

平成21年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物 理 学

平成20年8月25日(月) 13時00分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で6問ある。第1問、第2問、第3問は全員解答すること。さらに第4問、第5問、第6問の中から1問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第1問

スピン角運動量について考える。 x, y, z 方向のスピン角運動量演算子をそれぞれ s_x, s_y, s_z とすると、これらは交換関係 $[s_x, s_y] = i\hbar s_z, [s_y, s_z] = i\hbar s_x, [s_z, s_x] = i\hbar s_y$ を満たす。ただし $\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数) である。以下の設問に答えよ。

1. 一般に、自己共役演算子 P, Q が交換関係 $[P, Q] = iR$ を満たすとき、

(i) $P^\dagger = P, Q^\dagger = Q$ より、演算子 R も自己共役 ($R^\dagger = R$) であることを示せ。

(X^\dagger は X の共役演算子を表す。)

(ii) 任意の状態 $|\psi\rangle$ に対し、 $\Delta P \equiv P - \langle\psi|P|\psi\rangle, \Delta Q \equiv Q - \langle\psi|Q|\psi\rangle$ と置くと、 $[\Delta P, \Delta Q] = iR$ を示せ。

(iii) 任意の状態 $|\psi\rangle$ に対し、不確定性関係

$$\langle\psi|(\Delta P)^2|\psi\rangle\langle\psi|(\Delta Q)^2|\psi\rangle \geq \frac{1}{4}\langle\psi|R|\psi\rangle^2 \quad (1)$$

が成り立つことを示せ。

(ヒント：実数 x に対して $(\Delta P + ix\Delta Q)|\psi\rangle$ という状態を考えてみよ。)

次に、スピン $1/2$ の1粒子状態を考える。この場合のスピン自由度は2次元のベクトル空間で表される。 z 軸方向のスピン固有状態を $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ で表すと、それらは

$$s_z|\uparrow\rangle = +\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle, \quad s_z|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle, \quad \langle\uparrow|\uparrow\rangle = \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1, \quad \langle\uparrow|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|\uparrow\rangle = 0$$

を満たす。このとき、 $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とベクトル表示すると、スピン角運動量演算子はパウリ行列を用いて

$$\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z) = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表される。以下の設問に答えよ。

2. 一般に、 \mathbf{n} 方向 (\mathbf{n} は3次元空間での単位ベクトル) のスピン角運動量を表す演算子は $s(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{s}$ と与えられる。 $\mathbf{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$ 方向のスピン $s(\mathbf{n})$ に対する固有値と固有状態を求め、 $\xi|\uparrow\rangle + \eta|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ の形で表せ。

3. 設問2で求めた固有状態それぞれに対し、 z 方向のスピン角運動量の期待値を求めよ。

4. 状態 $|\psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し、非可換な P, Q の例を一つ挙げて、設問1(iii)の式(1)が成り立っていることを確認せよ。

次に、スピン 1/2 の粒子 A, B からなる 2 粒子状態を考える。粒子 A の \mathbf{a} 方向のスピン角運動量を表す演算子を $s_A(\mathbf{a})$ とし、 z 軸方向のスピン角運動量の固有状態を $|\uparrow\rangle_A, |\downarrow\rangle_A$ で表すとする。すなわち $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ に対して

$$s_A(\mathbf{e}_z)|\uparrow\rangle_A = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle_A, \quad s_A(\mathbf{e}_z)|\downarrow\rangle_A = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle_A$$

である。同様に粒子 B の \mathbf{b} 方向のスピン角運動量を表す演算子を $s_B(\mathbf{b})$ とし、 z 軸方向のスピン角運動量の固有状態を $|\uparrow\rangle_B, |\downarrow\rangle_B$ で表すとする。2 粒子状態を表す基底として、これらの 2 つの 1 粒子状態の直積

$$|u, v\rangle \equiv |u\rangle_A \otimes |v\rangle_B, \quad u, v = \uparrow \text{ または } \downarrow$$

を用いる。以下の設問に答えよ。ただし以下では、2 粒子状態に作用する演算子として $s_A(\mathbf{a}) \otimes I_B$, $I_A \otimes s_B(\mathbf{b})$ をそれぞれ単に $s_A(\mathbf{a})$, $s_B(\mathbf{b})$ と書くことにする。ここで、 I_A , I_B はそれぞれ粒子 A、粒子 B の 1 粒子状態に作用する恒等演算子である。

5. $\mathbf{a} = (\sin \theta_a, 0, \cos \theta_a)$, $\mathbf{b} = (\sin \theta_b, 0, \cos \theta_b)$ としたとき、 $s_A(\mathbf{a}) + s_B(\mathbf{b})$ の期待値を最大にする状態を $|\uparrow, \uparrow\rangle$, $|\uparrow, \downarrow\rangle$, $|\downarrow, \uparrow\rangle$, $|\downarrow, \downarrow\rangle$ の線形結合で表せ。
6. 状態 $|\psi\rangle$ に対して観測される 2 つのスピンの相関は $\langle \psi | s_A(\mathbf{a}) s_B(\mathbf{b}) | \psi \rangle$ で与えられる。

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle)$$

という重ね合わせの状態に対して $\mathbf{a} = (\sin \theta_a, 0, \cos \theta_a)$, $\mathbf{b} = (\sin \theta_b, 0, \cos \theta_b)$ としたときの相関 $\langle \psi | s_A(\mathbf{a}) s_B(\mathbf{b}) | \psi \rangle$ を求めよ。

第2問

フェルミ気体、ボース気体に関して、以下の設問に答えよ。

1. フェルミオンとボソンの例をそれぞれ一つ挙げよ。
2. 1粒子のとり、異なる2つの軌道波動関数 $\varphi_a(\mathbf{r})$ と $\varphi_b(\mathbf{r})$ が存在するとして、2個の同種粒子が、それぞれ φ_a または φ_b の状態をとるときの2粒子波動関数を考える。フェルミオン2個の場合、ボソン2個の場合のそれぞれに対して、要請される対称性に言及し、可能な波動関数の形を全て示せ。粒子1の位置を \mathbf{r}_1 、粒子2の位置を \mathbf{r}_2 とせよ。各粒子のスピンのついては、各フェルミオンのスピンの大きさは $1/2$ であり、粒子1の上向きスピン状態を α_1 、下向きスピン状態を β_1 、粒子2についてはそれぞれ α_2, β_2 とせよ。各ボソンのスピンの大きさは 0 とせよ。波動関数の規格化はしなくてよい。

次に、粒子のスピンは無視して、以下の設問に答えよ。

3. 1粒子のとり軌道波動関数は、3次元自由空間における固有状態とする。一辺の長さが L の箱に対して周期的境界条件を採用して、1粒子の固有状態および対応する固有エネルギーを求めよ。これから、状態密度 $D(E)$ (エネルギーが E と $E+dE$ の間にある状態の数が $D(E)dE$ となるような量) を求めよ。ただし、各粒子の質量を $m(>0)$ とし、最低エネルギー準位をエネルギーの原点とし、また L は十分大きいとせよ。
4. 同種粒子 N 個からなる理想気体を、設問3で考えた箱の中に入れる。温度 $T=0$ においてどのような状態をとるかを、フェルミ気体、ボース気体のそれぞれの場合について述べ、全系のエネルギーを求めよ。系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sum_{\ell=1}^N \frac{p_{\ell}^2}{2m}$$

(p_{ℓ} は ℓ 番目の粒子の運動量) であり、 N は十分大きいとせよ。

大正準集合 (grand canonical ensemble) における大分配関数 $\Xi(T, \mu)$ は、

$$\Xi(T, \mu) = \sum_N \sum_j e^{-\beta(E_j - \mu N)}$$

で与えられる。ただし、 T は温度、 μ は化学ポテンシャル、 $\beta = 1/(k_B T)$ 、 k_B はボルツマン定数、 E_j は N 個の粒子からなる系の j 番目のエネルギー準位 (ここでは N によらないと仮定する)。

5. 理想フェルミ気体、理想ボース気体のそれぞれについて、大分配関数を1粒子状態に関する積の形 ($\Xi = \prod_i \Xi_i$) で求めよ。ただし、各粒子はエネルギー準位 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ をもつ1粒子状態に入り、 $E_j = \sum_i n_i \varepsilon_i$ (ここで、 n_i は i 番目の1粒子状態に入る粒子数、 j はここでは n_1, n_2, \dots の組を指定する番号) とせよ。

6. 理想気体の大正準集合においては、 i 番目の1粒子状態に入る粒子数が n_i 個である統計力学的確率分布は

$$\frac{e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)n_i}}{\sum_n e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)n}}$$

で与えられる。ここで、分母の和は、各状態に対して許される全ての粒子数の値にわたってとる。これを用いて、統計力学的平均値 $\langle n_i \rangle$ を、理想フェルミ気体、理想ボース気体のそれぞれについて求めよ。また、得られた理想フェルミ気体に対する分布の概形を、エネルギー ε_i の関数として、 $T = 0$ および $0 < k_B T \ll \mu$ に対して描け。

3次元の理想ボース気体は低温においてボース・アインシュタイン凝縮する。

7. 全ての1粒子状態 i に対して $\langle n_i \rangle$ が正であるためには、理想ボース気体の化学ポテンシャル μ はどのような条件を満たさなければならないかを述べよ。最低エネルギー準位を0とせよ。また、理想ボース気体に対する $\langle n_i \rangle$ を、エネルギー ε_i の関数として $\mu = 0$ および $\mu \neq 0$ に対して概形を描け。ボース・アインシュタイン凝縮している場合、 μ の値はいくらになるべきかを、理由とともに述べよ。

第3問

質量 m_1 の粒子1と質量 m_2 の粒子2の弾性散乱を考える。散乱前で2つの粒子の距離が十分に離れており、両者の間の相互作用が無視できる状態において、粒子2の速さが0になるように実験室系を選ぶ。このとき、粒子1の速さは V_1 であるとする(図1左)。以下では全て非相対論的古典力学の範囲で答えよ。また、粒子1、2ともに内部自由度を持たない質点とみなせるものとする。図1右に示すように、粒子1と2の重心系において散乱前に粒子1と2が十分に離れた状態での速度ベクトルを、それぞれ v_1, v_2 、速さをそれぞれ v_1, v_2 、また、散乱後に2つの粒子が十分に離れた後の速度ベクトルを、それぞれ v'_1, v'_2 、速さをそれぞれ v'_1, v'_2 とする。また、重心系での粒子1の散乱角を ψ とする。ただし、 ψ は $0 \leq \psi \leq \pi$ の角度として定義する。

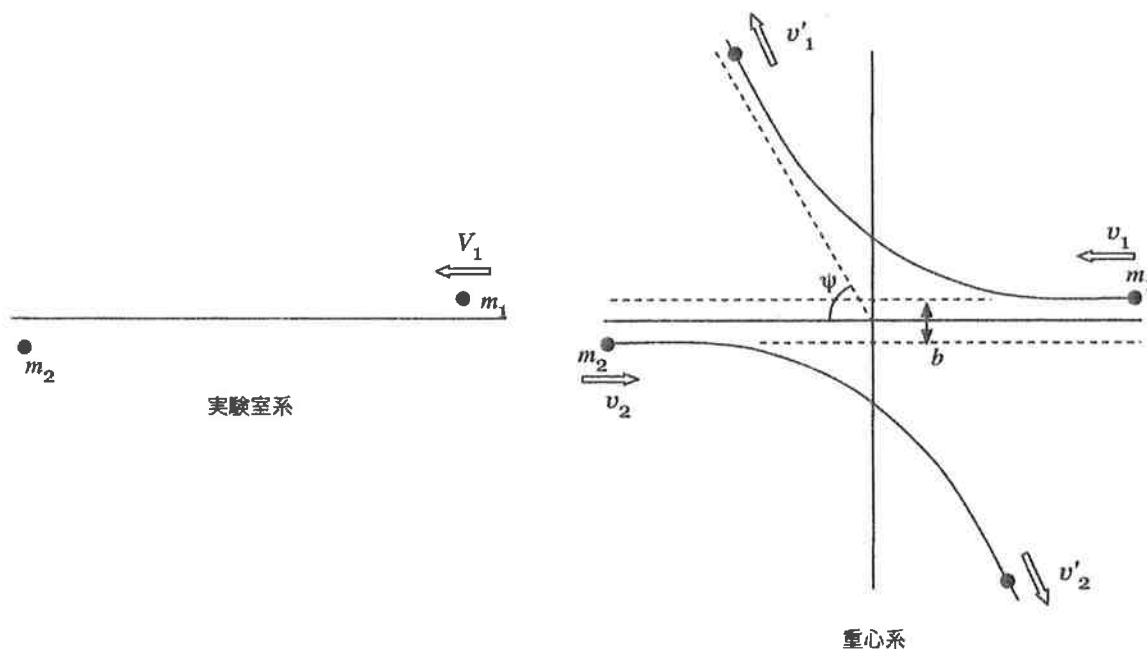


図 1:

1. 速度ベクトル v_1 と v_2 の間に成り立つ関係式、および速さ v_2 と v'_2 の間に成り立つ関係式を、それぞれ1つ示せ。
2. 実験室系における粒子2の散乱後の運動エネルギー ε を、 m_1, m_2, V_1, ψ を用いて表せ。

2つの粒子の間に働く力が、2つの粒子の間の距離 r を変数とするポテンシャル $U(r)$ によって与えられるとする。

3. 重心系におけるこの2粒子系のラグランジアンを、粒子2から粒子1への相対位置ベクトル $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ と換算質量 $m = 1/(1/m_1 + 1/m_2)$ を用いて書き表せ。ここで \mathbf{r}_1 と \mathbf{r}_2 は、それぞれ重心系における粒子1と2の位置ベクトルである。座標系として、図2のように、2つの粒子が運動する平面上に定義される極座標系 $\mathbf{r} = (r, \phi)$ を用いよ。すなわち、 r, ϕ とその時間微分 $\dot{r}, \dot{\phi}$ を用いて書き表すこと。

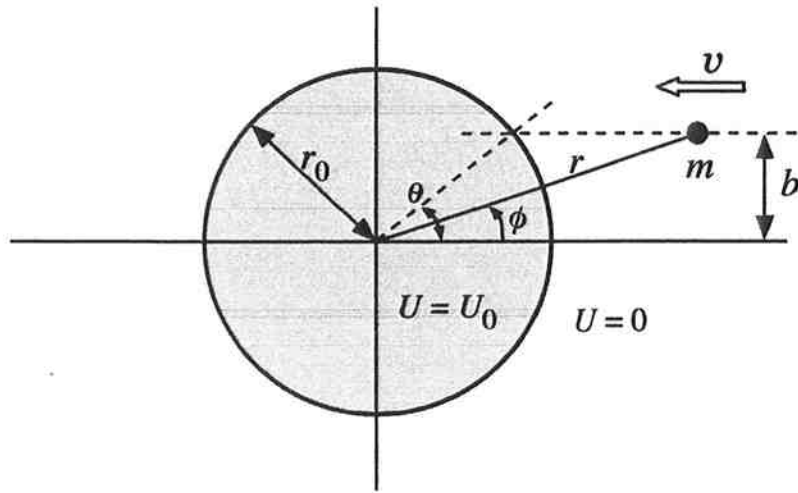


図 2: (r, ϕ) 座標の定義とポテンシャル

4. 設問 3 で求めたラグランジアンと最小作用の原理（オイラー・ラグランジュ方程式）から角運動量保存則、

$$mr^2\dot{\phi} = \text{一定}$$

を導け。

さらに、ポテンシャル $U(r)$ は

$$U(r) = \begin{cases} U_0 & (r \leq r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases}$$

により与えられるとする。ここで、 U_0 は、

$$0 < U_0 < \frac{m}{2} V_1^2$$

を満たす定数である。

5. 図 2 に示すように、衝突パラメーター b が $0 \leq b \leq r_0$ であるとき、図 2 のように $r_0 \sin \theta = b$ により $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の大きさの角度 θ を定義する。また、定数 n を

$$n = \sqrt{1 - \frac{2U_0}{mV_1^2}}$$

により定義する。相対位置ベクトル \mathbf{r} の軌跡の略図を示し、さらに、角度 θ と重心系での散乱角 ψ の間に成り立つ関係を n を用いて表せ。散乱の様子が θ の値によって質的に異なる場合は、それぞれの略図を示せ。

6. 衝突パラメーター b が 0 から r_0 の間で様々な値をとる場合に、実験室系における粒子 2 の散乱後の運動エネルギーの最大値 ε_{\max} を求めよ。

第4問

今年ヨーロッパで完成する予定の陽子・陽子衝突型加速器は、7 TeV に加速した陽子同士を正面衝突させ、14 TeV という世界最高の衝突エネルギーを実現できる。(1 TeV = 10^{12} eV) 陽子の静止質量を m 、速度を v とすると、エネルギー E 、運動量 p は、

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{ただし、} v = |v|)$$

と与えられる。以下の設問で、真空中の光速を $c = 3.0 \times 10^8$ m/s、陽子の静止質量は $0.94 \text{ GeV}/c^2$ とする。(1 GeV = 10^9 eV)

1. $E = 7.0 \text{ TeV}$ の陽子に対する $1 - v/c$ の値を有効数字2桁で求めよ。
2. 仮に、エネルギー E_0 の陽子を静止した陽子に衝突させることを考える。この衝突の重心系でのエネルギーを 14 TeV にするのに必要な E_0 はいくらか。有効数字2桁で求めよ。
ヒント：陽子・陽子衝突の場合、それぞれの陽子のエネルギーと運動量 (E_1, p_1) および (E_2, p_2) の間にローレンツ不変量 $(E_1 + E_2)^2 - (p_1 + p_2)^2 c^2$ がある。
3. 運動量の大きさ p の荷電粒子が磁束密度 B の磁場に垂直に入射した場合、荷電粒子は磁場中で、 $R = p/(eB)$ (e は荷電粒子の電荷) で与えられる半径の円軌道を描く。上の衝突型加速器は円型加速器であり、磁束密度が 8.3 T ($1 \text{ T} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}/\text{m}^2$) のとき、陽子のエネルギーが 7.0 TeV に達する。この加速器の軌道半径を有効数字2桁で求めよ。

上記の高エネルギー陽子・陽子衝突反応からは、多くの粒子が生成される。なかでも電子やミューオン (μ 粒子) などのレプトンは、新粒子の崩壊や新現象に関係して生じると期待され、かつ多数のハドロンと一緒に生成されても同定しやすい特徴を持つため、実験上重要な役割を果たす。特にミューオンは、荷電粒子の中では最も物質の通過能力が高く、それを利用してミューオンの同定を行うことができる。また、ミューオンの運動量の測定は、磁場中を通過させた時の設問3で与えられた関係式を用いることにより行うことができる。以下に、ミューオンの運動量の測定を、磁化した鉄の層を通過させることにより行う場合のいくつかの問題点について考察する。

4. 荷電粒子は物質中で電離損失によりエネルギーを失うので、ミューオンも鉄の層を通過するためには、ある値以上のエネルギーが必要である。図1は、質量 M 、運動量の大きさ p の荷電粒子が物質を通過する時の、単位長さ当たりの電離損失を表している ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$)。ここで、長さ x は、通常長さ (cm) に物質の密度 (g/cm^3) をかけた量を用いている。この図から、エネルギー 100 GeV のミューオンが厚さ 1 m の鉄の板を通過したときに失うエネルギーの大きさを有効数字1桁で求めよ。ミューオンの質量は $0.1 \text{ GeV}/c^2$ 、鉄の密度は $8 \text{ g}/\text{cm}^3$ とし、鉄の磁化はここでは無視してよい。
5. 電離損失によって失うエネルギーが無視できるほどの高エネルギーのミューオンに対しては、磁化した鉄の層 (磁束密度を B とする) を通過させた時のミューオンの軌道の曲がる角度 θ から、その運動量を測定するのは有効な方法である。しかしながら、荷電粒子は物質を通過する際、多重クーロン散乱により、その進行方向が変えられるので、ミューオンの運動量の測定精度がその影響を受けると考えられる。光速に近い速さの荷電粒子

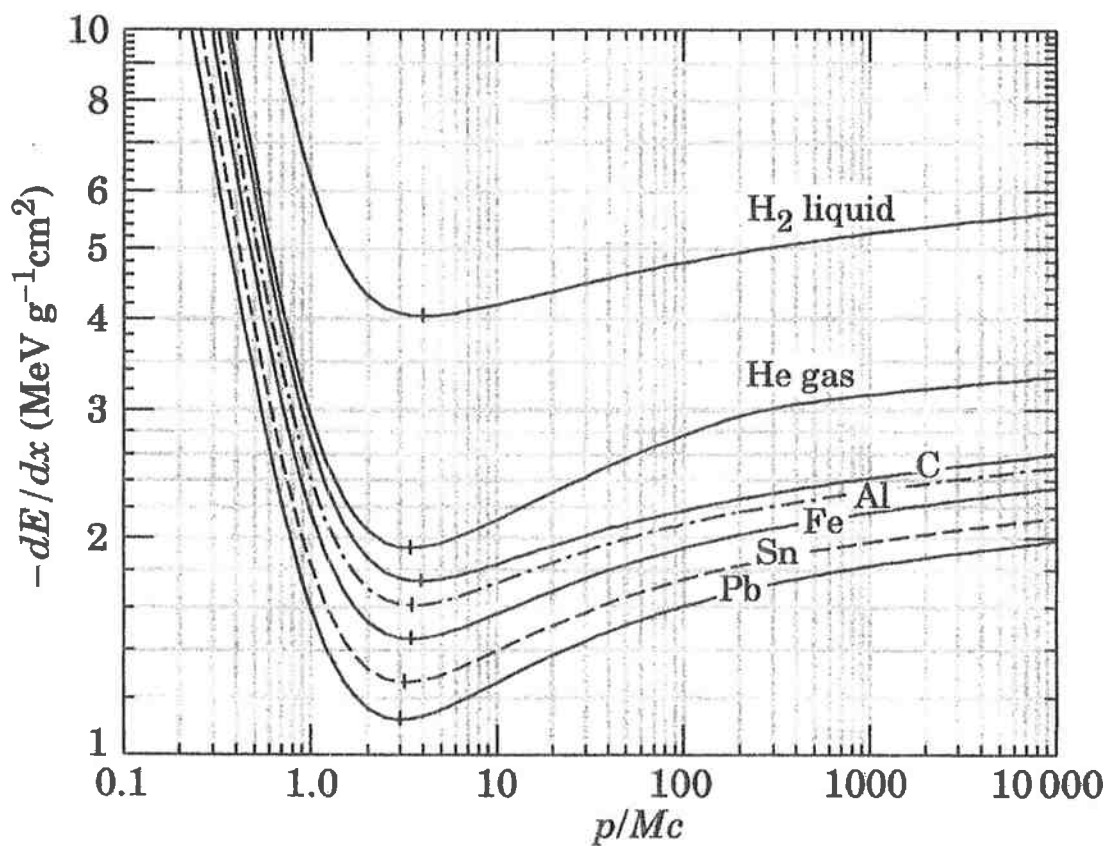


図 1: 電子と同じ大きさの電荷を持つ荷電粒子が様々な物質中を通過する時に、電離損失により単位長さあたりに平均的に失うエネルギー (Review of Particle Physics, Journal of Physics G, **33**, July 2006 より転載)

(運動量の大きさ p) が、厚さ l の物質を通過したあとの角度の広がり $\Delta\theta$ は、 $\sqrt{l/p}$ に比例する。これらのことから、ミューオンの運動量の測定精度 ($\Delta p/p$) の、 B, l, p に対する依存性を求めよ。ただし、 $\theta \ll 1 \text{ rad}$ と考えてよい。

6. 実際にミューオンの運動量を上の方法で測定することを想定し、多重クーロン散乱以外で、その測定精度に影響を与える要因について例を一つ挙げ、説明せよ。

第5問

図1のように、ある半導体の電気伝導を測定しようとしている。手元には、定電流源と入力端子の電位差が測定できる電圧計がそれぞれ1台ある。この電圧計の入力抵抗を R_z とする。この半導体は図1(a)のような形状に加工されており、電極が6箇所つけられている。最初は外部磁束密度 B_{ext} はゼロに設定されている。

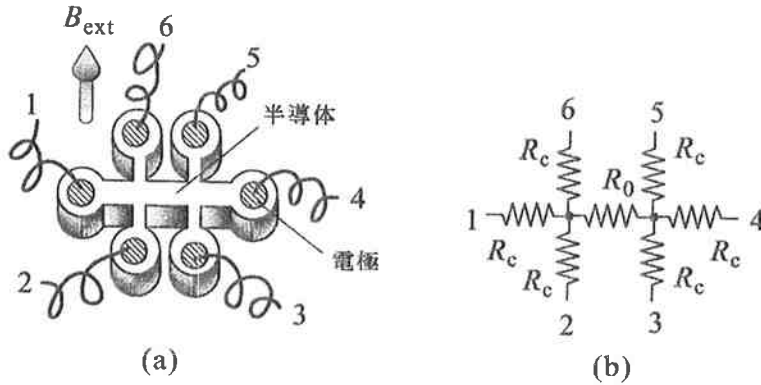


図1: (a) 半導体試料形状の模式図。1～6は端子の番号。(b) 等価回路。 R_0 以外のすべての抵抗は R_c (導線、電極、半導体の腕の部分の抵抗を含む) とする。

- この半導体の抵抗率を測定したい。通常、電極部分には半導体自身の抵抗と同程度かそれ以上の大きな未知の抵抗 (接触抵抗) が存在する。その影響を避けて測定する方法を、最も簡単な図1(b)の等価回路で考えよう。等価回路の R_0 の値を測定したい。このような目的のため、最もよく使われるのが「4端子法」と呼ばれる接続法である。接触抵抗の影響をできるだけ避けて測定を行うためには、定電流源の2つの端子と電圧計の2つの端子 (合計4つ) をどの試料端子につなげばよいか、試料の端子番号と測定器端子の組み合わせ、およびその理由を述べよ。 $R_z \gg R_0, R_c$ とし、組み合わせは、1つ答えればよい。
- 設問1の接続で測定したとき、(電圧計の読み)/(定電流源の電流) として抵抗値を得たときの R_0 からのずれ (系統誤差) はいくらか。
- 定電流源はそのまま使い、電圧計の代わりに電流計と可変定電圧源を使って R_c の影響が少ない測定を行うには、どう接続しどのように測定するか。回路図を使って説明せよ。(ヒント: 測定したい電圧と可変定電圧源の出力電圧が一致したとき、これらの間を導線で結合しても電流は流れない。)
- 再び定電流源と電圧計を用いて測定する。以降は、 $R_z = \infty$ とし、図1(b)の等価回路は考えない。今度は、図1(a)で試料面に垂直で一様な磁束密度 B_{ext} を印加する。この場合、電流と磁場に垂直な方向に、ホール電場と呼ばれる電場が発生する。このホール電場によって、生ずる電圧 (ホール電圧、 V_H) を測定したい。どのように接続すればよいか。試料の端子番号と測定器端子の組み合わせを答えよ。1つ答えればよい。

以下の設問では、半導体自身が持つ弱い反磁性は無視する。ホール電場の大きさ E_H は、半導体のキャリア密度を n 、電流密度を j 、半導体に印加されている磁束密度を B 、電気素量を $|e|$ (1.6×10^{-19} C) として $E_H = jB/(n|e|)$ である。

5. 設問4の測定を行ったところ、測定電流 $100 \mu\text{A}$ 、 $B_{\text{ext}} = 0.50 \text{ T}$ ($1 \text{ T} = 1 \text{ V}\cdot\text{s}/\text{m}^2$) の時、 V_H の測定値は $12 \mu\text{V}$ であった。電流が流れる断面の幅を 2.0 mm 、厚さを 0.50 mm として、キャリア密度を有効数字2桁で求めよ。

次にこの半導体試料を、図2(a)のように磁性体の上にのせ、外部から加えた磁束密度 B_{ext} の関数としてホール電圧 V_H を測定する。この場合、半導体には B_{ext} の他に、磁性体に誘起された磁化による磁束密度 B_M が加わる。測定した V_H は図2(b)のように、 B_{ext} の増加・減少に対して異なる関数となった。図2(b)の図中に示した破線は、設問4で測定した、磁性体がないときのホール電圧であり、ここでは $V_H = aB_{\text{ext}}$ とする。ただし、 a は正の定数とする。 B_0 は破線と実線の交点の B_{ext} の値であり、 V_0 は $B_{\text{ext}} = 0$ のときの V_H の値である。

6. この時、 B_M は B_{ext} の関数として、どのように変化するか。図2(b)のデータから概形を描け。頂点1~4に対応する点がどの位置にくるか、明確にわかるように描くこと。 B_0 の位置を図中に明示し、 B_M の最大値を求めよ。また、概形がそのような理由を簡潔に述べよ。

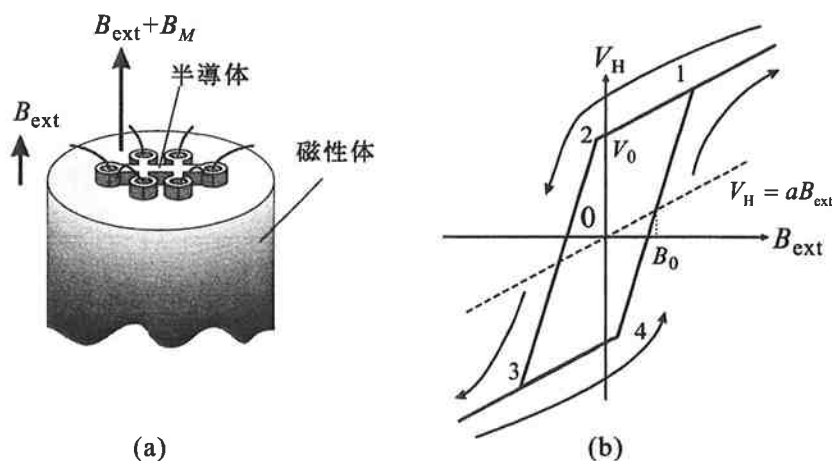


図 2: (a) 磁性体の端面にのせた半導体試料。(b) 外部から印加した磁束密度 B_{ext} に対するホール電圧 V_H の変化。矢印は変化の向きを表している。

第6問

レーザー光のような単色の平行な光が^{ついで}開口面の開口面に垂直に入射してできる回折パターンは、フレネル・キルヒホフの回折公式から求められる。図1に示すような直交座標系において、開口面上 ($z=0$) の入射光の分布 $g(x_0, y_0)$ がスクリーン上 ($z=z_s$) に作る回折像の電場の複素振幅 $u(x_s, y_s)$ は、光の波長を λ 、波数を $k = 2\pi/\lambda$ と書くとき、次式で与えられる。

$$u(x_s, y_s) = \frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \frac{e^{ikr}}{r} dx_0 dy_0 \quad (1)$$

ただし、 $r = \sqrt{z_s^2 + (x_0 - x_s)^2 + (y_0 - y_s)^2}$ 。

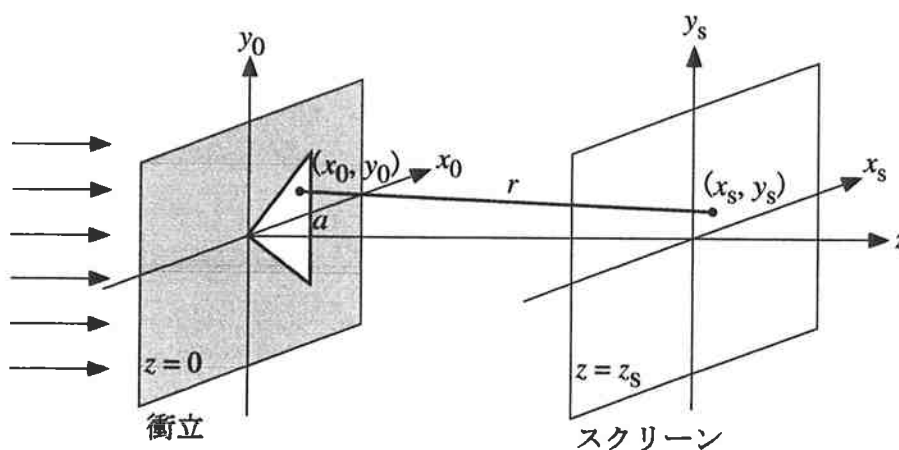


図 1:

ここでは、 r の表式の平方根の中での第2項と第3項の和が第1項に比べて十分に小さく、以下のように展開できるとする。

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{z_s^2 + (x_0 - x_s)^2 + (y_0 - y_s)^2} \\ &= z_s \sqrt{1 + \frac{(x_0 - x_s)^2 + (y_0 - y_s)^2}{z_s^2}} \\ &= z_s + \frac{(x_0 - x_s)^2 + (y_0 - y_s)^2}{2z_s} - \dots \\ &= z_s + \frac{x_s^2 + y_s^2}{2z_s} - \frac{x_s x_0 + y_s y_0}{z_s} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_s} - \dots \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)で、開口面の大きさとスクリーンまでの距離 z_s の大小によって第何項まで採用すべきかが決まり、第3項まで取る近似をフラウンホーファー近似と呼ぶ。また、その場合に観測される回折像をフラウンホーファー・パターンと呼ぶ。以下の設問に答えよ。

1. 式(2)の第4項が無視できるのは、式(1)の被積分関数における位相 kr への寄与が 2π より十分に小さいときである。いま、光源として波長 $\lambda = 600 \text{ nm}$ ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) の光を用い、開口面が原点を中心とする一辺の長さが 6 mm の正方形であるとするとき、狭い実験室でフラウンホーファー近似が成り立つ状況を実現することは困難であることを示せ。

2. 式 (2) の第 4 項が無視できない場合に、開口面の直後に凸レンズを置いて、フラウンホーファー・パターンを観測したい。用いる凸レンズは、透過光にどのような位相差を与えるように設計されていけばよいか、簡潔に答えよ。

以下の設問では、式 (2) の第 3 項までを採用するフラウンホーファー近似式を考える。ただし、式 (1) の分母の r は $r = z_s$ と近似できるとする。

3. 関数 $g(x_0, y_0)$ の 2 次元フーリエ変換を

$$G(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) e^{-2\pi i(Xx_0 + Yy_0)} dx_0 dy_0$$

と定義する。式 (1) の積分計算において、 $f_x = x_s/(\lambda z_s)$, $f_y = y_s/(\lambda z_s)$ と置くと、フラウンホーファー・パターンの光強度分布が $|G(f_x, f_y)|^2$ に比例することを示せ。

いま、衝立上に $x_0 = a (> 0)$, $y_0 = x_0$, $y_0 = -x_0$ で囲まれた直角三角形の開口面があるとする (図 1)。開口面上で $g(x_0, y_0) = g_0$ (一定) とするとき、 z_s だけ離れたスクリーン上の光強度分布に関する以下の設問に答えよ。

4. 上記の直角三角形の入射光分布に対する $G(f_x, f_y)$ を計算せよ。

結果は sinc 関数 $\text{sinc } x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ を用い、

$$G(f_x, f_y) = A (e^{-B} \text{sinc } C - e^{-D} \text{sinc } E)$$

の形で解答せよ。

5. $G(f_x, f_y)$ の振幅と位相の f_x 軸と f_y 軸に関する対称性を、 $G(-f_x, f_y)$ 、 $G(f_x, -f_y)$ 、および $G(-f_x, -f_y)$ を $G(f_x, f_y)$ と比較することにより論ぜよ。
6. 設問 5 で調べた $G(f_x, f_y)$ の対称性、および $G(f_x, 0)$ と $G(0, f_y)$ の対比から、上記の直角三角形の入射光分布に対するフラウンホーファー・パターンは、スクリーン上の原点近傍以外の領域では、主にどのような方向に現れると考えられるか。図 2 の (a)~(e) のの中から最も適当と考えられるものの記号を答え、判断の根拠を簡潔に述べよ。(実際の回折像には、それぞれの方向に濃淡の構造が現れる。)

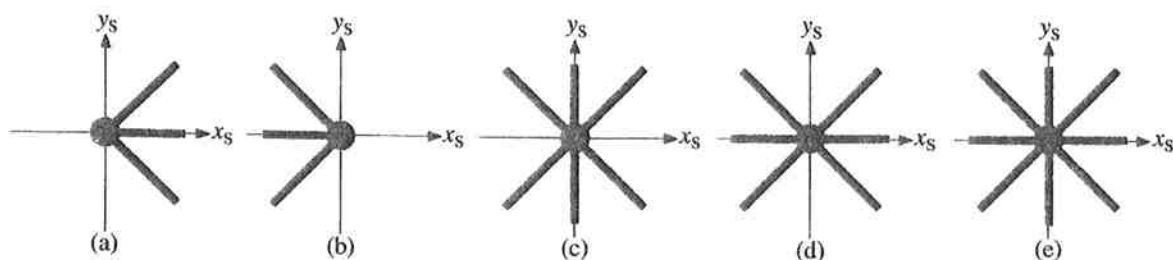


図 2: 図 1 の直角三角形によるフラウンホーファー・パターンの選択肢 (太線が回折像の方向)

平成 21 年度物理学解答例

渡辺 悠樹

2009 年 6 月 13 日

まだ自信ないところもいくつかあるので，より良い解答を思いついた人は教えてください m(__)m

第 1 問

1. (i) 略

(ii) 略

(iii) $\|(\Delta P + ix\Delta Q)|\psi\rangle\|^2 = \langle\psi|(\Delta Q)^2|\psi\rangle x^2 - \langle\psi|R|\psi\rangle x + \langle\psi|(\Delta P)^2|\psi\rangle \geq 0$ より，(判別式) ≤ 0 から．

2. 固有値は $+\frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}$ ．対応する固有ベクトルはそれぞれ $|\mathbf{n}; +\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$ ， $|\mathbf{n}; -\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$

3. $\langle\mathbf{n}; \pm|s_z|\mathbf{n}; \pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}\cos\theta$ (複合同順)

4. $[s_z, s_x] = i\hbar s_y$ に対して， $\langle\psi|(\Delta s_z)^2|\psi\rangle\langle\psi|(\Delta s_x)^2|\psi\rangle = \frac{3\hbar^4}{4^4}$ ．一方， $\frac{1}{4}\langle\psi|\hbar\Delta s_y|\psi\rangle^2 = 0$ ．確かに，

$$\langle\psi|(\Delta s_z)^2|\psi\rangle\langle\psi|(\Delta s_x)^2|\psi\rangle \geq \frac{1}{4}\langle\psi|\hbar\Delta s_y|\psi\rangle^2$$

になっている．

5. $\langle u, v|(s_A(\mathbf{a}) + s_B(\mathbf{b}))|u, v\rangle = \langle u|s_A(\mathbf{a})|u\rangle + \langle v|s_B(\mathbf{b})|v\rangle$ だから，それぞれを最大にする

$$|u\rangle_A = |\mathbf{a}; +\rangle = \cos(\theta_a/2)|\uparrow\rangle_A + \sin(\theta_a/2)|\downarrow\rangle_A, \quad |v\rangle_B = |\mathbf{b}; +\rangle = \cos(\theta_b/2)|\uparrow\rangle_B + \sin(\theta_b/2)|\downarrow\rangle_B$$

のときに最大 $\frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{2} = \hbar$ になることは明らか．この状態は，

$$|u, v\rangle = \cos(\theta_a/2)\cos(\theta_b/2)|\uparrow, \uparrow\rangle + \cos(\theta_a/2)\sin(\theta_b/2)|\uparrow, \downarrow\rangle + \sin(\theta_a/2)\cos(\theta_b/2)|\downarrow, \uparrow\rangle + \sin(\theta_a/2)\sin(\theta_b/2)|\downarrow, \downarrow\rangle$$

と表せて，これが答え．

数人に質問を受けたため，追記します．

まず，上記の解答で省いた部分を補います．基底を

$$\{|\mathbf{a}; +\rangle \otimes |\mathbf{b}; +\rangle, |\mathbf{a}; +\rangle \otimes |\mathbf{b}; -\rangle, |\mathbf{a}; -\rangle \otimes |\mathbf{b}; +\rangle, |\mathbf{a}; -\rangle \otimes |\mathbf{b}; -\rangle\}$$

ととると，

$$s_A(\mathbf{a}) \otimes I_B + I_A \otimes s_B(\mathbf{b}) \doteq \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となるので，この期待値を最大にする状態は，

$$|\mathbf{a}; +\rangle \otimes |\mathbf{b}; +\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

でいいわけです．これを指示された基底で書き換えたのが答えになっています．

この問題では $s_A(\boldsymbol{a})$ と $s_B(\boldsymbol{b})$ が用いられて，一見するとかなり一般的に考えなければならないような気がしますが，実は \boldsymbol{a} , \boldsymbol{b} の方向に改めて z 軸を選びなおしたと考えれば $s_A(\boldsymbol{e}_z) + s_B(\boldsymbol{e}_z)$ の期待値の最大値を求める問題なので，さらに見通し良く解答できると思います．

6. 定義にしたがって計算すると，

$$\begin{aligned} & \langle \psi | s_A(\boldsymbol{a}) s_B(\boldsymbol{b}) | \psi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle \uparrow | s_A | \uparrow \rangle \langle \downarrow | s_B | \downarrow \rangle - \langle \uparrow | s_A | \downarrow \rangle \langle \downarrow | s_B | \uparrow \rangle - \langle \downarrow | s_A | \uparrow \rangle \langle \uparrow | s_B | \downarrow \rangle + \langle \downarrow | s_A | \downarrow \rangle \langle \uparrow | s_B | \uparrow \rangle \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{4} \cos(\theta_{\boldsymbol{a}} - \theta_{\boldsymbol{b}}) \end{aligned}$$

第2問

1. フェルミオン：電子，ボソン：光子 とか．
2. いつもやるように，軌道波動関数，spin 波動関数をそれぞれ対称・反対称にしておいて，両者の積が対称または反対称になるようにする．
3. 固有状態と固有エネルギーは， n_x, n_y, n_z を整数として，

$$\psi(x, y, z)_{n_x, n_y, n_z} = \exp\left(\frac{2\pi i}{L}(n_x x + n_y y + n_z z)\right)$$

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

と表せる．spin は無視するように言われているが，少し気持ち悪いので一応 g (ここでは $g = 1$) を入れておくと，

$$D(E) = \frac{gV}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E}$$

4. フェルミ気体：フェルミエネルギー ε_F まで 1 準位に 1 個ずつ粒子がつまっていくな．

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} D(E) dE = \frac{gV}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{2}{3} \varepsilon_F^{3/2}$$

$$E = \int_0^{\varepsilon_F} D(E) E dE = \frac{gV}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{2}{5} \varepsilon_F^{5/2}$$

この辺々を割り算して， $\frac{E}{N} = \frac{3}{5} \varepsilon_F$ を得る．また第一式より $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{g} \frac{N}{V}\right)^{2/3}$ だから，

$$E = N \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{g} \frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

ボソン気体：全粒子が $\varepsilon = 0$ の状態に全て落ち込む． $E = 0$

5. 結果のみ．

$$\Xi = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\infty} (1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)})^{-1} & (\text{boson}) \\ \prod_{i=1}^{\infty} (1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}) & (\text{fermion}) \end{cases}$$

6. 与えられた式から，

$$\langle n_i \rangle = \frac{\sum_{n_i} n_i e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu) n_i}}{\sum_n e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu) n}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi_i = \begin{cases} (e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1)^{-1} & (\text{boson}) \\ (e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1)^{-1} & (\text{fermion}) \end{cases}$$

図は略．階段関数とそのちょっとなまったやつ．

7. $\langle n_i \rangle$ が正であるためには $\mu \leq 0$ でなければならない．BEC のときは， $N_0 = (e^{-\beta\mu} - 1)^{-1}$ がマクロな量になることから， $\mu \simeq -k_B T \frac{1}{N_0}$ となり，熱力学極限 ($N \rightarrow \infty$) では化学ポテンシャル μ は 0 になる．図は略．

第 3 問

1. 式を示すだけでいいようなので，導出は略．

$$\text{重心系の定義式： } m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0$$

$$\text{重心系での弾性散乱の条件： } v_2 = v'_2$$

2. 重心の速度を V_{COM} とすると，

$$\mathbf{V}_{\text{COM}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1 \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \end{pmatrix}$$

だから，

$$\mathbf{V}'_2 = \mathbf{V}_{\text{COM}} + \mathbf{v}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1 \begin{pmatrix} \cos \psi - 1 \\ -\sin \psi \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \frac{m_2}{2} V_2'^2 = \frac{m_1}{2} V_1^2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(2 \sin \frac{\psi}{2} \right)^2$$

- 3.

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r)$$

4. Euler-Lagrange eqs.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U(r)}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi}) = 0$$

5. b の定義より， $mr^2 \dot{\phi} = \text{const.} = mbV_1$ ．これと r に関する Euler-Lagrange eq より，エネルギー保存

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{mb^2 V_1^2}{2r^2} + U(r) = \frac{m}{2} V_1^2$$

を得る．ここから，

$$r = r_0 + 0 \text{ のとき， } \dot{r}^+ = V_1 \cos \theta$$

$$r = r_0 - 0 \text{ のとき， } \dot{r}^- = V_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}$$

となるので， $0 \leq \sin \theta \leq n$ と $n \leq \sin \theta \leq 1$ の場合分けが必要となる．(条件 $0 < U_0 < \frac{m}{2} V_1^2$ より， $0 < n < 1$ が保証される．)

$0 \leq \sin \theta \leq n$ のとき

粒子 1 は $r \leq r_0$ まで進入できる．力を受けるのはポテンシャルが変化する $r = r_0$ の時だけであり，それ以外では等速度直線運動となる．さらに $r = r_0$ を横切る際，ポテンシャルからの力は中心力で， \dot{r} は \dot{r}^+ から \dot{r}^- （またはその逆）へと変化するが，角度方向の速さは不変（ $r\dot{\phi} = V_1 \sin \theta$ ）であることに注意すると，

$$\sin \left(\frac{\psi}{2} + \theta \right) = \frac{\sin \theta}{n} \quad \therefore \psi = 2 \arcsin \left(\frac{\sin \theta}{n} \right) - 2\theta$$

が導ける（図 1）．

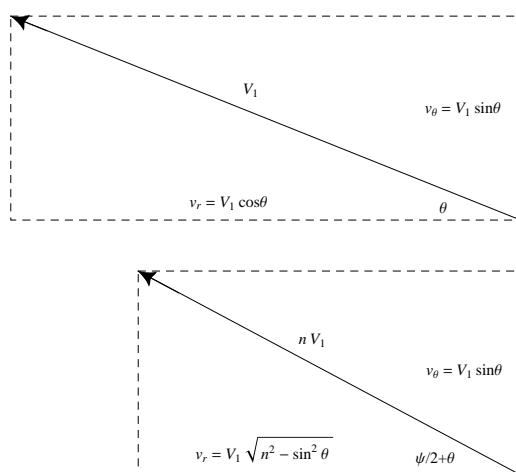


図 1 散乱角 ψ と θ の関係．散乱の前後で動径方向の速度のみが変化する．

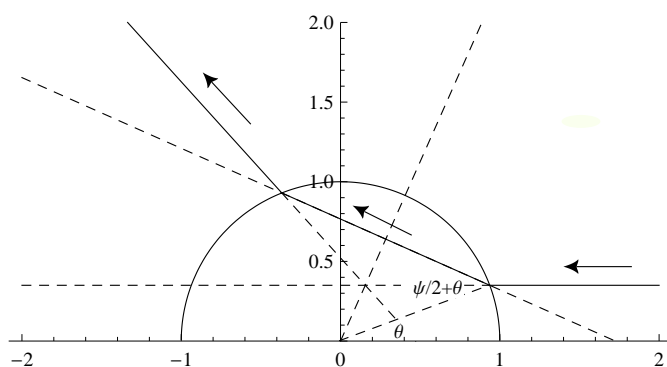


図 2 $0 \leq \sin \theta \leq n$ のときの散乱の様子

なお，ここで求めた散乱角 ψ と θ の関係を図 4 に plot した．

$n \leq \sin \theta \leq 1$ のとき

このときは粒子 1 は $r \leq r_0$ まで進入できないため, 散乱の様子は明らかに図 3 のようになり, 散乱角は $\psi = \pi - 2\theta$ となる.

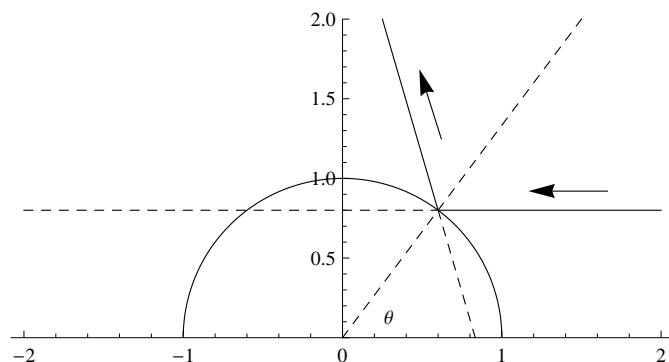


図 3 $n \leq \sin \theta \leq 1$ のときの散乱の様子

6. $\theta_n = \arcsin n$ とおく. 小問 2 の結果より,

$$\varepsilon = \frac{m_1}{2} V_1^2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(2 \sin \frac{\psi}{2} \right)^2$$

であり, また小問 5 の結果より $0 \leq \psi \leq \pi - 2\theta_n$ であるので (図 4 参照),

$$\varepsilon_{\max} = \frac{m_1}{2} V_1^2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(2 \sin \frac{\pi - 2\theta_n}{2} \right)^2 = \frac{m_1}{2} V_1^2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} 4(1 - n^2)$$

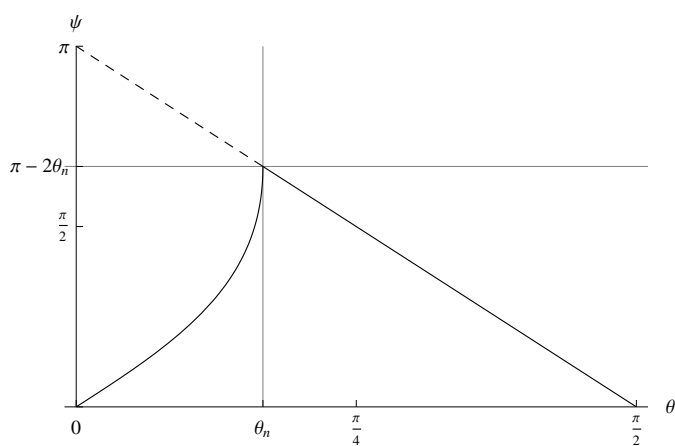


図 4 散乱角 ψ と θ の関係. $\theta_n = \arcsin n$ とおいた.

第4問

1. $1 - v/c \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{0.94 \text{ GeV}}{7.0 \text{ TeV}} \right)^2 = 9.0 \times 10^{-9}$

2.

$$p_1 = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} E_0 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad p_1^{\text{COM}} = \begin{pmatrix} E^{\text{COM}} \\ \mathbf{p}^{\text{COM}} \end{pmatrix}, \quad p_2^{\text{COM}} = \begin{pmatrix} E^{\text{COM}} \\ -\mathbf{p}^{\text{COM}} \end{pmatrix}$$

として、次の Lorentz 不変量を考える。

$$(p_1 + p_2)^\mu (p_1 + p_2)_\mu = (m + E_0)^2 - \mathbf{p}^2 = 2E^{\text{COM}}, \quad p_2^\mu p_{2\mu} = E_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

ここに、 $E^{\text{COM}} = 7.0 \text{ TeV}$ である。これらより、

$$E_0 = \frac{(2E^{\text{COM}})^2}{2m} - m = 1.0 \times 10^5 \text{ TeV}$$

と前代未聞の衝突器が必要になることが分かる。

3. 与えられた式と数値で計算するだけ。 $R = \dots = 2.8 \text{ km}$

4. $E = 100 \text{ GeV}$ のとき、

$$\frac{p}{M} = \sqrt{\left(\frac{E}{m} \right)^2 - 1} \simeq 1000 \text{ GeV} \quad \Rightarrow \quad -\frac{dE}{dx} = 2.2 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^2$$

と読み取ることができる。よって、

$$-\Delta E = 2.2 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^2 \times 8.0 \text{ g cm}^{-3} \times 100 \text{ cm} = 1.8 \text{ GeV}$$

5. $\ell = R\theta = \frac{p}{eB}\theta$ だから、 $p = \frac{eB\ell}{\theta}$ 。したがって、 $\Delta p = \frac{eBl\Delta\theta}{\theta^2}$ 。これと $\Delta\theta \propto \frac{\sqrt{\ell}}{p}$ から、

$$\frac{\Delta p}{p} \propto B \ell^{\frac{3}{2}} p^{-2}$$

と評価できる。

6.
 - 原子核に散乱されることによる制動放射 (by Jackie♡)
 - muon 自体が崩壊してしまう (by NaI juggler さん)
 - 磁場の不安定性・不均一 (by Mr. 線形応答さん)

などが考えられるそうです。

第 5 問

1. 端子 1 と 4 を定電流源に，端子 2 と 3 を電圧計につなげばよい．電圧計には電流は流れないと理想的に考えるなら，端子 1,4 間を流れる電流は定電流源で調節でき，また端子 1,4 間の電位差は電圧計で調べられるので，Ohm's law から抵抗が分かる．このように測定した結果には回路の余計な抵抗 R_c は影響しないから．
2. 実際には電圧計にも電流が流れるので，それを i とし，定電流電源からの電流を I と書くと，端子 1,4 の間に流れる電流は $I - i$ となる．Kirchhoff's voltage law から，1 次までで $i \simeq \frac{R_0}{R_z} I$ が得られるので，

$$R_{\text{exp}} = \frac{V}{I} = \frac{(I - i)R_0}{I} = R_0 \left(1 - \frac{R_0}{R_z}\right) \quad \therefore \frac{R_{\text{exp}} - R_0}{R_0} \simeq \frac{R_0}{R_z}$$

3. 端子 1 と 4 に定電流源をつなぎ，端子 2 と 3 に可変定電圧源と電流計を直列につなぐ．可変定電圧源の出力を調節して，電流計の読みが 0 になったときの可変定電圧源のかけている電圧が，端子 1,4 間の電位差を与える．このとき，可変定電圧源には電流が流れていないので， R_c の寄与は除かれている．
4. 端子 1 と 4 に定電流源を，端子 2 と 6 に電圧計をつなげばよい．端子 2 と 6 の電位差がホール電圧を与える．内部抵抗 ($R_z \rightarrow \infty$) の電圧計で測定するので，電圧計に流れる電流は考えなくてよい．ため，回路の余計な抵抗 R_c の寄与もないとしてよい．
5. 与えられたデータから計算するだけ． $j = \frac{100\mu\text{A}}{2.0\text{mm} \times 0.50\text{mm}}$, $E_H = \frac{12\mu\text{V}}{2.0\text{mm}}$ などから， $n = 5.2 \times 10^{22}\text{m}^{-3}$
6. 問題文の図 2(b) の直線 14 の傾きを c とする．

- 半直線 21

$$V_H = a(B_{\text{ext}} + B_M) = aB_{\text{ext}} + V_0 \text{ より, } B_M = \frac{V_0}{a} = \text{const.}$$

- 半直線 43

$$\text{同様に, } V_H = a(B_{\text{ext}} + B_M) = aB_{\text{ext}} - V_0 \text{ より, } B_M = -\frac{V_0}{a} = \text{const.}$$

- 線分 41

$$V_H = a(B_{\text{ext}} + B_M) = c(B_{\text{ext}} - B_0) + aB_0 \text{ より, } B_M = \frac{c - a}{a}(B_{\text{ext}} - B_0)$$

- 線分 23

$$\text{同様に, } V_H = a(B_{\text{ext}} + B_M) = c(B_{\text{ext}} + B_0) - aB_0 \text{ より, } B_M = \frac{c - a}{a}(B_{\text{ext}} + B_0)$$

これを図示すると図 5 のようになる．

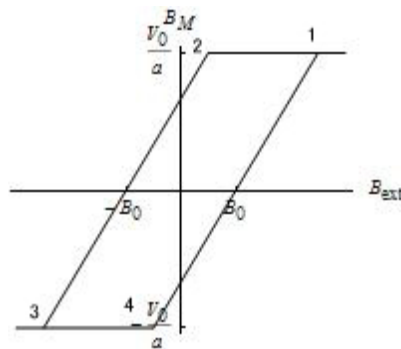


図 5 B_{ext} と B_M の関係．変化する向きは問題文図 2(b) と同じ．

第6問

1. $x_0 \sim y_0 \sim 6\text{mm}$, $\lambda = \frac{2\pi}{k} \sim 600\text{nm}$ のとき ,

$$k \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_s} \ll 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad z_s \gg 60\text{m}$$

この条件は狭い実験室では実現できないだろう .

2. 開口面上の半径 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ の円周上の点からの光の透過光の位相を , $k \frac{r_0^2}{2z_s}$ だけ進めるように設計されていれば良い . (すごく自信ないので誰かちゃんとした答え教えて下さい .)
3. フラウンホーファー近似の条件を代入すると ,

$$\begin{aligned} u(x_s, y_s) &= \frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \frac{1}{z_s} \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} \left(z_s + \frac{x_s^2 + y_s^2}{2z_s} - \frac{x_s x_0 + y_s y_0}{z_s} \right) \right\} dx_0 dy_0 \\ &= \frac{1}{i\lambda} \frac{1}{z_s} \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} \left(z_s + \frac{x_s^2 + y_s^2}{2z_s} \right) \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \exp \left\{ -2\pi i \left(\frac{x_s}{\lambda z_s} x_0 + \frac{y_s}{\lambda z_s} y_0 \right) \right\} dx_0 dy_0 \\ \therefore |u(x_s, y_s)|^2 &= \frac{1}{\lambda^2 z_s^2} |G(f_x, f_y)|^2 \end{aligned}$$

4. 定義通りに計算する . 結果は ,

$$G(f_x, f_y) = \frac{g_0 a}{2\pi i f_y} \left(e^{-i\pi(f_x - f_y)a} \text{sinc}\{(f_x - f_y)a\} - e^{-i\pi(f_x + f_y)a} \text{sinc}\{(f_x + f_y)a\} \right)$$

5. $G(-f_x, f_y)^* = G(f_x, -f_y) = G(-f_x, -f_y)^* = G(f_x, f_y)$ から論じる . 図が描けないので後は略 .
6. 前問で見た対称性だけでなく , オーダー評価も必要になる . $\rho = a\sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ と置くと ,

$$\begin{aligned} |G(f_x, 0)| &= g_0 a^2 \frac{\sin \pi f_x a}{\pi f_x a} \sim \mathcal{O}(\rho^{-1}) \\ |G(0, f_y)| &= g_0 a^2 \left(\frac{\sin \pi f_y a}{\pi f_y a} \right)^2 \sim \mathcal{O}(\rho^{-2}) \\ |G(f_x, f_x)| &= |G(f_x, -f_x)| \simeq g_0 a^2 \frac{1}{\sqrt{2}\pi\rho} \sim \mathcal{O}(\rho^{-1}) \end{aligned}$$

だから , 選択肢 (d) が答えである .

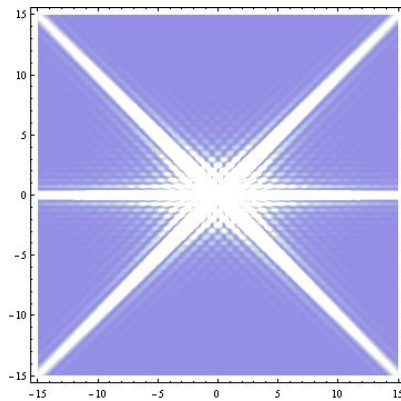


図6 直角三角形による Fraunhofer pattern