

1992 年度 入学試験 物理専門科目

専攻 問題 1

1. 次のような一次元ポテンシャル $V(x)$ 中にある質量 m , 電荷 e を持つ粒子を考える。

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 \cos x & -\pi \leq x \leq \pi \\ \infty & x < -\pi, x > \pi \end{cases}$$

ただし, V_0 は正とする。

- (i) $x = 0$ の近傍でポテンシャルが調和近似できるとし ($V(x) \sim -V_0(1 - x^2/2)$), エネルギー固有値と固有関数を求めよ。また, n 番目の量子状態に対してこの近似が成り立つ条件を示せ。

ここで, n を整数とした微分方程式

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} - 2\xi \frac{df}{d\xi} + 2nf = 0$$

の解は, 次の二つの式を満たすエルミート多項式 $H_n(\xi)$ を用いて与えられることに注意せよ。

$$H_n(\xi) = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{d^n}{d\xi^n} (\exp(-\xi^2))$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) \exp(-\xi^2) d\xi = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m}$$

- (ii) $x = 0$ の近傍で, ポテンシャルの非調和項 $\Delta V(x) \equiv V(x) + V_0(1 - x^2/2)$ を x について最低次の項で近似する。エネルギー固有値のずれをこの項について一次の摂動計算で求めよ。

ここで, 必要ならば, 以下に与えられるエルミート多項式の漸化式を用いよ。

$$\xi H_n(\xi) = \frac{1}{2} H_{n+1}(\xi) + n H_{n-1}(\xi)$$

- (iii) x 方向に弱い電場 E をかけたときのエネルギー固有値を, $V(x)$ が調和近似できるとして求めよ。このとき, $V(x)$ の調和近似が成り立つための電場 E の条件を示せ。

2. 次のような一次元ポテンシャル $V(x)$ 中にある質量 m を持つ粒子を考える。

$$V(x) = \begin{cases} V_0(\cos x + 1) & -2\pi \leq x \leq 2\pi \\ \infty & x < -2\pi, x > 2\pi \end{cases}$$

ただし, V_0 は正とする。

この粒子の x の期待値が $t = 0$ で正であるとき, x の期待値の時間発展を述べよ。ここで, 粒子のエネルギー期待値は V_0 より十分低く, 状態は基底状態と第一励起状態だけを用いて記述できるとする。

専攻 問題 2

長さ L 、半径 b の金属パイプ（抵抗はゼロとする）の中心軸に沿って半径 a 、長さ ℓ の荷電粒子群が速度 v で通過する。荷電粒子群内での線電荷密度（単位長さあたりの電荷量） σ は一様であるとする。金属パイプは、図に示すように、容量 C および抵抗 R を通じて接地されており、抵抗 R の両端間の電位差 V の時間変化をオシロスコープ上で観測するものとする。

1. 荷電粒子群が周期 T で繰り返し金属パイプ内を同一方向に通過するとき、パイプの内壁面に静電誘導される電荷量 $Q(t)$ を求め、横軸を時間軸にとって図示せよ。ただし、 $\ell \gg L$ 、 $T \gg \ell/v$ とする。
2. 金属パイプの外壁につながる容量 C のコンデンサー上には、電荷量 $Q_c(t)$ が現れる。そのとき $Q(t)$ と $Q_c(t)$ および抵抗を流れる電流 $j(t)$ との関係式を求めよ。また、電圧 $V(t)$ の満たすべき微分方程式を求めよ。
3. 誘導電荷量 $Q(t)$ および電圧 $V(t)$ を次のようにスペクトル分解するとき、電圧 $V(t)$ のスペクトル成分 $\hat{V}(\omega)$ を、設問 (2) の $V(t)$ の式を用いて $\hat{Q}(\omega)$ の関数として求めよ。角周波数 ω に対する $\hat{V}(\omega)$ の絶対値 $|\hat{V}(\omega)|$ の概略図を、 $\omega = 0$ 近傍に注目して描け。

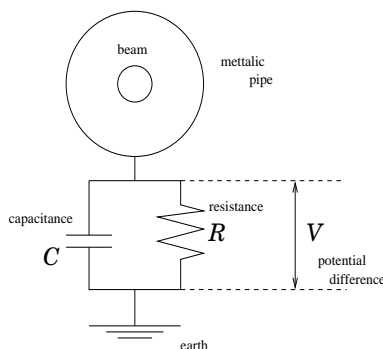
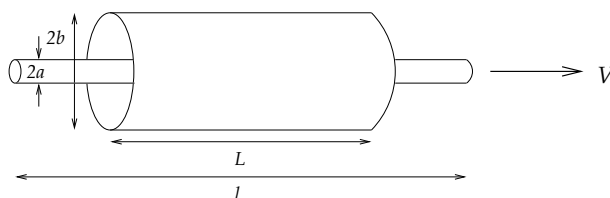
$$Q(t) = \int_0^\infty \hat{Q}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad V(t) = \int_0^\infty \hat{V}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

4. 設問 2 において求めた $V(t)$ の微分方程式の解を求め、以下の場合にオシロスコープ（入力インピーダンスは $1\text{M}\Omega$ とする）上で観測される電圧波形の概略を図示せよ。

$$R = 100\text{k}\Omega, \quad C = 1 \times 10^{-9}\text{Farad}, \quad \ell = 30\text{m}, \quad L = 0.3\text{m}, \quad v = 3 \times 10^7\text{m/sec}$$

$$\text{長さ } \ell \text{ に含まれる荷電粒子数} : N = 1 \times 10^{10} \text{ 個, 粒子の電荷} : e = 1.6 \times 10^{-19} \text{Coulomb}$$

また、抵抗 R を 50Ω とした場合はどのような波形となるか。



専攻 問題 3

面積 $S = L_x \times L_y$ の平面上は自由に動けるが、面に垂直な方向には動けない電子の系（2次元電子系）を考える。 L_x, L_y は、それぞれ平面の x 方向、 y 方向の長さであり、巨視的な大きさであるとする。また、電子間の相互作用は無視できるものとする。電子の質量を m 、電子密度を n 、ボルツマン定数を k_B 、プランク定数を $2\pi\hbar$ 、絶対温度を T とする。このとき、以下の設問に答えよ。

1. 周期的境界条件を用いて、1 個の電子に対する固有状態、固有エネルギーを求めよ。
2. 状態密度 $\rho(E)$ は $dN(E)/dE$ で定義される。 $\rho(E)$ および化学ポテンシャル μ を用いて、有限温度での全電子数を与える式をしるせ。この式のここでの状態密度の表式を代入して、 μ を n および T の関数として求めよ。また、 E_F と T の関数としても表してみよ。
3. $k_B T \ll E_F$ のときの比熱の最重要項を求めよ。このとき、必要ならば次の公式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{df}{dx} dx = -\frac{\pi^2}{3}, \quad \text{ここで、} f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

である。

4. 電子の状態密度が $E_F - \Delta E \leq E \leq E_F + \Delta E$ で $\rho(E) = |E - E_F|^\alpha$ である系を考える。ここで、 $\alpha > -1$ である。このとき十分低温 ($k_B T \ll \Delta E$) での比熱が温度の関数としてどのような振る舞いをするか調べよ。

専攻 問題 4

図 1 は粉末固体試料からの X 線の回折像を撮影するための実験装置を、実際の装置の大きさを無視して、その概略を定性的に理解できるように、概念的に描いたものである。この装置を用いて、単純立方格子を持つ粉末結晶試料からの X 線の回折像を撮影することを試みる。図 2 は、カメラの中での X 線の入射方向、X 線の回折方向、写真フィルム、回折像の位置の間の関係を示したものである。 R は試料から写真フィルムまでの距離で 6.0cm、 S は、写真フィルム上で、ビームストッパーの中心から回折像までの距離である。

この実験に関し次の設問に答えよ。設問 1 では、A から G の部分に該当する言葉または文章を書け。但し、X 線の波長は 1.54\AA である。また、必要とあれば、末尾の表 1 を用いよ。

1. 撮影を始める前に、試料を試料台にのせて固定する。次に、実験室の配電板のスイッチを入れる。X 線管を (A) するために水を流してから、X 線発生装置の電源のスイッチをいれ、X 線の強度を決めるために、X 線管の (B) と (C) を設定する。次に、X 線管のシャッターを開けて、ビームストッパーの窓から内蔵されている (D) を見て、(E) を通って細い X 線ビームが、きちんと入射していることを確かめる。もしも (D) が (F) なら、カメラ支持台を動かして、カメラの位置を調整する。カメラ位置の調整が終わったら、ひとまず (G) を切り、カメラをカメラ支持台からはずし、写真フィルムをカメラに入れて、カメラ支持台に固定する。そして再び (G) を出して、回折像を撮影する。
2. 解析の対象とすることができるような回折像の撮影が一回の試行で成功するとは限らない。考えられる失敗の原因を二つあげよ。
3. フィルムに記録される回折像の図を定性的に描け（回折像の形状が定性的にわかればよい）。この回折像は通常、何と呼ばれるか。
4. 現像された写真フィルム上で中心にもっとも近い回折像に対する S の値として 3.3cm という値が得られた。これより、この結晶の格子定数を求めよ。
5. 上の試料において、 $S = 5.9\text{cm}$ の位置にも回折像が認められた。これはどの結晶面からの回折像か。結晶面の指数で示せ。

表 1

$\sin 13.5^\circ = 0.233$	$27.0^\circ = 0.471\text{rad}$
$\sin 15.8^\circ = 0.273$	$31.5^\circ = 0.550\text{rad}$
$\sin 20.6^\circ = 0.352$	$41.2^\circ = 0.719\text{rad}$
$\sin 25.4^\circ = 0.429$	$50.8^\circ = 0.886\text{rad}$
$\sin 28.2^\circ = 0.473$	$56.4^\circ = 0.983\text{rad}$
$\sin 30.3^\circ = 0.505$	$60.6^\circ = 1.058\text{rad}$
$\sin 32.7^\circ = 0.540$	$65.4^\circ = 1.141\text{rad}$

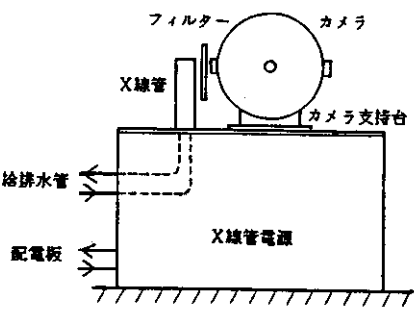


図 1

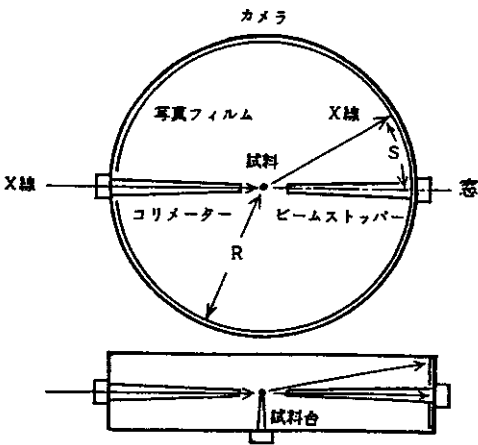


図 2

専攻 問題 5

面積 S の 2 次元空間を運動する 2 個の電子が短距離間の引力ポテンシャル $-V_0\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ (V_0 は正の定数, $\delta(\vec{r})$ は 2 次元空間でのディラックのデルタ関数, \vec{r}_1, \vec{r}_2 は電子の座標) によって相互作用している。この時, 2 個の電子のスピンの向きが逆向きであれば, 束縛状態が出現する。重心は静止しているとして, 次の順序で束縛エネルギーを求めよ。この束縛エネルギーはシュレディンガー方程式

$$\left[\frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - V_0\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right] \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \varepsilon\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad \dots (1)$$

の最低固有値により決定される。(m は電子の質量, \vec{p}_1, \vec{p}_2 は運動量)

1. 2 個の電子のスピンの向きが逆向きの場合, 空間部分の波動関数 $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ は \vec{r}_1 と \vec{r}_2 の入れ換えに関してどのような性質を持つか説明せよ。2 個の電子のスピンの向きが同じ向きの場合の $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ はどうなるか。また, このとき引力ポテンシャルは $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ にどのような影響を及ぼすか。

2. $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ をフーリエ展開すると波数 \vec{k} に関して偶対称である関数 $g(\vec{k})$ を用いて

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} g(\vec{k}) \quad \dots (2)$$

と書けることを示せ。

3. シュレディンガー方程式を $g(\vec{k})$ を用いて表現すると, 次式が得られることを示せ。

$$\left[2\varepsilon(\vec{k})g(\vec{k}) - V_0 \frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} g(\vec{k} - \vec{q}) \right] = \varepsilon g(\vec{k}) \quad \dots (3)$$

ここで, $\varepsilon(\vec{k}) = \hbar^2 k^2 / 2m$ であり, $\delta(\vec{r}) = \frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$ に注意する。

4. (3) 式を解くために, $\sum_{\vec{q}} g(\vec{k} - \vec{q})$ は k に依存しないことに注意し, $\frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} g(\vec{k} - \vec{q}) = C$ と書く。この定数 C を用いると, (3) は $g(\vec{k})$ について解けて

$$g(\vec{k}) = \frac{V_0 C}{2\varepsilon(\vec{k}) - \varepsilon}$$

となり, ε を決定する方程式が次式で与えられることを示せ。

$$\frac{V_0}{S} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\varepsilon(\vec{k}) - \varepsilon} = 1 \quad \dots (4)$$

5. (4) の左辺を, \vec{k} に関する積分に書き直す。このとき, \vec{k} についての積分の領域が $\varepsilon(\vec{k}) \leq \varepsilon_0$ (ε_0 は適当な正のエネルギー) であるとして ε を求めよ。(4) を満たす ε は負となることを確認せよ。特に, $mV_0/2\pi\hbar^2 \ll 1$ の場合, 束縛エネルギー $E = -\varepsilon$ は

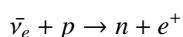
$$E = 2\varepsilon_0 \exp \left[-\frac{4\pi\hbar^2}{mV_0} \right]$$

で与えられることを示せ。

専攻 問題 6

進化した星の中心部には重元素からなる中心核が形成される。特に重い星の場合，この中心核は重力崩壊を起こし重力崩壊型超新星爆発を起こす。このとき，解放される重力エネルギーは中心核を暖め，最終的に熱的ニュートリノとして外部に放出される。

1. 質量 $M = 3.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ の中心核が，重力崩壊に伴いその半径が $R_1 = 10^6 \text{ m}$ から $R_2 = 10^4 \text{ m}$ に収縮するとする。このときに放出される重力エネルギー ΔU を求めよ（数式だけでよい）。ただし，中心核内部の物質密度は一定であると仮定し，重力定数を G とせよ。
2. 超新星爆発が銀河中心（地球からの距離は $L = 3 \times 10^{20} \text{ m}$ ）で起こったとして，地球上で単位面積あたりを通過するニュートリノの数 n_ν を数式で表せ。設問 1 で得られた重力エネルギー ΔU がすべてニュートリノとして等方的に放出されるとし，ニュートリノの平均エネルギーを \bar{E}_ν とする。
3. 放出された全ニュートリノ数の $1/6$ は反電子ニュートリノ $\bar{\nu}_e$ であり，検出器内で以下の反応により $\bar{\nu}_e$ が検出されるとする。



質量 $M_D = 3 \times 10^6 \text{ kg}$ の巨大な検出器により検出される事象の数を数式で表し，有効数字 1 桁で値を求めよ。ただし，単位面積あたり n_ν 個のニュートリノが通過したとし，上記の反応の断面積を $\sigma = 10^{-46} \text{ m}^2$ とする。また，検出器内の陽子含有率（質量比）は $1/2$ であり，ニュートリノの平均エネルギーを $\bar{E}_\nu = 10 \text{ MeV}$ とする。

4. 観測されたニュートリノ事象の時間幅は Δt ，エネルギーの分布は E_{\min} から E_{\max} にわたったとする。全てのニュートリノが同時に放出されたと仮定することにより，ニュートリノ質量の上限値が与えられる。この上限値を求めよ。

重力定数	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
アボガドロ数	$N_A = 6.02 \times 10^{23}$
エネルギー換算	$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$

専攻 問題 7

1. タンパク質の階層構造を示すのに、一次構造、二次構造、超二次構造、三次構造、四次構造という述語が使われている。それぞれの述語がタンパク質のどのようなレベルの構造をしめすかを簡単に述べよ。(一述語あたり二行以内)。
2. タンパク質の二次構造は、ポリペプチド主鎖の二つの二面角 ϕ ($C'-N-C-C'$) と ψ ($N-C-C'-N$) のみで表すことができる。その理由を述べよ。
3. 化学結合したホモポリペプチドであっても、 α -らせんや β -構造のような立体構造を示すことがある。しかし、ホモポリペプチドは、天然タンパク質が持つ、より高次の立体構造をとることはない。これらの事実より、タンパク質の二次構造を安定化する相互作用と、より高次の立体構造を安定化する相互作用との間にどのような違いがあると考えられるか。十行以内で述べよ。
4. タンパク質の天然構造は、そのアミノ酸配列 (遺伝情報) により一意的に決定され则认为られている。このような考えの根拠になっている既知の実験事実について解説せよ。また、アミノ酸配列より天然構造へと至る構造形成の仕組みを明らかにするには、どのような研究が必要とされるか。それぞれ 10 行以内で述べよ。

専攻 問題 1 解答

1. (i) $x \approx 0$ で

$$\begin{aligned} V(x) &\approx -V_0(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots) \\ &\approx -V_0(1 - \frac{x^2}{2}) \end{aligned} \quad \cdots (1)$$

と調和近似できたとする。この時 Schrödinger eq. は、

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi + \left(E + V_0 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi &= 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} \psi + \left\{ \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2} - \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 x^2 \right\} \psi &= 0 \quad (V_0 = m\omega^2 \text{とした}) \end{aligned} \quad \cdots (2)$$

$x = \alpha X$ の変数変換を考えると

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2}{dX^2}, \quad x^2 = (\alpha X)^2$$

より、

$$\alpha^4 = \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^2, \quad \lambda = \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2} \alpha^2 = \frac{2(E + V_0)}{\hbar\omega} \quad \cdots (3)$$

とすると式 (2) は

$$\frac{d^2}{dX^2} \psi + (\lambda - X^2) \psi = 0 \quad \cdots (4)$$

となる。

ここで $u = e^{\pm \frac{X^2}{2}}$ は $u'' + (\mp 1 - X^2)u = 0$ をみたし、これは $X \rightarrow \pm\infty$ で式 (4) と一致するので式 (4) の解は近似の効く範囲で $e^{\pm \frac{X^2}{2}}$ に漸近する解を持つ。波動関数の収束からこのうち $e^{-\frac{X^2}{2}}$ が許される。式 (4) の一般解を求めるために、

$$\psi(X) = e^{-\frac{X^2}{2}} \varphi(X)$$

と置いて式 (4) に代入すると、

$$\frac{d^2}{dX^2} \varphi - 2X \frac{d\varphi}{dX} + (\lambda - 1) \varphi = 0 \quad \cdots (5)$$

となる。この方程式の解は $(\lambda - 1) = 2n(n = 0, 1, 2, \cdots)$ のときのみ $X \rightarrow \infty$ で $e^{-\frac{X^2}{2}}$ をかけて収束する (そうでないときは、 $e^{-\frac{X^2}{2}}$ をかけても発散する)。よって、

$$\lambda = 2n + 1 (n = 0, 1, 2, \cdots) \quad \cdots (6)$$

式 (3) からこれは

$$E = E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega - V_0 \quad \cdots (7)$$

一方、式 (7) に対する固有関数は式 (6) をみたすとき式 (5) の解が n 次 Hermite 多項式になることから、規格化定数 N を用いて

$$\psi_n(X) = N e^{-\frac{X^2}{2}} H_n(X) \quad \cdots (8)$$

規格化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ より

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} N^2 e^{-X^2} H_n(X)^2 \alpha dX = \alpha N^2 \sqrt{\pi} 2^n n!$$

$$\text{よって } N = (\alpha \sqrt{\pi} 2^n n!)^{-\frac{1}{2}} = \left\{ \sqrt{\frac{\pi \hbar}{m\omega}} 2^n n! \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{よって } \psi_n(x) = \left\{ \sqrt{\frac{\pi \hbar}{m\omega}} 2^n n! \right\}^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 \right] H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)$$

ただしこの調和近似が良いのは

$$x \sim 0 \iff E_n \sim -V_0 \iff \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \ll V_0$$

(ii) 摂動項

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= -V_0 \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \right) \simeq -\frac{V_0}{24} x^4 \\ \Delta E_n &= \langle n | \Delta V(x) | n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} N^2 e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} H_n^2 \left(\frac{x}{\alpha} \right) \left(-\frac{V_0}{24} x^4 \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} N^2 e^{-X^2} H_n^2(X) \left(-\frac{V_0}{24} \alpha^4 X^4 \right) \alpha dX \\ &= -\frac{V_0}{24} N^2 \alpha^5 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} H_n^2(X) X^4 dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} H_n^2(X) X^4 dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} (X H_n(X))^2 X^2 dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} \left[\frac{1}{2} H_{n+1} + n H_{n-1} \right]^2 X^2 dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} \left[\frac{1}{4} (X H_{n+1})^2 + n (X H_{n+1})(X H_{n-1}) + n^2 (X H_{n-1})^2 \right] dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} \left[\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} H_{n+2} + (n+1) H_n \right\}^2 + n \left\{ \frac{1}{2} H_{n+2} + (n+1) H_n \right\} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left\{ \frac{1}{2} H_n + (n-1) H_{n-2} \right\} + n^2 \left\{ \frac{1}{2} H_n + (n-1) H_{n-2} \right\}^2 \right] dX \end{aligned}$$

ここで H_n の直交性から積分すると $[\dots]$ 中のクロスタームは消えるので

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} \left[\frac{1}{4} \frac{1}{4} H_{n+2}^2 + \left\{ \frac{1}{4} (n+1)^2 + n(n+1) \frac{1}{2} + n^2 \frac{1}{4} \right\} H_n^2 + n^2 (n-1)^2 H_{n-2}^2 \right] dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} \left[\frac{1}{16} H_{n+2}^2 + \frac{(2n+1)^2}{4} H_n^2 + n^2 (n-1)^2 H_{n-2}^2 \right] dX \\ &= \frac{1}{16} \sqrt{\pi} 2^{n+2} (n+2)! + \frac{(2n+1)^2}{4} \sqrt{\pi} 2^n n! + n^2 (n-1)^2 \sqrt{\pi} 2^{n-2} (n-2)! \\ &= \sqrt{\pi} 2^n n! \left\{ \frac{(n+1)(n+2)}{4} + \frac{(2n+1)^2}{4} + \frac{n(n-1)}{4} \right\} \\ &= \sqrt{\pi} 2^n n! \frac{6n^2 + 6n + 3}{4} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= \langle n | \Delta V(x) | n \rangle = -\frac{V_0}{24} N^2 \alpha^5 \sqrt{\pi} 2^n n! \frac{6n^2 + 6n + 3}{4} \\ &= -\frac{V_0}{24} \frac{\alpha^5 \sqrt{\pi} 2^n n!}{\alpha \sqrt{\pi} 2^n n!} \frac{6n^2 + 6n + 3}{4} \\ &= -\frac{V_0}{32} \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^2 (2n^2 + 2n + 1) \\ &= -\frac{\hbar^2}{32m} (2n^2 + 2n + 1) \quad (V_0 = m\omega^2) \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} V(x) &= -V_0 \cos x - eEx \\ &= -V_0 \left(1 + \frac{eE}{V_0} x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \dots \right) \\ &= -V_0 \left(1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{eE}{V_0} \right)^2 + \frac{e^2 E^2}{2V_0^2} + \frac{1}{24} x^4 - \dots \right) \end{aligned}$$

これが調和近似できるためには $\left(x - \frac{eE}{V_0}\right)^2$ の項の x^2 からのずれが

$$\frac{eE}{V_0} \ll 1$$

となれば良い。この時エネルギー固有値は $\frac{e^2 E^2}{2V_0^2}$ の項のずれの効果で、

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega - V_0 - \frac{e^2 E^2}{2V_0}$$

2. 系は ground state と 1st excited state だけで記述される。それぞれの状態のエネルギー固有関数とエネルギー固有値は求まっているとする。

エネルギー 波動関数

ground E_0 $\psi_0(x)$

1st excited E_1 $\psi_1(x)$

一般に ground state と 1st excited state のパリティはそれぞれ正と負である。

(注) 正確には例えば ψ_0 は中央がへこんでいるかも知れないがここで問題なのはパリティだけである。

ここで $\psi_0(x), \psi_1(x)$ の時間発展は Schrödinger eq.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_n(x, t) = E_n \psi_n(x, t) \quad (n = 0, 1)$$

で決まるので、

$$\psi_0(x, t) = \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right] \psi_0(x), \quad \psi_1(x, t) = \exp\left[-\frac{iE_1 t}{\hbar}\right] \psi_1(x)$$

となる。したがって

$$\psi(x, t) = C_0 \psi_0(x, t) + C_1 \psi_1(x, t) = \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right] \left\{ C_0 \psi_0(x) + C_1 \exp\left[\frac{-i(E_1 - E_0)t}{\hbar}\right] \psi_1(x) \right\}$$

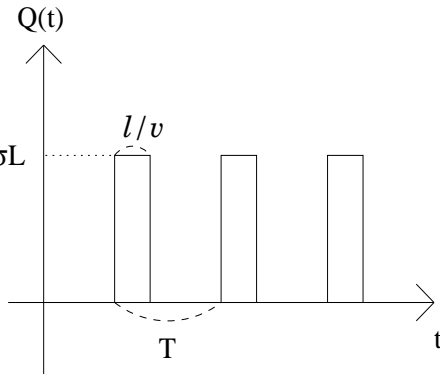
よって、パリティを考慮すれば、

$$\psi(x, t + \frac{\pi\hbar}{E_1 - E_0}) = \psi(-x, t), \quad \psi(x, t + \frac{2\pi\hbar}{E_1 - E_0}) = \psi(x, t)$$

よって、粒子は角振動数 $\omega = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}$ で $x > 0$ と $x < 0$ との間を行き来する。

専攻 問題 2 解答

1. この問いに厳密に答えるのは非常に難しい。そこで単に円筒形コンデンサーの問題として考えれば十分と思われる（この仮定は、回路の緩和時間 RC が、粒子群がパイプを横切る時間 L/v に対して十分長ければ妥当である）。 σL 粒子群がパイプ内にある時、パイプ内壁に静電誘導される電荷量は $-\sigma L$ である。そして、粒子群がパイプ内を完全に横切るのにかかる時間は $(L+\ell)/v \simeq \ell/v$ である。従って $Q(t)$ の時間変化は右図のようになる。



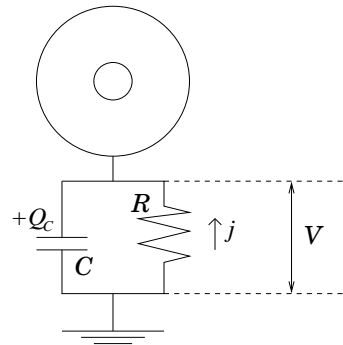
2. 図のように Q_c と j の符号を定める。すると、

$$\frac{d}{dt}(Q(t) + Q_c(t)) = j(t) \quad \dots (1)$$

$$V(t) = -Rj(t) = \frac{1}{C}Q_c(t) \quad \dots (2)$$

がなり立つ。(2) を用いて (1) から j, Q_c を消去すると、

$$\frac{dV(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V(t) = -\frac{1}{C}\frac{dQ(t)}{dt} \quad \dots (3)$$



となる。

3. 問題文では積分の下限が 0 になっている。この理由が私には良く分からない。問題文のままでは $Q(t)$ が実数であることを保証できないように思うのだが...

以下ではとりあえず通常のフーリエ変換を用いて設問に答えることにする（今繰り返しの周期 T は十分に長いとしているので、フーリエ級数でもフーリエ変換でも同じ結果になる）

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(\omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad Q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad \dots (4)$$

式 (4) を式 (3) に代入し、各周波数成分毎にまとめると

$$\begin{aligned} i\omega \tilde{V}(\omega) + \frac{1}{RC} \tilde{V}(\omega) &= -\frac{i\omega}{C} \tilde{Q}(\omega) \\ \therefore \tilde{V}(\omega) &= -\frac{i\omega}{\frac{1}{RC} + i\omega} \frac{\tilde{Q}(\omega)}{C} \end{aligned} \quad \dots (5)$$

となる。今 $Q(t)$ を $0 \leq t \leq \ell/v$ で $-\sigma L$ 、それ以外で 0 とすると $\tilde{Q}(\omega)$ は、

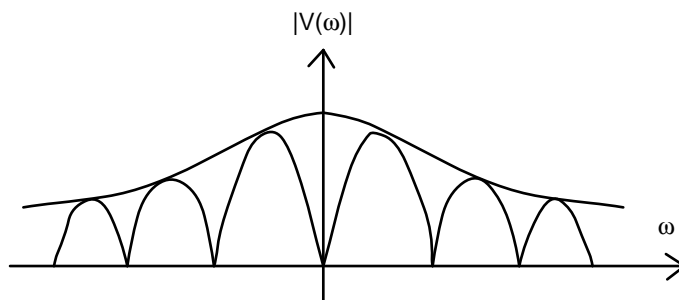
$$\tilde{Q}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\ell/v} (-\sigma L)e^{-i\omega t} dt = \frac{\sigma L}{2\pi} \frac{e^{-i\omega \ell/v} - 1}{i\omega}$$

となる。したがって $\tilde{V}(\omega)$ は、

$$\tilde{V}(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\omega \ell/v} - 1}{\frac{1}{RC} + i\omega} \frac{\sigma L}{C} \quad \dots (6)$$

$$\text{よって} \quad |\tilde{V}(\omega)| = \frac{1}{\pi} \left| \frac{\sigma L}{C} \right| \frac{\left| \sin \frac{\omega \ell}{2v} \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC} \right)^2 + \omega^2}} \sim \frac{RC}{\pi} \left| \frac{\sigma L}{C} \right| \left| \frac{\omega \ell}{2v} \right| \quad (\text{ただし、}\omega \simeq 0)$$

となる。 $|\tilde{V}(\omega)|$ の概略図は次の通りになる。



4. 式 (6) を積分して $V(t)$ を求める ($V(t)$ を求めるだけなら、式 (3) を定数変化法で解くこともできる)。

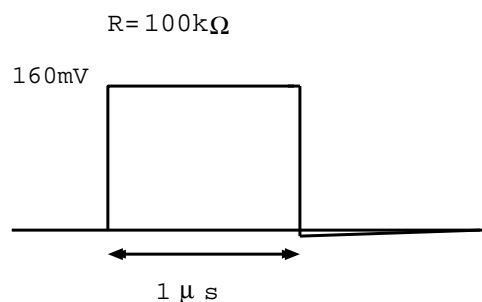
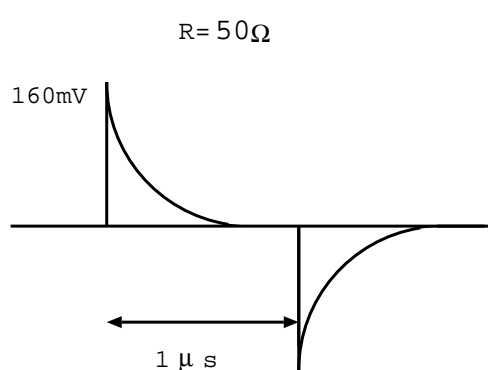
$$\begin{aligned}
 V(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\sigma L}{C} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-\ell/v)}}{\frac{1}{RC} + i\omega} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\frac{1}{RC} + i\omega} d\omega \right\} \\
 &= \begin{cases} 0, & (t < 0) \\ \frac{\sigma L}{C} e^{-\frac{t}{RC}}, & (0 < t < \ell/v) \\ \frac{\sigma L}{C} e^{-\frac{t}{RC}} (-e^{\frac{\ell/v}{RC}} + 1), & (t > \ell/v) \end{cases}
 \end{aligned}$$

問題文で与えられた値を代入すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma L}{C} &= \frac{1}{C} \frac{eN}{\ell} L = 1.6 \times 10^{-2} [\text{V}] \\
 \frac{\ell}{v} &= 10^{-6} [\text{sec}] \\
 RC &= \begin{cases} 10^{-4} [\text{sec}] & (R = 100\text{k}\Omega) \\ 5 \times 10^{-8} [\text{sec}] & (R = 50\Omega) \end{cases}
 \end{aligned}$$

となる。ただしオシロスコープの入力インピーダンスは十分大きいので影響を無視した。

オシロスコープで観測される波形は下図のようになる。



専攻 問題 3 解答

1. 2次元での自由粒子の Schrödinger 方程式は、

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi = E \Psi \quad \dots (1)$$

である。この式を $\Psi = X(x)Y(y)$ と変数分離して解く (1) へ代入すれば、

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \right) = E$$

を得る。ここで、 $X''/X = -k_x^2$, $Y''/Y = -k_y^2$ とおけば、

$$X = A_x e^{ik_x x}, Y = A_y e^{ik_y y}$$

と解が求まる。次に周期的境界条件により k_x, k_y を求めると、 $X(x) = X(x + L_x)$ より $e^{ik_x L_x} = 1$ 、つまり、 $k_x = 2\pi n_x / L_x$ ($n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) が得られ、同様に、 $k_y = 2\pi n_y / L_y$ ($n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) が得られる。

従って、(1) の解は、

$$\Psi = X(x)Y(y) = A e^{2i\pi \left(\frac{n_x}{L_x} x + \frac{n_y}{L_y} y \right)} \quad (A = A_x A_y)$$

と書け、さらに、規格化条件から、 $A = 1/\sqrt{S}$ となる。結局固有ベクトル、固有値はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{\sqrt{S}} e^{2i\pi \left(\frac{n_x}{L_x} x + \frac{n_y}{L_y} y \right)} \\ E &= \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2) = \frac{(2\pi\hbar)^2}{2m} \left\{ \left(\frac{n_x}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y} \right)^2 \right\}, \quad (n_x, n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

となる。

2. あるエネルギー E までの状態数は、 n_x - n_y 面での $E = \text{一定}$ という線内の格子点数に対応する。

いま、 L_x, L_y は十分に大きいとしているので、エネルギー準位の間隔は小さいとできる。そこで、状態数を、軸の長さがそれぞれ $\sqrt{2mEL_x}/\pi\hbar$, $\sqrt{2mEL_y}/\pi\hbar$ の楕円の面積と考えることができる。

従って、

$$N(E) = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2mE} \frac{L_x}{2\pi\hbar} \cdot \sqrt{2mE} \frac{L_y}{2\pi\hbar} = \frac{mS}{\pi\hbar^2} E \quad \dots (2)$$

ここで、因数 2 はスピンの自由度によるものである。

また、 $N(E_F) = nS$ より、

$$\frac{mS}{\pi\hbar^2} E_F = nS \implies E_F = \frac{\pi\hbar^2}{m} n$$

が得られる。

有限温度 T での全電子数 N は、fermi 分布関数 $f(E)$ を用いて、

$$N = \int_0^\infty \rho(E) f(E) dE = \int_0^\infty \rho(E) \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1} dE$$

と書き表せる。

さて、(2) 式より、 $\rho(E)$ は、

$$\rho(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{mS}{\pi\hbar^2}$$

を代入して、

$$N = \frac{mS}{\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{dE}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1} = \frac{mS}{\pi\hbar^2} k_B T \ln \left(e^{\frac{\mu}{k_B T}} + 1 \right) = nS$$

となる。よって、 μ は、 T と n 、 T と E_F を使って、それぞれ

$$\mu = k_B T \ln \left(e^{\frac{\pi\hbar^2}{m} n \frac{1}{k_B T}} - 1 \right) = k_B T \ln \left(e^{\frac{E_F}{k_B T}} - 1 \right) \quad \dots (3)$$

と表せる。

3. 内部エネルギー $U(T)$ は、

$$U(T) = \int_0^\infty E \rho(E) f(E) dE = \frac{mS}{\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{E dE}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1}$$

である。ここで、低温近似 $k_B T \ll E_F$ を使うと、(3) 式より $\mu \simeq E_F$ として良いから、 $\beta \equiv 1/k_B T$ として、

$$U(T) \simeq \frac{mS}{\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{E dE}{e^{\beta(E-E_F)} + 1}$$

と表せる。すると、比熱 $C(T)$ は、

$$C(T) = \frac{\partial U(T)}{\partial T} \simeq -\frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{mS}{\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{E dE}{e^{\beta(E-E_F)} + 1} \right) = \frac{mS}{\pi\hbar^2} \frac{1}{k_B T^2} \int_0^\infty \frac{E(E-E_F) e^{\beta(E-E_F)}}{(e^{\beta(E-E_F)} + 1)^2} dE$$

ここで、 $x \equiv \beta(E-E_F)$ とすると、 $dx = \beta dE$ などより、

$$C(T) = \frac{mS}{\pi\hbar^2} \frac{1}{k_B T^2} \int_{-\beta E_F}^\infty \frac{\left(\frac{x}{\beta} + E_F\right) \frac{x}{\beta} e^x}{(e^x + 1)^2} \frac{dx}{\beta} = \frac{mS}{\pi\hbar^2} \frac{1}{k_B T^2} \int_{-\beta E_F}^\infty \frac{1}{\beta^3} \frac{(x + \beta E_F) x e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

$1/\beta \ll E_F$ 、つまり、 $\beta E_F \gg 1$ より、

$$\simeq \frac{mS}{\pi\hbar^2} \frac{1}{k_B T^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\beta^3} \frac{(x + \beta E_F) x e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

が得られる。

積分を計算する際に、 $(x + \beta E_F)$ という部分に注目すると、残った部分が奇関数になっているから、第二項から来る積分は消える。また、

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) = \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2}$$

であるから、結局、

$$C(T) \simeq -\frac{mS}{\pi\hbar^2} \frac{1}{k_B T^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\beta^3} x^2 \frac{d}{dx} f(x) dx = -\frac{mS}{\pi\hbar^2} \frac{1}{k_B T^2} (k_B T)^3 \left(-\frac{\pi^2}{3} \right) = \frac{mS \pi k_B^2}{3\hbar^2} T$$

となる。

4. 状態密度の仮定式 $\rho(E) = |E - E_F|^\alpha$, $\alpha > -1$ (for $E_F - \Delta E \leq E \leq E_F + \Delta E$) を代入すると、内部エネルギーとして、

$$U(T) = \int_{E_F - \Delta E}^{E_F + \Delta E} E |E - E_F|^\alpha \frac{dE}{e^{\beta(E-\mu)} + 1}$$

を考えればよく、 $k_B T \ll E_F, \Delta E$ で低温近似をすれば、

$$\begin{aligned} C(T) &\simeq -\frac{1}{k_B T^2} \int_{E_F - \Delta E}^{E_F + \Delta E} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(E |E - E_F|^\alpha \frac{1}{e^{\beta(E-E_F)} + 1} \right) dE \\ &= \frac{1}{k_B T^2} \int_{E_F - \Delta E}^{E_F + \Delta E} E |E - E_F|^\alpha \frac{(E - E_F) e^{\beta(E-E_F)}}{(e^{\beta(E-E_F)} + 1)^2} dE \end{aligned}$$

$x \equiv \beta(E - E_F)$ とすると、

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{k_B T^2} \int_{-\beta \Delta E}^{\beta \Delta E} \left(\frac{x}{\beta} + E_F \right) \left| \frac{x}{\beta} \right|^\alpha \frac{\frac{x}{\beta} e^x}{(e^x + 1)^2} \frac{dx}{\beta} \\
 &= \frac{1}{k_B T^2} \cdot \beta^{-\alpha-3} \int_{-\infty}^{\infty} (x + \beta E_F) |x|^\alpha \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} dx \\
 &= \frac{1}{k_B T^2} \beta^{-\alpha-3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^\alpha x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx \quad (\text{偶奇性より。4 番を参照}) \\
 &\propto T^{\alpha+1}
 \end{aligned}$$

という結果を得る。

専攻 問題 4 解答

1. A 冷却
 B 電圧
 C 電流（電圧の設定が先である）
 D 蛍光板（裸眼で見る人がたまにいるが危険である）
 E 試料
 F 光っていない
 G X 線
2. 1.X 線が、試料の中心を通っていないため像がずれる、またはない。
 2.X 線の光量を間違う。または現像ミス。
3. デバイリング



4. $S = 3.3\text{cm}$ であるから、

$$2\theta = \frac{3.3\text{cm}}{6\text{cm}} = 0.55[\text{rad}]$$

$$\theta = 15.8^\circ$$

一方、 $S = 3.3\text{cm}$ は最も中心に近い像であるから $n = 1$ 。よって

$$d = 2.82[\text{\AA}] = a_0$$

5. $S = 5.9\text{cm}$ であるから、入射角は

$$2\theta = \frac{5.9\text{cm}}{6\text{cm}} = 0.983[\text{rad}]$$

$$\theta = 28.2^\circ$$

これと $2d \sin \theta = \lambda$ より

$$d = 1.63[\text{\AA}]$$

となる。ここで面指数 (h, k, l) に対して

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2}(h^2 + k^2 + l^2)$$

の関係があるから、代入すると

$$h^2 + k^2 + l^2 = 3$$

ゆえに

$$(h, k, l) = (1, 1, 1)$$

専攻 問題 5 解答

1. 2つの電子のスピンが逆向きのとき、つまり状態ケットのスピン成分が反対称のときは、

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

逆に、状態ケットのスピン成分が対称（スピンが同じ向き）ならば、

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

となる。

$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ が反対称状態のとき $r_1 = r_2$ なら $\psi = 0$ より

$$\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

になり、このとき Schrödinger 方程式は自由粒子の場合と同じで、束縛状態は出現しない。

$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ が対称状態のとき、結合エネルギーの期待値は

$$\int \psi^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \{-V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d^2 r_1 d^2 r_2 = -V_0 \int |\psi(\vec{r}, \vec{r})|^2 d^2 r < 0$$

となりエネルギーが下がる。これにより束縛状態が出現する。

2. 重心は静止しているから

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0 \quad \dots (1)$$

である。ここで重心座標 \vec{R} 、相対座標 \vec{r} を

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2), \quad \vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

とおき

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv \psi(\vec{R}, \vec{r})$$

とすると (1) 式は、(1) 式を使って、

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} \right) \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \psi(\vec{R}, \vec{r}) = 0$$

となり、 $\psi(\vec{R}, \vec{r})$ は \vec{r} のみの関数であることがわかる。したがって

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} g(\vec{k})$$

のように展開することができる。

束縛状態では $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ だから

$$\sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} g(\vec{k}) = \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} g(-\vec{k})$$

となり、 $g(\vec{k}) = g(-\vec{k})$ である。すなわち $g(\vec{k})$ は偶対称である。

$$\begin{aligned}
3. \quad & \vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2 = \frac{1}{2} \{ (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 \} \\
& \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} \right) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \\
& \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} \right) = \frac{2\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{r}}
\end{aligned}$$

を用いて Schrödinger 方程式を書き換える。 $\psi(\vec{R}, \vec{r})$ は \vec{R} に依存しないので

$$\left[\frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - V_0 \delta(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{m} \frac{d^2}{d\vec{r}^2} - V_0 \delta(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = \varepsilon \psi(\vec{r})$$

となる。この式に

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} g(\vec{k}), \quad \delta(\vec{r}) = \frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\vec{r}}$$

を代入すると

$$\sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{m} e^{i\vec{k}\vec{r}} g(\vec{k}) - \frac{V_0}{S} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{q}} e^{i(\vec{k}+\vec{q})\vec{r}} g(\vec{k}) = \varepsilon \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} g(\vec{k})$$

となり、 $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ の成分に着目すれば

$$\left[\frac{\hbar^2 k^2}{m} g(\vec{k}) - \frac{V_0}{S} \sum_{\vec{q}} g(\vec{k} - \vec{q}) \right] = \varepsilon g(\vec{k}) \quad \dots (2)$$

を得る。

$$4. \quad \frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} g(\vec{k} - \vec{q}) = C$$

を (2) に代入すれば直ちに

$$g(\vec{k}) = \frac{V_0 C}{2\varepsilon(\vec{k}) - \varepsilon} \quad \dots (3)$$

を得る。そして

$$\frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} g(\vec{k} - \vec{q}) = C$$

に $\vec{k} = 0$ を代入し $g(\vec{q}) = g(-\vec{q})$ を用い、添字を \vec{q} から \vec{k} に変えると

$$\frac{1}{S} \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) = C \quad \dots (4)$$

となり (3) を (4) に代入すると

$$\frac{V_0}{S} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\varepsilon(\vec{k}) - \varepsilon} = 1$$

となる。

$$5. \quad \frac{V_0}{S} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} - \varepsilon} = 1$$

これを積分に直すと

$$\frac{S}{4\pi^2} \frac{V_0}{S} \int_0^{k_0} \frac{2\pi k}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} - \varepsilon} dk = \frac{mV_0}{4\pi\hbar^2} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{dE}{E - \frac{\varepsilon}{2}} = 1$$

となる。 $\varepsilon > 0$ のときは積分が発散するので $\varepsilon < 0$ でなければならない。このとき

$$\frac{mV_0}{4\pi\hbar^2} \log\left(1 - \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) = 1$$

$$\varepsilon = \frac{2\varepsilon_0}{1 - \exp\left(-\frac{4\pi\hbar^2}{mV_0}\right)} < 0$$

特に $\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \ll 1$ の場合、分母の 1 が無視できて

$$E = 2\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{4\pi\hbar^2}{mV_0}\right)$$

となる。

専攻 問題 6 解答

1. 解き方 1 無限遠から物質を少しずつ持ってきて球を組み立てることを考えると、密度一様なので半径 r の球の質量は $M(r) = M \times \left(\frac{r}{R}\right)^3$ だから、そのすぐ外側でのポテンシャルは $-\frac{GM(r)}{r}$ なので、 r から $r + dr$ までの球殻を作る際に出るエネルギー $dU(r)$ は、

$$dU(r) = -\frac{GM(r)}{r}dM(r) = -\frac{G}{r} \cdot M \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cdot M \cdot \frac{3r^2 dr}{R^3} = -\frac{3GM^2 r^4}{R^6} dr$$

よって、

$$U(R) = \int_0^R dU(r) = -\frac{3GM^2}{5R}$$

$$\therefore \Delta U = U(R_1) - U(R_2) = \frac{3GM^2}{5} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

解き方 2 重力エネルギーは $(1/2) \int \rho \phi dV$ である。 $1/2$ は 2 粒子間のポテンシャルを 2 重に数えるから必要である。また、ポテンシャル ϕ は無限遠でゼロになるように原点を定める。さて ϕ はがんばって計算すると

$$-GM/r \quad (r > R) \qquad GM/R(r^2/2R^2 - 3/2) \quad (r < R)$$

となるので、

$$U(R) = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{GM}{R} \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} \right) dM(r) = \left(\frac{3}{20} - \frac{3}{4} \right) \frac{GM^2}{R} = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

2. $4\pi L^2 n_\nu = \frac{\Delta U}{\bar{E}_\nu}$ だから、

$$n_\nu = \frac{\Delta U}{4\pi L^2 \bar{E}_\nu} = \frac{3GM^2}{20\pi L^2 \bar{E}_\nu} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

3. 検出される事象の数が、

$$N = \frac{n_\nu}{6} \sigma N_p$$

で表せると仮定する。但し、 N_p は陽子の数である。陽子 1 モルは水素原子 1 モルとほぼ同じ質量をもつと考えれば、 $M_D = 3 \times 10^6 \text{ kg}$ の測定器に含まれる陽子数は、陽子の含有率（質量比）を考慮して、次のように書くことができる。

$$N_p = \frac{M_D \times 1/2}{1 \times 10^{-3}} \times N_A$$

N_A はアボガドロ数である。 $M = 3 \times 10^{30} \text{ kg}$, $L = 3 \times 10^{20} \text{ m}$, $G = 7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$,

$\bar{E}_\nu = 10 \text{ MeV}$, $R_1 = 10^6 \text{ m}$, $R_2 = 10^4 \text{ m}$ より、

$$n_\nu = 2 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$$

$M_D = 3 \times 10^6 \text{ kg}$, $N_A = 6 \times 10^{23}$ より、

$$N_p = 9 \times 10^{32}$$

この結果を用いて、仮定の妥当性を示す。検出される事象の数が、 $\frac{n_\nu}{6} \sigma N_p$ と書けるのは、

$$\frac{\sigma N_p}{1[\text{m}^2]} \ll 1$$

が成り立っている場合である。実際、

$$\sigma N_p \approx 10^{-46} [\text{m}^2] \cdot 9 \times 10^{32} = 9 \times 10^{-14} [\text{m}^2]$$

となるので、条件を満たしている。よって、

$$N = 3 \times 10^2$$

4. E_{\max}, E_{\min} に対応して添字 1, 2 を用いることにする。

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{v_2} - \frac{L}{v_1} = \frac{L}{c} \left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1} \right) \quad \dots (1)$$

$$E_1 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} \quad \dots (2)$$

$$E_2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} \quad \dots (3)$$

$\beta_1, \beta_2 > 0$ を考慮して、(1) ~ (3) より、

$$\frac{c\Delta t}{L} = \left\{ 1 - \left(\frac{mc^2}{E_2} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} - \left\{ 1 - \left(\frac{mc^2}{E_1} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

ニュートリノの運動が相対論的である $\left(\frac{mc^2}{E} \ll 1 \right)$ として、

$$\frac{c\Delta t}{L} \simeq \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{E_2} \right)^2 \right\} - \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{E_1} \right)^2 \right\} = \frac{(mc^2)^2}{2} \left(\frac{1}{E_2^2} - \frac{1}{E_1^2} \right)$$

$mc^2 > 0$ より、

$$\therefore mc^2 \simeq \left[\left(\frac{2c\Delta t}{L} \right) \left/ \left(\frac{1}{E_2^2} - \frac{1}{E_1^2} \right) \right. \right]^{1/2}$$

[注] 『上限』とは、「ニュートリノが同時に放出された」という仮定による。つまり (1) を立てたことで、上限を求めていることになる。 $\beta^3 \leq 1$ とすることではない。

専攻 問題 7 解答

1. 一次構造 20 種のアミノ酸による配列のこと

二次構造 ペプチド結合部の水素結合によってつくられる構造で α ヘリックスと β シートのこと

超二次構造 α ヘリックスと β シートとランダムコイルの組み合わせによって作られるモチーフ

三次構造 上記の構造をふまえたうえで一本のアミノ酸鎖が最終的にとる立体構造

四次構造 多くの酵素は一本のアミノ酸からつくられるいくつかのサブユニットから成り、そのサブユニットの組合せを四次構造という。

2. タンパク質の backbone をたどると一つのペプチドあたり $C'-N, N-C, C-C$, の 3 つの回転自由度がある。しかし、実際はペプチド結合部すなわち $N-C$ は、 $C=O$ 二重結合と共鳴しており回転できない。そのため自由度が 2 個になる。

3. まず、二次構造が対称構造であることがわかる。すなわちある性質を持った残基が周期的に現れることが (homopolypeptide ではいうまでもなく残基の性質は周期的である) 二次構造を安定化する要因となる。これに対しより高次の構造は基本的に対象とは無関係である。ではより高次に構造は何によって決まるかと言うと、むしろ残基の性質が違ふこと、つまり hydrophilicity や charge の違いが、その要因となっている。また、より高次の構造は二次構造とくらべて、ランダムな状態との chemical energy の差が小さく反応速度が小さいために触媒を必要とする。in situ では、folding enzyme がその役目を果たす。

4. ribonuclease を urea で変性し失活させた後、徐々に urea を除去すると再び活性を取り戻した (C.B. Anfinsen)。この実験を解釈すると、urea によって一次構造は保持しているが高次構造を失っているペプチド鎖が urea の除去により再び高次構造を取り戻したということである。これは in vitro で行なわれた実験であるので folding enzyme などの助けがなくても一次構造のみから高次構造を再生したことになる。

タンパク質の一残基あるいは少数のみ改変し高次構造の変化を見ることによってその部位の構造をつくるために必要な相互作用を知ることができる。すなわち、改変蛋白が構造を失わないならば残基のいかなる違いによるものかを調べることである。また同じことを、異なる生物の同じ機能を持つ蛋白を見比べることによってもできる。