1996年度　入学試験 一般教育科目

■ 教育 英語

1. 次の文章を読み、下の設問に答えなさい。

Modern computers have greatly extended the scope of glacier modeling. (a)A model is a means of reducing a complex real situation to a simple closed system that represents the essential features and to which the laws of physics can be applied. Modeling can serve three purposes: experimentation, explanation, and prediction. Experimentation, discovering the effect of changing the values of the controlling variables, is often the most useful; it can never be done in the real worlds. An explanation sometimes be an illusion; the fact that the model with adjustable parameters produces plausible numerical values does not prove that the underlying assumptions are correct. Most models can be used for prediction, but first they must be tested against data. Unambiguous testing is difficult and the temptation to use all the data to "tune" the model by adjusting parameters must be resisted. Although these (b)pitfalls have not always been avoided, the scope of some recent ice-sheet models is impressive.

The approach here emphasizes the physics, combined where necessary with mathematics. No apology is made for introducing mathematics. (c)In the author's opinion, a mere handful of mathematical physicists, who may seldom set foot on a glacier, have contributes far more to the understanding of the subject than have a hundred measures of ablation stakes or recorders of advances and retreats of glacier termini. This is not to say that the latter are unimportant; in glaciology, as in other branches of science, there is a place for both the theoretical and the experimental approach. But the two should be coordinated, and the experiments should be designed to solve specific problems. (d)Too often in the past, glaciological measurements have been made on the premise that the mere acquisition of data is a useful contribution itself. This is seldom the case.

glacier : 氷河　stake : 杭　termini : 終端

(i) 下線部 (a) および (d) を内容がわかるように和訳せよ。

(ii) 下線部 (b) pitfalls は何を指しているか。日本語で説明せよ。

(iii) 下線部 (c) the author's opinion に反対の立場で、英語で 50–100words で自分の意見を述べよ。

2. 以下の文章を読み、文中の内容に沿って、下の問いに日本語で答えなさい。

The important thing about Newton's theory of colours is not just that he was right, but the way in which he arrives at his conclusions. Before Newton, the way philosophers developed their ideas about the natural world was largely through pure thought. Descartes, for example, thought about the way in which light might be transmitted from a bright object to the eye, but he did not carry out experiments to test his ideas. Of course, Newton was not the first experimenter — Galileo, in particular, pointed the way with studies of the way in which balls rolled down inclined planes, and with his work on pendulums. But Newton was the first person to express clearly the basis of what became the scientific method — the combination of ideas (hypothesis), observation and experiment on which modern science rests.

Newton's theory of colours emerged from experiments he carried out during his enforced sabbatical from Cambridge. By 1665, the fact that a ray of sunlight could be turned into a rainbow-like spectrum of colours by passing it through a triangular glass prism was well known. The standard explanation of the effect was based on the Aristotelian idea that white light represented a pure, unadulterated form, and that it became corrupted by passing through the glass. When the light enters the prism, it is bent, and then follows a straight line to the other side of the triangle, where it bends again as it emerges into the air. At the same time, the light is spread out, from a single spot of white light into a bar of colours. Working downwards from the point of the triangle, the light at the top is bent least, and travels the shortest distance through the glass, emerging as red. Lower down, where the triangular wedge of glass is wider, light which has been bent slightly more as it enters the prism travels further through the glass, and emerges into the air on the other side as violet. In between, there are all the colours of the rainbow — red, orange, yellow, green, blue, indigo, and violet. Using a prism held up to the ray of light entering a darkened room through a small hole in the curtain (rather like the camera obscura set-up), the spectrum of colours can be displayed on the wall opposite the window.

On the Aristotelian view, white light that had travelled the shortest distance through the glass was modified least, and become red light. While light that had travelled a little further through the glass was modified more, and become yellow — and so on all the way down to violet.

Newton actually tested these ideas, using both prisms and lenses which he ground himself, trying to minimize the colour change by making lenses in different shapes. He was the first person to distinguish the rays of different colours, and he named the seven colours of the spectrum.

But the most important experiment Newton carried out at this time simply consisted of placing a second triangular wedge of glass behind the first prism but the other way up. The first prism, point uppermost, spread a spot of white light into a rainbow spectrum. The second prism, point downwards, combined the spread-out colours of the spectrum back into a spot of white light. Even though the light had passed through a further thickness of glass, it had not become more corrupted, but had returned to its former purity.

As Newton realized, this shows that white light is not ‘pure‘ at all, but is a mixture of all the colours of the rainbow. Different colours of light bend by different amounts when they are refracted, but all the colours are present in the original white spot of light. It was a revolutionary idea, both because it overturned a basic tenet of Aristotelian philosophy and because it rested upon the secure foundation of experiment.

<u>“The best and safest method of philosophizing seems to be, first to enquire diligently into the properties of things, and to establish those properties by experiment and then to proceed more slowly to hypotheses for the explanation of them. For hypotheses should be employed only in explaining the properties of things, but not assumed in determining them; unless so far as they may furnish experiments.”</u>

John Gribbin(1995) : Schrödinger’s kittens and the search for reality

unadulterated : まぜ物のない camera obscura : (カメラの) 暗箱 tenet : 教義 enquire : inquire

(i) 白色光がガラスの三角プリズムを通過すると虹色に分かれること (分光) についてアリストテレス学派とニュートンの考え方の違いを述べよ (200 字以内)。

(ii) 下線部のニュートンの言葉を和訳せよ。

3. 下の文章を英訳せよ。

私たちの太陽以外の星のまわりにも惑星があるかもしれないという考えは、長い間人々の想像をかきたててきました。けれども、これまで科学者はこの好奇心を満足させるほどの精度で惑星を検出することができませんでした。たとえ、近くの星に私たちの太陽系にあるような惑星があったとしても、暗くて小さすぎるので見わけるのが難しかったからです。しかし、もし木星のような巨大惑星を持つ星がたくさんあるならば、今日あるさまざまな探索方法によって惑星が見つかってもよい時期になりました。いろいろな技術を使っての検出のための感度と時間は惑星の軌道半径によって異なります。すなわち、問題は星と惑星の間の距離がいくらかということです。

太陽系 : Solar System 木星 : Jupiter 軌道半径 : orbital radius

■ 教育 数学

1. 実変数 x, y, z に関する二次形式

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - \sqrt{6}xy + \sqrt{6}yz \qquad \cdots (1)$$

について、以下の設問に答えよ。

(i) ベクトル $\vec{r}$ を

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とし、$f(x,y,z) = \vec{r}^{\,t} A \vec{r}$ と表したとき、対称行列 A の固有値と単位固有ベクトル (第 2 成分は非負) を求めよ。ここでは $\vec{r}^{\,t}$ は $\vec{r}$ の転置を表す。

(ii) 上で求めた A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する単位固有ベクトル $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}$ を並べて 3 行 3 列の行列 $P = (\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3})$ を作る。P による座標変換

$$\vec{r} = P\vec{r}', \qquad \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \cdots (2)$$

を行った場合、$f(x,y,z)$ がどのような形に変換されるかを求めよ。また、P によって変換されるベクトルはその大きさを変えないことを示せ。

(iii) P による変換をある軸のまわりの回転とみなした時、この回転軸の方向ベクトルを求めよ。

(iv) $P^n = E$ となる最小の自然数 n を求めよ。ただし E は 3 次の単位行列である。

2. 2 次元 (x, y) 平面の上半面 $(-\infty < x < \infty, y > 0)$ における、なめらかな曲線を考える。曲線は、実数パラメータ s によって $(x(s), y(s))$ と表され、次の微分方程式を満たすものとする。

$$yx'' - 2x'y' = 0 \qquad yy'' + x'^2 - y'^2 = 0 \qquad \cdots (3)$$

ただし、関数 $x(s)$ は 2 階微分可能で、$x' = \mathrm{d}x/\mathrm{d}s$, $x'' = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}s^2$ および $x'^2 = (\mathrm{d}x/\mathrm{d}s)^2$ である。関数 $y(s)$ についても同様である。以下の設問に答えよ。

(i) 新しい変数

$$X = \frac{x'}{y}, \qquad Y = \frac{y'}{y} \qquad \cdots (4)$$

を導入して変数 $X(s)$ と $Y(s)$ の満たすべき方程式を求めよ。
さらに次の関係

$$X^2 + Y^2 = C \qquad \cdots (5)$$

が成り立つことを示せ。ただし、C は定数である。

(ii) 方程式 (3) を満たす $(x(s), y(s))$ はどのような曲線群を表すか。$X = 0$ と $X \neq 0$ の場合に分けて、それぞれについて求めよ。ただし $C = 1$ としてよい。

3.

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad \cdots (6)$$

を満たす正の整数 x, y, z の組み合わせを全て求める方法を考える。ここで x, y, z のどの 2 つも、たがいに素 (最大公約数が 1) とする。

(i) x と y は、一方が偶数、もう一方が奇数であることを証明せよ。

(ii) 以下では、偶数の方を x とする。残りの y と z の 2 数から、$A = (z + y)/2, B = (z - y)/2$ と定義するとき、A と B は整数であり、かつ、たがいに素であることを証明せよ。

(iii) 一般に、たがいに素な正の整数 A と B の積が正の整数の 2 乗、すなわち

$$A \cdot B = C^2 \qquad \cdots (7)$$

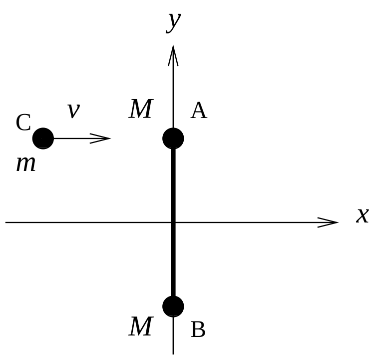
で表せる場合、$A = \alpha^2, B = \beta^2$ となる整数 α, β が存在することを証明せよ。

(iv) 式 (6) を満たす 3 つの整数 x, y, z を 2 つの整数 α, β (ここで $\alpha > \beta > 0$) から導く式を示せ。

(v) 前問の結果を用いて、$\alpha \leq 6$ の範囲で、たがいに素なすべての x, y, z の組み合わせを示せ。

■ 教育 物理

1. 長さ $2a$ で質量の無視できる剛体の棒の両端に、ともに質量 M をもつ質点 A および B が取り付けられ、図のように xy 平面内に静止している。そこに質量 m の質点 C が、図のように直線 $y = a$ に沿って、速度 v で x 軸の正の向きに等速直線運動して、質点 A と衝突した。衝突は完全弾性的であり、衝突後の C の運動は x 軸に平行であるとして、以下の設問に答えよ。ただし摩擦や重力は考えない。



(i) 衝突後の系 (A, B, C) の運動を記述するのに適した複数個の物理量を定義し、それらがどのような力学的保存則により決定されるかを述べ、式で表せ。

(ii) 力学的保存則を解いて、上で定義した物理量を、M、m、a、および v で表せ。

(iii) 衝突後、質点 A および B の速度の x 成分は、どのように時間変化するか。衝突後の経過時間 t の関数として、同一のグラフに図示せよ。特徴的な座標の値も記入すること。

2. 電荷 q、質量 m の荷電粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ で表す。粒子の速度は光速度と比べて十分小さいとして以下の設問に答えよ。

(i) 一様な静磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ がかかっているときの荷電粒子の運動 s で、時刻 $t = 0$ での初期条件 $\boldsymbol{r} = (0, 0, 0)$、$\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = (v_0, 0, u_0)$ を満たすものを求めよ。

(ii) 上記静磁場と振動数 $\omega = qB/m$ をもつ電場 $\boldsymbol{E} = (E\cos\omega t, -E\sin\omega t, 0)$ がかかっているとき、運動方程式の解で、時刻 $t = 0$ での初期条件 $\boldsymbol{r} = (0, 0, 0)$、$\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = (0, 0, 0)$ を満たすものを求めよ。この場合、運動方程式は複素変数 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t + i\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ を用いると扱いやすい。

(iii) 前問について、運動エネルギー K の変化率 $\mathrm{d}K/\mathrm{d}t$ を求めよ。また、電場 $\boldsymbol{E}$ と粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ の関係に注目して、この結果を説明せよ。

3. 通常、気体は高温低密度の極限で理想気体に近づくが、一般には理想気体からのずれが観測される。このようなずれを示す気体 1 モルに対して、以下の設問に答えよ。

(i) この気体を体積 V に保って熱容量を測定したところ、温度 $T_1 < T_2$ の間で、$C = 2.5R - gT^{-2}$ と表されることがわかった。但し、R は気体定数であり、g は温度によらない定数である。この測定で、温度 T_1 から温度 T_2 まで気体の温度を上昇させたときの気体のエントロピーの増加量を求めよ。

(ii) 熱膨張率 α と等温圧縮率 κ を測定したところ、次のような関数で表されることがわかった。

$$\alpha \equiv +\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T}\left(1 + \frac{a}{VT}\right) \qquad \cdots (1) \qquad \kappa \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{b}{VT}\right) \qquad \cdots (2)$$

但し、V、T、p はそれぞれの気体の体積、温度、圧力である。また、a、b は同じ次元を持つ定数である。V の 2 階偏導関数を考えることにより、$a = 2b$ であることを証明せよ。

(iii) この気体の状態方程式を以下の順で求めよう。先ず式 (2) のみを用いて、等温過程における、p と V の関係を求めよ。次にこの結果を式 (1) に代入して、状態方程式を決定せよ。

■ 教育 英語 解答

1. **全訳**

現代のコンピューターは大きく氷河モデルの領域を発展させた。（a）複雑な現実の環境を、必要な特徴を持ち物理法則が適用可能な単純閉鎖系に還元する手段がモデルである。モデリングには3つの目的がある。すなわち、実験、説明、予言である。実世界では決してできない対象変数の値を変えることによる効果を発見するにおいて、実験はしばしばもっとも有用である。説明は時々思い違いとなっている。つまり、調節したパラメーターによるモデルがもっともらしい値をたくさんつくっても、その基礎となっている仮定が正しいことを示したことにならない。多くのモデルは予言に用いることができるが、最初はデータに対するテストをする必要がある。曖昧でないテストは難しく、すべてのデータを用いて調節したパラメーターによるモデルを調節するという誘惑は退けなければならない。これらの落とし穴は時々回避されていないが、最近の氷河層モデルの範囲は印象的なものである。

ここでのアプローチは物理を強調し、必要なところに数学を組み入れる。数学を導入することに対する釈明はしない。著者の意見によると、ほんの一握りの物理数学者は、彼らはほとんど氷河に足を踏み込むことはないが、数百回の削摩杭の測定や氷河の終端の進退の記録よりも事象の理解への貢献度が大きい。これは後者の方が重要でないことをいうわけではない。ほかの科学と同様に、氷河学において理論的な面と実験的な面の両面がある。しかしその二つは協力をすべきであり、実験は特別な問題を解くために設計されなければならない。（d）以前は、氷河学における測定は、単なるデータ取得が氷河学に対する有効な貢献になる、という前提の下に行なわれることがほとんどだった。しかしこのようなことはめったにないものである。

(i) 全訳参照のこと。

(ii) 次の 3 つの落とし穴のこと。
実験について…実際に行なうことができない。
説明について…可変パラメータを含む結果はある仮定の証明にはならない。
予言について…実験データの方を予言に合わせてしまうことがある。

(iii) Most of the mathematical physicists have not visited a glacier, so that sometimes they do not really understand about the glacier and the theory they constructed might become a only brain exercise. In the other hand, the experimentists can use the data to assume what have happened in the past, so the results are quite close to the real world phenomenon.

2. **全訳**

ニュートンの色の理論の重要性はその正しさにあるだけでなく、彼が如何にしてその結論に達したかにもある。ニュートン以前は、哲学者達が自然界についての考えを発展させた方法は純粋な思考を通じてであった。例えば、デカルトは光は明るい物体から目に伝わってくる仕方について考えていたが、彼はその考えを試す実験を行わなかった。もちろん、ニュートンは最初の実験家ではなかった。特にガリレオはボールが斜面を転がり落ちる仕方についての研究においてと、振り子での彼の仕事において実験するというその方法を指摘した。しかしニュートンが初めて科学的な方法——現代科学が頼っている仮説、観察と実験の組み合わせ——になったことの基礎についてはっきりと示した人である。

ニュートンの色の理論はケンブリッジから与えられた休暇年度の間に行った実験から生まれた。1665 年までに、太陽光が三角ガラスプリズムを通すことで虹みたいな色のスペクトルにする事ができるという事実はよく知られていた。その効果についての基本的な説明は白色光は純粋で混ぜものがない物体であり、ガラスを通ることで乱されるようになるというアリストテレスの考えに基づいていた。光がプリズムに入ると、曲がり、三角形のほかの一辺に向かって、まっすぐ進み、再びその辺で曲がり、空気中にでる。と同時に、光は、白色光の一点から色棒に分散する。三角形の一点から下向きに進むときは、一番上にある光が一番小さく曲げられ、ガラスを通して、もっとも短い距離を移動して、赤として出現する。下の方ほど、ガラスの三角のくさびは広くなり、光はさらに少し曲げられ、プリズムに入ると、ガラスをさらに長く移動して反対側から空気中に紫としてでる。その間には虹のすべての色、赤、橙、黄、緑、青、藍、紫がある。プリズムをカーテンの

小さな穴を通して暗室に入ってきた光線に対して、直立させておく (カメラの中を暗くするやり方のようにする) と、色のスペクトルを、窓の反対側の壁に表示することができる。

アリストテレス的な見方において、ガラスを通して最短距離を移動してきた白色光は、もっとも変化を受けず、赤い光となる。ガラスを通して、もう少し長く移動してきた白色光は、より変化を受け、黄色になる、等々して紫までいく。

ニュートンは実際にこの考えについて自分で作ったプリズムとレンズの両方を用いて実験し、レンズを異なる形にすることで、色の変化を最小にしようとした。彼は、異なる色の光線を初めて区別した人であり、スペクトルの七色について名前を付けた。

しかし、このときニュートンが行った実験で最も重要なのは、二つ目の三角のくさびを最初のプリズムのうしろに、しかし反対向きにつけただけのものである。最初の、一番上向きのプリズムは白色光の点を、虹のスペクトルに分散させた。二つ目の下向きのプリズムは、スペクトルの分散した色をもとの白色光の点に集めた。光をもっとあついガラスを通したのに、それはそれ以上乱れることはなく、しかし以前のまとまった状態に戻ったのである。

ニュートンが気づいたように、これは白色光が、そもそも「純粋」ではなく、虹のすべての色の混合であることを示している。異なる光の色は、屈折されるとき、異なる量曲がるが、すべての色は元の白色光の点の中に存在する。それは画期的なアイディアであり、なぜなら、アリストテレス派哲学の基礎を覆し、しかも堅固な実験根拠に基づいているからである。

最初に物の性質を念入りに調べ、実験によりその性質を確認し、そしてあせらずに性質を説明する仮説へと進むのが、もっとも安全でもっとも良い自然哲学の方法であろう。実験が仮説の上に成り立っているのでない限り、仮説が物の性質を決めるべきではなく、物の性質により仮説を採用すべきなのである。

(i) **アリストテレス学派**

白色光は “純粋な” 光であり、ガラスの中を通ることにより、“汚され” てしまう。(プリズム中で光路の短い光はより少なく変化し赤色になり、光路の長い光は大きく変化し青色になる。)

ニュートン

白色光は虹の七色の混合した光である。(二つのプリズムによりまた白色に戻すことができる。これはアリストテレス学派の説では説明できない。)

(ii) 全訳参照のこと。

3. The thought that there would be another solar system have invoked imagination of people for a long time. But scientists still cannot detect any planets at the precision to satisfy their curiosity. Even if the close fixed stars had planets like ones of our solar system, it would be difficult to distinguish these planets because they would be too small and dark. If there are many stars that have a lot of big planets like Jupiter, however, it’s time for us to be able to find out these planets with various research methods. Sensitivity and time on detecting them with many technique depend on their orbital radius, that is, the problem is how long the distance between fixed star and planet is.

■ 教育 数学 解答

1. **(i)** 式 (1) は次のように表される。

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{6}/2 & 0 \\ -\sqrt{6}/2 & 3 & \sqrt{6}/2 \\ 0 & \sqrt{6}/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

この行列が A である。A の固有値 λ は $\det(A-\lambda E)=0$ より、

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -\sqrt{6}/2 & 0 \\ -\sqrt{6}/2 & 3-\lambda & \sqrt{6}/2 \\ 0 & \sqrt{6}/2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) - (2-\lambda)\left(\sqrt{6}/2\right)^2 - (4-\lambda)\left(-\sqrt{6}/2\right)^2 \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 15 = -(\lambda-5)(\lambda-3)(\lambda-1) = 0 \\ &\therefore \quad \lambda = 1,\ 3,\ 5 \end{aligned}$$

各固有値を、次の問いの形式に従って $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 5$ と置く。それぞれの単位固有ベクトル $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \vec{p}_3$ は

$$A\vec{p}_i = \lambda\vec{p}_i \quad (i = 1,2,3) \qquad\qquad |\vec{p}_i| = 1 \quad (i = 1,2,3)$$

から計算すると以下の通りとなる。

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ \sqrt{6}/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/4 \\ 1/2 \\ -\sqrt{6}/4 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ \sqrt{6}/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

(ii) 行列 P の成分は次の通りである。

$$P = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -\sqrt{6}/4 & -1/4 \\ \sqrt{6}/4 & 1/2 & \sqrt{6}/4 \\ -1/4 & -\sqrt{6}/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は単位ベクトルで異なる固有値に属するため直交し、$\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j = \delta_{i,j}$ である。$P^{\mathrm{T}}P$ を計算すると

$$P^{\mathrm{T}}P = \begin{pmatrix} \vec{p}_1{}^{\mathrm{T}} \\ \vec{p}_2{}^{\mathrm{T}} \\ \vec{p}_3{}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1\cdot\vec{p}_1 & \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 & \vec{p}_1\cdot\vec{p}_3 \\ \vec{p}_2\cdot\vec{p}_1 & \vec{p}_2\cdot\vec{p}_2 & \vec{p}_2\cdot\vec{p}_3 \\ \vec{p}_3\cdot\vec{p}_1 & \vec{p}_3\cdot\vec{p}_2 & \vec{p}_3\cdot\vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ である。また AP を計算すると

$$A\begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{p}_1 & \lambda_2\vec{p}_2 & \lambda_3\vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\vec{r} = P\vec{r}\,'$ の変換によって、f は

$$f(x,y,z) = \vec{r}^{\mathrm{T}}A\vec{r} = (P\vec{r}\,')^{\mathrm{T}}A(P\vec{r}\,') = \vec{r}\,'^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}AP\vec{r}\,' = \vec{r}\,'^{\mathrm{T}}(P^{-1}AP)\vec{r}\,'$$

と書きかわる。よって、

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x'^2 + 3y'^2 + 5z'^2$$

となる。また、

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = \vec{r}^{\mathrm{T}}\vec{r} = (P\vec{r}\,')^{\mathrm{T}}(P\vec{r}\,') = \vec{r}\,'^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}P\vec{r} = \vec{r}\,'^{\mathrm{T}}\vec{r}$$

であるから P による座標変換によって、ベクトルの大きさは不変である。

(iii) この回転軸の方向ベクトルを $\vec{a}$ と置くと $\vec{a}$ は P による回転によって向きが変わらない。また、P による回転ではベクトルの長さは変わらないので、$P\vec{a} = \vec{a}$ となるはずである。これを解いて

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \mathrm{const}$$

(iv) P はベクトル $\vec{a}$ のまわりの回転だから、その回転角度を θ とする。$\vec{a}$ に垂直なベクトル $\vec{u}$ を適当にとる。$\vec{u}$ を回転して移したベクトル $P\vec{u}$ と $\vec{u}$ のなす角度は θ である。すなわち、

$$\vec{u} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P\vec{u} = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/4 \\ 1/2 \\ -\sqrt{6}/4 \end{pmatrix} \qquad \cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot P\vec{u}}{|\vec{u}||P\vec{u}|} = \frac{1}{2} \qquad \therefore\quad \theta = 60^\circ$$

P はベクトル $\vec{a} = (1, 0, -1)$ のまわりの 60° の回転だから、P^6 が 360° の回転になる。$P^6 = E$。よって $n = 6$ である。

2. **(i)** 式 (4) より、

$$x' = yX \qquad x'' = y'X + yX' = yXY + yX'$$

$$y' = yY \qquad y'' = y'Y + yY' = yY^2 + yY'$$

これらの式を微分方程式 (3) に代入する。

$$yx'' - 2x'y' = 0 \qquad \therefore\quad X' - XY = 0 \qquad \cdots (1)$$

$$yy'' + (x')^2 - (y')^2 = 0 \qquad \therefore\quad Y' + X^2 = 0 \qquad \cdots (2)$$

$(1)\times X + (2)\times Y$ を計算すると、

$$XX' + YY' = 0 \qquad \therefore\quad X^2 + Y^2 = \mathrm{const} \equiv c^2 \qquad (c > 0) \qquad \cdots (3)$$

(ii) $X \equiv 0$ の場合

$$Y = \pm c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \pm c \quad \Leftrightarrow \quad y = A\exp(\pm cs) \qquad (A > 0)$$

$$X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{const} \equiv B$$

よって、$X \equiv 0$ の場合、$x =$ 一定、$y > 0$ の半直線である。$X \neq 0$ の場合は、$Y^2 - c^2 \neq 0$。式 (2) より、$X^2 = -Y'$ を式 (3) に代入すると、Y だけの微分方程式になる。

$$Y' - Y^2 + c^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{Y'}{Y^2 - c^2}$$

$$\therefore \quad \int 1\mathrm{d}s = \int \frac{\mathrm{d}Y}{Y^2 - c^2} = \frac{1}{2c}\int \left(\frac{1}{Y - c} - \frac{1}{Y + c}\right)\mathrm{d}Y$$

これより、

$$\log\left|\frac{Y-c}{Y+c}\right| = 2cs+\alpha \qquad (\alpha = \mathrm{const})$$

となる。式 (3) より Y の範囲は $-c<Y<c$ である。このとき、

$$Y = \frac{y'}{y} = (-c)\times\frac{\sinh(cs+\alpha)}{\cosh(cs+\alpha)} \qquad \cdots (4)$$

$$\therefore \quad \log y = -\log[\cosh(cs+\alpha)] + \mathrm{const}$$

$$\therefore \quad y = \frac{a}{\cosh(cs+\alpha)} \qquad (a>0) \qquad \cdots (5)$$

式 (3),(4) より、

$$X^2 = c^2 - c^2\frac{\sinh^2(cs+\alpha)}{\cosh^2(cs+\alpha)} = \frac{c^2}{\cosh^2(cs+\alpha)} \qquad \therefore \quad X = \frac{\pm c}{\cosh(cs+\alpha)} \qquad \cdots (6)$$

式 (5),(6) より、

$$x' = yX = \frac{\pm ac}{\cosh^2(cs+\alpha)} \qquad \therefore \quad x = \pm a\tanh(cs+\alpha)+b \qquad (b:\mathrm{const})$$

s をパラメータとした 2 つの変数 (x,y) が描く曲線は、$1-\tanh^2(cs+\alpha) = 1/\cosh^2(cs+\alpha)$ の関係を用いて、

$$1-\left(\frac{x-b}{a}\right)^2 = \left(\frac{y}{a}\right)^2 \qquad \therefore \quad (x-b)^2+y^2 = a^2 \qquad (y>0)$$

となる。ただし、$y>0$ である。これは半径 a、中心 $(b,0)$ の円の $y>0$ の部分である。
以上より、$X\equiv 0$ と $X\neq 0$ の場合をまとめて、

x 一定、$y>0$ の半直線。または x 軸上に中心を持つ円の $y>0$ の部分

である。

3. **(i)** まず、x,y,z のどの 2 つも互いに素であるから、

(a)　z が偶数で x,y は奇数
(b)　z が奇数で x,y のどちらかが偶数
(c)　x,y,z はすべて奇数

の 3 つの場合のどれかであることが分かる。

(a) の場合
正の整数 l,m,n を用いて $z=2l, x=2m-1, y=2n-1$ と書ける。このとき

$$x^2+y^2 = (2m-1)^2+(2n-1)^2 = 4(m^2+n^2-m-n)+2 \neq 4 \text{ の倍数}$$

である。一方

$$z^2 = 4l^2 = 4 \text{ の倍数}$$

だから、$x^2+y^2=z^2$ を満たさない。

(b) の場合
$z=2l-1,\ x=2m,\ y=2n-1$ としてよい。このとき、

$$x^2+y^2 = (2m)^2+(2n-1)^2 = 4(m^2+n^2-n)+1$$

であり、

$$z = (2l-1)^2 = 4(l^2-l)+1$$

なので、$x^2+y^2,\ z^2$ のどちらも 4 の倍数 +1 で矛盾はしない。

(c) の場合
$z=2l-1,\ x=2m-1,\ y=2n-1$ とすると、$x^2+y^2 = 4(n^2+m^2-m-n)+2 =$ 偶数、
$z^2 = 4(l^2-l)+1 =$ 奇数 となって $x^2+y^2=z^2$ に反する。

よって、z は奇数、x,y の片方は奇数、片方は偶数であることが言えた。

(ii) x を偶数、y を奇数と決めると、正の整数 l, m, n を用いて $x = 2m, y = 2n-1, z = 2l-1$ と書ける。$A = (z+y)/2,\ B = (z-y)/2$ と置く。逆に、z, y は A, B を用いて

$$z = A + B \qquad y = A - B$$

と書かれる。

$$A = \frac{(2l-1)+(2n-1)}{2} = l + n - 1, \qquad B = \frac{(2l-1)-(2n-1)}{2} = l - n$$

である。よって、A, B は整数である。

もし、A と B が共通の因子 k(整数) を持ち、$A = ka,\ B = kb$ (a, b:整数) と書けると仮定すると、

$$z = A + B = k(a+b) \qquad y = A - B = k(a-b)$$

となり、z, y が互いに素であるという条件に矛盾する。したがって、A と B は互いに素である。

(iii) C を素因数分解する。

$$C = (c_1)^{n_1} \cdot (c_2)^{n_2} \cdots (c_p)^{n_p}$$

と書けたとすると

$$A \cdot B = C^2 = (c_1)^{2n_1} \cdot (c_2)^{2n_2} \cdots (c_p)^{2n_p}$$

である。問題文の仮定より、A, B は互いに素な整数であるから、C^2 の因数の $c_1, \cdot c_2, \cdots c_p$ は A, B どちらかのみの因数である。$c_1, \cdot c_2, \cdots c_p$ を適当に並び替えて、$c_1, \cdots c_q$ は A の因数、$c_{q+1}, \cdots c_p$ は B の因数とすることができる。すなわち、

$$A \cdot B = C^2 = \overbrace{(c_1)^{2n_1} \cdot (c_2)^{2n_2} \cdots (c_q)^{2n_q}}^{A}\overbrace{(c_{q+1})^{2n_{q+1}} \cdots (c_p)^{2n_p}}^{B}$$

$$\alpha \equiv (c_1)^{n_1} \cdots (c_q)^{n_q} \qquad \beta \equiv (c_{q+1})^{n_{q+1}} \cdots (c_p)^{n_p}$$

とおけば $A = \alpha^2,\ B = \beta^2$ である。

(iv) $x = 2C$ と置くと、$x^2 = z^2 - y^2$ より、$(2C)^2 = (A+B)^2 - (A-B)^2 = 4A \cdot B$、つまり、$C^2 = A \cdot B$ となる。(ii) で、$A = (z+y)/2, B = (z-y)/2$ が互いに素な正の整数であることを示したので、(iii) の結果を使うことができて、2 つの整数 α, β を用いて $A = \alpha^2,\ B = \beta^2$ と書ける。このとき、$C = \alpha\beta$ である。よって、

$$x = 2C = 2\alpha\beta, \qquad y = A - B = \alpha^2 - \beta^2, \qquad z = A + B = \alpha^2 + \beta^2$$

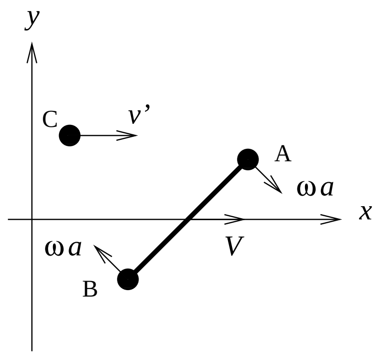
とすればよい。ただし、y, z は奇数なので、α, β の片方は奇数、片方は偶数でなければならない。α, β は互いに素でなければならない。そうでなければ y と z が共通の因数を持つことになって互いに素であるという条件を満たさない。

(v) (iv) の結果から

α	β	x	y	z
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61

となる。

■ 教育 物理 解答



1. **(i)** 衝突後、2 球 A と B はその重心を x 軸に平行に移動させながら重心を中心として回転運動を行う。衝突後の C の速度を v' とする。衝突後の A と B の重心の速度を V とし、重心を中心とする回転角速度を ω とする。
衝突は瞬間的として C が A に及ぼす撃力を J とする。C は反作用として A から撃力 $-J$ を受ける。
運動量保存則より次の 2 式が成り立つ。

$$mv - J = mv' \qquad \cdots (1)$$

$$J = 2MV \qquad \cdots (2)$$

また角運動量保存則より次の式が成り立つ。

$$aJ = 2Ma^2\omega \qquad \cdots (3)$$

最後にエネルギー保存則より次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}2MV^2 + \frac{1}{2}2Ma^2\omega^2 \qquad \cdots (4)$$

以上 4 式がこの系を支配する保存則である。

(ii) 式 (2) と式 (3) より $a\omega = V$ がわかる。これと式 (4) より $mv^2 - mv'^2 = 4MV^2$ となる。
さらに式 (1) と式 (2) より $mv - mv' = 2MV$ がわかる。よって $v + v' = 2V$ となる。
これらより次の諸量が求まる。

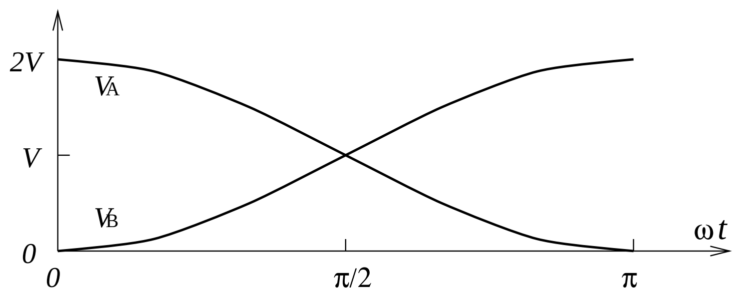
$$V = \frac{m}{m+M}v \qquad v' = \frac{m-M}{m+M}v \qquad \omega = \frac{m}{m+M}\frac{v}{a}$$

(iii) 衝突後の A と B の速度をそれぞれ V_A、V_B と表す。明らかに

$$V_A = V + a\omega\cos\omega t = \frac{m}{m+M}v\left(1 + \cos\frac{m}{m+M}\frac{v}{a}t\right)$$

$$V_B = V - a\omega\cos\omega t = \frac{m}{m+M}v\left(1 - \cos\frac{m}{m+M}\frac{v}{a}t\right)$$

これより V_A、V_B の時間変化は下図のようになる。



2. **(i)** 運動方程式は $m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}$ である。成分ごとに表すと

$$\ddot{z} = 0 \qquad \ddot{x} = \frac{qB}{m}\dot{y} \qquad \ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x}$$

ここで複素数 w を $w = x + iy$ と定義すると上式は、

$$\ddot{z} = 0 \qquad \ddot{w} = -i\frac{qB}{m}\dot{w}$$

となる。初期条件 $\dot{w}|_{t=0} = v_o$、$\dot{z}|_{t=0} = u_o$ を考慮して積分すると、

$$\dot{z} = u_o \qquad \dot{w} = -i\frac{qB}{m}\left(w + i\frac{m}{qB}v_o\right)$$

さらに、初期条件 $w|_{t=0}=0$、$z|_{t=0}=0$ 考慮して積分すると、

$$z = u_o t \qquad w = -i\frac{m}{qB}v_o(1-e^{-i\frac{qB}{m}t})$$

実数に直して求める荷電粒子の軌道が得られる。

$$z = u_o t \qquad x = \frac{m}{qB}v_o \sin\frac{qB}{m}t \qquad y = \frac{m}{qB}v_o\cos\frac{qB}{m}t - \frac{m}{qB}v_o$$

(ii) 運動方程式は $m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\boldsymbol{E} + q\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}$ である。成分毎に表すと

$$\ddot{z} = 0 \qquad \ddot{x} = \frac{qE}{m}\cos\omega t + \frac{qB}{m}\dot{y} \qquad \ddot{y} = -\frac{qE}{m}\sin\omega t - \frac{qB}{m}\dot{x}$$

ここで複素数 w を $w = x + iy$ と定義すると上式は、

$$\ddot{z} = 0 \qquad \ddot{w} = \omega\frac{E}{B}e^{-i\omega t} - i\omega\dot{w}$$

となる。初期条件 $\dot{w}|_{t=0}=0$、$\dot{z}|_{t=0}=0$ を考慮して積分すると、

$$\dot{z} = 0 \qquad \dot{w} + i\omega w = i\frac{E}{B}(e^{-i\omega t}-1)$$

この w に関する微分方程式は非斉次である。特殊解として次の形式の解を仮定する。

$$w = C_1 t e^{-i\omega t} - \frac{E}{\omega B}$$

これを微分方程式に代入して整理することにより $C_1 = iE/B$ が求まる。
次に斉次方程式の一般解として次の形式の解がある。

$$w = C_2 e^{-i\omega t}$$

よって微分方程式の解は、初期条件 $w|_{t=0}=0$、$z|_{t=0}=0$ 考慮して

$$w = C_2 e^{-i\omega t} + i\frac{E}{B}te^{-i\omega t} - \frac{E}{\omega B} = i\frac{E}{\omega B}(1+i\omega t)e^{-i\omega t} - \frac{E}{\omega B}$$

となる。実数にもどして

$$z = 0 \qquad x = \frac{E}{\omega B}(\cos\omega t + \omega t\sin\omega t) - \frac{E}{\omega B} \qquad y = \frac{E}{\omega B}(-\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)$$

(iii) 荷電粒子の複素速度 $\dot{w}$ は前問の結果より計算され

$$\dot{w} = \frac{qE}{m}te^{-i\omega t} \qquad \cdots (5)$$

である。よって運動エネルギー K は

$$K = \frac{1}{2}m|\dot{w}|^2 = \frac{q^2E^2}{2m}t^2$$

その時間変化率は

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \frac{q^2E^2}{m}t$$

である。これは等加速運動をする物体の運動エネルギーの変化の仕方と同じである。式 (5) より荷電粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ は電場 $\boldsymbol{E}$ と常に平行であることがわかる。また、その速さ v は

$$v = \frac{qE}{m}t$$

であることより、電場による加速が等加速であることがわかる。つまり粒子は前問で求められた軌道にそって等加速運動を行うのである。その結果運動エネルギーは先に求められたように時間変化するのである。

3. **(i)** エントロピーの定義より、その増加量 $\varDelta S$ は

$$\varDelta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}Q}{T}$$

で定義される。また、$\mathrm{d}Q = C\mathrm{d}T$ であり問題の設定より $C = 2.5R - gT^{-2}$ であるので結局 $\varDelta S$ は

$$\varDelta S = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{2.5R}{T} - \frac{g}{T^3}\right)\mathrm{d}T = 2.5R\log\frac{T_2}{T_1} + \frac{g}{2}\left(\frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_1^2}\right)$$

と求まる。

(ii) 式 (1) の両辺を T を一定にしながら p で偏微分する。

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right)_T = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{T} + \frac{a}{VT^2}\right)_T$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial T} = -\frac{a}{V^2T^2}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{a}{pVT^2}\left(1 + \frac{b}{VT}\right) \qquad \cdots (6)$$

同様に式 (2) の両辺を p を一定にしながら T で偏微分する。

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right)_p = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{p} + \frac{b}{pVT}\right)_p$$

$$\therefore \quad +\frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T - \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial T \partial p} = -\frac{b}{pV^2T}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - \frac{b}{pVT^2} = -\frac{b}{pVT^2}\left(2 + \frac{a}{VT}\right) \qquad \cdots (7)$$

式 (6) と 式 (7) の両辺を足すことで次の関係を得る。

$$a\left(1 + \frac{b}{VT}\right) = b\left(2 + \frac{a}{VT}\right) \qquad \therefore \quad a = 2b$$

(iii) 式 (2) の T を定数とみなして偏微分を常微分に置き換えて変形すると、

$$\frac{\mathrm{d}V}{V + b/T} = -\frac{\mathrm{d}p}{p} \qquad \therefore \quad V = -\frac{b}{T} + \frac{C_1(T)}{p}$$

ここで $C_1(T)$ は p に依存しない T のある関数である。
この V の表式を 式 (1) に代入して整理すると

$$\frac{\mathrm{d}C_1(T)}{\mathrm{d}T} = \frac{C_1(T)}{T} \qquad \therefore \quad C_1(T) = C_2 T$$

ここで C_2 はある定数である。
これらより気体の状態方程式は

$$V = -\frac{b}{T} + \frac{C_2 T}{p}$$

であるが、$b \to 0$ の極限でこの気体は理想気体となる境界条件を課すことで $C_2 = R$ がわかる。よって、

$$V = -\frac{b}{T} + \frac{RT}{p}$$