸収するとして考える。電子はこの L の部分の外には出られない。長さ L のポリエン鎖内の各々の炭素原子は 1 個の π 電子を供給する。
 - (ii) 炭素原子の何軌道が π 電子軌道を形成するのか。
 - (iii) $L=1\text{nm}$ とするとき、光吸収の波長を求めよ。但し $mc/h=412\text{nm}^{-1}$ を用いよ。
 - (iv) 我々が夕闇の中でも目が見えるようにするには、視物質 A の構造をどう変化させればよいかを論じよ。
2. 蛍光性アミノ酸の光学的性質は環状化合物ベンゼンをモデルとして理解できる。ベンゼンの光吸収も前問と同様に、C-C 結合上を自由に動ける π 電子の吸収として考えて、光吸収の波長を求めよ。但しこの場合、電子は円周がベンゼンの周囲の長さに等しいとした半径 r の円周軌道上を動くと考えてよい。C-C 結合の長さは 0.14nm とせよ。
 3. 環状炭化水素化合物 F は、図のように基底電子準位 S_0 と第一励起準位 S_1 を持ち、更にこれら S_0 と S_1 の上に振動準位を持つ。
 - (i) F が孤立して真空中にあるとき、吸収と蛍光発光の強度スペクトルを書き込め。但し最初は電子はすべて S_0 準位に居るとする。
 - (ii) F を有機溶媒にとかすと、スペクトルはどう変化するか書き込め。
 - (iii) S_1 励起準位に近い励起準位を持つ重金属を溶液に混在させると、F の蛍光はどう変化するか？理由も書け。



4. 蛍光性アミノ酸であるトリプトファンの蛍光を用いて水溶性球状タンパク質 P の存在状態を測定する。P の水溶液に塩酸グアニジンを加えていったとき、トリプトファンの蛍光が図のように低下した。
 - (i) 濃度 C_0 の前後で P の構造にどのような変化が起こっているか。
 - (ii) 濃度 C_0 の前後でトリプトファンの蛍光スペクトルはどのように変化するか。

専攻 問題 1 解答

1. (i) $r \leq r_0$ での動径波動方程式 ($l = 0$) は、

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_0}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E + U_0) R_0 = 0 \quad \cdots (1)$$

$R_0 = \frac{u_0(r)}{r}$ と変換すると、

$$\frac{d^2}{dr^2} u_0(r) + \frac{2m}{\hbar^2} (E + U_0) u_0(r) = 0 \quad \cdots (2)$$

これを $E + U_0 \geq 0$ のもとで解くと、 $r = 0$ で $u_0(r)/r$ が有界という条件より、 $k = \sqrt{\frac{2m(E+U_0)}{\hbar^2}}$ とすると $u_0(r) = A \sin kr$ (A :規格化定数) を得る。従って、

$$R_0(r) = A \frac{\sin kr}{r} \quad \cdots (3)$$

(ii) $r > r_0$ での動径波動方程式も前問と同様に $u_0(r)$ の微分方程式を書き換えると

$$\frac{d^2}{dr^2} u_0(r) + \frac{2m}{\hbar^2} E u_0(r) = 0 \quad \cdots (4)$$

これを $E \leq 0$ のもとで解くと、 $r \rightarrow \infty$ で $u_0(r)/r$ が有界という条件より、 $\rho = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$ とすると $u_0(r) = Be^{-\rho r}$ (B :規格化定数) を得る。従って、

$$R_0(r) = B \frac{e^{-\rho r}}{r} \quad \cdots (5)$$

(iii) $R_0(r)$ を $r = r_0$ で滑らかに接続することは、 $u_0(r)$ の接続に置き換えることができる。(i)(ii) で得られた $u_0(r)$ の $r = r_0$ での対数微分が等しいことより、

$$k \frac{\cos kr_0}{\sin kr_0} = -\rho \quad \cdots (6)$$

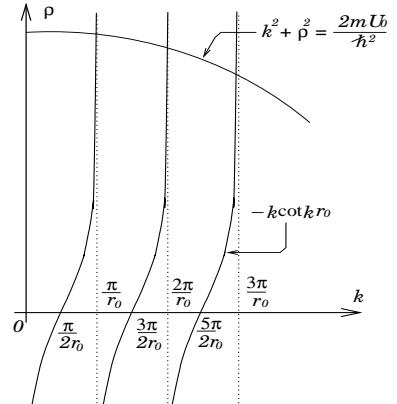
k , ρ をもとの変数に戻すと、 E と r_0 との関係式

$$\cot\left(\sqrt{\frac{2m(E+U_0)}{\hbar^2}} r_0\right) = -\sqrt{\frac{-E}{E+U_0}} \quad \cdots (7)$$

(iv) ρ と k の関係は定義より

$$k^2 + \rho^2 = \frac{2mU_0}{\hbar^2} \quad \cdots (8)$$

となる。粒子の束縛状態の数は、(6) 式と (8) 式の $k > 0$, $\rho > 0$ における交点の数に一致する。ここで、十分大きな U_0 に対しては、(6) 式と (8) 式の交点の位置は $kr_0 = n\pi$ (n :整数) を満たす点に限りなく近いが少し小さい。 $(k-\rho)$ 平面に $k \cot kr_0 = -\rho$ と原点中心で半径が無限に大きい円の第一象限での交点をイメージすれば分かる。(右図参照)



2. (i) 粒子の運動エネルギー E を無視した $r \leq r_0$ における動径方程式 ($l = 0$) を 1.(i),(ii) と同様に $u_0(r)$ ($= rR_0(r)$) を用いて書くと、

$$\frac{d^2}{dr^2} u_0(r) + \frac{2m\alpha}{\hbar^2 r_0^2} u_0(r) = 0 \quad \cdots (9)$$

$r = 0$ で $R_0(r)$ が有界であるという条件のもとに解くと、

$$R_0(r) = \frac{u_0(r)}{r} = A \frac{\sin(\sqrt{\beta} \frac{r}{r_0})}{r} \quad \cdots (10)$$

となる。但し、 $\beta = 2m\alpha/\hbar^2$ である。

(ii) $R_0(r) \simeq r^a$ を与えられた動径波動方程式に代入すると、 r^{a-2} の係数について以下の関係が成り立つ。

$$a(a-1) + 2a + \beta = 0 \iff a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \beta} \quad \cdots (11)$$

従って、 $\delta = \sqrt{\frac{1}{4} - \beta}$ とおくと、 $r \simeq r_0 (r \geq r_0)$ での近似的な動径関数は、

$$R_0(r) = Br^{-\frac{1}{2}+\delta} + Cr^{-\frac{1}{2}-\delta} \quad \cdots (12)$$

(iii) 2.(ii) で得られた動径波動関数の定数 B, C の関係を $r = r_0$ での接続条件から求める。(10) 式と (12) 式の $u_0(r) = rR_0(r)$ についての $r = r_0$ における対数微分が等しいことより、

$$\frac{\sqrt{\beta}}{r_0} \cot \sqrt{\beta} = \frac{(\frac{1}{2} - \delta)r_0^{-\frac{1}{2}-\delta}(Br_0^{2\delta} + C) + r_0^{\frac{1}{2}-\delta}(2B\delta r_0^{2\delta-1})}{r_0^{\frac{1}{2}-\delta}(Br_0^{2\delta} + C)} \quad \cdots (13)$$

$$= \frac{1}{r_0} \left(\frac{1}{2} - \delta \right) + \frac{2\delta r_0^{2\delta-1}}{r_0^{2\delta} + D} \quad \cdots (14)$$

但し、 $D = C/B$ とした。 D について解くと、

$$D = -r_0^{2\delta} \frac{\sqrt{\beta} \cot \sqrt{\beta} - (\delta + \frac{1}{2})}{\sqrt{\beta} \cot \sqrt{\beta} + (\delta - \frac{1}{2})} \quad \cdots (15)$$

となる。これより、定数を一つ減らすことができた。

$$R_0(r) = B \left[r^{-\frac{1}{2}+\delta} - r_0^{2\delta} \frac{\sqrt{\beta} \cot \sqrt{\beta} - (\delta + \frac{1}{2})}{\sqrt{\beta} \cot \sqrt{\beta} + (\delta - \frac{1}{2})} r^{-\frac{1}{2}-\delta} \right] \quad \cdots (16)$$

(iv) $\beta \geq 1/4$ の時、 δ は虚数となる。 $\delta = i\varepsilon (\varepsilon \geq 0)$ とすると、 $r \geq r_0$ において

$$R_0(r) = B \left[r^{-\frac{1}{2}+i\varepsilon} - r_0^{2i\varepsilon} \frac{\sqrt{\beta} \cot \sqrt{\beta} - \frac{1}{2} - i\varepsilon}{\sqrt{\beta} \cot \sqrt{\beta} - \frac{1}{2} + i\varepsilon} r^{-\frac{1}{2}-i\varepsilon} \right] \quad \cdots (17)$$

となり、 $R_0(r) = 0$ は以下の形に書ける。

$$\left(\frac{r}{r_0} \right)^{2i\varepsilon} = \frac{\sqrt{\beta} \cot \sqrt{\beta} - \frac{1}{2} - i\varepsilon}{\sqrt{\beta} \cot \sqrt{\beta} - \frac{1}{2} + i\varepsilon} \quad \cdots (18)$$

$\alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ などを用いて、実部と虚部に分けて両辺を比較すると、 $K = \sqrt{\beta} \cot \sqrt{\beta}$ を用いて

$$\cos \left(2\varepsilon \ln \frac{r}{r_0} \right) = \frac{(K - \frac{1}{2})^2 - \varepsilon^2}{(K - \frac{1}{2})^2 + \varepsilon^2} \quad \cdots (19)$$

$$\sin \left(2\varepsilon \ln \frac{r}{r_0} \right) = -\frac{2\varepsilon(K - \frac{1}{2})^2}{(K - \frac{1}{2})^2 + \varepsilon^2} \quad \cdots (20)$$

となる。 β を一意に定めると上式の右辺は定数となり、 r の満たすべき関係式は

$$2\varepsilon \ln \frac{r}{r_0} = \alpha_0 + 2n\pi \quad (n : \text{整数}, \alpha_0 : \text{定数}) \quad \cdots (21)$$

この関係は $r \simeq r_0$ に限って近似的に成り立つものであり、 $r_0 > 0$ の時には上式を満たす r の数は有限個であると考えられる。しかしながら、 $r_0 \rightarrow \infty$ の極限では、 $\lim_{r_0 \rightarrow 0} \ln r_0 = -\infty$ の発散により、(21) 式を満たす $r (\simeq r_0)$ は定まらない。ここにおいて、束縛状態は無限に深い井戸の底（基底状態というものが定義できない）から詰まって、無限個存在することになる。この原因是、 $1/r^2$ に比例するポテンシャル（問題で $r_0 \rightarrow 0$ としたもの）が、Heisenberg の不確定性関係に抵触して基底状態を持つことができないということにある。（詳しくは補足参照）

[補足]: Hamiltonian:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \alpha r^s \quad \cdots (22)$$

に対して、基底状態が Heisenberg の不確定性関係 $\Delta p \cdot \Delta r \geq \hbar/2$ を満たすための s の条件を調べる。基底状態では不確定性が最小限であるとして、 $p \simeq \hbar/2a$ (a :ポテンシャルの到達距離で波動関数の広がりに相当) とする。この時、基底状態のエネルギーは、

$$E_0 \simeq \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{2a} \right)^2 + \alpha a^s \quad \cdots (23)$$

と書ける。 E_0 がエネルギー固有値であるためにはパラメーター a に対して安定でなければならない。このことから、

$$\frac{\partial E_0}{\partial a} = 0 \iff a = \left(\frac{\hbar^2}{16m\alpha s} \right)^{\frac{1}{s+2}} \quad \cdots (24)$$

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial a^2} > 0 \iff s + 2 > 0 \quad \cdots (25)$$

但し、(25) の計算には (24) の結果得られた a を用いた。これより、ポテンシャル α/r^2 (本問での $r_0 \rightarrow 0$ の極限に対応) はギリギリのところで基底状態が存在できないことが分かった。

専攻 問題 2 解答

1. fig.1 の微小長方形 $ABCD$ は、 $AD, BC \ll AB, DC \ll 1$ を満たすとする。マクスウェル方程式の一つ $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ の両辺を図の長方形で積分し、左辺に Stokes の公式を使うと、

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int B \cdot dS$$

となる。 $AD \rightarrow 0, BC \rightarrow 0$ とすれば、

$$\int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

を得る。 AB も CD も \vec{E} 、境界面の変化に比べて短いので、

$$E_t(I) - E_t(II) = 0$$

であることが分かる。

2. fig.2 の微小円柱（高さ h 、底面積 S ）において、 $h \ll S \ll 1$ である。 D を円柱の表面で面積積分し、Gauss の公式とマクスウェル方程式の一つ、 $\text{div } D = \rho$ を用いて変形すると下の式を得る。

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \nabla \cdot \vec{D} dV = \int \rho dV$$

ここで、 $h \rightarrow 0$ とすると、

$$(\vec{D}(I) - \vec{D}(II)) \cdot \vec{S} = QS$$

となる。 \vec{S} は、大きさ S で、円柱の底面の法線方向を向いたベクトルである。 S は \vec{D} 、境界面の変化に比べて小さい。従って、

$$D_n(I) - D_n(II) = Q$$

と結論できる。

3. 誘電率 ϵ 、透磁率 μ 、電気伝導度 κ の物質中でのマクスウェル方程式は、

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \cdots (1)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \kappa \vec{E} \quad \cdots (2)$$

となる。完全導体中では、 $\kappa \rightarrow \infty$ である。このため (2) 式の右辺第 2 項を見て、

$$\vec{E} = 0 \quad \cdots (3)$$

(1),(3) より、

$$\vec{H} = \text{const.}$$

が分かる。 H が特になにかある値をとらなければならない理由はないので、 $\text{const.}=0$ とする。結局導体の内部では、

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{H} = 0$$

となっている。問題に与えられた境界条件 (1)~(4) にこれらを代入すると、

$$E_t(I) = 0, \quad D_n(I) = Q, \quad H_t(I) = J, \quad B_n(I) = 0$$

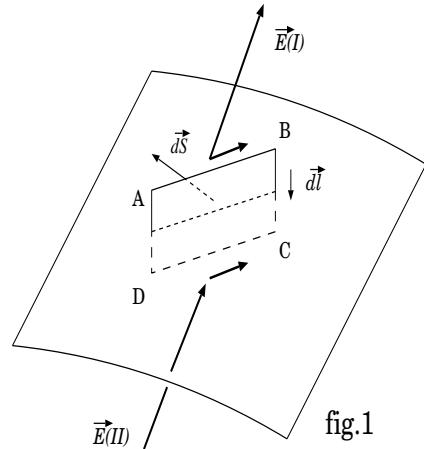


fig.1

が得られる。

4. 媒質 (II) は完全導体で、表面電流密度、 $J = H_t(I)$ となる。マクスウェル方程式 $\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ に (5) を代入すると、

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ikE_0 \exp(-2\pi i vt + ikx) \end{pmatrix}$$

であるから、これより

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{kE_0}{2\pi\nu\mu_0} \exp(-2\pi i vt + ikx) \end{pmatrix}$$

となる。 H_x 、 H_y が特別の値をとらなければならない理由はないのでこれらの値は 0 とした。従って、

$$H_z = \frac{kE_0}{2\pi\nu\mu_0} \exp(-2\pi i vt + ikx) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \exp(-2\pi i vt + ikx)$$

ただし、 $k = 2\pi\nu\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ である。反射波 E'_y, H'_z については境界条件 (1), $E_t(I) = 0$ とマクスウェル方程式より、

$$E'_y = -E_0 \exp(-2\pi i vt - ikx) , \quad H'_z = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \exp(-2\pi i vt - ikx)$$

$x = 0$ として H_z と H'_z の和をとると、表面電流密度として、

$$J = H_t(I) = H'_z + H_z = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \exp(-2\pi i vt)$$

が得られる。

5. 入射波、反射波、透過波は以下のように書ける。

$$\text{入射波: } E_y = E_0 \exp(-2\pi i vt + ikx) , \quad H_z = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} E_y$$

$$\text{反射波: } E'_y = \mp E'_0 \exp(-2\pi i vt - ik' x) , \quad H'_z = -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} E'_y$$

$$\text{透過波: } E''_y = E''_0 \exp(-2\pi i vt + ik'' x) , \quad H''_z = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}} E''_y$$

ここで、

$$k = k' = 2\pi\nu\sqrt{\epsilon_1\mu_0} , \quad k'' = 2\pi\nu\sqrt{\epsilon_2\mu_0}$$

である。複号は各々、 $\epsilon_1 < \epsilon_2$ と $\epsilon_1 > \epsilon_2$ の場合に対応する。 $x = 0$ として (1),(3) を用いると、(I) も (II) も誘電体だから $J = 0$ で、

$$\begin{cases} E_0 \mp E'_0 = E''_0 & \text{from (1)} \\ \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} (E_0 \pm E'_0) = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}} E''_0 & \text{from (3)} \end{cases}$$

となる。これより、

$$\frac{E'_0}{E_0} = \pm \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}} - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}} + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}}} = \pm \frac{\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}} \quad (\text{反射率}) \quad \frac{E''_0}{E_0} = \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}} + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}}} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}} \quad (\text{透過率})$$

となる。但し、複号の + は、 $\epsilon_1 < \epsilon_2$ の場合を指し、- は、 $\epsilon_1 > \epsilon_2$ の場合を指している。

6. 最初誘電体の中へ透過し、 $2n$ 回 ($n = 0, 1, 2, \dots$) 反射した後で再び真空へ透過していく。最終的に出てくる光を E_t とすると、

$$\begin{aligned}
E_t &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}} \right) \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}} \right) \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^{2n} E_0 \exp(2\pi i v \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} 2nL) \\
&= \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}} \right) \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^2 \exp(4\pi i v \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} L) \right\}^n E_0 \\
&= \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}} \right) \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}} \right) \frac{E_0}{1 - \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^2 \exp(4\pi i v \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} L)} \\
&= \left(\frac{4\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1}}{(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0})^2} \right) E_0 \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^2 \cos(4\pi v \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} L) - i \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^2 \sin(4\pi v \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} L)} \\
&= \left(\frac{4\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1}}{(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0})^2} \right) E_0 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^2 - \cos(4\pi v \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} L) + i \sin(4\pi v \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} L) \right\} \\
&= \left\{ \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^2 - \cos(4\pi v \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} L) \right\}^2 + \sin^2(4\pi v \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} L)
\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}
|E_t|^2 &= \frac{\frac{16\varepsilon_0\varepsilon_1}{(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0})^4} E_0^2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^4}{\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^4 + 1 - 2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^2 \cos(4\pi v \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} L)} \\
&= \frac{16\varepsilon_0\varepsilon_1 E_0^2}{(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0})^4 + (\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_0})^4 - 2\{(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0})(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_0})\}^2 \cos(4\pi v \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} L)} \\
&= \frac{8\varepsilon_0\varepsilon_1 E_0^2}{\varepsilon_1^2 + 6\varepsilon_1\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2 \cos(4\pi v \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} L)}
\end{aligned}$$

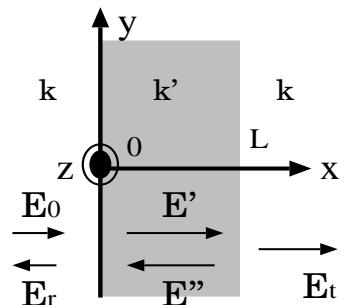
と求まる。これよりポインティングベクトルの大きさ S は、

$$\begin{aligned}
S &= |S| = |E \times H| = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_t^2 \\
&= \frac{8\varepsilon_0\varepsilon_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2}{\varepsilon_1^2 + 6\varepsilon_1\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2 \cos(4\pi v \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} L)}
\end{aligned}$$

となる。

[別解] 電場 (y 成分)、磁場 (z 成分) を $E = \tilde{E} \exp(-2\pi i v t), H = \tilde{H} \exp(-2\pi i v t)$ として、

$$\begin{cases} \tilde{E}_0 e^{ikx} - \tilde{E}_r e^{-ikx} & , \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\tilde{E}_0 e^{ikx} + \tilde{E}_r e^{-ikx}) \\ \tilde{E}' e^{ik'x} + \tilde{E}'' e^{-ik'x} & , \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} (\tilde{E}' e^{ik'x} - \tilde{E}'' e^{-ik'x}) \\ \tilde{E}_t e^{ikx} & , \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \tilde{E}_t e^{ikx} \end{cases}$$



を境界条件を代入して計算しても、全く同じ答を得ることができる。

fig.3

7. 小問 6 の答えを見ると、 $\cos(4\pi v \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} L) = 1$ のときに一番透過することが分かる。よって、

$$L = \frac{2\pi m}{4\pi v \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}} = \frac{m \lambda}{2 n}$$

ただし、 m は非負整数で、 λ 、 n はそれぞれ、真空中の電磁波の波長、誘電体の屈折率である。 L がこの条件を満たすときの透過強度と入射強度の比をとると、

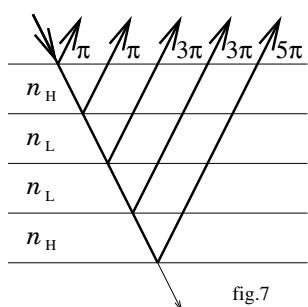
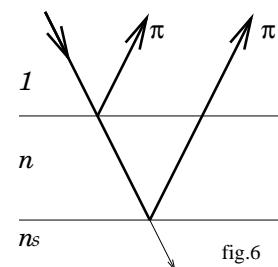
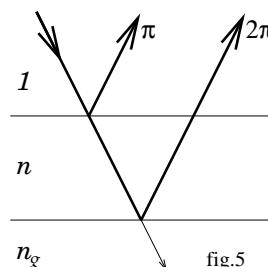
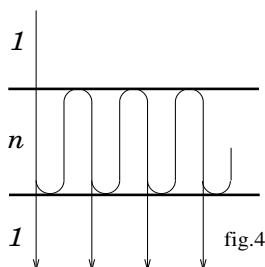
$$\frac{\text{透過強度}}{\text{入射強度}} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_t^2}{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2} = \frac{8\epsilon_0\epsilon_1}{\epsilon_1^2 + 6\epsilon_1\epsilon_0 + \epsilon_0^2 - (\epsilon_1 - \epsilon_0)^2} = 1$$

実は、小問 6 で全く反射しない光と 2 回反射して透過する光の 2 つだけで和をとって計算しても、一番透過するときの L の条件は一致する。このことは、次のように理解できる。これらの 2 つの光の位相が 2π の自然数倍だけずれるときに 2 つの光が強め合う。このとき同時に、4, 6, 8 … 回反射する光も、 2π の自然数倍だけ、位相がずれるから、結局、そのまま、透過する光と 2 回反射する光が、強め合うときは、他のすべての透過光も強め合う。(fig.4)

波長 λ の光を透過するフィルターを作りたいときに必要となる光学的厚さは、 $nL = \frac{m\lambda}{2}$ (m は非負整数) となる。但し、 $n = \frac{\sqrt{\epsilon_1\mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ で与えられる。

今、この誘電体の薄膜をガラス面（屈折率 $n_g > n$ ）に蒸着させることを考える (fig.5)。薄膜の光学的厚さ $nL = \frac{\lambda}{4}$ としておく。このとき、反射光の位相のずれは π と 2π で打ち消し合う。これは、反射防止膜と呼ばれ、眼鏡の反射防止コーティングやカメラのレンズの反射防止等に利用されている。

ガラスの代わりに別の誘電体（屈折率 $n_s < n$ ）を蒸着させたらどうなるだろうか (fig.6)。この場合は逆に、反射光同士は強め合って、反射増加膜となる。 n と n_g 、または、 n と n_s との境界での反射の時に位相が π ずれるかどうかによって、反射光が弱め合ったり強め合ったりする。



それで、今度は屈折率の大きいもの (n_H) を小さいもの (n_L) を交互に重ねる (fig.7)。左図のように重ねた多層膜は、反射増加膜として働く。実際、このような高反射率透明多層膜は、膜の数が十分に増えると、広い波長範囲にわたって、ほぼ一様な高反射率を示すようになり、このとき、同時に性能も向上し、反射率 99 % 以上のものを作ることができる。ちなみに、普通の銀膜をつかった鏡の反射率は高々 96 % である。

[注] 波長 $1/4$ の光学的厚さをもつ薄膜を何層か重ねて、その内部で生じる干渉を利用して、特定の波長領域の光のみを透過、または、反射するフィルターのことを、干渉フィルターと呼ぶ。

専攻 問題 3 解答

1. $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{S}$ とおく。このとき、ハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} J (\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2)$$

と表わせられる。各運動量の一般論から、右表のように表すことができる。

但し、 \uparrow, \downarrow は、 S_i^z ($i = 1, 2$) の固有値が $\frac{1}{2}$ または、 $-\frac{1}{2}$ の状態を表し、全体として直積を表すものとする。

2. それぞれの固有値を固有状態を表にしてまとめるとき、右表のようになる。

よって、分配関数 Z は、

$$Z = \text{Tr}[\exp(-\beta \mathcal{H})]$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{4}J\beta\right)(1 + 2\cosh(g\mu_B H\beta) + \exp(J\beta))$$

固有状態	\vec{S}^2 の固有値	\mathcal{H} の固有値
$ \uparrow_1, \uparrow_2\rangle$		
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_1, \downarrow_2\rangle + \downarrow_1, \uparrow_2\rangle)$	2	$\frac{1}{4}J$
$ \downarrow_1, \downarrow_2\rangle$		
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_1, \downarrow_2\rangle - \downarrow_1, \uparrow_2\rangle)$	0	$-\frac{3}{4}J$

- 3.

$$M = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial H} = g\mu_B \frac{2 \sinh(g\mu_B H\beta)}{1 + 2 \cosh(g\mu_B H\beta) + \exp(J\beta)}$$

$\sinh(x) = x + O(x^3)$, $\cosh(x) = 1 + O(x^2)$ を用いて、

$$\frac{M}{H} = g\mu_B \frac{2(g\mu_B H\beta) + O(H^3)}{H(3 + \exp(-J\beta) + O(H^2))} = \frac{2(g\mu_B)^2 \beta}{3 + \exp(J\beta)} (1 + O(H^2))$$

よって、

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{M}{H} = \frac{2(g\mu_B)^2 \beta}{3 + \exp(J\beta)}$$

(i) $k_B T \gg J$ ($\beta J \ll 1$) のとき

$$\chi = \frac{2(g\mu_B)^2 \beta}{4 + O(J\beta)} = \frac{(g\mu_B)^2}{2} \beta (1 + O(J\beta)) \sim \frac{(g\mu_B)^2}{2} \beta$$

(ii) $k_B T \ll J$ ($\beta J \gg 1$) のとき

$$\chi = \frac{2\beta(g\mu_B)^2}{\exp(J\beta)} (1 + \frac{1}{3} \exp(-J\beta)) \sim \frac{2(g\mu_B)^2 \beta}{\exp(J\beta)}$$

この結果を図示すると右図のようになる。

4. $\vec{S} = \vec{S}_\alpha + \vec{S}_\beta$ とし、 $\vec{S}_\alpha = \vec{S}_1 + \vec{S}_3$, $\vec{S}_\beta = \vec{S}_2 + \vec{S}_4$ とすると、

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} J (\vec{S}^2 - \vec{S}_\alpha^2 - \vec{S}_\beta^2)$$

S_α, S_β の固有値は 1 で行った通りなので、この 2 つを合成することを考えれば良い。書き漏れがないことを確かめるためにも、全体の次元が 16 存在していることを確かめることは有用である。

(i) $S_\alpha = 1, S_\beta = 1$ のとき

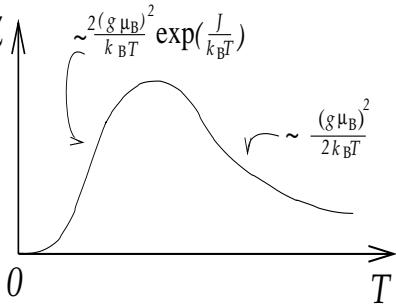
S	\mathcal{H} の固有値	次元
2	J	5
1	$-J$	3
0	$-2J$	1

(ii) $S_\alpha = 1, S_\beta = 0$ あるいは、

$S_\alpha = 0, S_\beta = 1$ のとき

S	\mathcal{H} の固有値	次元
1	0	3

(つまり、全部で次元は 6)



(iii) $S_\alpha = 0, S_\beta = 0$ のとき

S	\mathcal{H} の固有値	次元
0	0	1

5. 高温では、各々のスピンの振る舞いのランダム性が増加する。つまり、 $J(\vec{S}_1 + \vec{S}_3) \cdot (\vec{S}_2 + \vec{S}_4)$ による個々のスピン間の相互作用の効果が小さくなり、スピン個々がもっている性質に依存する。よって、 χ はスピンの個数に比例する。(エネルギー差による存在比 (population) に差が見られなくなる。) つまり、スピン n 個のときの磁化率を χ_n とすれば、

$$\frac{\chi_2}{2} \sim \frac{\chi_4}{4} \sim \frac{\chi_n}{n}$$

よって、

$$\chi_4 \sim 2\chi_2 = (g\mu_B)^2\beta$$

となる。

低温において、ほとんどが基底状態になる。2スピン系との共通点として、(但し、基底状態と第一励起状態の波動関数を $|\Psi_0\rangle$, $|\Psi_{1(i)}\rangle$ (添字 i は、縮重を考慮している。) とし、磁気モーメントを表す演算子を \hat{M} ($= g\mu_B S_z$) とする。)

•基底状態において、 $\langle M_0 \rangle = \langle \Psi_0 | \hat{M} | \Psi_0 \rangle = 0$ である。

•第一励起状態において $\langle M_i \rangle = \langle \Psi_{1(i)} | \hat{M} | \Psi_{1(i)} \rangle \neq 0$, $\sum_i \langle M_i \rangle = \sum_i \langle \Psi_{1(i)} | \hat{M} | \Psi_{1(i)} \rangle = 0$ である。

3の解答を見ると、分母が基底状態から励起状態への励起率を表し、分子が磁場を掛けたときの第一励起状態の応答を表している。同一エネルギー準位(第一励起状態)についての応答を考えるので、そのときの M は、

$$M = \frac{\sum_i M_i \exp\{-\beta(E^{(0)} - M_i H)\}}{\sum_j \exp\{-\beta(E^{(0)} - M_j H)\}} \quad \therefore \quad \frac{d}{dH} M|_{H=0, \beta \gg 1} \simeq \sum_i M_i^2 \beta$$

となる。ただし、 $E^{(0)}$ は H に因らない摂動 (H をかける) 以前のエネルギーを示している。よって、第一励起状態と基底状態のエネルギー差を $\Delta E (= \langle \Psi_{1(i)} | \mathcal{H} | \Psi_{1(i)} \rangle - \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_0 \rangle)$ として、

$$\chi \sim \frac{\sum_i M_i^2}{\exp((\Delta E)\beta)} \beta$$

となることが分かる。よって、

$$\chi_4 \sim \frac{2(g\mu_B)^2}{\exp(J\beta)} \beta$$

となる。ちなみに、地道に計算すると、

$$\chi = \frac{(g\mu_B)^2 (10 \exp(-J\beta) + 2 \exp(J\beta) + 4)\beta}{5 \exp(-J\beta) + 3 \exp(J\beta) + \exp(2J\beta) + 7} \sim \begin{cases} (g\mu_B)^2 \beta & \beta \rightarrow 0 \\ \frac{2(g\mu_B)^2 \beta}{\exp(J\beta)} & \beta \rightarrow \infty \end{cases} \quad \cdots (1)$$

となる。各自、確かめてほしい。(次元が 16 あることに注意) また、『低温のときは、基底状態と励起状態のみで計算しても低温極限では、磁化率は同じ解になり、高温極限では、 $\beta J = 0$ の仮定のもとで計算しても同じ解が得られる。』ことから、磁化率の振る舞いを論じても良い。

[補足 1] χ に対する一般解を求めてみよう。磁場を摂動的に考えて、

$$E_n = E_n^{(0)} - M_n H \quad (\text{但し}, E_n^{(0)} \text{は } H \text{ に因らない摂動以前のエネルギーを示す。})$$

磁化 M は $M = \frac{\sum_n M_n \exp(-\beta E_n)}{\sum_m \exp(-\beta E_m)}$ で与えられる。さらに、 $M|_{H=0} = 0$ を仮定する。この仮定は、自発磁化が存在しない場合にのみ、許される。(この問題に対して適切である。) 磁化率 χ は、

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{M}{H} \simeq \frac{d}{dH} M|_{H=0} = \frac{\sum_n M_n^2 \exp(-\beta E_n)}{\sum_m \exp(-\beta E_m)} \beta \quad \cdots (2)$$

これに対し、スピンの合成の結果（[補足 2] 参照）の値を代入すると、地道に計算した結果の χ ((1)) が得られる。

ここで、(2) の式で得られた χ の低温極限と高温極限について調べてみよう。低温極限については、式の形から、解答に示した物理的考察によって得られた低温極限の近似式が正しいことは明らかである。高温極限については、

$$\frac{d^2}{d\beta^2}(e^\beta + e^{-\beta})^n = n(n-1)(e^\beta + e^{-\beta})^{n-2}(e^\beta - e^{-\beta})^2 + n(e^\beta + e^{-\beta})^n$$

両辺に $\beta = 0$ を代入し、左辺を展開することにより、二項係数 ${}_n C_j$ を用いて、

$${}_n C_0 n^2 + {}_n C_1 (n-2)^2 + {}_n C_2 (n-4)^2 \cdots + {}_n C_n (-n)^2 = 2^n \times n$$

これを用いて、高温極限の近似式は、 M_n がスピンの合成より得られたことを考えると、全スピンの数 N （この問題では $N = 4$ ）として、

$$\frac{\sum_n M_n^2 \exp(-\beta E_n)}{\sum_m \exp(-\beta E_m)} \beta \sim \frac{\frac{(g\mu_B)^2}{4} N 2^N}{2^N} \beta = \frac{N(g\mu_B)^2}{4} \beta \propto N$$

となるから、解答に示した物理的考察によって得られた高温極限の近似式が正しいことが示せたことになる。

[補足 2] 問題 4 で、地道に計算すると、スピン 4 つの合成を行わねばならない。最初にスピン二つずつを合成し、最後にもう一度合成した方が分かりやすいだろう。スピンの合成は、単に計算していけばよいので、計算結果のみ示すこととする。（下の (i),(ii),(iii) の場合わけは、問題 4 の振り方と同じである。）

(i) $S_\alpha = 1, S_\beta = 1$ のとき

$$(イ) S = 2 \quad (S_z = \frac{M}{g\mu_B})$$

S_z	スピン波動関数
2	$ \uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow\rangle$
1	$\frac{1}{2}\{ \downarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow\rangle + \uparrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow\rangle + \uparrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow\rangle + \uparrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle\}$
0	$\frac{1}{\sqrt{6}}\{ \downarrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow\rangle + \downarrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow\rangle + \downarrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle + \uparrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow\rangle + \uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow\rangle + \uparrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow\rangle\}$
-1	$\frac{1}{2}\{ \uparrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow\rangle + \downarrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow\rangle + \downarrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow\rangle + \downarrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow\rangle\}$
-2	$ \downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow\rangle$

(ロ) $S = 1$

S_z	スピン波動関数
1	$\frac{1}{2}\{ \uparrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle + \uparrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow\rangle - \uparrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow\rangle - \downarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow\rangle\}$
0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\{ \uparrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow\rangle - \downarrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow\rangle\}$
-1	$\frac{1}{2}\{ \uparrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow\rangle + \downarrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow\rangle - \downarrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow\rangle - \downarrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow\rangle\}$

(ハ) $S = 0$

S_z	スピン波動関数
0	$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{2 \uparrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow\rangle + 2 \downarrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow\rangle - \uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow\rangle - \uparrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow\rangle - \downarrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle - \downarrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow\rangle\}$

(ii) (a) $S_\alpha = 1, S_\beta = 0$ のとき

S_z	スピン波動関数
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}\{ \uparrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle - \uparrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow\rangle\}$
0	$\frac{1}{2}\{ \downarrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle + \uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow\rangle - \downarrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow\rangle - \uparrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow\rangle\}$
-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}\{ \downarrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow\rangle - \downarrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow\rangle\}$

(b) $S_\alpha = 0, S_\beta = 1$ のとき

S_z	スピン波動関数
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow\rangle - \downarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow\rangle)$
0	$\frac{1}{2}(\uparrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow\rangle + \uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow\rangle - \downarrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow\rangle - \downarrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle)$
-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow\rangle - \downarrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow\rangle)$

(iii) $S_\alpha = 0, S_\beta = 0$ のとき

S_z	スピン波動関数
0	$\frac{1}{2}(\uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow\rangle + \downarrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow\rangle - \uparrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow\rangle - \downarrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle)$

専攻 問題 4 解答

1. (i) a と b が異種粒子の時は、各々の入射波が干渉しあうことはないので

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

- (ii) a と b が同種粒子でスピン 0 のボゾンの時、空間部分に対称性を持たせるために、

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 \\ &= |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 + 2\text{Re}[f(\theta)f(\pi - \theta)^*]\end{aligned}$$

となり、 $|f(\theta)|$ と $|f(\pi - \theta)|$ が同時に観測され、かつ干渉を起こすことが分かる。

- (iii) スピン 1/2 の 2 粒子は、合成スピン 0 (1 重項) の時はスピン部分が粒子の入れ替えに対して反対称であるので空間部分が対称、合成スピン 1 (3 重項) の時はスpin部分が対称なので空間部分が反対称となることから、スピンを観測しないときの断面積は

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{4}|f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 + \frac{3}{4}|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 \\ &= |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 - \text{Re}[f(\theta)f(\pi - \theta)^*]\end{aligned}$$

となり、この場合も干渉を起こすことが分かる。

2. (i) 実験室系で運動エネルギー E_L (速度 v_A) の粒子 a (質量 m_A) が静止している粒子 b (質量 m_B) に衝突する過程を重心系で見ると、重心速度 $V = \frac{m_A v_A}{m_A + m_B}$ (粒子 a の進行方向を正とする) に対して粒子 a は速度 $v_A - V$ 、粒子 b は速度 V で運動していることになるので、重心系での運動エネルギーは

$$E_C = \frac{1}{2}m_A(v_A - V)^2 + \frac{1}{2}m_BV^2 = \frac{m_B}{m_A + m_B}E_L$$

と表せる。今、 $m_A = m_B = m_{^{12}\text{C}}$ 、 $E_L = 10 [\text{MeV}]$ であるので、重心系での運動エネルギーは $T = E_C = \frac{1}{2}E_L = 5 [\text{MeV}]$ となる。

また、入射してくる ^{12}C のドブロイ波長は非相対論的には以下の様に計算できる。

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi(\hbar c)}{\sqrt{2(M_{^{12}\text{C}}c^2)E_L}} = \frac{2\pi \times 200 [\text{MeV}] \cdot [\text{fm}]}{\sqrt{2 \times 12000 \times 10} [\text{MeV}]} = 2.56 [\text{fm}]$$

この結果は、原子核 (1 ~ 10 [fm]) の構造を調べるのに適していると言える。

- (ii) 電荷 $+6e$ の 2 つの原子核の中心が $2R$ だけ離れた位置にあるとき、クーロン相互作用によるポテンシャルは

$$V_{\text{coulomb}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{36e^2}{2R} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \frac{18\hbar c}{R}$$

で与えられる。ここで、 $R = 1.2 \times 12^{1/3} \approx 2.8 [\text{fm}]$ 、 $\hbar c = 200 [\text{MeV}] \cdot [\text{fm}]$ 、 $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$ を用いて計算すると $V_{\text{coulomb}} \approx 9.4 [\text{MeV}]$ となる。従って、 $V_{\text{coulomb}} > T$ が確かめられ、Rutherford 散乱が中心の微分断面積が得られることが分かる。

- (iii) 実験結果 A:

$\theta = 90$ 度における微分断面積の対称性がないことから、干渉効果は見られず散乱後の 2 粒子は区別できるものである。従って、 ^{12}C と ^{13}C の弾性散乱の微分断面積であることが分かる。

実験結果 B:

重心系での散乱角が 90 度の時、微分断面積が極大となっている。これは、干渉項がプラスで効いているので、ボゾン同士の散乱である。従って、 ^{12}C と ^{12}C の弾性散乱。

実験結果 C:

重心系での散乱角が 90 度の時、微分断面積が極小となっている。これは、干渉項がマイナスで効いているので、フェルミオン同士の散乱である。従って、 ^{13}C と ^{13}C の弾性散乱。

[補足]

1.(ii),(iii) を用いて、散乱角が 90 度の時の微分断面積を求める

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Boson} \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 4 \left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Fermion} \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = \left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|^2$$

と計算できる。ここで、与えられたグラフを見ると、 $\theta = 90$ 度の微分断面積の値が B では 0.8、C では 0.2 程度なので上の考察が正しいことが確認できる。

3. (i) 400 keV の励起状態から、基底状態へ落ちるときに放出される 線の波長は、

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{2\pi\hbar c}{E} = \frac{2\pi \times 200 [\text{MeV}] \cdot [\text{fm}]}{400 \times 10^{-3} [\text{MeV}]} = 2.9 \times 10^{-12} [\text{m}]$$

- (ii) 自然幅 Γ 、平均寿命 τ の間には不確定性関係 $\Gamma \cdot \tau = \hbar$ が成り立っていることより、

$$\Gamma = \frac{\hbar c}{\tau c} = \frac{200 [\text{MeV}] \cdot [\text{fm}]}{1.1 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^{23} [\text{fm}]} \approx 6 \times 10^{-4} [\text{eV}]$$

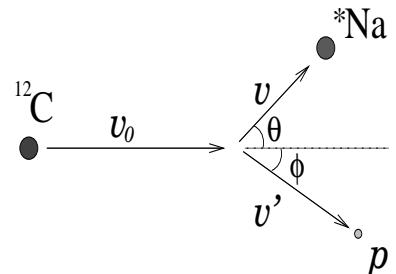
- (iii) 核反応に関する力は短距離力である強い相互作用であるため、2 つの原子核が十分に近づかなければ反応は起こらない。今回の実験では、入射エネルギーが十分でないために、クーロン斥力に打ち勝って接近しにくいためであると考えられる。

- (iv) 反応の Q 値が 0 であるという仮定より、古典力学の弾性衝突の問題として扱える。図のような衝突過程を考えるとエネルギー保存則、運動エネルギー保存則より、

$$m_C v_0 = m_{\text{Na}} v \cos \theta + m_p v' \cos \phi \quad \cdots (1)$$

$$0 = m_{\text{Na}} v \sin \theta - m_p v' \sin \phi \quad \cdots (2)$$

$$\frac{1}{2} m_C v_0^2 = \frac{1}{2} m_{\text{Na}} v^2 + \frac{1}{2} m_p v'^2 \quad \cdots (3)$$



この 3 式より観測にかかる量 v' と ϕ を消去する。(1),(2) より ϕ を消去すると

$$(m_C v_0 - m_{\text{Na}} v \cos \theta)^2 + (m_{\text{Na}} v \sin \theta)^2 = (m_p v')^2 \quad \cdots (4)$$

(3),(4) より、 v' を消去して、 v の方程式にすると、

$$m_{\text{Na}}(m_{\text{Na}} + m_p)v^2 - 2(m_C m_{\text{Na}} v_0 \cos \theta)v + m_C(m_C - m_p)v_0^2 = 0$$

上式の解は

$$v = \frac{m_C m_{\text{Na}} v_0 \cos \theta \pm \sqrt{(m_C m_{\text{Na}} v_0 \cos \theta)^2 - m_C m_{\text{Na}}(m_{\text{Na}} + m_p)(m_C - m_p)v_0^2}}{m_{\text{Na}}(m_{\text{Na}} + m_p)}$$

これより、 v の最大値は $\cos \theta = 1$ 、複号プラスの時で

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \frac{m_C m_{\text{Na}} + \sqrt{(m_C m_{\text{Na}})^2 - m_C m_{\text{Na}}(m_{\text{Na}} + m_p)(m_C - m_p)}}{m_{\text{Na}}(m_{\text{Na}} + m_p)} v_0 \\ &= \frac{m_C}{m_{\text{Na}} + m_p} \left[1 + \sqrt{1 - \left(1 + \frac{m_p}{m_{\text{Na}}} \right) \left(1 - \frac{m_p}{m_C} \right)} \right] v_0 \end{aligned}$$

ここで、 $v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 10 [\text{MeV}]}{12 \times 1000 [\text{MeV}]}} c = 0.04c$ (c : 光速) より、

$$v_{\max} = \frac{12}{23 + 1} \left[1 + \sqrt{1 - \left(1 + \frac{1}{23} \right) \left(1 - \frac{1}{12} \right)} \right] v_0 = 0.024c$$

- (v) $^{23}\text{Na}^*$ が標的中で減速される際に失うエネルギーは、放出される γ 線のエネルギーには変化をもたらさない。従って、 γ 線のエネルギーを変化させるものは主に $^{23}\text{Na}^*$ のもつ速度による放出 γ 線のドップラー効果である。光のドップラー効果は相対論を用いる必要がある。

線のエネルギーが最大 :

入射粒子と同じ向きに運動している $^{23}\text{Na}^*$ が生成されると同時に γ 線を放射するときで、

$$E' = h\nu' = h \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\nu = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}E = 451 \text{ [keV]}$$

非相対論的に $\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 1 + \beta + O(\beta^2)$ として、2 次以上の項を無視して計算しても同じ結果になる。

線のエネルギーが最小 :

核反応によって生じた $^{23}\text{Na}^*$ が標的の中で完全に静止した後に γ 線を放射するときで、

$$E' = E = 440 \text{ [keV]}$$

エネルギー保存則から、入射方向と反対方向に v_{max} で $^{23}\text{Na}^*$ が出ていくことは有り得ないことに注意。

- (vi) 線と物質との相互作用は主に以下に 3 つがある。

光電効果

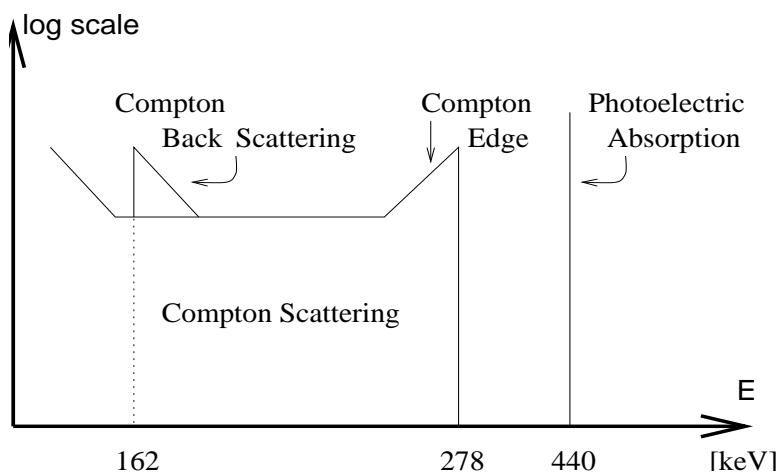
線が原子に吸収されて、主として K 裂の電子が運動エネルギー $E = h\nu - (\text{仕事関数})$ で飛び出してくる現象。低エネルギーの 線領域で支配的。

コンプトン散乱

原子中の電子の束縛エネルギーが無視できるほど入射光子のエネルギーが大きくなると、光子と自由電子の衝突という描像が成り立ち、自由電子による光子の散乱が生じる。これを、コンプトン散乱という。
電子対生成

光子のエネルギーが非常に大きくなると、物質中の電磁場と 線の相互作用により、電子と陽電子の対が生成される。この時、必要な光子のエネルギーは、Dirac の海に沈んでいる電子をたたき出すエネルギーなので、 $2m_e c^2 = 1.02 \text{ [MeV]}$ となる。

- (vii) NaI シンチレーションカウンタのエネルギースペクトルは下図のようになる。光電吸収ピークのエネルギーが 440[keV] に一致している。



専攻 問題 5 解答

1. まとめると次のようになる。

	ラウ法	デバイ・シュラー法
目的	結晶の対称性を調べたり、既知結晶の方向を調べる。	結晶の格子定数・構造等を決定する。
用いる X 線	連続 X 線 (白色 X 線)	単色 X 線
試料	単結晶	粉末状結晶

2. $\mathbf{g} = (ng_1, ng_2, ng_3) = n\mathbf{g}_0$ の形に、 g_1, g_2, g_3 が互いに素になるような整数 n をとる。 $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0| = \frac{1}{\lambda}$ なので、

$$|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|^2 = |\mathbf{g}|^2 \iff 4 \frac{1}{\lambda}^2 \sin^2 \theta = \frac{n^2}{d^2} \iff n\lambda = 2d \sin \theta$$

よって、プラッグの反射の公式が得られた。

3. 今、bcc (体心立方) の単位胞として図の立方体を考える。この単位胞には 2 つの同種粒子が $(0, 0, 0)$ と $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ に入っていると考えられるので、 $f_{(0,0,0)}(\mathbf{g}) = f_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\mathbf{g}) \equiv f(\mathbf{g})$ として、

$$\begin{aligned} F(\mathbf{g}) &= f(\mathbf{g}) \{1 + \exp(i\pi(g_1 + g_2 + g_3))\} \\ &= f(\mathbf{g}) \times \begin{cases} 0 & g_1 + g_2 + g_3 = \text{Odd} \\ 2 & g_1 + g_2 + g_3 = \text{Even} \end{cases} \end{aligned}$$

$|g_1| < |g_2| \iff |\theta_1| < |\theta_2|$ から、 $|\mathbf{g}|$ の小さいものから 3 つ挙げれば良い。但し、 g_1, g_2, g_3 の入れ替えの組み合わせで等しくなったり、正負が逆転しているものは、同等な反射となるので、除かなければならない。また、 $F(\mathbf{g})$ が 0 になり上の消滅則を満たすものは、反射しないことを意味するので除かねばならない。よって、求めるミラー指数は $(1, 1, 0), (2, 0, 0), (2, 1, 1)$ である。

fcc の場合も、同様に 3 つの同種粒子が存在していると考えて、

$$\begin{aligned} F(\mathbf{g}) &= f(\mathbf{g}) (1 + \exp(i\pi(g_2 + g_3)) + \exp(i\pi(g_3 + g_1)) + \exp(i\pi(g_1 + g_2))) \\ &= f(\mathbf{g}) (1 + (-1)^{(g_2+g_3)} + (-1)^{(g_3+g_1)} + (-1)^{(g_1+g_2)}) \\ &= f(\mathbf{g}) \times \begin{cases} 4 & g_1, g_2, g_3 \quad \text{All Odd or All Even} \\ 0 & g_1, g_2, g_3 \quad \text{Otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

bcc と同様にして、求めるミラー指数は、 $(1, 1, 1), (2, 0, 0), (2, 2, 0)$ となる。

4. 2 の計算から、3 でもとめたプラッグ角 θ_B の小さいものから、 θ_{B1}, θ_{B2} とすると、 $\sin \theta_B$ の比は、

$$\frac{\sin \theta_{B1}}{\sin \theta_{B2}} = \frac{|g_1|}{|g_2|}$$

の関係があるので、与えられた表の数値について、計算すると、右表のようになる。

よって、A を bcc、B を fcc と判断すべきである。よって、A が鉄である。

5. 3 と同様にして、図の立方体を単位胞と考えると、 $\forall f_i(\mathbf{g}) \{r_i\} \text{Cl 原子が存在している。}\} \equiv f_{\text{Cl}}$ 、 $\forall f_i(\mathbf{g}) \{r_i\} \text{Na 原子が存在している。}\} \equiv f_{\text{Na}}$

	$\frac{\sin \theta_{B1}}{\sin \theta_{B2}}$	$\frac{\sin \theta_{B3}}{\sin \theta_{B1}}$	$2 \frac{\sin \theta_{B1}}{\sin \theta_{B2}}$	$\frac{\sin \theta_{B3}}{\sin \theta_{B1}}$
A	1.417	1.731	1.411	1.221
B	1.152	1.635	1.734	1.418
bcc	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$		
fcc			$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$

子が存在している。} $\equiv f_{\text{Na}}$ と書くことになると、

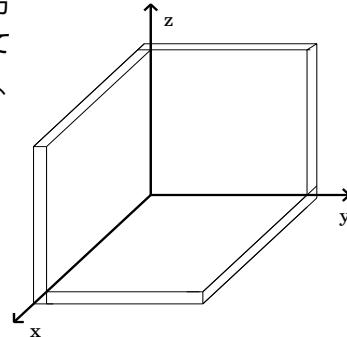
$$F(g) = f_{\text{Cl}}(1 + (-1)^{g_2+g_3} + (-1)^{g_3+g_1} + (-1)^{g_1+g_2}) + f_{\text{Na}}((-1)^{g_1} + (-1)^{g_2} + (-1)^{g_3} + (-1)^{g_1+g_2+g_3}) \\ = \begin{cases} 4(f_{\text{Na}} + f_{\text{Cl}}) & \text{All Even} \\ 4(f_{\text{Na}} - f_{\text{Cl}}) & \text{All Odd} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

Na、Cl に対して散乱因子が大きく異なる原因是考えられないから、 $|f_{\text{Na}} + f_{\text{Cl}}| > |f_{\text{Na}} - f_{\text{Cl}}|$ と考えるのが正しいと思われる。すると $|g|$ の小さいものから順に、右表の通り、偶奇性とピークの大小の対応がとれしており、上の推定が正しく、強度分布を説明できることになる。

g	$F(g)$ の条件	読み取りのピークの大きさ
(1, 1, 1)	All odd	小
(2, 0, 0)	All Even	大
(2, 2, 0)	All Even	大
(3, 1, 1)	All Odd	小
(2, 2, 2)	All Even	大

専攻 問題 6 解答

1. 右の図の 3 枚の平面鏡の法線方向を、それぞれ x, y, z 軸にとる。入射光の方向ベクトルを (a, b, c) とする。すると方向ベクトルは、 yz 平面で反射して $(-a, b, c)$ 、 xy 平面で反射して $(-a, b, -c)$ 、 zx 平面で反射して $(-a, -b, -c)$ の様に変わるので、入射光と平行に反射する。



2. 問題図中の t_1, t_2, t_3 は、左図のそれぞれ \times がふってあるところである。 $t_1 \sim t_2$ 間にコーナーリフレクターは、半波長分落下している。また、同様に $t_2 \sim t_3$ 間にコーナーリフレクターは、半波長分落下している。よって、 $t = 0$ におけるコーナーリフレクターの落下速度を v_0 とおくと、以下の関係式が得られる。(重力加速度を g 、入射光の波長を λ とおいた)

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}gt_2^2 + v_0t_2) - (\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0t_1) = \frac{\lambda}{2} \\ (\frac{1}{2}gt_3^2 + v_0t_3) - (\frac{1}{2}gt_2^2 + v_0t_2) = \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

両者から v_0 を消去して整理すると

$$g = \lambda \cdot \frac{2t_2 - (t_1 + t_3)}{(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)}$$

3. ピームが鉛直線と角 φ をなしているとする。この時、 M_d で反射する光路の変化 $\Delta l'$ は、実際に M_d が動いた Δl と

$$\Delta l = \Delta l' \cos \varphi$$

の関係がある。ここで前問と同様に g を求めてやると

$$g(\varphi) = \lambda \cdot \frac{2t_2 - (t_1 + t_3)}{(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)} \cos \varphi$$

となり、 $\cos \varphi$ の項がつく。従って、正しい ($\varphi = 0$) ものに比べ

$$\frac{g(0) - g(\varphi)}{g(0)} = 1 - \cos \varphi \approx \frac{\varphi^2}{2}$$

($\varphi \approx 0$ の時 $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$)

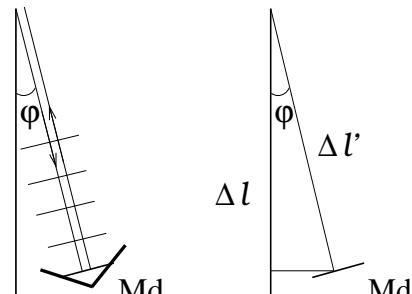
の差がある。これは相対測定精度とみなせるので、それが 10^{-9} となるためには $\frac{\varphi^2}{2} = 10^{-9}$ となればよい。よって、

$$\varphi = \sqrt{2 \times 10^{-9}} = 4.5 \times 10^{-5} \text{ [rad]}$$

従って、ずれ角は $4.5 \times 10^{-5} \text{ [rad]}$ 以下でなくてはならないことがわかる。

4. まず、室温での残留ガスの二乗平均速度を求める。

$$\frac{1}{2}m\bar{v^2} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T$$



$$\bar{v^2} = \frac{3RT}{N_A m}$$

ここで $pV = nRT$ と、与えられた条件より

$$RT = 20[\text{atm} \cdot l/\text{mol}] = 2 \times 10^3[\text{Pa} \cdot \text{m}^3/\text{mol}]$$

また、 $N_A m = 3 \times 10^{-2}[\text{kg}/\text{mol}]$ より

$$\bar{v^2} = 2 \times 10^5[\text{m}^2/\text{s}^2]$$

したがってこの時

$$v_x^- = \frac{2}{3} \times 10^5 \quad \therefore \sqrt{v_x^-} = 258.2[\text{m/s}]$$

M_d に対し、下から衝突する残留ガス分子は、本来よりも 3[m/s] だけ速く、上から衝突するものは 3[m/s] だけ遅く感じことになるので、

$$v_{down}^- = 3(\sqrt{v_x^-} + 3)^2 = 2.0467 \times 10^5[\text{m}^2/\text{s}^2]$$

$$v_{up}^- = 3(\sqrt{v_x^-} - 3)^2 = 1.9538 \times 10^5[\text{m}^2/\text{s}^2]$$

M_d の運動について

$$Ma = Mg - (p_{up} - p_{down})S$$

問題の条件を満たすためには、

$$\frac{(p_{up} - p_{down})S}{Mg} < 10^{-9}$$

$$p_{up} - p_{down} < 10^{-9} \cdot \frac{0.1 \times 10}{1.0 \times 10^{-3}} = 10^{-6} \text{ Pa}$$

ここで、

$$p = \frac{N}{N_A} \frac{RT}{V} = \frac{Nm}{3V} \bar{v^2}$$

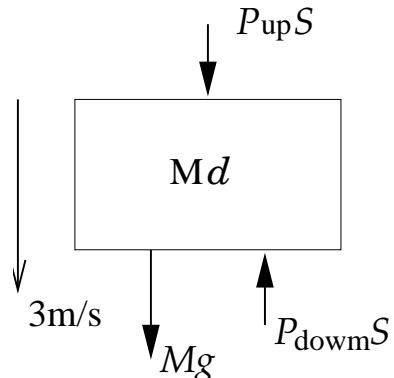
よって、必要な条件は結局

$$\frac{Nm}{3V} < 10^{-10}$$

ここで、1気圧のとき

$$10^5 = \frac{Nm}{3V} \times 2 \times 10^5 \quad \frac{Nm}{3V} = 5 \times 10^{-1}$$

したがって、必要な真空度は $2 \times 10^{-10}[\text{atom}] = \underline{\underline{2 \times 10^{-5}[\text{Pa}]}}$



5. 周りはアースされた金属管であるから、 M_d に電荷があると、その内部表面に M_d と反対の電荷が誘起され、いわゆる遮蔽効果が観察される。 M_d が静止していれば、誘起される電荷はポテンシャルが最低となる分布をしておわるが、 M_d が動くとこの分布も常に変化し、新たにポテンシャルが最低となるような分布を作ろうとする。この時、移動する電子は金属内で抵抗を受け、ジュークル熱を発する。このエネルギーは M_d の持つエネルギーの減少分で補われねばならないので、結果として M_d の運動エネルギーは減り、減速される。
- (誘導される電荷が、 M_d が動くのを妨げる方向に力を及ぼす、という書き方もある)

専攻 問題 7 解答

1. (i) 両辺に $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \exp(-ikx)$ なる演算子を (1) に演算して、

$$(k^2 + \lambda^2)\hat{\phi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-ika)$$

よって、

$$\hat{\phi}(k) = \frac{\exp(-ika)}{\sqrt{2\pi}(k^2 + \lambda^2)}$$

(ii)

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{\phi}(k) \exp(ikx) dk = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\exp(ik(x-a))}{k^2 + \lambda^2} dk \quad \cdots (1)$$

一方、 $\alpha > 0$ として、右図のような経路 $C (= C_1 + C_2), C_1, C_2$ についての複素積分、

$$\int_C dz \frac{\exp(iz\alpha)}{z^2 + \lambda^2} = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} \right) \frac{\exp(iz\alpha)}{z^2 + \lambda^2} dz \quad \cdots (2)$$

を考える。まず、経路 C_1 について、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} dz \frac{\exp(iz\alpha)}{z^2 + \lambda^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\exp(iz\alpha)}{z^2 + \lambda^2} \quad \cdots (3)$$

次に、経路 C_2 について

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_2} dz \frac{\exp(iz\alpha)}{z^2 + \lambda^2} \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi d\theta \frac{R \exp(-R\alpha \sin \theta)}{R^2 - \lambda^2} = 0$$

となるから、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} dz \frac{\exp(iz\alpha)}{z^2 + \lambda^2} = 0 \quad \cdots (4)$$

となる。留数定理より、

$$\oint \frac{dz}{z - i\lambda} \frac{\exp(iz\alpha)}{z + i\lambda} = 2\pi i \frac{\exp(i(i\lambda)\alpha)}{i\lambda + i\lambda} = \frac{\pi \exp(-\lambda\alpha)}{\lambda} \quad \cdots (5)$$

(2) の両辺に $\lim_{R \rightarrow \infty}$ をかけると、(3),(4),(5) より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iz\alpha)}{z^2 + \lambda^2} = \frac{\pi \exp(-\lambda\alpha)}{\lambda} \quad \cdots (6)$$

となる。以下、(6) を (1) に用いると、

(i) $x - a > 0$ のとき、 $\alpha = x - a, z = k$ を代入して、

$$\phi(x) = \frac{\exp(-\lambda(x-a))}{2\lambda}$$

(ii) $x - a < 0$ のとき、 $\alpha = -(x - a), z = k$ を代入して、

$$\phi(x) = \frac{\exp(\lambda(x-a))}{2\lambda}$$

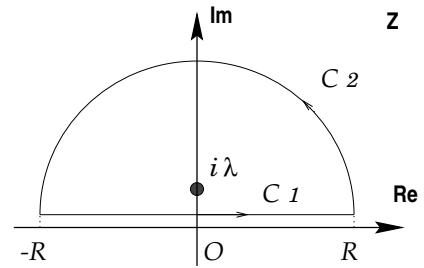
(iii) $x - a = 0$ のとき、微分方程式から $\phi(x)$ に連続性を要求されるため、

$$\phi(x) = \frac{\exp(0)}{2\lambda}$$

以上をまとめると、

$$\phi(x) = \frac{\exp(-\lambda|x-a|)}{2\lambda}$$

となる。



2. $\xi = x + vt$, $\zeta = x - vt$ とすると、

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

となるから、

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) = -4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta}$$

なので、

$$(2) \iff \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} \psi = 0$$

よって、一般解は、

$$\psi = F(\xi) + G(\zeta) = F(x + vt) + G(x - vt)$$

となる。(3) より、

$$F(x) + G(x) = |x - 2n\pi| - \frac{\pi}{2}$$

(4) より、

$$vF'(x) - vG'(x) = 0$$

上の 2 式を解いて

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(|x - 2n\pi| - \frac{\pi}{2} \right) + \text{Const}, \quad G(x) = \frac{1}{2} \left(|x - 2n\pi| - \frac{\pi}{2} \right) - \text{Const}$$

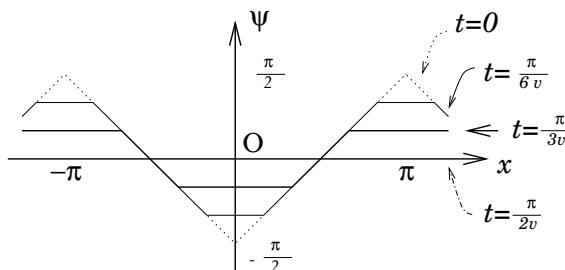
ただし、上の Const は同じ数値である。よって、

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} (|x + vt - 2n_+ \pi| + |x - vt - 2n_- \pi| - \pi)$$

但し、 $(2n_+ - 1)\pi < x + vt < (2n_+ + 1)\pi, (2n_- - 1)\pi < x - vt < (2n_- + 1)\pi$ である。解の振る舞いは $0 < t < \frac{\pi}{2v}$ のとき、

$$\psi(x, t) = \begin{cases} -vt + \frac{\pi}{2} & (2n - 1)\pi \leq x < vt + (2n - 1)\pi \\ -(x - 2n\pi) - \frac{\pi}{2} & vt + (2n - 1)\pi \leq x < -vt + 2n\pi \\ vt - \frac{\pi}{2} & -vt + 2n\pi \leq x < vt + 2n\pi \\ (x - 2n\pi) - \frac{\pi}{2} & vt + 2n\pi \leq x < -vt + (2n + 1)\pi \\ -vt + \frac{\pi}{2} & -vt + (2n + 1)\pi \leq x < (2n + 1)\pi \end{cases}$$

図示すると、以下のようになる。



3. 2 次元極座標 ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$) を用いると、

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

となる。 $\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ を仮定すると

$$(5) \iff \frac{1}{R} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 R(r) = -\frac{1}{\Theta(\theta)}$$

となるから、上式が恒等的に成り立つのは、両辺が定数であるときであり、それを m^2 とすると、

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \Theta(\theta) = -m^2 \Theta \quad , \quad \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 R(r) = m^2 R(r) \quad \cdots (7)$$

$\Theta(\theta)$ について解く。両辺が m^2 のときの R, Θ の解をそれぞれ $R_m(r), \Theta_m(\theta)$ とすると、

$$\Theta_m(\theta) = A' \exp(im\theta) + B' \exp(-im\theta) = A \cos(m\theta + \delta_m)$$

となる。但し、 2π の周期性から、 m は実数であり (\cos で表され) かつ、整数であり、 $m \geq 0$ としても、一般性を失わない。

$\ln r = \xi$ とおくと、 $r \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \xi}$ なので、

$$R_m = A_m e^{-m\xi} + B_m e^{m\xi} = A_m r^{-m} + B_m r^m \quad (m \neq 0)$$

$$R_0 = A_0 + B_0 \xi = A_0 + B_0 \ln r$$

となる。 $\Theta(\theta)$ が完全系をなしているので、一般解は、

$$\psi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m(r) \Theta_m(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^{-m} + B_m r^m) \cos(m\theta + \delta_m) + A_0 + B_0 \ln r \quad \cdots (8)$$

$$(6) \iff \psi(r=a, \theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad \cdots (9)$$

(8),(9) を比較して、

$$A_0 + B_0 \ln a = \frac{1}{2} \quad , \quad A_2 a^{-2} + B_2 a^2 = \frac{1}{2} \quad , \quad A_m a^{-m} + B_m a^m = 0 \quad (m \neq 0, 2) \quad , \quad \delta_m = 0$$

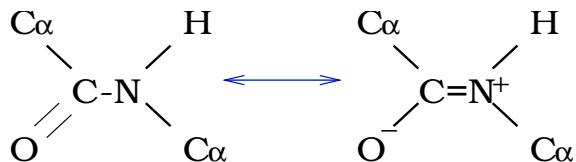
解の、 $r \rightarrow \infty$ における有界性より、 $B_m = 0$ を用いれば、

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos 2\theta \right]$$

となる。

専攻 問題 8 解答

1. (i) ジペプチドの結晶に単一波長の X 線を当て、散乱される様子を写真で調べ、電子密度図を得、それから原子の立体的位置を決める。
- (ii) ペプチドは右図のような共鳴構造をとる。C-N が二重結合性をもつために、この結合を軸として回転することができず、CONH の 4 原子が一平面内にある。



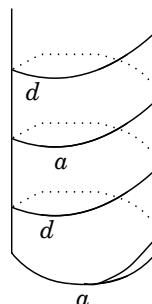
2. (i)

$$c = \frac{0.54[\text{nm}]}{0.15[\text{nm}]} = 3.6$$

- (ii) n 番目のアミノ酸のカルボニル酸素原子と n+3 番目のアミノ酸残基の水素原子とで水素結合することで構造を安定化する。同じ電荷を持つ残基が少なければ（互いに異なる電荷をもつ残基が並べば）相互に反発しないので安定である。

- 3.

- (i) 疎水的アミノ酸残基が同じ側に並ぶのが特徴である。
- (ii) (i) で示した螺旋状の疎水性アミノ酸が 2 分子間で近接し、各々がねじれて巻き付くことでコイルドコイルを形成し安定化する。



専攻 問題 9 解答

1. (i) 1つの電子に注目すると、 $x < 0, L < x$ で $V = +\infty$ 、 $0 \leq x \leq L$ で $V = 0$ の井戸型ポテンシャルと考えて $0 \leq x \leq L$ のシュレディンガー方程式は

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = E \Psi(x)$$

$2mE/\hbar^2 = k^2$ とおくと、 $\Psi(0) = 0$ より $\Psi(x) = A \sin kx$ 。 $\Psi(L) = 0$ より $kL = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$)。よって、

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 = \frac{\hbar^2 n^2}{8mL^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\Psi(x) = A \sin \frac{n\pi}{L} x$$

係数 A は規格化条件より決める。

$$A^2 \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = A^2 \int_0^L \frac{1 - \cos \frac{2n\pi x}{L}}{2} dx = A^2 \frac{L}{2} = 1$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

ポリエン鎖の中に 10 個の電子が詰まっている。 $n = 1$ 準位から順に

電子を詰めていくと $n = 6$ が励起状態になる。

よって励起状態の波動関数は

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{6\pi}{L} x$$

(ii) p 軌道

- (iii) $E = h\nu = h\frac{\lambda}{c}$ より $n = 5$ から $n = 6$ への遷移のときに吸収されるエネルギーは

$$\frac{h^2}{8mL^2} (6^2 - 5^2) = h\frac{c}{\lambda} \implies \lambda = \frac{8mc}{h} L^2 \frac{1}{11} = \frac{8 \times 412 [\text{nm}^{-1}] \times (1 [\text{nm}^2])}{11} = 3.00 \times 10^2 [\text{nm}]$$

- (iv) C=C の長さを a (但し、C-C も同じ程度として計算する。)、共役電子系の電子の電子数を n とすると、 $L \sim (n-1)a$ であり、HOMO は $n/2$ の準位で、LUMO は $n/2+1$ の準位であるから、

$$\lambda \sim \frac{8mc}{h} \frac{\{(n-1)a\}^2}{\{(\frac{n}{2})+1\}^2 - (\frac{n}{2})^2} = \frac{8mc}{h} a^2 \frac{(n-1)^2}{n+1} \sim 40.1 \times \frac{(n-1)^2}{n+1} [\text{nm}]$$

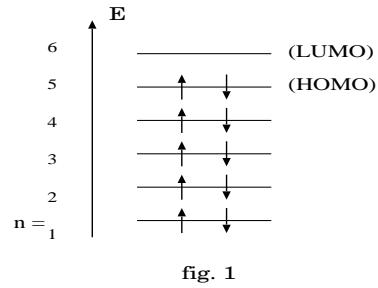
n が十分大きいならば、 $\lambda \propto n \propto L$ なので、A の鎖の部分が伸びればより長い波長の光を見られるようになるから、赤外線が見える程度まで伸びればよい。

[補足] 視物質は、色素タンパク質として、レチナールを含んでいる。レチナールは、それを取り囲むタンパク質オプシンのアミノ酸残基の一つであるリジン残基のアミノ酸と、シップ残基で結合している。レチナールの吸収極大波長は、近紫外部の 370 [nm] 付近であるが、それがシップ塩基結合を作り、その結合にプロトンが配位すると、吸収極大部は 400 [nm] に移る。視物質の色は、340 [nm] から、640 [nm] 付近にまでわたっている。これらの吸収極大波長は、一部に発色団の修飾によって、大部分はタンパク質オプシンの発色団近傍のアミノ酸残基の違いによって決まっていると考えられる。

2. 円周の長さは $L = 6 \times 0.14 = 0.84 [\text{nm}]$

この場合、シュレディンガー方程式は問題 1 と同じで境界条件を $\Psi(0) = \Psi(L)$ とする。すると $kL = 2\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$E = \frac{\hbar^2 n^2}{2mL^2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$



π 電子は 6 個あるので、 $n = 0$ のみが、一重縮退で、ほかの軌道は、2 重縮退していることに注意して、 $n = 0$ から順に電子を詰めていくと、 $n = \pm 2$ が励起状態である。

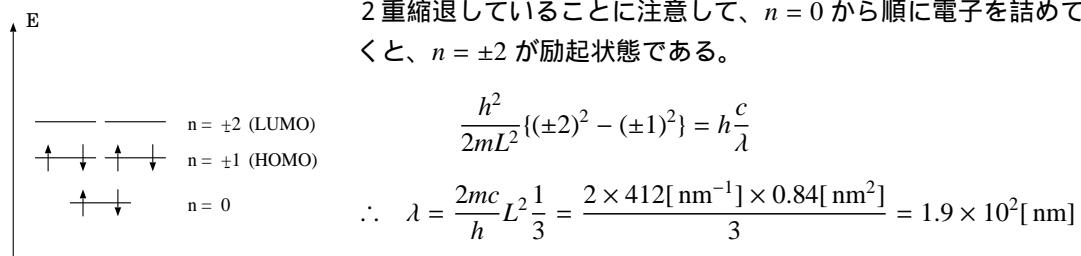


fig. 2

3. (i) まず fig.3, fig.4 より、無輻射遷移により振動の基底状態に遷移してから蛍光を発することに注意する（[補足 1] 参照）と、スペクトルの数は、吸収、蛍光ともに 3 本であり、波長は図の符号を用いて、ウイアニア = 力オイエ工となる。

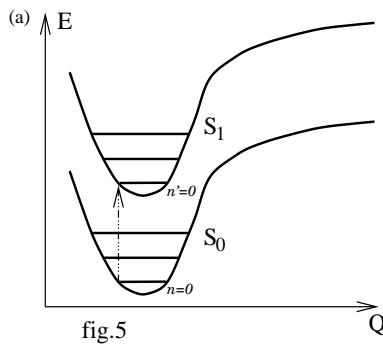


fig.5

fig.5 (Q は基準振動座標) のように励起状態のポテンシャル曲線が基底状態と似てあり、平衡基準振動座標もほぼ同じである場合は、基底状態の振動準位を n 、励起状態の振動準位を n' とすれば、 $(n, n') = (0, 0)$ の波動関数の重なり積分が大きく、0-0 遷移が可能となるが、 $n' = 1, 2$ となるにつれて、波動関数の重なりが悪くなるため、強度が落ちる。

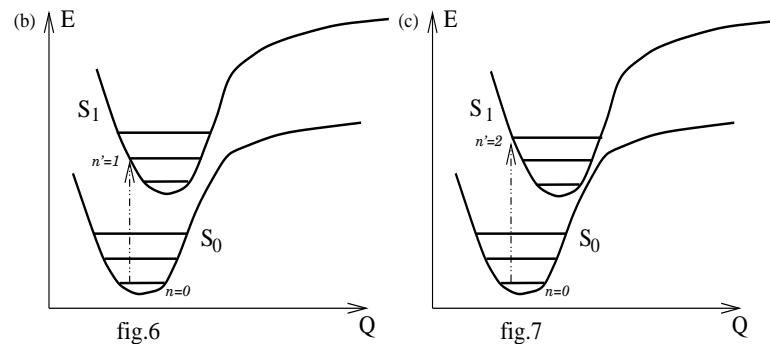


fig.6 のように励起状態の平衡基準振動座標が基底状態とずれている場合、波動関数の重なりは、 $(n, n') = (0, 1)$ が一番大きくなる。同様に、fig.7 のようなポテンシャル曲線のシフトも考えることもできる。強度についても、同じような考察ができる。

以上を、まとめると、下のようになる。振動数-強度の関係のグラフを書けば、吸収スペクトルが、蛍光スペクトルの鏡像関係にあることに、注意されたい。

[補足 1] 蛍光過程の時間（アンサンブル平均としての寿命）は、今の場合、近紫外を考え、約 10^{-9} [s] である。第一励起状態の第一振動準位や第二振動励起準位から、発光しないわけではないが、振動緩和（無輻射遷移）の時間が約 10^{-12} [s] であるため、振動緩和と発光が競争し、1000 個に 1 つの割合でしか発光しないことになる。そのため、事実上、第 0 振動準位のみ考えれば良い。

一方、『電子遷移の前後で分子は形を変えない』という Franck-Condon の原理があるが、この原理は、1つの電子に注目し、その電子遷移が振動緩和時間に比べて速い(約 10^{-15} [s])ということを根拠にしているので、蛍光過程の時間が振動の時間より長いことと矛盾しない。

[補足 2] 励起状態と基底状態のポテンシャル曲線が合同ならば、厳密にはシフトした調和振動子の波動関数($\psi_{\text{vib}}(\vec{r})$) $n' = 0, 1, 2$ について、 $n = 0$ との重なり積分($\int \{(\psi_{\text{vib}})_{n'}\}^*(\psi_{\text{vib}})_n d^3 r$)を計算することによって、 \mathcal{Q} のシフトに対して場合分けすべきであるが、ここでは、そこまで求められていないと考えられる。

- (ii) 有機溶媒に溶かすことで、溶質分子のと相互作用として、(1) 分散力、(2) 双極子間の静電気的相互作用、(3) 水素結合、(4) 電子移動、等が考えられる。このため、すでに与えられた以外のエネルギー状態が多数生成されるため、吸収・蛍光スペクトルはともに、横に広がり、微細構造が消失して、より連続的なものになる。また、溶質-溶媒間の最安定化配置が、溶質分子が励起されることによって変化し、再配置(R.T. で $10^{-12} \sim 10^{-10}$ [s]、蛍光寿命より小)が励起状態下で、行われることにより、ポテンシャルエネルギーの低下が生じるため、この意味では、スペクトルはその分、長波長側に寄ることになる。fig.5 の (a) を例にして図示すると、fig.11 の様になる。

(iii)

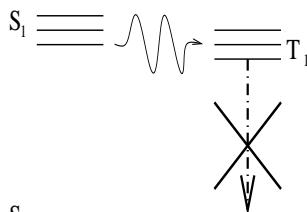


fig.12

金属の3重項励起状態(fig.13)が S_1 の近くにあると、本来禁制である、1重項 3重項の遷移が容易に生じる。これを intersystem crossing という。(fig.12)いったん、これが起こると、基底状態は一重項状態であるから、 $T_1 - S_0$ は禁制遷移であり、エネルギー差が十分があるので、蛍光が発生しない(無輻射遷移となるほか、稀に発光過程を行うものもある。)

したがって、この『intersystem crossing』に食われる分、蛍光強度は落ちる。

4. トリプトファンは蛋白質中の、アミノ酸において、最も強い蛍光を放つ。pH 11 で、最強度となり、励起波長が $287\mu\text{m}$ 、蛍光波長が $348\mu\text{m}$ である。酸性になると分解が進み、蛍光強度は落ちる。また、トリプトファンは疎水性である。

- (i) 蛋白質は溶媒の pH を減らしていくと、ある pH 周辺で急激に立体構造がくずれ、一次元のひも状となる。この現象をアンフォールディング(unfolding)という(俗に変性)。蛋白質は3次立体構造をとっているときは、親水部分を外に向け、疎水性であるトリプトファンは分子内部に詰め込まれる。それがため、構造内部のトリプトファンは、塩酸グアニジンの影響を受けていない。しかし、アンフォールディングにより、そういうトリプトファンが一斉に酸性にさらされる。そのため、急激にトリプトファン蛍光強度が落ちているのである。
- (ii) 濃度 C_0 を超え、トリプトファンが溶媒中にあらわになると、それはトリプトファンが溶媒中にある状態となり 3(ii) で述べた影響を受ける。スペクトルは長波長側にシフトする。強度は酸性下のために、低下する。

1996年度

1996年度 入学試験 一般教育科目

教育 英語

1. 次の文章を読み、下の設問に答えなさい。

Modern computers have greatly extended the scope of glacier modeling. (a)A model is a means of reducing a complex real situation to a simple closed system that represents the essential features and to which the laws of physics can be applied. Modeling can serve three purposes: experimentation, explanation, and prediction. Experimentation, discovering the effect of changing the values of the controlling variables, is often the most useful; it can never be done in the real worlds. An explanation sometimes be an illusion; the fact that the model with adjustable parameters produces plausible numerical values does not prove that the underlying assumptions are correct. Most models can be used for prediction, but first they must be tested against data. Unambiguous testing is difficult and the temptation to use all the data to “tune” the model by adjusting parameters must be resisted. Although these (b)pitfalls have not always been avoided, the scope of some recent ice-sheet models is impressive.

The approach here emphasizes the physics, combined where necessary with mathematics. No apology is made for introducing mathematics. (c)In the author’s opinion, a mere handful of mathematical physicists, who may seldom set foot on a glacier, have contributes far more to the understanding of the subject than have a hundred measures of ablation stakes or recorders of advances and retreats of glacier termini. This is not to say that the latter are unimportant; in glaciology, as in other branches of science, there is a place for both the theoretical and the experimental approach. But the two should be coordinated, and the experiments should be designed to solve specific problems. (d)Too often in the past, glaciological measurements have been made on the premise that the mere acquisition of data is a useful contribution itself. This is seldom the case.

glacier : 氷河 stake : 杭 termini : 終端

- (i) 下線部 (a) および (d) を内容がわかるように和訳せよ。
(ii) 下線部 (b) pitfalls は何を指しているか。日本語で説明せよ。
(iii) 下線部 (c) the author’s opinion に反対の立場で、英語で 50–100words で自分の意見を述べよ。

2. 以下の文章を読み、文中の内容に沿って、下の問い合わせに日本語で答えなさい。

The important thing about Newton’s theory of colours is not just that he was right, but the way in which he arrives at his conclusions. Before Newton, the way philosophers developed their ideas about the natural world was largely through pure thought. Descartes, for example, thought about the way in which light might be transmitted from a bright object to the eye, but he did not carry out experiments to test his ideas. Of course, Newton was not the first experimenter — Galileo, in particular, pointed the way with studies of the way in which balls rolled down inclined planes, and with his work on pendulums. But Newton was the first person to express clearly the basis of what became the scientific method — the combination of ideas (hypothesis), observation and experiment on which modern science rests.

Newton’s theory of colours emerged from experiments he carried out during his enforced sabbatical from Cambridge. By 1665, the fact that a ray of sunlight could be turned into a rainbow-like spectrum of colours by passing it through a triangular glass prism was well known. The standard explanation of the effect was based on the Aristotelian idea that white light represented a pure, unadulterated form, and that it became corrupted by passing through the glass. When the light enters the prism, it is bent, and then follows a straight line to the other side of the triangle, where it bends again as it emerges into the air. At the same time, the light is spread out, from a single spot of white light into a bar of colours. Working downwards from the point of the triangle, the light at the top is bent least, and travels the shortest distance through the glass, emerging as red. Lower down, where the triangular wedge of glass is wider, light which has been bent slightly more as it enters the prism travels further through the glass, and emerges into the air on the other side as violet. In between, there are all the colours of the rainbow — red, orange, yellow, green, blue, indigo, and violet. Using a prism held up to the ray of light entering a darkened room through a small hole in

the curtain (rather like the camera obscura set-up), the spectrum of colours can be displayed on the wall opposite the window.

On the Aristotelian view, white light that had travelled the shortest distance through the glass was modified least, and become red light. While light that had travelled a little further through the glass was modified more, and become yellow — and so on all the way down to violet.

Newton actually tested these ideas, using both prisms and lenses which he ground himself, trying to minimize the colour change by making lenses in different shapes. He was the first person to distinguish the rays of different colours, and he named the seven colours of the spectrum.

But the most important experiment Newton carried out at this time simply consisted of placing a second triangular wedge of glass behind the first prism but the other way up. The first prism, point uppermost, spread a spot of white light into a rainbow spectrum. The second prism, point downwards, combined the spread-out colours of the spectrum back into a spot of white light. Even though the light had passed through a further thickness of glass, it had not become more corrupted, but had returned to its former purity.

As Newton realized, this shows that white light is not ‘pure’ at all, but is a mixture of all the colours of the rainbow. Different colours of light bend by different amounts when they are refracted, but all the colours are present in the original white spot of light. It was a revolutionary idea, both because it overturned a basic tenet of Aristotelian philosophy and because it rested upon the secure foundation of experiment.

“The best and safest method of philosophizing seems to be, first to enquire diligently into the properties of things, and to establish those properties by experiment and then to proceed more slowly to hypotheses for the explanation of them. For hypotheses should be employed only in explaining the properties of things, but not assumed in determining them; unless so far as they may furnish experiments.”

John Gribbin(1995) : Schrödinger's kittens and the search for reality

unadulterated : まぜ物のない camera obscura : (カメラの) 暗箱 tenet : 教義 enquire : inquire

- (i) 白色光がガラスの三角プリズムを通過すると虹色に分かれること(分光)についてアリストテレス学派とニュートンの考え方の違いを述べよ(200字以内)。
- (ii) 下線部のニュートンの言葉を和訳せよ。

3. 下の文章を英訳せよ。

私たちの太陽以外の星のまわりにも惑星があるかもしれないという考えは、長い間人々の想像をかきたてきました。けれども、これまで科学者はこの好奇心を満足させるほどの精度で惑星を検出することができませんでした。たとえ、近くの星に私たちの太陽系にあるような惑星があったとしても、暗くて小さすぎるので見わけるのが難しかったからです。しかし、もし木星のような巨大惑星を持つ星がたくさんあるならば、今日あるさまざまな探索方法によって惑星が見つかってもよい時期になりました。いろいろな技術を使っての検出のための感度と時間は惑星の軌道半径によって異なります。すなわち、問題は星と惑星の間の距離がいくらかということです。

太陽系 : Solar System 木星 : Jupiter 軌道半径 : orbital radius

教育 数学

1. 実変数 x, y, z に関する二次形式

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - \sqrt{6}xy + \sqrt{6}yz \quad \cdots (1)$$

について、以下の設間に答えよ。

- (i) ベクトル \vec{r} を

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とし、 $f(x, y, z) = \vec{r}^T A \vec{r}$ と表したとき、対称行列 A の固有値と単位固有ベクトル(第 2 成分は非負)を求めよ。ここでは \vec{r}^T は \vec{r} の転置を表す。

- (ii) 上で求めた A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する単位固有ベクトル $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ を並べて 3 行 3 列の行列 $P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ を作る。 P による座標変換

$$\vec{r} = P \vec{r}', \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \cdots (2)$$

を行った場合、 $f(x, y, z)$ がどのような形に変換されるかを求めよ。また、 P によって変換されるベクトルはその大きさを変えないことを示せ。

- (iii) P による変換をある軸のまわりの回転とみなした時、この回転軸の方向ベクトルを求めよ。

- (iv) $P^n = E$ となる最小の自然数 n を求めよ。ただし E は 3 次の単位行列である。

2. 2 次元 (x, y) 平面の上半面 ($-\infty < x < \infty, y > 0$) における、なめらかな曲線を考える。曲線は、実数パラメータ s によって $(x(s), y(s))$ と表され、次の微分方程式を満たすものとする。

$$yx'' - 2x'y' = 0 \quad yy'' + x'^2 - y'^2 = 0 \quad \cdots (3)$$

ただし、関数 $x(s)$ は 2 階微分可能で、 $x' = dx/ds, x'' = d^2x/ds^2$ および $x'^2 = (dx/ds)^2$ である。関数 $y(s)$ についても同様である。以下の設間に答えよ。

- (i) 新しい変数

$$X = \frac{x'}{y}, \quad Y = \frac{y'}{y} \quad \cdots (4)$$

を導入して変数 $X(s)$ と $Y(s)$ の満たすべき方程式を求めよ。

さらに次の関係

$$X^2 + Y^2 = C \quad \cdots (5)$$

が成り立つことを示せ。ただし、 C は定数である。

- (ii) 方程式 (3) を満たす $(x(s), y(s))$ はどのような曲線群を表すか。 $X = 0$ と $X \neq 0$ の場合に分けて、それについて求めよ。ただし $C = 1$ としてよい。

3.

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \cdots (6)$$

を満たす正の整数 x, y, z の組み合わせを全て求める方法を考える。ここで x, y, z のどの 2 つも、たがいに素(最大公約数が 1)とする。

- (i) x と y は、一方が偶数、もう一方が奇数であることを証明せよ。
- (ii) 以下では、偶数の方を x とする。残りの y と z の 2 数から、 $A = (z + y)/2, B = (z - y)/2$ と定義するとき、 A と B は整数であり、かつ、たがいに素であることを証明せよ。
- (iii) 一般に、たがいに素な正の整数 A と B の積が正の整数の 2 乗、すなわち

$$A \cdot B = C^2 \quad \cdots (7)$$

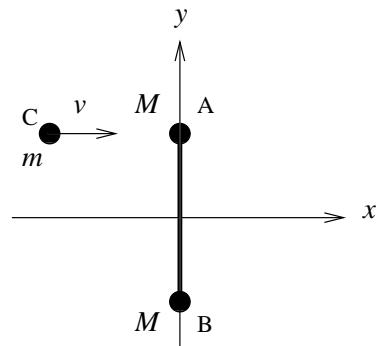
で表せる場合、 $A = \alpha^2, B = \beta^2$ となる整数 α, β が存在することを証明せよ。

- (iv) 式 (6) を満たす 3 つの整数 x, y, z を 2 つの整数 α, β (ここで $\alpha > \beta > 0$) から導く式を示せ。
- (v) 前問の結果を用いて、 $\alpha \leq 6$ の範囲で、たがいに素なすべての x, y, z の組み合わせを示せ。

教育 物理

1. 長さ $2a$ で質量の無視できる剛体の棒の両端に、ともに質量 M をもつ質点 A および B が取り付けられ、図のように xy 平面内に静止している。そこに質量 m の質点 C が、図のように直線 $y = a$ に沿って、速度 v で x 軸の正の向きに等速直線運動して、質点 A と衝突した。衝突は完全弾性的であり、衝突後の C の運動は x 軸に平行であるとして、以下の設問に答えよ。ただし摩擦や重力は考えない。

- (i) 衝突後の系 (A, B, C) の運動を記述するのに適した複数個の物理量を定義し、それらがどのような力学的保存則により決定されるかを述べ、式で表せ。
- (ii) 力学的保存則を解いて、上で定義した物理量を、 M 、 m 、 a 、および v で表せ。
- (iii) 衝突後、質点 A および B の速度の x 成分は、どのように時間変化するか。衝突後の経過時間 t の関数として、同一のグラフに図示せよ。特徴的な座標の値も記入すること。



2. 電荷 q 、質量 m の荷電粒子の位置ベクトルを $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ で表す。粒子の速度は光速度と比べて十分小さいとして以下の設問に答えよ。
- (i) 一様な静磁場 $B = (0, 0, B)$ がかかっているときの荷電粒子の運動 s で、時刻 $t = 0$ での初期条件 $r = (0, 0, 0)$ 、 $dr/dt = (v_0, 0, u_0)$ を満たすものを求めよ。
 - (ii) 上記静磁場と振動数 $\omega = qB/m$ をもつ電場 $E = (E \cos \omega t, -E \sin \omega t, 0)$ がかかっているとき、運動方程式の解で、時刻 $t = 0$ での初期条件 $r = (0, 0, 0)$ 、 $dr/dt = (0, 0, 0)$ を満たすものを求めよ。この場合、運動方程式は複素変数 $dx/dt + idy/dt$ を用いると扱いやすい。
 - (iii) 前問について、運動エネルギー K の変化率 dK/dt を求めよ。また、電場 E と粒子の速度 v の関係に注目して、この結果を説明せよ。
3. 通常、気体は高温低密度の極限で理想気体に近づくが、一般には理想気体からのずれが観測される。このようなずれを示す気体 1 モルに対して、以下の設問に答えよ。
- (i) この気体を体積 V に保って熱容量を測定したところ、温度 $T_1 < T_2$ の間で、 $C = 2.5R - gT^{-2}$ と表されることがわかった。但し、 R は気体定数であり、 g は温度によらない定数である。この測定で、温度 T_1 から温度 T_2 まで気体の温度を上昇させたときの気体のエントロピーの増加量を求めよ。
 - (ii) 熱膨張率 α と等温圧縮率 κ を測定したところ、次のような関数で表されることがわかった。
- $$\alpha \equiv +\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \left(1 + \frac{a}{VT} \right) \quad \cdots (1)$$
- $$\kappa \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{b}{VT} \right) \quad \cdots (2)$$
- 但し、 V 、 T 、 p はそれぞれの気体の体積、温度、圧力である。また、 a 、 b は同じ次元を持つ定数である。 V の 2 階偏導関数を考えることにより、 $a = 2b$ であることを証明せよ。
- (iii) この気体の状態方程式を以下の順で求めよう。先ず式 (2) のみを用いて、等温過程における、 p と V の関係を求めよ。次にこの結果を式 (1) に代入して、状態方程式を決定せよ。

教育 英語 解答

1. 全訳

現代のコンピューターは大きく氷河モデルの領域を発展させた。(a) 複雑な現実の環境を、必要な特徴を持つ物理法則が適用可能な単純閉鎖系に還元する手段がモデルである。モデリングには3つの目的がある。すなわち、実験、説明、予言である。実世界では決してできない対象変数の値を変えることによる効果を発見するにおいて、実験はしばしばもっとも有用である。説明は時々思い違いとなっている。つまり、調節したパラメーターによるモデルがもっともらしい値をたくさんつくっても、その基礎となっている仮定が正しいことを示したことにならない。多くのモデルは予言に用いることができるが、最初はデータに対するテストをする必要がある。曖昧でないテストは難しく、すべてのデータを用いて調節したパラメーターによるモデルを調節するという誘惑は避けなければならない。これらの落とし穴は時々回避されないが、最近の氷河層モデルの範囲は印象的なものである。

ここでのアプローチは物理を強調し、必要なところに数学を組み入れる。数学を導入することに対する説明はしない。著者の意見によると、ほんの一握りの物理数学者は、彼らはほとんど氷河に足を踏み込むことはないが、数百回の削摩抗の測定や氷河の終端の進退の記録よりも事象の理解への貢献度が大きい。これは後者の方が重要でないことをいうわけではない。ほかの科学と同様に、氷河学において理論的な面と実験的な面の両面がある。しかしその二つは協力をすべきであり、実験は特別な問題を解くために設計されなければならない。(d) 以前は、氷河学における測定は、単なるデータ取得が氷河学に対する有効な貢献になる、という前提の下に行なわれることがほとんどだった。しかしこのようなことはめったにないものである。

(i) 全訳参考のこと。

(ii) 次の 3 つの落とし穴のこと。

実験について... 実際に行なうことができない。

説明について... 可変パラメータを含む結果はある仮定の証明にはならない。

予言について... 実験データの方を予言に合わせてしまうことがある。

(iii) Most of the mathematical physicists have not visited a glacier, so that sometimes they do not really understand about the glacier and the theory they constructed might become a only brain exercise. In the other hand, the experimentists can use the data to assume what have happened in the past, so the results are quite close to the real world phenomenon.

2. 全訳

ニュートンの色の理論の重要性はその正しさにあるだけでなく、彼が如何にしてその結論に達したかにもある。ニュートン以前は、哲学者達が自然界についての考え方を発展させた方法は純粋な思考を通じてであった。例えば、デカルトは光は明るい物体から目に伝わってくる仕方について考えていたが、彼はその考え方を試す実験を行わなかった。もちろん、ニュートンは最初の実験家ではなかった。特にガリレオはボールが斜面を転がり落ちる仕方についての研究においてと、振り子での彼の仕事において実験するというその方法を指摘した。しかしニュートンが初めて科学的な方法 現代科学が頼っている仮説、観察と実験の組み合わせ になったことの基礎についてはっきりと示した人である。

ニュートンの色の理論はケンブリッジから与えられた休暇年度の間に行なった実験から生まれた。1665 年までに、太陽光が三角ガラスプリズムを通して虹みたいな色のスペクトラルにする事ができるという事実はよく知られていた。その効果についての基本的な説明は白色光は純粋で混ぜものがない物体であり、ガラスを通して乱されるようになるというアリストテレスの考えに基づいていた。光がプリズムに入ると、曲がり、三角形のほかの一辺に向かって、まっすぐ進み、再びその辺で曲がり、空気中で進む。同時に、光は、白色光の一点から色棒に分散する。三角形の一点から下向きに進むときは、一番上にある光が一番小さく曲げられ、ガラスを通して、もっとも短い距離を移動して、赤として出現する。下の方ほど、ガラスの三角のくさびは広くなり、光はさらに少し曲げられ、プリズムに入ると、ガラスをさらに長く移動して反対側から空気中に紫として出る。その間には虹のすべての色、赤、橙、黄、緑、青、藍、紫がある。プリズムをカーテンの

小さな穴を通して暗室に入ってきた光線に対して、直立させておく（カメラの中を暗くするやり方のようにする）と、色のスペクトルを、窓の反対側の壁に表示することができる。

アリストテレス的な見方において、ガラスを通して最短距離を移動してきた白色光は、もっとも変化を受けず、赤い光となる。ガラスを通して、もう少し長く移動してきた白色光は、より変化を受け、黄色になる、等々して紫までいく。

ニュートンは実際にこの考えについて自分で作ったプリズムとレンズの両方を用いて実験し、レンズを異なる形にすることで、色の変化を最小にしようとした。彼は、異なる色の光線を初めて区別した人であり、スペクトルの七色について名前を付けた。

しかし、このときニュートンが行った実験で最も重要なのは、二つ目の三角のくさびを最初のプリズムのうしろに、しかし反対向きにつけただけのものである。最初の、一番上向きのプリズムは白色光の点を、虹のスペクトルに分散させた。二つ目の下向きのプリズムは、スペクトルの分散した色をもとの白色光の点に集めた。光をもっとあついガラスを通したのに、それはそれ以上乱れることはなく、しかし以前のまとまった状態に戻ったのである。

ニュートンが気づいたように、これは白色光が、そもそも「純粹」ではなく、虹のすべての色の混合であることを示している。異なる光の色は、屈折されるとき、異なる量曲がるが、すべての色は元の白色光の点の中には存在する。それは画期的なアイディアであり、なぜなら、アリストテレス派哲学の基礎を覆し、しかも堅固な実験根拠に基づいているからである。

最初に物の性質を念入りに調べ、実験によりその性質を確認し、そしてあせらずに性質を説明する仮説へと進むのが、もっとも安全でもっとも良い自然哲学の方法であろう。実験が仮説の上に成り立っているのでない限り、仮説が物の性質を決めるべきではなく、物の性質により仮説を採用すべきなのである。

(i) アリストテレス学派

白色光は“純粹な”光であり、ガラスの中を通過することにより、“汚され”てしまう。（プリズムの中で光路の短い光はより少なく変化し赤色になり、光路の長い光は大きく変化し青色になる。）

ニュートン

白色光は虹の七色の混合した光である。（二つのプリズムによりまた白色に戻すことができる。これはアリストテレス学派の説では説明できない。）

(ii) 全訳参照のこと。

3. The thought that there would be another solar system have invoked imagination of people for a long time. But scientists still cannot detect any planets at the precision to satisfy their curiosity. Even if the close fixed stars had planets like ones of our solar system, it would be difficult to distinguish these planets because they would be too small and dark. If there are many stars that have a lot of big planets like Jupiter, however, it's time for us to be able to find out these planets with various research methods. Sensitivity and time on detecting them with many technique depend on their orbital radius, that is, the problem is how long the distance between fixed star and planet is.

教育 数学 解答

1. (i) 式(1)は次のように表される。

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{6}/2 & 0 \\ -\sqrt{6}/2 & 3 & \sqrt{6}/2 \\ 0 & \sqrt{6}/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

この行列が A である。 A の固有値 λ は $\det(A - \lambda E) = 0$ より、

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -\sqrt{6}/2 & 0 \\ -\sqrt{6}/2 & 3 - \lambda & \sqrt{6}/2 \\ 0 & \sqrt{6}/2 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \\ = (2 - \lambda)(3 - \lambda)(4 - \lambda) - (2 - \lambda)\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - (4 - \lambda)\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \\ = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 15 = -(\lambda - 5)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \\ \therefore \lambda = 1, 3, 5 \end{aligned}$$

各固有値を、次の問いの形式に従って $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$ と置く。それぞれの単位固有ベクトル $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は

$$A\vec{p}_i = \lambda_i \vec{p}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad |\vec{p}_i| = 1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

から計算すると以下の通りとなる。

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ \sqrt{6}/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/4 \\ 1/2 \\ -\sqrt{6}/4 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ \sqrt{6}/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

(ii) 行列 P の成分は次の通りである。

$$P = (\vec{p}_1 \quad \vec{p}_2 \quad \vec{p}_3) = \begin{pmatrix} 3/4 & -\sqrt{6}/4 & -1/4 \\ \sqrt{6}/4 & 1/2 & \sqrt{6}/4 \\ -1/4 & -\sqrt{6}/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は単位ベクトルで異なる固有値に属するため直交し、 $\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j = \delta_{i,j}$ である。 $P^T P$ を計算すると

$$P^T P = \begin{pmatrix} \vec{p}_1^T \\ \vec{p}_2^T \\ \vec{p}_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1 & \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 & \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 \\ \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1 & \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_2 & \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3 \\ \vec{p}_3 \cdot \vec{p}_1 & \vec{p}_3 \cdot \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \cdot \vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって $P^{-1} = P^T$ である。また AP を計算すると

$$A(\vec{p}_1 \quad \vec{p}_2 \quad \vec{p}_3) = (\lambda_1 \vec{p}_1 \quad \lambda_2 \vec{p}_2 \quad \lambda_3 \vec{p}_3) = (\vec{p}_1 \quad \vec{p}_2 \quad \vec{p}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore P^{-1}AP = P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\vec{r}' = P\vec{r}''$ の変換によって、 f は

$$f(x, y, z) = \vec{r}^T A \vec{r} = (P\vec{r}'')^T A (P\vec{r}'') = \vec{r}''^T P^T A P \vec{r}'' = \vec{r}''^T (P^{-1}AP) \vec{r}''$$

と書きかわる。よって、

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x'^2 + 3y'^2 + 5z'^2$$

となる。また、

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = \vec{r}^T \vec{r} = (P\vec{r}')^T (P\vec{r}') = \vec{r}'^T P^T P \vec{r}' = \vec{r}'^T \vec{r}$$

であるから P による座標変換によって、ベクトルの大きさは不变である。

- (iii) この回転軸の方向ベクトルを \vec{d} と置くと \vec{d} は P による回転によって向きが変わらない。また、 P による回転ではベクトルの長さは変わらないので、 $P\vec{d} = \vec{d}$ となるはずである。これを解いて

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \text{const}$$

- (iv) P はベクトル \vec{d} のまわりの回転だから、その回転角度を θ とする。 \vec{d} に垂直なベクトル \vec{u} を適当にとる。 \vec{u} を回転して移したベクトル $P\vec{u}$ と \vec{u} のなす角度は θ である。すなわち、

$$\vec{u} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P\vec{u} = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/4 \\ 1/2 \\ -\sqrt{6}/4 \end{pmatrix} \quad \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot P\vec{u}}{|\vec{u}| |P\vec{u}|} = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = 60^\circ$$

P はベクトル $\vec{d} = (1, 0, -1)$ のまわりの 60° の回転だから、 P^6 が 360° の回転になる。 $P^6 = E$ 。よって $n = 6$ である。

2. (i) 式(4)より、

$$x' = yX \quad x'' = y'X + yX' = yXY + yX'$$

$$y' = yY \quad y'' = y'Y + yY' = yY^2 + yY'$$

これらの式を微分方程式(3)に代入する。

$$yx'' - 2x'y' = 0 \quad \therefore X' - XY = 0 \quad \cdots (1)$$

$$yy'' + (x')^2 - (y')^2 = 0 \quad \therefore Y' + X^2 = 0 \quad \cdots (2)$$

(1) $\times X + (2) \times Y$ を計算すると、

$$XX' + YY' = 0 \quad \therefore X^2 + Y^2 = \text{const} \equiv c^2 \quad (c > 0) \quad \cdots (3)$$

- (ii) $X \equiv 0$ の場合

$$Y = \pm c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \pm c \quad \Leftrightarrow \quad y = A \exp(\pm cs) \quad (A > 0)$$

$$X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{const} \equiv B$$

よって、 $X \equiv 0$ の場合、 $x = \text{一定}$ 、 $y > 0$ の半直線である。 $X \neq 0$ の場合は、 $Y^2 - c^2 \neq 0$ 。式(2)より、 $X^2 = -Y'$ を式(3)に代入すると、 Y だけの微分方程式になる。

$$Y' - Y^2 + c^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{Y'}{Y^2 - c^2}$$

$$\therefore \int 1 ds = \int \frac{dy}{Y^2 - c^2} = \frac{1}{2c} \int \left(\frac{1}{Y-c} - \frac{1}{Y+c} \right) dy$$

これより、

$$\log \left| \frac{Y-c}{Y+c} \right| = 2cs + \alpha \quad (\alpha = \text{const})$$

となる。式(3)より Y の範囲は $-c < Y < c$ である。このとき、

$$Y = \frac{y'}{y} = (-c) \times \frac{\sinh(cs + \alpha)}{\cosh(cs + \alpha)} \quad \cdots (4)$$

$$\therefore \log y = -\log[\cosh(cs + \alpha)] + \text{const}$$

$$\therefore y = \frac{a}{\cosh(cs + \alpha)} \quad (a > 0) \quad \cdots (5)$$

式(3),(4)より、

$$X^2 = c^2 - c^2 \frac{\sinh^2(cs + \alpha)}{\cosh^2(cs + \alpha)} = \frac{c^2}{\cosh^2(cs + \alpha)} \quad \therefore X = \frac{\pm c}{\cosh(cs + \alpha)} \quad \cdots (6)$$

式(5),(6)より、

$$x' = yX = \frac{\pm ac}{\cosh^2(cs + \alpha)} \quad \therefore x = \pm a \tanh(cs + \alpha) + b \quad (b : \text{const})$$

s をパラメータとした 2 つの変数 (x, y) が描く曲線は、 $1 - \tanh^2(cs + \alpha) = 1/\cosh^2(cs + \alpha)$ の関係を用いて、

$$1 - \left(\frac{x-b}{a} \right)^2 = \left(\frac{y}{a} \right)^2 \quad \therefore (x-b)^2 + y^2 = a^2 \quad (y > 0)$$

となる。ただし、 $y > 0$ である。これは半径 a 、中心 $(b, 0)$ の円の $y > 0$ の部分である。

以上より、 $X \equiv 0$ と $X \neq 0$ の場合をまとめて、

x 一定、 $y > 0$ の半直線。または x 軸上に中心を持つ円の $y > 0$ の部分である。

3. (i) まず、 x, y, z のどの 2 つも互いに素であるから、

- (a) z が偶数で x, y は奇数
- (b) z が奇数で x, y のどちらかが偶数
- (c) x, y, z はすべて奇数

の 3 つの場合のどれかであることが分かる。

(a) の場合

正の整数 l, m, n を用いて $z = 2l, x = 2m - 1, y = 2n - 1$ と書ける。このとき

$$x^2 + y^2 = (2m - 1)^2 + (2n - 1)^2 = 4(m^2 + n^2 - m - n) + 2 \neq 4 \text{ の倍数}$$

である。一方

$$z^2 = 4l^2 = 4 \text{ の倍数}$$

だから、 $x^2 + y^2 = z^2$ を満たさない。

(b) の場合

$z = 2l - 1, x = 2m, y = 2n - 1$ としてよい。このとき、

$$x^2 + y^2 = (2m)^2 + (2n - 1)^2 = 4(m^2 + n^2 - n) + 1$$

であり、

$$z = (2l - 1)^2 = 4(l^2 - l) + 1$$

なので、 $x^2 + y^2, z^2$ のどちらも 4 の倍数 +1 で矛盾はしない。

(c) の場合

$z = 2l - 1, x = 2m - 1, y = 2n - 1$ とすると、 $x^2 + y^2 = 4(n^2 + m^2 - m - n) + 2 = \text{偶数}$ 、
 $z^2 = 4(l^2 - l) + 1 = \text{奇数}$ となって $x^2 + y^2 = z^2$ に反する。

よって、 z は奇数、 x, y の片方は奇数、片方は偶数であることが言えた。

- (ii) x を偶数、 y を奇数と決めるとき、正の整数 l, m, n を用いて $x = 2m, y = 2n - 1, z = 2l - 1$ と書ける。
 $A = (z + y)/2, B = (z - y)/2$ と置く。逆に、 z, y は A, B を用いて

$$z = A + B \quad y = A - B$$

と書かれる。

$$A = \frac{(2l - 1) + (2n - 1)}{2} = l + n - 1, \quad B = \frac{(2l - 1) - (2n - 1)}{2} = l - n$$

である。よって、 A, B は整数である。

もし、 A と B が共通の因子 k (整数) を持ち、 $A = ka, B = kb$ (a, b :整数) と書けると仮定すると、

$$z = A + B = k(a + b) \quad y = A - B = k(a - b)$$

となり、 z, y が互いに素であるという条件に矛盾する。したがって、 A と B は互いに素である。

- (iii) C を素因数分解する。

$$C = (c_1)^{n_1} \cdot (c_2)^{n_2} \cdots (c_p)^{n_p}$$

と書けたとする

$$A \cdot B = C^2 = (c_1)^{2n_1} \cdot (c_2)^{2n_2} \cdots (c_p)^{2n_p}$$

である。問題文の仮定より、 A, B は互いに素な整数であるから、 C^2 の因数の c_1, c_2, \dots, c_p は A, B どちらかのみの因数である。 c_1, c_2, \dots, c_p を適当に並び替えて、 c_1, \dots, c_q は A の因数、 c_{q+1}, \dots, c_p は B の因数とすることができます。すなわち、

$$A \cdot B = C^2 = \overbrace{(c_1)^{2n_1} \cdot (c_2)^{2n_2} \cdots (c_q)^{2n_q}}^A \overbrace{(c_{q+1})^{2n_{q+1}} \cdots (c_p)^{2n_p}}^B$$

$$\alpha \equiv (c_1)^{n_1} \cdots (c_q)^{n_q} \quad \beta \equiv (c_{q+1})^{n_{q+1}} \cdots (c_p)^{n_p}$$

とおけば $A = \alpha^2, B = \beta^2$ である。

- (iv) $x = 2C$ と置くと、 $x^2 = z^2 - y^2$ より、 $(2C)^2 = (A + B)^2 - (A - B)^2 = 4A \cdot B$ 、つまり、 $C^2 = A \cdot B$ となる。(ii) で、 $A = (z + y)/2, B = (z - y)/2$ が互いに素な正の整数であることを示したので、(iii) の結果を使うことができて、2つの整数 α, β を用いて $A = \alpha^2, B = \beta^2$ と書ける。このとき、 $C = \alpha\beta$ である。よって、

$$x = 2C = 2\alpha\beta, \quad y = A - B = \alpha^2 - \beta^2, \quad z = A + B = \alpha^2 + \beta^2$$

とすればよい。ただし、 y, z は奇数なので、 α, β の片方は奇数、片方は偶数でなければならない。 α, β は互いに素でなければならない。そうでなければ y と z が共通の因数を持つことになって互いに素であるという条件を満たさない。

- (v) (iv) の結果から

α	β	x	y	z
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61

となる。

教育 物理 解答

1. (i) 衝突後、2 球 A と B はその重心を x 軸に平行に移動させながら重心を中心として回転運動を行う。衝突後の C の速度を v' とする。衝突後の A と B の重心の速度を V とし、重心を中心とする回転角速度を ω とする。
衝突は瞬間的として C が A に及ぼす撃力を J とする。C は反作用として A から撃力 $-J$ を受ける。
運動量保存則より次の 2 式が成り立つ。

$$mv - J = mv' \quad \dots (1)$$

$$J = 2MV \quad \dots (2)$$

また角運動量保存則より次の式が成り立つ。

$$aJ = 2Ma^2\omega \quad \dots (3)$$

最後にエネルギー保存則より次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}2MV^2 + \frac{1}{2}2Ma^2\omega^2 \quad \dots (4)$$

以上 4 式がこの系を支配する保存則である。

- (ii) 式 (2) と式 (3) より $a\omega = V$ がわかる。これと式 (4) より $mv^2 - mv'^2 = 4MV^2$ となる。

さらに式 (1) と式 (2) より $mv - mv' = 2MV$ がわかる。よって $v + v' = 2V$ となる。

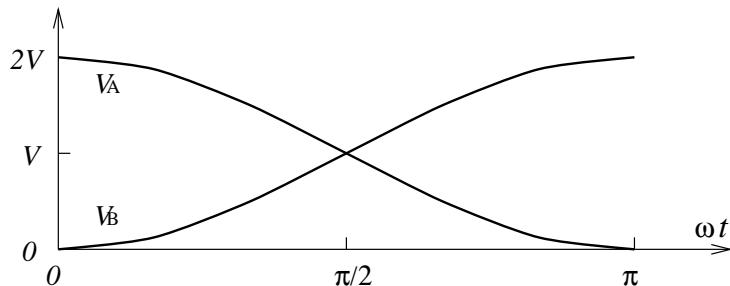
これらより次の諸量が求まる。

$$V = \frac{m}{m+M}v \quad v' = \frac{m-M}{m+M}v \quad \omega = \frac{m}{m+M}\frac{v}{a}$$

- (iii) 衝突後の A と B の速度をそれぞれ V_A 、 V_B と表す。明らかに

$$V_A = V + a\omega \cos \omega t \quad V_B = V - a\omega \cos \omega t \\ = \frac{m}{m+M}v \left(1 + \cos \frac{m}{m+M} \frac{v}{a} t \right) \quad = \frac{m}{m+M}v \left(1 - \cos \frac{m}{m+M} \frac{v}{a} t \right)$$

これより V_A 、 V_B の時間変化は下図のようになる。



2. (i) 運動方程式は $m\ddot{r} = q\dot{r} \times B$ である。成分ごとに表すと

$$\ddot{z} = 0 \quad \ddot{x} = \frac{qB}{m}\dot{y} \quad \ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x}$$

ここで複素数 w を $w = x + iy$ と定義すると上式は、

$$\ddot{z} = 0 \quad \ddot{w} = -i\frac{qB}{m}\dot{w}$$

となる。初期条件 $\dot{w}|_{t=0} = v_o$ 、 $\dot{z}|_{t=0} = u_o$ を考慮して積分すると、

$$\dot{z} = u_o \quad \dot{w} = -i\frac{qB}{m} \left(w + i\frac{m}{qB}v_o \right)$$

さらに、初期条件 $w|_{t=0} = 0$ 、 $z|_{t=0} = 0$ 考慮して積分すると、

$$z = u_o t \quad w = -i \frac{m}{qB} v_o (1 - e^{-i \frac{qB}{m} t})$$

実数に直して求める荷電粒子の軌道が得られる。

$$z = u_o t \quad x = \frac{m}{qB} v_o \sin \frac{qB}{m} t \quad y = \frac{m}{qB} v_o \cos \frac{qB}{m} t - \frac{m}{qB} v_o$$

(ii) 運動方程式は $m\ddot{r} = qE + q\dot{r} \times B$ である。成分毎に表すと

$$\ddot{z} = 0 \quad \ddot{x} = \frac{qE}{m} \cos \omega t + \frac{qB}{m} \dot{y} \quad \ddot{y} = -\frac{qE}{m} \sin \omega t - \frac{qB}{m} \dot{x}$$

ここで複素数 w を $w = x + iy$ と定義すると上式は、

$$\ddot{z} = 0 \quad \ddot{w} = \omega \frac{E}{B} e^{-i\omega t} - i\omega \dot{w}$$

となる。初期条件 $\dot{w}|_{t=0} = 0$ 、 $\dot{z}|_{t=0} = 0$ を考慮して積分すると、

$$\dot{z} = 0 \quad \dot{w} + i\omega w = i \frac{E}{B} (e^{-i\omega t} - 1)$$

この w に関する微分方程式は非齊次である。特殊解として次の形式の解を仮定する。

$$w = C_1 t e^{-i\omega t} - \frac{E}{\omega B}$$

これを微分方程式に代入して整理することにより $C_1 = iE/B$ が求まる。

次に齊次方程式の一般解として次の形式の解がある。

$$w = C_2 e^{-i\omega t}$$

よって微分方程式の解は、初期条件 $w|_{t=0} = 0$ 、 $z|_{t=0} = 0$ 考慮して

$$w = C_2 e^{-i\omega t} + i \frac{E}{B} t e^{-i\omega t} - \frac{E}{\omega B} = i \frac{E}{\omega B} (1 + i\omega t) e^{-i\omega t} - \frac{E}{\omega B}$$

となる。実数にもどして

$$z = 0 \quad x = \frac{E}{\omega B} (\cos \omega t + \omega t \sin \omega t) - \frac{E}{\omega B} \quad y = \frac{E}{\omega B} (-\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$$

(iii) 荷電粒子の複素速度 \dot{w} は前問の結果より計算され

$$\dot{w} = \frac{qE}{m} t e^{-i\omega t} \quad \cdots (5)$$

である。よって運動エネルギー K は

$$K = \frac{1}{2} m |\dot{w}|^2 = \frac{q^2 E^2}{2m} t^2$$

その時間変化率は

$$\frac{dK}{dt} = \frac{q^2 E^2}{m} t$$

である。これは等加速運動をする物体の運動エネルギーの変化の仕方と同じである。式(5)より荷電粒子の速度 v は電場 E と常に平行であることがわかる。また、その速さ v は

$$v = \frac{qE}{m} t$$

であることより、電場による加速が等加速であることがわかる。つまり粒子は前問で求められた軌道にそって等加速運動を行うのである。その結果運動エネルギーは先に求められたように時間変化するのである。

3. (i) エントロピーの定義より、その増加量 ΔS は

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T}$$

で定義される。また、 $dQ = CdT$ であり問題の設定より $C = 2.5R - gT^{-2}$ であるので結局 ΔS は

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{2.5R}{T} - \frac{g}{T^3} \right) dT = 2.5R \log \frac{T_2}{T_1} + \frac{g}{2} \left(\frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_1^2} \right)$$

と求まる。

(ii) 式 (1) の両辺を T を一定にしながら p で偏微分する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right)_T &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{T} + \frac{a}{VT^2} \right)_T \\ \therefore -\frac{1}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial p \partial T} &= -\frac{a}{V^2 T^2} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{a}{p V T^2} \left(1 + \frac{b}{V T} \right) \end{aligned} \quad \cdots (6)$$

同様に式 (2) の両辺を p を一定にしながら T で偏微分する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \left(-\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \right)_p &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{p} + \frac{b}{p V T} \right)_p \\ \therefore +\frac{1}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T - \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial T \partial p} &= -\frac{b}{p V^2 T} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - \frac{b}{p V T^2} = -\frac{b}{p V T^2} \left(2 + \frac{a}{V T} \right) \end{aligned} \quad \cdots (7)$$

式 (6) と式 (7) の両辺を足すことで次の関係を得る。

$$a \left(1 + \frac{b}{V T} \right) = b \left(2 + \frac{a}{V T} \right) \quad \therefore a = 2b$$

(iii) 式 (2) の T を定数とみなして偏微分を常微分に置き換えて変形すると、

$$\frac{dV}{V + b/T} = -\frac{dp}{p} \quad \therefore V = -\frac{b}{T} + \frac{C_1(T)}{p}$$

ここで $C_1(T)$ は p に依存しない T のある関数である。

この V の表式を式 (1) に代入して整理すると

$$\frac{dC_1(T)}{dT} = \frac{C_1(T)}{T} \quad \therefore C_1(T) = C_2 T$$

ここで C_2 はある定数である。

これらより気体の状態方程式は

$$V = -\frac{b}{T} + \frac{C_2 T}{p}$$

であるが、 $b \rightarrow 0$ の極限でこの気体は理想気体となる境界条件を課すことで $C_2 = R$ がわかる。よって、

$$V = -\frac{b}{T} + \frac{RT}{p}$$

1996 年度 入学試験 物理専門科目

専攻 問題 1

水素原子の中の陽子と電子の相対運動のシュレディンガー方程式は、相対座標を \vec{r} 、換算質量を m とすると、cgs ガウス系を単位系に用いた場合、通常次の形に書かれる。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad \cdots (1)$$

$$V = -e^2/r \quad \cdots (2)$$

この固有エネルギー E_n と固有関数 $\psi_{nlm}(\vec{r})$ は次のように求まる:

$$E_n = -\frac{R_y}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \cdots (3)$$

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\ell = 0, 1, \dots, n-1; \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm \ell) \quad \cdots (4)$$

ただし $R_y \equiv me^4/2\hbar^2$ は Rydberg 定数である。ここで、 (r, θ, ϕ) は極座標、 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ は規格化された球面調和関数であり、たとえば、 $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$ である。波動関数の動径部分 $R_{nl}(r)$ は、1s 状態 ($n=1, \ell=0$)、2s 状態 ($n=2, \ell=0$) および、2p 状態 ($n=2, \ell=1$) についてはそれぞれ、

$$R_{10}(r) = \frac{2}{\sqrt{a^3}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad \cdots (5)$$

$$R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{8a^3}} \left(2 - \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a}\right) \quad \cdots (6)$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{24a^5}} r \exp\left(-\frac{r}{2a}\right) \quad \cdots (7)$$

で与えられる。ただし、 $a \equiv \hbar^2/me^2$ は Bohr 半径である。

以上の知識を手がかりにして、以下の問い合わせよ。

1. 絶縁体に弱い光を当てるとき、電子と正孔のペアができる。絶縁体の中では、電子は電荷 $-e$ で質量が m_e の粒子のように、正孔は電荷 $+e$ で質量が m_h の粒子のようにふるまい、両者の間にはたらくポテンシャルは、絶縁体の(比)誘電率を ϵ (定数とする)として、

$$V = -\frac{e^2}{\epsilon r} \quad \cdots (8)$$

で与えられると仮定する。電子と正孔の束縛状態について、以下の問い合わせよ。

- (i) 最も低いエネルギーを持つ束縛状態の束縛エネルギーを求めよ。
(ii) この束縛状態の空間的広がりの目安として、 r の期待値 $\langle r \rangle$ を求めよ。
2. 電子が実際に感じるポテンシャルは、式(2)や式(8)から少しずれていることが分かっている。たとえば水素原子の場合、陽子のごく近くでは、電子・陽子対が仮想的に生成・消滅している「雲」の内側にはいるためにポテンシャルが修正される。それが何をもたらすかを大ざっぱにみるために、式(2)のポテンシャルを次のように修正してみよう。

$$V(\vec{r}) = -\frac{e^2}{r} - \lambda \delta^3(\vec{r}) \quad \cdots (9)$$

ただし、 λ はある正の定数であり、 $\delta^3(\vec{r})$ は 3 次元のデルタ関数である。

- (i) V の右辺第 2 項を摂動とみなし、摂動を受けた 1s 状態、2s 状態、2p 状態のエネルギーを、それぞれ λ の一乗の精度で求めよ。
- (ii) 摂動を受けた 1s 状態の電子について、電子を見いだす確率密度の $r = 0$ における値が、 $\lambda = 0$ の場合の何倍になっているかを求めよ。ただし、摂動計算に用いる非摂動状態としては、1s, 2s, 2p 状態だけを考慮すればよく、また、 λ の一乗の精度まででよい。
- (iii) この確率密度が $\lambda = 0$ の場合に比べて増加しているか減少しているかを述べ、式(9)の形のポテンシャルがそのような確率密度の増加（あるいは減少）をもたらした理由を直感的に説明せよ。
3. 通常のクーロンポテンシャルで記述される系、式(1)-(7)に戻って、量子力学における確率の意味を考えよう。時刻 $t = t_0$ に、電子を、1s 状態と 2s 状態の次のような重ね合わせ状態に置く：

$$\psi(\vec{r}, t=t_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{100}(\vec{r}) + \psi_{200}(\vec{r})] \quad \cdots (10)$$

- (i) この状態では、確率密度 $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ が t の周期関数になることを示し、その周期を求めよ。
- (ii) 電子のエネルギーの期待値 $\langle E \rangle$ はいくらか？ また、実際に電子のエネルギー E を一度だけ測定した場合に測定値として得られる可能性がある E の値をすべて挙げ、その値が得られる確率を書け。
- (iii) 一度目の測定を終了してから、もういちど式(10)の状態の電子を用意し、その E を測定する。さらにもう一度式(10)の状態の電子を用意し、その E を測定する、…、ということを繰り返し、全部で N 回の測定を行うとする。 i 番目 ($i = 1, 2, \dots, N$) の測定で得た E の測定値を ε_i と記すと、通常、その平均値

$$\bar{\varepsilon}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \quad \cdots (11)$$

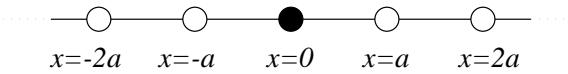
を「 E の実験値」として、理論値と比較することになる。しかしながら、測定の回数 N が有限である以上、 $\bar{\varepsilon}_N$ は一般には上で計算した $\langle E \rangle$ とは異なる。この、実験値 $\bar{\varepsilon}_N$ と理論値 $\langle E \rangle$ のずれを δ と記すことにする。その自乗期待値

$$\langle \delta^2 \rangle \equiv \langle (\bar{\varepsilon}_N - \langle E \rangle)^2 \rangle \quad \cdots (12)$$

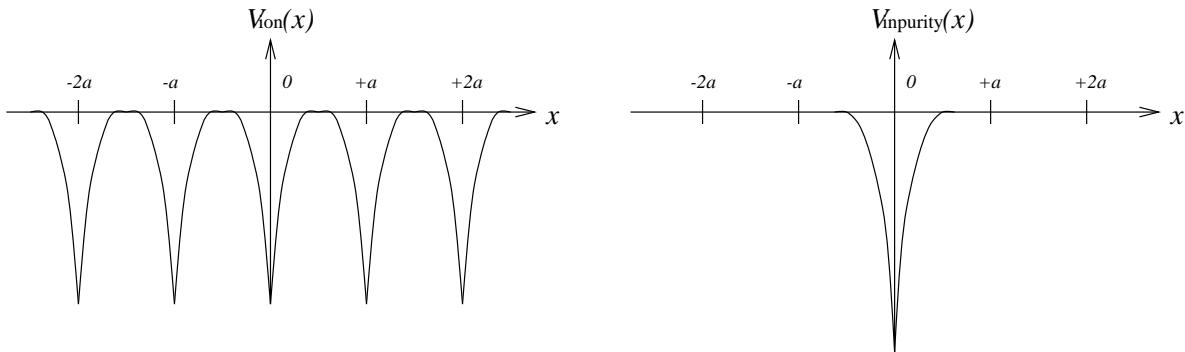
を求めよ。そして、無限回の測定を繰り返せば $\bar{\varepsilon}_N$ が $\langle E \rangle$ に一致すると期待できること、即ち、 $N \rightarrow \infty$ で $\langle \delta^2 \rangle \rightarrow 0$ となることを確かめよ。

専攻 問題 2

不純物による固体中の電子の束縛問題を考える。簡単のために、格子定数が a の一次元結晶とし、格子点は $x = na$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ で、不純物は $x = 0$ にあるとする。



完全結晶の場合に、格子点にあるイオンからのポテンシャルを $V_{\text{ion}}(x)$ とし、 $x = 0$ にある不純物によるポテンシャル $V_{\text{impurity}}(x)$ は、 $V_{\text{ion}}(x)$ に $\Delta V(x)$ が加わったものとする。 $V_{\text{ion}}(x)$ や $V_{\text{impurity}}(x)$ の概略は下図のようであるが、本問では共にデルタ関数型に簡略化する。



1. まず、 $V_{\text{ion}}(x) \equiv 0$ 、すなわち、1 次元の自由運動をする質量 m の電子が $\Delta V(x) = -\frac{\hbar^2}{m\lambda_0} \delta(x)$ によって束縛される問題を考える。ここで、 $\lambda_0 > 0$ とする。

- (i) 束縛エネルギー E_0 の電子の波動関数 $\phi_0(x)$ に対するシュレー・ディンガー方程式を書き下せ。
(ii) この方程式にフーリエ変換

$$\phi_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \phi_0(k) \quad \cdots (1)$$

を施し、 k 空間でのシュレー・ディンガー方程式が次のように書けることを示せ。

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \phi_0(k) - \frac{\hbar^2}{m\lambda_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{2\pi} \phi_0(k') = E_0 \phi_0(k) \quad \cdots (2)$$

- (iii) E_0 を $-\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$ と書くと、 $\phi_0(k)$ は

$$\phi_0(k) = \frac{C_0}{k^2 + \kappa^2} \quad \cdots (3)$$

と書ける。ここで、定数 C_0 は

$$C_0 = \frac{2}{\lambda_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \phi_0(k) \quad \cdots (4)$$

である。式 (3) と式 (4) とを組み合わせて κ を求めよ。また、 E_0 を λ_0 の関数として求めよ。

- (iv) $\phi_0(k)$ のフーリエ逆変換 $\phi_0(x)$ を λ_0 をパラメータとして求めよ。そして、 $\phi_0(x)$ の概要を図示し、 λ_0 の物理的な意味を述べよ。なお、波動関数を規格化する必要はない。

2. 次に、 $\Delta V(x) \equiv 0$ の完全一次元結晶を考える。すなわち、 $\lambda > 0$ として、

$$V_{\text{ion}}(x) = -\frac{\hbar^2}{m\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na) \quad \cdots (5)$$

の場合に、1. に従い、 k 空間での電子の波動関数 $\phi(k)$ を使って固有値問題を解こう。

(i) エネルギー ε の電子の $\phi(x)$ を決めるシュレーディンガーアクションは次のようになることを示せ。

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \phi(k) - \frac{\hbar^2}{m\lambda a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(k - \frac{2\pi}{a} n) = \varepsilon \phi(k) \quad \cdots (6)$$

なお、次のポアソンの和公式に注意せよ。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n) \quad \cdots (7)$$

(ii) $\varepsilon = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ と書くと、 $-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a}$ を満たす任意の k や整数 n に対して、

$$\phi(k - \frac{2\pi}{a} n) = \frac{C_k}{(k - \frac{2\pi}{a} n)^2 + \kappa^2} \quad \cdots (8)$$

と書ける。ここで、 k にはよるが、 n にはよらない数 C_k は

$$C_k = \frac{2}{\lambda a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(k - \frac{2\pi}{a} n) \quad \cdots (9)$$

である。これから、 κ と k とは次の関係で結びつくことを示せ。

$$\cos(ak) = \cosh(a\kappa) - \frac{1}{\kappa\lambda} \sinh(a\kappa) \quad \cdots (10)$$

なお、 $u, v > 0$ として、次の公式を使ってよい。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v}{(n-u)^2 + v^2} = \pi \frac{\sinh(2\pi v)}{\cosh(2\pi v) - \cos(2\pi u)} \quad \cdots (11)$$

(iii) 式 (10) から、 $\lambda < a$ の場合、 $-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a}$ の範囲の任意の k に対して、 κ は近似的に

$$\kappa = \frac{1}{\lambda} [1 + 2e^{-a/\lambda} \cos(ak)] \quad \cdots (12)$$

のように与えられることを示せ。

(iv) 式 (12) から、 k の関数としてのエネルギーの固有値 ε_k (分散関係) が決められる。 $|k| \ll \frac{\pi}{a}$ の場合には、それは次の式に示すような自由電子の分散関係に類似した形を持つことを示せ。

$$\varepsilon_k = \varepsilon_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \quad \cdots (13)$$

このとき、 ε_0 や電子の有効質量 m^* はどのように与えられるか。

3. 最後に、 $\Delta V(x) \neq 0$ で $V_{\text{ion}}(x) \neq 0$ の場合を考える。これまでのように、 k 空間でのシュレーディンガーアクションから出発すると、 $x = 0$ にある不純物に捕らえられた電子の束縛エネルギー \bar{E}_0 が一般的に求められる。しかし、これまでの結果をよく考察すれば、次の 2 つの極限的な場合には \bar{E}_0 の値は予測できる。その予測値を記し、そのように予測した理由を書け。

(i) $\lambda \ll a$ 、且つ、 $\lambda_0 \ll a$ の場合。

(ii) $\lambda \ll a \ll \lambda_0$ の場合。

専攻 問題 3

1. S 座標系と、それに対して x -軸方向に速度 v で運動している S' 座標系との間のローレンツ変換は

$$\begin{aligned} ct' &= +\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}ct - \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}x \\ x' &= -\frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}ct + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

である。ただし、二つの座標系は $t = t' = 0$ で完全に重なっていたとする。 c は光の速度である。数学的にはローレンツ変換は世界間隔の 2 乗

$$s_{12}^2 = -(ct_2 - ct_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

を不变にする座標変換である。次の 3 つの条件からローレンツ変換を導け。

- 世界間隔の 2 乗が不变である。
- 座標系の相対性原理(等速運動している座標系は互いに同等である。)
- $v/c \ll 1$ の極限で座標変換はガリレオの座標変換

$$t' = t \quad x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z$$

に一致する。

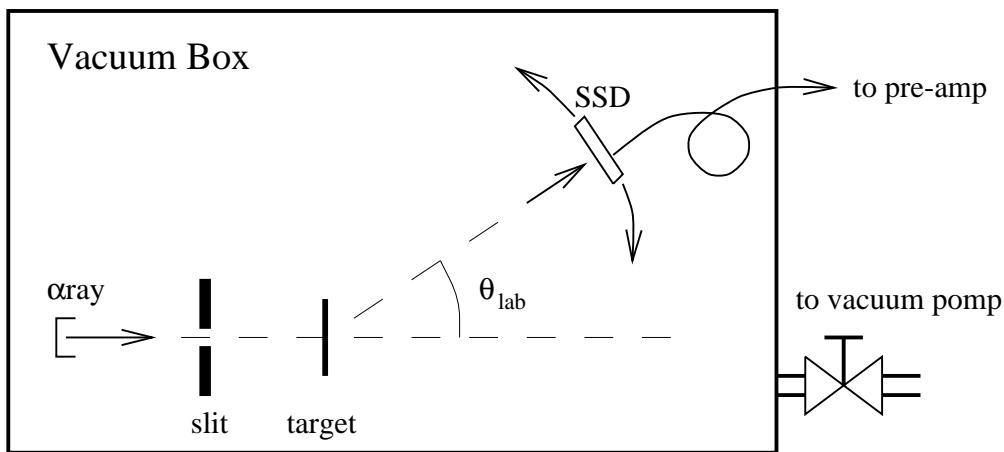
2. 光の速さに近い速度 v で走っている電車から振動数 ν_0 の光がすべての方向に放射されている。電車の進行方向側の線路上に立っている観測者が観測する光の振動数 ν_1 を求めよ。
また線路と直交している道路の無限遠方で観測したとき光の振動数 ν_2 はいくらか?
3. 静止状態での長さが 500 m の電車が光の速さに近い速度で走っている。電車の進行方向に小さな山があり、そのトンネルの長さは 400 m である。電車が光の速度の $4/5$ の速さで等速運動しながらこのトンネルを通過することについて以下の問い合わせよ。
- (i) 特殊相対論では自分の座標系に対して相対的に速度を持った物体の長さは短く観測される。これはローレンツ短縮と呼ばれている。静止時の物体の長さ(固有長さ)が ℓ_0 である物体が観測者の座標系で x -軸方向に速度 v で等速運動している。観測者が測定する長さ ℓ を求めよ。
 - (ii) 電車がトンネルに入り、また出て行くのを近くの丘の上で A 君が観測することにした。A 君は、「ローレンツ短縮の効果で、先頭から後尾まで電車のすべてが完全にトンネル内に入ってしまい、電車が見えなくなるようなことが起こるはずだ。」と考えた。地面に静止した座標系では電車の長さは何 m と推定されるか?
 - (iii) 逆に電車に乗っている B 君は、「トンネルこそローレンツ短縮を受けて短くなるはずである。したがってどんな時刻においても、電車の先頭、後尾の少なくともどちらかはトンネル外にあるはずで、電車の全体がトンネル内にあるようなことは起こり得ない。」と考えた。
B 君から見たトンネルの長さはいくらか?
 - (iv) 電車の後尾がトンネルに入る時刻を、A 君の時計で t_1 、B 君の時計で t'_1 、また先頭がトンネルから出てくる時刻を A 君の時計で t_2 、B 君の時計で t'_2 として、A 君と B 君の考え方の違いを比較検討し解説せよ。

専攻 問題 4

真空箱の中に、 α 線源のポロニウム ($^{212}_{84}\text{Po}$)、金 ($^{197}_{79}\text{Au}$) の薄膜標的、スリット、シリコン半導体検出器 (SSD) を模式図のように配置してラザフォード散乱実験を行なった。 α 粒子の運動エネルギーは、 $T_\alpha = 9 \text{ [MeV]}$ であった。簡単のために、標的の質量は α 粒子の質量にくらべて十分に大きく標的の反跳効果は無視できるものとする。なお、 α 粒子はヘリウムの原子核であり $^{4}_2\text{He}^{2+}$ である。また、質量数 A の原子核の半径は、 $r = 1.2 \cdot A^{1/3} \times 10^{-15} \text{ [m]}$ で与えられる。必要に応じて次の数値を参考せよ。

$$N_A(\text{アボガドロ数}) = 6 \times 10^{23} \text{ [個/mol]}, \quad \hbar c = 200 \times 10^{-15} \text{ [MeV} \cdot \text{m}], \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$$

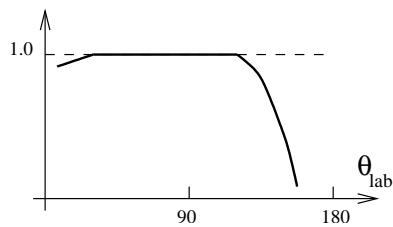
$$4^{\frac{1}{3}} = 1.6, \quad 197^{\frac{1}{3}} = 5.8, \quad 212^{\frac{1}{3}} = 6.0, \quad 208^{\frac{1}{3}} = 5.9$$



1. 実験を真空中で行なう理由を 1 行以内で述べよ。
 2. $^{212}_{84}\text{Po}$ は、 α 崩壊を起こし 鉛 $^{208}_{82}\text{Pb}$ に変換する。鉛の核表面における α 粒子に対するクーロン障壁の大きさを [MeV] 単位で求め、 α 崩壊のメカニズムを定性的に述べよ。
 3. α 粒子が、前方 (例えば 30°) と後方 (例えば 150°) に散乱されたときのそれぞれの軌道を、衝突径数 b や最近接距離 b₀ などの大小関係が判るように、一つの図の中に描け。ただし、散乱過程は古典力学的に取り扱うことができ、古典的軌道を描くことができるとする。また、軌道と b や b₀ の関係式や具体的な値を求める必要はなく、定性的なことが判るように図示されていれば十分である。
 4. 標的にスリットを通って入射する α 粒子数を I [個/秒]、金の原子数を N [個/m²]、検出器の立体角を ΔΩ [sr]、微分散乱断面積を $(d\sigma/d\Omega)_R$ [m²/sr] とする。
 - (i) 計数率 Y [個/秒] を求める式を書き下せ。
 - (ii) 金薄膜の厚さは 1 [g/m²] である。金の原子数を [m⁻²] の単位で求めよ。
 - (iii) 標的から検出器までの距離は 0.2 [m]、また検出器の有感面積は $4 \times 10^{-4} \text{ [m}^2]$ であった。立体角を求めよ。
 - (iv) I が 10^8 [個/秒] のときに、散乱角度 60° に散乱した α 粒子を検出し、1% の統計精度の個数になるまで計数したい。これに必要な測定時間をもとめよ。ただし α 粒子の検出効率は 100% とする。ここで、点電荷 Z_A によるラザフォード散乱は式
- $$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_R = \left(\frac{2Z_A e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{T_\alpha^2 \cdot \sin^4 \theta/2}$$
- で与えられる。
5. 金の原子は 79 個の電子を持っているが、この電子がラザフォード散乱の角度分布に与える影響を議論せよ。

6. 標的をアルミニウム (^{27}Al) の薄膜に変えて測定を行ったところ下図の結果を得た。ここで、横軸は散乱角度 (θ_{lab})、縦軸はラザフォード比と呼ばれる量であり、測定で得た微分散乱断面積 $(d\sigma/d\Omega)_{\text{exp}}$ をラザフォード散乱で予想される微分散乱断面積 $(d\sigma/d\Omega)_R$ で規格化したものである。

- (i) 大きな散乱角度から小さな散乱角度に向かって測定を行ったところ、ラザフォード比の値がだんだんと 1 からずれて小さくなつた。
この原因として考えられることを、検出器の計数効率を考慮して簡潔に推論せよ。また、その様なことが起こらないようにする実験的工夫を述べよ。
- (ii) 最近接距離 b_0 が原子核の半径程度になると、原子核反応を引き起こす。図のなかのどこにその様なことが現れているか。簡潔に説明せよ。



専攻 問題 5

結晶中の各原子(単位体積あたりの個数を n とする)に 1 個ずつ電子が存在し、隣り合った原子の間で電子が弱く相互作用している系がある。ある温度 $T = T_t$ で、この系は 1 次相転移を示し、 $T \geq T_t$ の相(高温相)では、各原子に 1 個ずつ捕らえられた相互作用のない電子からなる系と同じ比熱と帯磁率を示した。 $T \leq T_t$ の相(低温相)では、弱い原子間の相互作用が摂動となり電子がある小さな確率で原子間をとびるために、比熱、帯磁率は縮退した自由電子ガスと同じ温度依存性を示した。しかし、その比熱の絶対値は、自由電子ガスの比熱の表式において、自由電子の質量 m_e をより大きな値 m^* (有効質量と呼ぶ)に置き換えたもので表された。十分低温のため、格子比熱、各相での熱膨張は無視できるものとして、次の間に答えよ。

1. 高温相の単位体積あたりの帯磁率、磁場中での比熱を求めよ。磁場 \vec{H} と電子との相互作用ハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \sum_i 2\mu_B \vec{H} \cdot \vec{S}_i \quad \cdots (1)$$

で与えられるとする。ここで、 $\mu_B \equiv e\hbar/2m_e c$ は電子のボア磁子、 \vec{S}_i は電子 i のスピン演算子を表す。

2. 低温相の単位体積あたりの比熱は、温度 T の最低次までで、

$$c_p = \frac{k_B^2 m^*}{3\hbar^2} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{1}{3}} T \quad \cdots (2)$$

と与えられた(k_B : ボルツマン定数)。式(2)が温度に比例する理由を、有限温度のフェルミ分布関数を用いて定性的に説明せよ。

以下の設問では、磁場はかかっていないとし、前問で求めた両相の諸量の表式は転移点 T_t まで使えるものとする。

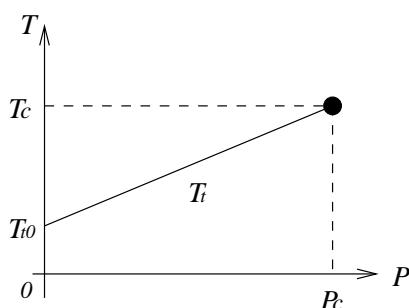
3. 上記の 1 次転移が起こるには、エントロピーの考察から、有効質量 m^* と相転移温度 T_t がどのような条件を満たさなければならないか?
4. いま、この電子系に圧力 P をかけたところ、相転移温度 T_t が上昇し、低温相の比熱より求まる有効質量 m^* が減少した(図参照)。有効質量および相転移温度の圧力依存性は、 m_0^* 、 T_{t0} を $P = 0$ での有効質量、転移温度として、

$$m^* = m_0^*(1 + aP)^{-1} \quad \cdots (3)$$

$$T_t = T_{t0}(1 + bP) \quad \cdots (4)$$

($a > 0, b > 0$) の実験式で与えられた。ある圧力 $P = P_c$ (臨界圧力) 以上で 1 次転移が消失するのは、 a 、 b がどのような条件を満たす場合か?

5. P_c 、および転移の消失する温度 $T = T_c$ (臨界温度)を、 a 、 b 、 m_0^* 、 T_{t0} を用いて表わせ。



専攻 問題 6

一様密度 ρ_0 で非圧縮性の液滴を考えよう。液滴は、ある初期条件のもとでその内部に渦のない流れを生じ、時間とともに形を変えていくものとする。

1. 液滴内部の速度分布を $v(r, t)$ として、以下の間に答えよ。

- (i) 連続の方程式を用いて、非圧縮性の条件を $v(r, t)$ に対する式として表せ。また、流れに渦がないときには、 $v = -\text{grad}\chi$ となる速度ポテンシャル $\chi(r, t)$ が存在してラプラスの方程式

$$\Delta\chi(r, t) = 0 \quad \cdots (1)$$

を満たすことを示せ。

- (ii) 上式の解は

$$\chi(r, t) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}(t) f_{\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad \cdots (2)$$

と書ける。このとき、動径関数は

$$\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right\} f_{\ell}(r) = 0 \quad \cdots (3)$$

に従う。この方程式の液滴内部で正則な解は $f_{\ell}(r) = r^{\ell}$ であることを示せ。

その際、他の独立解は原点 ($r = 0$) で正則でないことを確かめよ。

2. 液滴の重心から (θ, φ) 方向を見たとき、表面までの距離が

$$R(\theta, \varphi, t) = R_0 + q(t) Y_{20}(\theta, \varphi) \quad \cdots (4)$$

と変動する場合を考える。以下では、変動の大きさ $|q(t)|$ が R_0 に比べて十分に小さいものとする。

- (i) 液滴表面までの距離は、内部から表面へ向かって液体が流れることによって変化する。そこで、

$$\frac{\partial}{\partial t} R(\theta, \varphi, t) = -\frac{\partial}{\partial r} \chi(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{r=R} \quad \cdots (5)$$

の関係が成り立つとして、速度ポテンシャル $\chi(r, t)$ を $\dot{q}(t) (\equiv dq/dt)$ を用いて表せ。ただし、変形は微小なので、右辺で $r = R$ を $r = R_0$ と近似して良いものとする。

- (ii) 液滴内部の速度分布 (v_x, v_y, v_z) を、 $Y_{20}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$ を使って求めよ。次に、液滴内部の全運動エネルギーを計算せよ。ただし、積分は変形が小さいとして、半径 R_0 の球内で行なえば良い。

- (iii) 体積を保存した上記の変形にともない、液滴の表面積は球形のときより $2q^2(t)$ だけ増加することが知られている。液滴の表面張力を σ として、変形によるポテンシャル・エネルギーの変形を求めよ。

3. ここで、量子的サイズの液滴の運動を考えよう。

- (i) 上記 2 の液滴の変形に伴うハミルトニアンは、お互いに正準共役な演算子 \hat{q}, \hat{p} を用いて

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} \{ \hat{p}^2 + (M\omega\hat{q})^2 \} \quad \cdots (6)$$

と表される。ここで、

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}(a_+ + a_-) \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}}(a_+ - a_-) \quad \cdots (7)$$

の関係にある演算子 a_+ および a_- (交換関係は $[a_-, a_+] = 1$) を導入すれば、そのハミルトニアンは

$$\hat{H} = \hbar\omega(a_+a_- + \frac{1}{2}) \quad \cdots (8)$$

と書ける。 M および ω を ρ_0, R_0, σ を用いて表せ。

(ii) ハイゼンベルク表示の演算子 $a_{-\text{H}}(t) \equiv e^{i\hat{H}t/\hbar} a_- e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ の運動方程式を考えて、

$$a_{-\text{H}}(t) = e^{-i\omega t} a_- \quad \cdots (9)$$

が成り立つことを示せ。

(iii) 演算子 a_- の固有状態 $|z_0\rangle$:

$$a_-|z_0\rangle = z_0|z_0\rangle, \quad z_0 = i \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} A_0 \quad \cdots (10)$$

を考える。 A_0 は実定数で、 R_0 に比べれば十分に小さい値であるとする。この $|z_0\rangle$ を初期状態とする状態 $|\psi(t)\rangle (= e^{-i\hat{H}t/\hbar}|z_0\rangle)$ は、任意の時刻においてもやはり a_- の固有状態であることを示せ。また、その固有値 $z(t)$ を求めよ。

(iv) 状態 $|\psi(t)\rangle$ における \hat{q} および \hat{p} の期待値を求め、 A_0 が何を意味するかについて述べよ。また、 $A_0 \rightarrow 0$ のとき、エネルギーの値がどうなるかを答えよ。

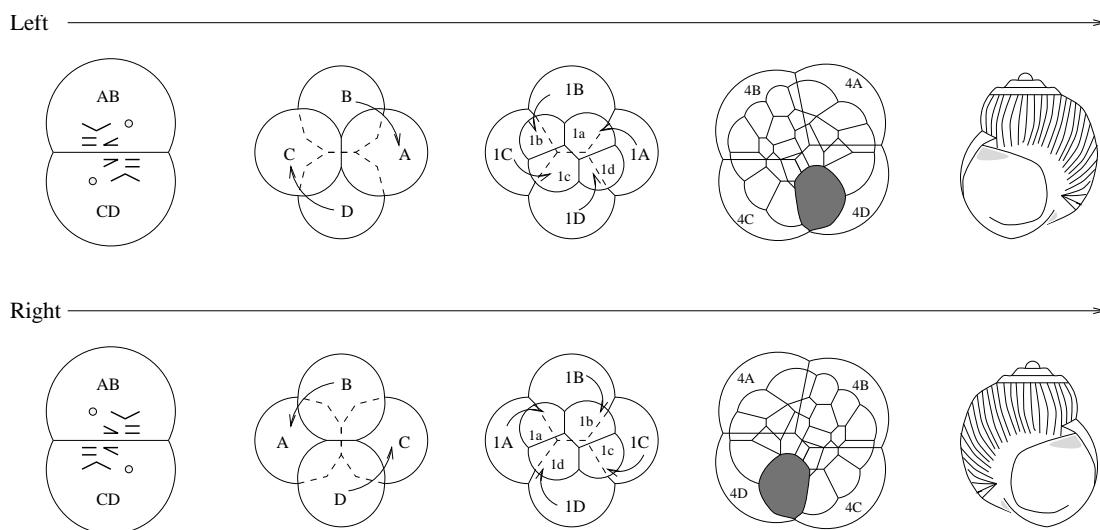
専攻 問題 7

生物の身体はしばしば左右非対称性を示す。見かけ上対称な受精卵から発生する個体が非対称となる分子機構はまだほとんど理解されていない。しかし、ある巻き貝 (Limnae) が右巻き型になるか左巻き型になるかは一つの遺伝子の 2 種の対立遺伝子 (*S*:左巻き型, *s*:右巻き型) で決まることが知られている。

下に説明する 実験 (1) と 実験 (2) の結論をよく読んで、下記の 3 つの間に答えなさい。

実験 (1)

右巻き型と左巻き型の発生における左右非対称性は、下図に描かれているように、第 2 回目の細胞分裂に始まり、それ以後の発生は鏡像対称的に進行する。第 2 分裂の頃にはまだ受精卵の染色体からのメッセンジャー RNA (mRNA) の合成は全く行われていない。(図中の ABC などは分裂した細胞につけられた名前である)



実験 (2)

- 1) 純系右巻き (*s/s*) の雄個体と純系左巻き (*S/S*) 雌個体との交配をしたら、その第 1 世代 (F1) は全個体が左巻きであった。
 - 2) その F1 雄雌を交配してできた第 2 世代 (F2) は全個体が左巻きであった。
 - 3) その F2 雄雌を交配してできた第 3 世代 (F3) には右巻きと左巻きの個体が混在し、その比はおよそ 1:3 であった。
1. 実験 (2) の結果は、明確な遺伝現象ではあるがメンデルの法則にはあわない変則的なもののように見える。しかし実験 (1) の結果を吟味して考えると、メンデルの法則で完全に理解できることを説明せよ。
 2. 実験 (2) とは逆に、純系左巻き (*S/S*) 雄と純系右巻き (*s/s*) 雌とを交配した場合、その F1、F2、F3 個体の巻き方はどのようになるかを推論しなさい。
 3. 非対称性生成の分子機構を明らかにするためには、この遺伝子の産物 (メッセンジャー RNA および蛋白質) についてどのような研究をするべきかを箇条書きにして論じ、S 遺伝子産物の働きについてどのような可能性があるかを論じなさい。

専攻 問題 8

1. 蛋白質は熱や酸によりこわれた天然状態から変性状態に変る。この構造変化について蛋白質の熱力学を考えよう。

蛋白質の安定性は上記 2 つの状態の自由エネルギー差を用いて議論され、通常記号 ΔG^u ($G_{\text{変性}} - G_{\text{天然}}$) で表される。 ΔG^u は熱の出入りを表すエンタルピー ΔH^u と分子の無秩序を表すエントロピー ΔS^u の 2 項を用いて次の式で表現される。

$$\Delta G^u = \Delta H^u - T \Delta S^u \quad \cdots (1)$$

ところで、 ΔG^u , ΔS^u の温度依存性は以下のようにカロリメトリー測定より求まる。

$$\Delta H^u = \Delta H_m + \int_{T_m}^T \Delta C_p dT = \boxed{\text{a}} \quad \cdots (2)$$

$$\Delta S^u = \frac{\Delta H_m}{T_m} + \int_{T_m}^T \Delta C_p d(\ln T) = \boxed{\text{b}} \quad \cdots (3)$$

ここで、 T_m と ΔH_m は変性中点の温度(変性温度)と変性の潜熱である。また、 ΔC_p は 2 つの状態の比熱の差で温度によらない定数とする。式 (1),(2),(3) より、 ΔG^u の温度依存性は最終的に下の式で与えられる。

$$\Delta G^u = \boxed{\text{c}} \quad \cdots (4)$$

2. 蛋白質の一つであるリゾチームのカロリメトリー測定から pH7 で以下の値が得られた。

$$\Delta H_m = 100 \text{ kcal/mol}, \quad \Delta C_p = 2.3 \text{ kcal/mol} \cdot \text{K}, \quad T_m = 57^\circ\text{C}$$

この値をもとに ΔG^u , ΔH^u , ΔS^u の温度変化を図示せよ。

この図よりリゾチームの最安定状態の温度 $\boxed{\text{d}}$ を導け。またこの温度で $\Delta S^u = 0$ となることを導け。

3. 物質は低温で安定だが、蛋白質は高温のみならず低温で不安定となる(低温変性)。この理由について考察しよう。

ΔG^u , ΔH^u , ΔS^u は無水状態(真空中)の純粋に蛋白質構造の寄与(添字を c で表す)と蛋白質と水との相互作用の項(水和エネルギー、添字を h で表す)の 2 項に分解される。

$$\Delta G^u = \Delta G_c^u + \Delta G_h^u \quad \cdots (4)$$

$$\Delta H^u = \Delta H_c^u + \Delta H_h^u \quad \cdots (5)$$

$$\Delta S^u = \Delta S_c^u + \Delta S_h^u \quad \cdots (6)$$

このうち蛋白質構造由来の項 ΔH_c^u , ΔS_c^u の温度依存性は小さい。この値を一定と考えると、 $\Delta G_c^u = 0$ となる温度、すなわち真空中の変性温度は一点で定まり、低温変性はあり得ない。たとえば、 $\Delta H_c^u = 870 \text{ kcal/mol}$, $\Delta S_c^u = 1700 \text{ kcal/mol} \cdot \text{K}$ のとき真空中の変性温度は $\boxed{\text{e}}$ と見積もられる。水中では 2 の問題に見られるように $\Delta G^u = 0$ となる点が 2 つある。従ってこれは $\Delta H_c^u, \Delta S_c^u$ ではなく $\Delta H_h^u, \Delta S_h^u$ の水和エネルギーにその起源があると考えなければならない。

4. 水との相互作用エネルギー(水和エネルギー)は以下で与えられる。

$$\Delta H_h^u = \Delta H_h^u(T_0) + \int_{T_0}^T \Delta C_p dT \quad \cdots (7)$$

$$\Delta S_h^u = \Delta S_h^u(T_0) + \int_{T_0}^T \Delta C_p d(\ln T) \quad \cdots (8)$$

ここでは T_0 は基準温度、例えば 25°C。

$$\Delta H_h^u(T_0) = h_1(A_1^D - A_1^N) + h_2(A_2^D - A_2^N) \quad \cdots (9)$$

$$\Delta S_h^u(T_0) = s_1(A_1^D - A_1^N) + s_2(A_2^D - A_2^N) \quad \cdots (10)$$

$$\Delta G_h^u(T_0) = g_1(A_1^D - A_1^N) + g_2(A_2^D - A_2^N) \quad \cdots (11)$$

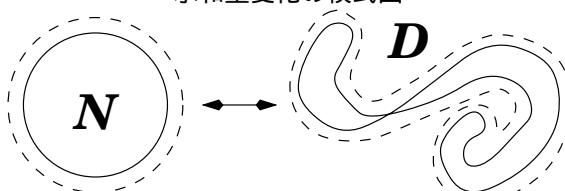
ここで h_1, s_1, g_1 は極性基のそして h_2, s_2, g_2 は非極性基の水和の熱力学パラメータである。 A_1^D, A_1^N はそれぞれ水と接する極性基の変性状態と天然状態における総数である。非極性基も同様に定義する。

水和の熱エネルギーは表のように与えられる。

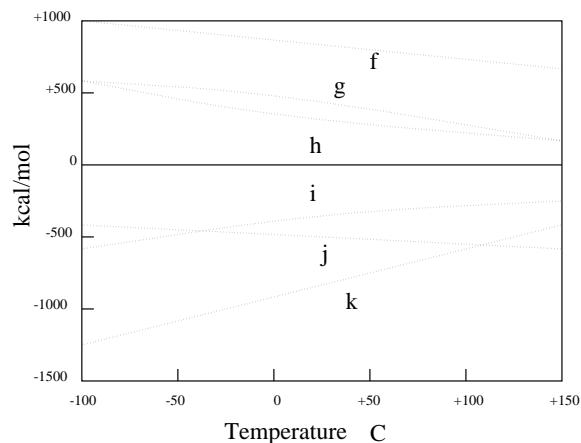
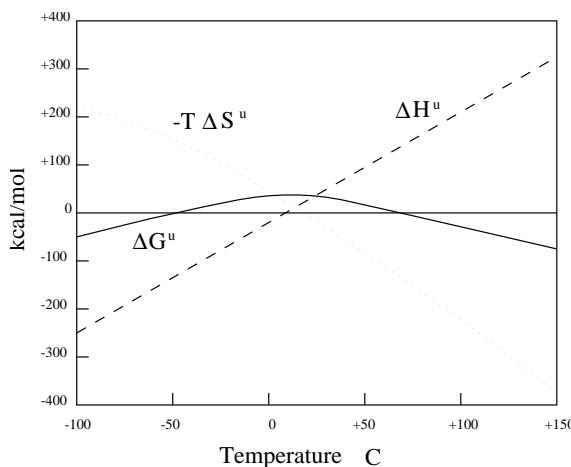
水和の力学的パラメーター

	h (kcal/mol)	s (cal/mol·K)	g (kcal/mol)
極性基	-20	-40	-8
非極性基	-13	-40	-1

水和量変化の模式図



式(9)～(11)と上表を用いると水和に伴う、各熱力学量は蛋白質の構造変化(上図参照)が分かると自動的に求まる。まず $\Delta G_h^u(T_0), \Delta S_h^u(T_0)$ が求まる。次に実験量 ΔC_p を用いて式(7),(8)より温度変化がわかる。その結果が次の図に与えられている。



式(4)～(6)の右辺に表れた 6 個の熱力学量が上の右の図の中の曲線のどれに対応するか示せ。ただし上図では $\Delta S_c^u, \Delta S_h^u(T_0)$ は $-T\Delta S_c^u, -T\Delta S_h^u(T_0)$ の形で表示されている。

5. 以上の考察から低温変性の起源について論ぜよ。

専攻 問題 1 解答

1. (i) この系では換算質量が $m = \frac{m_e m_h}{m_e + m_h}$ 、電荷が $e^2 \rightarrow \frac{e^2}{\epsilon}$ と置き換えられるので、Rydberg 定数は、

$$R_y = \frac{m_e m_h e^4}{2\hbar^2(m_e + m_h)} \frac{1}{\epsilon^2}$$

と変更される。よって最低エネルギーは、

$$E_1 = -R_y = -\frac{m_e m_h e^4}{(m_e + m_h) 2\epsilon^2 \hbar^2}$$

である。ついでに Bohr 半径 a は

$$a = \frac{\hbar^2 \epsilon (m_e + m_h)}{m_e m_h e^2}$$

と変更される。以後この表式での R_y と a を用いる。

- (ii) 1s 状態での r の期待値 $\langle r \rangle$ は

$$\langle r \rangle = \langle 1s | \hat{r} | 1s \rangle = \int d\vec{r} \psi_{1s}^*(\vec{r}) r \psi_{1s}(\vec{r}) = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta \cdot r |R_{10}(r) Y_{00}(\theta, \varphi)|^2$$

球面調和関数 Y_{00} は球面積分に対して規格化されているので

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta |Y_{00}(\theta, \varphi)|^2 = 1$$

である。先の積分を続けると、

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty dr r^3 \left[\frac{2}{\sqrt{a^3}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \right]^2 = \frac{a}{4} \int_0^\infty d\left(\frac{2r}{a}\right) \left(\frac{2r}{a}\right)^3 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) = \frac{a}{4} 3! = \frac{3a}{2}$$

となる。

2. (i) ハミルトニアンの摂動項を $\mathcal{H}' \equiv -\lambda \delta^3(\vec{r})$ で表すことにする。 $4\pi r^2 \delta^3(\vec{r}) = \delta(r)$ であることに注意する。

1s 状態のエネルギーの 1 次摂動 $E_{1s}^{(1)}$ は

$$\begin{aligned} E_{1s}^{(1)} &= \langle 1s | \mathcal{H}' | 1s \rangle = -\lambda \int d\vec{r} \psi_{1s}^{*(0)}(\vec{r}) \delta^3(\vec{r}) \psi_{1s}^{(0)}(\vec{r}) \\ &= -\lambda \int_0^\infty dr r^2 \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} |R_{10}(r)|^2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta |Y_{00}(\theta, \varphi)|^2 = -\frac{\lambda}{4\pi} |R_{10}(0)|^2 = -\frac{\lambda}{a^3 \pi} \end{aligned}$$

同様に 2s 状態のエネルギーの 1 次摂動 $E_{2s}^{(1)}$ は

$$E_{2s}^{(1)} = \langle 2s | \mathcal{H}' | 2s \rangle = -\frac{\lambda}{4\pi} |R_{20}(0)|^2 = -\frac{\lambda}{8a^3 \pi}$$

となる。2p の各状態の 1 次摂動は $R_{21}(0) = 0$ なので

$$E_{2p}^{(1)} = 0$$

- (ii) 1s 状態が 2s または 2p 状態に遷移する状況を考えるので、1 次摂動まで考慮した ψ_{1s} は

$$\psi_{1s} = \psi_{1s}^{(0)} + \sum_i c_i \psi_i^{(0)} \quad i = \{2s, 2p_x, 2p_y, 2p_z\}$$

と表される。この係数 c_i は次の通り。

$$c_i = \frac{\langle i | \mathcal{H}' | 1s \rangle}{E_1^{(0)} - E_i^{(0)}} = \frac{\langle i | \mathcal{H}' | 1s \rangle}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} = \frac{\langle i | \mathcal{H}' | 1s \rangle}{-R_y + R_y/4} = -\frac{4}{3R_y} \langle i | \mathcal{H}' | 1s \rangle$$

2p の各状態の c_i は、 $\mathcal{H}' = -\lambda \delta^3(\vec{r})$ 、 $R_{21}(0) = 0$ を考慮すると 0 であることがわかる。2s の状態の c_i のみ 0 でない値をもつ。

$$\begin{aligned} c_{2s} &= \frac{4\lambda}{3R_y} \int_0^\infty dr r^2 \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} R_{20}(r) R_{10}(r) \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta |Y_{00}(\theta, \varphi)|^2 \\ &= \frac{4\lambda}{3R_y} \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot R_{20}(0) R_{10}(0) = \frac{\lambda}{3\pi R_y} \cdot \frac{2}{\sqrt{8a^3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{3\pi a^3 R_y} \end{aligned}$$

よって

$$\psi_{1s}(\vec{r}) = \psi_{1s}^{(0)}(\vec{r}) + \frac{\sqrt{2}\lambda}{3\pi a^3 R_y} \psi_{2s}^{(0)}(\vec{r})$$

である。中心 ($\vec{r} = 0$) における電子密度は

$$|\psi_{1s}(0)|^2 \simeq |\psi_{1s}^{(0)}(0)|^2 + \frac{2\sqrt{2}\lambda}{3\pi a^3 R_y} \psi_{2s}^{*(0)}(0) \psi_{1s}^{(0)}(0) = \frac{2}{a^3} \left(1 + \frac{2\lambda}{3a^3 \pi R_y} \right)$$

となり、 $\lambda = 0$ にくらべて () で囲んだ係数だけ密度が高くなっている。

(iii) ポテンシャルが深くなつて電子がより集まつたから。

3. (i) エネルギー E の定常状態の波動関数の時間依存性は $e^{-iEt/\hbar}$ であるので、式 (10) は次のように時間発展する。ただし $t_0 = 0$ としている。

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{100}(\vec{r}) \cdot e^{-iE_1 t/\hbar} + \psi_{200}(\vec{r}) \cdot e^{-iE_2 t/\hbar})$$

ψ_{100}, ψ_{200} は実数なので $\psi(\vec{r}, t)$ の複素共役は

$$\psi^*(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{100}(\vec{r}) \cdot e^{+iE_1 t/\hbar} + \psi_{200}(\vec{r}) \cdot e^{+iE_2 t/\hbar})$$

となるので確率密度は

$$\begin{aligned} |\psi(\vec{r}, t)|^2 &= \frac{1}{2} (|\psi_{100}|^2 + |\psi_{200}|^2 + \psi_{100} \psi_{200} \cdot e^{+i(E_1-E_2)t/\hbar} + \psi_{200} \psi_{100} \cdot e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar}) \\ &= \frac{1}{2} (|\psi_{100}|^2 + |\psi_{200}|^2 + 2\psi_{100} \psi_{200} \cdot \cos \frac{E_1 - E_2}{\hbar} t) \end{aligned}$$

よつて時間の周期関数である。その周期 T は、

$$T = \frac{2\pi\hbar}{E_2 - E_1} = \frac{8\pi\hbar}{3R_y}$$

- (ii) 式 (10) で表される状態を測定して ψ_{100} を見出す確率 P_1 は

$$P_1 = \left| \int d\vec{r} \psi_{100}^* \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{100}(\vec{r}) + \psi_{200}(\vec{r})] \right|^2 = \frac{1}{2}$$

この時、電子のエネルギーは E_1 である。 ψ_{200} を見出す確率 P_2 も同じである。

よつて電子のエネルギーの平均値 $\langle E \rangle$ は

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} (E_1 + E_2)$$

- (iii) N 回の測定でエネルギー E_1 を n 回測定し、 E_2 を $N-n$ 回測定する確率 $P(n)$ は、

$$P(n) = \left(\frac{1}{2} \right)^n \left(\frac{1}{2} \right)^{N-n} {}_N C_n = \frac{{}_N C_n}{2^N}$$

である。次に $\Delta E \equiv (E_2 - E_1)/2 = 3R_y/8$ と定義して $E_1 = \langle E \rangle - \Delta E$ 、 $E_2 = \langle E \rangle + \Delta E$ と表すことにする。 N 回の測定でのエネルギーの平均値 $\bar{\varepsilon}_N$ は

$$\bar{\varepsilon}_N = \frac{E_1 n + E_2 (N-n)}{N} = \langle E \rangle + \frac{\Delta E}{N} (2n - N)$$

となる。よって $\langle \delta^2 \rangle$ は

$$\begin{aligned}\langle \delta^2 \rangle &= \langle (\bar{\varepsilon}_N - \langle E \rangle)^2 \rangle = \sum_{n=0}^N (\bar{\varepsilon}_N - \langle E \rangle)^2 P(n) = \sum_{n=0}^N \frac{\Delta E^2}{N^2} (2n - N)^2 {}_n C_n \\ &= \frac{\Delta E^2}{2^N N^2} \left[4 \sum_{n=0}^N n^2 {}_n C_n - 4N \sum_{n=0}^N n {}_n C_n + N^2 \sum_{n=0}^N {}_n C_n \right]\end{aligned}$$

ここで ${}_n C_n$ の種々の公式

$${}_n C_n = N_{N-1} C_{n-1} \quad n^2 {}_n C_n = N(N-1) {}_{N-2} C_{n-2} + N_{N-1} C_{n-1} \quad \sum_{n=0}^N {}_n C_n = 2^N$$

を思い出して計算を進めると、

$$\begin{aligned}\langle \delta^2 \rangle &= \frac{\Delta E^2}{2^N N^2} \left[4N(N-1) \sum_{n=0}^N {}_{N-2} C_{n-2} + 4N \sum_{n=0}^N {}_{N-1} C_{n-1} - 4N^2 \sum_{n=0}^N {}_{N-1} C_{n-1} + N^2 \sum_{n=0}^N {}_n C_n \right] \\ &= \frac{\Delta E^2}{2^N N^2} \left[4N(N-1) 2^{N-2} + 4N 2^{N-1} - 4N^2 2^{N-1} + N^2 2^N \right] \\ &= \frac{\Delta E^2}{N^2} \left[N^2 - N + 2N - 2N^2 + N^2 \right] \\ &= \frac{\Delta E^2}{N} = \frac{1}{N} \left(\frac{3R_y}{8} \right)^2\end{aligned}$$

となる。確かに $N \rightarrow \infty$ で $\langle \delta^2 \rangle \rightarrow 0$ となる。

専攻 問題 2 解答

1. (i) ΔV のポテンシャル中のエネルギー E_0 の電子の Schrödinger 方程式は以下の通り。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi_0(x) - \frac{\hbar^2}{m\lambda_0} \delta(x) \phi_0(x) = E_0 \phi_0(x) \quad \cdots (1)$$

- (ii) 式 (1) の各項の $\phi_0(x)$ に式 (1) を代入すると、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} e^{-ikx} \phi_0(k) - \frac{\hbar^2}{m\lambda_0} \delta(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \phi_0(k) = E_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \phi_0(k)$$

各項に $e^{ik'x}$ をかけて x で積分すると

$$[\text{第 1 項}] \Rightarrow \int dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} e^{-i(k-k')x} \phi_0(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \delta(k - k') \phi_0(k) = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} \phi_0(k')$$

$$[\text{第 2 項}] \Rightarrow \frac{\hbar^2}{m\lambda_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-i(k-k')x} \phi_0(k) = \frac{\hbar^2}{m\lambda_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \phi_0(k)$$

$$[\text{第 3 項}] \Rightarrow E_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-i(k-k')x} \phi_0(k) = E_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dk \delta(k - k') \phi_0(k) = E_0 \phi_0(k')$$

よって式 (1) の全体のこの計算の結果は、

$$\frac{\hbar^2 k'^2}{2m} \phi_0(k') - \frac{\hbar^2}{m\lambda_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \phi_0(k) = E_0 \phi_0(k')$$

k, k' の記号を入れ換えることで式 (2) が示される。

- (iii) 式 (2) で $E_0 = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$ とおいて整理することにより次式を得る。

$$\phi_0(k) = \frac{2m}{\hbar^2(k^2 + \kappa^2)} \cdot \frac{\hbar^2}{m\lambda_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{2\pi} \phi_0(k')$$

ここで式 (4) の定義で C_0 を用いると式 (3) となる。式 (4) の $\phi_0(x)$ に式 (3) を代入して、 $C_0 \neq 0$ であるので C_0 で割って整理すると

$$\lambda_0 \pi = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{k^2 + \kappa^2}$$

この積分は右図の経路の複素積分に拡張することができる。よって留数定理により

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{k^2 + \kappa^2} = \oint_{\gamma} dk \frac{1}{k^2 + \kappa^2} = 2\pi i \lim_{k \rightarrow +i\kappa} (k - i\kappa) \frac{1}{k^2 + \kappa^2} = \frac{\pi}{\kappa}$$

となるので結局

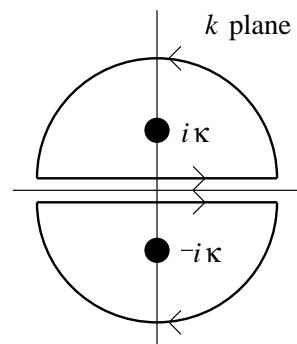
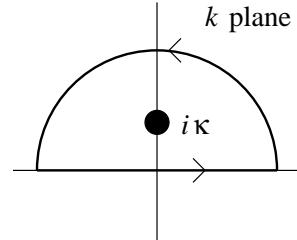
$$\kappa = \frac{1}{\lambda_0} \quad E_0 = -\frac{\hbar^2}{2m\lambda_0^2}$$

であることがわかる。

- (iv) 式 (1) の $\phi_0(x)$ に式 (3) を代入すると

$$\phi_0(x) = \frac{C_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{-ikx}}{k^2 + \kappa^2}$$

この積分は x の正負によって右図のように 2 種の経路の複素積分に拡張することができる。よって留数定理により



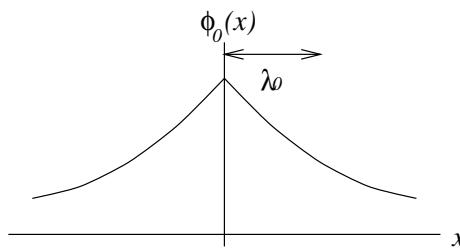
$$(x \geq 0 の場合) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{-ikx}}{k^2 + \kappa^2} = \oint_{\text{上半平面}} dk \frac{e^{-ikx}}{k^2 + \kappa^2} = -2\pi i \lim_{k \rightarrow -i\kappa} (k + i\kappa) \frac{e^{-ikx}}{k^2 + \kappa^2} = \pi \frac{e^{-\kappa x}}{\kappa}$$

$$(x < 0 の場合) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{-ikx}}{k^2 + \kappa^2} = \oint_{\text{下半平面}} dk \frac{e^{-ikx}}{k^2 + \kappa^2} = +2\pi i \lim_{k \rightarrow +i\kappa} (k - i\kappa) \frac{e^{-ikx}}{k^2 + \kappa^2} = \pi \frac{e^{+\kappa x}}{\kappa}$$

となるので結局

$$\phi_0(x) = \frac{C_0}{2\kappa} e^{-\kappa|x|} = \frac{C_0 \lambda_0}{2} e^{-\frac{|x|}{\lambda_0}}$$

が得られる。 λ_0 は波動関数の広がりの程度を表していることがわかる。



2. (i) Schrödinger 方程式は式 (1) と同様に、

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) - \frac{\hbar^2}{m\lambda} \sum_n \delta(x-na) \phi(x) = \varepsilon \phi(x) \quad \cdots (2)$$

である。設問 1(ii) と同様にフーリエ変換を代入して $e^{ik'x}$ をかけて x で積分する。ここで式 (2) の左辺第 2 項についてのこの計算に注目する。

$$[\text{第 2 項}] \implies \frac{\hbar^2}{m\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ik'x} \sum_n \delta(x-na) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \phi(k) = \frac{\hbar^2}{m\lambda} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-i(k-k')na} \phi(k)$$

ここで式 (7) のヒントにより、

$$\begin{aligned} &= \frac{\hbar^2}{m\lambda} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} 2\pi \delta(-(k-k')a - 2\pi n) \phi(k) \\ &= \frac{\hbar^2}{m\lambda a} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} dk \delta(-ak + ak' - 2\pi n) \phi(k) = \frac{\hbar^2}{m\lambda a} \sum_n \phi(k' - \frac{2\pi}{a}n) \end{aligned}$$

よって式 (2) の全体のこの計算の結果は、

$$\frac{\hbar^2 k'^2}{2m} \phi(k') - \frac{\hbar^2}{m\lambda a} \sum_n \phi(k' - \frac{2\pi}{a}n) = \varepsilon \phi(k')$$

k, k' の記号を入れ換えることで式 (6) が示される。

(ii) ϕ を式 (8), (9) から消去して $C_k \neq 0$ より

$$1 = \frac{2}{\lambda a} \sum_n \frac{1}{(k - \frac{2\pi}{a}n)^2 + \kappa^2} = \frac{1}{\lambda \pi \kappa} \sum_n \frac{(a\kappa/2\pi)}{(n - (ak/2\pi))^2 + (a\kappa/2\pi)^2}$$

を得る。この式は式 (11) のヒントにより、

$$1 = \frac{1}{\lambda \kappa} \frac{\sinh(a\kappa)}{\cosh(a\kappa) - \cos(a\kappa)}$$

となる。これより式 (10) が導かれる。

- (iii) 設問 1 と同様に $\kappa \sim 1/\lambda$ と仮定すれば $\lambda \ll a$ の条件は $1 \sim \lambda\kappa \ll a\kappa$ となる。この条件のもとで式 (10) を近似すると

$$\cos(ak) = \frac{e^{a\kappa} + e^{-a\kappa}}{2} - \frac{1}{\lambda\kappa} \frac{e^{a\kappa} - e^{-a\kappa}}{2} \sim \frac{e^{a\kappa}}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa\lambda}\right)$$

$$\therefore \kappa \sim \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 - 2e^{-a\kappa} \cos(ak)} \sim \frac{1}{\lambda} (1 + 2e^{-a\kappa} \cos(ak))$$

この κ を再び $e^{-a\kappa}$ の κ に代入することで

$$\kappa \sim \frac{1}{\lambda} [1 + 2e^{-\frac{a}{\lambda}} \cos(ak)]$$

が得られ式 (12) が示された。

- (iv) ε_k は

$$\varepsilon_k = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m\lambda^2} [1 + 2e^{-\frac{a}{\lambda}} \cos(ak)]^2$$

である。 $ak \ll 1$ の条件でこれを ak の 2 次まで展開すると、

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &\sim -\frac{\hbar^2}{2m\lambda^2} [1 + 2e^{-\frac{a}{\lambda}} (1 - \frac{(ak)^2}{2})]^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m\lambda^2} [(1 + 2e^{-\frac{a}{\lambda}}) - e^{-\frac{a}{\lambda}} a^2 k^2]^2 \\ &\sim -\frac{\hbar^2 (1 + 2e^{-\frac{a}{\lambda}})^2}{2m\lambda^2} + \frac{\hbar^2 k^2 (1 + 2e^{-\frac{a}{\lambda}}) e^{-\frac{a}{\lambda}} a^2}{m\lambda^2} \end{aligned}$$

よって式 (13) の形で ε_k が表され、

$$\varepsilon_0 = -\frac{\hbar^2 (1 + 2e^{-\frac{a}{\lambda}})^2}{2m\lambda^2} \quad m^* = \frac{m\lambda^2 e^{\frac{a}{\lambda}}}{2a^2 (1 + 2e^{-\frac{a}{\lambda}})}$$

と表される。

3. (i) λ_0 や λ は電子の広がりを表していると思われる。それが格子間隔よりもずっと小さいので、不純物原子にとらえられた電子は $x = 0$ に局在している。よってその電子の振舞いは設問 1 で求めた状況とほぼ同じである。ただしポテンシャルは不純物によるものと結晶の $x = a$ 付近のものによるものの和である。すなわち、

$$V_{\text{ion}}(x) + \Delta V(x) = -\frac{\hbar^2}{m\lambda} \delta(x) - \frac{\hbar^2}{m\lambda_0} \delta(x) = -\frac{\hbar^2}{m\lambda^*} \delta(x) \quad \text{where } \frac{1}{\lambda^*} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}$$

よって電子のエネルギーは \bar{E}_0 は設問 1(iii) を参考にして

$$\bar{E}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m\lambda^{*2}}$$

となる。

- (ii) 電子は前問同様に $x = 0$ の原子に局在しているが、不純物のポテンシャルは結晶のそれにくらべて十分小さいので無視できる。よって電子の振舞いは設問 1 で求めた状況とほぼ同じである。ただしポテンシャルは結晶の $x = a$ 付近のものである。よってエネルギーは \bar{E}_0 は設問 1(iii) を参考にして

$$\bar{E}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m\lambda^2}$$

となる。

専攻 問題 3 解答

1. 時間空間の一様性より変換は 1 次変換とおける。それゆえ

$$ct' = A ct + B x \quad \cdots (1)$$

$$x' = C ct + D x \quad \cdots (2)$$

「世界間隔の 2 乗が不变」より、 $-(ct')^2 + x'^2 = -(ct)^2 + x^2$ であり、これに式(1),(2)を代入して、各係数を比較することにより

$$A^2 - C^2 = 1 \quad D^2 - B^2 = 1 \quad AB = CD$$

$$\therefore A = D = \cosh \theta \quad C = B = \sinh \theta \quad \cdots (3)$$

とおける。ただし $\theta = \theta(v)$ である。A と D の符号の関係は、 θ が 0 のとき $A = D$ になることから上のように決まる。いま、 S' 系が S 系に対し x 軸正方向に速度 v で動いている。このことより、 S' 系の $x' = 0$ の点は S 系では、 $x = vt$ であるので、 x, t に依らない定数 $\gamma = \gamma(v)$ を用いて

$$x' = \gamma(x - vt) \quad \cdots (4)$$

とかける。式(3)を式(2)に代入して、式(4)と比較すると

$$\tanh \theta = -\frac{v}{c}$$

従って

$$\cosh \theta = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \sinh \theta = \frac{\mp v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \cdots (5)$$

$v = 0$ で(1)は $x' = x$ になることから式(5)の符号は上側になる。結局、式(1),(2)は

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ct - \frac{(v/c)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x$$

$$x' = -\frac{(v/c)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ct + \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x$$

となり求める変換がえられた。

2. S' 系で等方に広がる波

$$\psi' = \exp \left[ik' (\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} - ct') \right] \quad \cdots (6)$$

を考える。但し k' は S' 系から見た波数で、 $k' = 2\pi\nu_0/c$ である。

光源の前方 $x' > 0, y' = 0, z' = 0$ で観測すると、 $\psi' = \exp[ik'(x' - ct')]$ である。これに設問 1 のローレンツ変換を行うと S 系では

$$\psi = \exp \left[ik' \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 + \beta)(x - ct) \right]$$

ただし $\beta = v/c$ である。[]の中の t の係数は、観測される振動数 ν_1 を用いて $2\pi i \nu_1$ である。よって

$$\nu_1 = \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{ck'}{2\pi} = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} \nu_0$$

次に光源が原点を通過するとき、y 軸上の正の無限遠方で観測する。このとき $x = x' = 0, z = z' = 0$ であるので $\psi' = \exp[ik'(y' - ct')]$ である。これに設問 1 のローレンツ変換を行うと S 系では

$$\psi = \exp \left[ik' \left(y - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} ct \right) \right]$$

同様に、 t の係数 = $2\pi i\nu_2$ として

$$\nu_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{ck'}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \nu_0$$

3. (i) 棒の両端 A、B を $x_A' = 0, x_B' = \ell$ とする。また、ローレンツ変換より

$$x_A' = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} ct + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x_A \quad \cdots (7)$$

$$x_B' = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} ct + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x_B \quad \cdots (8)$$

S 系からみた棒の長さとは、同じ t でみた x_A と x_B の間隔だから、式(8)から式(7)を引いて

$$x_B' - x_A' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (x_B - x_A)$$

ここで $x_B - x_A = \ell$ だから、

$$x_B - x_A = \ell \sqrt{1-\beta^2}$$

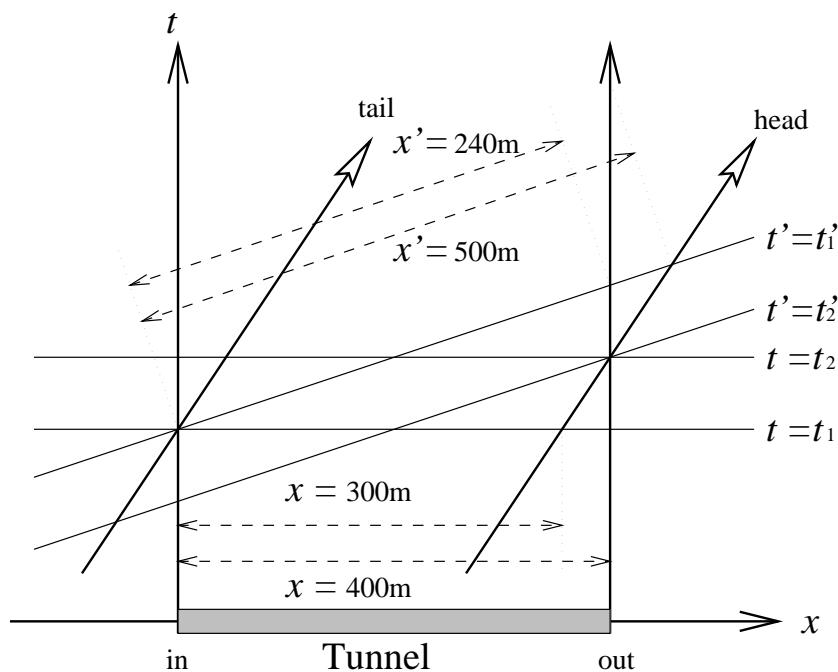
(ii)

$$500 \times \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 500 \times \frac{3}{5} = 300 \text{ [m]} \quad \text{答え}$$

(iii)

$$400 \times \frac{3}{5} = 240 \text{ [m]} \quad \text{答え}$$

- (iv) ミンコフスキ時空で両者の関係を図示すると下図のようになる。図から明らかのように t_1, t_2 と t'_1, t'_2 の関係は逆になっているので矛盾はない。



専攻 問題 4 解答

1. 空気のせいで α 粒子の beam 強度が落ちる。

2. $^{208}_{\Lambda} \text{Pb}$ の核半径 r は $r = 1.2 \cdot 208^{1/3} \times 10^{-15} [\text{m}] = 7.08 \times 10^{-15} [\text{m}]$ 。 Coulomb potential は

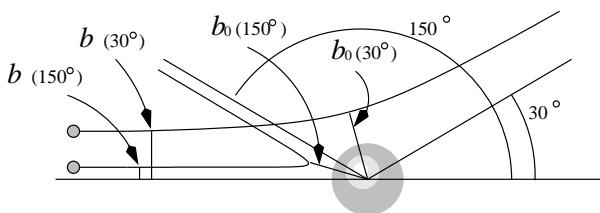
$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \frac{Z_\alpha Z_{\text{Pb}}}{r} = \frac{1}{137} \times 200 \times 10^{-15} [\text{MeV} \cdot \text{m}] \times \frac{2 \cdot 82}{7.08 \times 10^{-15} [\text{m}]} = 33.8 [\text{MeV}] \approx 34 [\text{MeV}]$$

α 粒子内の 4 つの核子間の結合エネルギーの埋め合わせとして得られる運動エネルギーにより、トンネル効果を

起こして 34 [MeV] の Coulomb 障壁を通り抜ける。

透過後は 9 [MeV] の運動エネルギーを持つ。

3. $b_0(150^\circ) < b_0(30^\circ)$ であり、軌道は双曲線で対称で、衝突径数は保存される。右図の通りである。



4. (i) スリットの断面積を $S [\text{m}^2]$ と表せば、 $d\sigma [\text{m}^2]$

の断面積内から来る粒子の流量は $I d\sigma / S$ [個/秒] である。それが一つの原子核により散乱されて $d\Omega [\text{sr}]$ の角度に広がる。他の NS 個の原子核からの散乱もこの角度に入るため、流量は NS 倍になる。よって $d\Omega [\text{sr}]$ の角度に入る流量 Y [個/秒] は

$$Y = \frac{I d\sigma}{S} \cdot NS \cdot \frac{d\Omega}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R N I d\Omega$$

- (ii) 6×10^{23} [個] が 197 [g] にあるので、 $1 [\text{m}^2]$ の 1 [g] 中の個数、すなわち数密度 N は

$$N = 6 \times 10^{23} / 197 = 3.05 \times 10^{21} [\text{個}/\text{m}^2]$$

- (iii) 立体角とは、それが半径 1 [m] の球面上に張る面積である。

$$d\Omega = 4 \times 10^{-4} \times \left(\frac{1}{0.2}\right)^2 = 0.01 [\text{sr}]$$

- (iv) α 粒子の生成は確率的なので、その計測数 C [個] はポアソン分布あるいはガウス分布となる。よってその標準偏差は \sqrt{C} で与えられ、これが測定値の統計誤差となる。この誤差が 0.01 となるためには

$$\sqrt{C}/C = 0.01 \quad \therefore C = 10000 \text{ [個]}$$

これだけの α 粒子を測定しなければならない。

次に散乱角度 60° での計数率 Y を計算する。与えられたラザフォード散乱の公式より

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R = \left(\frac{1}{137} \cdot 200 \times 10^{-15} [\text{MeV}] \cdot 2 \cdot 79\right)^2 \frac{1}{(9 [\text{MeV}])^2 \cdot \sin^4 30^\circ} = 1.05 \times 10^{-26} [\text{m}^2/\text{sr}]$$

$$Y = 1.05 \times 10^{-26} [\text{m}^2/\text{sr}] \cdot 3.05 \times 10^{21} [\text{個}/\text{m}^2] \cdot 10^8 [\text{個}/\text{秒}] \cdot 0.01 [\text{sr}] = 32.0 \text{ [個}/\text{秒}]$$

$$\therefore t = \frac{C}{Y} = \frac{10000 \text{ [個]}}{32.0 \text{ [個}/\text{秒}]} = 313 \text{ [秒]}$$

5. 小角度(最近接距離大)のとき、電子の遮蔽効果により原子核の電荷 eZ が小さく感じられる。 $Y \propto (d\sigma/d\Omega) \propto Z^2$ のですなわち、 Y が Rutherford 式からの予想に比べて小さくなる。

6. (i) 問題としている小角度では、 $(d\sigma/d\Omega)$ が非常に大きくなるので、 Y も大きくなる。これにより検出器の dead time が大きくなつて、 Y が小さく観測されるのである。この対策として考えられる方法として、時間分解能のいい module を使用する、入射 beam 強度を落して、測定時間を増やして、calibration する ($Y \rightarrow Y \cdot \frac{\text{real time}}{\text{live time}}$ にかけて plot)、などが考えられる。

- (ii) 大角度散乱で Y が小さくなっている。これは最近接距離が核の半径と同程度になり、原子核反応が起こつていることを示す。 $(^{197}_{\Lambda} \text{Au}$ では核のポテンシャルが強力すぎる。 $^{73}_{\Lambda} \text{Al}$ では弱いので、9 [MeV] の α でも十分近づけるのである)

専攻 問題 5 解答

1. 磁場の向きに z 軸を取り、磁場の強さを H とすると、 $\vec{H} \cdot \vec{S}_i = HS_{iz}$ となる。単位体積あたりの n 個のスピンの分配関数 Z は

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{S_{iz}} \exp(-\beta \mathcal{H}) = \sum_{S_{iz}} \exp\left(-\sum_i 2\mu_B H S_{iz} \beta\right) = \sum_{S_{iz}} \prod_i \exp(-2\mu_B H S_{iz} \beta) \\ &= \prod_{i=1}^n \sum_{S_{iz}=\pm 1/2} \exp(-2\mu_B H S_{iz} \beta) = [2 \cosh(\mu_B H \beta)]^n \end{aligned}$$

となる。自由エネルギー F と内部エネルギー U は

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{\beta} \log Z = -\frac{1}{\beta} n \log [2 \cosh(\mu_B H \beta)] \\ U &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z = -n\mu_B H \tanh(\mu_B H \beta) \end{aligned}$$

よって磁化 M 、帶磁率 χ 、比熱 C は、

$$\begin{aligned} M &= -\frac{\partial F}{\partial H} = n\mu_B \tanh(\mu_B H \beta) \\ \chi &= \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial H} = \lim_{H \rightarrow 0} n\mu_B^2 \beta \operatorname{sech}^2(\mu_B H \beta) = n\mu_B^2 \beta \\ C &= \frac{\partial U}{\partial T} = -k_B \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} U = n k_B \mu_B^2 \beta^2 H^2 \operatorname{sech}^2(\mu_B H \beta) \end{aligned}$$

となる。

2. 低温相においては、 n 個の電子のうち、 $k_B T / \epsilon_F$ 程度の割合の電子が、およそ $k_B T$ 程度のエネルギーの幅の中にある。従って、内部エネルギーの $T = 0$ の時との差を ΔU とすると、

$$\Delta U \sim n \frac{k_B T}{\epsilon_F} \times k_B T \quad \therefore C = \frac{\partial \Delta U}{\partial T} \propto T$$

となる。

3. 1 次相転移では、転移点 $T = T_t$ において、低温相の自由エネルギー F_L と高温相のそれ F_H は一致し、その一階微分は一致しない。 $T > T_t$ で高温相となるためには、高温相の方が自由エネルギーが低くなくてはならない。すなわち、

$$F_L|_{T=T_t} = F_H|_{T=T_t}, \quad \frac{\partial F_L}{\partial T} \Big|_{T=T_t} > \frac{\partial F_H}{\partial T} \Big|_{T=T_t}$$

ところでエントロピー S は $S = -\partial F / \partial T$ で与えられるので、これより、

$$S_L|_{T=T_t} < S_H|_{T=T_t}$$

であることがわかる。これが 1 次相転移が起こるための条件である。具体的にこの量を計算する。

高温相では、磁場がかかっていないので、設問 1. より

$$F_H|_{T=T_t} = -\frac{n}{\beta} \log 2 \quad S_H|_{T=T_t} = nk_B \log 2$$

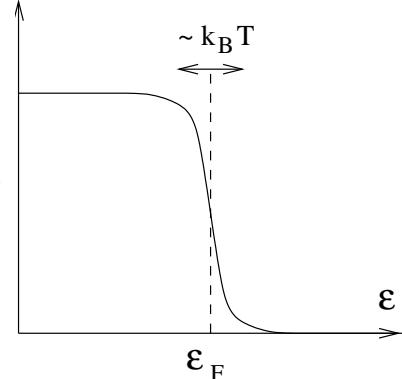
低温相では、設問 2. で与えられた比熱の表式と定圧比熱の定義式から

$$c_p = T \left(\frac{\partial S_L}{\partial T} \right)_p = \frac{k_B^2 m^*}{3\hbar^2} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3} T \quad \therefore S_L|_{T=T_t} = \frac{k_B^2 m^*}{3\hbar^2} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3} T_t$$

よって 1 次相転移が起こるための条件は

$$\frac{k_B^2 m^*}{3\hbar^2} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3} T_t < nk_B \log 2$$

である。



4. 1 次相転移が臨界圧力 $P = P_c$ で消失するとは、 $S_{\text{L}}|_{T=T_t} = S_{\text{H}}|_{T=T_t}$ となることである。 $P < P_c$ で $S_{\text{L}}|_{T=T_t} < S_{\text{H}}|_{T=T_t}$ であったのが、圧力を上げることで $S_{\text{L}}|_{T=T_t} = S_{\text{H}}|_{T=T_t}$ となるためには、 $S_{\text{H}}|_{T=T_t}$ が定数であることから $S_{\text{L}}|_{T=T_t}$ が圧力に対して右図の様な増加関数でなければならない。 $S_{\text{L}}|_{T=T_t}$ を式(3),(4)を用いて表すと、

$$S_{\text{L}}|_{T=T_t} = \frac{k_{\text{B}}^2 m_0^*}{3\hbar^2(1+aP)} \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3} T_{t0}(1+bP)$$

これが P の増加関数となるためには

$$b > a$$

でなければならず、また $P \rightarrow \infty$ で $S_{\text{L}}|_{T=T_t} > S_{\text{H}}$ 、すなわち

$$nk_{\text{B}} \log 2 < \frac{k_{\text{B}}^2 m_0^*}{3\hbar^2} \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3} T_{t0} \frac{b}{a}$$

でなければならない。

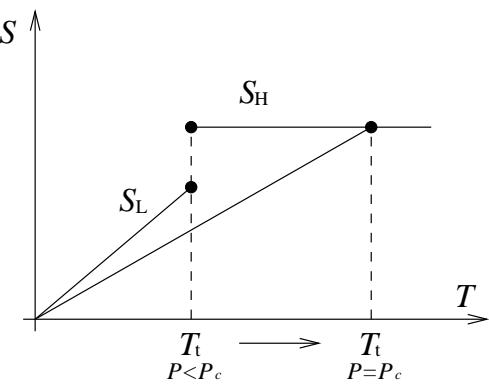
5. P_c の満たすべき方程式は前問より次の通り。

$$\frac{k_{\text{B}}^2 m_0^*}{3\hbar^2(1+aP_c)} \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3} T_{t0}(1+bP_c) = nk_{\text{B}} \log 2$$

これより、

$$P_c = \frac{\kappa - 1}{b - a\kappa} \quad T_c = T_{t0}(1 + bP_c) = T_{t0} \frac{(b - a)\kappa}{b - a\kappa}$$

$$\text{where } \kappa \equiv \frac{3n\hbar^2 \log 2}{k_{\text{B}} m_0^*} \left(\frac{8\pi}{3n}\right)^{1/3} \frac{1}{T_{t0}}$$



専攻 問題 6 解答

1. (i) 連続の方程式は、

$$\operatorname{div} \rho v + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

であり、非圧縮性より $\rho = \text{const}$ したがって $\operatorname{grad} \rho = 0$ である。渦無しなので v を任意の経路で周回積分しても 0。よって、2 点間の任意の経路の積分の値は一定となり、 v に対するポテンシャル $v = -\operatorname{grad} \chi$ が存在する。この div を計算すると、以下の通りラプラスの方程式 (1) が示される。

$$\operatorname{div} v = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \chi = -\Delta \chi = 0$$

(ii) $f_\ell(r) = r^\lambda \sum_n a_n r^n$ ($a_0 = 1$) と仮定し、これを式 (3) に代入する。

$$\sum_n \{(\lambda + n)(\lambda + n + 1) - \ell(\ell + 1)\} a_n r^{\lambda+n} - \sum_n \ell(\ell + 1) a_n r^{\lambda+n} = 0$$

$$\therefore \{(\lambda + n)(\lambda + n + 1) - \ell(\ell + 1)\} a_n = 0$$

$n = 0$ の項に関しては $a_0 = 1$ としているので $\lambda = \ell, -\ell - 1$ となる。一般的な n では、 $a_n = 0 (n > 0)$ となる。また、 $\lambda = -\ell - 1$ では $r = 0$ で f が正則でない。したがって、 $f_\ell(r) = r^\ell$ である。

2. (i) 前問の結果と式 (2), (4) を式 (5) に用いると

$$\dot{q}(t) Y_{20}(\theta, \varphi) = -\frac{\partial}{\partial r} \sum_{\ell m} a_{\ell m}(t) r^\ell Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \Big|_{r=R_0} = -\sum_{\ell m} a_{\ell m}(t) \ell R_0^{\ell-1} Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

$Y_{\ell m}$ の直交性より最右辺の和は $(\ell, m) = (2, 0)$ 以外では $a_{\ell m} = 0$ である。よって、

$$\dot{q}(t) Y_{20}(\theta, \varphi) = -2R_0 a_{20}(t) Y_{20}(\theta, \varphi) \quad \therefore a_{20}(t) = -\frac{\dot{q}(t)}{2R_0}$$

である。よって χ は式 (2) より次の通り。

$$\chi = a_{20}(t) r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) = -\frac{r^2}{2R_0} \dot{q} Y_{20}(\theta, \varphi)$$

(ii) ひたすら計算する。

$$\begin{aligned} \chi &= -\frac{\dot{q}}{8R_0} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3z^2 - r^2) = -\frac{\dot{q}}{8R_0} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (2z^2 - x^2 - y^2) \\ v &= -\operatorname{grad} \chi = \frac{\dot{q}}{8R_0} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (-2x, -2y, +4z) = \frac{\dot{q}}{4R_0} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (-x, -y, +2z) \\ |v|^2 &= \frac{\dot{q}^2}{16R_0^2} \cdot \frac{5}{\pi} (x^2 + y^2 + 4z^2) = \frac{5\dot{q}^2}{16\pi R_0^2} r^2 (3 \cos^2 \theta + 1) \end{aligned}$$

よって運動エネルギー K は、

$$K = \frac{1}{2} \int_V dV \rho_0 |v|^2 = \int_0^{R_0} r^2 dr \int_0^\pi d\theta \sin \theta 2\pi \frac{\rho_0}{2} |v|^2 = \frac{5\rho_0 \dot{q}^2}{16R_0^2} \int_0^{R_0} r^4 dr \int_0^\pi (3 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin \theta) = \frac{R_0^3 \rho_0}{4} \dot{q}^2$$

(iii) (表面張力) $= \sigma = \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_V$ より、この体積を保存した変形におけるポテンシャルエネルギーの変化を ΔU 、表面積の変化を ΔS とすると、

$$\Delta U = \sigma \Delta S = 2\sigma q^2$$

3. (i) 2(iii) までより、古典的ハミルトニアンは、

$$H = 2\sigma q^2 + \frac{R_0^3 \rho_0}{4} \dot{q}^2$$

\dot{q} と p の対応を探るため、 $\dot{q} = \alpha p$ とおくと、

$$H = 2\sigma q^2 + \frac{R_0^3 \rho_0}{4} \alpha^2 p^2$$

p, q は正準共役な変数であるから、

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \iff \alpha p = \frac{R_0^3 \rho_0}{2} \alpha^2 p \quad \therefore \alpha = \frac{2}{R_0^3 \rho_0}$$

したがって、

$$H = 2\sigma q^2 + \frac{p^2}{R_0^3 \rho_0} \quad \therefore \hat{H} = 2\sigma \hat{q}^2 + \frac{\hat{p}^2}{R_0^3 \rho_0}$$

$$\therefore M = \frac{R_0^3 \rho_0}{2} \quad \omega = \sqrt{\frac{8\sigma}{R_0^3 \rho_0}}$$

(ii) 与えられた a_{-H} の時間微分を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{da_{-H}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{H} a_{-H} e^{-i\hat{H}t/\hbar} - \frac{i}{\hbar} e^{i\hat{H}t/\hbar} a_{-H} \hat{H} e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \frac{i}{\hbar} e^{i\hat{H}t/\hbar} [\hat{H}, a_{-H}] e^{-i\hat{H}t/\hbar} \\ &= \frac{i}{\hbar} e^{i\hat{H}t/\hbar} (-\hbar\omega a_{-H}) e^{-i\hat{H}t/\hbar} = -i\omega a_{-H} \end{aligned}$$

$t = 0$ で $a_{-H} = a_-$ なので、積分して

$$a_{-H} = e^{-i\omega t} a_-$$

(iii) 前問の結果より、

$$e^{i\hat{H}t/\hbar} a_- e^{-i\hat{H}t/\hbar} = e^{-i\omega t} a_-$$

これに、 $|z_0\rangle$ をかけると、

$$e^{i\hat{H}t/\hbar} a_- e^{-i\hat{H}t/\hbar} |z_0\rangle = e^{-i\omega t} a_- |z_0\rangle \iff e^{i\hat{H}t/\hbar} a_- |\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t} z_0 |z_0\rangle$$

両辺に $e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ をかけることによって、

$$a_- |\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} e^{-i\omega t} z_0 |z_0\rangle = z_0 e^{-i\omega t} |\psi(t)\rangle$$

したがって、 $|\psi(t)\rangle$ は a_- の固有状態。固有値 $z(t)$ は $z_0 e^{-i\omega t}$ であることがわかる。

(iv) 前問より

$$a_- |\psi\rangle = z_0 e^{-i\omega t} |\psi\rangle \quad \langle \psi | a_+ = \langle \psi | z_0^* e^{+i\omega t}$$

よって

$$\langle a_+ \rangle = \langle \psi | a_+ | \psi \rangle = \langle \psi | z_0^* e^{+i\omega t} | \psi \rangle = z_0^* e^{+i\omega t} = -i \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} A_0 e^{+i\omega t}$$

$$\langle a_- \rangle = \langle \psi | a_- | \psi \rangle = \langle \psi | z_0 e^{-i\omega t} | \psi \rangle = z_0 e^{-i\omega t} = +i \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} A_0 e^{-i\omega t}$$

したがって、

$$\langle \hat{q} \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} (\langle a_+ \rangle + \langle a_- \rangle) = i \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} i \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} A_0 (-e^{+i\omega t} + e^{-i\omega t}) = A_0 \sin \omega t$$

$$\langle \hat{p} \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}} (\langle a_+ \rangle - \langle a_- \rangle) = i \sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}} i \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} A_0 (-e^{+i\omega t} - e^{-i\omega t}) = M\omega A_0 \cos \omega t$$

これは液滴の振幅 A_0 の振動を表している。この液滴のエネルギー E の平均は

$$\langle E \rangle = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \hbar\omega \langle \psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} | \psi \rangle = \frac{M\omega^2}{2} A_0^2 + \frac{\hbar\omega}{2}$$

$A_0 = 0$ の状態は零点振動を表す。

専攻 問題 7 解答

1. [解答例 1]

実験(2)では、子の巻き方は母貝の遺伝子型に対応している。(これがポイント、もちろんメンデルの法則に対応) これは実験(1)の結果の、左右非対称型が決定する時点で受精卵の染色体からの mRNA の合成が全く行われていないことに対応している。つまり、左右非対称性は卵中にある母貝由来の物質によって決定されていると考えられる。

[解答例 2]

実験(1)より、右巻き型と左巻き型の分化は第二分裂に始まるので、核中の遺伝子の情報の影響を受けて分化したのではないことがわかる。つまりこの遺伝現象は、子にそのまま引き継がれる卵細胞の細胞質により子の形質が決定される細胞質遺伝である。そのため、母親の遺伝子が示す形質が母親では発現せず、1 世代遅れて次の代で現れる。よって実験(2)の結果が完全に理解できる。

2. F1 では母親が右巻き純系であるので右巻きになる。F2 では母親(F1) が S/s であるので優性の左巻きになる。F3 では同様に母親の遺伝型があらわれ、右巻きと左巻きが 1 : 3 になる。

3. •S タンパク質のアッセイ系の確立

- S タンパク質の単離

- S 遺伝子の塩基配列の決定

- S 遺伝子をベクターに組み込み、純系右巻きになる予定の卵に導入し、その個体が左巻きになるかみる。

- この遺伝子により作られたタンパク質が、細胞分裂の際どのように回転方向を決定し回転を作っているのか調べる。

- 受精の後、しばらく mRNA が作られないが、mRNA の製造を止める情報がこの遺伝子に書かれているのか調べる。

- 大腸菌などで、S タンパク質を大量に発現させ S タンパク質の抗体を作る。

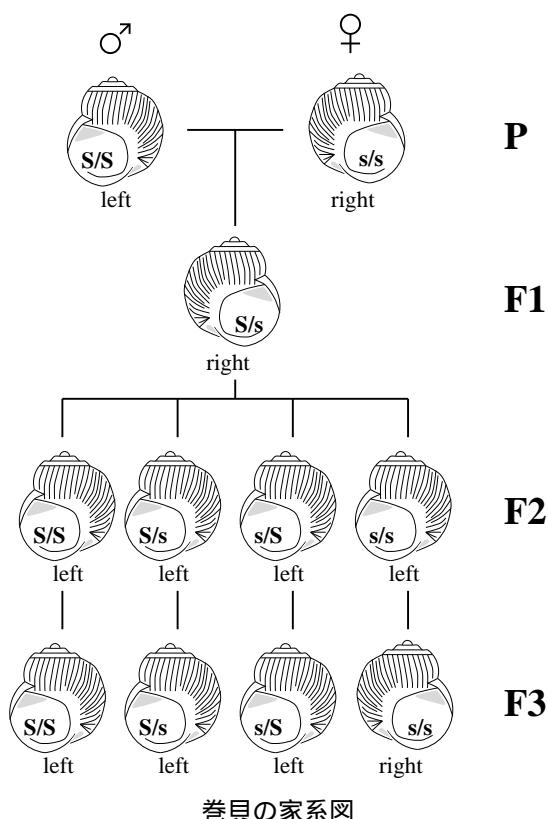
- 大量に抗体を注射すると、抗体が S タンパク質に結合することによって S タンパク質の働きが阻害されるかもしれない。それによって起こる現象を観察する。

- 活性をもたせたまま蛍光物質を結合させた S タンパク質を作成し、それを卵に注射する。それを蛍光顕微鏡でみると卵中のどこで S タンパク質が作用しているかがわかる。

- S タンパク質によって影響を受ける物質を探索する。

- S タンパク質の構造を、X 線結晶解析、NMR で決定し、構造から S タンパク質の機能を推定する。

S 遺伝子産物の働きは、細胞分裂時に細胞質分裂に影響を与える(特に細胞骨格など)タンパクじゃないかと私は考えるんですが、細胞周期に関係するかもしれませんし、ぜんぜん違うかもしれません。上にずらずら並べた実験の結果をみないとなんとも言えません。論じろっていわれても結構困るかも。

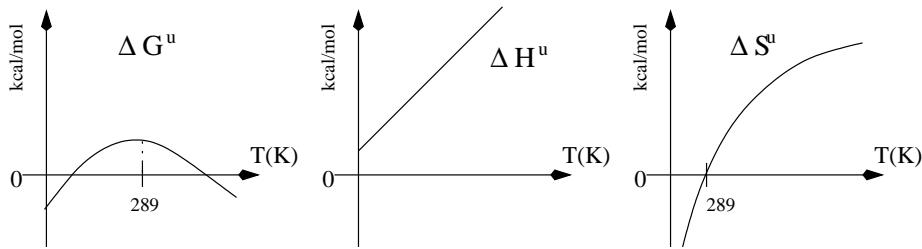


巻貝の家系図

専攻 問題 8 解答

1.

$$\begin{aligned}\Delta H^u &= \Delta H_m + \int_{T_m}^T \Delta C_p dT = \Delta H_m + \Delta C_p(T - T_m) \\ \Delta S^u &= \frac{\Delta H_m}{T_m} + \int_{T_m}^T \Delta C_p d(\ln T) = \frac{\Delta H_m}{T_m} + \Delta C_p \ln \frac{T}{T_m} \\ \Delta G^u &= \Delta H^u - T\Delta S^u = \Delta H_m \left(1 - \frac{T}{T_m}\right) + \Delta C_p \left\{(T - T_m) - T \ln \frac{T}{T_m}\right\}\end{aligned}$$

2. $\Delta G^u, \Delta H^u, \Delta S^u$ の温度変化は下図の通り。最も安定になるのは $d(\Delta G^u)/dT = 0$ のときの温度である。

$$\begin{aligned}\frac{d(\Delta G^u)}{dT} &= \frac{d}{dT} (\Delta H^u - T\Delta S^u) = \frac{d(\Delta H^u)}{dT} - \Delta S^u - T \frac{d(\Delta S^u)}{dT} \\ &= \Delta C_p - \Delta S^u - T \frac{d(\ln T)}{dT} \frac{d}{d(\ln T)} \left(\frac{\Delta H_m}{T_m} + \int \Delta C_p d(\ln T) \right) \\ &= \Delta C_p - \Delta S^u - \Delta C_p = -\Delta S^u\end{aligned}$$

よって $\Delta S^u = 0$ となる 289 K で最安定。

3.

$$\Delta G^u = \Delta H_c^u + \Delta H_h^u - T(\Delta S_c^u + \Delta S_h^u) = (\Delta H_c^u - T\Delta S_c^u) + (\Delta H_h^u - T\Delta S_h^u)$$

真空中だから水との相互作用の項を無視し、

$$\Delta G^u = \Delta H_c^u - T\Delta S_c^u = 870 - 1.7 \times T$$

よって真空中の変性温度は $\Delta G^u = 0$ から $T = 512\text{ K}$ この一つのみ。

4. 自然状態のタンパク質は、水と接する外側に極性基が、内側に非極性基があるので、

$$(A_1^D - A_1^N) > (A_2^D - A_2^N)$$

となる。また、純粹にタンパク質構造に寄与する項の温度変化は小さく、特徴があまりないと考えられる。よって、まずグラフより水との相互作用の項と考える。結果は次のようになる。

ΔH_h^u	…	j	ΔH^u のグラフのように直線的に右上がりなのはこれだけ
$-T\Delta S_h^u$	…	g	$-T\Delta S^u$ のグラフより
ΔG_h^u	…	i	$\Delta G_h^u = \Delta H_h^u - T\Delta S_h^u$ より
ΔH_c^u	…	f	
$-T\Delta S_c^u$	…	k	
ΔG_c^u	…	h	

5. 低温変性の起源は水和エネルギーであり、各タンパク質により異なる ΔC_p や、自然状態と変性状態での水と接する極性・非極性基の差が変化することにより、変性温度が変化する。

1995年度

1995年度 入学試験 一般教育科目

教育 英語

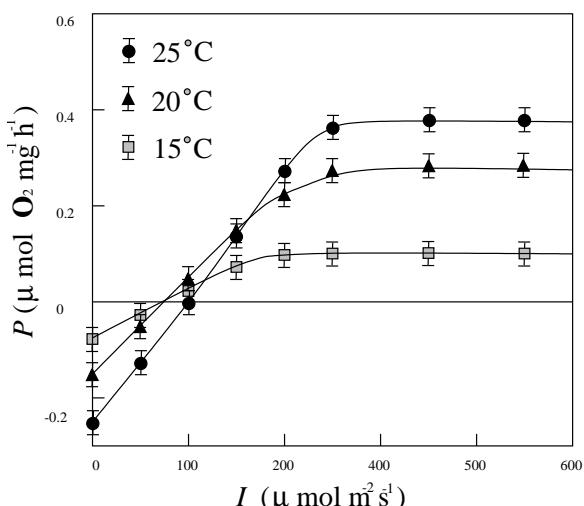
1. 以下の文章を読み、下線部 (1)~(6) を和訳せよ。

(1)A scientific model begins with a real physical object or system, replaces the original object with a simpler object, and then represents the simplified object with equations describing its behavior. (2)Like a toy boat, a scientific model is a scaled-down version of a physical system, missing some parts of the original. (3)Deciding what parts should be left out requires judgement and skill. (4)The omission of essential features makes the model worthless. (5)On the other hand, if nothing is left out, no simplification has been made. In making a model of a swinging pendulum, for example, we might at first try to include the detailed shape of the weight at the end, the density and pressure of the air in the room, and so on. Finding such a description too complex to manage, we could replace the weight by a round ball neglect the air completely. This much simpler system, in fact, behaves almost exactly like the original. If, on the other hand, we left out gravity, the resulting theoretical pendulum would not swing back and forth. (6)By solving the equations of a model, predictions can be made about the original physical system and then tested.

— quoted from ‘Origin’ by A. Lightman and R. Brower

2. 以下の各文章は, P と I の関係に関するある実験結果について説明したものである。各文を英訳せよ。解答では、 P, I はそのままよい。

- (i) これまでの研究において我々は、 P は温度に依存しないと仮定して、ある特定の温度で I の関数として P を測定していた。
- (ii) この仮定の妥当性を検討するために本実験では、様々な温度で P を測定した。
- (iii) 図 1 で、黒丸 (filled circles) は 25°C、黒三角 (filled triangles) は 20°C、白ヌキの四角 (open squares) は 15°C における測定結果を示す。
- (iv) 25°Cにおいて、 I が $300 \mu\text{mol m}^{-2}\text{s}^{-1}$ 以下では I の増加に伴って P は直線的に増加し、 $300 \mu\text{mol m}^{-2}\text{s}^{-1}$ 以上では一定の値 $0.4 \mu\text{mol O}_2 \text{mg}^{-1}\text{h}^{-1}$ となる。
- (v) P の一定値は、15°Cでは 25°Cの 4 分の 1 である。
- (vi) P が一定の値に達するときの I の値は温度の低下に伴って小さくなる。
- (vii) 一方、 I が 0 の時の P の値は、温度が高いほど小さい。
- (viii) こうした結果は、 P が温度に依存しないという仮定に反する。
- (ix) より高温での P と I の関係について、今後さらに実験が必要である。



3. 以下の文章を読み、文中の内容に沿って、設問に日本語で答えなさい。各設問への解答の内容は、互いに重複する部分があつても良い。

One way of generating ideas is just to generate them—that is, to talk out or write down what ever comes into your head about the topic you want to write about. Don't worry about whether the ideas are good or adequate or complete; just get them down. The purpose of brainstorming is to provide yourself with some notes that you can use to further stimulate your thinking and organizing. If you feel intimidated by a blank page, you might try talking into a tape recorder about your topic and then listening to what you've said and writing down the good ideas that are there.

Brainstorming is a very intuitive process. You just follow your ideas wherever they lead and take notes to record your mental journey. It's important that you not censor an idea before it has a chance to flower, but just generate it. Evaluation and organization of the ideas will come later, but you can't evaluate or organize something that isn't there.

Brainstorming is often best done in collaboration with other people. By “bouncing ideas” off of others, you can stimulate their thinking and get them to produce ideas of their own. As with any kind of brainstorming, the important thing is not to evaluate or criticize ideas but just to generate them.

If you are collaborating with others who are not always in your room or building, you might see if you and your collaborators can collaborate via computer. To do this you will all need access to computers on a network with connects each computer.

—from “Technical Writing and Professional CommunicationFor Nonnative Speakers of English”,
2nd edition, by T.N.Huckin and L.A.Olsen

intimidate:(verb)	frighten somebody (in order to make him do something); <i>intimidate a witness into silence</i> , e.g. by threatening him.
intuitive:(adj.)	(1) of or coming from intuition; <i>intuitive feeling</i> (2) possessing intuition; <i>Are women more intuitive than men?</i>
intuition:(noun)	(1) (power of)understanding things immediately, without the need for conscious reasoning or study. <i>Intuition told me you were here.</i> (2) piece of knowledge gained by this power. <i>I had a sudden intuition about the missing jewels.</i>
censor:(verb)	examine or remove parts from something; <i>the censored version of a film.</i>
censor:(noun)	person authorized to examine books, films, plays, letters etc. and remove parts which are considered indecent, offensive, politically unacceptable or (esp. in war) a threat to security.

—According to Oxford Advanced Lerner's Dictionary with modification.

- (i) ブレインストーミングとは何か、4つのポイントを挙げて、全体で5行以内で述べなさい。
- (ii) ブレインストーミングを実行する方法を、4つのポイントを挙げて、全体で5行以内で述べなさい。
- (iii) ブレインストーミングを行う際に避けるべきことを、3つのポイントを挙げて述べ、それは何故かを2つのポイントを挙げて述べ、全体で5行以内でまとめなさい。
- (iv) 同僚とともにブレインストーミングすると良いのは何故か、5行以内で述べ、答案の中で、“bouncing”的意味を最も捉えたと貴方が考えている箇所には、一力所だけ下線を引きなさい。

教育 数学

1. 時間 t の関数 $y(t)$ に関する非線型微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon y^3 \quad \cdots (1)$$

を、 $t = 0$ における初期条件

$$y = 1 \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad \cdots (2)$$

のもとで考察する。ただし、 ε は微小な正の定数とする。必要なら、 i を虚数単位として、次の恒等式を用いよ。

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta \quad \cdots (3)$$

(i) y を ε に関し、

$$y(t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(t) \quad \cdots (4)$$

と展開するとき、 y_0, y_1 に対する方程式および初期条件を求めよ。

(ii) 前問の各方程式を解き、 y_0, y_1 を求めよ。

(iii) 前問の結果より、この展開にもとづく解の適否を、 t が大きくなった場合について論ぜよ。

2. 3 行 2 列の実行列 A を

$$A = U \Lambda V^T \quad \cdots (5)$$

のように分解することを考える。ただし T は転置行列を表し、 U, Λ, V はそれぞれ 3 行 2 列、2 行 2 列、2 行 2 列の実行列で、以下の通りである。

$$V^T V = V V^T = U^T U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv I \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0 \quad \cdots (6)$$

(i) 式 (5) のように分解ができたとして、行列 $A^T A$ のすべての固有値とそれに対応する固有ベクトルとを $U, \Lambda, V, \lambda_1, \lambda_2$ を用いて表せ。必要なら次の単位ベクトルを用いてよい。

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) 行列 A が右のように与えられるとき、 $A^T A$ の固有値および長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ。ただし各固有ベクトルの第 1 要素は非負とする。

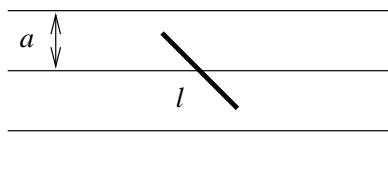
$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{2} & 3 - \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{2} & 3 + \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(iii) 前問の行列 A に対して式 (5) を満たす U, Λ, V を求めよ。ただし V の第 1 行の各要素は非負とする。

3. 床一面に引かれた間隔 a の平行線に上から長さ $\ell (\geq a)$ の棒を落としたとき、棒が平行線と交わる確率 $P(\ell)$ を以下の手順にしたがって求めよ。

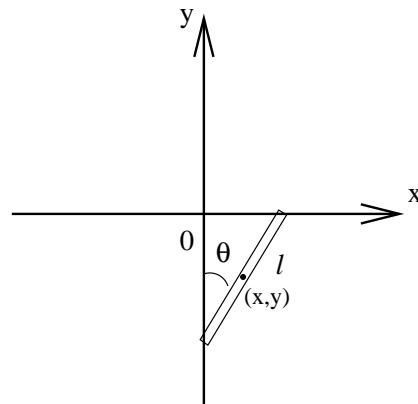
(i) 棒の一端が平行線から x の距離 ($0 \leq x \leq a/2$) にあるとき、棒が平行線と交わる確率 $p(x)$ を求めよ。ただし、棒の方位角は床面内で一様に分布するものとする。また、棒の太さは無視する。

(ii) x が $[0, a/2]$ の区間に内で一様に分布するとして、 $P(\ell)$ を求めよ。



教育 物理

- 真空中に二つの無限に長い導体の円筒 A(半径 a)、および B(半径 b) が同軸に配置されている。ただし、 $a < b$ であり、円筒の厚さは無視できる。
 - 円筒 A に単位長さあたり正電荷 Q を与え、円筒 B を接地するとき、円筒 A と B の間および B の外側の電場を求め、そのおおよその様子を図示せよ。また、二つの円筒間の単位長さあたりの静電容量を求めよ。
 - 円筒の軸方向に一様に電流 I を流す。電流の向きは円筒 A と B で逆向きである。電流が円筒 A と B の間に作る磁束密度を求め、そのおおよその様子を図示せよ。また、円筒 A の表面に働く圧力は、 $\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^2}$ であることを示せ。ただし、 μ_0 は真空の透磁率である。
 - 図のように、長さ l 、質量 M の一様な細い棒の両端がそれぞれ水平線(x 軸)上と鉛直線(y 軸)上を離れないように拘束されて滑らかに動くようにしてある。棒の重心の座標を (x, y) 、棒が鉛直線となす角を θ とする。
 - 棒の中点を通り棒に垂直な軸に関する慣性モーメント I は $\frac{1}{12} M l^2$ であることを示せ。
 - 力学的全エネルギーを書け。
 - 棒が x 軸から受ける抗力を R_y 、 y 軸から受ける抗力を R_x とする。
 - x 、 y 、 θ に対する運動方程式を書け。
 - 設問 (ii) で導いたエネルギーが保存することを運動方程式から示せ。
 - 時刻 $t = 0$ で $\theta = 0$ とし、 θ が増す向きに初期角速度 ω_0 を与えた。
 - $t \geq 0$ での棒の角速度を θ と ω_0 で表せ。
 - θ が小さいとき運動方程式を近似的に解き、 θ を時刻 t の関数として与えよ。
 - Aさんは、おもちゃ屋でコップの水を飲む動作をいつまでも繰り返す鳥の形をしたおもちゃ(次ページの図。水飲み鳥、と呼ぼう)を見つけた。なぜ動力も熱の供給もなしに動くかが、すぐにはわからなかつたので買ひ求めて調べてみた。まず仕組みは、
 - 本体は、頭と胴にあたる二つの中空のガラス玉を、首にあたる一本のガラス管でつないだ構造である。体内には一部液体が密封されていて、外部との液体や空気の出入りは全くない。頭とくちばしの外側はフェルトでおおわれてあり、くちばしに水がつくとフェルトに水がしみこむ様になっている。くちばしの内部に隙間はない。ガラス管は、頭とは直接つながっているが、胴体には底近くまで深く差し込まれている。ガラス管の中間にあたる金具の腕を支柱の穴にかけると、支点を中心にして前後に回転できる。実際にかけてみたら全身が少し前かがみになるところ(初期位置、と呼ぶ)で静止した。(図 II-a)。このとき液面は胴体の中程にあり、ガラス管内でも同じ高さであった。
 - 鳥を動かすには、くちばしの部分に水をたっぷりしみこませてから手を離して静かに初期位置に置く。しばらくすると胴体内の液体がガラス管内をゆっくり上昇して鳥は前に傾き始めた。
- 鳥はその後次ページのような運動をした。



(c) 傾きがしだいに増して、やがてくちばしがカップの水面に達した(図 II-b)。さらに傾きが増し、胴体内の液面がガラス管の下端より下がると、胴体内の気体の一部がガラス管の中に入り込み、管にそって登りはじめた(図 II-c)。その結果、ガラス管の中に上昇していた液体が胴体内に落ちこみ、ガラス管に上っていった気体に入れ替わった。同時に鳥は水から離れ、逆に動きだして、初期位置を通り越すところまで達してから、しばらく前後に小さく振動したあと、初期位置より少し前傾した位置でほぼ停止した。この後は、(c)のはじめに戻って、同じ運動をくり返した。この反復運動を定常水飲み運動と呼ぶ。ただし、「水飲み動作」は、鳥が実際に水を飲むわけではなく、カップの水にくちばしが入って、フェルトが濡れるだけである。

(d) 繰り返しの途中でカップを取り去っても、フェルトが濡れている間は反復運動を続けるが、しだいに周期が長くなつてゆき、フェルトが乾くと初期位置で止まった。

これだけでは、まだ動く理由がわからないので次のようないろいろな実験をした。

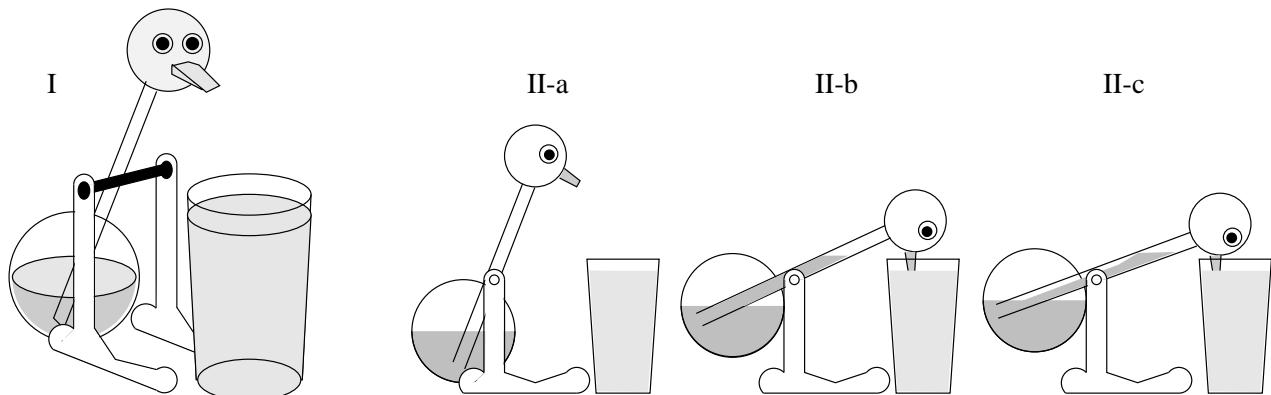
(e) 気温とカップの水温を測ると、各々20°Cと20°Cであった。カップの水温を下げても、反復運動は続きその周期もあまり変わらなかった。しかし、水温を上げていくとくちばしが水中にある時間が長くなり、ある温度以上になると反復ののちくちばしを水に入れた状態で止まってしまった。

(f) 胴体を手のひらで包むと、ガラス管内の液面はすぐに上昇してたちまち頭にまで達した。この際も、また定常水飲み運動の際も、液体の体積にはほとんど変化は見られなかった。

(g) 水温と気温がほぼ同じ状態で、カップまで含めた装置全体をすっぽりおおうような機密の良い透明な箱をかぶせて観察した。時間がたつと、反復時間、特に水中にくちばしを入れている時間がだんだん長くなつて、何回かの水飲み動作の後、くちばしを水に入れたままもしくは初期位置より少し前傾した姿勢のまま完全に止まってしまった。その後おおいを静かに取り去ると、すぐに定常水飲み運動に戻った。

ここまで観察と実験で、Aさんは水飲み鳥の作動機構を理解できたという。

- (i) あなたは定常水飲み運動の作動機構をどう理解するか?
- (ii) 上の(d)~(g)は、あなたの結論に対してどういう根拠を与えたか、あるいは、あなたの結論からこれらの観察結果をどう説明できるか?
- (iii) Aさんは、(g)の状況でさらにある量を測って自分の結論を裏付けた。あなたならどういう実験をするか?
((g)の状況に限らず、裏付けとなればどんな実験でも良い) その実験から、何を期待し何を実証しようと考えるか?



教育 英語 解答

1. 全訳

(1) 科学のモデルは、実在する物体や系から始まり、元々の物体をより簡単な物体に置き換え、そしてその簡略化された物体の振る舞いを記述する式によって、その物体を表現する。(2) おもちゃの船のように、科学のモデルは物理系を縮小した物であり原型の一部を省いている。(3) どこを残すのかを決めるには判断力と技が必要である。(4) 基本的な特徴を省いてしまっては、モデルは無意味な物となる。(5) 逆に、何も省かないと、なんら簡略化されない。例えば、振れている振り子のモデルを作るとき、まず初めは、終端にある重りの細かい形、部屋の空気の密度と圧力、等々を考慮に入れようとするだろう。そのような記述が、実現するには複雑すぎると気づき、重りを球形のボールに置き換え、空気を完全に無視できよう。この、より簡単な系は、実際には、元の系とほとんど寸分違わぬ振る舞いをする。一方で、もし重力を省いていたら、その結果の理論的振り子は前後に振れることはなかっただろう。(6) モデルの式を解くことによって、原型となる物理系の予測ができる、そして検証することができる。

2. (i) In our previous researches, we assumed no dependence of P on temperature. For that reason, we measured P as a function of I at the consistent temperature.
(ii) To verify this assumption, we measured P at various temperatures.
(iii) In fig.1, measurement results for various temperatures are shown as, filled circle for 25°C, filled triangles for 20°C, open squares for 15°C.
(iv) At 25°C, P rises linearly as I rises when I is below $300\mu\text{mol m}^{-2}\text{s}^{-1}$, and P is constant and at $0.4\mu\text{mol O}_2\text{mg}^{-1}\text{h}^{-1}$ when I is over $300\mu\text{mol m}^{-2}\text{s}^{-1}$.
(v) The constancy of P at 15°C is one fourth of that at 25°C.
(vi) The value of I when P becomes constant drops as temperature drops.
(vii) On the other hand, P for $I = 0$ gets smaller for higher temperatures.
(viii) These results are contrary to the assumption of no dependence of P on temperature.
(ix) More experiments are required to investigate the relation between P and I for higher temperature.
3. (i) 何かの主題について、(1)直感的に思いつくことを、(2)その考えについて善し悪しの判断を先送りして、(3)記録に残し、後でそれを参照して、(4)自分の考えを発展させること。
(ii) (1)決められた主題について、(2)思い浮かぶことを、(3)善し悪しの判断をせずに、(4)書いたり録音したりする、という方法。
(iii) 避けるべき事は、ブレーンストーミングの(1)実行中に、(2)記録すべきか迷ったり、(3)評価したり、まとめてたりすることである。
なぜなら、記録しなければ考えが大きく(1)発展していく可能性を潰してしまうし、記録が十分に無ければ(2)判断やまとめの材料が得られないから。
(iv) 相手に投げかけた自分の思いつきが、相手の新たな発想を促し、相手の新たな思いつきが、自分の発想を刺激して、発想を投げかけ合うことによって、一人では限界がある発想を広げることが出来るから。

全訳

アイディアを生み出す一つの方法は、ひたすら生み出すことに徹することだ。それはつまり、あなたが書きたいと思う主題について、頭に思い浮かぶままに口に出すか、書き下すのだ。アイディアが良いか、適切か、完全かなどは気にする必要はない。とにかく書き下すのだ。ブレーンストーミングの目的は思考をより活発化させる注釈を得ることである。もし、空白のページに恐れをなしたら、テープレコーダーにあなたの主題について吹き込み、後でそれを聞いて、紙に良い考えを書けばよいのだ。

ブレーンストーミングは、とても直感的なものである。考え方の赴くままに従って、精神の旅の記録として、ノートをとるのだ。浮かんだアイディアが花開く前に、吟味せずに、ただ生み出すことが重要である。評価とまとめ上げも、先立つアイディアがなければ出来ないので。

ブレーンストーミングは、大抵の場合、他の人と共同ですることによって、もっと上手く行く。他の人と、「アイディアを弾ませ」合うことで、相手の考えを刺激し、アイディアを生み出させて上げることが出来る。どのブレーンストーミングでも言えることだが、重要なことは、アイディアを評価したり、批判したりせず生み出すことに専念することだ。

もし、同じ部屋や同じ建物にいない人と、共同作業しているなら、相手がコンピュータで協力しあえるか調べてみると良い。これには、共同作業者が皆、互いを結ぶネットワーク上のコンピュータを使えることが必要である。

教育 数学 解答

1. (i) 求めるべきものは ε の 0 次と 1 次に関する項のみなので式 (4) の展開は ε の 1 次までで十分である。

$$y(t; \varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + O(\varepsilon^2) \quad \cdots (1)$$

この式を微分方程式 (1) と初期条件式 (2) にそれぞれ代入して ε の項で整理すると以下の式が得られる。

$$\ddot{y}_0(t) + y_0(t) = 0 \quad \cdots (2)$$

$$\ddot{y}_1(t) + y_1(t) = y_0(t)^3 \quad \cdots (3)$$

$$y_0(0) = 1 \quad \dot{y}_0(0) = 0 \quad y_1(0) = 0 \quad \dot{y}_1(0) = 0 \quad \cdots (4)$$

これが求める y_0, y_1 に対する方程式と初期条件である。

- (ii) $y_0(t)$ は微分方程式 (2) と初期条件 (4) より明らかに

$$y_0(t) = \cos t$$

である。続いて $y_1(t)$ は微分方程式 (3) より

$$\ddot{y}_1(t) + y_1(t) = \cos^3 t = \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t \quad \cdots (5)$$

である。この非齊次の線形微分方程式を解法は、(a) 非齊次項のない齊次の方程式の一般解を求め、(b) 非齊次項のある方程式の特殊解を求めて、両者の和をとることである。

(a) は明らかに

$$y_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

である。 C_1, C_2 は後で定める定数である。

(b) は非齊次項が 2 つあるのでその個々の項だけの非齊次方程式の特殊解を適当に探す。すなわち、

$$\ddot{y}_1(t) + y_1(t) = \frac{3}{4} \cos t \implies y_1(t) = \frac{3}{8} t \sin t$$

$$\ddot{y}_1(t) + y_1(t) = \frac{1}{4} \cos 3t \implies y_1(t) = -\frac{1}{32} \cos 3t$$

が得られこの和が (b) の特殊解である。

よって $y_1(t)$ の解は初期条件 (4) を考慮して

$$y_1(t) = \frac{1}{32} \cos t - \frac{1}{32} \cos 3t + \frac{3}{8} t \sin t$$

である。

- (iii) 前問で得られた $y_1(t)$ の解の振動の振幅は t の増大と共に激しくなる。この傾向は式 (4) の展開の後続の項でもより顕著となるので、展開は t が十分大きければ収束しない。よってこの展開は妥当ではない。

2. (i) 式 (5) の表式と式 (6) の定義により

$$A^T A = (U \Lambda V^T)^T (U \Lambda V^T) = (V \Lambda^T U^T) U \Lambda V^T = V \Lambda^2 V^T$$

であることがわかる。

指標 i を $i = 1, 2$ として、 $A^T A$ の 2 つの固有値を α_i 、固有ベクトルを \vec{u}_i と表すと前式より

$$V \Lambda^2 V^T \vec{u}_i = \alpha_i \vec{u}_i$$

となる。この両辺に左から V^T をかけると、 $V^T V = I$ より

$$\Lambda^2 V^T \vec{u}_i = \alpha_i V^T \vec{u}_i$$

すなわち、 $V\vec{u}_i$ は Λ^2 の固有値 α_i の固有ベクトルである。ところで、

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$$

であるから、その固有値は明らかに λ_1^2 および λ_2^2 であり、対応する固有ベクトルはそれぞれ \vec{e}_1, \vec{e}_2 である。

以上のことより $A^T A$ の固有値は λ_1^2 および λ_2^2 であり、対応する固有ベクトルは、 $V\vec{u}_i = \vec{e}_i$ からそれぞれ $\vec{u}_1 = c_1 V\vec{e}_1, \vec{u}_2 = c_2 V\vec{e}_2$ である。 (c_1, c_2) は定数)

(ii) そのまま計算して

$$A^T A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{2} & 3 - \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{2} & 3 + \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{2} & 3 - \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{2} & 3 + \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

この固有値 α_i は $\det(A^T A - \alpha_i I) = 0$ より

$$\begin{vmatrix} 10 - \alpha_i & 8 \\ 8 & 10 - \alpha_i \end{vmatrix} = \alpha_i^2 - 20\alpha_i + 36 = 0 \quad \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 18$$

固有ベクトル \vec{u}_i は、長さが 1、第 1 成分が非負の条件より

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。

(iii) $\lambda_i^2 = \alpha_i, \lambda_1 \geq \lambda_2$ であるので前問の結果より $\lambda_1 = 3\sqrt{2}, \lambda_2 = \sqrt{2}$ となる。よって、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

次に、 $\vec{u}_i = V\vec{e}_i$ であるので

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

最後に $U = AV\Lambda^{-1}$ であるので

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{2} & 3 - \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{2} & 3 + \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

と求まる。

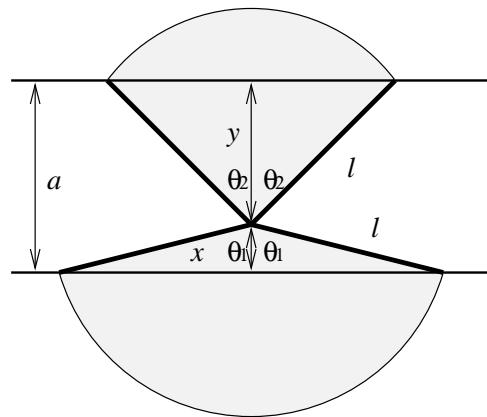
3. (i) 初めに棒の一端が床に着地し、任意の方向に倒れると考えても一般性は失われない。

倒れた棒が床の線と交わるには、棒が右図のマスクした領域の向きに倒れた場合である。右図でこの諸量を定義する。 x を固定した場合の棒の線と交わる確率 $p(x)$ は明らかに

$$p(x) = \frac{2\theta_1 + 2\theta_2}{2\pi} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\pi}$$

である。なお変数の定義から以下の式が成り立っている。

$$\theta_1 = \arccos \frac{x}{\ell} \quad \theta_2 = \arccos \frac{y}{\ell}$$



- (ii) 2 本の平行線の中点に関して床は上下対称なので、求める確率は棒の着地点 x を $[0, a/2]$ の範囲に限定して考えて差し支えない。

棒が線と交わる確率 $P(\ell)$ は、前問で得られた結果を規格化に注意して x で積分すれば求まる。すなわち

$$P(\ell) = \frac{1}{a/2} \int_0^{a/2} dx p(x) = \frac{2}{a\pi} \left[\int_0^{a/2} dx \theta_1 + \int_0^{a/2} dx \theta_2 \right]$$

この右辺第 2 項で $y = a - x$ の変数変換を行い、 θ_1, θ_2 をそれぞれ x, y で表すと

$$P(\ell) = \frac{2}{a\pi} \left[\int_0^{a/2} dx \arccos \frac{x}{\ell} + \int_{a/2}^a dy \arccos \frac{y}{\ell} \right]$$

となるがこの右辺第 2 項の被積分関数は右辺第 1 項のそれとまったく同じである。よって 2 つの積分をまとめて

$$P(\ell) = \frac{2}{a\pi} \int_0^a dx \arccos \frac{x}{\ell}$$

とすることができる。さらに $x = \ell \cos \theta$ と変数変換してこの積分を計算する。

$$\begin{aligned} P(\ell) &= -\frac{2\ell}{a\pi} \int_{\arccos(0)}^{\arccos(a/\ell)} d\theta \theta \sin \theta = \frac{2\ell}{a\pi} [\theta \cos \theta - \sin \theta]_{\arccos(0)}^{\arccos(a/\ell)} \\ &= \frac{2\ell}{a\pi} \left(\frac{a}{\ell} \arccos \frac{a}{\ell} - \frac{\sqrt{\ell^2 - a^2}}{\ell} + 1 \right) = \frac{2}{\pi} \left(\arccos \frac{a}{\ell} - \frac{\sqrt{\ell^2 - a^2} - \ell}{a} \right) \end{aligned}$$

これが求める確率である。なお $a \rightarrow 0$ または $\ell \rightarrow \infty$ の極限においてこの確率は確かに 1 になる。

教育 物理 解答

1. (i) 系は軸対称であるから、高さが単位長さの半径 r の同軸の円柱を積分領域に選べば、ガウスの法則より、

$$(2\pi r \cdot 1)E = \frac{q(r)}{\epsilon_0}$$

ただし、 $q(r)$ は、積分領域の中の電荷の総和で、 $a < r < b$ の時、 $q(r) = Q$ 。また、B の電位が 0 である事から、 $r > b$ で、 $q(r) = 0$ 。故に、

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} & (a < r < b) \\ 0 & (r > b) \end{cases}$$

と求まる。

次に円筒 A の電位 V は、

$$V = - \int_b^a dr \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

と求まり、電荷と静電容量との関係が $Q = CV$ である事から、円筒間の単位長さあたりの静電容量 C は、

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}$$

と表せる。

- (ii) 系が軸対称であるから、同軸の円周を積分経路に選べば、アンペールの法則より、

$$2\pi r B = \mu_0 i(r)$$

ただし、 $i(r)$ は積分範囲に囲まれる電流の総和で、 $a < r < b$ で I である。故に、

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

である。次に仮想的に、B を固定し、A の半径が可変で、 r_a であるとする。磁場は、AB 間にしか存在しないから、空間中の磁場のエネルギー $U(r_a)$ は、単位長さあたり、

$$U(r_a) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{r_a}^b dr 2\pi r B(r)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{r_a}$$

と求まる。 r_a を微小量変化させた時に増加する磁場のエネルギーは、圧力に抗して加えた仕事に等しく、圧力を $p(r_a)$ とすると、

$$2\pi r_a p(r_a) = \frac{d}{dr_a} U(r_a) \quad \therefore \quad p(r_a) = -\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r_a^2}$$

よって、圧力は外向きである。

2. (i) 棒の単位長さあたりの質量を $\sigma = M/l$ とすると、慣性モーメント I は、

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} dr \sigma r^2 = \frac{1}{12} M l^2$$

と表される。

- (ii) 運動エネルギー T は重心の並進運動エネルギーと重心の周りの回転運動エネルギーの和である。

$$T = \frac{1}{2} M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

x, y, \dot{x}, \dot{y} を $\theta, \dot{\theta}$ で表すと

$$x = \frac{l}{2} \sin \theta \quad y = -\frac{l}{2} \cos \theta \quad \dot{x} = \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta \quad \dot{y} = \frac{l}{2} \dot{\theta} \sin \theta \quad \dots (1)$$

となるので、これらで T を整理すると

$$T = \frac{1}{6}Ml^2\dot{\theta}^2$$

と表される。次に位置エネルギー U は

$$U = Mgy = -\frac{1}{2}Mgl\cos\theta$$

と表される。よって、力学的全エネルギー E は

$$E = T + U = \frac{1}{6}Ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}Mgl\cos\theta \quad \cdots (2)$$

と表される。

(iii) 抗力 R_x, R_y は軸と同じ向きに扱うこととする。

重心の並進の運動方程式は以下の通りである。

$$M\ddot{x} = R_x \quad M\ddot{y} = R_y - Mg \quad \cdots (3)$$

次に回転の運動方程式は以下の通りである。 θ の増加方向が、普段の xy 平面とは違うことに注意する。

$$I\ddot{\theta} = -\frac{l}{2}R_x\cos\theta - \frac{l}{2}R_y\sin\theta \quad \cdots (4)$$

(iv) 式 (3),(4) より抗力 R_x, R_y を消去して整理して

$$\frac{l}{6}\ddot{\theta} = -\ddot{x}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta - g\sin\theta$$

を得る。右辺の時間微分を次のように変形していく

$$\begin{aligned} \frac{l}{6}\ddot{\theta} &= -\frac{d}{dt}(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta) - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{y}\dot{\theta}\cos\theta - g\sin\theta \\ &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right) - g\sin\theta = -\frac{l}{2}\ddot{\theta} - g\sin\theta \\ \therefore 2l\ddot{\theta} + 3g\sin\theta &= 0 \end{aligned} \quad \cdots (5)$$

ところで式 (2) のエネルギー E を時間微分すると

$$\dot{E} = \frac{1}{3}Ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}Mgl\dot{\theta}\sin\theta = \frac{1}{6}Ml\dot{\theta}(2l\ddot{\theta} + 3g\sin\theta)$$

これは式 (5) より 0 である。すなわちエネルギー E は保存される。

(v) エネルギー E が保存されるので $t \geq 0$ で次の式が成り立つ

$$\frac{1}{6}Ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}Mgl\cos\theta = \frac{1}{6}Ml^2\omega_0^2 - \frac{1}{2}Mgl \quad \therefore \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{l}(\cos\theta - 1) + \omega_0^2$$

棒が鉛直逆立ちになる $\theta = \pi$ のときに $\dot{\theta}$ が実数になる場合、つまり $\omega_0 > \sqrt{6g/l}$ の場合には棒は原点の周りを回転することになる。他方、逆立ちとなれない場合には棒は原点の下を振動することになる。 $\dot{\theta}$ は以下の通りである。

$$\dot{\theta} = \begin{cases} +\sqrt{\frac{3g}{l}(\cos\theta - 1) + \omega_0^2} & \omega_0 > \sqrt{\frac{6g}{l}} \text{ の場合} \\ \pm\sqrt{\frac{3g}{l}(\cos\theta - 1) + \omega_0^2} & \omega_0 \leq \sqrt{\frac{6g}{l}} \text{ の場合} \end{cases}$$

(vi) $\theta \ll 1$ に対して $\sin\theta \approx \theta$ と近似すると式 (5) は

$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2l}\theta$$

となる。この解は明らかに

$$\theta = \omega_0 \sqrt{\frac{2l}{3g}} \sin \sqrt{\frac{3g}{2l}} t$$

である。

3. (i) くちばしについた水が蒸発することにより、気化熱を奪い、頭部が胴体よりも冷える。頭部では、凝結が起こり、蒸気圧が下がる。すると、胴体内と頭部の圧力差により、管を液体が上昇する。すると、重心が移動して、水飲み鳥は前傾して、くちばしをぬらす。同時に、体内の液体の量とガラス管の位置が上手く調整してあるため、水を飲んでいる状態で、胴体内の気体が管内を通って頭部へ上昇し、頭部の液体を胴体に戻すと同時に、気圧差を解消する。このようにして、水飲み鳥は、再び立ち上がる。以後、この動作を繰り返す。
- (ii) (d) は、この作動機構は、くちばしが濡れていることが重要であり、カップとその中の水の存在は本質的なものでないことを示していて、(i) の作動原理の理解に矛盾しない。
- (e) は、頭部が胴体よりも冷えていることが本質的であることを示している。これも (i) の作動原理の理解に矛盾しない。
- (f) は、体積の変化がほとんど無いのに、手で胴体を包むと液体が上昇したので、液体の上昇は、胴体が暖められて、胴体内の気体の圧力が上昇して、液体を持ち上げたためと考えられる。その際、もしそれが、気体の体積膨張によるものなら、高々、 $\Delta T/273$ 程度の割合しか上昇しない。むしろ、胴体には揮発性の高い液体が入っていると考えるほうが合理的である。数度の変化で蒸気圧が大きく変わる事を考えれば、頭部と胴体が数度の温度差しか無くても、多くの液体を動かすことができて、水飲み鳥を動かすことができると考えられる。これにより、水飲み鳥の動作原理を推測できる。
- (g) はくちばしの水分の蒸発が運動を支えていることを示している。蒸発することにより、気化熱を奪うので、頭部に低温熱源があることになる。これから、胴体部分が頭部に比べて高温であることから、熱力学的に仕事が生まれることが説明できる。仕事率は二つの熱源の温度差に比例していて、それはくちばしからの蒸発量による。これは、水飲み鳥をおおうと、しだいに動きがゆっくりになっていったことを良く説明している。
- (iii) 頭部と胴体に 0.1 度程度まで分かる温度計（熱電対）を、水飲み鳥の動作に支障が出ないように取り付け、水飲み鳥の動作状況と温度変化を観察する。覆いがしてあり、中に水があれば、しだいに内部は飽和蒸気圧に達する。よって、時間経過とともに、頭部と胴体の温度差の一動作周期あたりの最大値が小さくなるはずである。また、それに伴って、動作の周期が延びるはずである。それらの関係を実証する。

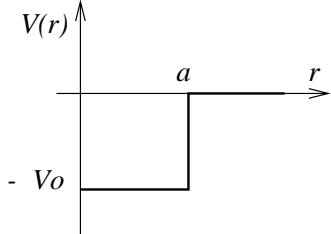
1995年度 入学試験 物理専門科目

専攻 問題 1

質量 m の粒子が半径 a 深さ V_0 の井戸型ポテンシャル

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r \leq a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

の中を運動する。次の設問に答えよ。



1. 波動関数を極座標 (r, θ, ϕ) で

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R_\ell(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

のように表したとき $R_\ell(r)$ が従う方程式を書け。ただし、ラプラシアンを極座標で書くと

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\Lambda}}{r^2} \quad \hat{\Lambda} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

のように表される。また、 $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ は球面調和関数で演算子 $\hat{\Lambda}$ の固有関数である。

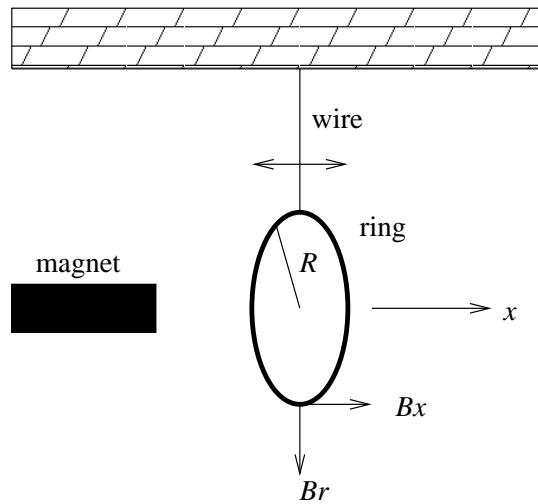
$$\hat{\Lambda} Y_{\ell m}(\theta, \phi) = -\ell(\ell + 1)Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

2. V_0 のある値については s 状態 ($\ell = 0$) に束縛状態が一つだけあり、その束縛エネルギー ε は V_0 に比べて十分小さい ($0 < \varepsilon \ll V_0$)。
- (i) ポテンシャルの深さ V_0 を求めよ。
 - (ii) 上の束縛状態での井戸の外 ($r > a$) に粒子が存在する確率を計算せよ。
3. 次に同じポテンシャルによる散乱を考える。各 ℓ で r の十分大きいところで

$$R_\ell(r) \sim A_\ell \frac{\sin(kr - \frac{1}{2}\ell\pi + \delta_\ell)}{r}$$

で表されているとき、 δ_ℓ を位相のずれという。(ii) と同じ V_0 の値について入射エネルギーが $E = \frac{9V_0}{16}$ のとき、s 波 ($\ell = 0$) の位相のずれの正接 $\tan \delta_0$ を求めよ。

専攻 問題 2



磁場中におかれた単振り子の一次元振動について考える。図に示すように、振り子は導線を円形にしたリングと、それを吊す絶縁体のワイヤーからできている。導線の太さはリングの半径 R に比べて十分細い。静止状態でのリングの中心軸を x 軸にとり、リングの x 座標の平衡位置からのずれを $x(t)$ とする。振り子の振幅は十分小さく、リングの中心軸は常に x 軸に一致しているとみなせるとする。磁場がないときのリングの運動方程式は

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = f(t) \quad \cdots (1)$$

とあらわすことができる。ここで、 m は振り子の質量、 ω_0 は固有角振動数。 $f(t)$ は外力である。図のように x 軸に沿って細長い棒磁石が置かれており、 x 軸に関して軸対称な磁場をついている。磁束密度のリングの中心から半径方向の成分を B_r 、 x 方向の成分を B_x とする。リングの導線の位置での磁場に関して、 B_r は振動の範囲内では一様とみなせるとする。このような磁場中に置かれたリングの振動について、以下の問題に答えよ。ただし、1 から 3 の問題においては、リングのインダクタンスは無視できるものとする。

- まずリングの一一周の抵抗値が r の場合を考える。リングを磁場中で振動させると、その運動は電磁誘導の作用により減衰する。このとき、最初にリングがもっていた運動エネルギーはどこに失われたかを述べよ。また、このエネルギー損失の割合を大きくするためには、抵抗値 r が大きい方がよいか、小さい方がよいか、理由をつけて答えよ。

- (i) 運動にともない、リングに発生する誘導起電力 e が

$$e = -2\pi R B_r \frac{dx}{dt}$$

となることを示せ。

- (ii) 磁場中のリングの運動方程式を求めよ。

- 次に、リングを静止させた状態で、 $f(t) = p_0 \delta(t)$ ($\delta(t)$ は Dirac の δ 関数、 p_0 は定数) の外力を与えたときの $t \geq 0$ における振動を時間の関数として求め、その概略を図示せよ。

- (i) 抵抗値 r がある程度小さくなると、リングの自己インダクタンス L が運動に効き始める。抵抗とインダクタンスの間にどのような関係があるとき、インダクタンスによる効果が支配的になるかを答えよ。

- (ii) この条件が成立する場合について、磁場中のリングの運動方程式を求め、式 (1) で表されるような振動がどのような影響を受けるかを述べよ。

専攻 問題 3

一次元の自由電子系を考える。系の長さを L 、温度を T 、電子数を N とする。一様な磁場 H のもとで、ハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} - \mu_i H \right)$$

と書かれるものとする。ただし、 m は電子の質量、 p_i, μ_i はそれぞれ i 番目の電子の運動量とスピン磁気モーメントであり、 μ_i は $\pm\mu_B$ (μ_B はボーア磁子) の値だけをとる。また、 L は十分大きくて、電子状態に対する系の境界の影響は無視できるものとする。

1. 電子はボルツマン統計に従うものと仮定して次の間に答えよ。

- (i) $H = 0$ の場合に、カノニカルアンサンブルにおける分配関数を求めよ。
- (ii) それを用いて系の内部エネルギーを求めよ。
- (iii) $H \neq 0$ の場合は分配関数はどう書かれるか。
- (iv) それを用いて比熱を求めよ。
- (v) 系の磁化 $M = \sum_i \langle \mu_i \rangle / L$ と H の間の関係を求めよ。ただし、 $\langle \rangle$ は熱平均を表す。
- (vi) 帯磁率 $\chi = \lim_{H \rightarrow 0} (M/H)$ を求めよ。

2. 電子がフェルミ統計に従うこと考慮して次の間に答えよ。

- (i) $T = 0, H = 0$ における系の内部エネルギーをフェルミエネルギー ε_F と N を用いて表せ。
- (ii) $T = 0$ において、磁化 M と磁場 H の間の関係を求めよ。(結果は、 $\mu_B H$ と $2\varepsilon_F$ の大小関係によって異なることに注意せよ。)
- (iii) 帯磁率 χ を求めよ。1 の (vi) で求めた χ の $T = 0$ における振る舞いとの違いについて、物理的な理由をつけて説明せよ。

専攻 問題 4

図 1 のような装置によって、標的中に、負ミクロン (μ^-) を静止させると、ミュー原子 (μ^- が原子核のクーロン場に束縛された原子) が生成される。生成当初、 μ^- はミュー原子の高い励起状態にあるが、 10^{-12} 秒程度の短時間に X 線などを出して基底状態に落ちる。これに関連し、以下の間に答えよ。ただし、簡単のために、電子の影響は無視して良い。つまり、ミュー原子は、原子核の回りに負ミクロンが一個だけまわっている「水素様原子」とみなせるものとする。なお、必要に応じて、以下の数値を参考せよ。

$$m_e (\text{電子質量}) = 0.511 \text{ MeV}/c^2$$

$$\text{水素原子の } 1s \text{ 電子の束縛エネルギー} = 13.6 \text{ eV}$$

$$m_\mu (\text{ミクロン質量}) = 106 \text{ MeV}/c^2$$

$$\text{ボーア半径} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$m_p (\text{陽子質量}) = 938 \text{ MeV}/c^2$$

fig 1

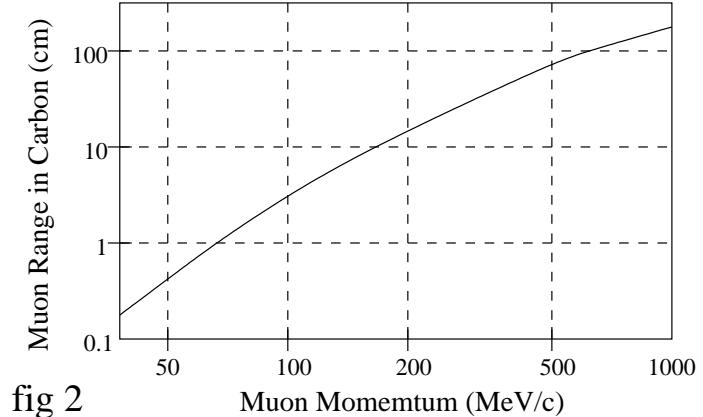
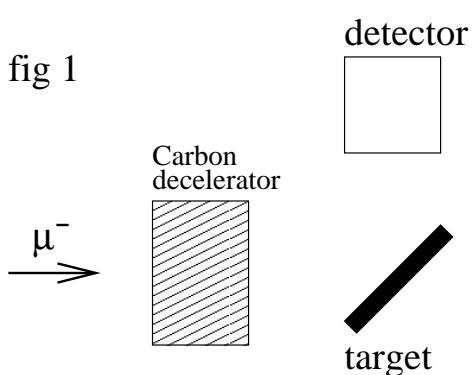


fig 2

- 運動エネルギー 120 MeV の μ^- を図 1 のように炭素の板によって減速し、薄い標的に静止させたい。炭素板の厚さをどの様に選べばよいか。図 2 のグラフを参考にして概算せよ。但し、図 2 はミクロンの炭素中での飛程を、入射粒子の 運動量 の関数で示したものである。
- ある単元素標的を用い、図 1 の装置でミュー原子が励起状態から基底状態に向かって次々に遷移する際に放出される X 線を測定したところ、図 3 のようなエネルギースペクトルが得られた。図中に強く見えているピークのうち、B のピークは、 μ^- 原子の $3d \rightarrow 2p$ 遷移によるものであるという。図中の A,C のピークは、各々どの様な遷移によるものか。推測せよ。(注:ミュー原子の X 線遷移は、 $3d \rightarrow 2p$ の様に、主として電気双極子遷移であることが知られている。)
- 図 3 のデータをもとに、標的の原子番号 Z を推定せよ。
- 標的核が原子番号 $Z = 82$ 、質量数 $A = 208$ である場合、核を点電荷とみなして、ミュー原子の $1s$ 軌道半径を概算し、これを標的核半径と比較せよ。
- 実際には原子核は点電荷ではなく、有限の核半径を持つ。この効果が、図 3 の様なスペクトルにどの様に現れるかを、簡潔に論じよ。

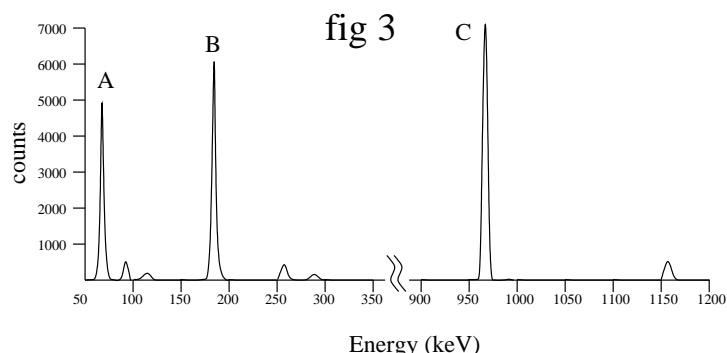


fig 3

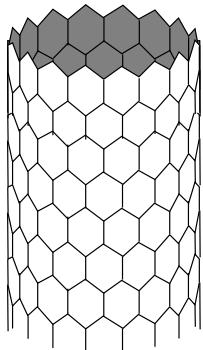
専攻 問題 5

最近、炭素原子からなる、原子スケールの半径をもつ円筒状の物質（図 1、各六角形の頂点が炭素原子を表す）が合成されている。この系での電子状態を調べてみよう。（電子のスピンは無視する。）

1. 先ず、原子構造を無視して、図 2 のように電子が円筒の面を自由に運動するという模型を考える。
 - (i) 電子に対する Schrödinger 方程式を書き、その固有値および固有関数を求めよ。電子の質量を m とし、円筒（半径 r ）の軸方向には長さ L の周期的境界条件があるとせよ。
 - (ii) 円筒の代わりに、直線の上を電子が自由運動するとしたときに、状態密度 $D(E)$ を、導き方を示しながら求めよ。 $(D(E))$ は E と $E + dE$ とのエネルギー間隔 (dE は微小) 中の状態数が $D(E)dE$ で与えられるような量である。長さ L の周期的境界条件があるとしてよい（ L は十分大きいとする）。これを参考にして、円筒上の問題での状態密度を求め、 $L \gg r$ のときにその概形を書け。
2. 次に、円筒は原子の連なりであることを取り入れよう。ここでは簡単のために円筒の円周方向だけについてこの効果を考えよう。即ち、円筒の円周に沿って原子の鎖を切り出し原子からなる輪を孤立したものとして考える。
 - (i) この輪が、図 3 のように 3 原子から成るとする。各原子に局在した基底波動関数を ϕ_n (n は原子の番号) として、隣合う原子 (n, ℓ) 間を電子が飛び移る過程をハミルトニアン \mathcal{H} の行列要素 $\langle \phi_n | \mathcal{H} | \phi_\ell \rangle$ で表すと、基底 (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) で張られる \mathcal{H} の行列は

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & t & t \\ t & \varepsilon & t \\ t & t & \varepsilon \end{pmatrix} \quad t < 0$$
 となる。ここで ε は原子のエネルギー準位とする。この固有エネルギーを全て（縮退度を含めて）求めよ。
 - (ii) このような輪が、一般に N 個の原子から成り（図 4）、 \mathcal{H} の行列は同様に最近接の原子間を電子が飛び移るための t を非対角要素にもつ $N \times N$ の行列とする。これを対角化するために固有関数が $\psi = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n$ という線形結合で表されるとして、その係数が

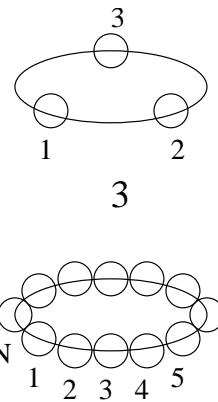
$$c_n \propto \exp(inka) \quad a \text{ は格子定数}$$
 という形を解にもつことを示し、固有エネルギーを求めよ。ここで波数 k のとり得る値を与える。
 - (iii) N が大きいときには、長波長つまり小さな k をもつ固有関数が存在する。このとき、エネルギーの k への依存性は、小さな k に対しては（定数項は別として）自由電子のように振る舞うことを示せ。そこでは電子の質量に対応する量はどのように与えられるか。



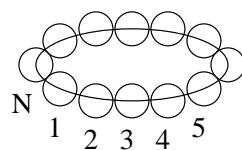
1



2



3



4

専攻 問題 6

図 1 は、ロータリー・ポンプ P1 と油拡散ポンプ P2 を組み合わせて、測定槽 C を $10^{-4} \sim 10^{-5}$ Pa 程度の真空に排気する装置である。S1,S2 はポンプの電源スイッチ、V1 ~ V5 は真空バルブ、W は給水バルブ、G1,G2 は真空計である。(注: 1 Pa = 1 N/m² = 7.5×10^{-3} Torr)

1. 最初 S1,S2 は off, V1 から V2 および W は閉の状態にあるとする。C を排気するために行なうべき操作とその目的を、操作の順に番号をつけて列挙せよ。なお、途中で 20 分 ~ 30 分待つことが必要であるが、これも操作の 1 項目として扱うこと。また、真空度のチェックも操作の 1 項目とし、どの真空計で何 Pa (何 Torr) 程度になったことをチェックするか、真空度のオーダーを記せ。(注: 必ずしも決まった順序がない部分は、妥当な順序を一通りだけ示せばよい。)
2. (i) 図 2(a) はロータリー・ポンプの模式図である。このポンプの動作原理を説明する下の文の [], (), {} に言葉または記号を入れよ。

ただし [] には [油、吸気口、空気、真空、滑り板、排気口、バネ、弁、偏心、ポンプ] のいずれかの言葉(解答に使わないものも含まれている)、

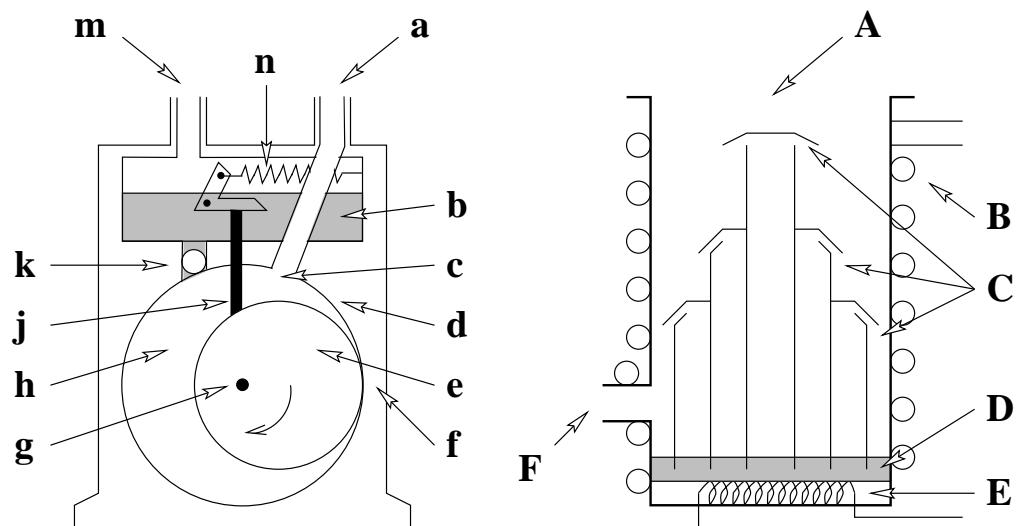
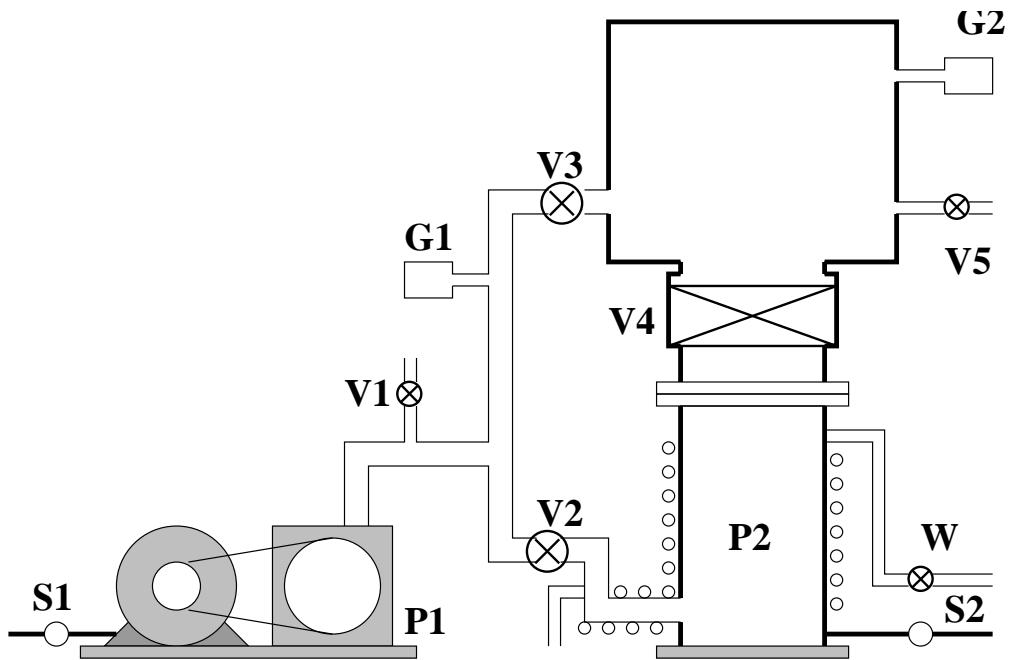
() には図中の部分を示す記号 a,b,c,... 等(解答に使わないものも含まれている)、

{ } には式を、

例: (1)a, (2)b, [3] 油, ..., {18} $V_1 \times V_{min}$ のように記せ。

「固定シリンダー (1) の中心軸にローター (2) が [3] して取り付けられている。シリンダーには [4](5) がはめられており、[6](7) からの力を受けている。シリンダー内は、ローターとシリンダーとの接触部 (8)、および [4] とローターとの接触部によって、2 つの空間に分けられている。上部に貯められた [9](10) がシリンダー内にしみ出してすべての接触面の隙間を埋め、それぞれの空間を気密に保っている。ローターが矢印の向き(時計方向)に回転すると、[11] が [12](13) から空間 (14) に取り込まれる。一方、空間 (15) ではすでに取り込まれた [11] が圧縮されつつある。[15] 内の圧力が 1 気圧を少し越えると、[16](17) が押し上げられ、[11] は排出される。[9] は気密保持と潤滑剤の役割のほかに、重要な役割がある。今、空間 (14)(15) の体積をそれぞれ V_1, V_2 とする。 V_2 の最小値を V_{min} とすると、到達真空度はおよそ $p_{min} = \{18\}$ Pa で与えられると期待される。ところが実際のポンプの到達真空度は $p_{min}/1000$ に達する。これは [9] が体積 V_{min} を充満するのに十分な量、空間 (15) にしみ出しており、[11] は [9] 中に浮かぶ体積 $\sim V_{min}/1000$ 程度の泡にまで圧縮されて [9] とともに排出されているからである。」

- (ii) 図 2(b) は油拡散ポンプの模式図である。この真空ポンプの動作原理を、必要に応じて図中の部分 A,B,C,... 等の役割に触れながら、6 行以内で述べよ。また、油拡散ポンプが正常に動作するためには図 1 のようにロータリー・ポンプ等を併用する必要がある。その理由を 2 行以内で述べよ。
- (i) 数密度 n の気体中の分子の平均自由行程 l を求めよ。ただし、気体分子を直径 d の剛体球と考えてよいものとする。
- (ii) 窒素分子を直径 0.3 nm の剛体球とするとき、温度 300 K で、 $l = 1$ cm になるのは圧力 p が何 Pa のときか。



専攻 問題 7

- 細胞内での拡散過程による物質輸送は、移動距離が短いときは、他の生物的な反応速度などと比べて十分速いが、移動距離が長くなるにつれ、急激に遅くなる。このことを半定量的に示すために、次のような場合を考察しよう。

真核生物の細胞の典型的な大きさは $20\text{ }\mu\text{m}$ であり、原核生物（バクテリアなど）の典型的な大きさは $1\text{ }\mu\text{m}$ である。典型的なタンパク質分子（拡散定数: $10^{-7}\text{ cm}^2/\text{s}$ ）がそれぞれの細胞のなかで、細胞の大きさである $1\text{ }\mu\text{m}$ だけ、一次元的な拡散によって移動するのに必要な時間を概算せよ。

- 神経細胞は細胞体・樹状突起・軸索からなるが、軸索の長さは 1 m である場合もある。その場合は、細胞体で合成されたタンパク質が一次元的な拡散で軸索の先端に達する時間は、典型的なタンパク質では約 1600 年かかることが上記と同様な概算の結果わかるので、物質輸送を拡散過程に頼ることは出来ないことは明白である。

このような状況に対処するために真核細胞では特別な機能を持つタンパク質のシステムがいくつか出現した。それらを簡単に列記し、そのうちの一つに関しては、そのシステムを構成するタンパク質とその特性についても触れつつ、詳しく述べよ。

専攻 問題 8

- 同種のアミノ酸からなるポリペプチド鎖（ホモポリペプチド鎖）のヘリックス - コイル転移について考えてみよう。ヘリックス - コイル転移のジッパー モデル（zipper model）では、鎖中に連続した一個のヘリックスセグメントのみが許される。つまり ...ccchhhhhccc... や ...hhhhhhcccc... のコンフォメーションは許されるが、...hhhhccccchhh... や ...ccchhhccccchhhcccc... などは許されない（ここで、h と c は、それぞれ、ヘリックス状態とコイル状態にある残基を表す）。このとき、残基数 n からなる鎖の分配関数 Z はどのように表されるか。但し、ヘリックス - コイル転移の開始パラメータ σ 、伸長パラメータ s とおき、各残基に対して：(1) コイル状態の統計重率は 1 とし；(2) コイル状態に続くヘリックスの統計重率は $\sigma \times s$ とし；(3) ヘリックス状態に続くヘリックスの統計重率は s とせよ。また、鎖の末端はコイル状態につながっているのと等価と考えよ。
- 分子量 2 万以下の單一ドメインからなる球状タンパク質のアンフォールディング転移は、多くの場合、二状態転移で表され、各タンパク質分子は転移領域で天然状態（N 状態）とアンフォールドした状態（U 状態）のいずれか二つの状態しか取ることができない。これは合成ポリペプチド鎖のヘリックス - コイル転移が、転移領域で取り得る各分子の状態を考えたときに、多状態の転移であることと対照的である。球状タンパク質と合成ポリペプチド鎖のこのような違いをもたらす物理的要因は何か。「球状タンパク質の天然構造」と「合成ポリペプチド鎖のヘリックス構造」の特徴に着目して答えよ。
- 図 1 は、ある球状タンパク質の熱によるアンフォールディング転移を表し、縦軸は U 状態の割合 (f)、横軸は温度 (T) を示す。アンフォールディング転移が二状態転移 $N \leftrightarrow U$ で表されるるとすると、転移の平衡定数 K と転移に伴う標準自由エネルギーの変化 ΔG はどのようにして求められるか。
- 図 1 に示されたタンパク質の熱によるアンフォールディング転移のエンタルピーの変化 ΔH は、圧力一定の条件下では、 $\Delta H = -R \frac{\partial \ln K}{\partial (1/T)}$ により得られることを示せ。ここで、 R は気体定数とする。
- 図 2 は、図 1 より得られた平衡定数 K の対数を温度の逆数 ($1/T$) に対してプロットしたものであり、ファン・ト・ホッフのプロットという。水溶液中の球状タンパク質のアンフォールディング転移のファン・ト・ホッフのプロットは、一般に、直線ではなく、図 2 のように上に凸の曲率を示す。この事実から、タンパク質の天然構造を安定化している相互作用に関しどのようなことがいえるか。タンパク質を構成するアミノ酸を非極性溶媒中より水中に移すときの移行（transfer）の自由エネルギーの温度依存との関連に触れつつ述べよ。

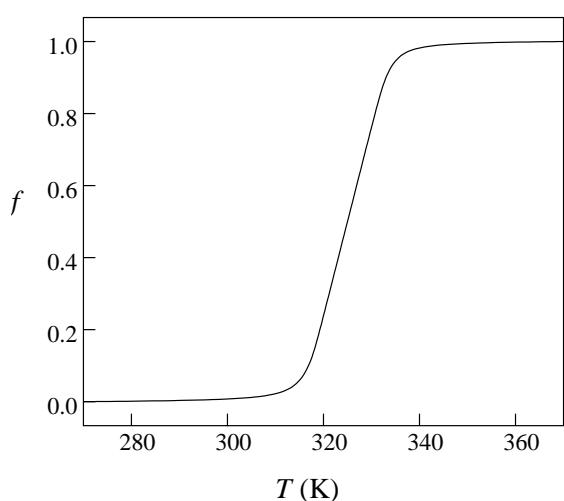


Fig.1

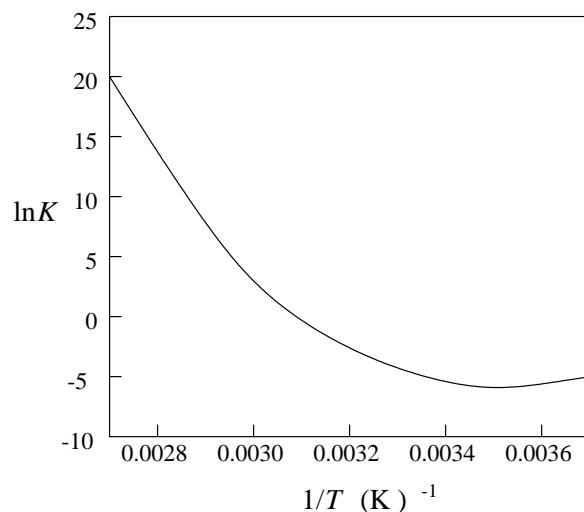


Fig.2

専攻 問題 1 解答

1. Schrödinger 方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\Psi = E\Psi$$

で、ラプラスアンを極座標で表し、波動関数の動径部分 R_l が満すべき方程式を抽出すると、以下の通りとなる。

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)R_l = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)R_l \quad \cdots (1)$$

2. (i) s 状態を考えるので $l = 0$ であり、また、 $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r$ に注意すると、 R_0 が満す方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2}(rR_0) &= -\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - \varepsilon)(rR_0) && (\text{井戸の中}) \\ \frac{d^2}{dr^2}(rR_0) &= \frac{2m}{\hbar^2}\varepsilon(rR_0) && (\text{井戸の外}) \end{aligned} \quad \cdots (2)$$

これより、 R_0 は、全体を定数倍する任意性を除けば、

$$R_0 = \begin{cases} \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\sqrt{2m(V_0 - \varepsilon)}}{\hbar}r + \delta\right) & (r < a) \\ \frac{C_1}{r} \exp\left(-\frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}r\right) + \frac{C_2}{r} \exp\left(\frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}r\right) & (r > a) \end{cases} \quad \cdots (3)$$

(C_1, C_2, δ は定数) と書ける。

ここで、波動関数の規格化可能性より、 $C_2 = 0$ 。また原点で、ポテンシャルが特異性を持たないことが、 $\delta = 0$ と決まる。

残った定数 C_1 は、 $r = a$ で (3) の第 1、第 2 式が滑らかにつながるように決定される。この条件は、

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \sin\left(\frac{\sqrt{2m(V_0 - \varepsilon)}}{\hbar}a\right) = \frac{C_1}{a} \exp\left(-\frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}a\right) \\ \frac{\sqrt{2m(V_0 - \varepsilon)}}{\hbar} \cot\left(\frac{\sqrt{2m(V_0 - \varepsilon)}}{\hbar}a\right) = -\frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar} \end{cases} \quad \cdots (4)$$

$0 < \varepsilon \ll V_0$ より、 $\varepsilon/V_0 = 0$ としてよい。すると、(4) 第 2 式より、

$$\begin{aligned} \cot\left(\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}a\right) &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{V_0}} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}a &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

s 状態に束縛状態がただ一つあるということは、その束縛状態の固有関数が $r < a$ に節を持たないことを意味する。即ち、 $n = 0$ である。

$$\begin{aligned} \therefore V_0 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{\hbar}{a}\right)^2 / 2m \\ &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} \end{aligned}$$

(ii) このとき、(4) 第 1 式は、

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 \exp\left(-\frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}a\right)$$

となり、

$$C_1 = \exp\left(\frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}a\right)$$

よって、求める確率は、

$$\begin{aligned} \frac{\int_{a \leq r < +\infty} |\Psi|^2 d^3r}{\int_{0 \leq r < +\infty} |\Psi|^2 d^3r} &= \frac{\int d\Omega |Y_{00}|^2 \int_a^{+\infty} dr \cdot r^2 |R_0|^2}{\int d\Omega |Y_{00}|^2 \int_0^{+\infty} dr \cdot r^2 |R_0|^2} \\ &= \frac{\int_a^{+\infty} dr \exp(2 \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar} a) \exp(-2 \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar} r)}{\int_0^a dr \sin^2(\frac{\pi}{2} \frac{r}{a}) + \int_a^{+\infty} dr \exp(2 \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar} a) \exp(-2 \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar} r)} \\ &= \frac{\frac{\hbar}{2\sqrt{2m\varepsilon}}}{\frac{a}{2} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m\varepsilon}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar} a} \end{aligned}$$

3. $(\sqrt{2mV_0}/\hbar)a = \pi/2$ であること、及び、井戸の内では $E - V = (25/16)V_0$ 、井戸の外では $E - V = (9/16)V_0$ であることに注意すると、 R_0 が従う方程式は、

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR_0) = \begin{cases} -\left(\frac{5\pi}{8}\right)^2 \frac{1}{a^2}(rR_0) & (\text{井戸の中}) \\ -\left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 \frac{1}{a^2}(rR_0) & (\text{井戸の外}) \end{cases} \quad \cdots (5)$$

2(i) と同様の考察により、 R_0 は、

$$R_0 = \begin{cases} \frac{1}{r} \sin\left(\frac{5\pi}{8} \frac{r}{a}\right) & (r < a) \\ \frac{C}{r} \sin\left(\frac{3\pi}{8} \frac{r}{a} + \delta_0\right) & (r > a) \end{cases} \quad \cdots (6)$$

(C は定数) と書ける。これらが、 $r = a$ で滑らかにつながることより、 rR_0 の対数微分が $r = a$ で一致する。よって、

$$\begin{aligned} \frac{5\pi}{8} \cot\left(\frac{5\pi}{8}\right) &= \frac{3\pi}{8} \cot\left(\frac{3\pi}{8} + \delta_0\right) \\ \iff \tan\left(\frac{3\pi}{8} + \delta_0\right) &= \frac{3}{5} \tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

加法定理を用いて、左辺の \tan を分解して整理すると

$$\iff \tan \delta_0 = \frac{\frac{3}{5} \tan \frac{5\pi}{8} - \tan \frac{3\pi}{8}}{1 + \frac{3}{5} \tan \frac{3\pi}{8} \tan \frac{5\pi}{8}} \quad \cdots (7)$$

一方

$$\tan \frac{5\pi}{8} = \tan\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = -\tan \frac{3\pi}{8}$$

及び、 \tan の加法定理

$$\begin{aligned} 1 &= \tan\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{3\pi}{8}\right) \\ &= \frac{\tan \frac{5\pi}{8} - \tan \frac{3\pi}{8}}{1 + \tan \frac{5\pi}{8} \tan \frac{3\pi}{8}} \end{aligned}$$

より、

$$\tan \frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}, \quad \tan \frac{5\pi}{8} = -1 - \sqrt{2}$$

なので、これを (3) に代入して計算すると、

$$\tan \delta_0 = \frac{8 + 2\sqrt{2}}{7}$$

となる。

専攻 問題 2 解答

1. 運動エネルギーは、リングの抵抗から発するジュール熱となって失われる。リングに発生する起電力が V のとき ($V = -\frac{d\Phi}{dt}$ より V は r に依らない) ジュール熱が

$$VI = \frac{V^2}{r}$$

であることから運動エネルギーの損失の割合は抵抗が小さい方が大きい。

2. (i) リングが磁場中を運動するとローレンツ力によりリングの周に電場が生じる。電場の強さ E を磁石側から見てリングの左周りを正として表すと

$$E = -\frac{dx}{dt}B_r$$

となる。よってリング一周での電位差である e は

$$e = 2\pi RE = -2\pi RB_r \frac{dx}{dt}$$

である。

- (ii) リングに発生する誘導起電力によって流れる電流 I は、

$$I = \frac{e}{r} = -\frac{2\pi RB_r}{r} \frac{dx}{dt}$$

磁場との相互作用によりリングは次の力 f_I を受ける。

$$f_I = IB_r 2\pi R = -\frac{(2\pi RB_r)^2}{r} \frac{dx}{dt}$$

よって、リングの運動方程式は以下の通り。

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = -\frac{(2\pi RB_r)^2}{r} \frac{dx}{dt} + f(t)$$

3. 前問の結果で $\gamma \equiv (2\pi RB_r)^2 / mr$ と書き改め撃力 $f(t) = p_0 \delta(t)$ を代入すると次の運動方程式を得る。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{p_0}{m} \delta(t)$$

この方程式を $[-\Delta t, +\Delta t]$ の間で積分して $\Delta t \rightarrow +0$ の極限をとる。すなわち、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow +0} \int_{-\Delta t}^{+\Delta t} \left[\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x \right] dt = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \int_{-\Delta t}^{+\Delta t} \frac{p_0}{m} \delta(t) dt$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow +0} \left[\frac{dx}{dt} \Big|_{-\Delta t}^{+\Delta t} + \gamma x \Big|_{-\Delta t}^{+\Delta t} + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 \Big|_{-\Delta t}^{+\Delta t} \right] = \frac{p_0}{m}$$

x の値は $t = 0$ において連続であるべきなので、この左辺第2項と第3項は $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で消える。第1項は残りこれはリングの速度が $t = 0$ で不連続であることを示す。すなわち $t = +0$ での速度が得られる。 $t = +0$ では、撃力は既に働いていないので、 $t > 0$ での運動方程式は次のように簡単化される。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad t > 0 \quad x|_{+0} = 0 \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{+0} = \frac{p_0}{m}$$

この線形の齊次微分方程式を解く。 $x = e^{\lambda t}$ の型の解を仮定してこの方程式に代入すると次の結果を得る。

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$\gamma^2 - 4\omega_0^2 \geq 0$ の場合には λ_{\pm} は両者とも負の実数である。 x の解は初期条件を考慮して次のようになる。

$$\begin{aligned} x &= \frac{p_0}{m\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}(e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}) \\ &= \frac{p_0}{m\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}} \left[\exp\left(\frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}t\right) - \exp\left(\frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}t\right) \right] \end{aligned}$$

他方、 $\gamma^2 - 4\omega_0^2 < 0$ の場合には λ_{\pm} は両者とも複素数である。 x の解は初期条件を考慮して次のようになる。

$$x = \frac{p_0}{m\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right) 2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}{2}t\right)$$

この x の時間発展の様子は右下の図の様である。

4. (i) 自己インダクタンスの効果がある場合の
リングを流れる電流 I の満たすべき方程
式は

$$2\pi RB_r \frac{dx}{dt} - L \frac{dI}{dt} = rI$$

であるが、 L の項が比較的小さいと仮定
して第 0 次近似で

$$2\pi RB_r \frac{dx}{dt} = rI$$

を仮定し、この I を正確な方程式の L の項に代入する逐次近似法を採用する。したがって

$$I = \frac{2\pi RB_r}{r} \frac{dx}{dt} - L \frac{2\pi RB_r}{r^2} \frac{d^2x}{dt^2}$$

となる。 I の表式の右辺第 2 項はインダクタンスの影響の項である。これよりインダクタンスの効果が支配的となる条件は

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| \ll \frac{L}{r} \left| \frac{d^2x}{dt^2} \right|$$

である。この x の微分の量の大きさを見積もるために設問 3 で得られた式の $t \sim 0$ 付近での値を用いると、

$$\frac{dx}{dt} \sim \frac{p_0}{m} \quad \frac{d^2x}{dt^2} \sim -\frac{p_0}{m} \gamma$$

これを代入して整理して、

$$r^2 \ll \frac{(2\pi RB_r)^2}{m} L$$

この条件が満たされた時にインダクタンスによる効果が支配的となる。

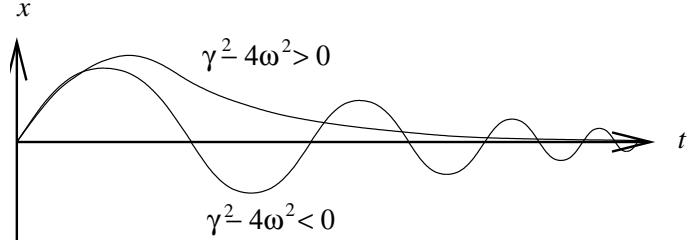
- (ii) インダクタンスによる効果が支配的な場合、運動方程式は下のようになる。

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = L \frac{(2\pi RB_r)^2}{r^2} \frac{d^2x}{dt^2} + f(t)$$

すなわち、

$$(m - \alpha) \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m}{m - \alpha} \omega_0^2 x \right) = f(t) \quad \text{where } \alpha = L \frac{(2\pi RB_r)^2}{r^2} \geq 0$$

つまり、リングの質量が減少して固有振動数が増加したと考えることができる。



専攻 問題 3 解答

1. (i) この電子系では電子同士の相互作用はないので、 N 個の電子は独立に振舞う。全体の分配関数 Z は 1 電子系の分配関数 Z_1 によって

$$Z = Z_1^N$$

と表される。 Z_1 を求める。一次元の運動量空間は h/L 単位に離散化されている。つまり、

$$p_n = \frac{h}{L}n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

エネルギー ε も離散値となり、 $H = 0$ のとき、

$$\varepsilon_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{hn}{L} \right)^2 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \cdots (1)$$

となる。よって、

$$Z_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\varepsilon_n} = \frac{L}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{h}{L} e^{-\frac{\beta}{2m} \left(\frac{hn}{L} \right)^2}$$

$h/L \ll 1$ なので、 $dx = h/L, x = nh/L$ としてこの和を積分に変換する。

$$Z_1 = \frac{L}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{\beta}{2m}x^2} = \frac{L}{h} \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}$$

よって全電子の分配関数は、同種粒子で区別できないことに注意して、

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{L}{h} \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} \right)^N$$

となる。

- (ii) 内部エネルギー $\langle E \rangle$ は分配関数より

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = N \frac{k_B T}{2}$$

と導かれる。

- (iii) 磁場のある場合のエネルギー ε は次のようになる。

$$\varepsilon_n = \frac{p_n^2}{2m} - \mu H = \frac{h^2}{2mL^2} n^2 - \mu H \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \cdots (2)$$

この時の N 電子系、1 電子系の分配関数をそれぞれ Z' 、 Z'_1 と表す。

$$Z'_1 = \sum_{\mu} \sum_n e^{-\beta\varepsilon_n} = \sum_n e^{-\beta \frac{p_n^2}{2m}} \sum_{\mu} e^{+\beta\mu H} = \frac{L}{h} \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} (e^{+\beta\mu_B H} + e^{-\beta\mu_B H})$$

$$Z' = \frac{1}{N!} Z'^N_1 = \frac{1}{N!} \left(\frac{L}{h} \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} (e^{+\beta\mu_B H} + e^{-\beta\mu_B H}) \right)^N = \frac{1}{N!} \left(\frac{2L}{h} \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} \cosh(\beta\mu_B H) \right)^N$$

となる。

- (iv) 内部エネルギー $\langle E \rangle$ は、

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z' = N \frac{k_B T}{2} - \mu_B N H \tanh(\beta\mu_B H)$$

よって比熱 C は、

$$C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = -\frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} = \frac{1}{2} N k_B + N k_B \left(\frac{\beta \mu_B H}{\cosh(\beta \mu_B H)} \right)^2$$

(v) 磁化 M は一電子の磁気モーメントの熱平均 $\langle \mu \rangle$ を用いて

$$M = \frac{1}{L} \sum_i \langle \mu_i \rangle = \frac{N}{L} \langle \mu \rangle$$

と表される。この $\langle \mu \rangle$ は

$$\langle \mu \rangle = \frac{\partial}{\partial(\beta H)} \ln Z'_1 = \mu_B \tanh(\beta \mu_B H)$$

よって、

$$M = \frac{N \mu_B}{L} \tanh(\beta \mu_B H)$$

(vi) 帯磁率 χ は

$$\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{M}{H} = \frac{\partial M}{\partial H} \Big|_{H=0} = \frac{N}{L} \beta \mu_B^2 \frac{1}{\cosh^2(\beta \mu_B H)} \Big|_{H=0} = \frac{N}{L} \frac{\mu_B^2}{k_B T}$$

2. (i) 電子のエネルギーは式 (1) で与えられており、これから逆に指定のエネルギー以下の状態の数 $n_e^<$ が求まる。すなわち、

$$n_e^< = 2 \sqrt{\frac{2mL^2}{h^2}} \sqrt{\varepsilon}$$

磁場が無い場合にはスピンは縮退していて、エネルギーの低い状態から一つの状態に 2 つの電子が入っていく。そのエネルギーの上端が ε_F である。よって電子の総数 N は $2n_{\varepsilon_F}^<$ で与えられることになり、

$$N = 2n_{\varepsilon_F}^< = 4 \sqrt{\frac{2mL^2}{h^2}} \sqrt{\varepsilon_F}$$

である。上の 2 式を整理して

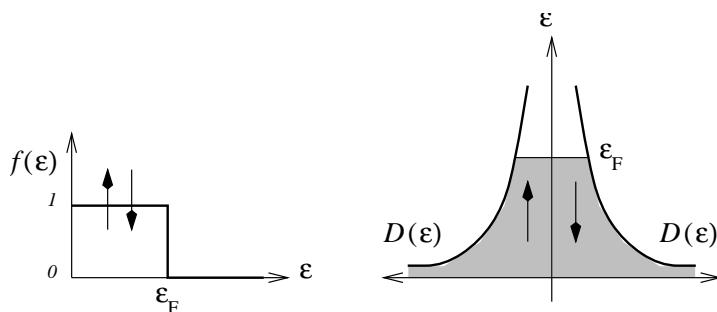
$$n_e^< = \frac{N}{2 \sqrt{\varepsilon_F}} \sqrt{\varepsilon}$$

を得る。これから状態密度 $D(\varepsilon)$ は、

$$D(\varepsilon) = \frac{dn_e^<}{d\varepsilon} = \frac{N}{4 \sqrt{\varepsilon_F}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

となる。

さて、 $T = 0$ において、fermion の分布関数 $f(\varepsilon)$ は左下図のようになっており、 $\varepsilon < \varepsilon_F$ の各状態に一様に電子が分布している。また状態密度 $D(\varepsilon)$ は電子のスピンを考慮して縦軸にエネルギー、右軸に下スピンの状態密度、左軸に上スピンの状態密度を描くと右下図のようになっている。



平均エネルギー $\langle E \rangle$ を求める。上下スピン 2 種に電子があることに注意して ε の平均値を求める

$$\langle E \rangle = 2 \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon f(\varepsilon) D(\varepsilon) = 2 \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \varepsilon D(\varepsilon) = \frac{N}{2 \sqrt{\varepsilon_F}} \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_F N}{3}$$

となる。

- (ii) 磁場のある場合の電子のエネルギー状態は式(2)で与えられており、状態密度 $D_{\mu=\pm\mu_B}(\varepsilon)$ を前問と同様に求めると

$$D_{\mu=\pm\mu_B}(\varepsilon) = \frac{N}{4\sqrt{\varepsilon_F}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \pm \mu_B H}}$$

ε_F は磁場の無い場合のフェルミエネルギーである。磁場のある場合のフェルミエネルギーを ε'_F とする。状態密度はスピンによって異なることになり、上スピン ($\mu = +\mu_B$) の状態分布は $-\mu_B H < \varepsilon < \varepsilon'_F$ であり、下スピン ($\mu = -\mu_B$) の状態分布は $+\mu_B H < \varepsilon < \varepsilon'_F$ である。 $\varepsilon'_F \geq \mu_B H$ の場合には上下どちらのスピンの電子もあるが、 $\varepsilon'_F < \mu_B H$ の場合には下スピンがなくなりすべて上スピンとなる。この様子を下図に示す。

上スピンの電子の個数を N_+ 、下スピンの電子の個数を N_- とする。

$$N_+ = \int_{-\mu_B H}^{\varepsilon'_F} d\varepsilon \frac{N}{4\sqrt{\varepsilon_F}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon + \mu_B H}} = \frac{N}{2\sqrt{\varepsilon_F}} \sqrt{\varepsilon'_F + \mu_B H}$$

$$N_- = \int_{+\mu_B H}^{\varepsilon'_F} d\varepsilon \frac{N}{4\sqrt{\varepsilon_F}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - \mu_B H}} = \frac{N}{2\sqrt{\varepsilon_F}} \sqrt{\varepsilon'_F - \mu_B H}$$

磁化 M は $\pm\mu_B$ の磁気モーメントの平均なので

$$M = \frac{N_+}{L}\mu_B - \frac{N_-}{L}\mu_B = \frac{\mu_B}{L}(N_+ - N_-)$$

となる。

$\varepsilon'_F < \mu_B H$ の場合には $N_- = 0$ となり、 $N_+ = N$ となる。よって

$$M = \frac{\mu_B N}{L} \quad (\varepsilon'_F < \mu_B H)$$

$\varepsilon'_F \geq \mu_B H$ の場合には少々面倒で

$$N_+^2 - N_-^2 = \frac{\mu_B N^2}{2\varepsilon_F} H \quad \text{より} \quad N_+ - N_- = \frac{\mu_B N}{2\varepsilon_F} H$$

が得られる。よって

$$M = \frac{\mu_B^2 N}{2L\varepsilon_F} H = \frac{16mL\mu_B^2}{h^2 N} H \quad (\varepsilon'_F \geq \mu_B H)$$

となる。ところで、 $\varepsilon'_F = \mu_B H$ の場合に $N_+ = N$ であることから

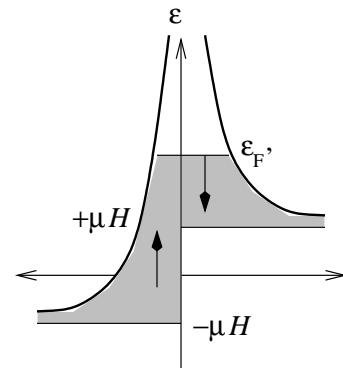
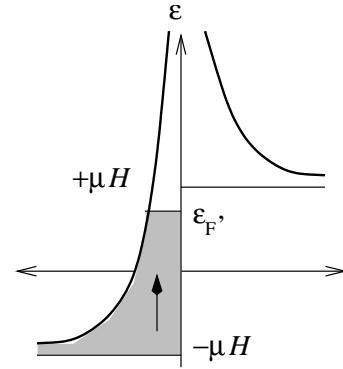
$$2\varepsilon_F = \mu_B H$$

の関係が得られる。すなわち先の ε'_F と $\mu_B H$ の大小の条件は $2\varepsilon_F$ と $\mu_B H$ の大小の条件に置き換えることができる。

- (iii) 帯磁率 χ は

$$\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{M}{H} = \frac{16mL\mu_B^2}{h^2 N}$$

となり、一定の値を持つ。1(vi) でのボルツマン分布では $T \rightarrow 0$ で発散していたのとは明らかに異なる。物理的には、ボルツマン統計は、エネルギー E の状態の起こる確率は、 $e^{-\beta E}$ に比例するとしているため、 $T \rightarrow 0$ では、ほとんどすべての粒子が最低エネルギー状態へ縮退してしまう。従って、 $T \approx 0$ で磁場をかけると、わずかな磁場であってもほぼすべての電子が $E = -\mu_B H$ の状態へ縮退し（スピンがすべて上向き）、磁化 $M = N\mu_B/L$ となる。従って、磁化率は ∞ となる。しかし、このように一つの状態に N 個の電子が詰まるという状態は Pauli の排他律を考えれば起こるはずではなく、当然フェルミ統計に基づく結果とは、異なるてくる。



専攻 問題 4 解答

1. 何 cm の厚さの炭素減速材を使えば入射粒子の運動エネルギーをすべて奪えるかを考える。運動エネルギーを T とすると、

$$T = E - mc^2 = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - mc^2$$

これより

$$pc = \sqrt{(T + mc^2)^2 - (mc^2)^2} \approx 200 \text{ MeV}$$

よって図 2 より、17 cm の炭素減速材を用いればよい。

2. 電気双極子遷移のみを考えればよいので、主量子数と方位量子数が 1 減少する遷移を考える。このとき、X 線スペクトルのエネルギー E は、遷移先の準位の主量子数を n として

$$E \propto \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

で表される。ただし、量子欠損は考えていない。

A,B のスペクトルの主量子数を n_A, n_B として、エネルギー E_A, E_B の比は、

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{\frac{1}{n_A^2} - \frac{1}{(n_A+1)^2}}{\frac{1}{n_B^2} - \frac{1}{(n_B+1)^2}}$$

となる。

$n_B = 2$ と図 3 のデータから計算して $n_A = 3$ と分かる。

与えられた遷移が $3d \rightarrow 2p$ の遷移なので、A は、 $3d$ へ落ちる遷移でなくてはならない。よって、A は $4f \rightarrow 3d$ の遷移である。

C は、もっとも大きなエネルギーのピークであることと、 $2p$ から落ちる遷移がなくてはならないことから、 $2p \rightarrow 1s$ の遷移である。

3. ボーアモデルでは、電子のエネルギー準位 E_n は

$$E_n \propto \frac{Z^2 m_e}{n^2}$$

である。ボーアモデルをミュー原子に適応する。 $Z = 1, n = 1$ の水素原子の $1s$ 状態の電子の束縛エネルギーが 13.6 eV であることを利用して負ミュオンのエネルギー準位 E_n は

$$E_n = \frac{Z^2}{n^2} \frac{m_\mu}{m_e} \times 13.6 \text{ eV}$$

となる。 Z を決めるに当たって B の遷移を使う。

$$190 \times 10^3 = \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \times \frac{106}{0.511} \times 13.6 \times Z^2 \quad \therefore Z \approx 22$$

よって標的の原子番号は 22(Ti) と予想される。

4. ポアアモデルでは電子の軌道半径 r_n は

$$r_n \propto \frac{n^2}{Zm_e}$$

である。前問と同様にこれをミュー原子に適応する。水素原子の 1s 電子の軌道半径の期待値が a_B であることから、ミュー原子の 1s 軌道半径は $Z = 82$ なので

$$r = \frac{m_e}{Zm_\mu} a_B \approx 3.11 \times 10^{-15} \text{ m}$$

となる。

標的核半径は、質量数と原子核の半径との間の関係式

$$r_N \approx 1.3 \times 10^{-15} \times A^{\frac{1}{3}} \text{ m}$$

を用いて、

$$r_N \approx 7.70 \times 10^{-15} \text{ m}$$

となるので、ミュー原子の 1s 軌道半径の方が小さい。

5. ミュー原子の原子核の半径が 1s 軌道半径よりも大きいため、ミュオンが感じる中心の原子核の電荷は実際の電荷よりも小さい。なので、中心が点電荷であると仮定した場合よりもミュオンの 1s エネルギーは不安定になる。つまり高くなる。2p 軌道との準位差が縮まるので生成される X 線のエネルギーは低くなる。よって図 3 のようなスペクトルのピークの位置は左に移動する。

また、クーロン相互作用の場合の、主量子数が同じで軌道運動量の同じ状態の偶然縮退がとける。当然原子中の電子との相互作用も縮退をとくように働くが、 μ 粒子の軌道は充分内側なので、それらはあまり影響しないと考えられる。

専攻 問題 5 解答

1. (i) 自由電子の Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = E\psi$$

円筒座標系で考える。ラプラシアンは

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

であるが、電子は円筒面上のみ動くので動径方向の偏微分は作用しても消えてしまう。よって

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\theta, z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(\theta, z) = E\psi(\theta, z)$$

となる。 $\psi(\theta, z) = \Theta(\theta)Z(z)$ と変数分離する。

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = E_\theta \Theta \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = E_z Z \quad (E = E_\theta + E_z)$$

従って、上式を満たす固有関数は

$$\Theta(\theta) = e^{ik_\theta r\theta} \quad Z(z) = e^{ik_z z} \quad (k_\theta = \frac{\sqrt{2mE_\theta}}{\hbar}, \quad k_z = \frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar})$$

周期的境界条件 $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta), Z(z + L) = Z(z)$ より

$$k_\theta = \frac{n_\theta}{r} \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L} \quad (n_\theta, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

以上より固有関数 $\psi(\theta, z)$ と固有エネルギー E は

$$\psi(\theta, z) = \Theta(\theta)Z(z) = e^{i(n_\theta\theta + \frac{2\pi n_z}{L}z)} \\ E = E_\theta + E_z = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left(\frac{n_\theta}{r} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_z}{L} \right)^2 \right\} \quad (n_\theta, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

である。

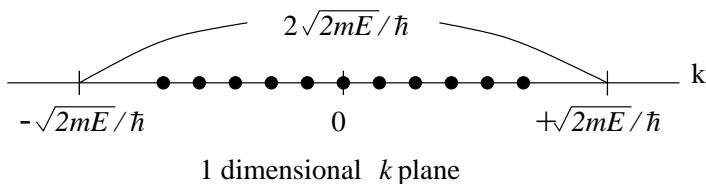
- (ii) 長さ L の周期的境界条件をもつ 1 次元の系の波動関数として $Z(z)$ が前問で得られている。それによると k_z の波数空間は $2\pi/L$ で離散化している。またエネルギー E_z に対応する波数は

$$k_z = \pm \frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar}$$

であるので、エネルギーが E_z 以下である状態の数 $N(E_z)$ は

$$N(E_z) = 2 \cdot \frac{L}{2\pi} \frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar} = \frac{L\sqrt{2mE_z}}{\pi\hbar}$$

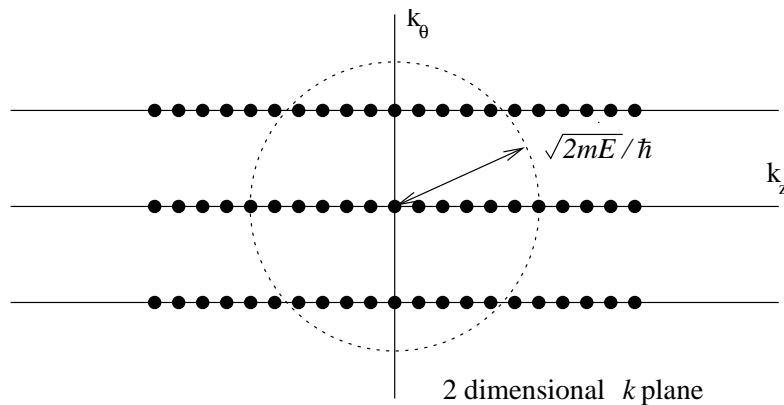
となる。下図参照。



よって 1 次元の状態密度 $D^{(1)}(E_z)$ は

$$D^{(1)}(E_z) = \frac{dN(E_z)}{dE_z} = \frac{L}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E_z}}$$

これをもとに、円筒上の 2 次元 k 空間における状態の数を数える。 $k_z = \frac{2\pi}{L}n_z, k_\theta = \frac{n_\theta}{r}$ が張る平面を考えると、 L は r に比べ十分に大きいから、次の図のように k_z 方向にほぼ連続で、 k_θ 方向には離散化した平面になっている。各 k_θ で、 k_z に関する状態密度 $D^{(1)}(E_z)$ を足し上げたものが求める 2 次元状態密度 $D^{(2)}(E)$ になっている。



半径 $\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ の円を考えると、 $k_\theta = \frac{n_\theta}{r}$ での状態密度 $D_{n_\theta}^{(1)}(E)$ は

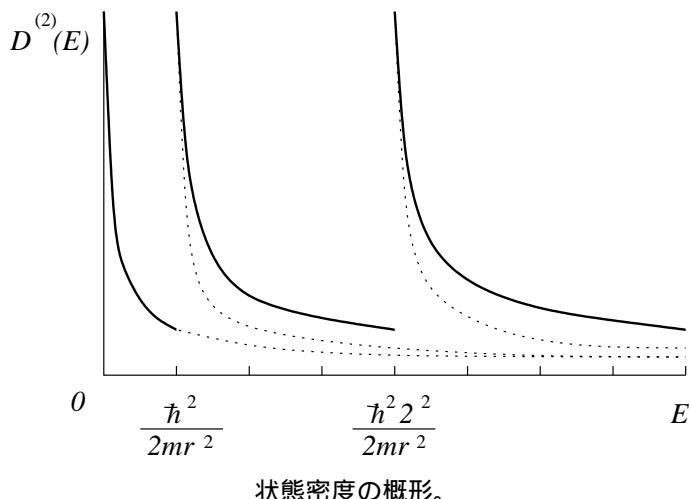
$$D_{n_\theta}^{(1)}(E) = D^{(1)}\left(E - \frac{\hbar^2 n_\theta^2}{2mr^2}\right) = \frac{L}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \left(E - \frac{\hbar^2 n_\theta^2}{2mr^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

従って、求める状態密度 $D^{(2)}(E)$ は、(k_θ 方向に十分密でないので、積分公式が使えないことに注意。)

$$\begin{aligned} D^{(2)}(E) &= D_{n_\theta=0}^{(1)}(E) + 2 \sum_{n_\theta=1}^{n_{\theta_{\max}}} D_{n_\theta}^{(1)}(E) \\ &= \frac{L}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \left\{ E^{-\frac{1}{2}} + 2 \sum_{n=1}^{n_{\theta_{\max}}} \left(E - \frac{\hbar^2 n_\theta^2}{2mr^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

ただし、 $n_{\theta_{\max}}$ は $\frac{\hbar^2 n_{\theta_{\max}}^2}{2mr^2} \leq E$ を満たす最大の整数である。

$L \gg r$ のとき、状態密度の概形は次の図のとおりである。 $E = \frac{\hbar^2 n^2}{2mr^2}$ ごとに大きなとびが現れる。



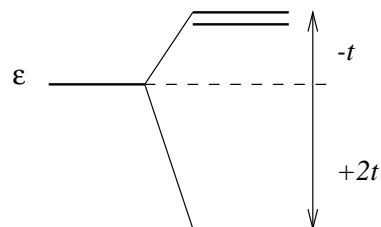
2. (i) 与えられたハミルトニアン \mathcal{H} の行列表現の固有値 E を求めれば良い。

$$\begin{vmatrix} \varepsilon - E & t & t \\ t & \varepsilon - E & t \\ t & t & \varepsilon - E \end{vmatrix} = (\varepsilon - E + 2t)(\varepsilon - E - t)^2$$

よって固有値 E は

$$E = \varepsilon + 2t (1 \text{ 重}), \quad \varepsilon - t (2 \text{ 重})$$

となり、エネルギーの縮退が解ける。この様子を右図に示す。



- (ii) 輪を回る電子の固有波動関数が各原子に局在した電子の固有波動関数の線形結合で記述できるとする。すなわち、

$$\psi = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n$$

このとき、

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & t & 0 & \cdots & 0 & t \\ t & \varepsilon & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ t & 0 & 0 & t & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{pmatrix} \quad \cdots (1)$$

をみたす c_n および、 E をもとめればよい。そこで、

$$c_n = ce^{inka} \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

を仮定してみる。すると、この連立方程式の任意の式は

$$tc_{n-1} + \varepsilon c_n + tc_{n+1} = Ec_n \quad \therefore E = \varepsilon + 2t \cos ka$$

従って、この E および、 c_n の組は確かに (1) の解になっている。

次に、 k のとり得る値であるが、 $c_{N+1} = c_1$ の周期条件があるため

$$k = \frac{2\pi}{aN} \ell \quad (\ell = 0, 1, \dots, N-1)$$

となる。したがって、(1) をみたす N 個の固有値

$$E = \varepsilon + 2t \cos ka \quad k = \frac{2\pi}{aN} \ell \quad (\ell = 0, 1, \dots, N-1)$$

が得られた。

- (iii) 前問の結果より、大きい N には小さな k が存在する。 $ka \ll 1$ では、

$$E = \varepsilon + 2t \cos(ka) \simeq \varepsilon + 2t \left(1 - \frac{(ka)^2}{2}\right) = \varepsilon + 2t - ta^2 k^2$$

と近似できるが、 $-ta^2 > 0$ より、エネルギーの k 依存性は、定数項 $\varepsilon + 2t$ を別として、自由電子 $E = \frac{\hbar^2}{2m^*} k^2$ の様に振舞う。すなわち、

$$-ta^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*} \quad \therefore m^* = -\frac{\hbar^2}{2ta^2}$$

質量 m^* がこのように与えられる自由電子と見ることができる。

専攻 問題 6 解答

1. やや細かいところもあると思うが、以下のようになるだろう。

操作	目的
1 すべてのバルブが閉じていることと、S1, S2, G1,G2, のスイッチが off であることを確認する	真空計の破損や思わぬリークなどを防ぐため
2 S1 を on にする	
3 P1 の音が静かになったらゆっくり V3 を開く	P1 のポンプ内の空気が引けるのを待つため
4 再び P1 の音が静かになったら G1 を on にする	P2 を使用し始めて良いかを確認するため
5 G1 が 6 Pa (0.05 Torr) 程度以下になったことをチェックする	(同上)
6 V3 を閉じる	P2 内の空気を引くため
7 V2 を開く	(同上)
8 W を開く	P2 内の油の炭化を防ぐため
9 S2 を on にする	
10 20 分から 30 分待つ	P2 が暖まるのを待つため
11 V2 を閉じる	P2 の準備中に C が 6 Pa 以上になることがあるが、それを再び 6 Pa 以下にするため
12 V3 を開く	(同上)
13 G1 が 6 Pa (0.05 Torr) 程度以下になったことをチェックする	(同上)
14 V3 を閉じる	(P2 のポンプを使用するため)
15 V2 を開く	(同上)
16 V4 を開く	(同上)
17 ある程度時間が経ったら G2 を on にする	
18 G2 が $10^{-4} \sim 10^{-5} \text{ Pa}$ 程度であることをチェックする	

注: G2 が具体的に与えられていないので、17. で on にする時の条件を書かなかったが、G2 が、電離真空計(イオンゲージ)なら、C 内が 0.1 Pa (10^{-3} Torr) 以下になった時に on にすれば良い。しかしこの場合でも G1 が C に直結していないので、どう確認するかが問題になる。

2. (i) 解答は以下の通り

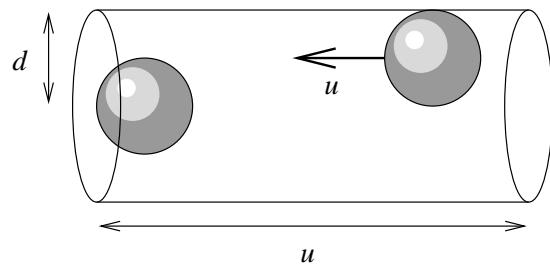
(1) d	(2) e	[3]	偏心	[4]	滑り板
(5) j	[6] バネ	(7)	n	(8)	f
[9] 油	(10) b	[11]	空気	[12]	吸気口
(13) a	(14) c	(15)	h	[16]	弁
(17) k	{18} $V_{\min}/(V_1 + V_2 - V_{\min})$				

- (ii) ボイラー E で、油 D を加熱する。発生した油蒸気はノズル C から下向きに噴射され、吸気口 A から入ってくる残留ガス分子に下向きの運動量を与え、気体を圧縮する。圧縮された気体は、ロータリーポンプ等で排気口 F から排気する。また油が蒸気のままでいると油の分子が吸気口に流れてポンプ作用を失い排気速度が落ちる上に、蒸気温度が高くなり過ぎて油が分解して使用不可能になる。これを防ぐために水冷パイプ B で必ず冷却しながら使用する。
- ロータリーポンプを併用する理由は排気口付近の気体分子の密度が大きいと油拡散ポンプ内に逆流し、真空度を上げられないからである。

3. (i) 平均自由行程を概算する方法と Maxwell-Boltzmann 分布を用いて精密に計算する方法の 2 通りを示す。

まず、概算により平均自由行程を見積もる。

数密度 n の分子が静止していて、その中を同じ分子 1 個が速さ u で走る状況を考える。右図はこの状況を走る分子に乗って眺めた図である。



単位時間にこの分子と衝突する分子はその球の中心が図に示した大きさの円柱内部にあるものである。その衝突回数 N は $N = \pi d^2 u n$ である。分子の平均衝突時間間隔は $1/N$ で与えられるので平均自由行程 l は

$$l = \frac{1}{N} u = \frac{1}{\pi d^2 n}$$

と得られる。これが概算値である。

次に Maxwell-Boltzmann 分布を用いて平均自由行程を精密に計算する。

単位体積中に n 個ある分子のうち 1 つの分子に注目した時に、その分子の速度が $[\vec{v}_1, \vec{v}_1 + d\vec{v}_1]$ の範囲にある確率は Maxwell-Boltzmann 分布 $f(\vec{v})$ を用いて $f(\vec{v}_1)d\vec{v}_1$ と与えられる。

次に他の分子のうち、速度が $[\vec{v}_2, \vec{v}_2 + d\vec{v}_2]$ の範囲にある分子の数密度は $nf(\vec{v}_2)d\vec{v}_2$ と与えられる。

この \vec{v}_1 の 1 個の分子と \vec{v}_2 の多数の分子との衝突のみを考える。 \vec{v}_1 の分子に乗って眺めると、先の図のような状況となる。相対速度 u は $u = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ である。向かってくる分子の数密度は $nf(\vec{v}_2)d\vec{v}_2$ があるので、単位時間のこの衝突回数 $N(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ は

$$N(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \pi d^2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| n f(\vec{v}_2) d\vec{v}_2$$

で与えられる。よってすべての \vec{v}_1, \vec{v}_2 についての $N(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ の和、つまり積分、を求めるとき、それは最初に注目した分子が単位時間に衝突する回数 N となる。

$$N = \iint d\vec{v}_1 d\vec{v}_2 \pi d^2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| n f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2)$$

Maxwell-Boltzmann 分布 $f(\vec{v})$ の速度依存性は A, α を温度などにより決まる定数として $f(\vec{v}) = Ae^{-\alpha v^2}$ と表される。よって、

$$N = \pi d^2 n \iint d\vec{v}_1 d\vec{v}_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| A^2 e^{-\alpha(v_1^2 + v_2^2)}$$

となる。この積分を計算するために次の変数変換を行う。

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

$$d\vec{v}_1 d\vec{v}_2 = \frac{\partial(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}{\partial(\vec{u}_1, \vec{u}_2)} d\vec{u}_1 d\vec{u}_2 = d\vec{u}_1 d\vec{u}_2 \quad v_1^2 + v_2^2 = u_1^2 + u_2^2$$

となるのでよって、

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{2}\pi d^2 n \iint d\vec{u}_1 d\vec{u}_2 u_1 A^2 e^{-\alpha(u_1^2 + u_2^2)} = \sqrt{2}\pi d^2 n \int d\vec{u}_1 u_1 A e^{-\alpha u_1^2} \int d\vec{u}_2 A e^{-\alpha u_2^2} \\ &= \sqrt{2}\pi d^2 n \int d\vec{v} v f(\vec{v}) \int d\vec{v} f(\vec{v}) = \sqrt{2}\pi d^2 n \cdot \langle v \rangle \cdot 1 \end{aligned}$$

よって平均自由行程 l は

$$l = \frac{1}{N} \langle v \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

と得られる。これが精密値である。

- (ii) $p = nk_B T$ より

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}l\pi d^2} k_B T = \frac{1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K}}{\sqrt{2} \cdot 1 \times 10^{-2} \text{ m} \times \pi \cdot (0.3 \times 10^{-9} \text{ m})^2} = 1.04 \text{ Pa}$$

専攻 問題 7 解答

1. 拡散方程式は $t = 0$ で $x = 0$ にあった分子の t 秒後の分布 $f(x, t)$ に対し、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (D : \text{拡散定数})$$

となる。この解は、初期条件 $f(x, 0) = \delta(x)$ の下で、

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

で与えられる。これから、 t 秒後の分子の平均移動距離 $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ を求めると、

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 f(x, t) = 2Dt \quad \therefore \quad \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt}$$

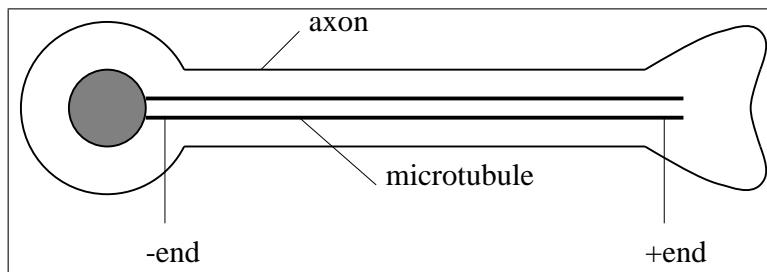
これに、 $x = 1[\mu\text{m}]$ 、 $D = 10^{-7}[\text{cm}^2/\text{s}]$ を代入すると、

$$t = 5 \times 10^{-2}[\text{s}] = 50[\text{ms}]$$

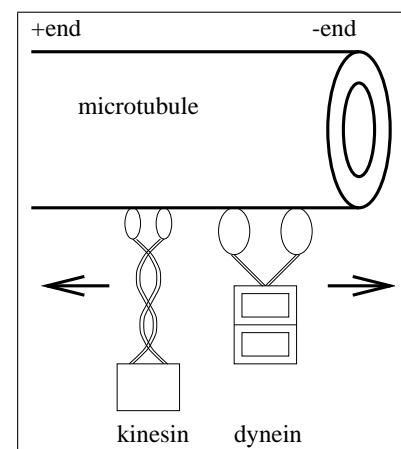
一方、 $x = 20[\mu\text{m}]$ の場合、 $t = 20[\text{s}]$ である。

2. 軸索輸送をするタンパク質には kinesin、dynein、tau protein がある。kinesin と cytoplasmic dynein による軸索 (axon) 輸送について説明する。

神経細胞の軸索には微小管 (microtubule) が通っていて、これに沿って軸索輸送が行なわれる。微小管は極性を持っていて、軸索内では細胞体側が -end になっていて、シナプス側が +end になっている。



kinesin は右図のように微小管に bind する部分と運ぶ細胞内の物質に bind する部分をもち、ATP を分解することにより、+end 方向に移動する。一方、dynein は kinesin とは逆方向の -end に向かって移動する。よって、kinesin と dynein によって相補的に軸索輸送は行なわれる。



専攻 問題 8 解答

1. ジッパー モデルでは、鎖中に連続したヘリックス部分が一ヶ所のみ許される。すべてのコンフォーメーションを考えて、統計重率を計算する。

コンフォーメーション	ヘリックスの数	統計重率
...cccc...	0	1 通り
...cchcc...	1	σs n 通り
...cchhcc...	2	σs^2 $(n - 1)$ 通り
...cch hcc...	k	σs^k $(n - k + 1)$ 通り

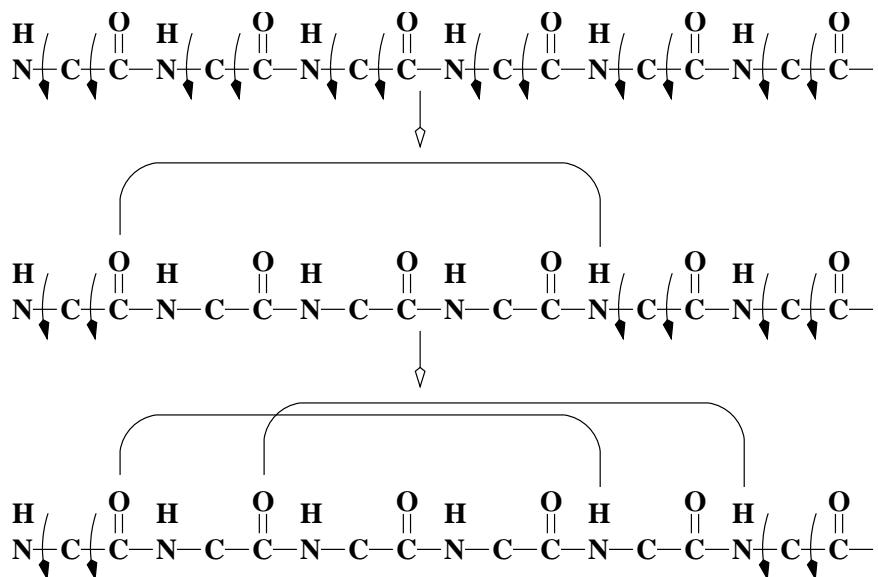
これらをすべてサムアップすると、分配関数 Z は

$$Z = 1 + n\sigma s + (n - 1)\sigma s^2 + \cdots + (n - k + 1)\sigma s^k + \cdots + \sigma s^n$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n (n - k + 1)\sigma s^k = 1 + \frac{\sigma s^2[s^n + \frac{n}{s} - (n - 1)]}{(s - 1)^2}$$

2. 球状タンパク質の天然状態は、水素結合や、ジルフィス結合、疎水性相互作用などの様々な力による大きな安定性と大きな不安定性の微妙なバランスによって保たれている。そのため、ちょっとした構造の“くずれ”でも全体のバランスを失い、構造が急激にアンフォールディング状態へと変化してしまう。

一方、ポリペプチド鎖のヘリックス構造は、数残基離れた、N-H と C=O が水素結合をすることにより成り立っている。ランダムコイル状態のポリペプチド鎖に最初のヘリックスの核ができるには、数残基が正しく固定される必要があるので、難しい。ところが、一度核が形成されると後に続くヘリックスは、一つの残基を固定するだけでヘリックス構造になることができる。このようにして合成ポリペプチド鎖のヘリックス - コイル転移は、多くの状態をとる。



3. 天然状態 (Natural) での 1 mol 当たりのエネルギーを E_N
アンフォールディング状態での 1 mol 当たりのエネルギーを E_U とする

$$[N] = A \exp\left(-\frac{E_N}{N_A} \cdot \frac{1}{k_B T}\right) = A \exp\left(-\frac{E_N}{RT}\right)$$

$$[U] = A \exp\left(-\frac{E_U}{N_A} \cdot \frac{1}{k_B T}\right) = A \exp\left(-\frac{E_U}{RT}\right) \quad \therefore R = k_B N_A$$

$$K_{N \leftrightarrow U} = \frac{[U]}{[N]} = \exp\left(-\frac{E_U - E_N}{RT}\right) = \exp\left(-\frac{\Delta G}{RT}\right) \quad \therefore \Delta G = -RT \ln K$$

4. 3 の結果から、 $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ より

$$-RT \ln K = \Delta H - T\Delta S \iff \ln K = \frac{\Delta S}{R} - \frac{\Delta H}{RT}$$

$$\frac{\partial \ln K}{\partial (1/T)} = -\frac{\Delta H}{R} \quad \therefore \Delta H = -R \frac{\partial \ln K}{\partial (1/T)}$$

5. 図 2 では、低温になるにつれて直線から外れている。これは、タンパク質がフォールディングすることにより、エントロピーが増加する効果があることを意味している。なぜそうなるのかは、アミノ酸を非極性溶媒中から水中に移す時の自由エネルギーについて考えるとわかる。
アミノ酸の側鎖には非極性のものがある。ある非極性物質を水に移す時の自由エネルギーの変化量とエントロピー変化量は、

$$\Delta G_{Tr} = -RT \ln X \quad \Delta S_{Tr} = \frac{\Delta H}{T} + R \ln X$$

で表される。ここで X はその物質の水中での溶解度である。非極性物質の ΔG_{Tr} は正であり、これは、 ΔS_{Tr} が負であるためである。なぜエントロピー変化が負なのかというと、非極性の物質が水中にあると物質のまわりの水分子が、通常よりも規則正しい構造をとるためである。これはイオンが水に溶ける時にまわりにイオン雰囲気をつくることに似ている。疎水性の物質が存在することによりそのまわりの水分子の水素結合が切られているのだから、疎水性の物質に接する水分子ができるだけ少なくしようとする力が働くことが想像される。以上から、タンパク質の天然構造を安定化させる相互作用のうち、疎水性相互作用は、エントロピーカ力だとうことがわかる。

1994 年度

1994年度 入学試験 一般教育科目

教育 英語

1. 以下の文章は科学論文の著者として守るべきことを述べたものである。各項目を和訳せよ。
 - (i) An author's central obligation is to present a concise, accurate account of the research performed as well as an objective discussion of its significance.
 - (ii) A paper should contain sufficient detail and reference to public sources of information to permit the author's peers to repeat the work.
 - (iii) An author should cite those publications that have been influential in determining the nature of the reported work and that will guide the reader quickly to the earlier work that is essential for understanding the present investigation.
 - (iv) Fragmentation of research papers should be avoided. A scientist who has done extensive work on a system should organize publication so that each paper gives a complete account of a particular aspect of the general study.
 - (v) It is inappropriate for an author to submit manuscripts describing essentially the same research to more than one journal of primary publication.
 - (vi) A criticism of a published paper may sometimes be justified; however, in no case is personal criticism considered to be appropriate.
 - (vii) Only persons who have significantly contributed to the research and paper preparation should be listed as authors. The author who submits a manuscript for publication attests to the fact that any others named as authors have seen the final version of the paper and have agreed to its submission for publication.
2. 以下の文章は、ある国際会議におけるポスターセッションでの会話である。日本語部分を英語に変えよ。

A: Hello. Is this poster yours?
B: Yes.
A: Would you mind if I ask you some questions?
B: (1) ええ、どうぞ。
A: We tried this.....
B: (2) あなたの話していることが、わかりません。
 (3) すみませんが、もう一度いっていただけませんか。
A: We tried this before — but....
B: (4) まだよくわかりません。
 (5) すみませんが、もっとゆっくり話していただけませんか。
 (6) えーと、本を読むみたいに。
A: All right. People — in my group...
B: (7) はい、わかります。
 (8) それで、ご質問は何ですか？
A: I'd like to know — how.....
B: (9) A 社の反応キット (reaction kit) を私達の研究室で改良した方法で使いました。
 (10) 方法については、3枚目の図を御覧下さい。
 (11) 精度、感度、再現性ともに優れたこの方法の詳細は、文献 4 にあります。
 (12) 測定は B 社の装置で通常の方法で行ないました。
 (13) 反応時間は 30 分です。

(14) 図 7 のグラフは、私達の結果をプロットしたものです。

(15) 二種類の細胞には反応性に大きな違いがあります。

A: My question is

B: (16) 良くわかりません。

A: (In a lower voice) Maybe it's all my fault.— I am not clear enough.

B: (17) え、なんですか。

(18) まだ何か質問があるのですか。

(19) どうぞ遠慮なくお尋ね下さい。

A: (20) この仕事は論文になっていますか。

B: (21) 投稿したところです。

(22) 受理されたら、お送りしましょうか。

A: (23) はい、是非お願いします。

(24) これが私のアドレスです。

Thank you very much for your helpful discussion.

B: (25) いえどうも。

3. 以下の文章を読み文中に述べられている内容に沿い設問に日本語で答えよ。

Hydrogen was prepared many years before it was recognized as a distinct substance by Cavendish in 1766. It was named by Lavoisier. Hydrogen is the most abundant of all elements in the universe, and it is thought that the heavier elements were, and still are, being built from hydrogen and helium. It has been estimated that hydrogen makes up more than 90% of all the atoms or three quarters of the mass of the universe. It is found in the sun and most stars, and plays an important part in the proton-proton reaction and carbon-nitrogen-oxygen cycle, which accounts for the energy of the sun and stars. It is thought that hydrogen is a major component of the planet Jupiter and that at some depth in the planet's interior the pressure is so great that solid molecular hydrogen is converted into solid metallic hydrogen. On earth, hydrogen occurs chiefly in combination with oxygen in water, but it is also present in organic matter such as living plants, petroleum, coal, etc. It is present as the free element in the atmosphere, but only to the extent of less than 1 ppm, by volume. It is the lightest of all gases, and combines with other elements, sometimes explosively, to form compounds. Great quantities of hydrogen are required commercially for the fixation of nitrogen from the air in the Haber ammonia process and for the hydrogenation of fats and oils. It is also used as a rocket fuel, for welding, for production of hydrochloric acid, for the reduction of metallic ores, and for filling balloons. It is prepared by the action of steam on heated carbon, by decomposition of certain hydrocarbons with heat, by the electrolysis of water, or by displacement from acids by certain metals. Liquid hydrogen is important in cryogenics and in the study of superconductivity as its melting point is only about ten degrees above absolute zero. In 1932, Urey announced the preparation of a table isotope, deuterium with an atomic weight of 2. Two years later an unstable isotope, tritium, with an atomic weight of 3 was discovered. Tritium has a half-life of about 12.5 years. The atom of deuterium is found mixed in with about 6000 ordinary hydrogen atoms. Tritium atoms are also present but in much smaller proportion. Tritium is readily produced in nuclear reactors and is used in the production of the hydrogen bomb.

— quoted, with modifications, from CRC Handbook of Chemistry and Physics, 1984.

- (i) 水素の地球上での最も主要な存在形態はなにか。
- (ii) 水素分子は地球大気上中にどの程度あるか。
- (iii) 水素の製造法を二つあげよ。
- (iv) 水素は実用上何の役に立っているか。二つあげよ。
- (v) 宇宙において水素は、質量比にしてどれだけ存在するか。
- (vi) 水素の同位体にはどのようなものがあり、それらの存在比はどのようにになっているか。
- (vii) 水素の融点はどの程度か。

教育 数学

1. 漸化式

$$x_{n+3} - 4x_{n+2} + x_{n+1} + 6x_n = 0 \quad \cdots (1)$$

を満たす実数列 x_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) について、以下の設問に答えよ。

(i) 漸化式 (1) を満たす数列は、最初の 3 項 x_0, x_1, x_2 を指定すれば一意的に定まる。式 (1) を変形して、

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

を満たす行列 T を求めよ。

(ii) 設問 (i) で求めた行列 T の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (ただし、 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする) を求めよ。

(iii) 設問 (ii) で求めた固有値に対応する、規格化された右固有ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ を求めよ。ただし、右固有ベクトルとは、 $T\vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i$ ($i = 1, 2, 3$) を満たすベクトルである。

(iv) x_n ($n \geq 3$) を x_0, x_1, x_2 によって表せ。

2. 微分方程式

$$\frac{d^2y(s)}{ds^2} = -K(s)y(s) \quad \cdots (2)$$

について、以下の設問に答えよ。ただし、以下で、' は s に関する微分を表すものとする。

(i) $K(s) = K_0$ (正の定数) のとき、初期条件 $y(0) = a, y'(0) = b$ に対する式 (2) の解を求めよ。

(ii) 式 (2) は、 $y_1(s) = w(s) \exp[i\psi(s)]$ および $y_2(s) = w(s) \exp[-i\psi(s)]$ の 2 つの独立解をもつ。ただし $i = \sqrt{-1}$ である。このとき、次の関係式が成り立つことを示せ。

$$w'' + Kw - \psi'^2 w = 0 \quad \cdots (3)$$

$$\psi' = \frac{c}{w^2} \quad (c \text{ は定数}) \quad \cdots (4)$$

(iii) 式 (2) の一般解は、2 つの独立解の線形結合で表される。任意の一般解に対して、 $s = s_0$ から $s = s$ までの変化を、変換行列により、

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

と表現したとき、 A, B を $w, w', \psi, w_0, w'_0, \psi_0$ で表せ。ただし、添字のない関数は $s = s$ での値、添字 0 のついた関数は $s = s_0$ での値を表すものとする。また、ここでは式 (4) の c は 1 とする。

3. 非負の実数に対して定義された関数 u を関数 w へ、以下のように変換する演算子 \mathcal{A} を考える：

$$\begin{aligned} w &= \mathcal{A}u \\ w(\xi) &= \pi^{-1/2} \int_0^\xi d\zeta (\xi - \zeta)^{-1/2} u(\zeta) \quad (\xi \geq 0) \end{aligned} \quad \cdots (5)$$

関数 w が既知のとき、関数 u を求めたい。以下の設問に答えよ。

(i) $\sin^2 t = (\zeta - \eta)/(\xi - \eta)$ と変数変換することにより、次の定積分

$$I \equiv \int_\eta^\xi d\zeta (\xi - \zeta)^{-1/2} (\zeta - \eta)^{-1/2}$$

を求めよ。ただし、 $\eta < \xi$ とする。

(ii) 式 (5) にさらに \mathcal{A} を作用させた

$$\mathcal{A}w = \mathcal{A}^2 u = \pi^{-1/2} \int_0^\xi d\zeta (\xi - \zeta)^{-1/2} w(\zeta) \quad \cdots (6)$$

を、 u の一重積分で表せ。

(iii) 設問 (ii) の結果を考慮すると、 $\mathcal{A}u = w$ から関数 u を求めるための \mathcal{A} の逆演算子 \mathcal{A}^{-1} は、具体的にどう表現されるか。

(iv) $w(\xi) = \xi^2$ の場合について、 $u = \mathcal{A}^{-1}w$ を求めよ。

教育 物理

1. 地球からロケットを発射する。ただしロケットは発射時のごく短い時間だけ噴射するものとし、飛行中のロケットの質量 m は地球の質量 M より十分に小さく、かつ一定であるとする。またロケットは質点とみなし、かつ球対称な重力場の中を運動するものとして、空気の抵抗は無視する。地球の中心からロケットまでの距離を r として、以下の問いに答えよ。ただし、数値は有効数字 2 けたまで計算するものとし、以下の数値を用いてよい。

$$\text{重力定数 } G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

$$\text{地球の質量 } M = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$\text{地球の半径 } R = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$$

- (i) 2 次元の極座標 (r, θ) においてロケットに働く力の成分を (F_r, F_θ) とすると、ロケットの運動方程式は、

$$F_r = m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \quad F_\theta = \frac{m}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)$$

のように書ける。いまの設問の場合、角運動量 L が保存することを示し、ロケットの r に関する運動方程式を、 L を用いて書き表せ。

- (ii) 地球からロケットを真上に発射する時、ロケットの力学的エネルギー E の式を書け。またロケットの地球からの離脱速度を数値的に求めよ。
- (iii) ロケットを離脱速度で真上に打ち上げた時、地上から高さ $3R$ になるまでに要する時間を数値的に求めよ。
- (iv) ロケットを距離 r の円軌道にのせたところ、地球を回る周期が T であったという。 r と T の間に成り立つ関係式(ケプラーの第 3 法則)を、(i) の運動方程式から導け。さらに円軌道の地上からの高度が $3R$ の時に T の値を求め、静止衛星の軌道(静止軌道)が $3R$ より高いか低いかを答えよ。
2. z 軸上を強さ I の定常電流が、 $z = \infty$ から座標原点まで流れている。以下のそれぞれの場合に、任意の点 P における磁場ベクトル \vec{H} を求めよ(3 つの成分、または大きさと方向を、位置の関数として示せ)。ただし点 P の位置座標としては、円柱座標では (ρ, ϕ, z) 、球座標では (r, θ, ϕ) を用いよ。
- (i) 原点に至った電流 I が、そのまま z 軸上を $z = -\infty$ へ流れ去るとき。
- (ii) 原点に至った電流 I が、原点から放射状にすべての方向に一様に広がっていくとき。磁場ベクトル \vec{H} だけでなく、原点から広がっていく電流密度ベクトル \vec{i} も位置の関数として求めよ。
- (iii) 原点に至った電流 I が、原点に点電荷 Q として溜っていくとき。この時は電場の変化に伴い、変位電流(電束電流)が生じることに注意せよ。

3. 図 1 のように、滑らかなシリンダーが多孔質の物質でできた壁でしきられ、壁の両側にはピストン 1,2 がはまっている。壁の左右には圧力差をつけることができるが、小孔を通して気体のやりとりが生じる。ピストン、シリンダーおよび多孔質の壁は断熱材でできているとして、以下の間に答えよ。

- (i) 最初は図 1 のように、ピストン 2 は壁まで押し込まれてあり、壁の左側に体積 V_0 で温度 T_0 の気体が入っていた。そこでピストン 1 にかける圧力をゆっくりと下げて、気体が体積 $8V_0$ になるまで準静的に膨張させた(図 2)。この状態での気体の温度を T_0 で表せ。ただし気体は単原子分子からなる理想気体(定積モル比熱 $\frac{3}{2}R$
 R は気体定数)として計算せよ。
- (ii) つぎに、ピストン 1 にかける圧力はそのままで、ピストン 2 にかける圧力をピストン 1 の圧力の $1/10$ まで下げて一定に保ったところ、気体は多孔質の壁を通して右に移動し、ピストン 1, 2 はゆっくりと動いて、気体はすべて壁の右側に移った。(図 3)。この過程で、気体全体のエンタルピー $H \equiv U + pV$ (U は内部エネルギー、 p は圧力、 V は体積) が保存されることを示せ。
- (iii) 気体が理想気体だと、(ii) の過程でその温度 T はどうなるか。ただし

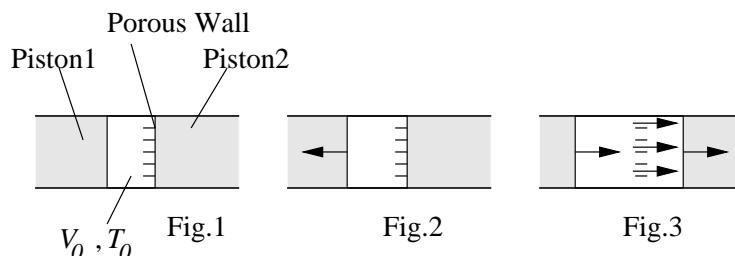
$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V$$

を公式として用いて良い。

- (iv) 気体が理想気体ではなく、状態方程式

$$pV = nRT + Bp \quad n \text{ は気体のモル数, } B \text{ は定数}$$

に従う場合に、(ii) の過程での気体の温度変化を B, V_0, T_0 および定圧熱容量 $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$ を使って表せ。ただし、始状態の温度や圧力は、設問 (i) で理想気体について得られた結果を使うこと。



教育 英語 解答

1. (i) 著者の主要な責務は、研究の意義についての客観的な議論に加え、行った研究についての簡潔で正確な記述を行なうことにある。
(ii) 論文には、著者の同業者がその研究を再現することができるよう、十分な詳細と公の情報源への照会が収められているべきである。
(iii) 著者は、公表した研究の本質を決定づけるうえで影響力のあった出版物や、その研究を理解する上で不可欠な以前の研究を読者がすみやかに見つけるための手助けとなる出版物について言及すべきである。
(iv) 断片的な論文の寄せ集め、という状態は避けられるべきである。ひとつのことがらについて広範囲にわたる研究を行った科学者は、ひとつひとつの論文が、研究全体のうちのある一つの面を完全に記述するように、出版を系統立てて行うべきである。
(v) 著者が、本質的には同じ研究を述べた原稿を、最初に公表を行った雑誌以外に投稿するのは、不適切である。
(vi) 公表された論文に対する批判は、ときには正当化されるだろう。しかし、どんなことがあっても個人向けの批判が妥当だとみなされることはない。
(vii) 研究や論文の準備に重要な貢献をした人物のみが、著者として名前を掲載されるべきである。出版用の原稿を投稿する著者は、他の著者として名前をあげられているすべての人が論文の最終版を確認したこと、それを出版用に投稿することに同意済みであることの証人なのである。
2. (1) Sure, go ahead please. / Of course, please go ahead. というのは典型的な間違いで、I don't mind. を示すために Of course not. などと言わねばならない。
(2) I don't understand what you mean are talking about.
(3) Sorry, but could you repeat it? / Excuse me, but could you explain it again?
(4) I still cannot understand you. / Still it's not clear for me.
(5) Excuse me, but would you please speak slower? /, but please speak more slowly.
(6) Uh, as if you are reading me a book. / Uh, like reading a book.
(7) Yes, I understand.
(8) So, what is your answer?
(9) We used the reaction kit of "A" corporation in a method we improved in our group. / We used the "A" corporation reaction kit and we used it with an improved method which we developed in our group.
(10) The method is shown in the figure on 3rd page. / You can see the method
(11) For further details of this highly accurate, sensitive, and reproducible method you should refer to literature 4.
(12) We measured them in a usual method with the device of "B" corporation. / The measurements were taken in a usual way.....
(13) The reaction time was 30 minutes.
(14) Figure 7 is our plotted results.
(15) There is a large difference in the reactivity between these two kinds of cell.
(16) I don't know well. / I'm not sure.
(17) What?
(18) Do you have any other answer?
(19) Please tell me without reserve.
(20) Is this work published in a paper? / Have you written this work down in any paper?
(21) I've just submitted it.
(22) Shall I send it to you when it is accepted?
(23) Yes, please.
(24) This is my address.

(25) You are welcome.

3. 全訳

1776年、Cavendish によって 1 つの元素であると認識されるずっと前から、水素は製造されていた。Lavoisier によって、水素と名付けられた。水素は宇宙においてすべての元素の中でもっとも豊富に存在しており、重元素は、水素やヘリウムから、作られ、現在でも作られていると考えられている。水素は全原子の存在比で 99 %、宇宙の全質量の 4 分の 3 を占めていると予想されている。水素は太陽やほとんどの星で見つかり、太陽や星々で発生するエネルギー源となる p-p 反応や CNO サイクルに重要な役割を果たしている。水素は木星の主成分であり、木星の内部では、高圧のため、水素が分子性固体から金属性固体へと変化している深さがあると、考えられている。地球上では主に水中で酸素と結合した形で存在するが、植物・石油・石炭等の有機物中にも存在している。水素は、大気中に分子としても存在しているが、1ppm にも満たない。水素は、全気体の中で最も軽い気体で、爆発しながら結合し化合物を作ることがある。水素は工業的にハーバーアンモニア法による空気中の窒素の固定や、油脂や石油の水素添加に大量に使用される。また、ロケット燃料や溶接、塩酸の製造、鉱石の還元、風船への充填にも使用されている。また、製造法としては、加熱炭素表面での水蒸気の反応・炭化水素の熱分解・水の電気分解・金属と酸の置換反応がある。液体水素は、低温学、また、超伝導の研究において重要である。というのも、水素の融点は約 10K しかないためである。1932 年、Urey は原子量 2 の重水素という放射性元素の存在を発見した。2 年後、原子量 3 のトリチュウムが発見された。トリチュウムの半減期は約 12.5 年である。重水素は約 6000 個の通常の水素に 1 個含まれている。トリチュウムも存在しているが、その確率は遙かに小さい。トリチュウムは原子核反応により作成され、水爆の製造に使用されている。

– CRC 物理化学ハンドブック (1984) から修正を施して引用

- (i) 酸素と化合して水として存在している。
- (ii) 容積にして 1ppm 未満である。
- (iii) 問題文中には 4 通りの製法がかかっている。

- 加熱された黒鉛(炭素)と水蒸気との反応
- ある種の炭化水素の分解
- 水の電気分解
- 酸から金属と置換。(要するに酸に金属を溶かして発生させる)

- (iv) これに対する答えも問題文中にはたくさんある。

ハーバーアンモニア法による窒素固定、油脂の水素添加
ロケット燃料、溶接、塩酸の原料、金属鉱石の還元
風船に入れる目的
低温物理、超伝導の研究用

- (v) 4 分の 3

- (vi) 質量数 2 の重水素が約 6000 分の 1。質量数 3 の三重水素がさらに微量ある。
- (vii) 約絶対 10 度

教育 数学 解答

1. (i) 行列 T により

$$T \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+3} \\ x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n \\ x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

よって

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) 固有値 λ_i は、

$$\lambda_i^3 - 4\lambda_i^2 + \lambda_i + 6 = (\lambda_i + 1)(\lambda_i - 2)(\lambda_i - 3) = 0 \quad \therefore \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

(iii) 各固有値 λ_i に対応する規格化された固有ベクトルは次の通りに求まる。

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{91}} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iv) 前問で得られた固有ベクトルを大きさを適当に調整して並べた行列

$$P \equiv \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -4 & 8 & 12 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

を用いて行列 T を対角化する。すなわち、

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_{n+2} \\ x'_{n+1} \\ x'_n \end{pmatrix}$$

と数列を変換すれば、漸化式は

$$\begin{pmatrix} x'_{n+3} \\ x'_{n+2} \\ x'_{n+1} \end{pmatrix} = P^{-1} T P \begin{pmatrix} x'_{n+2} \\ x'_{n+1} \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_{n+2} \\ x'_{n+1} \\ x'_n \end{pmatrix}$$

と簡単になる。この漸化式を解いて

$$\begin{pmatrix} x'_{n+2} \\ x'_{n+1} \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_1 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

逆変換してもとの数列にもどす。

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -4 & 8 & 12 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

簡単な代数計算の後に

$$x_n = \left(\frac{1}{2}x_0 - \frac{5}{12}x_1 + \frac{1}{12}x_2 \right) (-1)^n + \left(x_0 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 \right) 2^n + \left(-\frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \right) 3^n$$

を得る。

2. (i) 微分方程式

$$\frac{d^2y(s)}{ds^2} = -K_0 y(s)$$

は調和振動子方程式の形なので、その一般解は

$$y(s) = C_1 \cos(\sqrt{K_0}s) + C_2 \sin(\sqrt{K_0}s)$$

で与えられる。初期条件 $y(0) = a, y'(0) = b$ より、次の解を得る。

$$y(s) = a \cos(\sqrt{K_0}s) + \frac{b}{\sqrt{K_0}} \sin(\sqrt{K_0}s)$$

(ii) 与えられた y_1, y_2 の微分を求めておく。

$$\frac{dy_1}{ds} = \frac{d}{ds}[w \exp(+i\psi)] = w' \exp(+i\psi) + i\psi' w \exp(i\psi)$$

$$\frac{dy_2}{ds} = \frac{d}{ds}[w \exp(-i\psi)] = w' \exp(-i\psi) - i\psi' w \exp(-i\psi)$$

$$\frac{d^2y_1}{ds^2} = w'' \exp(+i\psi) + 2i\psi' w' \exp(+i\psi) + i\psi'' w \exp(+i\psi) - \psi'^2 w \exp(i\psi)$$

$$\frac{d^2y_2}{ds^2} = w'' \exp(-i\psi) - 2i\psi' w' \exp(-i\psi) - i\psi'' w \exp(-i\psi) - \psi'^2 w \exp(-i\psi)$$

これらを式 (2) に代入して

$$w'' + 2i\psi' w' + i\psi'' w - \psi'^2 w + Kw = 0$$

$$w'' - 2i\psi' w' - i\psi'' w - \psi'^2 w + Kw = 0$$

を得る。両辺足すと

$$w'' + Kw - \psi'^2 w = 0$$

となり式 (3) が示された。また両辺引くことにより

$$2\psi' w' + \psi'' w = 0$$

となり w をかけて変形して

$$2\psi' w' w + \psi'' w^2 = (\psi' w^2)' = 0 \quad \therefore \quad \psi' = \frac{c}{w^2}$$

となり式 (4) が示された。

(iii) 解は 2 つの基底関数の線形結合なので、変換

$$y = Ay_0 + By'_0 \quad \cdots (1)$$

は $y = y_1(s)$ だけを用いて検証すればよい。代入して計算していく。

$$w \exp(i\psi) = Aw_0 \exp(i\psi_0) + B[w'_0 \exp(i\psi_0) + i\psi'_0 w_0 \exp(i\psi_0)]$$

$$Aw_0 \exp i(\psi_0 - \psi) + B[w'_0 \exp i(\psi_0 - \psi) + i\psi'_0 w_0 \exp i(\psi_0 - \psi)] - w = 0$$

上の式が恒等的に成り立つためには実部と虚部がゼロでなくてはならない。すなわち、

$$Aw_0 \cos(\psi_0 - \psi) + B[w'_0 \cos(\psi_0 - \psi) - \psi'_0 w_0 \sin(\psi_0 - \psi)] - w = 0$$

$$Aw_0 \sin(\psi_0 - \psi) + B[w'_0 \sin(\psi_0 - \psi) + \psi'_0 w_0 \cos(\psi_0 - \psi)] = 0$$

あとはこの連立方程式を解けばよい。簡単な計算の後に次のような答を得る。

$$A = +w'_0 w \sin(\psi_0 - \psi) + \frac{w}{w_0} \cos(\psi_0 - \psi)$$

$$B = -w_0 w \sin(\psi_0 - \psi)$$

3. * ギリシャ文字がややこしいので注意。

(i) 与えられた変数変換により

$$\zeta - \eta = (\xi - \eta) \sin^2 t$$

$$\xi - \zeta = (\xi - \eta) \cos^2 t$$

$$d\zeta = (\xi - \eta) 2 \sin t \cos t dt$$

であり定積分 I は

$$I = \int_0^{\pi/2} dt (\xi - \eta)^{-1/2} (\cos t)^{-1} \cdot (\xi - \eta)^{-1/2} (\sin t)^{-1} \cdot (\xi - \eta) 2 \sin t \cos t = \int_0^{\pi/2} dt 2 = \pi$$

(ii) 式 (6) の $w(\zeta)$ を式 (5) の積分変数を η とした式で表す。

$$\mathcal{A}w = \pi^{-1/2} \int_0^\xi d\zeta (\xi - \zeta)^{-1/2} \pi^{-1/2} \int_0^\zeta d\eta (\zeta - \eta)^{-1/2} u(\eta)$$

ζ と η の積分順序を交換して

$$\mathcal{A}w = \pi^{-1} \int_0^\xi d\eta u(\eta) \int_\eta^\xi d\zeta (\xi - \zeta)^{-1/2} (\zeta - \eta)^{-1/2}$$

この 2 項目の積分は前問で得られているので結局

$$\mathcal{A}w = \int_0^\xi d\eta u(\eta) \quad \cdots (2)$$

となる。

(iii) 前問の結果の式 (2) の両辺を ξ で微分すると

$$\frac{d}{d\xi} \mathcal{A}w = \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi d\eta u(\eta) = u(\eta)$$

すなわち、この左辺は w の逆写像 $\mathcal{A}^{-1}w$ に他ならない。よって、

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{d}{d\xi} \mathcal{A}$$

と表すことができる。

(iv) 式 (6) に $w(\xi) = \xi^2$ を代入して計算していく

$$\begin{aligned} \mathcal{A}w &= \pi^{-1/2} \int_0^\xi d\zeta (\xi - \zeta)^{-1/2} \zeta^2 = 4\pi^{-1/2} \int_0^\xi d\zeta (\xi - \zeta)^{1/2} \zeta \\ &= \frac{8}{3} \pi^{-1/2} \int_0^\xi d\zeta (\xi - \zeta)^{3/2} = \frac{16}{15} \pi^{-1/2} \xi^{5/2} \end{aligned}$$

前問の結果より

$$u(\xi) = \mathcal{A}^{-1}w = \frac{d}{d\xi} \mathcal{A}w = \frac{8}{3} \pi^{-1/2} \xi^{3/2}$$

となる。

教育 物理 解答

1. (i) 地球の重力場から受ける力を代入するとロケットの運動方程式は次のようになる。

$$m[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2] = F_r = -\frac{GMm}{r^2} \quad \cdots (1)$$

$$\frac{d}{dt}[mr^2\dot{\theta}] = rF_\theta = 0 \quad \cdots (2)$$

角運動量の z 成分は $L_z = mr^2\dot{\theta}$ で表されるので、式 (2) から直ちに

$$mr^2\dot{\theta} = \text{const} = L$$

とわかる。 $\dot{\theta} = L/mr^2$ を式 (1) に代入して、 r 方向の運動方程式は

$$m\left(\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3}\right) = -\frac{GMm}{r^2} \quad \cdots (3)$$

と書き直される。

- (ii) 今、角運動量はゼロなので、式 (3) で $L = 0$ とおいた式に両辺 \dot{r} をかけて積分すると、 E を積分定数として

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} = E \quad \cdots (4)$$

となる。 E がロケットの力学的エネルギーである。離脱速度 v_1 は上の式で $E = 0, r = R$ とおいたときの \dot{r} である。

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}}{6.38 \times 10^6 \text{ m}}} \simeq 1.12 \times 10^4 \text{ m/s}$$

- (iii) 離脱速度で発射するので式 (4) で $E = 0$ であり、前問の v_1 を用いると

$$\frac{dr}{dt} = v_1 \sqrt{\frac{R}{r}} \quad \therefore dt = \frac{1}{v_1} \sqrt{\frac{r}{R}} dr$$

r が R から $4R$ になるのにかかる時間 t は、

$$\begin{aligned} t &= \int dt = \int_R^{4R} \frac{1}{v_1} \sqrt{\frac{r}{R}} dr = \frac{14}{3} \frac{R}{v_1} \\ &= \frac{14}{3} \times \frac{6.38 \times 10^6 \text{ m}}{1.12 \times 10^4 \text{ m/s}} \simeq 2700 \text{ sec} \end{aligned}$$

- (iv) 円軌道なので

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0 \quad r = \text{const} \quad \dot{\theta} = \text{const} = \omega = 2\pi/T$$

である。これらを式 (1) に代入して

$$T^2 = \frac{r^3(2\pi)^2}{GM}$$

を得る。

特に、 $r = 4R$ のとき、

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(4R)^3}{GM}} = 16\sqrt{2}\pi R \sqrt{\frac{R}{2GM}} = 16\sqrt{2}\pi \frac{R}{v_1} \simeq 40000 \text{ sec} \simeq 11 \text{ hour}$$

であるから、静止衛星の軌道は $4R$ 以上である。

2. 磁場に関するアンペールの定理より

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS \quad \cdots (5)$$

であることを用いて各問を解く

- (i) 磁場の成分は明らかに ϕ 成分(直線電流を回る方向) H_ϕ のみである。図 1 の平面で式 (5) を考えると、

$$2\pi\rho H_\phi = -I \quad \therefore H_\phi = -\frac{I}{2\pi\rho}$$

と求まる。

- (ii) これも磁場の成分は H_ϕ のみである。図 2 の 2 つの曲面でそれぞれ式 (5) を考える。角度 θ の立体角が $(1 - \cos \theta)/2$ あることを考慮すると、上の曲面では直線電流が下へ流れ、放射電流が上へ流れるので

$$2\pi\rho H_\phi = -I + I \frac{1 - \cos \theta}{2} \quad \therefore H_\phi = -\frac{I}{2\pi\rho} \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

となり、下の曲面では放射電流が下へ流れるので

$$2\pi\rho H_\phi = -I \frac{1 - \cos(\pi - \theta)}{2} \quad \therefore H_\phi = -\frac{I}{2\pi\rho} \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

となり、結局どちらでも同じである。

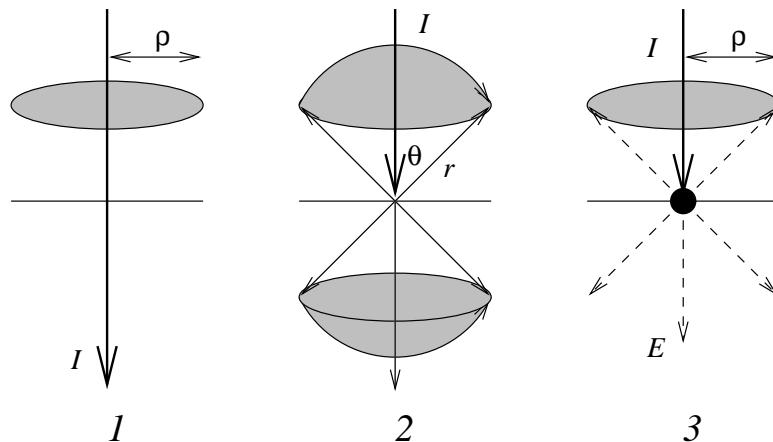
電流密度は デルタ関数とヘビサイド関数 $\theta(z)$ を用いて

$$\vec{i} = -I\delta(x)\delta(y)\theta(z)\vec{e}_z + \frac{I}{4\pi r^2}\vec{e}_r$$

と表される。

- (iii) $r = \infty$ に極板を想定すれば、 $z = 0$ の点電荷とコンデンサをなす。アンペールの定理はコンデンサ間の電場の変化を変位電流としてとらえることにより、普通にその間を電流が流れているとして扱うことができる。よってこの問題は設問 (ii) と全く同じ状況となる。

$$H_\phi = -\frac{I}{2\pi\rho} \frac{1 + \cos \theta}{2}$$



3. (i) 理想気体の断熱過程では、次の Poisson 関係が成り立つ

$$TV^{\gamma-1} = \text{Const} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$$

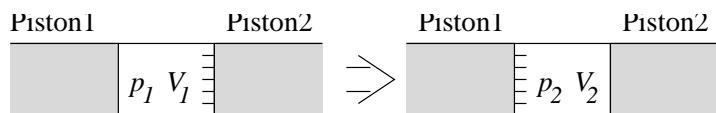
ここで、定積モル比熱 $C_v = \frac{3}{2}R$ 、定圧モル比熱 $C_p = \frac{5}{2}R$ を用いた。上の関係式より、求める温度を T_1 とすると

$$T_o V_o^{\frac{2}{3}} = T_1 (8V_o)^{\frac{2}{3}} \quad T_1 = \frac{T_o}{4}$$

- (ii) 下図のような膨張過程の際、気体は壁の左の領域から押し出されるときにピストンより $p_1 V_1$ の仕事をされ、壁の右の領域に入る時には $p_2 V_2$ の仕事をピストン 2 にしている。その時気体の内部エネルギーの変化を考えると、

$$U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2 \quad \therefore H_1 = U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2 = H_2$$

よってエンタルピーは保存する。



- (iii) (ii) の過程は、始めと終りでエンタルピーが保存しているから、その温度変化は

$$T_2 - T_1 = \int_{p_1}^{p_2} dp \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H$$

で与えられる。この被積分関数は、Maxwell の関係式などにより

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H = - \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial H} \right)_p, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + V, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial H} \right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p^{-1} = \frac{1}{C_p}$$

すなわち、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H = \frac{1}{C_p} \left[T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V \right] \quad \cdots (6)$$

で与えられる。今、気体を理想気体とすると、 $pV = nRT$ より

$$T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V = \frac{nRT}{p} - V = 0$$

よって、設問 (ii) の過程で温度変化はなく、設問 (i) で求めた温度 $T_o/4$ がこの過程を通じての気体の温度となる。

- (iv) 設問 (iii) で求めた式 (6) に、気体の状態方程式

$$pV = nRT + Bp$$

を代入すると

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H = - \frac{B}{C_p} \quad \therefore T = - \frac{B}{C_p} p + A \quad A = \text{const}$$

を得る。設問 (i) の結果より

$$\frac{T_o}{4} = - \frac{B}{C_p} p_1 + A \quad p_1 = \frac{1}{32} p_o$$

であったので、設問 (ii) の過程の終状態における温度は、

$$T = - \frac{B}{C_p} \frac{p_1}{10} + A = \frac{9}{320} \frac{B}{C_p} p_o + \frac{T_o}{4}$$

となる。

B の正負によって、 $\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H$ の正負が決まり、よって、設問 (i) の前後での温度の増減が定まる。

1994 年度 入学試験 物理専門科目

専攻 問題 1

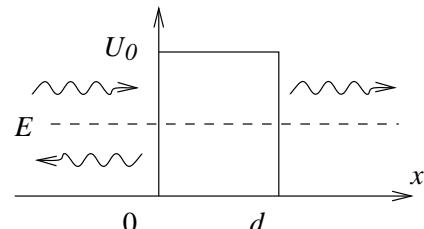
1. 右図のように $0 < x < d$ で $U(x) = U_0$ 、それ以外は $U(x) = 0$ であるような一次元のポテンシャルの壁に、左側の無限遠から質量 m 、エネルギー $E = U_0/2$ の粒子が入射するものとして、以下の間に答えよ。

(i) 一般に、有界な 1 次元のポテンシャルの不連続点で波動関数が満たすべき条件をあげ、その理由を述べよ。

(ii) 右図の条件に対応する波動関数の領域 $x \leq 0$ における形を

$$\psi = e^{ikx} + \beta e^{-ikx} \quad \text{ここで } k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

とする。 β は未知係数である。同様に、 $0 < x < d, d \leq x$ における波動関数をそれぞれ適当な未知係数を用いて表せ。



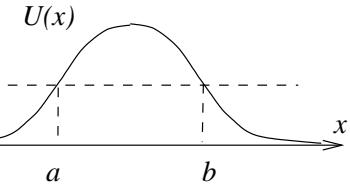
(iii) 透過率を T とする。次式を示せ。

$$T = \frac{1}{\sinh^2(kd) + 1} \quad \cdots (1)$$

2. WKB 法の近似によれば、右図のような 1 次元の滑らかなポテンシャル障壁 $U(x)$ に左側の無限遠から質量 m 、エネルギー E の粒子が入射するものとして、透過率 T は $T \ll 1$ の場合

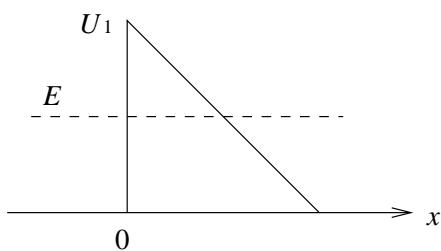
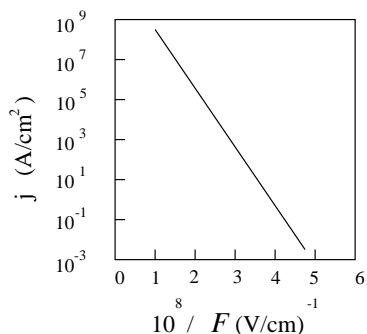
$$T \simeq \exp \left[-2 \int_a^b q(x) dx \right] \quad q(x) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U(x) - E)} \quad \cdots (2)$$

で与えられる。以下の間に答えよ。



(i) 設問 1 のポテンシャルは滑らかでないが、 $T \ll 1$ の場合は式 (1) E の T は数係数を除き WKB 法の近似式 (2) と一致することを示せ。

(ii) 金属の表面に強い電場を加えると電子が放出される現象を電界放出という。電界放出による電流密度 j と電場 F の間には、左下の図に示すような関係があることが知られている。この現象の簡単なモデルとして、 $x = 0$ を金属の表面、 $x < 0$ を金属の内部とし、電子に対するポテンシャルを右下の図に示すように $x < 0$ で $U(x) = 0$ 、 $0 \leq x \leq 0$ で $U(x) = U_1 - eFx$ とする。ここで、 e は電子の電荷の絶対値である。金属内部で電子は一定のエネルギー E ($0 < E < U_1$) をもち、 x 軸と平行に運動するものとする。電子の質量を m とし、WKB 法の近似式 (2) を用いて透過率を求め、電流密度は透過率に比例するとして、左下の図の関係を説明せよ。

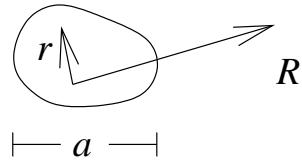


専攻 問題 2

三次元空間のある限られた領域(広がり幅を a とする)に電荷が分布し、振動数 ν で振動している場合の電磁波の放射を考える。右図のように座標をとって、電荷密度を $\rho(\vec{r}, t)$ 、電流密度を $\vec{j}(\vec{r}, t)$ とおくと、時刻 t 、観測点 \vec{R} におけるスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \vec{A} の遅延解は、

$$\phi(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}, t - |\vec{R} - \vec{r}|/c)}{|\vec{R} - \vec{r}|} d^3r \quad \cdots (1)$$

$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}, t - |\vec{R} - \vec{r}|/c)}{|\vec{R} - \vec{r}|} d^3r \quad \cdots (2)$$



と書ける。ただし、 c は真空中の光の速さ、 ϵ_0 と μ_0 はそれぞれ真空の誘電率と透磁率である。式 (1),(2) の積分で、時刻に関する引数が “ $t - |\vec{R} - \vec{r}|/c$ ” となっているのは位置 \vec{R} 、時刻 t における電磁波の強さが、電磁波の伝搬に必要な時間、 $|\vec{R} - \vec{r}|/c$ 、だけ前の時刻の電荷及び電流の分布に依存することを示している。

いま、電荷の分布している領域から観測点までの距離が電荷の広がりより十分大きく ($R \gg a$)、また、放射される電磁波の波長が電荷の広がりより十分大きい ($c/\nu \gg a$) 場合を考える。このとき、式 (1) の積分における電荷密度分布は、

$$\rho(\vec{r}, t - |\vec{R} - \vec{r}|/c) \approx \rho(\vec{r}, t') + \frac{\partial \rho}{\partial t'} \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{cR} \quad \cdots (3)$$

と近似できる。ただし、 $R \equiv |\vec{R}|$ 、 $t' \equiv t - R/c$ である。さらに、 $R \gg c/\nu$ が満たされると、 ϕ と \vec{A} はそれぞれ、

$$\phi(\vec{R}, t) \approx \frac{\int \rho(\vec{r}, t') d^3r}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{\partial}{\partial t'} \int \frac{\vec{R} \cdot \vec{r} \rho(\vec{r}, t')}{4\pi\epsilon_0 c R^2} d^3r = \frac{\int \rho(\vec{r}, t') d^3r}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{d}(t')}{4\pi\epsilon_0 c R^2} \quad \cdots (4)$$

$$\vec{A}(\vec{R}, t) \approx \int \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t')}{4\pi R} d^3r = \frac{\mu_0 \vec{d}(t')}{4\pi R} \quad \cdots (5)$$

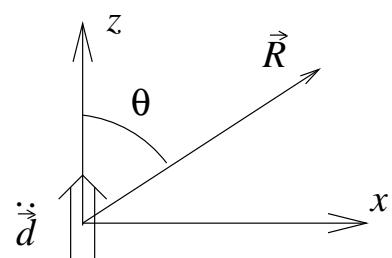
と近似できる。ただし、 \vec{d} は双極子モーメント $\vec{d} (\equiv \int \vec{r} \rho d^3r)$ を t' ($\equiv t - R/c$) について微分したものである。このとき、電場の強さ \vec{E} 、磁束密度 \vec{B} は、それぞれ、

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 \vec{R} \times (\vec{R} \times \vec{d})}{4\pi R^3} \quad \cdots (6)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{d} \times \vec{R}}{4\pi c R^2} \quad \cdots (7)$$

と近似できる。ただし、 \vec{d}' は \vec{d} を t' について微分したものである。以下の間に答えよ。

1. 式 (3) を導け。
2. 式 (7) を導け。
3. 右図のように、 \vec{d}' を z 軸方向、 \vec{R} を xz 平面内にとる。同様の図を描き、位置 \vec{R} における電場 \vec{E} と磁束密度 \vec{B} の方向を図示せよ。さらに、ポインティングベクトル \vec{P} の方向も同じ図に書き込み、その大きさを θ の関数として求めよ。ただし、 \vec{d}' と \vec{R} のなす角を θ とする。
4. 単位時間あたりの全放射強度を求めよ。



専攻 問題 3

磁場 H 中での大きさ $J (= 1/2, 1, 3/2, \dots)$ のスピンのエネルギー固有値 ε_m は、

$$\varepsilon_m = g\mu_B H m, \quad (m = -J, -J+1, \dots, J-1, J)$$

で与えられる。ここで、 m は磁気量子数、 g は g 因子、 μ_B はボーア磁子である。このようなスピンを単位体積中に n 個含み、温度 T の熱平衡状態にある系について、以下の間に答えよ。ただし、ボルツマン定数を k とし、スピンの間の相互作用は考えない。

- この系の単位体積あたりの分配関数は次式で与えられることを示せ。

$$Z = \left(\frac{\sinh[(2J+1)x/2J]}{\sinh(x/2J)} \right)^n, \quad x = \frac{g\mu_B J H}{kT}$$

- この系の単位体積あたりの比熱 C を次式で定義されるブリルアン関数 $B_J(x)$ の導関数を用いて表せ。

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{x}{2J}\right)$$

- 温度が (a) 高い場合 ($x \ll 1$) と (b) 低い場合 ($x \gg J$) について、比熱 C の近似形を求めよ。
- 前問の結果に基づき、 $J = 1/2$ に対して、比熱 C の温度依存性の概略を図示し、このような温度依存性となる物理的理由を述べよ。なお、図は縦軸を C/nk 、横軸を $kT/g\mu_B J H$ とせよ。
- 古典スピンの極限(積 $g\mu_B J$ が一定のまま $J \rightarrow \infty, g\mu_B \rightarrow 0$ とした場合)における比熱 C を求めよ。さらに、その温度依存性の概略を示せ。なお、図は前問同様、縦軸を C/nk 、横軸を $kT/g\mu_B J H$ とせよ。

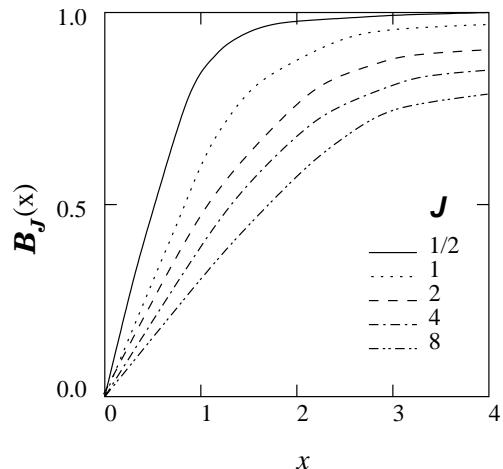
(参考) ブリルアン関数

右図に $J = 1/2, 1, 2, 4, 8$ に対するブリルアン関数を示す。

近似式(証明なしに用いてよい)

$$B_J(x) \approx \begin{cases} \frac{J+1}{3J}x & (x \ll 1) \\ 1 - \frac{1}{J} \exp\left(-\frac{x}{J}\right) & (x \gg J) \end{cases}$$

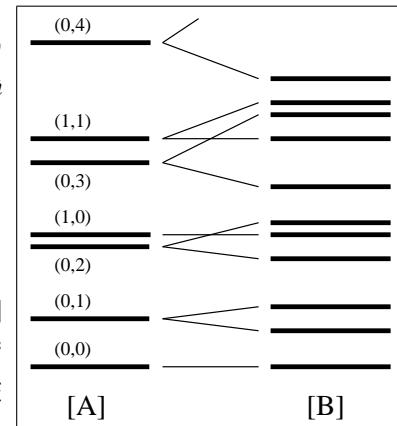
$$\coth(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{x}{3} & (x \ll 1) \\ 1 + 2e^{-2x} & (x \gg 1) \end{cases}$$



専攻 問題 4

原子核の殻模型では、原子核の中の核子(陽子と中性子)は、他の核子からの力の平均として、一つの引力ポテンシャルの中で独立に運動していると考える。このポテンシャルが作るエネルギー準位に、陽子と中性子を別々に、パウリの排他律に従ってエネルギーの低い順に詰めていくことにより、原子核が構成される。エネルギー準位間の間隔はポテンシャルの形によるが、一般に等しくはない。上の準位との間隔が特に大きな準位がちょうど一杯になる様な原子核は安定であり、原子核の性質がそこで不連続に変わる。この様な原子核は閉殻を成すという。実験によると、陽子または中性子の数が $2, 8, 20, 28, 50, 82, \dots$ (これらの数を魔法数という) である原子核が閉殻をつくることが知られている。

1. ポテンシャルによる力が中心力の場合、エネルギー準位は動径方向の波動関数に関する量子数 n と軌道角運動量 l (以後、角運動量は全て \hbar を単位とする) との組 (n, l) で指定できる。
 - (i) 量子数 n による縮退がないとき、エネルギー準位 (n, l) に入り得る中性子の数は幾つか。中性子のスピン $s = 1/2$ を考慮せよ。
 - (ii) 中心力のポテンシャルの形を原子核の密度分布に近い形に取ると、低い方のエネルギー準位はおよそ、右の図の [A] のようになる(図では、準位が (n, l) で指定してある)。このとき下から 6 番目までの各準位にはいる中性子の個数を書け。また、閉殻を成す原子核の中性子数は幾つになるか、小さい方から 4 番目まで書け。
2. 中心力のポテンシャルのみでは、前問のように、28 以上の魔法数を説明できない。そこで、前問のポテンシャルにスピン軌道相互作用のポテンシャル $V_1 = -A(\vec{l} \cdot \vec{s})$ を加える。ただし、 A は正の定数とし、 \vec{l} および \vec{s} はそれぞれ中性子の軌道角運動量およびスピンの演算子である。このとき、この中性子の全角運動量は、 $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ となり、そのエネルギー準位は、 n, l と全角運動量の量子数 j の組 (n, l, j) で指定できる。この準位に入り得る中性子の数は、 $2j + 1$ である。
 - (i) 中性子の状態 (n, l, j) に関するスピン軌道相互作用の演算子 $(\vec{l} \cdot \vec{s})$ の期待値を求めよ。
 - (ii) スピン軌道相互作用の強さ A を適当に取るとエネルギー準位は分離して図の [B] のようになる。下から 7 番目までの準位について低い方から順に (n, l, j) を書き、それらの各準位に入る中性子の数を書け。
3. 原子核 $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$ (陽子数 $Z = 20$, 中性子数 $N = 21$) と $^{41}_{21}\text{Sc}_{20}$ ($Z = 21, N = 20$) の基底状態のスピン(原子核全体の全角運動量)と磁気能率を、これまでの設問で考察したような模型で求める。閉殻を構成している核子は、これらの量には関与しないとする。この問題では、磁気能率は、核磁子 $\mu_N = e\hbar/2M_p$ を単位とする(e と M_p は陽子の電荷と質量である)。
 - (i) 原子核 $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$ と $^{41}_{21}\text{Sc}_{20}$ の基底状態のスピンを求めよ。
 - (ii) 原子核の磁気能率の大きさ μ は、磁気能率の演算子 $\vec{\mu}$ の z 成分の、磁気量子数 $m_j = j$ の状態での期待値と定義されている。状態 (n, l, j) の核子は、その軌道運動により $g_l \vec{l}$ 、スピンにより $g_s \vec{s}$ の磁気能率をもつので、その磁気能率の演算子はこれらのベクトル和 $\vec{\mu} = g_l \vec{l} + g_s \vec{s}$ となる。ただし、係数 g_l と g_s は核子の軌道運動量とスピンの g 因子と呼ばれる。演算子 μ_z の状態 (n, l, j) での期待値は、その状態での $\langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle / \langle j^2 \rangle$ の期待値で与えられることを使って、 $\langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle$ を l, s, j と g_l, g_s で表し、 μ を求めよ。
 - (iii) 中性子の軌道運動は中性子が電荷を持たないので磁気能率に寄与せず($g_l = 0$)、陽子に対しては、 $g_l = 1$ である。測定された中性子と陽子のスピンの g 因子はそれぞれ $g_s = -3.8$ 、 $g_s = 5.6$ である。原子核 $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$ と $^{41}_{21}\text{Sc}_{20}$ の基底状態の μ を計算せよ。



専攻 問題 5

図 1 のように質量がそれぞれ、 $m, M(m < M)$ である 2 種の原子を交互に配置した鎖状の 1 次元格子の振動を考える。ポテンシャルは各最近接原子間のみに働き、微小な平衡位置からのずれに対して調和型であり、原子は鎖の方向にだけ変位すると仮定する。以下の設問に答えよ。

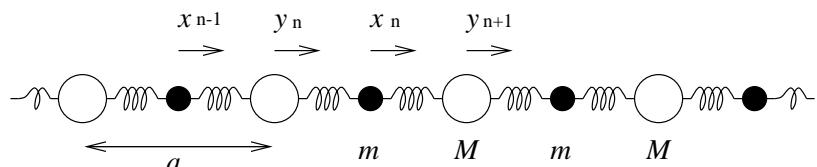
1. 原子間のポテンシャルのばね定数を k 、 n 番目の単位胞内の質量 m の原子の変位を x_n 、 質量 M の原子の変位を y_n とするとき、それらの運動方程式はどのようになるか？
2. この系の基準振動は一般に、

$$x_n = A \exp(-i\omega t) \exp(inqa)$$

$$y_n = B \exp(-i\omega t) \exp(inqa)$$

と表すことができる。ここで、 t は時間、 ω は角振動数、 q は波数、 a は原子間の距離の 2 倍である。 A と B の満たす関係式を導け。

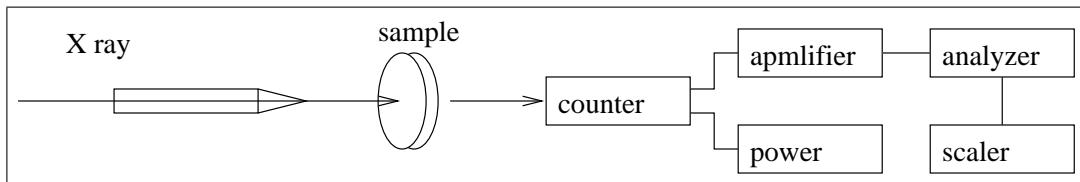
3. ω は q のどの様な関数になるか？ またその関係 $\omega(q)$ を図で示せ。図には波数 q が 0, および π/a のときの ω の値を記入すること。
4. $q = \pi/a$ のときの基準振動に対応する各原子の変位を図示し、このときの振動数 ω がなぜそのような値をとるかについて考察せよ。
5. m が M に比べて極めて小さいとき、この格子系の振動はどのような特徴を示すか考察せよ。またそのような特徴がなぜ出現するかについて、理由を考えてみよ。



専攻 問題 6

X 線の吸収に関する実験について次の問い合わせに答えよ。

1. 単色化した Cu - K_α 線(波長 $\lambda_K = 0.1542 \text{ nm}$)をコリメーターを用いて細いビームにし、その強度を充分広い検出窓を持つシンチレーションカウンターで測定する図 1 のような装置を作った。



このビームの中に表面積の充分大きい、0.1 mm の一様な厚さを持つシリコン薄板試料をその表面がビームに垂直になるようにセットして、その枚数 n を変えながら透過するビームの強度 I を測定し右の表の結果を得た。また、シリコンのかわりに X 線を通さない鉛板を置いてバックグラウンドを測定した結果、60 秒間に 98 カウントが計測された。入射強度 I_0 の X 線が、吸収係数 μ 、厚さ t の物質を透過した後の強度は $I = I_0 \exp(-\mu t)$ と表される。実験結果に関する次の問い合わせに答えよ。ただし、 $\ln 10 = 2.30$ 、 $\log_{10} 2 = 0.301$ 、 $\log_{10} 3 = 0.477$ とする。

n (枚)	I (カウント)	測定時間(秒)
0	78,018	1
1	48,106	1
2	18,065	1
3	22,195	5
4	10,891	10
5	8,010	30
6	3,924	60

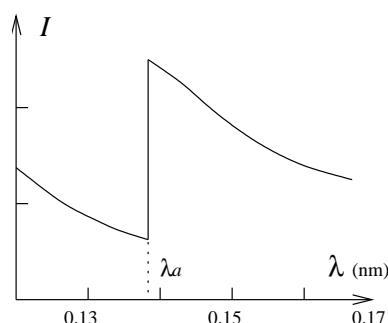
- (i) 実測した透過ビーム強度をシリコン薄板の厚さ t に対して調べてみると、枚数が少ないと実測値は上の式からはずれている。その原因は何か議論せよ。
- (ii) シリコンの吸収係数 $\mu [\text{mm}^{-1}]$ 、および入射強度 I_0 [カウント/秒] を、10% 程度の精度で求めよ。
- (iii) 厚さ 0.025 mm の金属薄膜を 1 と同じ条件の X 線ビームの中に挿入してその透過強度を測定したところ、10 秒間に 30,300 カウント計測された。この金属の吸収係数を求めよ。また、次の各金属の Cu - K_α 線に対する吸収係数 (mm^{-1}) の値を参照して、この金属は次のうちどれか推定せよ。

Ti (93) V (136) Cr (186) Fe (255) Co (315) Ni (44)

2. 使用する X 線を Cu - K_α 線から Mo - K_α 線(波長 0.0711 nm)に換えたとき、正しく信号を取り出すためにシンチレーションカウンターの計測回路中調整すべき点を挙げよ。

3. 試料として銅の薄膜を用い、今度は入射 X 線の波長を連続的に変化させながらその透過強度を測定し右図の結果を得た。

- (i) 図中で波長 $\lambda_a = 0.1381 \text{ nm}$ に見られる大きな強度の不連続点は何と呼ばれるか。
- (ii) 1 における X 線発生管の銅のターゲットから発生する Cu - K_α 線(波長 $\lambda_K = 0.1542 \text{ nm}$)とこの $\lambda_a = 0.1381 \text{ nm}$ との間には $\lambda_K > \lambda_a$ の関係があるが、このことを X 線の発生を吸収の機構をもとに説明せよ。



専攻 問題 7

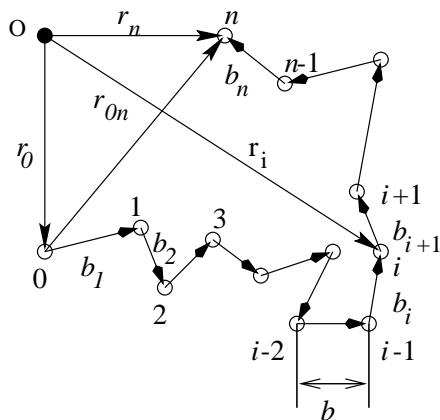
生物の細胞分化に関する次の文章を読んで、それにつづく間に簡潔に答えよ。

ヒトの脳は約 100 億の神経細胞からできているがヒトの遺伝子の総数は約 10 万に過ぎない。このように多細胞生物に細胞の数に比べて遺伝子の数は極めて少ない。多数の細胞の細胞分化とその個性を少数の遺伝子によって決定せねばならないというこの困難を、生物は進化の過程で「(転写制御) 遺伝子の組合せによるコーディング (Combinatorial Coding)」という機構を獲得することによって克服した。

1. 生物が少数の遺伝子の組合せによる細胞の分化・多様性を実現しているという事実について考えてみよう。
 - (i) 各遺伝子の ON/OFF の組合せで 100 億の脳細胞の一つ一つに "番号づけ" をするとしたら、遺伝子は何個以上必要か? $\log_{10} 2 = 0.3$ とせよ。
 - (ii) 上で計算した最小に近い数の遺伝子ですべての脳細胞の分化を実現したとすると、その生物は進化の過程で不利であると予想される。その理由を述べよ。
 - (iii) 遺伝子 A と B が ON で、かつ C が OFF の時に遺伝子 X の転写活性が高まるという場合、遺伝子 X の調節領域でどの様な分子機構が働いているかを予想して述べよ。特に転写調節のレベルで考えられる可能性をあげよ。
2. 生物における「組合せによるコーディング」のもう一つの例は遺伝子の本体である DNA にみられる。現在地球上の生物の DNA は、A(アデニン)・T(チミン)・G(グアニン)・C(シトシン) の 4 塩基の"文字列" ですべての情報を暗号化している。
 - (i) DNA が 2 塩基 (P と Q と名づける) のみから構成される生物が宇宙のどこかに存在するとしたら、P と Q との間にはどの様な関係があると期待されるか?
 - (ii) この宇宙生物が 2 塩基組成の RNA を介して 20 種類のアミノ酸からなるタンパク質をコードするとしたら、遺伝暗号表はどの様なものになると予想されるか?
 - (iii) 2 つの塩基のみからなる DNA を持つこの宇宙生物が、4 塩基 DNA を持つ地球上の生物に比べて生存に不利な点をあげよ。
 - (iv) タンパク質についても同様に考えてみよう。2 種のアミノ酸のみからなるタンパク質で構成される生物が存在し得るか? タンパク質の構造と機能の多様性を実現するのに何種類のアミノ酸が必要かを推論し、その理由を述べよ。

専攻 問題 8

核酸やタンパク質分子は、ヌクレオチドやアミノ酸を骨格要素とする直鎖状高分子である。図は $(n+1)$ 個の骨格要素からなる直鎖状高分子のコンフィギュレーションを描いたものである。骨格要素は円で示されている。 i 番目の骨格要素の位置ベクトルを \vec{r}_i 、 $i-1$ 番目と i 番目の骨格要素をつなぐ結合ベクトルを \vec{b}_i とする。結合ベクトルの大きさはすべて b である。以下の設問に答えよ。



- 結合ベクトルの向きが互いに完全にランダムである鎖を自由連結鎖という。自由連結鎖について、 $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j$ の期待値である $\langle \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \rangle$ を求めよ。
- 鎖の両末端を結ぶベクトルを $\vec{r}_{0n} = \vec{r}_n - \vec{r}_0$ とする。自由連結鎖の両末端距離の 2 乗の平均 $\langle \vec{r}_{0n}^2 \rangle$ を求めよ。
- 鎖の広がりを表す回転半径 R_G は、各骨格要素と鎖の重心との距離の 2 乗の平均の平方根で定義される。 R_G が、

$$R_G = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{0 \leq i < j \leq n} \left\langle \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j \right)^2 \right\rangle \right)^{1/2}$$

で与えられることを用いて、 $n \rightarrow \infty$ での R_G と $\langle \vec{r}_{0n}^2 \rangle$ との関係を示せ。

- 大腸菌ゲノムの大きさは、 5×10^6 塩基対である。ゲノム DNA 分子を塩基対を骨格要素とする自由連結鎖とみなし、 R_G および $\langle \vec{r}_{0n}^2 \rangle^{1/2}$ を有効数字 1 衔で求めよ。なお、DNA 2 重らせんの塩基対間距離は 0.3nm である。
- 実在する DNA 分子は、隣り合う塩基対同士の連絡が自由でないので、塩基対を骨格要素とする自由連結鎖とみなすことはできない。しかし、実在する DNA 分子の十分に離れた塩基対どうしはあたかも自由に連結されているかのようにふるまう。したがって、長さが n 塩基対の実在 DNA 分子は、 n が十分に大きいとき、 n/a 個の仮想的な骨格要素を長さ ab の仮想的な結合で連結した自由連結鎖とみなすことができる。実験によると、生理的条件では $a = 500$ である。大腸菌のゲノム DNA 分子を仮想的な骨格要素からなる自由連結鎖と考え、 R_G および $\langle \vec{r}_{0n}^2 \rangle^{1/2}$ を有効数字 1 衔で求めよ。
- 大腸菌の大きさは約 $1\mu\text{m}$ である。この大きさと設問 5 で得られたそのゲノム DNA 分子の大きさとを比較し、両者の違いの生物学的意味について述べよ。
- 直鎖高分子の溶液中の大きさを測定する実験方法を二つあげ、その原理と方法を具体的に述べよ。

専攻 問題 1 解答

1. (i) Schrödinger 方程式

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + U(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

より、 $\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2}$ は明らかに potential の不連続点 $x = x_0$ で不連続。

Schrödinger 方程式を、potential の不連続点 $x = x_0$ の近傍 $[x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_1]$ で積分すると、

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \int_{x_0 - \delta_2}^{x_0 + \delta_1} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} dx + \int_{x_0 - \delta_2}^{x_0 + \delta_1} [U(x) - E] \psi(x) dx = 0$$

で、potential $U(x)$ は有界だから、左辺第 2 項 $= O(\delta_1) + O(\delta_2)$ 、 $\delta_1, \delta_2 \rightarrow +0$ で $\rightarrow 0$ である。したがって

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{x_0 - \delta_2}^{x_0 + \delta_1} = O(\delta)$$

すなわち、 $\delta_1, \delta_2 \rightarrow +0$ の極限で、

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x_0 + 0} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x_0 - 0}$$

が必要。

また波動関数を確率的に解釈するために波動関数の連続性

$$\psi(x_0 + 0) = \psi(x_0 - 0)$$

が必要。

(ii) 領域 $0 < x < d$ では Schrödinger 方程式は、

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi(x) = \frac{mU_0}{\hbar^2}\psi(x) = k^2\psi(x)$$

だから、波動関数は未知係数 A, B を用いて

$$\psi(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

と書ける。

領域 $x > d$ では Schrödinger 方程式は、

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}E\psi(x) = -\frac{mU_0}{\hbar^2}\psi(x) = -k^2\psi(x)$$

だから、波動関数は未知係数 C を用いて

$$\psi(x) = Ce^{ik(x-d)}$$

と書ける。 e^{-ikx} の項は $x = \infty$ から x のマイナス方向への進行波なので物理的考察から排除される。

(iii) current は

$$j = \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left(\psi^*(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi \right)$$

で与えられるので、

$$\psi_{\text{in}} = e^{ikx}, \quad \psi_{\text{ref}} = \beta e^{-ikx}, \quad \psi_{\text{tr}} = C e^{ik(x-d)}$$

を用いて計算すると、透過率は

$$\frac{j_{tr}}{j_{in}} = |C|^2$$

で与えられる。

さてここで、 $x = 0$ と $x = d$ での境界条件から、

$$1 + \beta = A + B$$

$$i(1 - \beta) = A - B$$

$$Ae^{kd} + Be^{-kd} = C$$

$$Ae^{kd} - Be^{-kd} = iC$$

である。これらの 4 つの変数についての 4 つの式を、 β, C について解くと

$$\beta = -itanh(kd) \quad C = sech(kd) = \frac{1}{\cosh(kd)}$$

である。

したがって、透過率 T は

$$T = cosech^2(kd) = \frac{1}{\sinh^2(kd) + 1}$$

である。

2. (i) 近似式 (2) で透過率を求める

$$T \cong \exp \left[-2 \int_0^d \frac{dx}{\hbar} \sqrt{2m \left(U_0 - \frac{U_0}{2} \right)} \right] = \exp \left[-2 \int_0^d \frac{dx}{\hbar} \sqrt{2mE} \right] = \exp \left[-2 \int_0^d k dx \right] = e^{-2kd}$$

である。

一方、 $1 \ll kd$ のとき

$$1 \ll \cosh^2(kd) \cong \frac{e^{2kd}}{4}$$

であるから、設問 1 で求めた透過率は

$$4e^{-2kd}$$

である。

(ii) 電子のポテンシャル

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ U_1 - eFx & (x > 0) \end{cases}$$

(U_1 :金属の仕事関数 ; F : 電界)

エネルギー E ($< U_1$) の金属内電子がトンネル効果で抜ける必要のある場所は $x = 0$ から $x = \frac{U_1 - E}{eF}$ までである。

$$\begin{aligned} T &\cong \exp \left[-2 \int_0^{\frac{U_1 - E}{eF}} \frac{dx}{\hbar} \sqrt{2m(U_1 - eFx - E)} \right] \\ &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \left[-\frac{2}{3} (2m(U_1 - E - eFx))^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2meF} \right]_0^{\frac{U_1 - E}{eF}} \right] \\ &= \exp \left[-\frac{2}{3m\hbar eF} \{2m(U_1 - E)\}^{3/2} \right] \end{aligned}$$

だから、

$$\log_{10} j = \log_{10} T + \text{const} = \frac{1}{\ln 10} \left[-\frac{2}{3m\hbar eF} \{2m(U_1 - E)\}^{3/2} \right] + \text{const}$$

で、 $1/F$ に比例してさがる。これはグラフの結果と一致する。

専攻 問題 2 解答

1. $R \gg a$ 、すなわち $|\vec{R}| \gg |\vec{r}|$ の条件では

$$\frac{|\vec{R} - \vec{r}|}{c} \simeq \frac{R}{c} - \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{cR}$$

と近似できる。ところで、 ρ の時間変化 (すなわち t による変化) の周期は放射される電磁波の周期 $1/\nu$ と同じ程度と考えられるが、 $a/c \ll 1/\nu$ なので、 r/c 程度の時間での ρ の変化分は ρ の時間による Taylor 展開の 1 次の項で近似できる。よって、

$$\rho(r, t - |\vec{R} - \vec{r}|/c) \simeq \rho(r, t - \frac{R}{c} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{cR}) \simeq \rho(r, t') + \frac{\partial \rho}{\partial t'} \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{cR}$$

2. 式(5)で表されるベクトルポテンシャル \vec{A} に対して磁場 \vec{B} は $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ である。

$$\begin{aligned} \partial_i A_j &= \frac{\mu_0}{4\pi R} \cdot \ddot{d} \left(t - \frac{R}{c} \right)_j \left(-\frac{1}{c} \right) \left(\frac{R_i}{R} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \dot{d} \left(t - \frac{R}{c} \right)_j \frac{-R_i}{R^3} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi c R^2} \cdot R_i \cdot \left(\ddot{d}(t')_j + \frac{c}{R} \dot{d}(t')_j \right) \\ \therefore \text{rot } \vec{A} &= (\epsilon_{ijl} \partial_i A_j) = -\frac{\mu_0}{4\pi c R^2} \cdot \vec{R} \times \left(\ddot{d} + \frac{c}{R} \dot{d} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi c R^2} \cdot \left(\ddot{d} + \frac{c}{R} \dot{d} \right) \times \vec{R} \end{aligned}$$

となる。この () の中の 2 つの項の大きさを比較する。 $|\ddot{d}| \sim |\ddot{d}|/\nu$ であるから後ろの項は

$$|\frac{c}{R} \dot{d}(t')| \sim \frac{c}{R\nu} |\ddot{d}| \ll |\ddot{d}|$$

となるので前の項に対して無視できる。よって、

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{d} \times \vec{R}}{cR^2}$$

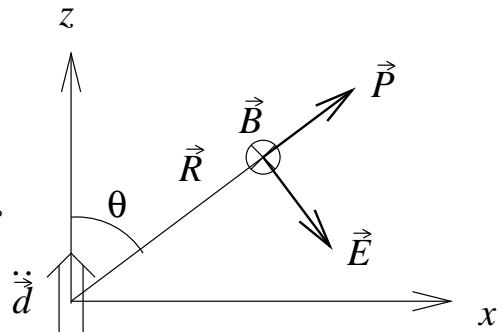
3. $\vec{B} \propto \vec{d} \times \vec{R}$ で、 \vec{d}, \vec{R} とも xz 平面に平行なため、 \vec{B} は xz 平面に垂直。方向は紙面上から下。

$\vec{E} \propto \vec{B} \times \vec{R}$ となり、 \vec{B}, \vec{R} に垂直。

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{\mu_0(\vec{R} \times (\vec{R} \times \ddot{d})) \times (\ddot{d} \times \vec{R})}{16\pi^2 c R^5}$$

方向は、 \vec{E} と \vec{H} が互いに垂直のため、直ちに図の方向とわかる。大きさは、 \vec{R} と $(\vec{R} \times \ddot{d})$ が垂直なので、

$$|\vec{R} \times (\vec{R} \times \ddot{d})| = |\vec{R}|^2 |\ddot{d}| \sin \theta$$



となり、結局、

$$|P| = \frac{\mu_0 R^3 |\ddot{d}|^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c R^5} = \frac{\mu_0 |\ddot{d}|^2}{16\pi^2 c R^2} \sin^2 \theta$$

この様子を右図に記す。

4. 3 の \vec{P} は、原点を中心とする半径任意の球面に垂直である。よって flux の総量は、 $|\vec{P}|$ をこの球面で積分すれば良い。全 flux を F として、

$$F = R^2 2\pi \int_0^\pi |\vec{P}| \sin \theta d\theta = R^2 2\pi \frac{\mu_0 |\ddot{d}|^2}{16\pi^2 c R^2} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta = \frac{\mu_0 |\ddot{d}|^2}{6\pi c}$$

専攻 問題 3 解答

1. 各スピン間の相互作用は考えないので、全系の分配関数は 1 つのスピンの分配関数の n 乗である。

$$\begin{aligned} Z &= \left(\sum_{m=-J}^J \exp\left(\frac{g\mu_B H}{kT} m\right) \right)^n = \left(\sum_{m=-J}^J \exp\left(\frac{x}{J} m\right) \right)^n = \left(\frac{e^{-Jx/J}(e^{(2J+1)x/J} - 1)}{e^{x/J} - 1} \right)^n \\ &= \left(\frac{e^{(2J+1)x/2J} - e^{-(2J+1)x/2J}}{e^{x/2J} - e^{-x/2J}} \right)^n = \left(\frac{\sinh[(2J+1)x/2J]}{\sinh(x/2J)} \right)^n \end{aligned}$$

2. 平均エネルギー U は

$$\begin{aligned} U &= \frac{\sum \varepsilon e^{-\beta \varepsilon}}{\sum e^{-\beta \varepsilon}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = -ng\mu_B JH \frac{\partial}{\partial x} (\ln(\sinh(2J+1)x/2J) - \ln(\sinh x/2J)) \\ &= -ng\mu_B JH \left(\frac{2J+1}{2J} \coth \frac{2J+1}{2J} x - \frac{1}{2J} \coth \frac{1}{2J} x \right) = -ng\mu_B JHB_J(x) \\ \therefore C &= \frac{dU}{dT} = \frac{dx}{dT} \frac{dU}{dx} = \frac{n(g\mu_B JH)^2}{kT^2} B'_J(x) = nkx^2 B'_J(x) \end{aligned}$$

3.

$$T \rightarrow \text{large}, \quad x \ll 1 \quad C \simeq nkx^2 \frac{J+1}{3J} = \frac{J+1}{3J} nkx^2$$

$$T \rightarrow \text{small}, \quad x \gg J \quad C \simeq \frac{nkx^2}{J^2} \exp\left(-\frac{x}{J}\right)$$

4. $J = 1/2$ ので

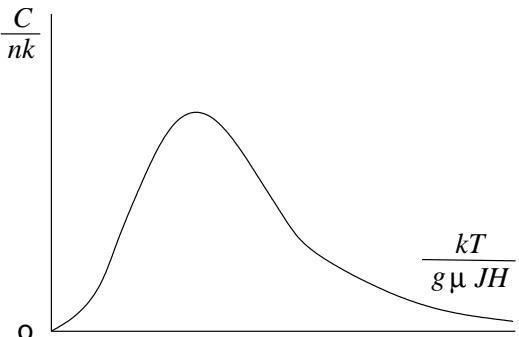
$$x \ll 1 \quad \frac{C}{nk} \simeq x^2$$

$$x \gg J \quad \frac{C}{nk} \simeq 4x^2 \exp(-2x)$$

$T \rightarrow \text{大}$ では、スピンの向きは全くランダムとなり、

$\langle E \rangle \rightarrow 0$ 、よって $C \rightarrow 0$ 。

$T \rightarrow \text{小}$ では、エネルギーを最小にするため、スピンがすべて $m = +J$ にそろってしまうので $C \rightarrow 0$ 。



5. $x, g\mu_B J$ を有限の一定値にしたまま、 $J \rightarrow \infty$ とする。

$$\begin{aligned} \lim_{J \rightarrow \infty} B_J(x) &= \lim_{J \rightarrow \infty} \left(\frac{2J+1}{2J} \coth \frac{2J+1}{2J} x - \frac{1}{2J} \coth \frac{1}{2J} x \right) \\ &= \coth x - \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{1}{2J} \left(\frac{2J}{x} + \frac{1}{3} \frac{x}{2J} \right) \\ &= \coth x - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} U = -ng\mu_B JH \lim_{J \rightarrow \infty} \left(\frac{2J+1}{2J} \coth \frac{2J+1}{2J} x - \frac{1}{2J} \coth \frac{1}{2J} x \right) = -ng\mu_B JH \left(\coth x - \frac{1}{x} \right)$$

従って、比熱は

$$\begin{aligned} C &= nkx^2 \frac{d}{dx} \left(\coth x - \frac{1}{x} \right) \\ &= nk(1 - x^2 \operatorname{cosech}^2 x) \end{aligned}$$

となる。よって、

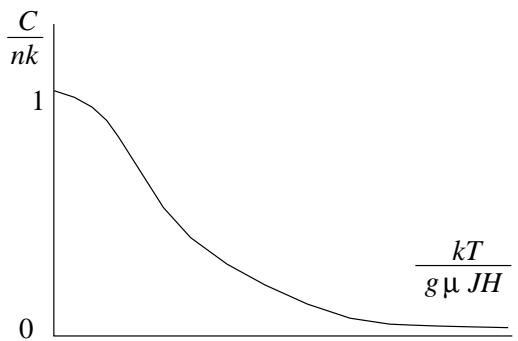
$$x \ll 1 \quad U = -ng\mu_B JH \left(\frac{x}{3} \right)$$

$$\therefore C = \frac{dU}{dT} = \frac{n(g\mu_B JH)^2}{3kT^2} = \frac{nkx^2}{3}$$

$$x \gg 1 \quad U = -ng\mu_B JH \left(1 + 2e^{-2x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\therefore C = \frac{dU}{dT} = \frac{n(g\mu_B JH)^2}{kT^2} \left(\frac{1}{x^2} - 4e^{-2x} \right)$$

$$= nk(1 - 4x^2 e^{-2x})$$



専攻 問題 4 解答

1. (i) 軌道角運動量による縮退度が $2l+1$ で、それぞれに対してスピンによる縮退が、2つある。従って、 $4l+2$ 個の中性子が入り得る。

(ii) 下の準位からそれぞれ 2, 6, 10, 2, 14, 6 個。閉殻をなす中性子数(魔法数)は、2, 8, 20, 40 となる。

$(0,2), (0,3)$ の準位では、それぞれ $(1,0), (1,1)$ の準位と近いため閉殻を成さない。

(補足) 3 次元の調和振動子のエネルギー固有値は、 $n' = 2(n-1)+l$ できる。 $(0,2)(1,0)$ の準位は $n'=0$ に、 $(0,3), (1,1)$ の準位は $n'=1$ に対応している。この n' の縮退が解けて [A] のエネルギー準位が生まれたと考えればよい。

2. (i) $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ だから、

$$\vec{j}^2 = (\vec{l} + \vec{s})^2 = \vec{l}^2 + 2\vec{l} \cdot \vec{s} + \vec{s}^2$$

従って期待値 $\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle$ は、

$$\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle = \langle l j | \frac{1}{2}(\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2) | l j \rangle = \frac{1}{2}\{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\}$$

- (ii) 一次摂動の範囲でエネルギー準位は $-A\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle$ だけ変化するので、同じ (n, l) を持つ状態では、 j が大きい($\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle$ が大きい)方がエネルギー準位が低くなる。従って、エネルギー準位とそこに入り得る中性子の数は低い順に以下のようになる。

(n,l,j)	(0,0,1/2)	(0,1,3/2)	(0,1,1/2)	(0,2,5/2)	(1,0,1/2)	(0,2,3/2)	(0,3,7/2)
中性子の数	2	4	2	6	2	4	8

この結果、問題の図 [B] から読みとれる魔法数は 2, 8, 20, 28, ... となり、実験で得られている値と一致する。

3. (i) 魔法数が 20 なので、どちらも、一個だけ閉殻を構成できない核子が余る。その核子は $(0, 3, 7/2)$ へ入るので、スピンはどちらも $7/2$ である。

- (ii) まず、 $\vec{l} \cdot \vec{j}$ と $\vec{s} \cdot \vec{j}$ を求める。

$$\vec{s}^2 = (\vec{j} - \vec{l})^2 = \vec{j}^2 - 2\vec{l} \cdot \vec{j} + \vec{l}^2$$

などから、

$$\vec{l} \cdot \vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{j}^2 + \vec{l}^2 - \vec{s}^2) \quad \vec{s} \cdot \vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{j}^2 - \vec{l}^2 + \vec{s}^2)$$

が得られる。これを使うと、

$$\vec{\mu} \cdot \vec{j} = g_l \vec{l} \cdot \vec{j} + g_s \vec{s} \cdot \vec{j} = g_l \frac{1}{2}(\vec{j}^2 + \vec{l}^2 - \vec{s}^2) + g_s \frac{1}{2}(\vec{j}^2 - \vec{l}^2 + \vec{s}^2)$$

$$\langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle = \frac{g_l}{2} \{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)\} + \frac{g_s}{2} \{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)\}$$

$$\mu = \langle nlj(m_j=j) | \mu_z | nlj(m_j=j) \rangle = \langle nlj(m_j=j) | \frac{(\vec{\mu} \cdot \vec{j}) j_z}{j(j+1)} | nlj(m_j=j) \rangle$$

$$= \frac{1}{j+1} \left[\frac{g_l}{2} \{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)\} + \frac{g_s}{2} \{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)\} \right]$$

- (iii) 上で得た式を用いる。 ${}^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$ では、 $(0, 3, 7/2)$ に入る中性子が一個余っているので、

$$\mu = \frac{2}{9} \left[0 + \frac{-3.8}{2} \left\{ \frac{63}{4} - 12 + \frac{3}{4} \right\} \right] = -1.9$$

となる。同様にして、 ${}^{41}_{21}\text{Sc}_{20}$ では、余っているのは陽子なので、

$$\mu = \frac{2}{9} \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{63}{4} + 12 - \frac{3}{4} \right\} + \frac{5.6}{2} \left\{ \frac{63}{4} - 12 + \frac{3}{4} \right\} \right] = 5.8$$

となる。

専攻 問題 5 解答

1. 原子の運動方程式は以下の通り。

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} x_n &= -k(x_n - y_n) + k(y_{n+1} - x_n) \\ M \frac{d^2}{dt^2} y_n &= -k(y_n - x_{n-1}) + k(x_n - y_n) \end{aligned} \quad \cdots (1)$$

2. 与えられた x_n, y_n の表式を前問の運動方程式に代入して整理して

$$\begin{aligned} (2k - m\omega^2)A - k(1 + e^{+iqa})B &= 0 \\ (2k - M\omega^2)B - k(1 + e^{-iqa})A &= 0 \end{aligned} \quad \cdots (2)$$

を得る。

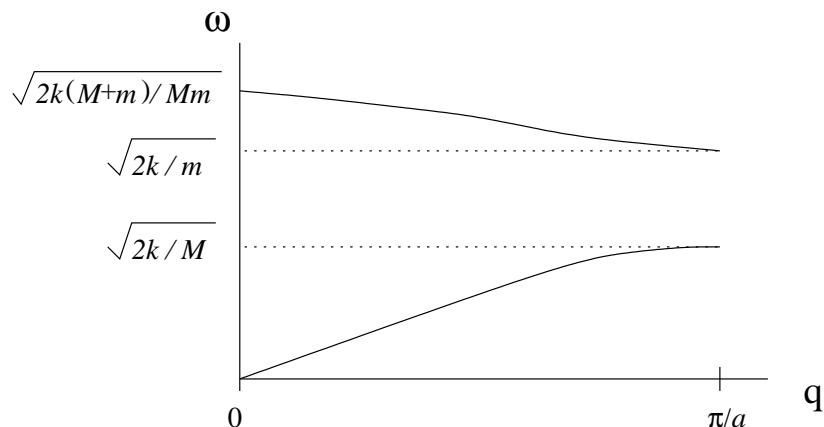
3. A, B が $A = B = 0$ 以外の解をもつためには前問より、

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k(1 + e^{+iqa}) \\ -k(1 + e^{-iqa}) & 2k - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

であることがわかる。これを ω について解いて

$$\omega^2 = \frac{k(m + M) \pm k \sqrt{(m + M)^2 - 4mM \sin^2(qa/2)}}{mM} \quad \cdots (3)$$

を得る。分散関係は下図のようになる。



4. $q = \pi/a$ を式 (3) に代入して

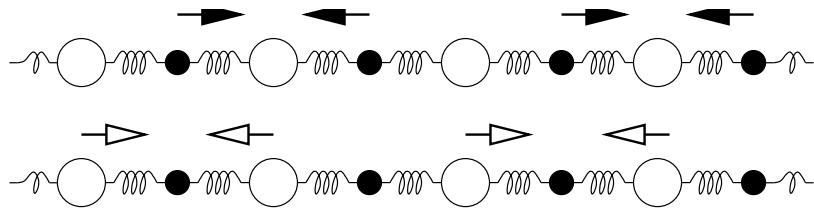
$$\omega^2 = \frac{2k}{M} \quad \text{or} \quad \frac{2k}{m}$$

を得る。この ω をそれぞれ式 (2) に代入すると A, B の条件は、

$$(a) \quad \omega^2 = \frac{2k}{M} \longrightarrow A = 0 \quad B = \text{任意}$$

$$(b) \quad \omega^2 = \frac{2k}{m} \longrightarrow A = \text{任意} \quad B = 0$$

となる。よって、 $q = \pi/a$ の基準振動での各原子の変位は下図のようになる。



つまり、それぞれ片方の種類の原子が静止しているため、バネ定数 $2k$ で原子をつなげていることになっている。

5. 兩原子の振幅の比の絶対値を考える。式(2)より

$$\left| \frac{A}{B} \right| = \frac{|2k - M\omega^2|}{|k(1 + e^{-iqa})|}$$

これに式(3)の ω を代入して $m \ll M$ を用いて近似計算していく。

$$\begin{aligned} \left| \frac{A}{B} \right| &= \frac{\left| 2m - (m + M) \mp \sqrt{(m + M)^2 - 4mM \sin^2(qa/2)} \right|}{m|1 + e^{-iqa}|} \\ &= \frac{\left| m - M \mp (m + M) \sqrt{1 - \frac{4mM}{(m+M)^2} \sin^2(qa/2)} \right|}{m|e^{+iqa/2} + e^{-iqa/2}| |e^{-iqa/2}|} \\ &\approx \frac{\left| m - M \mp (m + M - 2m \sin^2(qa/2)) \right|}{2m|\cos(qa/2)|} \end{aligned}$$

複号が $-$ の場合は ω の高周波の解についてであり

$$\left| \frac{A}{B} \right| \approx \frac{|-2M + 2m \sin^2(qa/2)|}{2m|\cos(qa/2)|} \approx \frac{M}{m} \frac{1}{|\cos(qa/2)|}$$

複号が $+$ の場合は ω の低周波の解についてであり

$$\left| \frac{A}{B} \right| \approx \frac{|2m - 2m \sin^2(qa/2)|}{2m|\cos(qa/2)|} = |\cos(qa/2)|$$

となる。

高周波の解では q の値によらず、 $|A/B| \gg 1$ であるから、質量 M の原子はほとんど振動せず、質量 m の原子が大きな振幅で振動する。

低周波の解では $A/B \leq 1$ であるから、質量 M の原子も質量 m の原子も振動する。

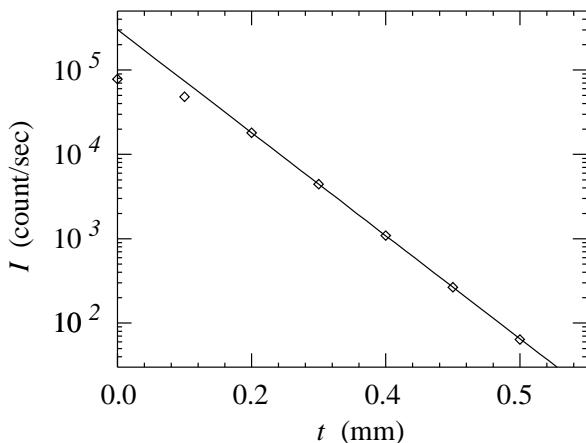
$m \ll M$ であるから、高い周波数で激しく振動させようとすると、質量 m の原子だけが振動して、質量 M の原子は止まっているようとして、 $|A/B| \gg 1$ となる。この振る舞いは波数 q には依らない。

低い周波数でゆっくりと振動させる場合は、両方の原子がゆっくりと振動する。このため、 $|A/B| \sim 1$ である。ただし、この場合には 4 で考察したように、波数が大きくなるにつれて、質量 M の原子だけが振動するようになる。

専攻 問題 6 解答

1. (i) シンチレーションカウンターには不感時間があり、一つのパルスを発生してから次のパルスを発生させるまでにおよそ $2\mu\text{s}$ ほどかかる。この間に入ったパルスは無視されるので、枚数が少なく計数が多い時には数え落しが多くなる。

(ii) 横軸にシリコンの厚さ t [mm]、縦軸に入射強度 I [カウント/秒] をとると以下のようになる。



この傾きおよび切片から、 $\mu = 14 [\text{mm}^{-1}]$ 、 $I_0 = 3.0 \times 10^5$ [カウント/秒] と求められる。

- (iii) 求める吸収係数を $\mu_0 [\text{mm}^{-1}]$ とすると、1と同じ条件であることから、

$$I_o \exp(-0.025\mu_0) = \frac{30300}{10} - \frac{98}{60} \quad \mu_0 = 1.8 \times 10^2$$

したがって、この金属は Cr と推定される。

2. Mo - K_α 線の方が Cu - K_α 線よりも波長が短いので、フォトンのエネルギーは高く、電圧の高いパルスとして観測される。したがって、シグナルとノイズを選別するためのパルス波高の閾値を高くしておかなければならない。
3. (i) 吸収端 (absorption edge)

- (ii) $\lambda < \lambda_a$ の時には光電効果で K 裂の電子をたたき出せるようになるので急激に透過強度は減少する。したがって、K 裂のエネルギーを $-E_K$ とすると、

$$\lambda_a = \frac{hc}{E_K}$$

また、特性 X 線 K_α 線は K 裂にできたホールに L 裂から電子が落ち込む時に発生するので、L 裂のエネルギーを $-E_L$ とすると、

$$\lambda_K = \frac{hc}{E_K - E_L}$$

したがって、 $\lambda_K > \lambda_a$ である。

専攻 問題 7 解答

1. (i) 100 億の脳細胞の一つ一つに 2 進数の "番号づけ" をする。遺伝子が n 個以上必要であるとすると、 $2^n = 10^{10}$ だから、 $n = 33.3$ となり、遺伝子は 34 以上必要である。
(ii) すべての脳細胞の 1 つ 1 つを 34 個の遺伝子でコードしたとすると、進化の過程で起こる突然変異や転写のミスにより、必要な脳細胞が発現できなくなったりすると生存できなくなる恐れがあるので、進化の過程で不利となる。
(iii) 遺伝子 X を構造遺伝子と考え、その転写活性が高まるという場合について考える。このとき遺伝子 X の調節領域では、プロモーターに RNA ポリメラーゼが結合し、かつオペレーターにはリプレッサーが結合していない時転写が開始される。さらに転写量を増加させるエンハンサーなどの配列が活性化されると転写活性が高まる。よって、遺伝子 A と B としてプロモーターとエンハンサーを対応させ、C をオペレーターに対応させると遺伝子 A と B が ON で、かつ C が OFF の時に遺伝子 X の転写活性が高まる。
2. (i) DNA が 2 塩基 (P と Q と名づける) のみから構成される生物でも DNA の 2 重らせんで遺伝情報が保存されているとすると、P と Q との間には (P-P, Q-Q), P-Q のいずれかのペアができるがこのうち、後者の場合は、2 つの塩基とも同じ数の水素結合のための手を持たねばならないので塩基対の形成時にミスが生じやすいので不可。一方前者の場合、2 つの塩基の水素結合の手の数を変えておけば上のようなミスは起きずに済む。よって、前者のような関係があると思われる。
(ii) 2 塩基組成の RNA を介して 20 種類のアミノ酸からなるタンパク質をコードする時のコドンの大きさは $2^5 = 32$ より、5 文字であればよい。遺伝暗号表は 5 文字のコドンを表現するため普通のコドン表で、縦に始めの 2 文字、横に次の 2 文字で分類し、最後の文字でコラムを分ければよい。
(iii) 4 塩基の DNA では $4^3 = 64$ 個の組合せで 20 個のアミノ酸をコードしているので、コドンの縮訳が起こりコード情報の保存性が高められたり、転写時のミスが少なくなるが、2 塩基の場合 32 個しかコードしていないので上に述べた利点は少なくなり、さらにコドンが長くなるので突然変異の確率が高くなるので不利である。
(iv) 2 種のアミノ酸のみからなるタンパク質で構成される生物が存在し得ない。理由としてはタンパク質は、生体内では親水基を外側に、疎水基を内側にして存在しているので、最低親水基と疎水基を持ったアミノ酸が必要である。さらにタンパク質の機能の多様性を得るためにいくつかのアミノ酸が必要なので、2 種アミノ酸のみからなる生物は存在しないと考えられる。では何種類のアミノ酸が必要になるかを考える。生体内のアミノ酸は側鎖の化学的性質により、中性で非極性、中性で極性、酸性、塩基性の 4 つに分けられることから、まずその 4 種類は最低必要である。この他に、タンパク質の 3 次構造形成のためグリシンのような側鎖の小さいものや、S-S 結合を作るために S を側鎖に持ったものが必要である。この他タンパク質の酵素反応の活性部位でのタンパク質の識別のためにいくつかのアミノ酸が必要だと思われる。ゆえに最低 6 種類以上のアミノ酸が必要だと予想される。

専攻 問題 8 解答

1.

$$\langle \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij} \langle \vec{b}^2 \rangle + \delta_{i \neq j} \langle \vec{b}_i \rangle \langle \vec{b}_j \rangle = b^2 \delta_{ij}$$

($\because i \neq j$ のとき、ランダムに向きが動くので、 \vec{b}_i と \vec{b}_j の相関がなく、free である。)

2. $r_{0n} = \sum_{i=0}^n \vec{b}_i$ より、

$$\langle r_{0n}^2 \rangle = \sum_{i,j} \langle \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \rangle = \sum_{i,j} \delta_{ij} b^2 = nb^2$$

3. $\vec{r}_j - \vec{r}_i = \sum_{k=i+1}^j \vec{b}_k$ (但し $j > i$) なので、

$$\langle (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \rangle = \left\langle \sum_{k=i+1}^j \vec{b}_k \cdot \sum_{l=i+1}^j \vec{b}_l \right\rangle = \sum_{k,l=i+1}^j \delta_{kl} b^2 = |j-i|b^2$$

$$\therefore \sum_{0 \leq i < j \leq n} \langle (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \rangle = \sum_{0 \leq i < j \leq n} |j-i|b^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^2$$

となるから、 $n \rightarrow \infty$ で、

$$R_G = \sqrt{\frac{1}{6}nb^2 \frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)^2}} \simeq \sqrt{\frac{1}{6}nb^2} = \sqrt{\frac{1}{6}\langle r_{0n}^2 \rangle}$$

4. $n = 5 \times 10^6$ 、 $b = 3 \times 10^{-10}$ m よって $nb^2 = 45 \times 10^{-14}$ m² より、

$$\langle r_{0n}^2 \rangle^{1/2} = 7 \times 10^{-7} [\text{m}] = 0.7 [\mu\text{m}]$$

$$R_G \simeq \sqrt{\frac{1}{6}\langle r_{0n}^2 \rangle^{1/2}} \simeq 0.3 [\mu\text{m}]$$

5. 設問 4において、 $n' = n/a = 1 \times 10^4$ 、 $b' = ab = 1.5 \times 10^{-7}$ m とおき直して計算。

$$n'b'^2 = 2.25 \times 10^{-10} \text{ m}^2$$

よって、

$$\langle r_{0n}^2 \rangle^{1/2} = 1.5 \times 10^{-5} [\text{m}] = 15 [\mu\text{m}]$$

$$\therefore R_G = 6 [\mu\text{m}]$$

6. 大腸菌の中で、ゲノム DNA はランダムコイル状態にあるのではなく、何らかの機構により、コンパクトに折り畳まれていると考えられる。コンパクトな形に定まっていることにより、表面積を小さくし、紫外線など外界の危険をなるべく避けることに成功していると考えられる。

7. [ゲルろ過法]

凹凸のついたビーズをカラムに詰め、その中に溶液を流す。大きさの大きいものほど早く落ちてくるので、それによって分子の大きさを知ることができる。

[拡散係数を測定する]

拡散係数が分子の大きさの関数になっているので、拡散の度合を光散乱で測定すればそれより分子のおおよその大きさが計算できる。

そのほか、粘性の測定・流動複屈折(屈折率の方向依存性の測定)・光散乱の利用が考えられる。

1993年度

1993年度 入学試験 一般教育科目

教育 英語

1. 以下の英文を読み、設間に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

A future of climate warming is often described as an increase in the greenhouse effect. It is easy to envision a glassed-in building trapping the heat of the sun, creating a climate that is quite different from the surroundings.

(a)The Earth with its atmosphere acts very much like a greenhouse. Without our atmosphere, the climate on the surface of the earth would be very harsh with nothing to prevent the planet's heat from escaping into space. Instead of glass, the Earth is surrounded by gases, and among them are gases that have an ability to trap heat.

One of the major greenhouse effect gases is water vapor. Other greenhouse gases are carbon dioxide, methane, nitrous oxide and chlorofluorocarbons(CFCs). (b)It is these gases that are the cause for concern when talking about man-made climate warming and climate change. The concentrations of all of them are increasing in the atmosphere and the prediction is that their accumulation is enhancing the natural greenhouse effect. It will become a warmer greenhouse because the gases will be even more effective in trapping the heat trying to leave the atmosphere.

A planet is, however, both larger and more complex than an ordinary greenhouse and the atmosphere does not evenly spread an increase in temperature. (c)Rather, the Earth with its atmosphere can be described as a playground for weather systems, where air, water and land interplay to determine the climatic patterns in different regions. If North Atlantic low pressure path moves a little north or south, this might not seem like a big change on the global scale, but for the weather of Northern Europe it is what determines the number of clear and rainy days or if there will be real winter weather. A shift in the monsoon further north might bring more rain to the dry sub-Saharan region, but it is difficult to predict how much and when. And no one knows how fast the rain water will evaporate as the temperature may also increase. (d)This complexity is one of the reasons scientists are still reluctant to make regional predictions about the effects of climate warming, even when they are quite confident about the global trends.

—quoted, with modifications, from Annika Nilsson,
Greenhouse Earth, John Wiley & Sons, 1992.

carbon dioxide : 二酸化炭素 methane : メタン nitrous oxide : 一酸化二窒素

chlorofluorocarbons(CFCs) : フロン

[設問]

- (i) 下線部 (a) を 100 字以内で和訳せよ。
- (ii) 下線部 (b) を 100 字以内で和訳せよ。
- (iii) 下線部 (c) を 100 字以内で和訳せよ。
- (iv) 下線部 (d) を 100 字以内で和訳せよ。

2. 以下の英文を読み、設間に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

Ever since it was realized that an organism does not pass a simulacrum of itself to the next generation, but instead provides it with genetic material containing the information needed to construct a progeny organism, we have wanted to define the nature of this material and the manner in which its information is utilized. Now that we know the physical structure of the genetic material, we may state the aim of molecular biology as defining the complexity of living organisms in terms of the properties of their constituent molecules.

The gene is the unit of genetic information. The crucial feature of Mendel's work, a century ago, was the realization that the gene is a distinct entity. The era of the molecular biology of the gene began in 1945 when Schrödinger

developed the view that the laws of physics might be inadequate to account for the properties of the genetic material, in particular its stability during innumerable generations of inheritance. The gene was expected to obey the laws of physics so far established, but it was thought that characterizing the genetic material might lead to the discovery of new laws of physics, a prospect that brought many physicists into biology.

Now, of course, we know that a gene is a huge molecule, in fact part of a vast length of genetic material containing many genes. A gene does not function autonomously, but relies upon other cellular components for its perpetuation and function. All of these activities obey the known laws of physics and chemistry; and it has not, in the end, been necessary to invoke the new laws.

—quoted from Benjamin Lewin, *Gene IV*,
Oxford University Press, 1990.

simulacrum : 像、姿、影、幻影 progeny : 子孫、子供

[設問]

- (i) 下線部を 120 字以内で和訳せよ。
- (ii) 多くの物理学者が生物学を始めたのはなぜか、又、その結果はどうであったか、本文に基づき 100 字以内で述べよ。
3. 以下の英文を読み、設間に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

In a democratic society, the strong support of the general public is needed in order to maintain a strong base in science. It is essential, therefore, to show the public why that support is important. (a)The direct relation between science and technology is often difficult to discern, except by hindsight, even though there are many examples of observable pathways to the use of newly understood or newly recognized phenomena — witness developments in molecular bioscience. There is also a strong strand in our system, that is science, that ties together the gathering of all added understanding of nature's materials, forces, space, and time with the use of our biosphere for the support of all human race through technology. That strand is steady stream of educated scientists and engineers that our educational has provided over years.

Science is an important part of our culture but it is vital to our continued existence — hence the educated stream of scientists and engineers must continue apace. However, in making sure of the continuing success of this important task, the community has taken to looking at students at the beginning of the educational pipeline only in terms of future professionals or of future major users of science. This posture has led the science and technology community to set aside the equally important aspect of public literacy in science. Although this was not a deliberate decision, it had the effect of widening the gap between (b)"us and them" — a totally undesirable effect.

At least part of the problem lies in our wish to make sure that every observable is understood in the best current thinking. This ignores the fact that 99% of the population is not involved in science or engineering research, nor do they want to be. Yet many are likely to be interested in the observables of nature and the best lay explanation of them.

Indeed, in our own best interest, as well as for the society as a whole, we should put our best creative efforts into solving the problem of how to fan the interest of nonscience majors in nature's phenomena. That means developing laboratory exercises and textbook designed to enhance the interest of nonprofessionals in such phenomena without losing them in a sea of current explanations. The net result of such a course or group of courses would be a major seeding in terms of public literacy with respect to science and technology with a consequent stronger foundation for public support of science in universities.

It is not only important that the community recognizes the problem but that its best talent should set about to correct it. It is, of course, equally important that such actions as are undertaken are not at the expense of the science enterprise itself.

—quoted, with modifications, from *Science*, 1992.

by hindsight : あとになってみると strand : よった糸

biosphere : 地球で生命が存在するところ、生命圏 literacy : 教養 lay : 平易な

[設問]

- (i) 下線部 (a) を和訳せよ。
- (ii) 下線部 (b) の us と them はそれぞれ何を指すか日本語で答えよ。
- (iii) この文章の要旨を 200 字以内の日本語にまとめて記せ。
4. 次の文章の下線部分の和文を英訳せよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

宇宙の無秩序さ、すなわちエントロピーの総量は常に時間と共に増大している。ある物体の秩序が増加できるのは、まわりで無秩序の増分が物体の秩序の増分を上回る場合に限られる。(a) 生命とは無秩序に向かう傾向に逆らって自分自身を複製することが出来るような秩序あるシステムと定義できる。すなわち、生命は似てはいるが独立した秩序あるシステムを作ることができる。(b) これらのことを行なうために、システムは食物、日光、電力などの秩序あるエネルギーを熱の形で無秩序なエネルギーに変換しなければならない。結果としてこのシステムは無秩序の総量は増加するという要請を満たすことができる。

—quoted with modifications from a lecture(*Life in the Universe*) by S. W. Hawking(1991).

無秩序な : disordered

5. 次の文章を英訳せよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

科学は、その本質から考えて、それまでの研究者たちによって作られた大きな建造物のてっぺんに、新しい材料を付加することによって成長する構造体である。以前に何が知られていたかに全く無知の個人が、意味のある新しい貢献をする機会はほとんどない。したがって、新しい研究計画を始める前には、その研究分野の現状を調べ上げておくことが基本的に重要である。

教育 数学

1. 平面上の次の関数について以下の設問に答えよ。

$$f(x, y) = (x^4 - y^2) \exp(-r^4), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

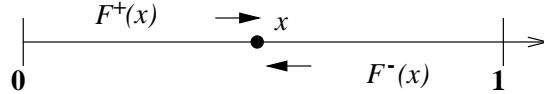
(i) 最大値と最小値の存在を示し、これらを求めよ。

(ii) 次の積分を求めよ。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy$$

2. x 軸上の区間 $[0, 1]$ を図のように x 軸の正方向と負方向に進む粒子群がある。位置 x でのそれぞれの群の流量を $F^+(x)$ (個/秒) および $F^-(x)$ (個/秒) とする。ある群の流量が F であるとき、距離 ds を進む間に $F ds$ (個/秒) の粒子が x 軸を構成する格子と衝突する。衝突するたびに粒子群の一部は確率 a で消滅し、残りは進行方向および反対方向に確率 f と b で散乱される。すなわち、 $a + b + f = 1$ である。

ただし粒子の速さはすべて同じで、散乱の際にも粒子の速度は変化しないものとする。また格子点は一様で十分数が多いので、 x 軸は連続体とみなして良い。このとき、



(i) 流量 $F^+(x)$ と $F^-(x)$ を支配する x についての一階連立微分方程式を導け。

(ii) 次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ。ただし、固有ベクトルの第一成分は 1、また、 $\alpha > \beta > 0$ とする。

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & +\beta \\ -\beta & +\alpha \end{pmatrix}$$

(iii) (ii) の結果を利用して (i) の方程式系を解け。ただし、境界条件として粒子は $x = 0$ で区間に流量 1 個 / 秒で流入しており、また、 $x = 1$ で区間に流入する粒子は無いとする。さらに $a, b > 0$ とする。

3. 正の整数 N の分割数 $P(N)$ 、すなわち N を N 以下の正の整数の和で表す場合の数を考える。例えば、 $N = 3$ のとき、 $N = 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ であるから、 $P(3) = 3$ である。また、 $P(0) = 1$ と約束する。このとき次の設問に答えよ。

(i) $P(4), P(5)$ を求めよ。

(ii) 負でない整数 n を正の整数 m 以下の正の整数の和で表す場合の数を $p(n, m)$ と書く。ただし $p(0, m) = 1$ と約束する。この時分割に現れる最大数に着目して $p(n, m)$ を $p(n', m')$, $n' < n, m' \leq m$ を用いて表しなさい。

(iii) (ii) の結果を用いて $P(8)$ を求めよ。

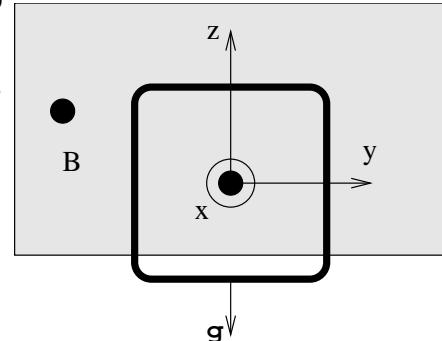
(iv) 問題とする場合の数 $q(n)$ を係数とする、べき級数 $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n)x^n$ を $q(n)$ の母関数という。例えば、 $p(n, 2)$ に対する母関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n, 2)x^n = (1 + x^1 + x^{1+1} + \dots)(1 + x^2 + x^{2+2} + \dots)$$

で与えられる。これを参考にして $P(N)$ の母関数 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n$ を $g(x) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{f_k(x)}$ の形で与える多項式 $f_k(k)$ を求めよ。

教育 物理

1. 質量 M 、半径 R の一様な円盤が、傾斜角 θ の坂をすべらずに転がり落ちる運動を考える。斜面に沿って x 軸をとり、重力加速度を g 、ころがりまさつ力を F として次の間に答えよ。
 - (i) 円盤重心の x 方向の運動方程式を示せ。
 - (ii) 円盤の回転軸まわりの慣性モーメント I を求め、回転に関する運動方程式を示せ。
 - (iii) x 方向の速度 v と、回転角速度 ω の関係を示せ。
 - (iv) 以上の関係を整理して、 x 方向の加速度が、まさつがなかった場合の何倍になっているのかを求めよ。
2. 図に示すように金属線で出来た正方形のループが yz 面内にある。ループの上半分に強さ $B[T]$ の一様磁場がループ面と垂直 (x 軸方向) にかかるており、また、ループは下方に重力を受けているものとする。ループの一辺の長さを $L[m]$ 、金属線の断面積を $s[m^2]$ 、金属の密度を $d[kg/m^3]$ 、金属の抵抗率を $\rho[\Omega m]$ 、重力加速度を $g[m/s^2]$ として、以下の間に答えよ。ただし、空気の抵抗は無視し、ループが回転してしまうことは無いものとする。また、ループは十分に大きいとして、ループ全体が磁場の外に出てしまう場合を考慮する必要はない。
 - (i) ループが速度 v で落下しているとき、ループに流れる電流 I の向きを図示し、その大きさを求めよ。
 - (ii) ループにながれる電流と磁場 B とによってループが受けるローレンツ力 F の方向を図示し、その大きさを求めよ。
 - (iii) ループの落下運動をあらわす運動方程式を書き下せ。
 - (iv) ループの初速を 0 として落下速度 v を時間の関数として求め、 v の変化の様子をグラフに示せ。



3. 圧力 p と単位体積あたりの内部エネルギー u の間に

$$p = \frac{1}{3}u$$

の関係が成り立つ気体がある（光子気体）。 $u = u(T)$ が温度 T のみの関数であるとして、その関数形を求めたい。以下の間に答えよ。

- (i) 断熱過程において圧力 p と体積 V の間に $pV^{4/3} = \text{一定}$ の関係が成り立つことを示せ。
- (ii) 四つの状態 A, B, C, D を通り、等温膨張 ($A \rightarrow B$)、断熱膨張 ($B \rightarrow C$)、等温圧縮 ($C \rightarrow D$)、断熱圧縮 ($D \rightarrow A$) という四つの準静的過程からなる可逆サイクルを考える。このサイクルの $p - V$ 図の概略を描け。但し、状態 A, B, C, D における体積をそれぞれ V_A, V_B, V_C, V_D とし、等温過程 $A \rightarrow B$ 及び $C \rightarrow D$ における温度をそれぞれ T_1 及び T_2 とする。
- (iii) 上記のサイクルで、等温過程 $A \rightarrow B$ 及び $C \rightarrow D$ の間に吸収する熱量をそれぞれ Q_1 及び Q_2 とするとき、 Q_1, Q_2 を求めよ。
- (iv) このサイクルが可逆であることを用いて

$$\frac{u(T_1)^{1/4}}{T_1} = \frac{u(T_2)^{1/4}}{T_2}$$

が成り立つことを示せ。

[参考:これにより、Stefan-Boltzmann の法則 $u(T) = \sigma T^4$ (σ は定数) が得られる。]

教育 英語 解答

1. 全訳

気候の温暖化の先行きについて、よく温室効果の増大が言われます。太陽の熱を捕らえるガラス張りの建物が、まわりとかなり異なる気候を作り出すのを思いめぐらすのは、たやすいことです。(a) 地球は大気のおかげで、温室同様の効果を持ちます。大気がなかつたならば、地表での気候は、地球の熱が宇宙へ逃げるのを妨げるものがないことから、とても苛酷なものとなるでしょう。(85字) ガラスの代わりに地球は気体に囲まれており、そのいくつかは熱を捕らえておく力があります。

主として温室効果を起こす気体のひとつは水蒸気です。他には、二酸化炭素やメタンや一酸化二窒素、フロンがあります。(b) こういった気体が人類による気候温暖化や気候変化が話題となる時の関心のもとになります。(41字) これら全ての集合体が大気中に増大しつつあることで予想されるのは、そういう気体が蓄積することで自然による温室効果に拍車がかかることです。そうなれば、大気から逃れようとする熱をもっと効果的に引きとどめるようになるので、地球の温暖化が進むことになります。

しかし、惑星は温室よりずっと大きく複雑であるので、大気は温度の上昇を一様に進めてくれるわけではありません。(c) むしろ、大気を持つ地球は、気象システムの運用の場とみなすことができます。地球では、風、水、地が相互作用して様々な地域での気候を決めているのです。(77字) もし、北大西洋低気圧が、少し北か南へずれていれば、地球規模では大きな変化はみられないでしょうけれども、北欧の気候においては、晴れや雨の日数を決めることになりますし、真冬並の気候になるかもしれません。モンスーンがずっと北方へずれれば、乾期の小サハラ地方に雨が降りますが、いつどれくらい降るかまでは予報しがたいものがあります。そして、温度も上昇するかもしれません、それにつれてどれくらいはやく雨水が蒸発するかは誰もわかりません。(d) こういった複雑さを理由の一つとして、科学者たちは依然として地域に限る気候温暖化の予言をするのに躊躇しています。もっとも、地球規模での移り変わりにはかなりの自信があるのですが。(93字)

2. 全訳

(i) 生物は自分の形を次の世代に渡すのではなく、そのかわりに、遺伝物質を渡すことが発見された。その遺伝物質は子孫の生物を構成するために必要な情報を含んでいる。その発見以来ずっと、私たちはこの物質の性質や遺伝情報の使われ方を定めたいと考えてきた。(119字) 今や、私たちはその遺伝物質の物理的構造を知るようになったので、分子生物学では、構造物質の特性を通じて、生体の多様性を理解することを目標にしていることができるかもしれない。

遺伝子は、遺伝情報の単位である。約一世紀前のメンデルの実験によって、遺伝子は明らかに存在するという認識が決定的になった。遺伝子の分子生物学が始まったのは、1945年で、そのとき、シュレディンガーは、物理法則は、遺伝物質の特性、特に、数多くの遺伝の発現の間の遺伝子の安定性を説明するのにふさわしくないという予見を発展させた。遺伝子は、既存の物理法則に従うと予想されていたが、一方で、遺伝物質を特定することによって、新しい物理法則が発見されるかも知れないと考えられており、そのため、多くの物理学者が生物学を始めた。

現在、勿論、遺伝子は、大きな分子であって、実際、遺伝物質の巨大な物質の一部に、沢山の遺伝子を含んでいることを知っている。遺伝子は、自発的には動かず、安定して存在したり機能したりするのには、細胞の他の要素が必要となる。それらの活動は、既知の物理法則に従い、結局、今のところ、新しい物理法則を打ち立てる必要性はないままである。

— Benjamin Lewin, 『遺伝子 IV』, オックスフォード大学出版会, 1990

- (i) 全訳の本文参照。
- (ii) 遺伝物質は既存の物理法則の枠に支配されていると考えられていたが、これを調べることにより、新しい物理法則を発見できると予想された。しかし、そのような新しい物理法則の発見はなかった。

3. 全訳

民主主義の社会では科学の丈夫な土台を維持するために一般大衆の強い支持が必要である。その支持がなぜ重要であるのかを大衆に示すのはそのため大切なことである。(a) 科学と技術のあいだの直接の関係は往々にして、後になってわかるものを除いては見定めることは困難である。もっとも、分子生物学における新たな現象の理解や認識が目に見えて実用化されていった道のりの多くの例があるが。我々のシステムには強くよった糸もある、それは科学であり技術を通じて、人類を支えるために生命圈を利用して自然の物質、力、空間、そして時間に関する理解の足し合わせたものを一つにまとめるものである。そのよった糸こそが我々の教育システムが長年に渡って供給してきた、教養ある科学者と技術者のしっかりした流れなのである。

科学は我々の文化の大事な部分である、そして我々が存在し続けるために必要不可欠なものである。故に教養ある科学者と技術者の流れは歩調をあわせて存続しなくてはいけない。しかしながら、この重要な課題を確実に絶えまなくするために、共同体は教育制度初期において生徒達を将来のプロフェッショナルか、未来の科学の主要な利用者になるだろうとしてしか見てこなった。この態度によって科学技術の共同体は、一般の人々の科学の教養という同様に重要な側面を脇に退けてきた。これは故意にそうしたのではないが、「(b) 我々と彼ら」のあいだのギャップの大きさを広げる効果があった。(全く望ましくない効果である)

少なくとも問題の一部は、観測しうるすべてのものは現在最高の頭脳によって確実に理解しようとする我々の願望にある。このことは人口のうち 99% が科学、または技術の研究に関わっていなく、またそうしたいとも思っていないという事実を無視している。とはいえ多くの人は自然で観測されるものや、それらの最良の平易な説明に興味を持っているらしい。

実際のところ我々自身のために、社会全体のためにも我々は最大の創造的努力を、自然現象に対する科学無教養な大衆の興味をいかに魅了するかということに注がなくてはいけない。それが意味することは実験室での実習の発展とともに、現在の説明の大平原のなかで自分を見失うことなしに、そんな現象にたいする非プロフェッショナルな人々の関心を高めるように編集された教科書の発展である。そのような課程、または複数の課程の正味の結果は大衆の科学技術に対する教養にとって主要な種付けとなり、その帰結として大衆による大学での科学の支持にとってより強い土台となるであろう。

共同体はその問題に気付くことだけが重要なのではなくて、最良の手段でそれを正すようにすべきだ。もちろん実行されるような行動が科学事業自身の損失にならないようにするのも同様に重要である。

—サイエンス 1992 から修正を施して引用

(i) (a) の和訳は本文中を参照

(ii) us 筆者のような科学・技術の専門家、プロフェッショナル
them 科学や技術の研究に携わっていない一般大衆

(iii) 大衆に科学支持の必要性を示すのは重要であるが科学の実用的価値を示すのは困難である。科学は我々に不可欠のものだが科学の専門家を養成することに専念するあまり一般大衆との格差が広がってしまった。ほとんどの人は科学に従事していないにもかかわらず、自然現象には興味を持っている。それを失わないような方法で科学教育を発展させなくてはならない。また共同体はその問題に気付くだけではなく実行に移さなくてはならない。(199 字)

4. The total amount of disorder, or entropy, in the universe always increases with time. The order in one body can increase provided that the amount of disorder in its surroundings increases by a greater amount. (a) One can define life to be an ordered system that can sustain itself against the tendency to disorder and can reproduce itself. That is, it can make similar, but independent, ordered systems.

(b) To do these things, the system must convert energy in some ordered forms - like food, sunlight, or electric power - into disordered energy in the form of heat. In this way, the system can satisfy the requirement that the total amount of disorder increases.

[別解]

(a) Life can be defined as the ordered system that is capable of duplicating itself and maintaining itself contrary to the tendency toward disorder.

- (b) To do these things, the system has to transform the ordered energy such as food, the sunshine and electric power into the disordered energy in the form of heat. Consequently, this system can fill the requirement that the total amount of the disorder increases.
5. Essentially, science is a structure that is brought up by adding new material to the top of big buildings by former scholars. One scarcely has a chance to make contribution, who knows nothing about what is known at that time. So, when we begin new research plan, it is basically important to study completely the present situation of the theme.

教育 数学 解答

1. (i) この関数 f には特異点はなく、また $r \rightarrow \infty$ で $f \rightarrow 0$ に収束する。 f は有限の領域 (\mathbf{R}^2) に正負の値を持つので f は \mathbf{R}^2 上に最大値、最小値を持つ。

さて、 \mathbf{R}^2 は開集合なので、連続微分可能な関数 f がある点で最大値または最小値をとるためには、その点で、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

となることが必要条件である。具体的に書き下すと、

$$+x[x^2 - (x^4 - y^2)(x^2 + y^2)] = 0 \quad \cdots (1)$$

$$-y[1 + 2(x^4 - y^2)(x^2 + y^2)] = 0 \quad \cdots (2)$$

となる。

f が最大値を取るのは明らかに f が正の時であり、その時には $(x^4 - y^2) > 0$ なので式 (2) が満たされるためには $y = 0$ となることがわかる。これを式 (1) に代入すると、

$$4x^3(1 - x^4) = 0 \quad \therefore x = +1, 0, -1$$

が得られる。この時の f の値は

$$f(1, 0) = f(-1, 0) = \frac{1}{e} \quad f(0, 0) = 0$$

なので、最大値は、

$$f(1, 0) = f(-1, 0) = \frac{1}{e}$$

である。

同様にして最小値を求めるとき、最小値は明らかに負なので $(x^4 - y^2) < 0$ なので式 (1) が満たされるためには $x = 0$ となることがわかる。これを式 (2) に代入すると、

$$2y(2y^4 - 1) = 0 \quad \therefore y = 0, \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

が得られる。この時の f の値は

$$f\left(0, +\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = f\left(0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \quad f(0, 0) = 0$$

なので、最小値は、

$$f\left(0, +\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = f\left(0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$$

である。

- (ii) 与式を極座標の積分に直すと、

$$I = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (r^5 \cos^4 \theta - r^3 \sin^2 \theta) e^{-r^4} dr d\theta$$

となる。 θ による積分は、

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4\theta\right) d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \pi$$

となる。 r の積分は、 $r^2 = t$ と変数変換して

$$I = \pi \int_0^\infty \left(\frac{3}{8}t^2 - \frac{1}{2}t\right) e^{-t^2} dt = \frac{3\pi^{\frac{3}{2}}}{32} - \frac{\pi}{4}$$

と求まる。

2. (i) 正の方向に進む粒子は、 dx 進む間に、 $(a+b)F^+dx$ 個が散乱によって失われ、 bF^-dx 個が、負方向に進む粒子からの散乱によって生じる。負方向に進む粒子は $-dx$ 進む間に同様の収支があるので結局

$$+\frac{dF^+}{dx} = -(a+b)F^+ + bF^-$$

$$-\frac{dF^-}{dx} = -(a+b)F^- + bF^+$$

となる。

- (ii) 固有値 λ は

$$(-\alpha - \lambda)(\alpha - \lambda) + \beta^2 = \lambda^2 - \alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad \therefore \quad \lambda^\pm = \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$

となる。それぞれに対応する固有ベクトルの第 2 成分を γ^\pm とすれば、

$$\begin{pmatrix} -\alpha & +\beta \\ -\beta & +\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^\pm \end{pmatrix} = \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^\pm \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\gamma^\pm = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\beta}$$

が得られる。よって固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})/\beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})/\beta \end{pmatrix}$$

となる。ただし、複号の順序は、固有値と固有ベクトルのそれぞれで一致している。

- (iii) $\alpha = a + b, \beta = b$ とすれば、(i) の方程式は、

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} F^+ \\ F^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & +\beta \\ -\beta & +\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^+ \\ F^- \end{pmatrix}$$

となる。この行列を対角化するために、

$$\begin{pmatrix} F^+ \\ F^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma^+ & \gamma^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{+'} \\ F^{-'} \end{pmatrix}$$

で変換すると

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} F^{+'} \\ F^{-'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^+ & 0 \\ 0 & \lambda^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{+'} \\ F^{-'} \end{pmatrix}$$

となる。よってこの解は

$$F^{+'}(x) = A^+ e^{\lambda^+ x} \quad F^{-'}(x) = A^- e^{\lambda^- x}$$

であり、変換して

$$F^+(x) = A^+ e^{\lambda^+ x} + A^- e^{\lambda^- x}$$

$$F^-(x) = A^+ \gamma^+ e^{\lambda^+ x} + A^- \gamma^- e^{\lambda^- x}$$

となる。境界条件 $F^+(0) = 1, F^-(1) = 0$ を用いて未定係数 A^+, A^- を定めて、さらに $\lambda^- = -\lambda^+ \equiv \lambda, \gamma^+ \gamma^- = 1$ の関係を用いると、結局

$$F^+(x) = \frac{\gamma^- e^{\lambda^- + \lambda^+ x} - \gamma^+ e^{\lambda^+ + \lambda^- x}}{\gamma^- e^{\lambda^-} - \gamma^+ e^{\lambda^+}} = \frac{\gamma^- e^{-\lambda(1-x)} - \gamma^+ e^{+\lambda(1-x)}}{\gamma^- e^{-\lambda} - \gamma^+ e^{+\lambda}}$$

$$F^-(x) = \frac{\gamma^+ \gamma^- e^{\lambda^- + \lambda^+ x} - \gamma^+ \gamma^- e^{\lambda^+ + \lambda^- x}}{\gamma^- e^{\lambda^-} - \gamma^+ e^{\lambda^+}} = \frac{e^{-\lambda(1-x)} - e^{+\lambda(1-x)}}{\gamma^- e^{-\lambda} - \gamma^+ e^{+\lambda}}$$

となる。

3. (i) $4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 2 + 2$ だから、 $P(4) = 5$

$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 3 + 1 + 1 = 4 + 1 = 2 + 2 + 1 = 3 + 2$ だから、 $P(5) = 7$

(ii) $p(n, m)$ は m 以下の数で n を分割する種類の数であるが、分割した項の中で一番大きい数が k であるような分割の種類の数は、残りの和が $n - k$ で k 以下の数で分割する分割の種類の数 $p(n - k, k)$ であるので、よって

$$p(n, m) = \sum_{k=1}^m p(n - k, k)$$

と表されることになる。

(iii) (ii) で得られた公式を使って順に計算していく。

$$\begin{aligned} p(8) &= p(8, 8) \\ &= p(7, 1) + p(6, 2) + p(5, 3) + p(4, 4) + p(3, 5) + p(2, 6) + p(1, 7) + p(0, 8) \\ &= 1 + \{p(5, 1) + p(4, 2)\} + \{p(4, 1) + p(3, 2) + p(2, 3)\} + 5 + 3 + 2 + 1 + 1 \\ &= 1 + (1 + 3) + (1 + 2 + 2) + 5 + 3 + 2 + 1 + 1 \\ &= 22 \end{aligned}$$

(iv) 与えられている $p(n, 2)$ の母関数の右辺の表式を展開して、 x の各次数ごとを眺めると

$$\begin{aligned} x^0 &: 1 \\ x^1 &: x^1 \\ x^2 &: x^2 + x^{1+1} \\ x^3 &: x^{2+1} + x^{1+1+1} \end{aligned}$$

のように x の指数は分割の仕方を示していることがわかる。

これをヒントに整数 n の一般の分割を考える。

整数 n の和分割で、整数 m ($m = [1, \infty)$) の数の項の数を a_m とと表すことにする。この分割を x の指数で示すと

$$x^n = x^{1a_1+2a_2+3a_3+\dots} = x^{1a_1} x^{2a_2} x^{3a_3} \dots$$

となる。これを逆に考えると、任意の数の組 $\{a_m\}$ ($m = [1, \infty)$) は、上式で計算される n の分割の一例になっている。

ここで $p(n, 2)$ の例を思い出して

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots$$

という式を考える。これを展開すると x の n 次の項の係数は n の分割の種類の数となっている。すなわち、これは $p(n)$ の母関数である。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{1-x^3} \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^{k+1}} \end{aligned}$$

となる。よって

$$f_k(x) = 1 - x^{k+1}$$

と求まる。

教育 物理 解答

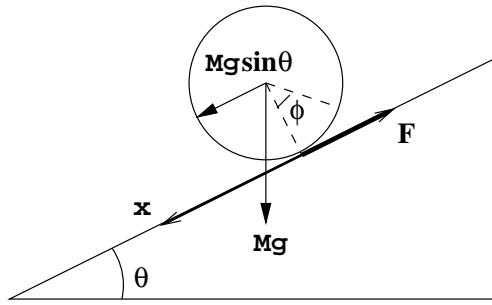
1. 問題の状況は右図の様である。

(i) 重心の運動方程式は次の通りである。

$$M\ddot{x} = Mg \sin \theta - F$$

(ii) 円盤の密度を $\rho = M/\pi R^2$ として慣性モーメント I は

$$I = \int_0^R \rho r^2 \cdot 2\pi r \cdot dr = 2\pi\rho \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2$$



となる。回転の運動方程式は、図の反時計回りを回転角速度 omega の正の向きとして、

$$I\ddot{\omega} = FR \quad \therefore \quad \frac{1}{2}MR^2\ddot{\omega} = FR$$

(iii) すべりがないので明らかに次式が成り立つ。

$$v = R\omega$$

(iv) 前問での結果を総合して、摩擦力 F を消去すると、

$$\dot{v} = \frac{2}{3}g \sin \theta$$

を得る。摩擦があるときは摩擦がないときの $\frac{2}{3}$ 倍の加速度をもつことになる。

2. (i) ループを貫く磁束を Φ としたとき、起電力 V は Faraday の電磁誘導の法則より、

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

である。起電力の向きは磁場に対して右向きであるが、問題の図ではループの反時計回りである。

磁束の変化分はループのうち y 軸と並行な上側の金属線が通過する磁束である。金属線の速度 v が負の値であることに注意して $d\Phi = BvLdt$ よって起電力は

$$V = -BvL \quad (> 0)$$

ループの抵抗 R は $R = \rho 4L/s$ と表される。流れる電流 I は

$$I = \frac{V}{R} = -\frac{Bsv}{4\rho} \quad (> 0)$$

電流は図では反時計回りに流れる。

(ii) z 軸に平行な線にかかる力は相殺し、 z 軸に垂直な線に働く力のみが残る。

$$F = IBL = -\frac{B^2 s L v}{4\rho}$$

この力は上向きである。

(iii) ループの質量 m は $m = 4Lsd$ と表される。運動方程式は

$$m\dot{v} = F - mg$$

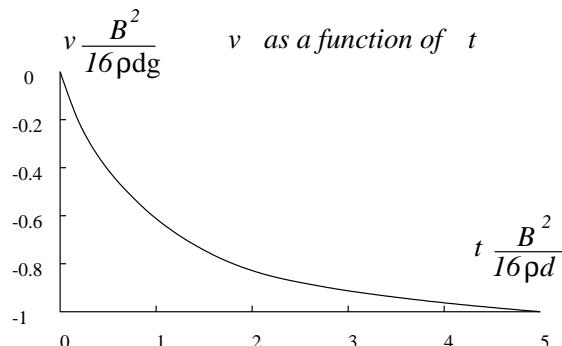
(iv) 前問で得られた運動方程式を整理して

$$\dot{v} = -\frac{B^2}{16\rho d}v - g$$

となる。これを初期条件 $v(0) = 0$ のもとで解くと、

$$v = \frac{16\rho dg}{B^2} \left[\exp \left(-\frac{B^2}{16\rho d} t \right) - 1 \right]$$

この v の時間変化は右図の様である。



3. (i) 全内部エネルギー U は

$$U = u(T) \times V = 3pV \quad \therefore dU = 3(pdV + Vdp)$$

断熱過程であるので

$$dU = dQ' - pdV = -pdV$$

よって、

$$4pdV + 3Vdp = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{4}{3} \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \quad \rightarrow \quad \frac{4}{3} \log V = -\log p + c$$

$$\therefore pV^{4/3} = \text{const}$$

(ii) 等温過程で $u(T)$ は一定なので p も一定となる。

$p - V$ 図は右図の通り。

(iii) 等温過程では p が一定 $dp = 0$ なので

$$dU = 3pdV$$

となる。また流入する微小熱量を dQ' として

$$dU = dQ' - pdV$$

よって

$$dQ' = 4pdV$$

これより流入する熱量は体積の差に比例することがわかる。熱量 Q_1, Q_2 は以下の通り。

$$Q_1 = \int_A^B dQ' = 4p(V_B - V_A) = \frac{4}{3}u(T_1)(V_B - V_A) > 0 \quad \text{吸熱}$$

$$Q_2 = \frac{4}{3}u(T_2)(V_D - V_C) < 0 \quad \text{放熱}$$

(iv) 可逆なのでエントロピー収支は 0 である。すなわち、

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

前問の結果を代入して

$$\frac{4}{3} \frac{u(T_1)(V_B - V_A)}{T_1} + \frac{4}{3} \frac{u(T_2)(V_D - V_C)}{T_2} = 0$$

設問 (i) で示された定理から

$$u(T_1)V_A^{4/3} = u(T_2)V_D^{4/3} \quad u(T_1)V_B^{4/3} = u(T_2)V_C^{4/3}$$

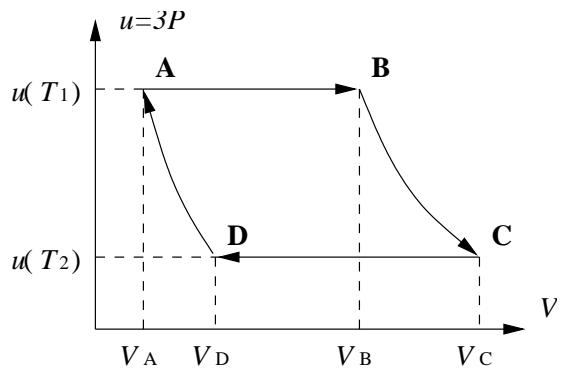
が得られ、これから V_C, V_D を V_A, V_B で表わしたものを作成すると

$$\frac{u(T_1)}{T_1} - \frac{u(T_2)}{T_2} \left(\frac{u(T_1)}{u(T_2)} \right)^{3/4} = 0$$

となり、これにより

$$\frac{u(T_1)^{1/4}}{T_1} = \frac{u(T_2)^{1/4}}{T_2}$$

が示される。



1993年度 入学試験 物理専門科目

専攻 問題 1

質量 m 、電荷 e をもつ一次元の調和振動子がある。時刻 $t = 0$ に一定一様な電場 $F(> 0)$ が急激に印加されたとき、以下の間に答えよ。ただし、ハミルトニアンは

$$H = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} & (t < 0) \\ \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - eFx & (t \geq 0) \end{cases}$$

であり、 $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$ である。また必要ならば問題末の式を証明無しに用いてよい。

1. $t < 0$ のハミルトニアンに対応する定常状態について、

- (i) シュレーディンガー方程式を解き、エネルギー固有値 ε_n と固有関数 $\psi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ。
- (ii) 横軸を x 、縦軸をエネルギーとして、ポテンシャルの概形を描き、基底状態を含め下から三番目までのエネルギー準位を図中に記入せよ。さらに、それぞれの準位に対応した固有関数の概形を描け。

2. $t \geq 0$ のハミルトニアンに対応する定常状態について、

- (i) ポテンシャルの概形を設問 1 で描いた図中に記入せよ。
- (ii) シュレーディンガー方程式を解き、エネルギー固有値 E_n と固有関数 $\varphi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ。

3. $t < 0$ で基底状態にいた調和振動子の $t \geq 0$ での状態・運動を考える。

$t \geq 0$ のハミルトニアンのもとで波動関数は、

$$\psi(x, t) = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \psi(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}, \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x)$$

に従って時間発展する。ここで、 E_n は $t \geq 0$ でのエネルギー固有値、 $\varphi_n(x)$ は固有関数、 A_n は $\psi(x, 0)$ を $\varphi_n(x)$ で展開したときの展開係数である。またこの時の初期状態 $\psi(x, 0)$ は、 $t < 0$ での基底状態 $\psi_0(x)$ である。

- (i) $t \geq 0$ で n 番目の固有状態にいる確率を求めよ。また、この確率はどのような確率分布に従うか述べよ。
- (ii) $t \geq 0$ で粒子の存在確率 $|\psi(x, t)|^2$ が最大の位置 $x_{\max}(t)$ はどのように時間発展するか調べよ。また、古典的な一次元調和振動子の運動と比較してみよ。

(参考) エルミート多項式

定義
$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

微分方程式
$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} + 2n \right] H_n = 0$$

母関数
$$e^{-s^2+2sz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(z)$$

直交性
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz H_n(z) H_m(z) e^{-z^2} = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}$$

専攻 問題 2

z 方向に一様で断面の形が一定な中空の導体管内を z 方向に伝播する電磁波を考える(図 1)。真空の誘電率を ϵ_0 、真空の透磁率を μ_0 とする時、以下の設問に答えよ。

- ある境界条件のもとで Maxwell 方程式に従う電場、磁場をそれぞれ

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y) \exp\{i(kz - \omega t)\} \quad \vec{H} = \vec{H}_0(x, y) \exp\{i(kz - \omega t)\} \quad \cdots (1)$$

とし

$$\vec{E}_0 = (E_x, E_y, E_z) \quad \vec{H}_0 = (H_x, H_y, H_z)$$

と置く時、 E_x, E_y, H_x, H_y を $\frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_z}{\partial y}, \frac{\partial H_z}{\partial x}, \frac{\partial H_z}{\partial y}$ で表せ。

- E_z, H_z がそれぞれ満たす二階偏微分方程式を求めよ。又、このような導体管内を伝播する電磁波は、TM 波と TE 波に分けて考えることができる。その理由を述べよ。但し、TM 波とは進行方向の磁場成分が 0 であるような電磁波であり、TE 波とは進行方向の電場成分が 0 であるような電磁波である。
- 図 2 のように、断面が長方形 ($a > b$) の時、 ω と k との関係を求めよ。又、位相速度を $v_p (= \omega/k)$ 、群速度を $v_g (= \partial \omega / \partial k)$ とする時

$$v_p \cdot v_g = c^2$$

である事を示せ。但し、 $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ である。

- 前問で最小の ω を与える電場、磁場を求めよ。

- 電磁波の進行方向に一定の間隔 L で同じ形の導体板を取り付けた(図 3)。この時の ω と k の関係について議論せよ。

ヒント: $E(z)$ が解である時、 $E(z + L)$ も解である事を使え。

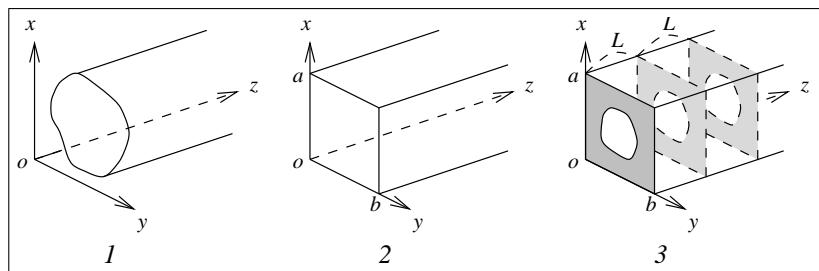
(参考)Maxwell 方程式は次のように書く
ことができる。

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \cdots (2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \cdots (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \cdots (4)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \cdots (5)$$



但し、 $\vec{D}, \vec{E}, \vec{B}, \vec{H}$ はそれぞれ電束密度、電場、磁束密度、磁場(磁場の強さ)である。また ρ, \vec{j} はそれぞれ電荷密度、電流密度である。

専攻 問題 3

スピン 1 の強磁性イジング模型

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} I_i I_j + \sum_i D I_i^2 \quad (I_i, I_j = +1, 0, -1)$$

を考える。ここで、 I_i は i 番目の原子のスピン、 D は結晶場の効果を表すパラメータ、 J_{ij} は I_i と I_j の間の交換相互作用であり、最近接原子間では $J_{ij} = J (J > 0)$ 、それ以外は $J_{ij} = 0$ とする。この系の相転移を分子場近似で考察する。各原子のまわりの最近接原子の数を z 、ボルツマン定数を k とし、以下の間に答えよ。

1. i 番目の原子に着目すると、 I_i に対する有効ハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_i = -B_{\text{eff}} I_i + D I_i^2$$

と書ける。 i 以外の原子 j のスピンの平均磁化 $M = \langle I_j \rangle$ で置き換えたとき、 B_{eff} を z, J, M で表せ。さらに、 B_{eff} の物理的意味を記せ。

2. \mathcal{H}_i の固有値を用いて、温度 T における I_i の平均 $\langle I_i \rangle$ を M で表せ。

3. $\langle I_i \rangle = M$ と置くことにより、 M を与える式が得られる。このとき、

- (i) $D/(zJ) \rightarrow -\infty$
- (ii) $D/(zJ) = 0$
- (iii) $D/(zJ) \rightarrow +\infty$

のそれぞれの場合について、 $M = 0$ (常磁性状態) の他に $M \neq 0$ (強磁性状態) の解が存在するかどうかを議論し、存在する場合にはその臨界温度 T_c を求めよ。

4. D を $D = 0$ から増加させると、ある臨界的な値 $D_t > 0$ を境として、常磁性と強磁性間の相転移が二次から一次に変化する。そのような D_t と転移温度 T_t を求めよ。(ヒント： $\langle I_i \rangle$ を M に関して 3 次まで展開し、その係数の符号を議論せよ。)
5. 横軸 D 、縦軸 T の平面における相図を図示せよ。ただし、境界を与える曲線の方程式などを具体的に求める必要はなく、非常に定性的なものでよい。

専攻 問題 4

1. 重陽子 d は陽子 p と中性子 n からなる原子核である。その基底状態は結合エネルギー 2.2 MeV で弱く束縛されており、その核スピン \vec{I} の値 I は 1 である。また、p と n のもつスピン角運動量の和を S 、軌道角運動量の和を L とすると $I = L + S$ 、 $S = 1$ 、 $L = 0, 2$ であることが知られている。(なお、角運動量の単位は \hbar である。) 以下の問において、必要なら、下表の値を使ってよい。

	p	n	d (基底状態)
スピン	1/2	1/2	1
磁気モーメント(単位: μ_N)	2.793	-1.913	0.857
電気的 4 重極モーメント(cm^2)	0	0	0.274×10^{-26}

但し、 $\mu_N(\text{核磁子}) = e\hbar/(2M_p c)$ M_p : 陽子の静止質量

- (i) 二核子系のうちで束縛状態をもつのは p-n 系(重陽子)のみで、p-p 系、n-n 系には束縛状態はない。他方、核力の荷電不变性(p-p,p-n,n-n 間の核力は同じスピン及びパリティ状態においては同等である)は良い精度で成り立つことが知られている。この二つの事実は矛盾しないことを示せ。
- (ii) 重陽子の基底状態においては、主に $L = 0$ (S 状態)であるが、小さな確率で $L = 2$ の状態(D 状態)が混ざっている。上の表を参照して、D 状態の存在の証拠と考えられることを二つ挙げ、理由を示せ。
- (iii) 水素原子及び重水素原子を考える。 g_I を陽子あるいは重陽子の g 因子、 α を両原子について同一の比例定数とすると、電子(スピン \vec{J})と原子核(スピン \vec{I})との間に $\alpha g_I \vec{J} \cdot \vec{I}$ に等しい相互作用が働くため、原子のもつ全角運動量 \vec{F} ($\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$) の大きさによって原子のエネルギー準位がわかれる(超微細構造)。 $\vec{J} \cdot \vec{I}$ の期待値を F, J, I (それぞれ、スピン $\vec{F}, \vec{J}, \vec{I}$ の大きさ)で表せ。
- $J = 1/2$ の時、水素原子は $F = 0, 1$ 、重水素原子は $F = 1/2, 3/2$ の値を持つ。異なる F の値をもつ準位間のエネルギー差は、水素原子の場合 5.9×10^{-6} eV である。重水素原子の場合の同様なエネルギー差を有効数字 1 衔で求めよ。

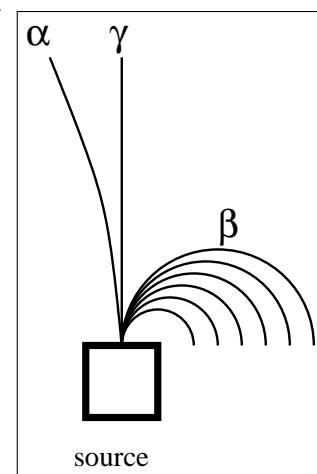
2. 図 1 は、紙面に垂直に一様に磁場をかけたとき、 α 線、 β 線、 γ 線の描く軌道を模式的に示したものである。 α 崩壊、 β 崩壊、 γ 崩壊のいずれにおいても、崩壊の始状態と終状態は一つであるとする。以下の問に答えよ。

- (i) 磁場の向きや各放射線の基本的性質について、図 1 から分かることを簡潔に記せ。

- (ii) α 崩壊の Q 値(崩壊の始状態と終状態の静止質量の差)を 5 MeV、 γ 崩壊の遷移エネルギーを 1 MeV とする。 α 崩壊あるいは γ 崩壊により、終核に与えられる反跳エネルギーはそれぞれいくらか。有効数字 1 衔で答えよ。但し、崩壊する核(親核)の質量数をいずれの場合も 200、核子の静止質量を 940 MeV とせよ。
- (iii) β 崩壊においては、静止質量がゼロか非常に小さい反電子ニュートリノ($\bar{\nu}_e$)も放出される。

図 1 において、 β 線がさまざまな軌道を示すのは、 $\bar{\nu}_e$ の存在の影響である。その理由を説明せよ。

$\bar{\nu}_e$ の存在の直接的な実験的検証は、 $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ 反応によって生じる陽電子 e^+ と中性子 n を同時に検出することにより行なわれた。 e^+ および n を実験的に検出する方法を考え、その原理を簡潔に記せ。



専攻 問題 5

固体結晶内の電子について次の間に答えよ。

1. 結晶内で周期的に変化するポテンシャル場 $U(\vec{r})$ の中を運動する電子に対するシュレーディンガー方程式

$$H\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right) \Psi = E\Psi, \quad U(\vec{r} + \vec{R}) = U(\vec{r})$$

の固有関数 $\Psi(\vec{r})$ は、 \vec{k} を波数ベクトルとするとき

$$\Psi(\vec{r} + \vec{R}) = e^{i\vec{k}\vec{R}}\Psi(\vec{r}) \quad \cdots (1)$$

という性質(プロッホの定理)を持つことを示せ。ただし、 m は電子質量で、 \vec{R} は格子ベクトルで基本ベクトル \vec{d}_i と整数 $n_i(i=1, 2, 3)$ を用いて $\vec{R} = n_1\vec{d}_1 + n_2\vec{d}_2 + n_3\vec{d}_3$ と表される。

2. 一次元空間において異なる二種類の原子 A と B がそれぞれ $x = na, na + b$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, 0 < b < a$) の位置に交互に並んだ二原子結晶において、強く原子に束縛された電子のエネルギーバンドを求めるこころを考える。A 原子と B 原子が孤立した時に電子が受けるポテンシャルをそれぞれ $U_A(x), U_B(x)$ 、その時の原子軌道関数を $\phi_A(x), \phi_B(x)$ (共に実数とする)、固有エネルギーを E_A, E_B とし、結晶のハミルトニアンを

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \quad U(x) = \sum_n U_A(x - na) + \sum_n U_B(x - na - b)$$

とする。原子間の相互作用としては隣り合う原子間のポテンシャルを介した相互作用のみを考え、隣り合う原子軌道関数同士の単なる重なり積分(非直交性)は無視するものとする。

- (i) 各原子の波動関数を用いて近似した線形結合の式

$$\Psi_A(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{ikna} \phi_A(x - na) \quad \Psi_B(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{ikna} \phi_B(x - na - b)$$

はプロッホの条件式 (1) を満足することを示せ。ただし、 N は結晶全体に含まれる単位格子の数である。

- (ii) ハミルトニアン H の Ψ_A, Ψ_B に対する行列要素

$$H_{AA}, H_{BB}, H_{AB}, H_{BA}$$

を求めよ。ただし、隣り合う軌道関数同士の重なり積分を無視するときは

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv \int dx \phi_A(x) U_A(x) \phi_B(x - b) = \int dx \phi_A(x) U_B(x - b) \phi_B(x - b) \\ &= \frac{1}{2} \int dx \phi_A(x) \{U_A(x) + U_B(x - b)\} \phi_B(x - b) \\ \gamma' &\equiv \int dx \phi_A(x) U_A(x) \phi_B(x + a - b) = \int dx \phi_A(x) U_B(x + a - b) \phi_B(x + a - b) \\ &= \frac{1}{2} \int dx \phi_A(x) \{U_A(x) + U_B(x + a - b)\} \phi_B(x + a - b) \end{aligned}$$

としてよい。

- (iii) $E_A, E_B, \gamma, \gamma'$ を用いて固有エネルギー $E(k)$ を求めよ。エネルギーバンドの図を横軸を波数 k 、縦軸をエネルギー $E(k)$ として描け。

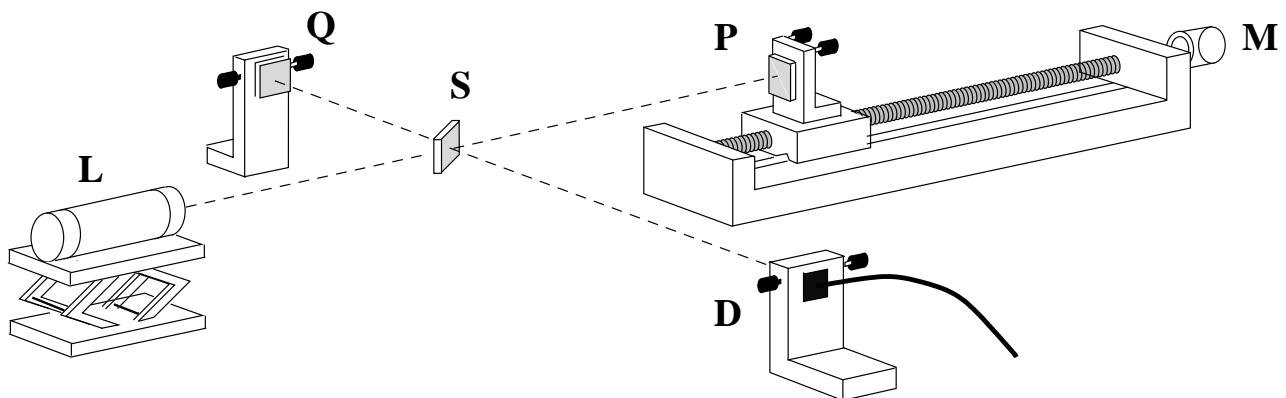
- (iv) エネルギーバンドのギャップと各バンドの幅を求めよ。

- (v) 第一ブリルアン域 $(-\pi/a \leq k < \pi/a)$ の中に含まれる全状態数はどれだけか、また、A,B 原子が各一個ずつ電子を持つ時、電子はバンド内にどのように分布するか。

専攻 問題 6

図は、レーザー光源を用いたマイケルソン型光干渉計である。L は周波数の安定な出力 1 mW の He-Ne レーザー光源（波長 $0.63 \mu\text{m}$ ）、P、Q はそれぞれ高い反射率の平面鏡、S は半透鏡、D は光検出器（一個の光子が入ると外部回路に一個の電子を流し得る電流源素子）である。これらは、S を除き、それぞれ、干渉信号を得られるように、調整機構を備えた保持具に取り付けられている。図に示すノブで変位または角度の自由度が調整できる。また、鏡 P は、モーター M により、光源の方向に動かせるとする。これらの保持具は、実験台にネジで固定されており、全体の大きさは 1 m 程度である。光速は $3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、プランク定数 h は、 $6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 、電子の電荷は、 $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ として、以下の設問に答えよ。

1. S で分けられた光が、それぞれ P、Q で反射して、再び S で合わさると、干渉を起こし、D には、干渉信号が現れる。干渉信号を得るために、S に最低限必要な調整自由度を持つ保持具を考え、図示せよ。
2. D に 50Ω の抵抗を接続する。光の強度を強め合う干渉があきている時の抵抗の両端の電圧を評価せよ。また、P の変位の微小変化に対し、出力電圧の変化が最大になるように P の位置を設定した時、そのまわりで、P の位置変化 1 nm に対する出力電圧の変化を評価せよ。
3. P がある時刻から急に 10 m/s^2 の加速度で外向きに運動し始めたとする。P の速度が 10 cm/s のときの干渉信号は、どのようなものか。また、この干渉信号の時間変化を測定・記録するために考えられる測定器・装置を図解し、必要な性能を述べよ。
4. マイケルソンらは、この種の干渉計 (SQ 又は SP 間の距離約 11 m) を静かな地下室に設置して、干渉信号をモニターすることにより、光速度が光源の速度に依存しないことを 100 分の 1 程度の精度で示した。その原理を簡潔に説明し、この精度を決めている実験的要因を論ぜよ。ただし、地球の太陽周りの公転運動の周速度は、約 30 km/s である。



専攻 問題 7

1. 溫血動物の細胞内のイオン組成は、細胞外液(例えば血液)のイオン組成とは大きく異なっている。一価の無機イオンに関して表 1 にモル濃度で示す。

(i) 神経細胞や筋肉細胞のように電気的に「興奮」し、活動電位を生じる細胞では、静止時の細胞内電位は細胞外に対して負である。これは静止時の細胞が K^+ に対してのみ高い透過性を示し、 K^+ の濃淡電池とみなせるからである。静止時の細胞内電位を表 1 に基づいて計算せよ。但し、ガス定数を R 、ファラデー定数を F とするとき、

$$\frac{RT}{F \log_{10} e} = 60\text{mV}$$

を用いよ。

- (ii) 活動電位を生じる時は、細胞内電位は一過性に正となる。この時、細胞膜の一価性のイオンの透過性はどのように変化していると考えられるか、三行以内で簡潔に述べよ。
- (iii) 一価性イオンの細胞内外の濃度勾配を表 1 のように変化させ、細胞を「充電」状態に保っている機構について、三行以内で簡潔に述べよ。
- (iv) 細胞内外の濃度勾配はある二価の陽イオンに関して特に著名である。この陽イオンについて、その細胞活性制御の働きに触れつつ述べよ。
2. タンパク質のアミノ酸配列は、DNA の塩基配列が先ず RNA に転写され、これが遺伝暗号表にしたがって翻訳されて、決定される。表 2 に示した RNA → アミノ酸の暗号表を参考にして次の問題に答えよ。

- (i) 暗号表やタンパク質のアミノ酸組成はあまり生物種によらないが、DNA の塩基組成は、種によつて大きく異なる。たとえば、高温に耐える生物では、Cytosine(C) や Guanine(G) が多く、低温に生きる生物では Adenine(A) や Thymine(T) が多い。
- このようなアミノ酸組成と DNA 塩基組成の配列は暗号表のどのような性質に基づいているか。
 - DNA の塩基組成の上記のような多様性の理由は何か。
- (ii) 第一塩基と第二塐基が同じアミノ酸(例えば、Phe と Leu、Ile と Met、Asp と Glu、Ser と Arg) は互いに類似している。
- 上記 4 つの組は、それぞれどのような点で類似しているか。
 - 上記のような暗号表の性質は、どのような点で生物に有利か。

表 1

	細胞内 (mol/l)	細胞外 (mol/l)
K^+	0.100	0.005
Na^+	0.010	0.150
Cl^-	0.010	0.155

表 2

First position (5' end)	Second position				Third position (3' end)
	U	C	A	G	
U	Phe	Ser	Tyr	Cys	U
	Phe	Ser	Tyr	Cys	C
	Leu	Ser	Stop	Stop	A
	Leu	Ser	Stop	Trp	G
C	Leu	Pro	His	Arg	U
	Leu	Pro	His	Arg	C
	Leu	Pro	Gln	Arg	A
	Leu	Pro	Gln	Arg	G
A	Ile	Thr	Asn	Ser	U
	Ile	Thr	Asn	Ser	C
	Ile	Thr	Lys	Arg	A
	Met	Thr	Lys	Arg	G
G	Val	Ala	Asp	Gly	U
	Val	Ala	Asp	Gly	C
	Val	Ala	Glu	Gly	A
	Val	Ala	Glu	Gly	G

専攻 問題 8

- 図 1 は三次元的な黒とかけと白とかけがひしめきあって、平面の上に規則正しく並んでいる様を真上から見た図である。これが無限に広がっていると見なし、どの様な三次元的対称操作が含まれているかを略記せよ。また対称操作を特徴付ける要素を、問題 8 用の特別解答用紙の付図の中に図示せよ。
- 図 1 の中には、鏡映 $((x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$ など) と反転 $((x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z))$ の三次元的対称操作はない。同じように、タンパク質分子や、その結晶についても、鏡映と反転操作はない事が知られている。それはなぜかを考え、タンパク質の構成要素であるアミノ酸残基や、二次構造の特色に触れつつ述べよ。
- タンパク質結晶の X 線回折パターンは、タンパク質分子構造 $\rho(x, y, z)$ の三次元的フーリエ変換 $F(X, Y, Z)$ 自身ではなく、その強度 $|F(X, Y, Z)|^2$ をあたえる。このことは、 $F = |F| \exp(i\alpha)$ とする時、 F の位相角 α についての情報が失われたことを意味する。これを位相問題と呼ぶ。位相問題を克服するには、いくつかの方法があるが、タンパク質のように、分子量が 20,000 を越えるものでは、重原子同型置換法が有効である。この方法では、タンパク質そのものの結晶の X 線回折パターン $|F|^2$ の情報と、タンパク質の特定の場所 (例えば、 (x_1, y_2, z_3)) に重原子を附加的に結合させた結晶の X 線回折パターン $|F_H|^2$ の情報を組み合わせて位相角を求めようとする。

- (i) どのように、2 種類の X 線回折パターンの情報を組み合わせるのかを図示しつつ述べよ。但し、重原子を附加したタンパク質構造を $\rho_H(x, y, z)$ とし、そのフーリエ変換を $F_H(X, Y, Z)$ とし、重原子の附加した位置を (x_1, y_1, z_1) とし、重原子のみのフーリエ変換を $f_H(X, Y, Z)$ とせよ。また、フーリエ変換の定義としては、

$$F(X, Y, Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y, z) \exp(2\pi i(Xx + Yy + Zz)) dx dy dz$$

を用いよ。また同型置換とは、数式的には $F_H = F + f_H$ と表現できることに留意せよ。

- (ii) 上記の $|F|^2$ と $|F_H|^2$ の 2 種類の情報からは、位相角を二つの値に限定できるが、一意的には決定できない。一意的決定には、別の場所に重原子を附加した結晶の回折パターンが必要である。その理由を述べよ。



専攻 問題 1 解答

1. (i) シュレディンガー方程式は

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \psi_n(x) = \varepsilon_n \psi_n(x)$$

長さの次元を持つ量 λ を用いて、方程式を無次元化することを考える。つまり

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad y = x/\lambda$$

とおいて、シュレーディンガー方程式を書き直す。すると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2 \right) \psi_n(\lambda y) = -\frac{2\varepsilon_n}{\hbar\omega} \psi_n(\lambda y)$$

となる。この方程式は $y \rightarrow \infty$ の極限で

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2 \right) \psi_n(\lambda y) = 0$$

に帰着し、その漸近解は $\psi_n(\lambda y) = e^{\pm y^2/2}$ だから、($y \rightarrow \infty$ の極限で波動関数が発散しないことを要求して)

$$\psi_n(\lambda y) = e^{-y^2/2} \phi_n(y)$$

とおく。 ψ についての方程式を ϕ についての方程式に書き直すと

$$\phi_n''(y) - 2y\phi_n'(y) + \left(\frac{2\varepsilon_n}{\hbar\omega} - 1 \right) \phi_n(y) = 0$$

これはエルミート多項式の満たす微分方程式だから、ただちに

$$\phi_n(y) = N_n H_n(y), \quad \varepsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

を得る。つまり

$$\psi_n(x) = N_n e^{-x^2/2\lambda^2} H_n(x/\lambda), \quad \varepsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

となる。ただし

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad \frac{1}{2} m\omega^2 \lambda^2 = \frac{1}{2} \hbar\omega \quad (\text{すなわち零点振動の古典的半径})$$

N_n は規格化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_n(x) \psi_n(x) = N_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d(\lambda y) e^{-y^2} H_n(y) H_n(y) = N_n^2 \lambda \sqrt{\pi} 2^n n! = 1$$

から、

$$N_n = (\lambda \sqrt{\pi} 2^n n!)^{-1/2}$$

(ii) $\lambda = 1$ で規格化した波動関数は

$$\psi_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-x^2/2}$$

$$\psi_1(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/2} 2x$$

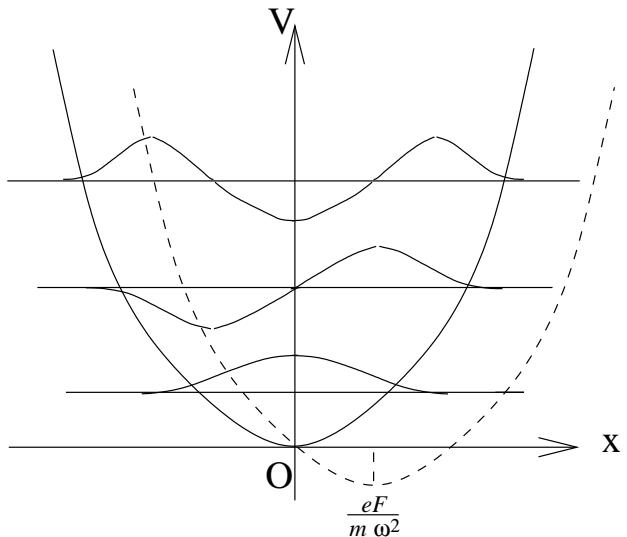
$$\psi_2(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-x^2/2} (4x^2 - 2)$$

$$\psi'_0(x) = -\pi^{-\frac{1}{4}} e^{-x^2/2} x$$

$$\psi'_1(x) = -\pi^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/2} 2(x^2 - 1)$$

$$\psi'_2(x) = -\pi^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-x^2/2} (4x^2 - 10)x$$

従って右図のようになる。



2. (i) ポテンシャルは前問の図の点線のようになる。

(ii)

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x - \frac{eF}{m\omega^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{e^2 F^2}{m\omega^2}$$

電場のかかったポテンシャルのつりあいの位置 $x_0 = \frac{eF}{m\omega^2}$ を座標原点に、 $\varepsilon = -\frac{1}{2} \frac{e^2 F^2}{m\omega^2} = -\frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2$ をエネルギー原点とすると設問 1 と同じになる。従って

$$\xi = x - x_0$$

$$\varepsilon_n = E_n - \varepsilon$$

とおくことにより 1(i) の場合と同様に解ける。答えは

$$\varphi_n(x) = N_n e^{-\xi^2/2\lambda^2} H_n(\xi/\lambda) \quad \xi = x - x_0, \quad x_0 = \frac{eF}{m\omega^2}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$N_n = (\lambda \sqrt{\pi} 2^n n!)^{-1/2} \quad E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \varepsilon, \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} \frac{e^2 F^2}{m\omega^2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

となる。

3. (i) $\varphi_n(x)$ の直交性から、

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi_n(x) \psi(x, t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi_n(x) \psi_0(x) \\ &= N_0 N_n \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{\xi^2}{2\lambda^2}} e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} H_n(\xi/\lambda) H_0(x/\lambda) \end{aligned}$$

ここで

$$z = \frac{\xi}{\lambda}, \quad \frac{eF}{\lambda m\omega^2} = \alpha \quad (\lambda \text{ で規格化したつりあいの位置})$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} A_n &= N_0 N_n \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{z^2}{2}} e^{-\frac{(z+\alpha)^2}{2}} H_n(z) H_0(z+\alpha) \lambda \\ &= N_0 N_n \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{\alpha^2}{4}} e^{-(\frac{\alpha}{2})^2 - z\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z) H_0(z+\alpha) \lambda \end{aligned}$$

$H_0(z) = 1$ を考慮すると

$$= N_0 N_n \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{\alpha^2}{4}} e^{-(\frac{\alpha}{2})^2 - z\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z) \lambda$$

また、エルミート多項式の母関数から、 $s = -\frac{\alpha}{2}$ とすれば、

$$\exp\left(-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - z\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{\alpha}{2})^n}{n!} H_n(z)$$

これを上の式に代入すると、

$$\begin{aligned} A_n &= N_0 N_n \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{\alpha}{2})^k}{k!} H_k(z) e^{-z^2} H_n(z) \lambda \\ &= N_0 N_n \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \frac{(-\frac{\alpha}{2})^k}{k!} H_k(z) e^{-z^2} H_n(z) \lambda \\ &= N_0 N_n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \frac{(-\frac{\alpha}{2})^k}{k!} \sqrt{\pi} 2^k k! \delta_{nk} \lambda \\ &= N_0 N_n e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \frac{(-\frac{\alpha}{2})^n}{n!} \sqrt{\pi} 2^n n! \lambda \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{4}} (-\alpha)^n \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \end{aligned}$$

つまり

$$|A_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|^2 = |A_n|^2 = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (-\alpha)^{2n} \frac{1}{2^n n!} = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^n \frac{1}{n!}$$

すなわち任意の時刻で系のエネルギーを測定するとエネルギー観測値の分布はポアソン分布となる。ただし

$$\alpha = \frac{eF}{\lambda m \omega^2}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega}}$$

(ii) 3(i), 2(ii) の結果から、

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sum_n e^{-\frac{\alpha^2}{4}} (-\alpha)^n \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{\sqrt{\lambda \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\xi^2}{2\lambda^2}} H_n(z) e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t - i\frac{\varepsilon}{\hbar}t} \\ &= e^{-\frac{i\omega t}{2} - i\frac{\varepsilon}{\hbar}t} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{\lambda \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \sum_n \left(\frac{-\alpha}{2} e^{-i\omega t}\right)^n \frac{1}{n!} H_n(z) \end{aligned}$$

エルミート多項式の母関数より、

$$= e^{-\frac{i\omega t}{2} - i\frac{\varepsilon}{\hbar}t} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{\lambda \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4} e^{-2i\omega t} - \alpha e^{-i\omega t} z\right)$$

よって、 $|\psi(x, t)|^2$ は、

$$\begin{aligned} |\psi(x, t)|^2 &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{1}{\lambda \sqrt{\pi}} e^{-z^2} \exp\left(\frac{-\alpha^2}{2} \cos 2\omega t - \alpha 2z \cos \omega t\right) \\ &= \frac{1}{\lambda \sqrt{\pi}} \exp(-(z - \alpha \cos \omega t)^2) \end{aligned}$$

すなわち波動関数は中心 $z = -\alpha \cos \omega t$ のガウス分布となる。 x で表せば

$$x_{\max}(t) = \lambda \alpha (1 - \cos \omega t) = \frac{eF}{m \omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

これは $t = 0$ で原点に静止していた古典粒子の $t \geq 0$ のときのポテンシャル中における運動と一緒にである。

専攻 問題 2 解答

1. 与えられた電場、磁場の式 (1) を $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{j} = 0$ の条件のもと、Maxwell 方程式 (3), (5) に代入すると、

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial E_z}{\partial y} - ikE_y = +i\mu_0\omega H_x & \cdots (A) \\ ikE_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = +i\mu_0\omega H_y & \cdots (B) \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = +i\mu_0\omega H_z & \cdots (E) \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - ikH_y = -i\epsilon_0\omega E_x & \cdots (C) \\ ikH_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\epsilon_0\omega E_y & \cdots (D) \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i\epsilon_0\omega E_z & \cdots (F) \end{array}$$

を得る。

$$\begin{aligned} (A) \times \epsilon_0\omega + (D) \times k &\quad \text{より} \quad H_x = i \frac{k \frac{\partial H_z}{\partial x} - \epsilon_0\omega \frac{\partial E_z}{\partial y}}{(\omega/c)^2 - k^2} \\ (A) \times k + (D) \times \mu_0\omega &\quad \text{より} \quad E_y = i \frac{k \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mu_0\omega \frac{\partial H_z}{\partial x}}{(\omega/c)^2 - k^2} \\ (B) \times (-\epsilon_0\omega) + (C) \times k &\quad \text{より} \quad H_y = i \frac{k \frac{\partial H_z}{\partial y} + \epsilon_0\omega \frac{\partial E_z}{\partial x}}{(\omega/c)^2 - k^2} \\ (B) \times k + (C) \times (-\mu_0\omega) &\quad \text{より} \quad E_x = i \frac{k \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu_0\omega \frac{\partial H_z}{\partial y}}{(\omega/c)^2 - k^2} \end{aligned}$$

2. (E), (F) より、

$$H_z = \frac{1}{i\mu_0\omega} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right), \quad E_z = -\frac{1}{i\epsilon_0\omega} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

これに 1 の結果を代入すると、

$$H_z = \frac{1}{(\omega/c)^2 - k^2} \frac{1}{\mu_0\omega} \left[k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mu_0\omega \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - k \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \mu_0\omega \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} \right]$$

整理して、

$$H_z = -\frac{1}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) H_z \quad \cdots (1)$$

同様にして

$$E_z = -\frac{1}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_z \quad \cdots (2)$$

上で得た方程式は H_z, E_z が混ざり合っていない方程式であり、かつ、 $H_z = 0, E_z = 0$ は解であるので TM 波、TE 波に分けて考えることができる。

3. 導体面上での電場と磁場の接続を考える。完全導体の場合、導体内の電場と磁場は 0 である。導体面と平行な成分を E_t, H_t 、垂直な成分を E_n, H_n とする。すると

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{より } E_t = 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho & \text{より } E_n = \omega_e / \epsilon_0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} & \text{より } H_t = j_{\perp} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \text{より } H_n = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \omega_e : \text{表面電荷密度} \\ j_{\perp} : \text{磁場と垂直な表面電流密度} \end{array}$$

となる。

TM 波の場合

$H_z = 0$ とおく。また、 $x = 0, y = 0$ での境界条件を考慮して $E_z = C \sin \xi x \sin \zeta y$ とおく。式(2)に代入すると

$$\xi^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2$$

境界で $E_z = 0$ なので

$$\sin(\xi a) = 0 \quad \text{より } \xi = \frac{n\pi}{a}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\sin(\zeta b) = 0 \quad \text{より } \zeta = \frac{m\pi}{b}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

ここで $n = 0$ 及び $m = 0$ は $E_z = 0$ を与えるので除く。よって

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 = \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}\right)\pi^2 \quad \cdots (3)$$

TE 波の場合

$E_z = 0, H_z = D \cos \xi x \cos \zeta y$ とおく。式(1)に代入すると

$$\xi^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2$$

このとき

$$H_x = -i \frac{Dk\xi}{(\omega/c)^2 - k^2} \sin \xi x \cos \zeta y \quad H_y = -i \frac{Dk\zeta}{(\omega/c)^2 - k^2} \cos \xi x \sin \zeta y$$

であり境界条件 $x = 0, a$ で $H_x = 0, y = 0, b$ で $H_y = 0$ なので

$$\sin(\xi a) = 0 \quad \text{より } \xi = \frac{n\pi}{a}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\sin(\zeta b) = 0 \quad \text{より } \zeta = \frac{m\pi}{b}, \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

この場合も、

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 = \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}\right)\pi^2 \quad \cdots (4)$$

式(3)、(4)をまとめて、 ω と k の関係は

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 = \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}\right)\pi^2 \quad \begin{cases} m, n = 1, 2, 3, \dots & (\text{TM}) \\ m, n = 0, 1, 2, \dots & (\text{TE}) \end{cases} \quad (m, n) = (0, 0) \text{ は除く。} \quad \cdots (5)$$

この両辺を k で偏微分して

$$2 \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial k} - 2k = 0 \quad \frac{\omega}{k} \frac{\partial \omega}{\partial k} = v_p \cdot v_g = c^2$$

4. 式(5)より、

$$\omega_{mn} = c \sqrt{k^2 + \pi^2 \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)}$$

$a > b$ より最小の ω は TM 波の場合、 $m = n = 1$ すなわち $\omega_{11} = c \sqrt{k^2 + \pi^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right)}$ であり、TE 波の場合、 $m = n = 0$ の時は $\eta^2 = 0$ となり、これは H_x, E_y, H_y, E_x の表式を見ると、分母が 0 となるので除く必要がある。よって $m = 0, n = 1$ すなわち $\omega_{10} = c \sqrt{k^2 + \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} \right)}$ である。

$\omega_{11} > \omega_{10}$ より最小の ω を与える電場、磁場は $\omega = \omega_{10}$ の TE 波である。この時、電場と磁場の値は $E_z = 0, H_z = D \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$ より

$$E_x = 0, \quad E_y = i \frac{1}{(\omega/c)^2 - k^2} \frac{\mu_0 \omega \pi}{a} D \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$H_x = -i \frac{1}{(\omega/c)^2 - k^2} \frac{k \pi}{a} D \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right), \quad H_y = 0$$

となる。

5. 電場、磁場とも実数だから、 $E(z) = \frac{1}{2} (E_z \exp\{i(kz - \omega t)\} + E_z^* \exp\{-i(kz - \omega t)\})$ と書ける。解は周期的になることが予想され、 $E(z)$ と $E(z + L)$ は位相因子を除いて一致する。

$$E(z + L) = \frac{1}{2} (E_z \exp\{i(kz - \omega t)\} \exp(ikL) + E_z^* \exp\{-i(kz - \omega t)\} \exp(-ikL))$$

この式より kL は 2π の整数倍になる必要があり、前問までは連続変数だった k が離散変数になることが求められる。つまり、 $k = k_l = \frac{2\pi l}{L}$ (l : 整数)
よって、分散関係も前問より

$$\omega_{nml} = c \sqrt{k_l^2 + \pi^2 \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)} = c \pi \sqrt{\frac{(2l)^2}{L^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}}$$

と変更される。

専攻 問題 3 解答

1. \mathcal{H} から I_i を含む部分だけを抜きだすと、

$$\mathcal{H}_i = -zJM I_i + D I_i^2 \quad \cdots (1)$$

よって $B_{\text{eff}} = zJM$ である。交換相互作用は本来電子間に働くクーロン力に由来するものだが、そのスピンに対する作用を磁場に換算した値が B_{eff} である。

2. I_i の取り得る値は $-1, 0, +1$ であり、それぞれの起こる確率は $\exp(-\beta\mathcal{H}_i)$ に比例するので、よって I_i の平均値は

$$\begin{aligned} \langle I_i \rangle &= \frac{\sum_{I_i} I_i e^{-\beta\mathcal{H}_i}}{\sum_{I_i} e^{-\beta\mathcal{H}_i}} = \frac{-e^{-\beta(+zJM+D)} + e^{-\beta(-zJM+D)}}{e^{-\beta(+zJM+D)} + e^0 + e^{-\beta(-zJM+D)}} \\ &= \frac{e^{-\beta D}(e^{+\beta zJM} - e^{-\beta zJM})}{1 + e^{-\beta D}(e^{+\beta zJM} + e^{-\beta zJM})} = \frac{2 \sinh(\beta zJM)}{e^{\beta D} + 2 \cosh(\beta zJM)} \end{aligned} \quad \cdots (2)$$

3. (i) $D/(zJ) \rightarrow -\infty$ のとき、式 (1) よりスピンが大きい方が安定なので強磁性になる傾向が強いと考えられる。
(2) 式は次式となる。

$$\langle I_i \rangle = \tanh(\beta zJM)$$

$\langle I_i \rangle$ は、 M について単調増大し、また十分大きい M に対しては $\langle I_i \rangle < M$ となるから、 $M = 0$ 以外で $\langle I_i \rangle = M$ となるような M が存在するのは、 $\langle I_i \rangle$ の原点での傾きが M の原点での傾きより大きいときである。よって、

$$\frac{\partial}{\partial M} \tanh(\beta zJM) \Big|_{M=0} > 1 \quad \therefore \beta zJ > 1 \quad \therefore T < \frac{zJ}{k} (= T_c)$$

- (ii) $D/(zJ) = 0$ のとき、式 (1) より、強磁性は起こり得るが、(i) の場合ほどではない。式 (2) は次式となる。

$$\langle I_i \rangle = \frac{2 \sinh(\beta zJM)}{1 + 2 \cosh(\beta zJM)}$$

この $\langle I_i \rangle$ も (i) のものと同様に振舞うから、

$$\frac{\partial \langle I_i \rangle}{\partial M} \Big|_{M=0} = \beta zJ \frac{2 \cosh(\beta zJM) + 4}{(1 + 2 \cosh(\beta zJM))^2} \Big|_{M=0} = \frac{2}{3} \beta zJ > 1 \quad \therefore T < \frac{2zJ}{3k} (= T_c)$$

- (iii) $D/(zJ) \rightarrow +\infty$ のとき、式 (1) より、スピンの大きさが 0 の方が安定なので強磁性は起こらない。実際、式 (2) は $\langle I_i \rangle = 0$ となり、これは $M = 0$ にしか解を持たない。

4. $x \equiv \beta zJM$ 、 $y \equiv \beta zJ \langle I_i \rangle$ として式 (2) を書き直すと

$$y = \beta zJ \frac{2 \sinh x}{e^{\beta D} + 2 \cosh x}$$

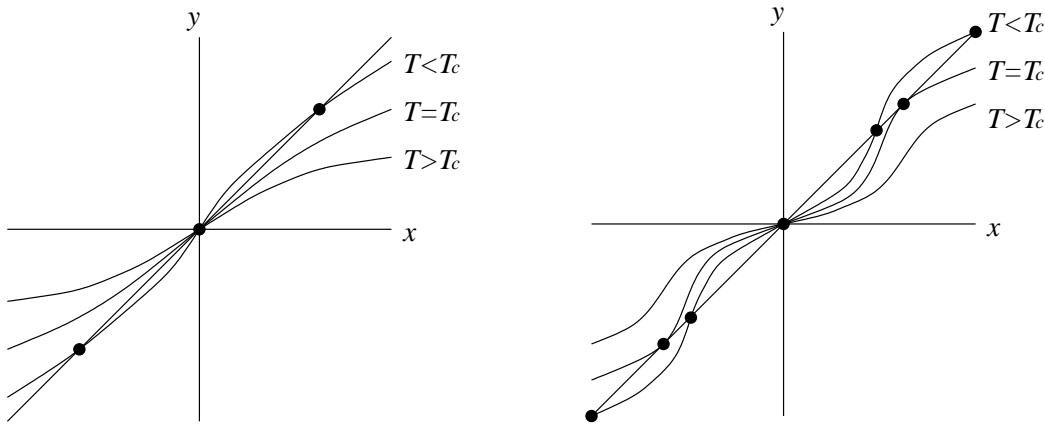
$x \ll 1$ の範囲でこの式の右辺を展開する。

$$\begin{aligned} y &\simeq 2\beta zJ \frac{x + x^3/6}{e^{\beta D} + 2 + x^2} = \frac{2\beta zJ}{e^{\beta D} + 2} \left(x + \frac{x^3}{6} \right) \left(1 + \frac{x^2}{e^{\beta D} + 2} \right)^{-1} \\ &\simeq \frac{2\beta zJ}{e^{\beta D} + 2} \left[x + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{e^{\beta D} + 2} \right) x^3 \right] \end{aligned} \quad \cdots (3)$$

この y が x に等しくなる x の解を求めるわけである。

式(3)の x の 3 次の項の係数が負である場合の $T > T_c, T = T_c, T < T_c$ の 3 種類の温度での x, y のグラフを下の左図に示す。このように、この時の相転移点において解の x が連続である。よって 2 次相転移である。

他方、式(3)の x の 3 次の項の係数が正である場合の $T > T_c, T = T_c, T < T_c$ の 3 種類の温度での x, y のグラフを下の右図に示す。このように、この時の相転移点において解の x が不連続である。よって 1 次相転移である。



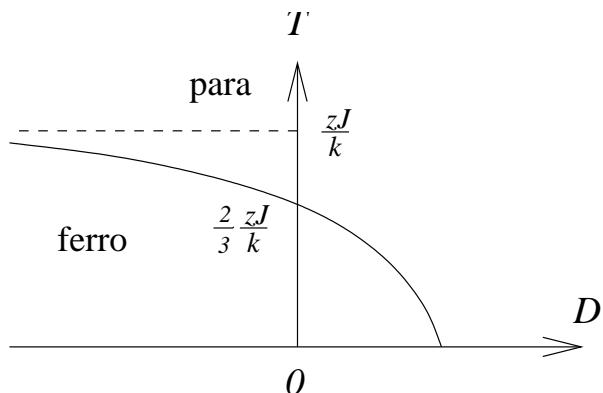
このように相転移の種類が変わる敷居は式(3)の x の 3 次の項の係数が 0 になる所であり、またこの場合には相転移が起こる温度は式(3)の x の 1 次の項の係数が 1 になる所である。すなわち、

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{e^{\beta D} + 2} = 0 \quad \frac{2\beta z J}{e^{\beta D} + 2} = 1$$

これらを満たす D, β が求める D_t, T_t である。

$$D_t = \frac{zJ}{3} \ln 4 \quad T_t = \frac{zJ}{3k}$$

5. $D = 0, \pm\infty$ の場合については既に求めた。 $0 < D < \infty$ のどこかで、 $M = \langle I_i \rangle$ が原点以外に解を持たなくなるような D が存在するはずで、相図は下のようになると考えられる。(para : 常磁性、ferro : 強磁性)



専攻 問題 4 解答

1. (i) 2 つの核子系に対する完全な波動関数は $f(\vec{r}, \vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2)$ と書かれる。

\vec{r} : 2 核子の相対座標

\vec{s}_1, \vec{s}_2 : 2 核子の spin 空間座標

$\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$: 2 核子の isospin 空間座標

ここでハミルトニアンにおける異なる種類の自由度間の相互作用が無視できると、

$$f = f_r(\vec{r})f_\sigma f_\tau$$

と分解できる。

核子は fermion なので、波動関数は座標の交換について反対称でなければいけない。したがって、

•p-n 系 S_1 状態にあるものは $f_r(\vec{r})$ と f_σ が対称。従って isospin f_τ は反対称。

•p-p 系, n-n 系 isospin f_τ は対称。従って $f_r(\vec{r})f_\sigma$ は反対称。

となる。また、軌道角運動量 L の状態では空間部分は $f_r(-\vec{r}) = (-1)^L f_r(\vec{r})$ である。

以上のことを考えた結果、下表のようになる。

	d	p-p,n-n	
スピン	対称	対称	反対称
アイソスピン	反対称	対称	対称
空間部分 (L)	対称 (L 偶)	反対称 (L 奇)	対称 (L 偶)

よって、p-p, n-n, p-n 系で spin-parity は一緒ではありえない。従って、矛盾は起こらない。

- (ii) •磁気モーメントが $\mu_p + \mu_n \neq \mu_d$ となっていること。

軌道角運動量が 0 でない状態が混ざっているとすれば、その効果による磁気モーメントが生まれるから。

•電気的四重極モーメントが 0 でないこと。

s 軌道は電気的四重極モーメントを持たないが、空間的にクローバー型をした d 軌道波動関数は四重極モーメントを持つから。

- (iii) $\langle \vec{J} \cdot \vec{I} \rangle$ を F, J, I で表す。

$$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I} \quad \vec{F}^2 = \vec{J}^2 + \vec{I}^2 + 2\vec{J} \cdot \vec{I}$$

従って

$$\begin{aligned} \langle \vec{J} \cdot \vec{I} \rangle &= \langle FIJ | \vec{J} \cdot \vec{I} | FIJ \rangle = \langle FIJ | \frac{1}{2}(\vec{F}^2 - \vec{J}^2 - \vec{I}^2) | FIJ \rangle \\ &= \frac{1}{2}[F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)] \end{aligned}$$

次に、重水素の分裂エネルギーを求める。(以下で陽子、重陽子の g 因子をそれぞれ g_p, g_d 、磁気能率を μ_p, μ_d と記す。)

前の式に電子のスピン $J = 1/2$ を代入すると、

$$\langle \vec{J} \cdot \vec{I} \rangle = \frac{1}{2} \left[F(F+1) - \frac{3}{4} - I(I+1) \right] = \frac{1}{2} \begin{cases} I & (F = I + 1/2) \\ -I - 1 & (F = I - 1/2) \end{cases}$$

となるので、超微細構造の分裂は、

$$\Delta E = \alpha g_I \cdot \Delta(\langle \vec{J} \cdot \vec{I} \rangle) = \frac{\alpha g_I}{2}(2I+1)$$

である。

次に、重水素の準位の分裂を求める。

まず、水素の場合、核のスピン $I = 1/2$ であるから、準位の分裂は、

$$\Delta E = \frac{\alpha g_p}{2} \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} + 1) = \alpha g_p = 5.9 \times 10^{-6} \text{ eV}$$

である。次に重陽子は、スピン $I = 1$ である。また、原子核の磁気能率の大きさの定義が「磁気能率演算子 $\vec{\mu}_I = g_I \mu_N \vec{I}$ の z 成分の磁気量子数 $m_I = I$ の状態での期待値」であるので、陽子、重陽子それぞれの磁気能率は

$$\mu_p = g_p \mu_N \cdot I = g_p \mu_N \cdot \frac{1}{2} = 2.793 \mu_N$$

$$\mu_d = g_d \mu_N \cdot I = g_d \mu_N \cdot 1 = 0.857 \mu_N$$

となる。従って、重水素の準位の分裂は、

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\alpha g_d}{2} \cdot (2 \cdot 1 + 1) = \alpha g_d \cdot \frac{3}{2} = (\alpha g_p) \cdot \frac{g_d}{g_p} \cdot \frac{3}{2} \\ &= (5.9 \times 10^{-6}) \times \frac{0.857}{2 \times 2.793} \times \frac{3}{2} \simeq 1 \times 10^{-6} \text{ eV} \end{aligned}$$

2. (i) 図からわかること。

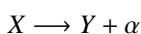
- γ 線は電荷をもたない。
- α 線と β 線は互いに反対の電荷をもつ
- α 線が $+2$ の電荷をもつことから、磁場は紙面の表から裏にむけてかかっている。
- α 線は単一のエネルギーをもつのに対し、 β 線はさまざまなエネルギーをもつ。
- $|q| = mv/rB = p/rB$ なので、 α 線は運動量が大きく、 β 線は小さい。

ただし、 v は線源から出る時の速度、 p は運動量、 $|q|$ は電荷、 r は軌跡の曲率半径、 B は磁場をそれぞれ表している。

(ii) Q 値が核子の静止質量より十分小さいので、 γ 線以外には非相対論的近似をする。

α 崩壊

始状態の原子核を X 、終状態を Y とすると、崩壊の図式は以下のようになる。



各粒子の質量を $m_X, m_Y, m_\alpha, m_\gamma$ 、運動量を $\vec{p}_X, \vec{p}_Y, \vec{p}_\alpha, \vec{p}_\gamma$ と表すことにすれば、エネルギーと運動量の保存則より、

$$m_X = m_Y + m_\alpha + \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{\vec{p}_Y^2}{2m_Y} \quad \dots (1)$$

$$\vec{p}_X = \vec{p}_Y + \vec{p}_\alpha = 0 \quad \dots (2)$$

が得られる。

式(2)から、 $\vec{p}_Y^2 = \vec{p}_\alpha^2$ が得られ、これと式(1)より、 Q を計算すると、

$$Q = m_X - m_Y - m_\alpha = \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{\vec{p}_Y^2}{2m_Y} = \frac{\vec{p}_Y^2}{2m_Y} \left(1 + \frac{m_Y}{m_\alpha} \right)$$

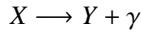
となる。これから求める反跳エネルギー $\vec{p}_Y^2/2m_Y$ を求めることができて、

$$\frac{\vec{p}_Y^2}{2m_Y} = \frac{Q}{1 + m_Y/m_\alpha} = \frac{5 \text{ MeV}}{1 + 196/4} = 0.1 \text{ MeV}$$

となる。

γ 崩壊

α 崩壊の場合と同様にして崩壊の図式は、



エネルギー運動量保存則は、

$$m_x = m_y + |\vec{p}_\gamma| + \frac{\vec{p}_y^2}{2m_y} \quad \cdots (3)$$

$$\vec{p}_x = \vec{p}_\gamma + \vec{p}_y = 0 \quad \cdots (4)$$

である。式(3),(4)から、

$$Q = m_x - m_y = |\vec{p}_\gamma| + \frac{\vec{p}_y^2}{2m_y} = |\vec{p}_y| + \frac{\vec{p}_y^2}{2m_y}$$

となり、これを二次方程式の形に直して、

$$|\vec{p}_y|^2 + 2m_y|\vec{p}_y| - 2m_yQ = 0 \quad \therefore |\vec{p}_y| = -m_y + \sqrt{m_y^2 + 2m_yQ}$$

となる。ただし、第二項の符号が + になっているのは、 $|\vec{p}_y| > 0$ による。 $m_y \gg Q$ を用いてこれを計算すると、

$$|\vec{p}_y| = -m_y + m_y \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_y}} \simeq -m_y + m_y \left(1 + \frac{Q}{m_y}\right) = Q$$

となる。従って反跳エネルギーは、

$$\frac{\vec{p}_y^2}{2m_y} = \frac{Q^2}{2m_y} = \frac{1}{2 \cdot 200 \cdot 940} \simeq 3 \text{ eV}$$

となる。

(iii) β 崩壊は終核と e^- と $\bar{\nu}_e$ が出てくる三体崩壊であるから、エネルギー運動量保存則からでは、電子の持つエネルギーや運動量の値は決まらないからである。

$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ で生じた e^+ は、対消滅 ($e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$) で生じる γ 線を測定することで、 n はそれが核に捕獲されたとき生じる (n, γ) 反応の γ 線を測定することで検出される。後者の γ 線は前者よりもおくれて発生するので、両者を遅延同時計数法により測定する。

なお、この実験では、単一の $\bar{\nu}_e$ と p との反応ではなく、関係のない核子が多数存在するので、 e^+ と n を直接検出したところで、この反応を検証したことにならないことに注意。

専攻 問題 5 解答

1. 並進演算子 $T_{\vec{R}}$ を次のように定義する。

$$T_{\vec{R}}f(\vec{r}) = f(\vec{r} + \vec{R})$$

ハミルトニアン \mathcal{H} は周期的であるから

$$T_{\vec{R}}\mathcal{H}(\vec{r})\psi(\vec{r}) = \mathcal{H}(\vec{r} + \vec{R})\psi(\vec{r} + \vec{R}) = \mathcal{H}(\vec{r})\psi(\vec{r} + \vec{R}) = \mathcal{H}(\vec{r})T_{\vec{R}}\psi(\vec{r})$$

よって \mathcal{H} と $T_{\vec{R}}$ は交換可能。よって、 \mathcal{H} と $T_{\vec{R}}$ は同時対角化可能なので \mathcal{H} の固有波動関数 ψ について

$$T_{\vec{R}}\psi = C(\vec{R})\psi$$

となる固有値 $C(\vec{R})$ が存在する。(但し、 $T_{\vec{R}}\mathcal{H}(\hat{x})T_{\vec{R}}^\dagger = \mathcal{H}(\hat{x} + \vec{R})$ に注意。)

表面の影響を無視するため、ボルン・フォン・カルマンの周期的境界条件： (N_1, N_2, N_3) だけ並進して元に戻る、つまり、

$$\psi(\vec{x} + N_j \vec{a}_j) = C(\vec{a}_j)^{N_j} \psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}) \quad (j = 1, 2, 3)$$

とする。よって、

$$C(\vec{a}_j) = e^{i \frac{2\pi}{N_j} l_j} \quad (l_j = 0, 1, 2, \dots, N_j - 1)$$

$$\therefore \psi(\vec{x} + \vec{R}) = C(n_1 \vec{a}_1)C(n_2 \vec{a}_2)C(n_3 \vec{a}_3)\psi(\vec{x}) = \exp(i \sum_j \frac{2\pi}{N_j} l_j n_j) \psi(\vec{x}) = \exp(i \vec{k} \cdot \vec{R}) \psi(\vec{x})$$

となる。ここで $\vec{k} = (\frac{2\pi}{N_1 a} l_1, \frac{2\pi}{N_2 a} l_2, \frac{2\pi}{N_3 a} l_3)$ (結晶波数) であるが、逆格子ベクトル \vec{G} の整数倍の自由度をもつ。

$$\therefore e^{i(\vec{k} + n\vec{G}) \cdot \vec{R}} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} e^{in\vec{G} \cdot \vec{R}} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}$$

だからである。また、

$$\psi(\vec{x} + \vec{a}_j) = (1 + a_j \frac{d}{dx_j} + \frac{1}{2!} a_j^2 \frac{d^2}{dx_j^2} + \dots) \psi(\vec{x}) = e^{a_j \frac{d}{dx_j}} \psi(\vec{x}) = e^{i \vec{a}_j \cdot \vec{p}} \psi(\vec{x})$$

となり、 \vec{k} は波数ベクトルに他ならない。よって

$$T_{\vec{R}}\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \vec{R}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \psi(\vec{r})$$

が示された。

2. (i) $R = ma (0 \leq m < N)$ だけ並進した場合を考える。

$$\begin{aligned} \Psi_A(x + ma) &= e^{ikma} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{ik(n-m)a} \phi_A(x - (n-m)a) = e^{ikma} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1-m}^{N-m} e^{ikna} \phi_A(x - na) \\ &= e^{ikma} \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{n=1}^{N-m} + \sum_{n=1-m}^0 \right) e^{ikna} \phi_A(x - na) \end{aligned}$$

周期的境界条件から、 $\phi(x + Na) = \phi(x)$ なので、

$$\begin{aligned} \Psi_A(x + ma) &= e^{ikma} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N-m} e^{ikna} \phi_A(x - na) + \sum_{n=1-m}^0 e^{ik(N+n)a} \phi_A(x - (N+n)a) \\ &= e^{ikma} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{ikna} \phi_A(x - na) = e^{ikma} \Psi_A(x) \end{aligned}$$

となり、プロッホの定理が満たされていることが示された。

$\Psi_B(x)$ についても同様に示される。

(ii) 行列要素 H_{AA} は

$$H_{AA} = \int dx \Psi_A^*(x) \mathcal{H} \Psi_A(x)$$

であり、これに与えられた表式を代入して計算する。

その計算において、与えられた仮定より原子軌道の重なり積分は無視できる。すなわち

$$\int dx \phi_A^*(x - na) \frac{d^2}{dx^2} \phi_A(x - ma) = 0 \quad \text{for } n \neq m$$

またポテンシャルを介した相互作用は隣接 AB 原子間のみに働くので異なる A 原子の軌道同士には働くない。すなわち

$$\int dx \phi_A^*(x - na) U_A(x - la) \phi_A(x - ma) = 0 \quad \text{for } n \neq m$$

$$\int dx \phi_A^*(x - na) U_B(x - la - b) \phi_A(x - ma) = 0 \quad \text{for } \forall n, m$$

以上を踏まえると H_{AA} は

$$\begin{aligned} H_{AA} &= \frac{1}{N} \sum_n \int dx \phi_A^*(x - na) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U_A(x - na) \right] \phi_A(x - na) \\ &= \int dx \phi_A^*(x) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U_A(x) \right] \phi_A(x) \end{aligned}$$

この表式は $\phi_A(x)$ が局在化した場合の固有エネルギー E_A に他ならない。 H_{BB} についてもまったく同様である、

$$H_{AA} = E_A \quad H_{BB} = E_B$$

次に H_{AB} は、これもまた原子軌道の重なり積分は無視できるので

$$\int dx \phi_A^*(x - na) \frac{d^2}{dx^2} \phi_B(x - ma - b) = 0 \quad \text{for } \forall n, m$$

ポテンシャルの相互作用は隣接する AB 原子間の軌道では

$$\int dx \phi_A^*(x - na) \{U_A(x - na) + U_B(x - na - b)\} \phi_B(x - na - b) dx = 2\gamma$$

隣接する BA 原子間の軌道では

$$\int dx \phi_A^*(x - na) \{U_A(x - na) + U_B(x - na + a - b)\} \phi_B(x - na + a - b) = 2\gamma'$$

となる。以上を踏まえると H_{AB} は

$$\begin{aligned} H_{AB} &= \frac{1}{N} \sum_n \int dx e^{-ikna} \phi_A^*(x - na) [U_A(x - na) + U_B(x - na - b)] e^{+ikna} \phi_B(x - na - b) \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_n \int dx e^{-ikna} \phi_A^*(x - na) [U_A(x - na) + U_B(x - na + a - b)] e^{+ika(n-1)} \phi_B(x - na + a - b) \\ &= \frac{1}{N} \sum_n (2\gamma + 2\gamma' e^{-ika}) \\ &= 2\gamma + 2\gamma' e^{-ika} \end{aligned}$$

と求まる。最後に H_{BA} は

$$H_{BA} = H_{AB}^* = 2\gamma + 2\gamma' e^{+ika}$$

である。

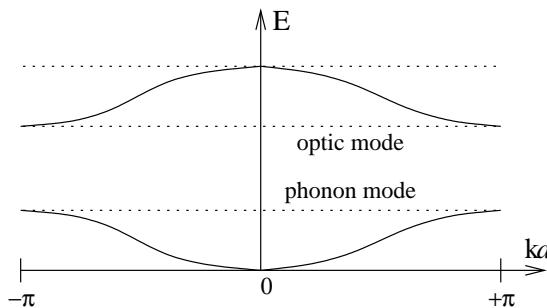
(iii) ハミルトニアンの行列表現は

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} E_A & 2\gamma + 2\gamma' e^{-ika} \\ 2\gamma + 2\gamma' e^{ika} & E_B \end{pmatrix}$$

である。この固有値 E^\pm を求めと。

$$E^\pm = \frac{1}{2} \left(E_A + E_B \pm \sqrt{(E_A - E_B)^2 + 16(\gamma^2 + 2\gamma\gamma' \cos ka + \gamma'^2)} \right)$$

と求まる。この 2 種の固有エネルギーの k 依存性は下図の通りである。



(iv) バンドギャップは光学モードと音響モードとの間のエネルギー差の最小値である。

$$E_{\text{bandgap}} = \min(E^+ - E^-) = \sqrt{(E_A - E_B)^2 + 16(\gamma - \gamma')^2}$$

バンドの幅は光学モードと音響モードと共に同じで

$$E_{\text{bandwidth}} = \sqrt{(E_A - E_B)^2 + 16(\gamma + \gamma')^2} - \sqrt{(E_A - E_B)^2 + 16(\gamma - \gamma')^2}$$

(v) 第 1 Brillouin zone には $2N$ の状態がある。A,B 原子が 1 つずつ電子をもっていると $2N$ の電子があるから第 1 Brillouin zone の音響モードがうめつくされる。

専攻 問題 6 解答

- 半透鏡に必要な自由度は首振り調整と仰角である。右の図の dial 1 は首振り調整用ダイアル、dial 2 は仰角調整用ダイアルである。
- 強め合う干渉が起きる時、D における光の強度はほぼレーザーの出力に等しい。したがって、出力電圧は

$$(D \text{ に単位時間当たり届く光子の数}) \times (\text{電子の電荷}) \times (\text{抵抗}) \\ = \frac{1 \text{ mW}}{hc/\lambda} \times e \times 50 \Omega = 2.5 \times 10^{-2} \text{ V} \quad (\equiv V_{\max})$$

また、P の位置を ΔL だけ変化させた時の出力電圧は、適当な位相因子を除いて、

$$V_{\max} \cos^2 \left(\frac{2\pi \Delta L}{\lambda} \right) = \frac{1}{2} V_{\max} \left\{ 1 + \cos \left(\frac{4\pi \Delta L}{\lambda} \right) \right\}$$

と書ける。すると、出力電圧の変化が最大になるのは

$$\frac{d}{d(\Delta L)} \frac{1}{2} V_{\max} \left\{ 1 + \cos \left(\frac{4\pi \Delta L}{\lambda} \right) \right\} = \frac{2\pi}{\lambda} V_{\max} \sin \left(\frac{4\pi \Delta L}{\lambda} \right) = 0 \quad \frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

の時である。この時の出力電圧の変化率は、明らかに $V_{\max} \times 2\pi/\lambda$ である。

このまわりで、P が 1 nm だけずれると、出力電圧は

$$V_{\max} \times \frac{2\pi}{\lambda} \times 1 \text{ nm} = 2.5 \times 10^{-4} \text{ V}$$

だけ変化する。

- S と P の距離を $x(t)$ とする (t は時刻)。今、装置の大きさが充分小さく、P の速度も小さい。時刻 t に S を出した光が P で反射し再び S に時刻 t' に戻ったとすると、

$$t' \approx t + \frac{2x(t)}{c} \quad dt' = dt + \frac{2\dot{x}(t)}{c} dt$$

したがって、レーザーの角周波数を ω_0 とすると、P で反射した光の角周波数は

$$\omega = \frac{1}{1 + 2\dot{x}/c} \omega_0 \approx \left(1 - \frac{2\dot{x}}{c} \right) \omega_0$$

となる。よって D における干渉信号は、

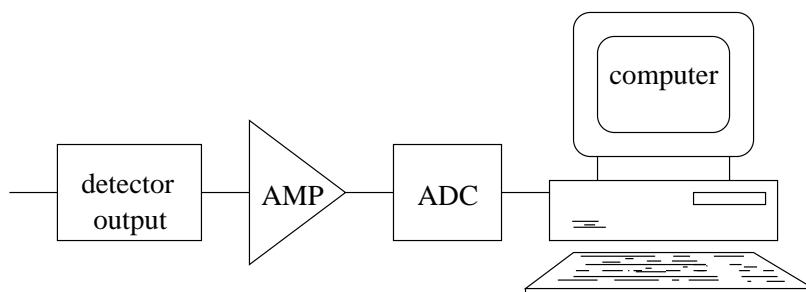
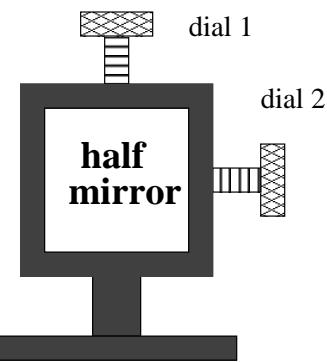
$$\cos \omega t + \cos \omega_0 t = 2 \cos \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t \right) \approx 2 \cos \left(\frac{\dot{x}}{c} \omega_0 t \right) \cos \omega_0 t$$

より、 $\cos(\frac{\dot{x}}{c} \omega_0 t)$ のように変化する。

可視光領域であるから測定できるのは $\cos \omega_0 t$ の振幅の 2 乗である。 $\dot{x} = 10 \text{ cm/s}$ の時のその値は、

$$2 \times \frac{\dot{x}}{c} \times \frac{c}{\lambda} = 3 \times 10^5 \text{ Hz}$$

で振動する。これを記録するには次ページの図のような装置を組めばよい。



ただしアンプは $10^3 \sim 10^6$ Hz 程度の周波数に応答できるものを使う。

4. マイケルソン-モーレーの実験では D に生ずる干渉縞を観測する。まず、 $SP = SQ = l$ とし、SP を地球の公転方向に向ける。ここで、いわゆる「エーテルの風」があるとすると、SP 往復に要する時間は公転速度を v として、

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} \simeq \frac{l}{c} \left(1 + \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{l}{c} \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)$$

SQ 往復に要する時間は

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} \simeq \frac{2l}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

したがって、 $t_1 - t_2 = lv^2/c^3$ となる。

次に、装置を 90° 回転して同じことを行なうと、明らかに $t_1 - t_2 = -lv^2/c^3$ となる。したがって、D で観測される干渉縞は $2c(t_1 - t_2) = 2lv^2/c^2$ だけずれるはずである。このずれを波長に直すと、

$$\frac{2lv^2/c^2}{\lambda} = \frac{2 \times 11 \text{ m}}{0.63 \mu\text{m}} \left(\frac{3.0 \times 10^4 \text{ m/s}}{3.0 \times 10^8 \text{ m/s}} \right)^2 \sim 0.3$$

となる。「エーテルの風」がない場合、つまり光速度が光源の速度に依らない場合はこのずれは観測されない。これが、マイケルソン-モーレーの実験の原理である。

実験の精度は SP、SQ の距離が本当に一定に保たれているかに大きく依っている。したがって、温度変化や装置の振動による器具のゆがみに影響を受ける。また、光線にはある程度広がりがあるので、干渉縞の位置にも誤差が含まれる。

専攻 問題 7 解答

1. (i) Na^+ と Cl^- とは内でも外でも互いに同じ濃度なので、 K^+ のみを電位の原因として計算する。

Nernst の式より、活動電位 V は、

$$V = \frac{RT}{zF} \ln \frac{C_o}{C_i} \quad \cdots (1)$$

と表記できる

つまり、

$$V = \frac{RT}{zF \log_{10} e} \log_{10} \frac{C_o}{C_i} \quad \cdots (2)$$

いま、 $\log_{10} \frac{C_o}{C_i} = \log_{10} \frac{1}{20} \sim -1.3$ 、また、 $z = 1$ なので、 $V \sim -80 [\text{mV}]$ である。

- (ii) ナトリウムイオンに対して細胞膜の透過性が増し、細胞内にナトリウムイオンが流入することによって細胞内電位が正になる。
- (iii) $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ ポンプ ($\text{Na}^+ - \text{K}^+$ ATPase) によって、ATP 消費を伴ってナトリウムイオンが細胞外へ、カリウムイオンが細胞内へ能動輸送される。
- (iv) この二価イオンは Ca^{2+} である。カルシウムイオンは通常は細胞内濃度が細胞外濃度に対して著しく低い。しかし、刺激によってチャンネルが開くことによって細胞内でカルシウムイオンが高濃度になる。骨格筋においては、カルシウムイオンが制御に重要である。骨格筋細胞は刺激伝達物質をうけとると、それによってカルシウムイオンの細胞内濃度を高くして、カルシウムイオンを制御タンパクに到達させ、筋収縮を起こさせる、という構造になっている。

2. (i) •暗号表を見ると、おなじアミノ酸がいくつかの塩基配列に対応している。たとえば、Pro は CCU, CCC, CCA, CCG, と 3 番目の塩基については何でもよいことになっている。そのため、おなじアミノ酸配列に対していくつかの塩基配列が対応し得、全体としての塩基の割合にも自由度がある。
•生物がその機能を発揮する際に直接関わるのはタンパク質の機能である。タンパク質の機能はその構造により、その構造は、一次構造、すなわち配列によって決定されるといわれている。生物にとって重要なタンパク質は種をこえておおむね保存されているので、アミノ酸配列も種を越えて似ていなくてはならない。ところで、これを逆にとると、塩基配列がどうであっても、その結果としてのアミノ酸配列があつていれば構わない、ということがいえる。自然界では塩基配列による突然変異がつねに起こっている。それによってもしアミノ酸配列に重大な変更が起こった場合、多くは致死にいたつてその塩基配列を子孫に残すことはできない。しかし、塩基配列が変わったからといって必ずしもアミノ酸が変異となるわけではなく、結果としてその塩基配列を子孫に残す。
このようなことが進化の過程で多く繰り返されることによって、同じタンパクでも塩基配列には種によってばらつくことがおこることになる。また、もある種に対して、生存に関して有利な塩基の割合が存在するのなら、その種の塩基の割合はそれに従うことが塩基配列の自由度によって可能になる。(例に出ているのは、高温では水素結合数が多くて結合がつよい GC 対を好み、低温では逆に水素結合数の少ない AT 対を好むためである。)
- (ii) •Phe-Leu,Ile-Met: どちらも疎水性が強い。
Asp-Glu:COO⁻ をもつ。
Ser-Arg: どちらも親水性。
•突然変異がおきても、タンパク質の性質があまり変化しなくなるようになるので、突然変異に対する耐性が強くなる。

専攻 問題 8 解答

1. 並進対称性 2 回転対称性

2. 生体内において、アミノ酸は L 型、D 型のうち L 型のみ存在する。また、蛋白質の二次構造である α -ヘリックスは生体内では右巻きのものしか存在しない。これらの蛋白質構成要素である分子に鏡映や反転対称性がないことは、これらの対称性を持つ分子が、生体内に存在しないことを示している。
よって、タンパク質分子やその結晶には鏡映・反転対称性はない。 $(\alpha$ -ヘリックスが右巻きしか存在しないのは、アミノ酸が L 型しかないことによる。)

3. (i) X 線回折で観測結果として得られるのは、 $|F|^2, |F_H|^2, f_H$ の 3 つである。 f_H は、差パターソン関数の原理により、 $|F|^2, |F_H|^2$ の 2 つから得られるのだが、この問題は、すでに $f(x_1, x_2, x_3)$ として与えられていて、それを用いて良いと思われる。

さて、 F, F_H, f_H は、

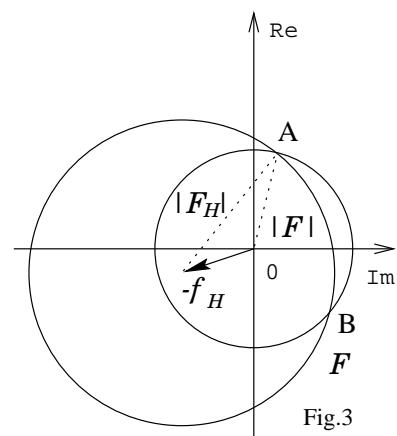
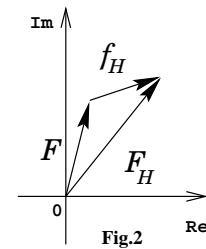
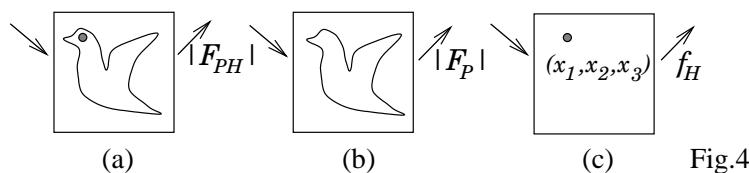
$$F_H = F + f_H \quad \dots (1)$$

の関係にあるが、これを複素平面で図示すると Fig.3 の様になっている。(1)より $F = F_H - f_H$ であるから、 F の位相は分からぬが、 $-f_H$ の終点(矢印の先端という意味)から、半径 $|F_H|$ のところのどこかにあることが分かる。また、当然、 F は複素平面原点から半径 $|F|$ の円周上にある。ゆえ、この 2 円周の 2 交点 A,B のどちらか 1ヶ所が F の値であることが分かる。

[注] Fig.4 (はソーキング(付着)した重原子) の (a)(b) を比較して、(c) を理解するという方法を取り扱う。X 線回折で得られるのは、問題にもある $F(x, y, z)$ だけである。いま、パターソン座標空間 (u, v, w) を考える。(これは単位格子と同じ座標にとる。)

$$P(u, v, w) = \frac{1}{V} \sum_{X, Y, Z \in \text{UnitCell}} |F(X, Y, Z)|^2 e^{-2\pi i(Xu + Yv + Zw)}$$

が各 (u, v, w) 点について計算され、3 次元のパターソン関数が得られる。単位胞中の原子 i, j の原子番号を f_i, f_j とすると、パターソン図上で i, j の原子間に相当する位置に $f_i \times f_j$ の高さのピークが現れる。よって、 f_i, f_j とともに大きい数であれば、積であるため圧倒的ピーク高となる。そのピークの (u, v, w) を読めれば (x_1, x_2, x_3) も求まる。いま、重原子同形置換法では、 $|F|, |F_H|$ はわかる。そこで、 $(|F_H|^2 - |F|^2) = (\Delta F)^2$ を係数としてパターソン関数を計算すれば、 $(\Delta F)^2$ には重原子の位置に関する情報が含まれているので、重原子の位置が分かるのである。これを差パターソン関数の原理と呼ぶ。



- (ii) 前問より交点は二つ存在することがわかる。よって $|F|^2$ と $|F_H|^2$ の情報からは位相角を一つの値に限定することはできない。別の場所に重原子を付加した結晶パターンから、また Argand 作図を行ない、 $F = F'_H - f'_H$ となる点を求めるとき、また二つの交点が出るが、このうち一つは、前問の A または B のどちらかと交わる。その点が求める位相角である。

1992年度

1992年度 入学試験 一般教育科目

教育 英語

1. 以下の英文を読み、設間に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

For a news conference at the Japan Press Center in Tokyo, it was a humble affair. Only about a dozen reporters were present Thursday when three people from India made a quiet appeal to the Japanese people about a giant dam project on the Narmada River, which empties into the Gulf of Cambay 400 kilometers north of Bombay.

As a result of the project 25,000 hectares of fertile farmland and forests will be submerged under water, the Indians said. About 100,000 people are being driven out of their homes in 248 villages along the 200 kilometer upper reaches of the river. Sixty percent of these people are of ethnic minority groups.

The relocation plans are inadequate. The dam project will not only cause environmental destruction through the loss of forests but also destroy the traditional lifestyles of local people. (a)Would urban residents, the three Indians asked, wish for an increase in the power supply in exchange for the life of people who pick fruit in the primeval forests and make their living by selling wood products? A total of 12,000 people staged a 24-hour sit-down demonstration against the project last month. (b)People around the world are casting critical eyes on Japan now. Together with the World Bank, Japan is helping finance the Indian dam project through its Official Development Assistance program. The order for power generators to be used in the project has been placed with a Japanese company. "Do the people of Japan know that part of the taxes they pay is being used in this way?" the three Indians asked at their news conference. Honestly, we didn't know. We haven't been informed.

(c)The Overseas Economic Cooperation Fund, the agency which represents Japan in the project, have not even bothered to study the impact the project will have on the environment and the area's inhabitants. The three Indians urged the Japanese to pay attention to the matter of who will lose from the project and who will gain. I think they were greatly reserved in making their point.

—quoted, with modification, from *Tensei Jingo-'90 Summer Edition*, Hara Shoboh.

Official Development Assistance : 政府開発援助

Overseas Economic Cooperation Fund : 海外経済協力基金

[設問]

- (i) 下線部 (a) を 100 字以内で和訳せよ。
- (ii) 下線部 (b) を 100 字以内で和訳せよ。
- (iii) 下線部 (c) を 100 字以内で和訳せよ。

2. 以下の英文を読み、設間に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

A new survey of extraordinary prolific researchers raises once again the question who should be an author and who should not. Twenty researchers worldwide have published an article at least once every 11.3 days over the past decade, according to a report released last week. The top five researchers have published more than once a week.

Some of these authors are crystallographers who, by nature of their sophisticated equipment and experiences, collaborate with dozens of researchers who need their services. Co-authorship is usually given in return. Most of the others are scientists who run medium-sized to large laboratories or research groups that have tapped into a particularly fruitful line of research in their field. (a) In the top twenty, the single discipline most heavily representer is basic molecular chemistry, followed by transplant surgery. Biomedicalresearch, in general, accounts for more than half of the total.

As science finds itself under scrutiny as never before, many researchers are considering the old problem of authorship. Is the loan of a key reagent worth a co-authorship? How about a good idea? Regular guidance?

(b) As a result of cases in which prominent researchers were damaged by the revelation that papers on which they were listed as authors contained fabricated data (even though they had not done the research themselves), the debate over authorship is no longer academic. A laboratory director who initiates or supervises a project is now considered responsible for the accuracy of the data itself if he or she shares authorship.

An informal survey of many of the researchers on the list reveals that there are as many authorship policies as there are authors. Differences in authorship policies tend to be vary by discipline. Because chemistry experiments are relatively straight-forward and self-checking, the heads of prolific chemistry laboratories say they feel confident in simply providing ideas and oversight, along with regular review, to work (c)they will eventually co-sign. Frank Cotton, a Tezas A&M University chemist, says he selects — and co authors — most of the research projects in his laboratory because the grants are in his name, and are based on his proposals. Although he does little of the bench research, he says he guides his 15 to 25 researchers, examines their data, and has a hand in writing almost all the papers. On the other hand, “I only put my name on if I had the idea, started the study, or played an active part in it,” says Julia Polak, a Universilty of London pathologist. “My own criterion is that if I don’t understand it and haven’t been part of the writing of the paper, I don’t want my name on it.”

(d) Although there may never be firm, interdisciplinary rules about authorship, prolific researchers do seem to be aware now of the perils of appending their names to work they have not closely supervised.

—quoted, with modifications, from *Nature*.

fabricate : (この場合) 捏造する

[設問]

- (i) 下線部 (a) を 80 字以内で和訳せよ。
- (ii) 下線部 (b) を 140 字以内で和訳せよ。
- (iii) 下線部 (c) は具体的にはどういうことか記せ。
- (iv) 下線部 (d) を 100 字以内で記せ。

3. 以下の英文を読み、次の間に答えよ。解答は解答用紙の所定欄にしるせ。

I must reiterate my feeling that experimental physicists always welcome the *suggestions* of the theorists. But the present situation is ridiculous. Theorists now sit on the scheduling committees at the large particle accelerators and can exercise veto power over proposals by the best experimentists. In the days when I was active in nuclear and particle physics, the theorists exercised their veto power in an acceptable manner—they held up to ridicule anyone who did “stupid experiments.” So, if anyone could be intimidated by such social pressures, and nearly everyone can be, they were effectively kept from doing stupid result, to find himself ridiculed by the much smarter theorists. A classic example was the experiment in which R.T.Cox found, in 1928, that the electrons emitted in the beta decay of radium E must be polarized—because they “double-scattered” with different probabilities to the left and to the right. Theorists couldn’t accept this result because it violated the principle of consetvation of parity, which they held to be sacred. So the important Cox discovery disappeared from sight until it was rediscovered “properly.” Nineteen years later, T.D.Lee and Frank Yang, to solve a serious problem in particle physics, proposed that parity might not be conserved in weak interactions. Several teams set up experiments to look for parity violations, and Lee and Yang’s suggestion was quickly found to conform to the structure of the real world. But the Nobel Prize for this change in paradigm went neither to Cox nor to Madam Wu and her collaborators, who proved Lee and Yang to be correct. Lee and Yang certainly earned their prize, but I believe the experimentalists should have shared in the glory.

Next year is the 100th anniversary of the Michelson-Morley experiment. That terribly important experiment couldn’t be done at the present time, as I think the following imaginary scene will show. Michelson and Morley tell the “scheduling committee” that they plan to measure the velocity of the earth through the ether by means of Michelson’s new inferometer. The theoretical astrophysicist on the committee asks, “How accurately will your method measure the velocity?” Michelson says, “To about one significant digit.” The theorist responds, “But we already know the velocity of the earth through the ether from astronomical observations to two or three significant figures.” All the members of the committee agree that the proposal is one of the nuttiest they’ve ever heard, and

Michelson and Morley find themselves turned down flat. So the experiment that led to the abandonment of the concept of the ether isn't done.

I wonder how many physical concepts that "everyone knows" to be true, as everyone knew parity conservation and the existence of the ether were true, would turn out to be false if experiments were again allowed to do nutty experiments.

—quoted, with modifications, from Luis W. Alvarez, *Adventures of a physicist*, Basic Books, N.Y., 1987.

nutty (米俗語) : foolish

[設問]

(i) 下線部分の英文を 140 字以内で和訳せよ。

(ii) この英文の要旨を 英語で 指定された行数内 (100–200 語程度以内) で書け。

4. 次の文を 80 語程度以内に英訳せよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

25 年ほど前までは、陽子はそれ以上分割できない粒子であると考えられていた。しかし、陽子と陽子、あるいは陽子と電子を高速で衝突させる実験を行ったところ、実際には陽子はさらに小さな粒子から構成されていることがわかった。その粒子は、「クォーク」と名付けられた。

—quoted with modifications from *A Brief History of Time*, by S.W.Hawking, Bantam Books, N.Y., 1988.

陽子 : proton 粒子 : particle 電子 : electron クォーク : quark

5. 下記の文 (いわゆるゼノンの逆理) の論理には不備がある。この文を読み、設問に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

先行する亀を後方からアキレスが追いかけたとする。追いかけ始めた時点で亀のいた場所にアキレスが到達したとき、亀は前方にあり、その場所にアキレスが到達したときには亀はさらに前方にいる。

ゼノン : Zeno アキレス : Achilles

(i) 下線部分の和文を 60 語程度以内で英訳せよ。

(ii) 出来るだけ短く、英語でこの文の論理の不備を説明せよ。

教育 数学

1. 関数 $y(x)$ に対する次の常微分方程式について以下の設間に答えよ。

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -y^n$$

ただし、 $y(0) = 1, \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 0$ とする。

(i) $n = 0$ の場合の解を求めよ。

(ii) $y = \frac{z}{x}$ とおいて、 z に対する微分方程式を導き、 $n = 1$ の場合の解を求めよ。

(iii) $n = 0, n = 1$ の場合のほかに、ある整数 n に対して次の形の解

$$y = (1 + ax^2)^m$$

が存在することが知られている。その整数 n と、定数 m, a を求めよ。

(iv) $x = 0$ の近傍の解を x に関するべき級数に展開し、 x^4 の項まで求めよ。

2. 3 行 3 列の行列について以下の設間に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(ii) 行列に関する方程式

$$A^3 + aA^2 + bA + cE = 0$$

の係数 a, b, c を求めよ。但し E は 3 行 3 列の単位行列、 0 は零行列である。この結果を用いて行列

$$A^5 - 6A^3 - 4A^2 + 18E$$

を計算せよ。

(iii) 3 次元ベクトル空間 R^3 のベクトル \vec{x} で、 R^3 のあるベクトル \vec{y} を用いて

$$\vec{x} = (A - E)\vec{y}$$

と表すことのできないものの一般形を求めよ。

3. 1 辺の長さ a の正三角形で構成される正 20 面体の体積を以下の手順に従って求めよ。図 1 は、正 20 面体を一つの頂点 A と中心 O を通る直線の方向から見た時の平面図であり、図 2 は、その直線と一辺 AB を含む平面で切った時の断面図である。なお断面図には正 20 面体の内接球も破線で示してある。

- (i) 恒等式 $(\cos \theta + i \sin \theta)^5 = \cos 5\theta + i \sin 5\theta$ を利用して、 $\cos 5\theta$ を $\cos \theta$ の多項式で表せ。ただし i は虚数単位である。
- (ii) 上の結果を利用して、 $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ の値を求めよ。
- (iii) 正 20 面体に内接する球の半径を求めよ。また内接点はどの様な点であるか。
- (iv) 正 20 面体の体積を求めよ。

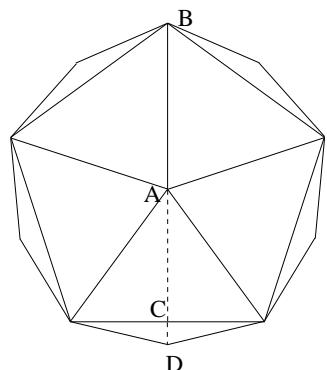


図 1

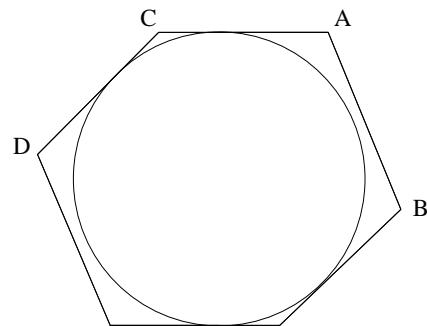


図 2

教育 物理

1. (i) 単位ベクトル \vec{n} を軸として角速度 ω で回転している座標系の直交底ベクトルを $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ とするとき、ベクトル

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

の時間変化が

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \vec{i} + \frac{dA_y}{dt} \vec{j} + \frac{dA_z}{dt} \vec{k} + \vec{\omega} \times \vec{A}, \quad \vec{\omega} = \omega \vec{n}$$

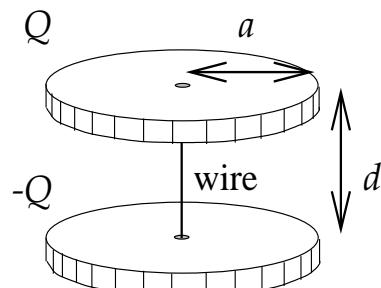
となることを用いて、一定の角速度 ω で回転する座標系における Newton の運動方程式を導き、遠心力とコリオリの力を求めよ。

- (ii) バケツの水を鉛直線のまわりに一定の角速度 ω で回転させるとき、水面は遠心力によって放物線となることを示せ。ただし重力加速度を g とせよ。
- (iii) 赤道上で、高さ h の所から初速ゼロで地面に落下する質点はコリオリの力でどれだけずれるか。 $h = 490m$ のときのずれの大きさはどれ程か。簡単のため空気の抵抗は無視できるものとする。
- (iv) A 君は (iii) の問題をコリオリの力を使わないで次のように考えた。地球の半径を R 、自転の角速度を ω とすると、慣性系で見た時 h 上空の質点の水平速度は $(R+h)\omega$ 、地面の水平速度は $R\omega$ だから、結局高さ h の点から水平初速度 $h\omega$ で発射された質点が放物線を描いて地上に到達するまでの水平距離に等しいと考えた。その距離を求めよ。しかしこの距離はコリオリの力を用いた (iii) の結果と一致しない。その理由を考察せよ。

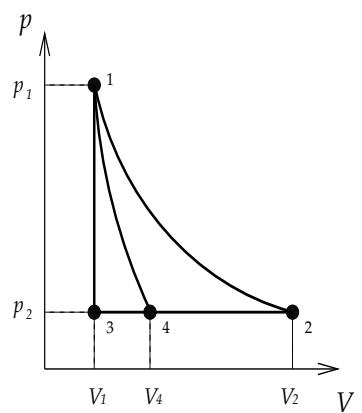
2. 半径 a の金属円板 2 枚を間隔 d で平行に向かい合わせて平行板コンデンサーを作り、上下の極板にそれぞれ $\pm Q$ の電荷を帯電させた。 $d \ll a$ とし、円板の縁の電場の乱れは無視できるものとする。

- (i) 平行板コンデンサーの静電容量 C を求め、極板間の電場のエネルギーが $Q^2/(2C)$ に等しいことを示せ。時刻 $t = 0$ で、両極板間の中心を電気抵抗 R のまっすぐな針金（半径は a に比べて十分小さい）で、図 1 のようにつないだ。 R は十分大きく、極板間の電荷分布は常に一様で、自己インダクタンスの効果は無視できるものとする。また、中心を通る針金からの距離を r とする。
- (ii) 時刻 t における極板の電荷 $q(t)$ 及び針金を流れる電流 $I(t)$ を求めよ。（答えは C を含む形で表せ）
- (iii) 時刻 t で極板を流れる電流密度を r の関数として求めよ。また、変位電流はどうなるか。（答えは $I(t)$ を含む形で表せ）
- (iv) 時刻 t で極板の間に生じる磁場の極板に平行な成分を r の関数として求めよ。また、コンデンサーの外側ではどうなるか、極板を流れる電流と関係づけて述べよ。
- (v) 電磁場のエネルギーの流れを求め、針金に吸い込まれていくエネルギーとジュール熱を比較せよ。

3. 1 モルの理想気体に対して、体積 V と圧力 p の平面上で、図 2 のような状態変化を考える。 $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$ は、それぞれ、準静的等温過程、準静的等圧過程、準静的等積過程であるとして次の間に答えよ。



- (i) $1 \rightarrow 2$ に対するエントロピー変化 ΔS_{12} はいくらか。体積 V_1, V_2 及び 気体定数 R を用いて表せ。
- (ii) 1 から 2 へ断熱的自由膨張で移ったとするとき、 $\int d'Q/T$ を求めよ。但し、 T は温度、 Q は熱量である。この結果を前問の ΔS_{12} と比較することにより何がわかるかを説明せよ。
- (iii) 1 から始まる準静的断熱過程により、 2 と 3 を結ぶ直線上の 4 に到達したとする。準静的断熱過程では $TV^{\gamma-1}$ が一定であることを示せ。但し、 γ は定圧モル比熱と定積モル比熱の比である。これを用いて、 V_4 の表式を V_1, p_1, p_2 の関数として求めよ。
- (iv) $1 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$ に対するエントロピー変化をそれぞれ計算せよ。循環過程 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ におけるエントロピー変化はいくらになるはずか。これを用いて、前問と同じ V_4 の表式を求めよ。



教育 英語 解答

1. 全訳

東京・内幸町のプレスセンターという場所柄からすると、それはささやかな記者会見だった。インドからやってきた男女三人が昨日、十数人の記者を前に「日本の市民に良く知ってもらいたいこと」を静かな口調で語った。ポンペイから北へ四百キロ。亞大陸の西部を流れる大河、ナルマダ川で着工された巨大ダムの話だ。この建設で、二万ヘクタールの豊かな農地と森林が水没する。上流域二百キロにわたって二百四十八の村があり、住民約十万人が追い立てられている。六割が少数民族だという。

移住計画も満足にできていない。大規模な森林喪失による環境破壊と伝統的な生活文化の崩壊と。(a)「都会の住人は、原始林で果実を採取し、木製品を売ることで、生計を立てている人々の暮らしと引き換えにしてまで、電力の供給が増えることを望むでしょうか」と、三人のインド人は問い合わせた。(91字)先月には一万二千人が昼夜、反対の座り込みをした。

(b) 現在、世界中の人々が、日本に対し批判的な目を向けています。日本は、政府開発援助計画を通じ、世界銀行と共に、このインドのダム計画の資金を融資しようとしている。(81字)揚水発電機を受注したのも、日本の企業だ。会見で、三人は「日本の国民は、税金がこんな形で使われているのを知っていますか」と問い合わせていた。

「知りませんでした。知らされていませんでした」と正直に答えるしかない。(c)日本を代表する機関である海外経済協力基金は、計画によって環境が受けける影響や、地域の住人が受けける影響を調査しようとすらしなかった。(75字)「だれの犠牲の上に、だれが利益を得ているのか」について関心を持ってほしい、という三人の言葉はずいぶん控え目だったと思う。

-1990.4.20 天声人語から抜粋

2. 全訳

論文を非常に多く書く研究者についての新しい調査結果を見ると、またも、誰を著者と呼ぶべきか否かという疑問を感じる。先週発表された調査結果によると、世界中で二十人の研究者が、過去十年間、少なくとも11.3日に一回は記事を出版している。トップの五人は、一週間に一回以上の割合で、記事を出している。

これらの著者の中には、結晶学者がいる。彼らは、高度に複雑な実験設備と経験を持っており、必然的に、彼らの助けを必要とする数多くの研究者と共同実験を行なっている。普通、その見返りとして、共著者の肩書を得るのである。他のほとんどの学者は、中位か、大きな研究室もしくは研究グループを取りまとめている学者で、そのグループが、専攻分野のなかでも、特に成果の多い一連の研究に行き当たったような人達である。(a)最も著作の多い二十人の専門分野は、単独の分野では、基礎分子化学が最も多く、次いで移植外科医学が目立った。(52字)より広く分野を捉えると、生命医学が全体の半分以上を占めた。

今までになく科学に厳密さが要求される今日、多くの学者が、「論文の著者」という昔ながらの問題について考え直している。反応の鍵となる試薬を貸すことは、共著者となるに足ることであろうか。では、よいアイディアを与えたというのは? 日常的な指導は?(b)著名な研究者が、捏造データを含んでいることが明らかとなつた論文に、著者として名を連ねたばかりに、(本人はその研究をしなかつたににもかかわらず)被害を被つたという事件が起こるに至っては、「著者」についての論争は、もはやアカデミックという域をはずれている。(125字)今日では、研究のてほどきや監督をする、研究室の指導者は、論文に共著者として名前を連ねる場合は、その論文のデータの正確さに対し責任を問われる所以である。

多作著者のリストに載っている研究者の多くについての非公式な調査から、「著者」についての考え方は、十人十色であることがわかる。「著者」についての考え方は、専攻する分野によって違う傾向にある。化学実験は、比較的一本道であり、確認も自分で行なうことが多いので、論文をたくさん出している化学の研究室のリーダーによると、彼らは、普段研究室内の研究を見てまわっているのに加え、アイディアを与えたり、監督したりするだけのことも充分大切なことであると確信しており、(c)結局、論文の共著者となるのである。
テキサス A&M 大学の化学者であるフランク=コットンによると、彼の研究室で行なわれる実験のほとんど

は、彼が選んだものであり、そして、彼が共著者となっている。というのも、彼が実験の許可を与えるのであり、彼の提案に基づいて実験は行なわれているからである。彼自身が実際の実験をやることはほとんどないが、彼は、研究室の 15 から 30 人の研究者を指導し、彼らのデータに目を通し、ほとんどすべての論文に手を入れているとのことである。一方で、ロンドン大学の病理学者であるジュリア=ポラックは、次のように言っている。「私は、そのアイディアが自分で思いついたものであるか、研究を始めたのが自分であるか、もしくは研究の重要な部分を自分が行なった場合でなければ、論文に名前を載せません。理解もしておらず、論文書きを一部でも行なっていない場合、その論文に名前が載るのはいやである、というのが、私の基準です。」

(d) 論文の著者に関して、全分野に共通の確固とした決まりができることはないかもしれないが、論文を多作する研究者も、今では、充分監督したわけではない研究の論文に自分の名前を載せることの危険性を知っているようだ。 (99 字)

3. 全訳

私は、自分の気持ちを口を酸っぱくするほど言わずにはいられない。実験物理学者はいつも理論家の「提案」を受け入れてしまっている。しかし、現在の状況は馬鹿げている。今や、理論家は、巨大な粒子加速器の日程会議の席上で、非常にすぐれた実験家の出す提案に対し、拒否権行使することができる所以である。私が、原子核および素粒子物理で活動していたころは、理論家の拒否権の行使の仕方は、まだ、受け入れられるものであった。彼らは、「馬鹿な実験」をした人を誰でもいいから引き合いに出し、あざ笑ったのである。というわけで、もし、そのような社会的圧力により威嚇される人がいるとすれば、(実際にはほとんどの人が威嚇されてしまうのであるが...)効果的に、馬鹿な実験を人がしなくすることができる所以である。時々、馬鹿な実験だと気付かずに、馬鹿な実験をしてしまう実験家がいて、その馬鹿げた結果を論文にしてしまうのだが、そうすると、はるかに頭のいい理論家達に笑われてしまうのであった。典型的な例は、R.T.Cox が 1928 年に発見した実験結果である。それは、ラジウム E の β 崩壊によって、放出される電子は、(右と左で違う確率で「二重散乱」するので) 偏極する、というものである。理論家は、この結果を受け入れることが出来なかった。というのは、それは、彼らが神聖視していたパリティー保存則を侵していたからである。そのために、Cox の重要な発見は、「正しく」再発見されるまで視界から消え去ったのである。19 年後、T.F.Lee と Frank Yang が、素粒子物理の重大な問題を解決するために、もしかすると弱い相互作用ではパリティーが保存されないのでないかもしれない、ということを提案した。いくつかのグループがパリティーの非保存を確認する実験を設定し、すぐに、Lee と Yang の提案が、実際の世界の構造に適合したものであることが見い出された。しかしながら、この「常識」の変革に対するノーベル賞は、Cox が貰ったわけでも、Wu 夫人とその共同実験者達 (Lee と Yang が正しいことを証明した) が貰ったわけでもなかった。Lee と Yang が確かに栄冠を勝ち得たわけだが、私は、実験家もそれを分かつべきであったと思う。

来年は、Michelson-Morley の実験からちょうど百年である。あの非常に重要な実験も、今日のような状況では行なわれなかつたであろう。というのも、次のような想像上の場面が展開されたであろうからだ。Michelson と Morley が「日程会議」で、Michelson の新しい干渉計を使って、エーテル中の地球の速度を測定する計画であることを報告する。会議に参加している理論天体物理学者が質問する。「あなた方の方法だと、どの程度の精度で、地球の速度が測れるのですか?」 Michelson が言う。「有効数字一桁です。」 理論家が応える。「しかし、エーテル中での地球の速度は、既に、天文観測から、有効数字 2, 3 桁で求められているんですよ。」 会議の全員が、Michelson と Morley の提案が前代未聞のばかげたものであるということで一致し、2 人の案は、にべもなく却下されてしまう。という具合に、エーテルの概念を放棄するきっかけとなった実験も行なわれないことになってしまう。

かつての様に実験家がばかな実験をやらせてもらえるのなら、かつてパリティの保存やエーテルの存在が正しいことをみんなが知っていたように、「みんなが正しいことを知っている」物理概念のいったいいくつが、実は間違いであると判明することかと思う。 (118 字)

(i) 全訳参照のこと。

(ii) Theoretical physicists always try to keep experimental physicists from doing experiments that seem to be stupid from what is “known” to be true. In the past, theorists held up to ridicule anyone who did “stupid experiments”, and by the social pressure, experimentalists were intimidated and kept from such experiments.

But still, it was possible to do such experiments accidentally by not knowing that it was stupid. And also, there were some “stupid experiments” which eventually revealed the falseness of a fact that everyone believed to be true. The present situation is ridiculous because theorists sit on the scheduling committees and can exercise veto power over the proposals by the experimentalists directly. But if the experimentalists were again allowed to do “stupid experiments”, they may reveal some of our physical misconception. (137 語)

4. Up to about twenty-five years ago, it was thought that protons were “elementary” particles, but the experiment in which protons collided with other protons or electrons at high speeds indicated that they were in fact made up of smaller particles. These particles were named quarks.
5. (i) By the time Achilles reaches the place where the turtle stayed at first, the turtle is proceeded ahead. When Achilles again reaches the point where the turtle were, he has gone further.
(ii) The above statement neglected the convergence of the accumulated time that Achilles spent in each steps.

教育 数学 解答

1. (i) $u = x^2 \frac{dy}{dx}$ として、もとの方程式を書き直すと、

$$\frac{du}{dx} = -x^2$$

となる。これと、 $u(0) = 0$ から、

$$u = -\frac{x^3}{3} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{3}$$

これを解いて、

$$y = 1 - \frac{x^2}{6}$$

(ii) まず、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{z}{x} \right) = -\frac{z}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} \\ \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) &= \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(-z + x \frac{dz}{dx} \right) = \frac{1}{x^2} \left(-\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dx} + x \frac{d^2z}{dx^2} \right) = \frac{1}{x} \frac{d^2z}{dx^2} \end{aligned}$$

よって、 z に対する微分方程式は以下のようになる。

$$\frac{1}{x} \frac{d^2z}{dx^2} = -\left(\frac{z}{x}\right)^n$$

$n = 1$ のときは、

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -z$$

と表される。この一般解は、 A, B を任意定数として、

$$z = Ae^{ix} + Be^{-ix} \quad \therefore \quad y = \frac{z}{x} = \frac{1}{x} (Ae^{ix} + Be^{-ix})$$

このうち初期条件を満たすものとして、

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

(iii) $y = (1 + ax^2)^m$ をもとの方程式に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) &= \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} (2amx^3(1 + ax^2)^{m-1}) \\ &= (1 + ax^2)^{m-2} (6am(1 + ax^2) + 4a^2m(m-1)x^2) \\ &= -(1 + ax^2)^{mn} \end{aligned}$$

が得られる。両辺 $(1 + ax^2)^{m-2}$ で割ると、

$$6am + (4m^2 + 2m)a^2x^2 = -(1 + ax^2)^{mn-m+2}$$

となる。 $x = 0$ で等式が成り立つためには、

$$6am = -1 \quad \cdots (1)$$

が必要である。これから、 $a \neq 0, m \neq 0$ が必要であることが言える。

次に x^2 の項の係数が等しいことより、

$$a^2(4m^2 + 2m) = 0 \quad \cdots (2)$$

$$mn - m + 2 = 0 \quad \cdots (3)$$

または、

$$a^2(4m^2 + 2m) = -a \quad \cdots (4)$$

$$mn - m + 2 = 1 \quad \cdots (5)$$

がいえる。まず、(2),(3)について考えると、 $a \neq 0, m \neq 0$ と (2) をあわせて、 $m = -1/2$ がいえる。これと、(3),(1) から、 $a = 1/3, n = 5$ となる。これは、確かにもとの方程式の解となっている。

次に、(4),(5)について考えると、(4),(1) から、 $2m + 1 = 3$ 、すなわち、 $m = 1$ が言える。(1),(5) にこの結果を代入して、 $a = -1/6, n = 0$ が得られるが、これは、 $n \neq 0$ であることに反するので求める解ではない。

以上まとめて、 $n = 5, m = -1/2, a = 1/3$ である。

(iv) 初期条件を満たす y の 4 次までの展開式として、

$$y = 1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + O(x^5)$$

をとる。これを方程式の左辺に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) &= \frac{1}{x^2} (2a_2 x^3 + 3a_3 x^4 + 4a_4 x^5 + O(x^6)) \\ &= 6a_2 + 12a_3 x + 20a_4 x^2 + O(x^3) \end{aligned}$$

となる。これから、まず $a_2 = -1/6$ であることがわかる。また、右辺についての展開は、 x^2 の項までとれば良く、

$$\left(1 - \frac{1}{6} x^2 + O(x^3) \right)^n = 1 - \frac{n}{6} x^2 + O(x^3)$$

と左辺の展開を比べて、 $a_3 = 0, a_4 = \frac{n}{120}$ が得られる。

以上まとめて、4 次までの y の展開として、

$$y = 1 - \frac{1}{6} x^2 + \frac{n}{120} x^4 + \dots$$

が得られる。

2. (i) 求める固有値を λ とすると、 $\det(A - \lambda I) = 0$ である。

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1 + \lambda)(1 - \lambda)^2 - 8(1 - \lambda) \\ &= (\lambda - 1)(3 - \lambda)(3 + \lambda) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda = 3, -3, 1$$

$$\bullet \lambda = 3 \text{ のとき、} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ より、} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \lambda = -3 \text{ のとき、同様に、} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ より、} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \lambda = 1 \text{ のとき、同様に、} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ より、} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) $A = TVT^{-1}$, $V = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ として、

$$\begin{aligned} A^3 + aA^2 + bA + cE &= TV^3T^{-1} + aTV^2T^{-1} + bTVT^{-1} + cE \\ &= T(V^3 + aV^2 + bV + cE)T^{-1} = 0 \end{aligned}$$

より、 $V^3 + aV^2 + bV + cE = 0$ を解けばよい。

$$V^3 = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.etc.$$

より、

$$\begin{cases} 27 + 9a + 3b + c = 0 \\ -27 + 9a - 3b + c = 0 \\ 1 + a + b + c = 0 \end{cases}$$

$$\therefore a = -1, b = -9, c = 9$$

よって、 $A^3 - A^2 - 9A + 9E = 0$ である。(ケーリー・ハミルトンの定理より、当然固有方程式と同じ形になる)

これを用いて、

$$\begin{cases} A^5 = A^4 + 9A^3 - 9A^2 \\ A^4 = A^3 + 9A^2 - 9A \end{cases} \quad \therefore A^5 = 10A^3 - 9A$$

$$\begin{aligned} A^5 - 6A^3 - 4A^2 + 18E &= 4A^3 - 4A^2 - 9A + 18E \\ &= 4(A^2 + 9A - 9E) - 4A^2 - 9A + 18E \\ &= 27A - 18E = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 54 \\ 0 & 9 & 54 \\ 54 & 54 & -45 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(iii)

$$\vec{y} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$(A - E)\vec{y} = 2\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\text{これが表現できる } \vec{x} \text{ の一般形})$$

よって上式で表せないのは、この 2 ベクトルの張る平面以外の成分を持つベクトルが足されたものである。よって、その一般形は、

$$\vec{y} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (u \neq 0)$$

3. (i) 恒等式 $(\cos \theta + i \sin \theta)^5 = \cos 5\theta + i \sin 5\theta$ の左辺を展開すると、

$$\text{左辺} = \cos^5 \theta + 5i \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta - 10i \cos^2 \theta \sin^3 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta + i \sin^5 \theta$$

実部をとれば、

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \\ &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta (1 - \cos^2 \theta) + 5 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 \\ &= 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta\end{aligned}$$

(ii) 上の式において、 $\theta = \pi/5$ とすると、

$$\cos \pi = 16 \cos^5 \frac{\pi}{5} - 20 \cos^3 \frac{\pi}{5} + 5 \cos \frac{\pi}{5}$$

となる。 $\cos(\pi/5) = x$ とすれば、

$$\begin{aligned}16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 &= 0 \\ (x+1)(16x^4 - 16x^3 - 4x^2 + 4x + 1) &= 0 \\ (x+1)(4x^2 - 2x - 1)^2 &= 0 \\ (x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2 &= 0 \\ \therefore x = -1, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4} &\end{aligned}$$

ところで、 $\theta = \frac{3}{5}\pi, \pi, \frac{7}{5}\pi, \frac{9}{5}\pi$ としても同じ方程式が得られることから、5つの解のうち、もっとも大きいものが、 $\cos(\pi/5)$ であることがわかる。従って、

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

(iii) まず、図2のBC面は、正5角形で、ちょうど図1の正5角形の部分に当たる。図1では、この正5角形の部分をBCより上にある正20面体の面BCへの正射影として見ることにする。図2のHが、図1では、ちょうどAの部分に当たる。この図を基本にして考える。

題意や、正20面体の対称性を考えれば、図2のようになることは明らかである。また、図のように各点に名前をつける。

まず、図1においてCAの面BCへの正射影がCHになり、EAの面BCへの正射影がEHになる。

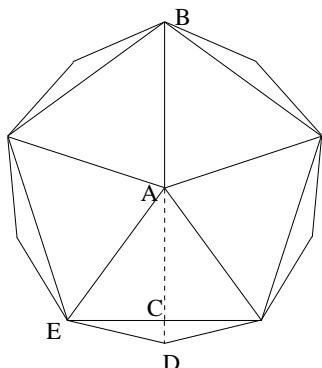


図1

$$CE = \frac{a}{2} \text{ より}$$

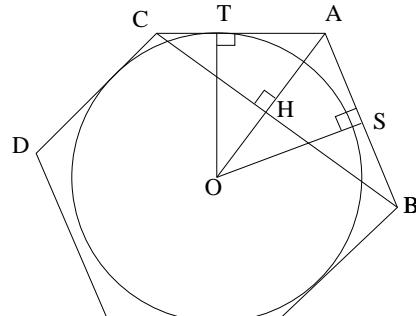


図2

$$CH = CE \frac{1}{\tan \frac{\pi}{5}} = \frac{a}{2} \times \frac{\cos \frac{\pi}{5}}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{5}}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}$$

次に、図 2 で $\triangle ACH$ にピタゴラスの定理を用いると

$$AH^2 + CH^2 = AC^2$$

$$AH^2 + \left(\frac{a}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^2 \quad \therefore AH = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} a$$

ところで、図 2 で $\triangle ABH$ と $\triangle AOS$ は相似より

$$AO : AB = AS : AH$$

$\triangle ACH$ と $\triangle AOT$ は相似より

$$AO : AC = OT : CH$$

よって、

$$OT = \frac{AO \cdot CH}{AC} = \frac{AB \cdot AS \cdot CH}{AH \cdot AC} = a \frac{a}{2} \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} \frac{1}{a} \frac{2}{\sqrt{3}a} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} a \quad \cdots (6)$$

よって、内接球の半径 $r = OT$ は

$$r = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} a$$

また図 2 で再び $\triangle ACH$ と $\triangle AOT$ が相似であることに注目すると

$$AT : TO = AH : HC \quad \therefore AT = \frac{TO \cdot AH}{HC}$$

(6) より

$$r = TO = \frac{AB \cdot AS \cdot CH}{AH \cdot AC}$$

であるから

$$AT = \frac{AB \cdot AS}{AC} = a \frac{a}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{a} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} AC$$

したがって T 、すなわち内接点は AC を $2:1$ に内分する点、すなわち正三角形の面の重心である。

- (iv) 正 20 面体はその対称性から、正三角形を底面とし、高さを内接球の半径とする三角錐が 20 個あつまつたものの、と考えられる。三角錐の体積 v は

$$v = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} a \frac{\sqrt{3}}{2} a \right) \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} a = \frac{3 + \sqrt{5}}{48} a^3$$

したがって正 20 面体の体積 V は

$$V = 20v = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} a^3$$

と求まる。

教育 物理 解答

1. (i) $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ を時間微分すると

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \vec{i} + \frac{dA_y}{dt} \vec{j} + \frac{dA_z}{dt} \vec{k} + A_x \frac{d\vec{i}}{dt} + A_y \frac{d\vec{j}}{dt} + A_z \frac{d\vec{k}}{dt}$$

これを与えられた式

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \vec{i} + \frac{dA_y}{dt} \vec{j} + \frac{dA_z}{dt} \vec{k} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

と比べて

$$A_x \frac{d\vec{i}}{dt} + A_y \frac{d\vec{j}}{dt} + A_z \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A} \quad \cdots (1)$$

を得る。ここで $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ に対して

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \cdots (2)$$

さらに時間微分を行って

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \dot{x} \frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y} \frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z} \frac{d\vec{k}}{dt} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

ただし \vec{n} は定ベクトルなので $\vec{\omega} = \omega \vec{n} = 0$ を用いた。(1),(2) を代入して

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

ただし $\vec{a} \equiv \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ 、 $\vec{v} \equiv \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ はそれぞれ回転座標系における加速度および速度にあたる。

外力 \vec{F} は $m\ddot{\vec{r}}$ に等しいから

$$m\vec{a} = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

第2項がコリオリ力、第3項が遠心力に対応する。

- (ii) 水面が安定する条件を考える。水面付近の水にその水面と垂直でない成分を持つ力が働くと、そこの水はその方向に動いてしまうと考えられる。よって水面が安定するにはその水面に対し垂直な力のみが働く時になる。そして、これが圧力 P によって支えられている。図のように水面の水の位置ベクトルを回転の中心軸から $\vec{\omega}$ に垂直にとる。また水面の高さを $f(x)$ であらわすと

$$0 = -mg \frac{\vec{\omega}}{\omega} + \vec{P} + m\omega^2 \vec{r}$$

$\vec{\omega}/\omega$ と \vec{r}/r を成分で表すと

$$0 = -mg + P \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \quad \cdots (3)$$

$$0 = -P \frac{f'(r)}{\sqrt{1 + f'(r)^2}} + m\omega^2 r \quad \cdots (4)$$

P を消去して

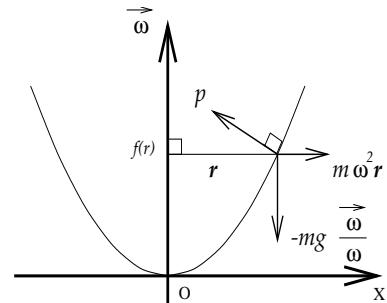
$$f'(r) = \frac{\omega^2}{g} r$$

積分して

$$f(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C_0$$

但し C_0 は定数である。

以上より水面は放物線になることがわかる。



(iii) 回転座標系を円柱座標で表す。

$$\vec{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad \vec{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

であるから

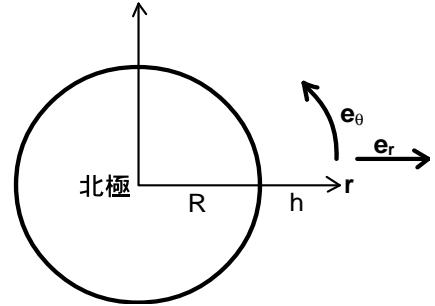
$$\dot{\vec{e}}_r = \vec{e}_\theta \dot{\theta}, \quad \dot{\vec{e}}_\theta = -\vec{e}_r \dot{\theta}, \quad \dot{\vec{e}}_z = \vec{0}$$

となる。よって $\vec{r} = r\vec{e}_r$ を時間微分すると

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

図のように座標系をとると



$$m\vec{d} = -mg\vec{e}_r - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} + m\omega^2 r\vec{e}_r$$

$\vec{d} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}$ 、 $\vec{v} \Rightarrow \dot{\vec{r}}$ と置き換えて \vec{e}_r 成分と \vec{e}_θ 成分に分けると

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -g + \omega^2 r + 2\omega r\dot{\theta}$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -2\omega\dot{r}$$

ただしコリオリ力 F は

$$F = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} = -2m\omega\vec{e}_z \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = -2m\omega(\dot{r}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\vec{e}_r)$$

と計算した。 \vec{e}_θ 成分の式は

$$r \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -2 \frac{dr}{dt} (\dot{\theta} + \omega) \leftrightarrow \frac{d \ln(\dot{\theta} + \omega)}{dt} = -2 \frac{d \ln r}{dt} \leftrightarrow (\dot{\theta} + \omega) = \frac{C}{r^2}$$

と積分ができる、初期条件 $\dot{\theta} = 0, r = R + h$ を代入して

$$\dot{\theta} = \omega \left(\frac{(R+h)^2}{r^2} - 1 \right) \quad \cdots (5)$$

ここで r は $R + h \sim R$ の値をとり $R \gg h$ を考えると $\dot{\theta}$ は ω よりも小さい値をとる。よって運動方程式の \vec{e}_r 成分は

$$\ddot{r} = -g \left(1 + O\left(\frac{\omega^2 R}{g}\right) \right)$$

となる。実際に地球の自転、半径を入れて見ると

$$\frac{\omega^2 R}{g} = \left(\frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \right)^2 \frac{6.4 \times 10^6}{9.8} \sim 0.003$$

この項は微小になり無視できる。 $\dot{r}(t=0) = 0, r(t=0) = R + h$ であるから

$$r = (R + h) - \frac{gt^2}{2}$$

これを式 (5) に代入して

$$\dot{\theta} = \omega \left\{ \frac{(R+h)^2}{((R+h)-gt^2/2)^2} - 1 \right\} = \omega \left\{ \frac{1}{(1-gt^2/2(R+h))^2} - 1 \right\} \simeq \omega \left(1 + \frac{gt^2}{R+h} - 1 \right) = \frac{\omega gt^2}{R+h}$$

これを積分して

$$\theta = \frac{\omega gt^3}{3(R+h)}$$

質点が落下する ($r = R + h \rightarrow r = R$) のに要する時間は $r = (R + h) - \frac{gt^2}{2}$ より $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ この間 θ は $\theta = 0$ から

$$\theta = \frac{\omega g}{3(R+h)} \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^3$$

だけである。これは地表面では ($h/R \ll 1$)

$$\frac{\omega g}{3} \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^3 \frac{R}{R+h} \approx \frac{\omega g}{3} \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^3$$

$h = 490\text{m}$ の場合

$$\frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \frac{9.8}{3} \left(\sqrt{\frac{2 \times 490}{9.8}} \right)^3 = 24\text{cm}$$

(iv) 地上に達するまでには $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ かかる。初速度が $h\omega$ ならばこの間に $h\omega t = h\omega \sqrt{\frac{2h}{g}}$ だけ進む。これは明らかに (iii) の答え

$$\frac{\omega g}{3} \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^3 = \frac{2}{3} h\omega \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

と異なる。この考察に地球の回転が質点が発射された瞬間ににおいてのみ加味されているからである。つまり質点の相対速度は高さ $x(\text{m})$ の時 $x\omega$ であるのだからずれる距離は $\int_{x=h}^{x=0} x\omega dt$ で与えられる。これに $x = h - \frac{gt^2}{2}$ を代入すれば

$$\int_{t=0}^{t=\sqrt{2h/g}} \left(h - \frac{gt^2}{2} \right) \omega dt = \omega \left[ht - \frac{gt^3}{6} \right]_{t=0}^{t=\sqrt{2h/g}} = \frac{2}{3} \omega h \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

と答えは一致する。

2. (i) 極板間の電場と電位差は、ガウスの法則より

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \pi a^2}, V = \frac{Qd}{\epsilon_0 \pi a^2}$$

よって、 $Q = CV$ より

$$C = \epsilon_0 \frac{\pi a^2}{d}$$

よって、電磁場のエネルギーは

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \pi a^2 d = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 \pi a^2} = \frac{Q^2}{2C}$$

(ii) 極板間には電位差 $V = Q/C$ があるのでこれによって針金には電流が流れる。よって

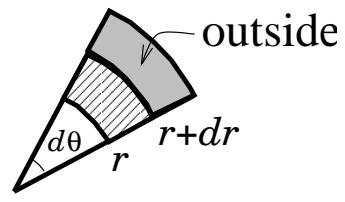
$$I(t) = \frac{V}{R} = \frac{q(t)}{RC}$$

$I(t)$ は極板上の電荷が減少して針金に流れ込む事によって流れるのだから $I(t) = -dq(t)/dt$ 。よって

$$-\frac{dq}{dt} = \frac{q(t)}{RC} \Rightarrow q(t) = q(0) \exp(-t/RC)$$

$$\Leftrightarrow I(t) = \frac{q(0)}{RC} \exp(-t/RC)$$

(iii) 極板上の電荷は一様に減って中心の針金に流れるのであるから、その流れは中心に向かっていて、中心に対して対称のはずである。そこで半径 $r (< a)$ の点における弧に対する電流線密度を $\vec{i}(r)$ とする。時間 dt に図の部分から中心に向かう電荷はその定義により $i(r) \cdot r d\theta \cdot dt$ となる。これはその外側の部分から $i(r+dr) \cdot (r+dr) d\theta \cdot dt$ だけ、また斜線部から電荷が減少することによって $-dq(t)/\pi a^2 \times rd\theta dr$ だけ供給される。よって



$$i(r)rd\theta dt = i(r+dr) \cdot (r+dr)rd\theta \cdot dt - dq(t)/\pi a^2 \cdot rd\theta dr$$

$-dq(t) = I(t)dt$ に注意して

$$\leftrightarrow \frac{i(r+dr) \cdot (r+dr) - i(r)r}{dr} = -\frac{I(t)r}{\pi a^2} \leftrightarrow \frac{d}{dr} i(r) \cdot r = -\frac{I(t)r}{\pi a^2} \leftrightarrow i(r)dr = -\frac{I(t)r^2}{2\pi a^2} + C$$

極板の周辺 ($r = a$) では電流供給源が無いから $\vec{i}(r=a) = 0$ のはず。

$$i(a) \cdot a = -\frac{I(t)a^2}{2\pi a^2} + C \leftrightarrow C = \frac{I(t)}{2\pi}$$

これより

$$i(r) = \frac{I(t)}{2\pi r} \left(1 - (r/a)^2\right)$$

これは境界条件 $i \cdot 2\pi r = I(t)(r \rightarrow 0)$ も満たす。このことは極板上の電流は全て $r \rightarrow 0$ でまとまっている $I(t)$ となって針金を流れると言うことをいっている。

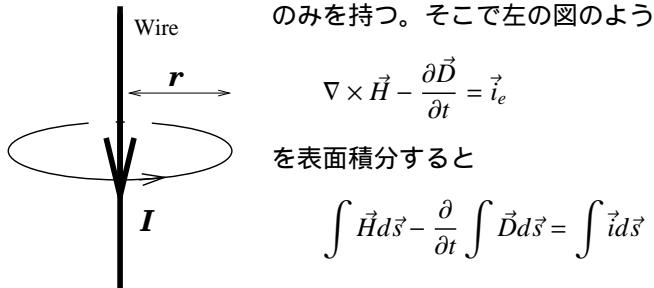
変位電流は極板間の電束密度の減少を説明するもので

$$\frac{\partial D}{\partial t} = i_e \leftrightarrow i_e = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{V(t)}{d} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \frac{R}{d} I(t) = \frac{\epsilon_0}{Cd} I(t) = \frac{I(t)}{\pi a^2}$$

ただし $C = \epsilon_0 \pi a^2 / d$ としている。実際 \vec{D} の減少は $I(t)$ によるもので、この減少が一様におきているならば電流密度が一様に $I(t)/\pi a^2$ と分布していて、これが原因と考えられるので O.K.

(iv)

その対称性により磁場の極板に平行な成分は極板との距離によらず円周方向成分のみを持つ。そこで左の図のような経路に対して



を表面積分すると

$$\int \vec{H} d\vec{s} - \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} d\vec{s} = \int \vec{i} d\vec{s}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} H(r)2\pi r - \frac{I}{\pi a^2}\pi r^2 = -I & (r \leq a) \\ H(r)2\pi r - \frac{I}{\pi a^2}\pi a^2 = -I & (r > a) \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} H(r) = -\frac{I}{2\pi r} \left(1 - (r/a)^2\right) = -i(r) & (r \leq a) \\ H(r) = 0 & (r > a) \end{cases}$$

これは右の図の経路を使っても求められる。この場合、この経路によって囲まれた面に垂直な \vec{D} 成分は無いので

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{i}_e$$

面に流れ込んで来るのは極板上の電流線密度である。よってこの表面積分は

• $r \geq a$ の時

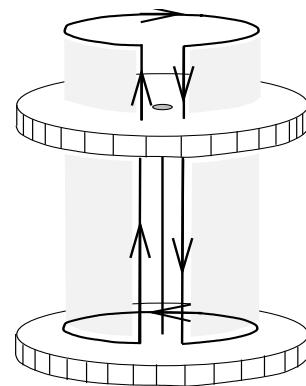
$$H_{in} \cdot 2\pi r - H_{ex} \cdot 2\pi r = \vec{i} \cdot 2\pi r$$

$$H_{in}(r) = \vec{i} + H_{ex}(r)$$

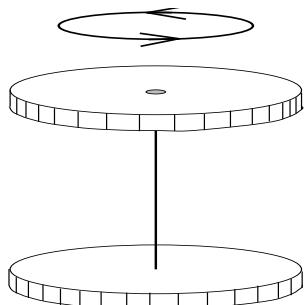
• $r < a$ の時

$$H_{in} \cdot 2\pi r = H_{ex} \cdot 2\pi r = 0$$

$$H_{in}(r) = H_{ex}(r)$$



極板の上で表面積分を上の図のように行えば



$$H_{ex} \cdot 2\pi r = 0 \Leftrightarrow H_{ex} = 0$$

よって

$$H_{in}(r) = \begin{cases} -i & (r \leq a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

と同様の事が導かれる。

コンデンサーの外側で磁場が無いのは前者の解法によれば針金を流れる電流が作る磁場を電束密度が変化する事により生じる磁場がちょうど打ち消すためである。この電束密度の変化は極板上の電荷が減少するためであり、言葉を変えると、極板を流れる電流のためと言える。つまり、外側で磁場が無いのは針金の電流が作る磁場を極板を流れる電流が打ち消すためであると言える。

(v) 電磁場のエネルギーの流れは Poynting Vector

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

から求められる。 \vec{E} が極板 Q から極板 $-Q$ 向きへ、 \vec{H} が極板 Q から見て右周りであるから \vec{S} は針金に向かう。 \vec{H} と \vec{E} とは交わっているから

$$S = \frac{V}{d} \frac{I}{2\pi r} \left(1 - (r/a)^2\right) = \frac{RI^2}{2\pi rd} \left(1 - (r/a)^2\right)$$

針金に吸い込まれて行くエネルギーは針金の半径を $\rho \gg a$ として

$$S_\rho \cdot 2\pi\rho d = \frac{RI^2}{2\pi\rho d} \left(1 - (\rho/a)^2\right) 2\pi\rho d = RI^2 \quad (\rho/a \gg 1)$$

また Joule 熱は $VI = RI^2$ となるから、と一致しており、電磁場のエネルギーが針金で Joule 熱になっているといえる。

3. 理想気体では、 $dU = C_VdT$ であり、等温過程では $dU = 0$ であるから、熱力学第一法則より、 $d'Q = pdV$ ここで、1 モルの理想気体の状態方程式 $pV = RT$ から、 p を消去して整理すると、

$$\frac{d'Q}{T} = R \frac{dV}{V}$$

したがって、 $1 \rightarrow 2$ に対するエントロピーの変化は次のようになる。

$$\Delta S_{12} = \int \frac{d'Q}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RdV}{V} = R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

断熱膨張過程では、 $d'Q = 0$ であるから、

$$\int \frac{d'Q}{T} = 0$$

断熱自由膨張過程が準静的であるとすると、これが $1 \rightarrow 2$ に対するエントロピー変化を与えることになる。しかし、準静的な変化であれば、過程によらず同じエントロピー変化が得られるはずである。したがって (i) との比較から、断熱自由膨張過程が準静的でないことがわかる。

(ii) 準静的断熱過程では $dQ' = 0$ であるから、熱力学第一法則より $C_VdT + pdV = 0$ が成り立つ。

ここで状態方程式より、 $pV = RT$ から、 p を消去して整理すると、

$$\frac{dV}{T} + \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = 0$$

両辺積分して整理すると、 $TV^{\frac{R}{C_V}} = \text{const.}$ となる。

さて、マイヤーの法則 $C_P = C_V + R$ を変形して、

$$\frac{R}{C_V} = \gamma - 1$$

したがって、 $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$ 。また、状態方程式より T を消去すると、 $pV^\gamma = \text{const.}$

これより、 $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_4^\gamma$ よって、 $V_4 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/\gamma}$

(iii) $1 \rightarrow 4$:

断熱過程であることから $dQ' = 0$ 。よって、 $\Delta S_{12} = 0$ 。

$4 \rightarrow 3$:

理想気体では $dU = C_VdT$ であり、 $p = p_2$ の等圧過程であるからことから、

$$d'Q = C_VdT + p_2 dV$$

ここで、状態方程式 $p_2 V = RT$ の微分から、 $p_2 dV = RdT$ なので、

$$d'Q = \frac{C_V}{R} p_2 dV + p_2 dV$$

マイヤーの関係式を使えば、

$$d'Q = \frac{C_P}{p_2} dV$$

また、状態方程式から p_2 を消去すれば、

$$d'Q = \frac{C_P}{R} \frac{RT}{V} dV \iff \frac{d'Q}{T} = C_P \frac{dV}{V}$$

よって、この過程におけるエントロピー変化は、

$$\Delta S_{43} = \int \frac{d'Q}{T} = \int_{V_4}^{V_1} C_P \frac{dV}{V} = C_P \ln \frac{V_1}{V_4}$$

$3 \rightarrow 1$:

熱力学第一法則より、 $d'Q = C_VdT$ 。状態方程式を微分した式をもちいれば、

$$dT = \frac{V_1}{R} dp = T \frac{dp}{p}$$

したがって、

$$d'Q = C_V T \frac{dp}{p} \iff \frac{d'Q}{T} = C_V \frac{dp}{p}$$

よってこの過程におけるエントロピー変化は

$$\Delta S_{31} = \int \frac{d'Q}{T} = \int_{p_2}^{p_1} C_V \frac{dp}{p} = C_V \ln \frac{p_1}{p_2}$$

以上より、循環過程 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ におけるエントロピー変化は、

$$\Delta S_{14} + \Delta S_{43} + \Delta S_{31} = C_P \ln \frac{V_1}{V_4} + C_V \ln \frac{p_1}{p_2}$$

このエントロピー変化は 0 になるはずなので、

$$V_4 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{C_V}{C_P}}$$

1992 年度 入学試験 物理専門科目

専攻 問題 1

1. 次のような一次元ポテンシャル $V(x)$ 中にある質量 m , 電荷 e を持つ粒子を考える。

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 \cos x & -\pi \leq x \leq \pi \\ \infty & x < -\pi, x > \pi \end{cases}$$

ただし, V_0 は正とする。

- (i) $x = 0$ の近傍でポテンシャルが調和近似できるとし ($V(x) \sim -V_0(1 - x^2/2)$), エネルギー固有値と固有関数を求めよ。また, n 番目の量子状態に対してこの近似が成り立つ条件を示せ。

ここで, n を整数とした微分方程式

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} - 2\xi \frac{df}{d\xi} + 2nf = 0$$

の解は, 次の二つの式を満たすエルミート多項式 $H_n(\xi)$ を用いて与えられることに注意せよ。

$$H_n(\xi) = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{d^n}{d\xi^n} (\exp(-\xi^2))$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) \exp(-\xi^2) d\xi = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m}$$

- (ii) $x = 0$ の近傍で, ポテンシャルの非調和項 $\Delta V(x) \equiv V(x) + V_0(1 - x^2/2)$ を x について最低次の項で近似する。エネルギー固有値のずれをこの項について一次の摂動計算で求めよ。

ここで, 必要ならば, 以下に与えられるエルミート多項式の漸化式を用いよ。

$$\xi H_n(\xi) = \frac{1}{2} H_{n+1}(\xi) + n H_{n-1}(\xi)$$

- (iii) x 方向に弱い電場 E をかけたときのエネルギー固有値を, $V(x)$ が調和近似できるとして求めよ。このとき, $V(x)$ の調和近似が成り立つための電場 E の条件を示せ。

2. 次のような一次元ポテンシャル $V(x)$ 中にある質量 m を持つ粒子を考える。

$$V(x) = \begin{cases} V_0(\cos x + 1) & -2\pi \leq x \leq 2\pi \\ \infty & x < -2\pi, x > 2\pi \end{cases}$$

ただし, V_0 は正とする。

この粒子の x の期待値が $t = 0$ で正であるとき, x の期待値の時間発展を述べよ。ここで, 粒子のエネルギー期待値は V_0 より十分低く, 状態は基底状態と第一励起状態だけを用いて記述できるとする。

専攻 問題 2

長さ L , 半径 b の金属パイプ(抵抗はゼロとする)の中心軸に沿って半径 a , 長さ ℓ の荷電粒子群が速度 v で通過する。荷電粒子群内での線電荷密度(単位長さあたりの電荷量) σ は一様であるとする。金属パイプは、図に示すように、容量 C および抵抗 R を通じて接地されており、抵抗 R の両端間の電位差 V の時間変化をオシロスコープ上で観測するものとする。

- 荷電粒子群が周期 T で繰り返し金属パイプ内を同一方向に通過するとき、パイプの内壁面に静電誘導される電荷量 $Q(t)$ を求め、横軸を時間軸にとって図示せよ。ただし、 $\ell \gg L$, $T \gg \ell/v$ とする。
- 金属パイプの外壁につながる容量 C のコンデンサー上には、電荷量 $Q_c(t)$ が現れる。そのとき $Q(t)$ と $Q_c(t)$ および抵抗を流れる電流 $j(t)$ との関係式を求めよ。また、電圧 $V(t)$ の満たすべき微分方程式を求めよ。
- 誘導電荷量 $Q(t)$ および電圧 $V(t)$ を次のようにスペクトル分解するとき、電圧 $V(t)$ のスペクトル成分 $\hat{V}(\omega)$ を、設問(2)の $V(t)$ の式を用いて $\hat{Q}(\omega)$ の関数として求めよ。角周波数 ω に対する $\hat{V}(\omega)$ の絶対値 $|\hat{V}(\omega)|$ の概略図を、 $\omega = 0$ 近傍に注目して描け。

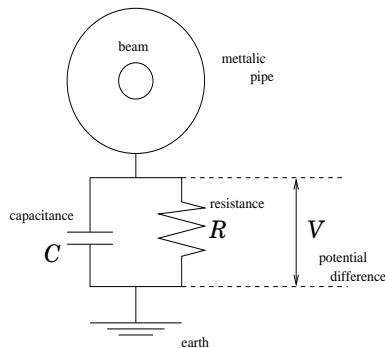
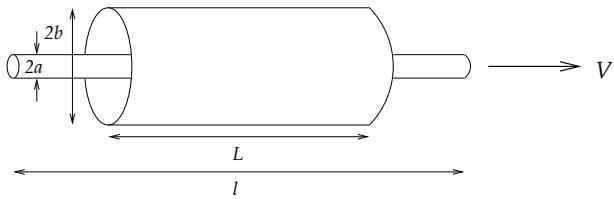
$$Q(t) = \int_0^\infty \hat{Q}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad V(t) = \int_0^\infty \hat{V}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- 設問 2において求めた $V(t)$ の微分方程式の解を求め、以下の場合にオシロスコープ(入力インピーダンスは $1M\Omega$ とする)上で観測される電圧波形の概略を図示せよ。

$$R = 100k\Omega, \quad C = 1 \times 10^{-9} \text{ Farad}, \quad \ell = 30\text{m}, \quad L = 0.3\text{m}, \quad v = 3 \times 10^7 \text{ m/sec}$$

長さ ℓ に含まれる荷電粒子数 : $N = 1 \times 10^{10}$ 個, 粒子の電荷 : $e = 1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb

また、抵抗 R を 50Ω とした場合はどのような波形となるか。



専攻 問題 3

面積 $S = L_x \times L_y$ の平面上は自由に動けるが、面に垂直な方向には動けない電子の系（2 次元電子系）を考える。 L_x, L_y は、それぞれ平面の x 方向、 y 方向の長さであり、巨視的な大きさであるとする。また、電子間の相互作用は無視できるものとする。電子の質量を m 、電子密度を n 、ボルツマン定数を k_B 、プランク定数を $2\pi\hbar$ 、絶対温度を T とする。このとき、以下の設問に答えよ。

1. 周期的境界条件を用いて、1 個の電子に対する固有状態、固有エネルギーを求めよ。
2. 状態密度 $\rho(E)$ は $dN(E)/dE$ で定義される。 $\rho(E)$ および化学ポテンシャル μ を用いて、有限温度での全電子数を与える式をしるせ。この式のここでの状態密度の表式を代入して、 μ を n および T の関数として求めよ。また、 E_F と T の関数としても表してみよ。
3. $k_B T \ll E_F$ のときの比熱の最重要項を求めよ。このとき、必要ならば次の公式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{df}{dx} dx = -\frac{\pi^2}{3}, \quad \text{ここで、 } f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

である。

4. 電子の状態密度が $E_F - \Delta E \leq E \leq E_F + \Delta E$ で $\rho(E) = |E - E_F|^\alpha$ である系を考える。ここで、 $\alpha > -1$ である。このとき十分低温 ($k_B T \ll \Delta E$) での比熱が温度の関数としてどのような振る舞いをするか調べよ。

専攻 問題 4

図 1 は粉末固体試料からの X 線の回折像を撮影するための実験装置を、実際の装置の大きさを無視して、その概略を定性的に理解できるように、概念的に描いたものである。この装置を用いて、単純立方格子を持つ粉末結晶試料からの X 線の回折像を撮影することを試みる。図 2 は、カメラの中での X 線の入射方向、X 線の回折方向、写真フィルム、回折像の位置の間の関係を示したものである。R は試料から写真フィルムまでの距離で 6.0cm、S は、写真フィルム上で、ビームストッパーの中心から回折像までの距離である。

この実験に関し次の設問に答えよ。設問 1 では、A から G の部分に該当する言葉または文章を書け。但し、X 線の波長は 1.54\AA である。また、必要とあれば、末尾の表 1 を用いよ。

1. 撮影を始める前に、試料を試料台にのせて固定する。次に、実験室の配電板のスイッチを入れる。X 線管を (A) するために水を流してから、X 線発生装置の電源のスイッチをいれ、X 線の強度を決めるために、X 線管の (B) と (C) を設定する。次に、X 線管のシャッターを開けて、ビームストッパーの窓から内蔵されている (D) を見て、(E) を通って細い X 線ビームが、きちんと入射していることを確かめる。もしも (D) が (F) なら、カメラ支持台を動かして、カメラの位置を調整する。カメラ位置の調整が終わったら、ひとまず (G) を切り、カメラをカメラ支持台からはずし、写真フィルムをカメラに入れて、カメラ支持台に固定する。そして再び (G) を出して、回折像を撮影する。
2. 解析の対象とすることができるような回折像の撮影が一回の試行で成功するとは限らない。考えられる失敗の原因を二つあげよ。
3. フィルムに記録される回折像の図を定性的に描け（回折像の形状が定性的にわかれればよい）。この回折像は通常、何と呼ばれるか。
4. 現像された写真フィルム上で中心にもっとも近い回折像に対する S の値として 3.3cm という値が得られた。これより、この結晶の格子定数を求めよ。
5. 上の試料において、 $S = 5.9\text{cm}$ の位置にも回折像が認められた。これはどの結晶面からの回折像か。結晶面の指標で示せ。

表 1

$\sin 13.5^\circ = 0.233$	$27.0^\circ = 0.471\text{rad}$
$\sin 15.8^\circ = 0.273$	$31.5^\circ = 0.550\text{rad}$
$\sin 20.6^\circ = 0.352$	$41.2^\circ = 0.719\text{rad}$
$\sin 25.4^\circ = 0.429$	$50.8^\circ = 0.886\text{rad}$
$\sin 28.2^\circ = 0.473$	$56.4^\circ = 0.983\text{rad}$
$\sin 30.3^\circ = 0.505$	$60.6^\circ = 1.058\text{rad}$
$\sin 32.7^\circ = 0.540$	$65.4^\circ = 1.141\text{rad}$

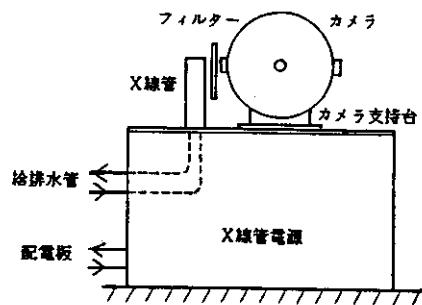


図 1

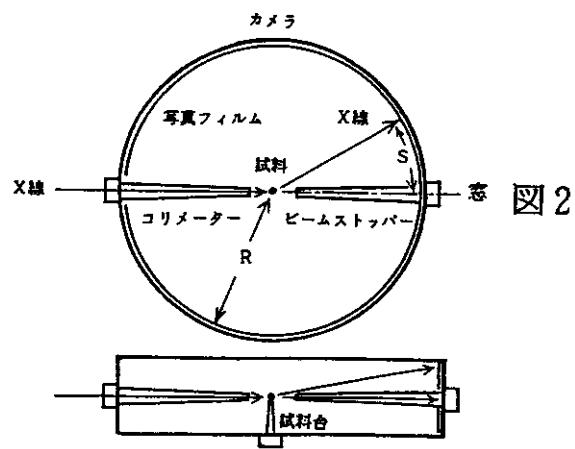


図 2

専攻 問題 5

面積 S の 2 次元空間を運動する 2 個の電子が短距離間の引力ポテンシャル $-V_0\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ (V_0 は正の定数, $\delta(\vec{r})$ は 2 次元空間でのディラックのデルタ関数, \vec{r}_1, \vec{r}_2 は電子の座標) によって相互作用している。この時, 2 個の電子のスピンが逆向きであれば, 束縛状態が出現する。重心は静止しているとして, 次の順序で束縛エネルギーを求めよ。この束縛エネルギーはシュレディンガー方程式

$$\left[\frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - V_0\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right] \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \varepsilon\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad \cdots (1)$$

の最低固有値により決定される。(m は電子の質量, \vec{p}_1, \vec{p}_2 は運動量)

1. 2 個の電子のスピンが逆向きの場合, 空間部分の波動関数 $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ は \vec{r}_1 と \vec{r}_2 の入れ換えに関してどのような性質を持つか説明せよ。2 個の電子のスpinが同じ向きの場合の

$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ はどうなるか。また, このとき引力ポテンシャルは $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ にどのような影響を及ぼすか。

2. $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ をフーリエ展開すると波数 \vec{k} に関して偶対称である関数 $g(\vec{k})$ を用いて

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} g(\vec{k}) \quad \cdots (2)$$

と書けることを示せ。

3. シュレディンガー方程式を $g(\vec{k})$ を用いて表現すると, 次式が得られることを示せ。

$$\left[2\varepsilon(\vec{k})g(\vec{k}) - V_0 \frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} g(\vec{k} - \vec{q}) \right] = \varepsilon g(\vec{k}) \quad \cdots (3)$$

ここで, $\varepsilon(\vec{k}) = \hbar^2 k^2 / 2m$ であり, $\delta(\vec{r}) = \frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$ に注意する。

4. (3) 式を解くために, $\sum_{\vec{q}} g(\vec{k} - \vec{q})$ は k に依存しないことに注意し, $\frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} g(\vec{k} - \vec{q}) = C$ と書く。この定数 C を用いると, (3) は $g(\vec{k})$ について解けて

$$g(\vec{k}) = \frac{V_0 C}{2\varepsilon(\vec{k}) - \varepsilon}$$

となり, ε を決定する方程式が次式で与えられることを示せ。

$$\frac{V_0}{S} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\varepsilon(\vec{k}) - \varepsilon} = 1 \quad \cdots (4)$$

5. (4) の左辺を, \vec{k} に関する積分に書き直す。このとき, \vec{k} についての積分の領域が $\varepsilon(\vec{k}) \leq \varepsilon_0$ (ε_0 は適当な正のエネルギー) であるとして ε を求めよ。(4) を満たす ε は負となることを確認せよ。特に, $mV_0/2\pi\hbar^2 \ll 1$ の場合, 束縛エネルギー $E = -\varepsilon$ は

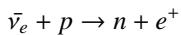
$$E = 2\varepsilon_0 \exp\left[-\frac{4\pi\hbar^2}{mV_0}\right]$$

で与えられることを示せ。

専攻 問題 6

進化した星の中心部には重元素からなる中心核が形成される。特に重い星の場合、この中心核は重力崩壊を起こし重力崩壊型超新星爆発を起こす。このとき、解放される重力エネルギーは中心核を暖め、最終的に熱的ニュートリノとして外部に放出される。

- 質量 $M = 3.0 \times 10^{30} \text{kg}$ の中心核が、重力崩壊に伴いその半径が $R_1 = 10^6 \text{m}$ から $R_2 = 10^4 \text{m}$ に収縮するとする。このときに放出される重力エネルギー ΔU を求めよ（数式だけでよい）。ただし、中心核内部の物質密度は一様であると仮定し、重力定数を G とせよ。
- 超新星爆発が銀河中心（地球からの距離は $L = 3 \times 10^{20} \text{m}$ ）で起こったとして、地球上で単位面積あたりを通過するニュートリノの数 n_ν を数式で表せ。設問 1 で得られた重力エネルギー ΔU がすべてニュートリノとして等方的に放出されるとし、ニュートリノの平均エネルギーを \bar{E}_ν とする。
- 放出された全ニュートリノ数の $1/6$ は反電子ニュートリノ $\bar{\nu}_e$ であり、検出器内で以下の反応により $\bar{\nu}_e$ が検出されるとする。



質量 $M_D = 3 \times 10^6 \text{kg}$ の巨大な検出器により検出される事象の数を数式で表し、有効数字 1 術で値を求めよ。ただし、単位面積あたり n_ν 個のニュートリノが通過したとし、上記の反応の断面積を $\sigma = 10^{-46} \text{m}^2$ とする。また、検出器内の陽子含有率（質量比）は $1/2$ であり、ニュートリノの平均エネルギーを $\bar{E}_\nu = 10 \text{MeV}$ とする。

- 観測されたニュートリノ事象の時間幅は Δt 、エネルギーの分布は E_{\min} から E_{\max} にわたったとする。全てのニュートリノが同時に放出されたと仮定することにより、ニュートリノ質量の上限値が与えられる。この上限値を求めよ。

重力定数	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
アボガドロ数	$N_A = 6.02 \times 10^{23}$
エネルギー換算	$1 \text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{J}$

専攻 問題 7

1. タンパク質の階層構造を示すのに、一次構造、二次構造、超二次構造、三次構造、四次構造という述語が使われている。それぞれの述語がタンパク質のどのようなレベルの構造をしめすかを簡単に述べよ。(一述語あたり二行以内)。
2. タンパク質の二次構造は、ポリペプチド主鎖の二つの二面角 ϕ ($C'-N-C-C'$) と $\psi(N-C-C'-N)$ のみで表すことができる。その理由を述べよ。
3. 化学結合したホモポリペプチドであっても、 α -らせんや β -構造のような立体構造を示すことがある。しかし、ホモポリペプチドは、天然タンパク質が持つ、より高次の立体構造をとることはない。これらの事実より、タンパク質の二次構造を安定化する相互作用と、より高次の立体構造を安定化する相互作用との間にどのような違いがあると考えられるか。十行以内で述べよ。
4. タンパク質の天然構造は、そのアミノ酸配列(遺伝情報)により一意的に決定されると考えられている。このような考え方の根拠になっている既知の実験事実について解説せよ。また、アミノ酸配列より天然構造へと至る構造形成の仕組みを明らかにするには、どの様な研究が必要と考えられるか。それぞれ 10 行以内で述べよ。

専攻 問題 1 解答

1. (i) $x \approx 0$ で

$$\begin{aligned} V(x) &\approx -V_0\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots\right) \\ &\approx -V_0\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \end{aligned} \quad \cdots (1)$$

と調和近似できたとする。この時 Schrödinger eq. は、

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi + \left(E + V_0 - \frac{m\omega^2}{2}x^2\right) \psi = 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} \psi + \left(\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2} - \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2\right) \psi = 0 \quad (V_0 = m\omega^2 \text{とした}) \end{aligned} \quad \cdots (2)$$

$x = \alpha X$ の変数変換を考えると

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2}{dX^2}, \quad x^2 = (\alpha X)^2$$

より、

$$\alpha^4 = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2, \quad \lambda = \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2} \alpha^2 = \frac{2(E + V_0)}{\hbar\omega} \quad \cdots (3)$$

とすると式 (2) は

$$\frac{d^2}{dX^2} \psi + (\lambda - X^2) \psi = 0 \quad \cdots (4)$$

となる。

ここで $u = e^{\pm \frac{X^2}{2}}$ は $u'' + (\mp 1 - X^2)u = 0$ をみたし、これは $X \rightarrow \pm\infty$ で式 (4) と一致するので式 (4) の解は近似的効く範囲で $e^{\pm \frac{X^2}{2}}$ に漸近する解を持つ。波動関数の収束からこのうち $e^{-\frac{X^2}{2}}$ が許される。式 (4) の一般解を求めるために、

$$\psi(X) = e^{-\frac{X^2}{2}} \varphi(X)$$

と置いて式 (4) に代入すると、

$$\frac{d^2}{dX^2} \varphi - 2X \frac{d\varphi}{dX} + (\lambda - 1)\varphi = 0 \quad \cdots (5)$$

となる。この方程式の解は $(\lambda - 1) = 2n(n = 0, 1, 2, \dots)$ のときのみ $X \rightarrow \infty$ で $e^{-\frac{X^2}{2}}$ をかけて収束する（そうでないときは、 $e^{-\frac{X^2}{2}}$ をかけても発散する）。よって、

$$\lambda = 2n + 1(n = 0, 1, 2, \dots) \quad \cdots (6)$$

式 (3) からこれは

$$E = E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - V_0 \quad \cdots (7)$$

一方、式 (7) に対する固有関数は式 (6) をみたすとき式 (5) の解が n 次 Hermite 多項式になることから、規格化定数 N を用いて

$$\psi_n(X) = N e^{-\frac{X^2}{2}} H_n(X) \quad \cdots (8)$$

規格化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ より

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} N^2 e^{-X^2} H_n(X)^2 dX = \alpha N^2 \sqrt{\pi} 2^n n!$$

$$\text{よって } N = (\alpha \sqrt{\pi} 2^n n!)^{-\frac{1}{2}} = \left\{ \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} 2^n n! \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{よって } \psi_n(x) = \left\{ \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} 2^n n! \right\}^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right] H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right)$$

ただしこの調和近似が良いのは

$$x \sim 0 \iff E_n \sim -V_0 \iff \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \ll V_0$$

(ii) 摂動項

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= -V_0 \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \right) \simeq -\frac{V_0}{24} x^4 \\ \Delta E_n &= \langle n | \Delta V(x) | n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} N^2 e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} H_n^2 \left(\frac{x}{\alpha}\right) \left(-\frac{V_0}{24} x^4\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} N^2 e^{-X^2} H_n^2(X) \left(-\frac{V_0}{24} \alpha^4 X^4\right) \alpha dX \\ &= -\frac{V_0}{24} N^2 \alpha^5 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} H_n^2(X) X^4 dX \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} H_n^2(X) X^4 dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} (X H_n(X))^2 X^2 dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} \left[\frac{1}{2} H_{n+1} + n H_{n-1} \right]^2 X^2 dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} \left[\frac{1}{4} (X H_{n+1})^2 + n (X H_{n+1})(X H_{n-1}) + n^2 (X H_{n-1})^2 \right] dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} \left[\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} H_{n+2} + (n+1) H_n \right\}^2 + n \left\{ \frac{1}{2} H_{n+2} + (n+1) H_n \right\} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ \frac{1}{2} H_n + (n-1) H_{n-2} \right\} + n^2 \left\{ \frac{1}{2} H_n + (n-1) H_{n-2} \right\}^2 \right] dX \end{aligned}$$

ここで H_n の直交性から積分すると $[\dots]$ の中のクロスターは消えるので

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} \left[\frac{1}{4} \frac{1}{4} H_{n+2}^2 + \left\{ \frac{1}{4} (n+1)^2 + n(n+1) \frac{1}{2} + n^2 \frac{1}{4} \right\} H_n^2 + n^2 (n-1)^2 H_{n-2}^2 \right] dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} \left[\frac{1}{16} H_{n+2}^2 + \frac{(2n+1)^2}{4} H_n^2 + n^2 (n-1)^2 H_{n-2}^2 \right] dX \\ &= \frac{1}{16} \sqrt{\pi} 2^{n+2} (n+2)! + \frac{(2n+1)^2}{4} \sqrt{\pi} 2^n n! + n^2 (n-1)^2 \sqrt{\pi} 2^{n-2} (n-2)! \\ &= \sqrt{\pi} 2^n n! \left\{ \frac{(n+1)(n+2)}{4} + \frac{(2n+1)^2}{4} + \frac{n(n-1)}{4} \right\} \\ &= \sqrt{\pi} 2^n n! \frac{6n^2 + 6n + 3}{4} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= \langle n | \Delta V(x) | n \rangle = -\frac{V_0}{24} N^2 \alpha^5 \sqrt{\pi} 2^n n! \frac{6n^2 + 6n + 3}{4} \\ &= -\frac{V_0}{24} \frac{\alpha^5}{\alpha} \frac{\sqrt{\pi} 2^n n!}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \frac{6n^2 + 6n + 3}{4} \\ &= -\frac{V_0}{32} \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^2 (2n^2 + 2n + 1) \\ &= -\frac{\hbar^2}{32m} (2n^2 + 2n + 1) \quad (V_0 = m\omega^2) \end{aligned}$$

(iii) $V(x) = -V_0 \cos x - eEx$

$$\begin{aligned} &= -V_0 \left(1 + \frac{eE}{V_0} x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \dots \right) \\ &= -V_0 \left(1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{eE}{V_0} \right)^2 + \frac{e^2 E^2}{2V_0^2} + \frac{1}{24} x^4 - \dots \right) \end{aligned}$$

これが調和近似できるためには $\left(x - \frac{eE}{V_0}\right)^2$ の項の x^2 からのずれが

$$\frac{eE}{V_0} \ll 1$$

となれば良い。この時エネルギー固有値は $\frac{e^2 E^2}{2V_0^2}$ の項のずれの効果で、

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega - V_0 - \frac{e^2 E^2}{2V_0}$$

2. 系は ground state と 1st excited state だけで記述される。それぞれの状態のエネルギー固有値は求まっているとする。

エネルギー 波動関数

$$\text{ground} \quad E_0 \quad \psi_0(x)$$

$$\text{1st excited} \quad E_1 \quad \psi_1(x)$$

一般に ground state と 1st excited state のパリティはそれぞれ正と負である。

(注) 正確には例えば ψ_0 は中央がへこんでいるかも知れないがここで問題なのはパリティだけである。

ここで $\psi_0(x), \psi_1(x)$ の時間発展は Schrödinger eq.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_n(x, t) = E_n \psi_n(x, t) \quad (n = 0, 1)$$

で決まるので、

$$\psi_0(x, t) = \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right] \psi_0(x), \quad \psi_1(x, t) = \exp\left[-\frac{iE_1 t}{\hbar}\right] \psi_1(x)$$

となる。したがって

$$\psi(x, t) = C_0 \psi_0(x, t) + C_1 \psi_1(x, t) = \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right] \left\{ C_0 \psi_0(x) + C_1 \exp\left[\frac{-i(E_1 - E_0)t}{\hbar}\right] \psi_1(x) \right\}$$

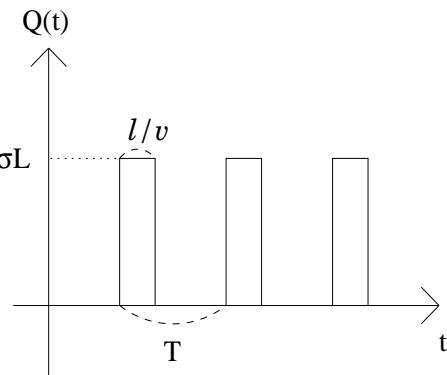
よって、パリティを考慮すれば、

$$\psi(x, t + \frac{\pi\hbar}{E_1 - E_0}) = \psi(-x, t), \quad \psi(x, t + \frac{2\pi\hbar}{E_1 - E_0}) = \psi(x, t)$$

よって、粒子は角振動数 $\omega = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}$ で $x > 0$ と $x < 0$ との間を行き来する。

専攻 問題 2 解答

1. この問い合わせに厳密に答えるのは非常に難しい。そこで単に円筒形コンデンサーの問題として考えれば十分と思われる（この仮定は、回路の緩和時間 RC が、粒子群がパイプを横切る時間 L/v に対して十分長ければ妥当である）。 σL 粒子群がパイプ内にある時、パイプ内壁に静電誘導される電荷量は $-\sigma L$ である。そして、粒子群がパイプ内を完全に横切るのにかかる時間は $(L+\ell)/v \approx \ell/v$ である。従って $Q(t)$ の時間変化は右図のようになる。



2. 図のように Q_c と j の符号を定める。すると、

$$\frac{d}{dt}(Q(t) + Q_c(t)) = j(t) \quad \cdots (1)$$

$$V(t) = -Rj(t) = \frac{1}{C}Q_c(t) \quad \cdots (2)$$

がなり立つ。（2）を用いて（1）から j, Q_c を消去すると、

$$\frac{dV(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V(t) = -\frac{1}{C}\frac{dQ(t)}{dt} \quad \cdots (3)$$

となる。

3. 問題文では積分の下限が 0 になっている。この理由が私には良く分からない。問題文のままでは $Q(t)$ が実数であることを保証できないように思うのだが…。

以下ではとりあえず通常のフーリエ変換を用いて設問に答えることにする（今繰り返しの周期 T は十分に長いとしているので、フーリエ級数でもフーリエ変換でも同じ結果になる）

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad Q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \cdots (4)$$

式（4）を式（3）に代入し、各周波数成分毎にまとめる

$$i\omega \tilde{V}(\omega) + \frac{1}{RC} \tilde{V}(\omega) = -\frac{i\omega}{C} \tilde{Q}(\omega)$$

$$\therefore \tilde{V}(\omega) = -\frac{i\omega}{\frac{1}{RC} + i\omega} \frac{\tilde{Q}(\omega)}{C} \quad \cdots (5)$$

となる。今 $Q(t)$ を $0 \leq t \leq \ell/v$ で $-\sigma L$ 、それ以外で 0 とすると $\tilde{Q}(\omega)$ は、

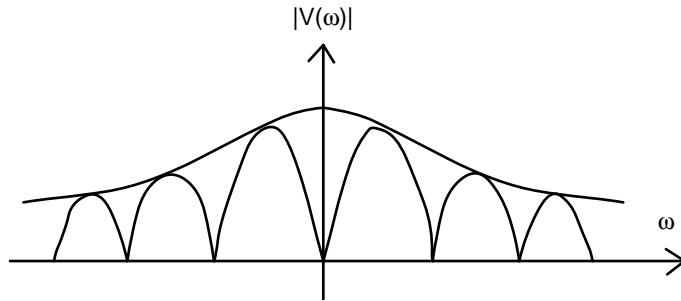
$$\tilde{Q}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\ell/v} (-\sigma L) e^{-i\omega t} dt = \frac{\sigma L}{2\pi} \frac{e^{-i\omega \ell/v} - 1}{i\omega}$$

となる。したがって $\tilde{V}(\omega)$ は、

$$\tilde{V}(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\omega \ell/v} - 1}{\frac{1}{RC} + i\omega} \frac{\sigma L}{C} \quad \cdots (6)$$

よって $|\tilde{V}(\omega)| = \frac{1}{\pi} \left| \frac{\sigma L}{C} \right| \frac{|\sin \frac{\omega \ell}{2v}|}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC} \right)^2 + \omega^2}} \sim \frac{RC}{\pi} \left| \frac{\sigma L}{C} \right| \left| \frac{\omega \ell}{2v} \right| \quad (\text{ただし}, \omega \approx 0)$

となる。 $|\tilde{V}(\omega)|$ の概略図は次の通りになる。



4. 式 (6) を積分して $V(t)$ を求める ($V(t)$ を求めるだけなら、式 (3) を定数変化法で解くこともできる)。

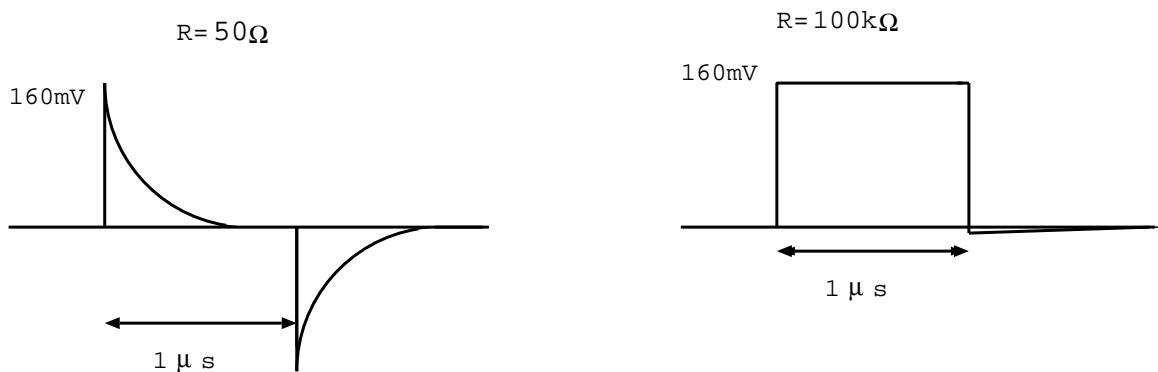
$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\sigma L}{C} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-\ell/v)}}{\frac{1}{RC} + i\omega} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\frac{1}{RC} + i\omega} d\omega \right\} \\ &= \begin{cases} 0, & (t < 0) \\ \frac{\sigma L}{C} e^{-\frac{t}{RC}}, & (0 < t < \ell/v) \\ \frac{\sigma L}{C} e^{-\frac{t}{RC}} (-e^{\frac{\ell/v}{RC}} + 1), & (t > \ell/v) \end{cases} \end{aligned}$$

問題文で与えられた値を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\sigma L}{C} &= \frac{1}{C} \frac{eN}{\ell} L = 1.6 \times 10^{-2} [\text{V}] \\ \frac{\ell}{v} &= 10^{-6} [\text{sec}] \\ RC &= \begin{cases} 10^{-4} [\text{sec}] & (R = 100\text{k}\Omega) \\ 5 \times 10^{-8} [\text{sec}] & (R = 50\Omega) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。ただしオシロスコープの入力インピーダンスは十分大きいので影響を無視した。

オシロスコープで観測される波形は下図のようになる。



専攻 問題 3 解答

1. 2 次元での自由粒子の Schrödinger 方程式は、

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi = E\Psi \quad \cdots (1)$$

である。この式を $\Psi = X(x)Y(y)$ と変数分離して解く (1) へ代入すれば、

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \right) = E$$

を得る。ここで、 $X''/X = -k_x^2, Y''/Y = -k_y^2$ とおけば、

$$X = A_x e^{ik_x x}, Y = A_y e^{ik_y y}$$

と解が求まる。次に周期的境界条件により k_x, k_y を求めると、 $X(x) = X(x + L_x)$ より $e^{ik_x L_x} = 1$ 、つまり、 $k_x = 2\pi n_x / L_x$ ($n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) が得られ、同様にして、 $k_y = 2\pi n_y / L_y$ ($n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) が得られる。

従って、(1) の解は、

$$\Psi = X(x)Y(y) = A e^{2i\pi \left(\frac{n_x}{L_x} x + \frac{n_y}{L_y} y \right)} \quad (A = A_x A_y)$$

と書け、さらに、規格化条件から、 $A = 1/\sqrt{S}$ となる。結局固有ベクトル、固有値はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{\sqrt{S}} e^{2i\pi \left(\frac{n_x}{L_x} x + \frac{n_y}{L_y} y \right)} \\ E &= \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2) = \frac{(2\pi\hbar)^2}{2m} \left\{ \left(\frac{n_x}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y} \right)^2 \right\}, \quad (n_x, n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

となる。

2. あるエネルギー E までの状態数は、 n_x, n_y 面での $E = \text{一定}$ という線内の格子点数に対応する。

いま、 L_x, L_y は十分に大きいとしているので、エネルギー準位の間隔は小さいとできる。そこで、状態数を、軸の長さがそれぞれ $\sqrt{2mE}L_x/\pi\hbar, \sqrt{2mE}L_y/\pi\hbar$ の楕円の面積と考えることができる。

従って、

$$N(E) = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2mE} \frac{L_x}{2\pi\hbar} \cdot \sqrt{2mE} \frac{L_y}{2\pi\hbar} = \frac{mS}{\pi\hbar^2} E \quad \cdots (2)$$

ここで、因数 2 はスピンの自由度によるものである。

また、 $N(E_F) = nS$ より、

$$\frac{mS}{\pi\hbar^2} E_F = nS \implies E_F = \frac{\pi\hbar^2}{m} n$$

が得られる。

有限温度 T での全電子数 N は、fermi 分布関数 $f(E)$ を用いて、

$$N = \int_0^\infty \rho(E) f(E) dE = \int_0^\infty \rho(E) \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1} dE$$

と書き表せる。

さて、(2) 式より、 $\rho(E)$ は、

$$\rho(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{mS}{\pi\hbar^2}$$

を代入して、

$$N = \frac{mS}{\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{dE}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1} = \frac{mS}{\pi\hbar^2} k_B T \ln\left(e^{\frac{\mu}{k_B T}} + 1\right) = nS$$

となる。よって、 μ は、 T と n 、 T と E_F を使って、それぞれ

$$\mu = k_B T \ln\left(e^{\frac{\pi\hbar^2 n}{m} \frac{1}{k_B T}} - 1\right) = k_B T \ln\left(e^{\frac{E_F}{k_B T}} - 1\right) \quad \cdots (3)$$

と表せる。

3. 内部エネルギー $U(T)$ は、

$$U(T) = \int_0^\infty E \rho(E) f(E) dE = \frac{mS}{\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{EdE}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1}$$

である。ここで、低温近似 $k_B T \ll E_F$ を使うと、(3) 式より $\mu \approx E_F$ として良いから、 $\beta \equiv 1/k_B T$ として、

$$U(T) \approx \frac{mS}{\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{EdE}{e^{\beta(E-E_F)} + 1}$$

と表せる。すると、比熱 $C(T)$ は、

$$C(T) = \frac{\partial U(T)}{\partial T} \approx -\frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{mS}{\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{EdE}{e^{\beta(E-E_F)} + 1} \right) = \frac{mS}{\pi\hbar^2} \frac{1}{k_B T^2} \int_0^\infty \frac{E(E-E_F)e^{\beta(E-E_F)}}{(e^{\beta(E-E_F)} + 1)^2} dE$$

ここで、 $x \equiv \beta(E - E_F)$ とすると、 $dx = \beta dE$ などより、

$$C(T) = \frac{mS}{\pi\hbar^2} \frac{1}{k_B T^2} \int_{-\beta E_F}^\infty \frac{\left(\frac{x}{\beta} + E_F\right) \frac{x}{\beta} e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \frac{mS}{\pi\hbar^2} \frac{1}{k_B T^2} \int_{-\beta E_F}^\infty \frac{1}{\beta^3} \frac{(x + \beta E_F) x e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

$1/\beta \ll E_F$ 、つまり、 $\beta E_F \gg 1$ より、

$$\approx \frac{mS}{\pi\hbar^2} \frac{1}{k_B T^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\beta^3} \frac{(x + \beta E_F) x e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

が得られる。

積分を計算する際に、 $(x + \beta E_F)$ という部分に注目すると、残った部分が奇関数になっているから、第二項から来る積分は消える。また、

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) = \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2}$$

であるから、結局、

$$C(T) \approx -\frac{mS}{\pi\hbar^2} \frac{1}{k_B T^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\beta^3} x^2 \frac{d}{dx} f(x) dx = -\frac{mS}{\pi\hbar^2} \frac{1}{k_B T^2} (k_B T)^3 \left(-\frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{mS \pi k_B^2}{3\hbar^2} T$$

となる。

4. 状態密度の仮定式 $\rho(E) = |E - E_F|^\alpha$, $\alpha > -1$ (for $E_F - \Delta E \leq E \leq E_F + \Delta E$) を代入すると、内部エネルギーとして、

$$U(T) = \int_{E_F - \Delta E}^{E_F + \Delta E} E |E - E_F|^\alpha \frac{dE}{e^{\beta(E-\mu)} + 1}$$

を考えればよく、 $k_B T \ll E_F, \Delta E$ で低温近似をすれば、

$$\begin{aligned} C(T) &\approx -\frac{1}{k_B T^2} \int_{E_F - \Delta E}^{E_F + \Delta E} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(E |E - E_F|^\alpha \frac{1}{e^{\beta(E-E_F)} + 1} \right) dE \\ &= \frac{1}{k_B T^2} \int_{E_F - \Delta E}^{E_F + \Delta E} E |E - E_F|^\alpha \frac{(E - E_F) e^{\beta(E-E_F)}}{(e^{\beta(E-E_F)} + 1)^2} dE \end{aligned}$$

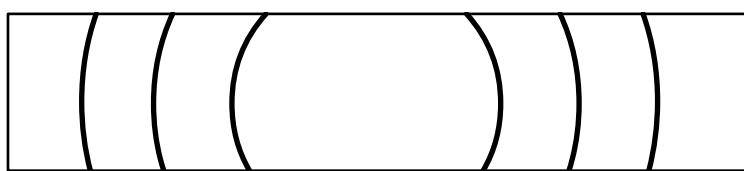
$x \equiv \beta(E - E_F)$ とすると、

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{k_B T^2} \int_{-\beta\Delta E}^{\beta\Delta E} \left(\frac{x}{\beta} + E_F \right) \left| \frac{x}{\beta} \right|^\alpha \frac{\frac{x}{\beta} e^x}{(e^x + 1)^2} \frac{dx}{\beta} \\ &= \frac{1}{k_B T^2} \cdot \beta^{-\alpha-3} \int_{-\infty}^{\infty} (x + \beta E_F) |x|^\alpha \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} dx \\ &= \frac{1}{k_B T^2} \beta^{-\alpha-3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^\alpha x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx \quad (\text{偶奇性より。4番を参照}) \\ &\propto T^{\alpha+1} \end{aligned}$$

という結果を得る。

専攻 問題 4 解答

1. A 冷却
B 電圧
C 電流（電圧の設定が先である）
D 蛍光板（裸眼で見る人がたまにいるが危険である）
E 試料
F 光っていない
G X 線
2. 1.X 線が、試料の中心を通っていないため像がずれる、またはない。
2.X 線の光量を間違う。または現像ミス。
3. デバイリング



4. $S = 3.3\text{cm}$ であるから、

$$2\theta = \frac{3.3\text{cm}}{6\text{cm}} = 0.55[\text{rad}]$$

$$\theta = 15.8^\circ$$

一方、 $S = 3.3\text{cm}$ は最も中心に近い像であるから $n = 1$ 。よって

$$d = 2.82[\text{\AA}] = a_0$$

5. $S = 5.9\text{cm}$ であるから、入射角は

$$2\theta = \frac{5.9\text{cm}}{6\text{cm}} = 0.983[\text{rad}]$$

$$\theta = 28.2^\circ$$

これと $2d \sin \theta = \lambda$ より

$$d = 1.63[\text{\AA}]$$

となる。ここで面指数 (h, k, l) に対して

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2}(h^2 + k^2 + l^2)$$

の関係があるから、代入すると

$$h^2 + k^2 + l^2 = 3$$

ゆえに

$$(h, k, l) = (1, 1, 1)$$

専攻 問題 5 解答

1. 2つの電子のスピンが逆向きのとき、つまり状態ケットのスピン成分が反対称のときは、

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

逆に、状態ケットのスpin成分が対称（スpinが同じ向き）ならば、

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

となる。

$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ が反対称状態のとき $r_1 = r_2$ なら $\psi = 0$ より

$$\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

になり、このとき Schrödinger 方程式は自由粒子の場合と同じで、束縛状態は出現しない。

$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ が対称状態のとき、結合エネルギーの期待値は

$$\int \psi^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \{-V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d^2 r_1 d^2 r_2 = -V_0 \int |\psi(\vec{r}, \vec{r})|^2 d^2 r < 0$$

となりエネルギーが下がる。これにより束縛状態が出現する。

2. 重心は静止しているから

$$(p_1^* + p_2^*)\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0 \quad \cdots (1)$$

である。ここで重心座標 \vec{R} 、相対座標 \vec{r}' を

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2), \quad \vec{r}' \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

とおき

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv \psi(\vec{R}, \vec{r}')$$

とすると (1) 式は、(1) 式を使って、

$$(p_1^* + p_2^*)\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} \right) \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \psi(\vec{R}, \vec{r}') = 0$$

となり、 $\psi(\vec{R}, \vec{r}')$ は \vec{r}' のみの関数であることがわかる。したがって

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} g(\vec{k})$$

のように展開することができる。

束縛状態では $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ だから

$$\sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} g(\vec{k}) = \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} g(-\vec{k})$$

となり、 $g(\vec{k}) = g(-\vec{k})$ である。すなわち $g(\vec{k})$ は偶対称である。

$$3. \quad \vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 \right\}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} \right) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{R}}$$

$$\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} \right) = \frac{2\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$$

を用いて Schrödinger 方程式を書き換える。 $\psi(\vec{R}, \vec{r})$ は \vec{R} に依存しないので

$$\left[\frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - V_0 \delta(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{m} \frac{d^2}{dr^2} - V_0 \delta(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = \varepsilon \psi(\vec{r})$$

となる。この式に

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} g(\vec{k}), \quad \delta(\vec{r}) = \frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\vec{r}}$$

を代入すると

$$\sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{m} e^{i\vec{k}\vec{r}} g(\vec{k}) - \frac{V_0}{S} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{q}} e^{i(\vec{k}+\vec{q})\vec{r}} g(\vec{k}) = \varepsilon \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} g(\vec{k})$$

となり、 $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ の成分に着目すれば

$$\left[\frac{\hbar^2 k^2}{m} g(\vec{k}) - \frac{V_0}{S} \sum_{\vec{q}} g(\vec{k}-\vec{q}) \right] = \varepsilon g(\vec{k}) \quad \cdots (2)$$

を得る。

$$4. \quad \frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} g(\vec{k}-\vec{q}) = C$$

を (2) に代入すれば直ちに

$$g(\vec{k}) = \frac{V_0 C}{2\varepsilon(\vec{k}) - \varepsilon} \quad \cdots (3)$$

を得る。そして

$$\frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} g(\vec{k}-\vec{q}) = C$$

に $\vec{k}=0$ を代入し $g(\vec{q}) = g(-\vec{q})$ を用い、添字を \vec{q} から \vec{k} に変えると

$$\frac{1}{S} \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) = C \quad \cdots (4)$$

となり (3) を (4) に代入すると

$$\frac{V_0}{S} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\varepsilon(\vec{k}) - \varepsilon} = 1$$

となる。

$$5. \quad \frac{V_0}{S} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} - \varepsilon} = 1$$

これを積分に直すと

$$\frac{S}{4\pi^2} \frac{V_0}{S} \int_0^{k_0} \frac{2\pi k}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} - \varepsilon} dk = \frac{mV_0}{4\pi\hbar^2} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{dE}{E - \frac{\varepsilon}{2}} = 1$$

となる。 $\varepsilon > 0$ のときは積分が発散するので $\varepsilon < 0$ でなければならぬ。このとき

$$\frac{mV_0}{4\pi\hbar^2} \log\left(1 - \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) = 1$$

$$\varepsilon = \frac{2\varepsilon_0}{1 - \exp\frac{4\pi\hbar^2}{mV_0}} < 0$$

特に $\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \ll 1$ の場合、分母の 1 が無視できて

$$E = 2\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{4\pi\hbar^2}{mV_0}\right)$$

となる。

専攻 問題 6 解答

1. 解き方 1 無限遠から物質を少しづつ持ってきて球を組み立てることを考えると、密度一様なので半径 r の球の質量は $M(r) = M \times \left(\frac{r}{R}\right)^3$ だから、そのすぐ外側でのポテンシャルは $-\frac{GM(r)}{r}$ なので、 r から $r + dr$ までの球殻を作る際に出るエネルギー $dU(r)$ は、

$$dU(r) = -\frac{GM(r)}{r} dM(r) = -\frac{G}{r} \cdot M \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cdot M \cdot \frac{3r^2 dr}{R^3} = -\frac{3GM^2 r^4}{R^6} dr$$

よって、

$$U(R) = \int_0^R dU(r) = -\frac{3GM^2}{5R}$$

$$\therefore \Delta U = U(R_1) - U(R_2) = \frac{3GM^2}{5} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

解き方 2 重力エネルギーは $(1/2) \int \rho \phi dV$ である。1/2 は 2 粒子間のポテンシャルを 2 重に数えるから必要である。また、ポテンシャル ϕ は無限遠でゼロになるように原点を定める。さて ϕ はがんばって計算すると

$$-GM/r \quad (r > R) \qquad \qquad GM/R(r^2/2R^2 - 3/2) \quad (r < R)$$

となるので、

$$U(R) = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{GM}{R} \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} \right) dM(r) = \left(\frac{3}{20} - \frac{3}{4} \right) \frac{GM^2}{R} = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

2. $4\pi L^2 n_\nu = \frac{\Delta U}{\bar{E}_\nu}$ だから、

$$n_\nu = \frac{\Delta U}{4\pi L^2 \bar{E}_\nu} = \frac{3GM^2}{20\pi L^2 \bar{E}_\nu} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

3. 検出される事象の数が、

$$N = \frac{n_\nu}{6} \sigma N_p$$

で表せると仮定する。但し、 N_p は陽子の数である。陽子 1 モルは水素原子 1 モルとほぼ同じ質量をもつと考えれば、 $M_D = 3 \times 10^6 \text{ kg}$ の測定器に含まれる陽子数は、陽子の含有率（質量比）を考慮して、次のように書くことができる。

$$N_p = \frac{M_D \times 1/2}{1 \times 10^{-3}} \times N_A$$

N_A はアボガドロ数である。 $M = 3 \times 10^{30} \text{ kg}$, $L = 3 \times 10^{20} \text{ m}$, $G = 7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$,

$\bar{E}_\nu = 10 \text{ MeV}$, $R_1 = 10^6 \text{ m}$, $R_2 = 10^4 \text{ m}$ より、

$$n_\nu = 2 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$$

$M_D = 3 \times 10^6 \text{ kg}$, $N_A = 6 \times 10^{23}$ より、

$$N_p = 9 \times 10^{32}$$

この結果を用いて、仮定の妥当性を示す。検出される事象の数が、 $\frac{n_\nu}{6} \sigma N_p$ と書けるのは、

$$\frac{\sigma N_p}{1 [\text{m}^2]} \ll 1$$

が成り立っている場合である。実際、

$$\sigma N_p \simeq 10^{-46} [\text{m}^2] \cdot 9 \times 10^{32} = 9 \times 10^{-14} [\text{m}^2]$$

となるので、条件を満たしている。よって、

$$N = 3 \times 10^2$$

4. E_{\max}, E_{\min} に対応して添字 1,2 を用いることにする。

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{v_2} - \frac{L}{v_1} = \frac{L}{c} \left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1} \right) \quad \cdots (1)$$

$$E_1 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} \quad \cdots (2)$$

$$E_2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} \quad \cdots (3)$$

$\beta_1, \beta_2 > 0$ を考慮して、(1)~(3) より、

$$\frac{c\Delta t}{L} = \left\{ 1 - \left(\frac{mc^2}{E_2} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} - \left\{ 1 - \left(\frac{mc^2}{E_1} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

ニュートリノの運動が相対論的である $\left(\frac{mc^2}{E} \ll 1 \right)$ として、

$$\frac{c\Delta t}{L} \simeq \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{E_2} \right)^2 \right\} - \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{E_1} \right)^2 \right\} = \frac{(mc^2)^2}{2} \left(\frac{1}{E_2^2} - \frac{1}{E_1^2} \right)$$

$mc^2 > 0$ より、

$$\therefore mc^2 \simeq \left[\left(\frac{2c\Delta t}{L} \right) \left(\frac{1}{E_2^2} - \frac{1}{E_1^2} \right) \right]^{1/2}$$

[注] 『上限』とは、「ニュートリノが同時に放出された」という仮定による。つまり (1) を立てたことで、上限を求めていることになる。 $\beta^3 \leq 1$ とすることではない。

専攻 問題 7 解答

1. 一次構造 20 種のアミノ酸による配列のこと
二次構造 ペプチド結合部の水素結合によってつくられる構造で α ヘリックスと β シートのこと
超二次構造 α ヘリックスと β シートとランダムコイルの組み合わせによって作られるモチーフ
三次構造 上記の構造をふまえたうえで一本のアミノ酸鎖が最終的にとる立体構造
四次構造 多くの酵素は一本のアミノ酸からつくられるいくつかのサブユニットから成り、そのサブユニットの組合せを四次構造という。
2. タンパク質の backbone をたどると一つのペプチドあたり C'-N, N-C, C-C, の 3 つの回転自由度がある。しかし、実際はペプチド結合部すなわち N-C は、C=O 二重結合と共に鳴しており回転できない。そのため自由度が 2 個になる。
3. まず、二次構造が対称構造であることがわかる。すなわちある性質を持った残基が周期的に現れることが (homopolyptide ではいうまでもなく残基の性質は周期的である) 二次構造を安定化する要因となる。これに対しより高次の構造は基本的に対象とは無関係である。ではより高次に構造は何によって決まるかと言うと、むしろ残基の性質が違うこと、つまり hydrophilicity や charge の違いが、その要因となっている。また、より高次の構造は二次構造とくらべて、ランダムな状態との chemical energy の差が小さく反応速度が小さいために触媒を必要とする。in situ では、folding enzyme がその役目を果たす。
4. ribonuclease を urea で変性し失活させた後、徐々に urea を除去すると再び活性を取り戻した (C.B.Anfinsen)。この実験を解釈すると、urea によって一次構造は保持しているが高次構造を失っているペプチド鎖が urea の除去により再び高次構造を取り戻したということである。これは in vitro で行なわれた実験であるので folding enzyme などの助けがなくても一次構造のみから高次構造を再生したことになる。
タンパク質の一残基あるいは少数のみ改変し高次構造の変化を見ることによってその部位の構造をつくるために必要な相互作用を知ることができる。すなわち、改変蛋白が構造を失わないならば残基のいかなる違いによるものかを調べることである。また同じことを、異なる生物の同じ機能を持つ蛋白を見比べることによってもできる。