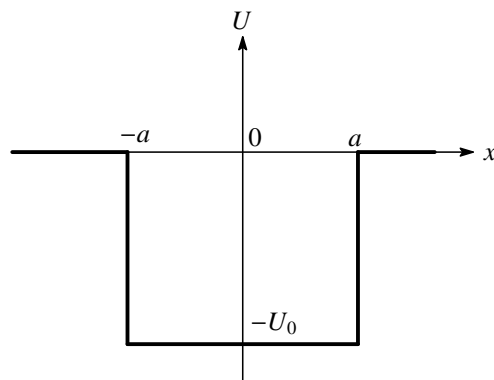


2000 年度 入学試験 物理専門科目

問題 1



図のような 1 次元の井戸型ポテンシャル $U(x)$

$$U(x) = \begin{cases} -U_0 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

の中での質量 m の粒子の束縛状態 (エネルギー $E < 0$) を考える。

1. まず、量子力学の不確定性関係を使ってこの問題を考える。
 - (i) 粒子がポテンシャル U に束縛されていることから、直感的には粒子の位置の不確定性 Δx は a 程度だと考えられる。そこで、 $\Delta x = a$ として粒子の運動量の不確定性 Δp を求めよ。
 - (ii) 運動量の大きさ p は Δp より大きいと考えて、(i) の結果から粒子の束縛状態が存在するためにはポテンシャルの深さ U_0 にどのような条件が必要と思われるか。
2. 実は上で求めた束縛状態が存在する条件は正しくなく、どんなに浅いポテンシャルに対しても束縛状態が存在する。
 - (i) Schrödinger 方程式を使って束縛状態 ($E < 0$) の波動関数 $\psi(x)$ を求めよ。その際、エネルギー E と U_0, a, m の関係式を導け。(波動関数の規格化は考えなくてよい。)
 - (ii) 1(ii) の結果に反してどのような U_0 の値に対しても束縛状態が存在することを示せ。
 - (iii) $U_0 \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$ のときに E を求めよ。
 - (iv) 2(iii) の場合に粒子がポテンシャル井戸の外側にいる確率 $P(|x| > a)$ と内側にいる確率 $P(|x| < a)$ の比 $R = P(|x| > a)/P(|x| < a)$ を求めよ。また、これから 1(ii) の考え方が正しくなかった理由を述べよ。

問題 2

スピンの 1 次元格子上的各点にあり、格子点の数が N (N は偶数) の模型を考察する。そのハミルトニアンは

$$H = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1}$$

とする。ここで周期的境界条件を課し、 σ_{N+1} は σ_1 を意味するものとし、かつ σ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) は ± 1 の値をとるものとする。この模型の各状態は $(\uparrow\downarrow\uparrow\cdots)$ のようなスピンの配置によってあらわされる。

1. この模型の状態数は全部でいくつか。
2. J が正の場合と負の場合について基底状態のスピン配置を書け。
3. 前問の場合、基底状態のエネルギーとその縮重度を求めよ。

以下では J が正の場合のみを考える。

4. 第 1 励起状態のスピン配置を書け。そのエネルギーと縮重度を求めよ。
5. 全てのエネルギー固有値とその縮重度を求めよ。ただし 2 項係数

$${}_N C_M \equiv \frac{N!}{M!(N-M)!}$$

を用いよ。

6. 前問の結果を用いて、この系の分配関数を求めよ。ただし温度は T とし、ボルツマン定数は k_B とする。必要に応じて

$$(1+x)^N = \sum_{M=0}^N {}_N C_M x^M$$

を使ってよい。

7. N が無限大の極限での 1 格子点あたりの自由エネルギーが

$$-k_B T \ln \left[2 \cosh \left(\frac{J}{k_B T} \right) \right]$$

であらわされることを示せ。

8. 前問の結果を用いて、1 格子点あたりのエネルギーとエントロピーを求めよ。高温でのエントロピーの漸近的ふるまいを求めよ。

問題 3

時間、空間座標に依存する電荷分布 $\rho(\mathbf{r}', t')$ と電流分布 $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$ がある。これらによって誘起される電磁ポテンシャルは、ローレンツ条件のもとで、次のように表わせる (以下、MKSA 有理単位系を用いる):

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad \dots (1)$$

ϵ_0 と μ_0 はそれぞれ真空の誘電率と透磁率で、光速は $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ と書ける。また、 t' は $t, \mathbf{r}, \mathbf{r}', c$ で定まる量であり、次の設問で考察する。

1. 電磁波が伝わる時の遅延効果を考慮して、式 (1) の t' を決定せよ。
2. 電荷 e を持つ点粒子の運動を考え、その位置座標を $\mathbf{x}(t')$ とする。このとき、 $\rho(\mathbf{r}', t')$ と $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$ をディラックの関数を用いて表わせ。
3. この点粒子がつくる遠方 ($|\mathbf{r}| = r \gg |\mathbf{x}|$) での電磁ポテンシャルは、点粒子の速度 \mathbf{v} が光速に比べて充分小さい場合には、(1) 式の $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ を $1/r$ で近似して求めることが出来る。この電磁ポテンシャルが、 \mathbf{v}/c の 1 次までの近似で、以下のように表わせることを示せ:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}(t_0)}{c} \right), \quad c\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\mathbf{v}(t_0)}{c}. \quad \dots (2)$$

但し、 $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$, $t_0 = t - r/c$ である。

4. 前問の結果から、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ と磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}$ の遠方での主要項 ($1/r$ に比例する項) が、点粒子の加速度 \mathbf{a} を用いて以下のように表わせることを示せ:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}(t_0)), \quad c\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}(t_0). \quad \dots (3)$$

ここで、ベクトル積の公式 $\mathbf{X} \times (\mathbf{Y} \times \mathbf{Z}) = \mathbf{Y}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Z}) - \mathbf{Z}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})$ を使って良い。

5. (3) 式を用いて以下の設問に答えよ。
 - (i) 点粒子が、図 1 のように、一定の振幅 b と一定の振動数で x 軸上を単振動しているとする。このとき、原点から距離 r だけ離れた球面上 ($r \gg b$ とする) で、点粒子の運動の一周期あたりに、電磁波の強度が最大となる場所はどこか? 理由をつけて答えよ。
 - (ii) 点粒子が、図 2 のように、一定の半径 b と一定の角振動数で xy 平面上を回転運動しているとする。このとき、原点から距離 r だけ離れた球面上 ($r \gg b$ とする) で、点粒子の運動の一周期あたりに、電磁波の強度が最大となる場所はどこか? 理由をつけて答えよ。

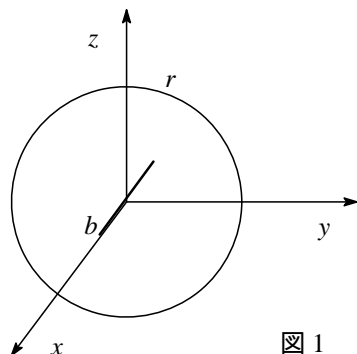


図 1

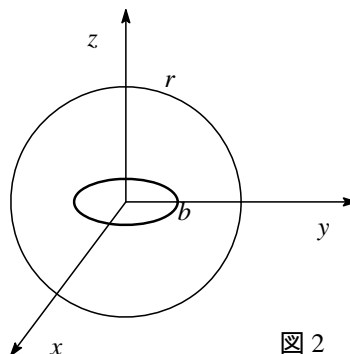


図 2

問題 4

ロケットの等加速度運動を相対論的に考察する。以下では一次元的な運動のみを考え、静止した観測者の系で時刻 t におけるロケットの座標を $x(t)$ と書く。

1. ロケットに固定された時計が示す時間を固有時間 τ と呼ぶ。観測系における時刻 t_1 から t_2 の間の固有時間の経過は光速を c として

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2}$$

で与えられることをローレンツ変換を用いて示せ。ここでローレンツ変換とは、ある座標系 (t, x) とそれに対して x 軸方向に速度 v で運動している座標系 (t', x') の間では次のように定義される。

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ct - \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x$$

$$x' = -\frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ct + \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x$$

2. 相対論的な速度ベクトルおよび加速度ベクトルは

$(u^\mu) = (c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau})$, $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$, $(\mu = 0, 1)$ で記述される。このとき常に

$$u^\mu u_\mu = c^2, \quad u^\mu a_\mu = 0 \quad \dots (1)$$

が成立することを示せ。ただし $u^\mu v_\mu \equiv u^0 v^0 - u^1 v^1$

3. 以下ではロケットの等加速度運動、すなわち運動する物体の静止系において正方向に定数 $g(> 0)$ で加速されている状況を考察する。このときロケットの加速度ベクトルが $a^\mu a_\mu = -g^2$ をみたすことを示せ。またそれと (1) を用いて u^μ に対する次の運動方程式を導け。

$$\frac{du^0(\tau)}{d\tau} = \frac{g}{c} u^1(\tau) \quad \frac{du^1(\tau)}{d\tau} = \frac{g}{c} u^0(\tau) \quad \dots (2)$$

4. 初期条件 $\tau = 0$ で $t = x = \frac{dx}{d\tau} = 0$ という初期条件のもとに運動方程式 (2) を解き、 t, x をロケットの固有時間 τ の関数として求めよ。
5. これから例えば g を地表の重力加速度 ($\approx 10\text{m/秒}^2$) とした場合、地球から銀河の中心まで行くのに (距離約 3 万光年) ロケットの固有時間はどれくらい経過するか。有効数字一桁で答えよ。ただし $\ln(10) \approx 2.3$, $1\text{年} \approx 3.1 \times 10^7$ 秒を用いて良い。
6. 地球からこのロケットを観測するために、信号を光速で送りそれがロケットで反射して返ってくるまでの時間を計測する。時刻 t に送った信号が返ってくるまでの時間間隔を求めよ。特にこの観測が不能になるのはどのような場合か理由とともに考察せよ。

問題 5

雲母薄膜は図 1 に示すように、厚さが一定の段差 Δd からなるステップ構造をしており、その厚さ d_j は場所により異なり、次式で与えられる。

$$d_j = d_0 + j\Delta d \quad \text{但し } j: \text{整数}$$

この薄膜を光の反射率の高い基板上に貼りつけて上方から見ると、上記の異なった厚さ d_j のステップごとに、異なった波長 λ_j の色が見える。

1. このように見える理由を述べ、 λ_j と d_j 、および雲母の屈折率 n との関係を示せ。但し、 n の波長依存性は無視する。

さて、可視光を用いてこのステップの高さを測定するデバイスを考案した。その準備として、まず複屈折について復習する。

水晶のような、光学的に異質な (複屈折性を持つ) 透明光学媒質中を光が伝搬すると、互いに直交した偏光面と異なった屈折率 n_1, n_2 を持つ光 (正常光と異常光) にわかれる。これらの偏光方向をそれぞれ x 軸、 y 軸とし、単色平面波光の伝搬方向を z 軸とする。水晶に入射する直線偏光した波長 λ の単色光電場 E の偏光方向と x 軸のなす角を 45° とする。水晶に入射後の x 軸、 y 軸方向の電場成分は次式であらわされる。

$$\begin{aligned} E_x &= A \cos(k_1 z - \omega t) / \sqrt{2}, & E_y &= A \cos(k_2 z - \omega t) / \sqrt{2} \\ k_1 &= 2\pi n_1 / \lambda, & k_2 &= 2\pi n_2 / \lambda. \end{aligned}$$

ただし、入射位置を $z = 0$ とする。光の伝搬する方向の結晶の厚さが x に依存し、 $D(x)$ で与えられるとし、出射位置における x, y 2 つの偏光方向の電場を次のようにあらわす。

$$\begin{aligned} E_x &= A \cos(k_1 D - \omega t) / \sqrt{2} = A \cos(\Phi(D, t)) / \sqrt{2} \\ E_y &= A \cos(k_2 D - \omega t) / \sqrt{2} = A \cos(\Phi(D, t) + \delta(D)) / \sqrt{2} \end{aligned}$$

2. この時、位相差 $\delta(D)$ を屈折の異方性 $\Delta n = n_2 - n_1$, λ, D などを用いてあらわせ。

デバイスの構造を、図 2 に示す。 x 軸に対して、 $+45^\circ$ 方向 (図 2 の P_A 方向) の偏光成分のみを通過する偏光板 A が配置されている。その右側に、厚さが $D(x)$ のくさび形の水晶板、そのさらに右に、もう一枚の検光板を、 -45° 方向 (図 2 の P_B 方向) の偏光成分のみを通すようにおのこの配置する。くさび形の頂角は充分小さいので、入射面に垂直に z 軸方向に入射した単色光は、水晶への入射、出射に際して屈折しないものとする。

3. このときの検光板 B を通過してきた光電場 E_B を求めよ。それを用いて、光の強度 I を位相差 $\delta(D)$ の関数として求めよ。
4. 位相差 $\delta(D)$ がどのような値の場合に、通過光強度が最大になるか。

頂角 $\theta = 0.1 \text{ mrad}$ のくさび形の水晶と偏光板、検光板及び検光板に密着した細いスリットを用いて、図 3 に示すようなデバイスを作った。それに白色光を垂直に入射した。ここで、水晶の Δn の波長依存性を無視できるとする。

5. スリットの位置を x 軸方向に動かすと、通ってくる光の波長が変わる。その理由を説明せよ。

人の目は可視光領域では数 nm のスペクトル差を容易に検出できる。雲母薄片に白色光を垂直入射し、その反射光がデバイスに垂直入射した白色光の通過光と同じ色になるように、デバイスのスリット位置を動かす。この時の移動量は常に 2.5mm の整数倍であった。

6. 雲母の二種類の色に対応するようにして決めたスリットの二箇所の位置の水晶の厚さの差は、やはりある一定値 ΔD の整数倍である。 ΔD の値を求めよ。

7. 単位ステップ高さ Δd と ΔD との関係性を求めよ。
8. 雲母の屈折率 $n = 1.5$ 、水晶の屈折率の異方性 $\Delta n = 0.009$ を用いて、雲母薄片のステップ構造の最小単位ステップの高さ δd を求めよ。

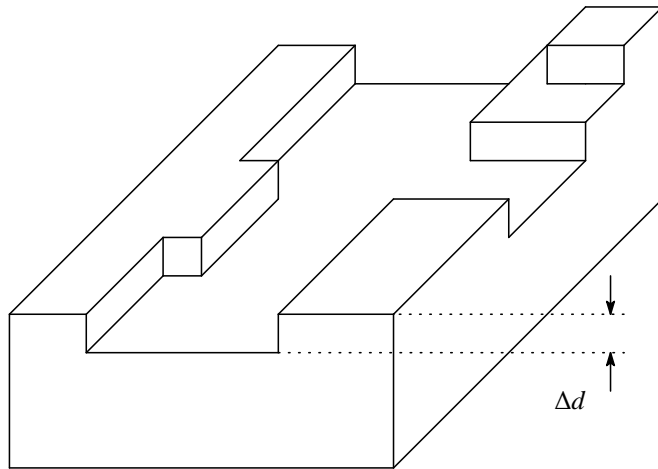


図 1

ステップ構造

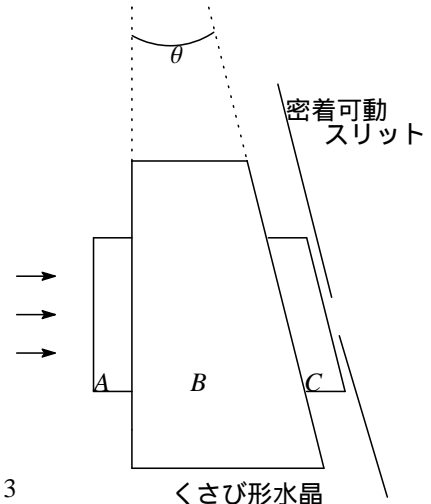
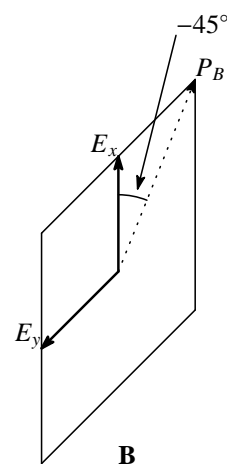
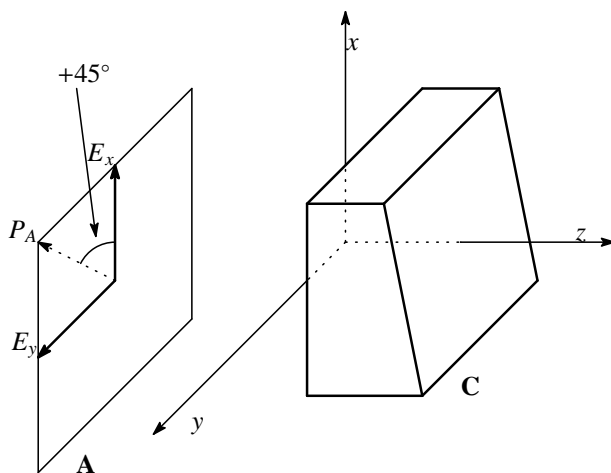


図 3

くさび形水晶

図 2



問題 6

1. ある半導体試料のホール係数の温度依存性を測定したところ、図 1 のように A,B,C の 3 つの温度域でそれぞれ特徴的な振る舞いが見られた。これに関して以下の問に答えよ。但し、この半導体の伝導体の底は等方的で単一の極小をもつ単純な構造を持つものとする。また、この試料には単一種類のドナー (電子供与体) のみが含まれ、アクセプター (電子受容体) はないものとする。必要ならば次の数値を参考にせよ:

素電荷 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{C}$, 自然対数 $\ln 10 = \log_e 10 = 2.30$

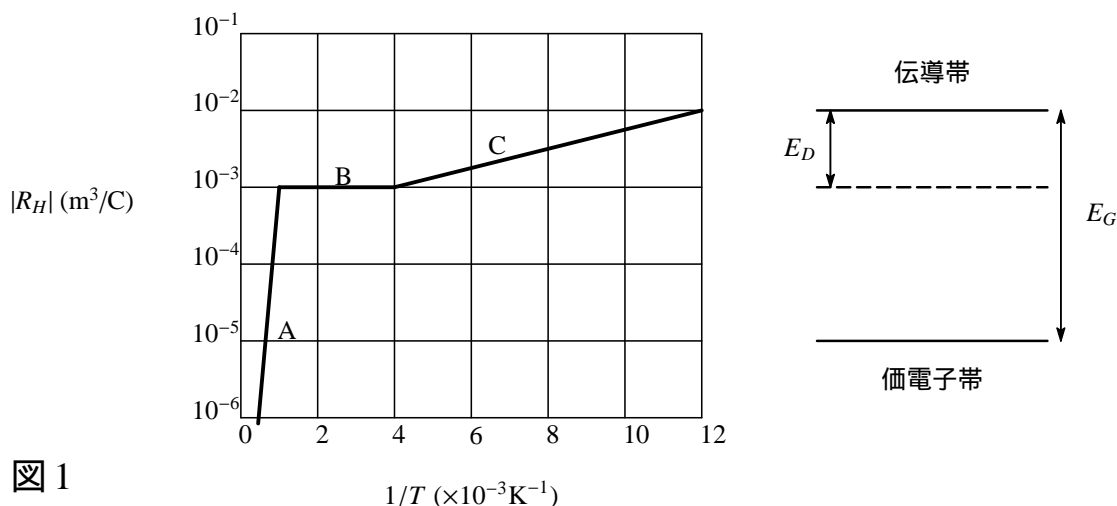


図 1

- (i) 室温 (300K) におけるキャリアー密度 (電子密度) を求めよ。
- (ii) 前問で求めたキャリアー密度の値は、そのまま、この試料に含まれるドナー不純物の濃度を与えることになる。その理由を説明せよ。
- (iii) ドナー準位の束縛エネルギー E_D (伝導体の底を基準とした値) を求めよ。
- (iv) 前問で求めたエネルギーに相当する電磁波は次のどの波長領域に属するか、次のうちから選べ。

ラジオ波/マイクロ波/赤外線/可視光/紫外線/X 線

- (v) 半導体中のドナー束縛状態は、イオン化したドナー不純物 D^+ のクーロン場に電子が束縛されたものである。この束縛状態を水素原子モデルにならって考えてみよう。水素原子の基底状態の束縛エネルギー E_0 は

$$E_0 = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{m_0 e^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{eV} \quad (\epsilon_0: \text{真空の誘電率}, m_0: \text{電子の質量})$$

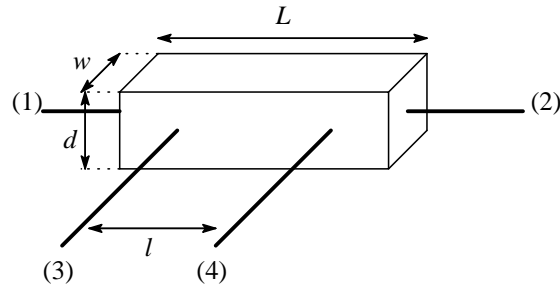
である。今の場合、水素原子モデルと異なる点は、a) 電子が真空中ではなく誘電率 ϵ の媒質中にあること、および、b) 結晶の周期ポテンシャルの効果によって電子の有効質量 m^* が自由電子のそれとは異なること、の 2 点である。これらのことを考慮して、ドナー束縛エネルギー E_D を E_0 、 m^*/m_0 、 ϵ/ϵ_0 によって表わせ。

- (vi) $\epsilon/\epsilon_0 = 10$ であるとして、この半導体中のドナー束縛状態に付いて、水素原子のボーア半径に対応する長さを求めよ。その長さを、結晶の原子間距離及びドナー不純物原子間の平均距離と比較することにより、上記の水素原子モデルによる近似が正当化されることを示せ。

2. ある物質を短冊型に切り出した試料に図 2 のように電極をつけ、端子 1-2 間に定電流電源をつなぎ、端子 1-2 間および端子 3-4 間にそれぞれ高入力インピーダンスの電圧計をつないで測定を行った。図中に示した各部の寸法は $L = 5 \text{mm}$, $l = 3 \text{mm}$, $w = 1 \text{mm}$, $d = 0.1 \text{mm}$ である。

- (i) 端子 1-2 間に一定電流 $I = 0.1 \text{mA}$ を流したところ、端子 1-2 間には $V_{1-2} = 90.0 \text{mV}$, 端子 3-4 間には $V_{3-4} = 24.0 \text{mV}$ の電圧が発生した。この物質の電気抵抗率 ρ を計算せよ。

- (ii) 電気抵抗率の測定では、このように試料の 4 本の電極をつけて、電流端子と電圧端子を別々にすることがしばしば行われる。何の為に、そのようにするのかを説明せよ。
- (iii) 実際の測定では、電流を $I = +0.1\text{mA}$ としたとき $V_{3-4} = +24.8\text{mV}$ で、 $I = -0.1\text{mA}$ としたときは $V_{3-4} = -23.2\text{mV}$ であった。(問 (i) で用いた $V_{3-4} = 24.0\text{mV}$ はそれらの平均を取ったものである。) このように、電流を反転した時に電圧の大きさが同じにならない原因として、どのような物理的現象が考えられるか。



問題 7

図 1 のようなセットアップで、地上において宇宙線を測定する実験を行った。カウンター B と C との間には鉛の板が積めるようになっている。

1. カウンター A ~ D では荷電粒子が通過したことを測定する。荷電粒子の通過を測定する装置としては、一般にどのようなものがあるか。一つ選んでその原理を簡単に説明せよ。
2. カウンターから出てくる信号を図 2 の回路によって計数した。
 - (i) ディスクリミネータは、入力信号があるレベル以上の場合に、一定の時間幅 τ を持つ矩形波を出力する装置である (図 3)。このしきい値のレベルを調整するとき注意すべき点を述べよ。
 - (ii) コインシデンス (同時計数) 回路は、2 つの入力信号に時間的な重なりがある場合に出力パルスを出す。カウンター A からは毎秒 N_A カウント、カウンター B からは毎秒 N_B カウントの頻度で、コインシデンス回路に信号が入るものとする。それぞれの信号の幅を τ 秒とした時、A と B からの独立な信号が偶然重なってコインシデンス回路から出力が出る頻度はいくらか求めよ。(ただし、A と B の同時計数の頻度は N_A と N_B に比べてずっと少ないものとする。) また、図 2 の可変遅延器はなぜ必要か答えよ。
 - (iii) 偶然によるコインシデンス (同時計数) が多すぎると測定が困難になるが、その場合どのような対策を施したら良いか。
 - (iv) カウンターや回路には、一度信号が来るとすぐには次の信号を受け付けない不感時間がある。この測定装置と回路全体の不感時間は T 秒であった。スケーラーで測定された計数を毎秒 S カウントとすると、真の計数はいくつか。
 - (v) カウンター B と C の間の鉛の板の枚数を変えながらスケーラーのカウント数を記録すると、図 4 のようになった。図の x 、 y に対応する宇宙線粒子はそれぞれ以下にあげる粒子のうちどれか答えよ。また、それらの粒子は鉛の中でどういう過程でエネルギーを失うのか説明せよ。

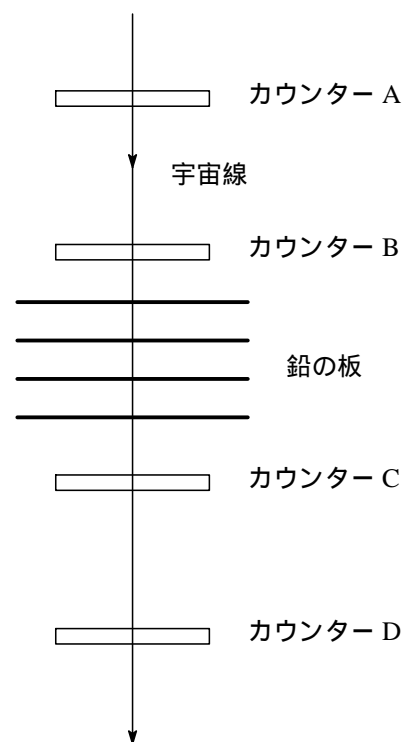


図 1: 測定セットアップ

(I) 電子、(II) ニュートリノ、(III) ミュー粒子 (ミューオン)

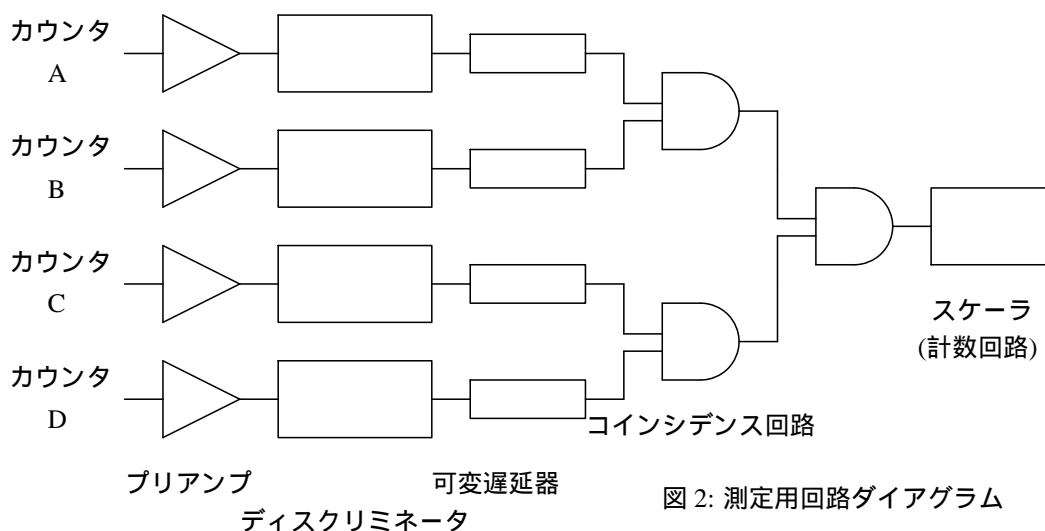


図 2: 測定用回路ダイアグラム

3. 宇宙線に含まれるミュー粒子を鉛の板で止めてその寿命を測りたい。ミュー粒子は、およそ2マイクロ秒で電子とニュートリノ2つに崩壊する。

- (i) $300\text{MeV}/c$ の運動量を持つミュー粒子を止めるのに必要な鉛の厚さを図5より求めよ。ここで、 R は飛程 (荷電粒子を止めるのに要する物質質量 (g/cm^2)), M は粒子の質量、 β は粒子速度を光速で割ったもの、また $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とする。ただし、ミュー粒子の質量は $106\text{MeV}/c^2$ 、鉛の密度は $11.35\text{g}/\text{cm}^3$ である。
- (ii) 前問で求めた厚さの鉛の板をカウンターBとCの間に置いた。カウンターA、B、Cを使ってミュー粒子の寿命を測るにはどのようにしたら良いか。図2のようなダイアグラムを書いて説明せよ。この測定では実験誤差としてどのようなものが重要か考察せよ。また、カウンターDを使わない理由を書け。

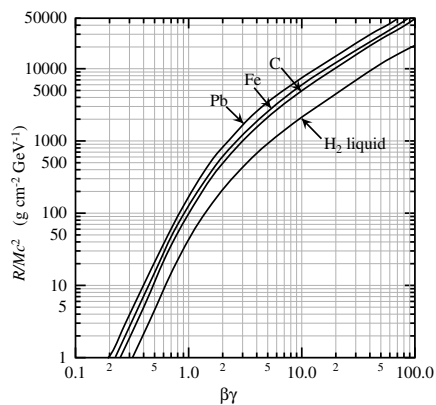
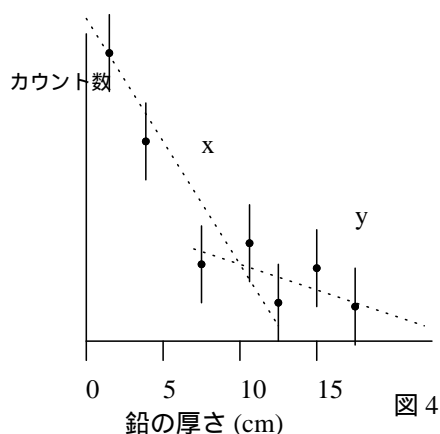
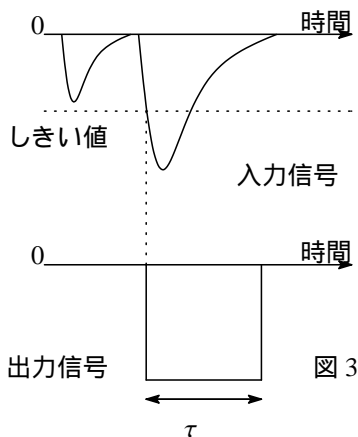
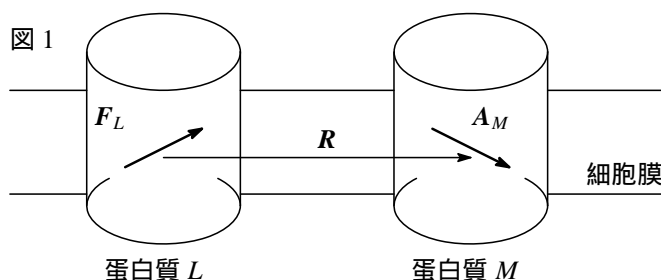


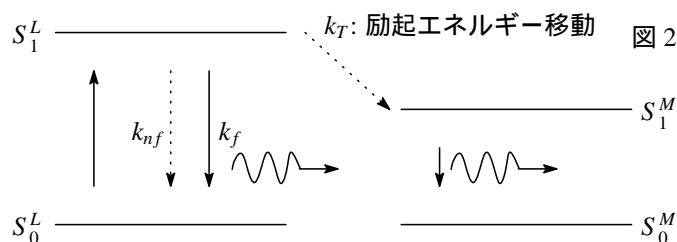
図 5

問題 8

図 1 のように、細胞の膜上にある円筒型蛋白質が並進拡散している。蛋白質が衝突した時に安定な複合体を作ったかどうかを判定するために、蛋白質間の励起エネルギー移動を測定する方法について、以下の問に答えよ。

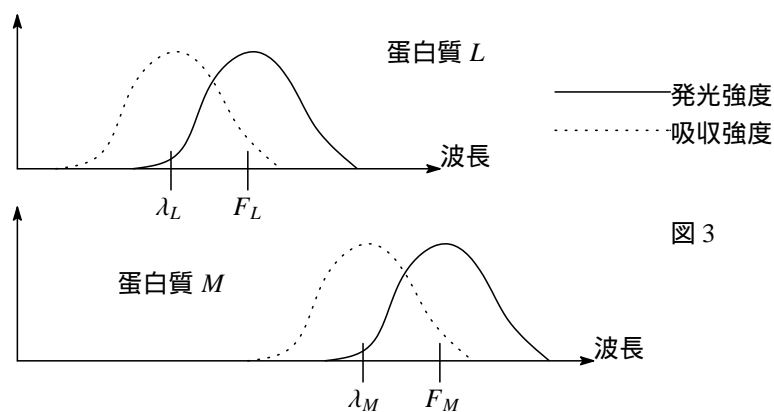


1. 蛋白質に結合させた発光体は、基底状態 S_0 と第一励起状態 S_1 を持ち、可視光で励起されるとする。図 2 のように 2 つの異なる蛋白質 L 、 M 内に存在する発光体の電子状態を (S_0^L, S_1^L) , (S_0^M, S_1^M) とする。可視光により蛋白質 L の電子が S_0^L から S_1^L に励起された。 S_1^L は S_1^M よりごくわずかにエネルギー順が高いとする。発光体が励起状態 S_1 から S_0 に遷移する時に、発光を伴う速度定数を k_f 、無輻射的に遷移する時の速度定数を k_{nf} とする。ただし速度定数とは単位時間あたり吸収・発光する発光体の割合である。まず蛋白質 L の発光体を $t = 0$ で励起したとき、時間 t で励起状態にある発光体の数 $N(t)$ を k_f, k_{nf} を用いて表わせ。また時間 t での発光強度 $F(t)$ を表わせ。



2. 蛋白質 L 内の発光体の励起された電子のエネルギーが S_1^L から S_1^M に移動することを、励起エネルギー移動という。このとき、蛋白質間の励起エネルギー移動は発光遷移双極子モーメント F と吸収遷移双極子モーメント A の双極子相互作用で起こる。励起エネルギー移動の速度定数 k_T は、 $k_T = \alpha k_f J \kappa^2 / R^6$ と書ける。ここで κ^2 は配向因子と呼ばれ、 F や A の方向に依存する量である。蛋白質 L の発光遷移双極子モーメントは F_L 、蛋白質 M の吸収遷移双極子モーメントは A_M のように表わす。 R は F_L と F_R の間の距離ベクトルであり、 J は蛋白質 L の発光スペクトルと蛋白質 M の吸収スペクトルの重なり大きさである。 α は比例定数である。
 - (i) 励起エネルギー移動がないときとある時の励起状態の蛋白質 L の発光体の寿命を τ と τ' とする。 $1/\tau$ と τ/τ' を上に定義した速度定数を用いてあらわせ。
 - (ii) 励起エネルギー移動が起こり τ' が τ の $1/2$ になる距離を R_0 とするとき、 R_0 はどのように書けるか。但し τ, τ' を使わずに書くこと。さらに τ/τ' を R, R_0 の関数として表わすとどうなるか。
 - (iii) 配向因子 κ^2 は F_L と A_M の相対角度は位置によって大きく変化するし、この相対配置を試料溶液中の蛋白質で決定するのは一般に大変困難である。従って τ/τ' の値の観測だけでは、蛋白質 L と M の距離 R の変化を決定することは出来ない。ところが、発光体が蛋白質内で 3 次元方向に全く自由に速く運動している時は、 κ^2 の値は $2/3$ であり、このときは蛋白質 L と M の距離を計算することが出来る。 $\kappa^2 = 2/3$ の場合、蛋白質 L と M が複合体を作った場合と、複合体を作らずおたがい離れて 2 次元膜上を運動している時とを比べる。蛋白質 L の τ'/τ は R/R_0 の変化に対してどのように変化するか。定性的に図示し、縦軸と横軸に特徴的な値を記入せよ。但しこのとき、蛋白質の直径は同じ $R_0/2$ であるとし、発光体の中心は円筒型蛋白質の中心と一致するとする。

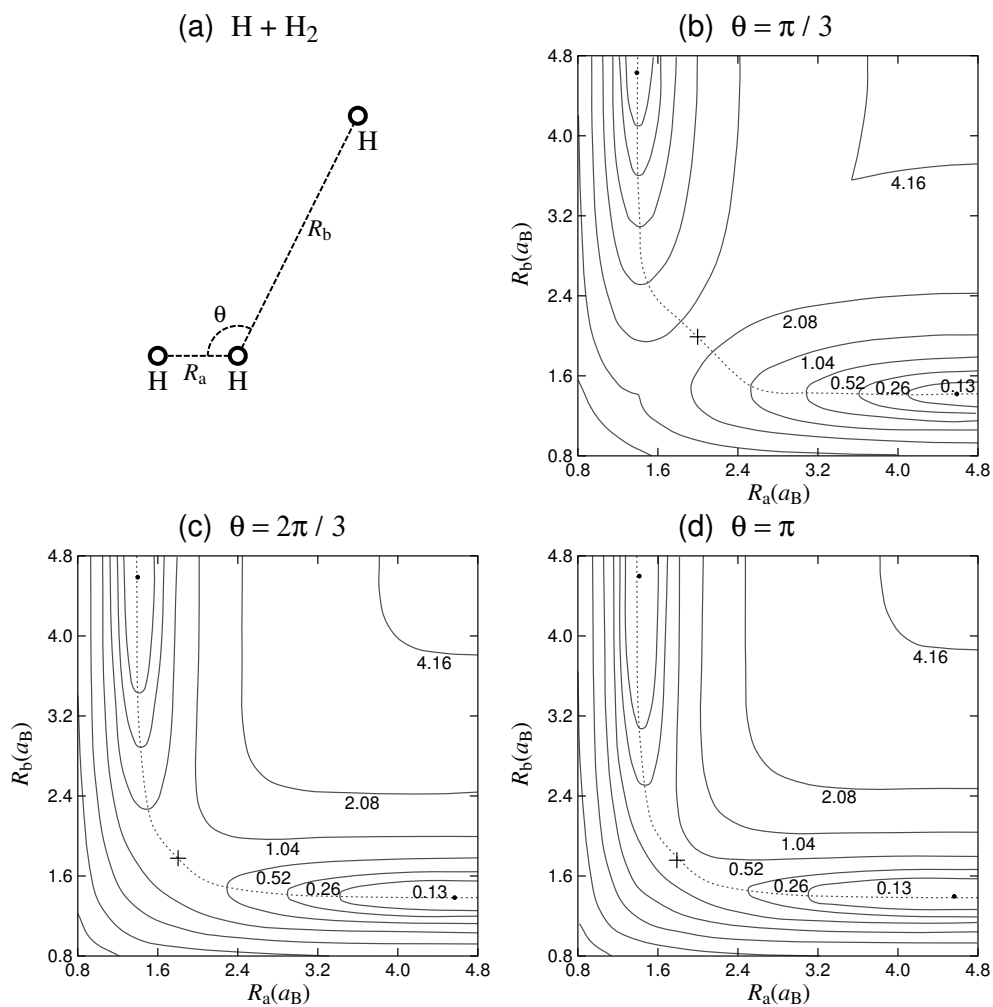
3. 蛋白質 L と M が単独で存在する場合の吸収スペクトルと発光スペクトルを図 3 に示す。 L と M の吸収強度の最大値の波長を各々 λ_L と λ_M とし、 L と M の発光強度の最大値の波長を各々 F_L と F_M とし、 $\lambda_L < F_L < \lambda_M < F_M$ とする。ここで注意すべきは、現実の蛋白質は複雑な構造を持っているので、 L と M の吸収、発光は種々の要因により図 3 のように幅の広いスペクトルを持つ。発光スペクトルを測定することで、実験的に蛋白質 L と M の間に、励起エネルギー移動が起こったか、そうでないかを判定できる。どの波長で励起し、どの発光スペクトル測定を行えば判定できるか。図 3 にならって図示して解答せよ。



問題 9

水素分子の衝突によるパラ水素分子 ($p\text{-H}_2$) からオルト水素分子 ($o\text{-H}_2$) への化学反応 (水素原始間の結合の組替え) に関連して、以下の設問に答えよ。

- まず、水素分子をボロン・オッペンハイマーの断熱近似で考えよう。2つの陽子がそれぞれ $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ の位置に固定されている時の2電子系の基底状態エネルギー (断熱ポテンシャル) を $U_2(|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|)$ と書こう。これは $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| = R_0 = 1.40a_B$ (a_B はボーア半径) で最小となる。陽子の運動を考える際には、この $U_2(|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|)$ が陽子間相互作用ポテンシャルを与えることになる。なお、陽子の質量 M は電子の質量 m の1840倍である。
 - 2つの陽子の運動は重心運動と相対運動に分離できるが、このうち、相対運動に関するシュレーディンガー方程式を $U_2(|\mathbf{R}|)$ を使って書き下せ。但し、 $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ である。
 - この方程式の角度成分に注目し、相対距離 $|\mathbf{R}|$ は R_0 と近似して、2陽子系の回転運動のエネルギー固有値 E_L を M や R_0 を使って表わせ。ここで、 $L = 0, 1, 2, \dots$ である。さらに、 $\hbar^2/ma_B^2 = 27.2\text{eV} = 3.2 \times 10^5\text{K}$ であることを使って、 $E_1 - E_0$ の値を K 単位で求めよ。
 - 陽子は核スピンの $\frac{1}{2}$ であるが、 $p\text{-H}_2$ とは2つの陽子の核スピンの反平行なもの (合成核スピンの0)、 $o\text{-H}_2$ とはそれが平行のものである。それぞれの分子について、許される L の状態とその縮重度を述べよ。
 - 合成核スピンのゼロの基底状態にある水素分子と重水素分子 D_2 について解離エネルギーをはかったところ、それぞれ 4.46eV , 4.54eV であることが分かった。これから、水素分子のゼロ点振動エネルギーの大きさを具体的に求めよ。なお、重水素の原子核は質量が $2M$ で、核スピンは1である。
- 次に、 $\text{H} + \text{H}_2$ 系を考えよう。この場合の断熱ポテンシャルは核スピンには依らず、図 (1)(a) で定義された3つの変数、 R_a, R_b および θ の関数となる。図 (1)(b)–(d) には、その断熱エネルギー $U_3(R_a, R_b, \theta)$ の代表的な θ の値における様子が等高線の形で表示されている。なお、各等高線の値は最小値 (図中の黒丸で示した点における $U_3(R_a, R_b, \theta)$ の値で、これはあまり θ にはよらない。) から測ったエネルギーの増加分 (eV の単位) である。この図を参考にしながら、次の各問に答えよ。
 - $U_3(R_a, R_b, \theta)$ を最小にする $\{R_a, R_b\}$ の組のうち、小さいほうはほぼ R_0 と等しいので、 $U_3(R_a, R_b, \theta)$ の最小値は自由な水素原子のエネルギーと $U_2(R_0)$ の和にほぼ等しいことがわかる。しかしながら、より詳しく見ると、実際の最小値はその和よりも約 2meV ほど低くなっている。この余分の引力エネルギーが何に由来するかを述べよ。
 - R_a と R_b がともに無限大となると、 $U_3(R_a, R_b, \theta)$ は θ によらずに、ある一定値に近づく。その一定値の具体的な値を求めよ。
 - 図 (1)(b)–(d) で、黒丸の点と十字印の点とを貫く点線経路に沿ったエネルギー変化の様子を参考にして、ビーム上の水素原子を打ちこんで基底状態にあるパラ水素分子と衝突させることによって得られるオルト水素分子がもっとも良く検出されるのは、元のビームの方向から見てどの角度であるか、推論せよ。
 - この化学反応を気相中 300K で行くと、 270K で行った場合よりも3.6倍の収量の増加が見られた。このことから、この反応に関連した活性化エネルギー E_a を eV の単位で求めよ。ただし、 $\ln 3.6 = 1.3$ である。得られた E_a と図 (1)(b)–(d) の十字印で示された点におけるエネルギーの値との関係を議論せよ。

図 1: $\text{H} + \text{H}_2$ 系における断熱ポテンシャル

問題 1 解答

1. (i) 不確定性関係は $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ であるから、

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2a}.$$

- (ii) 領域 $|x| < a$ でのエネルギーを考えると、

$$E = \frac{p^2}{2m} - U_0 \geq \frac{(\Delta p)^2}{2m} - U_0 \geq \frac{\hbar^2}{8ma^2} - U_0,$$

即ち、以下の条件が必要と思われる；

$$U_0 \geq \frac{\hbar^2}{8ma^2} - E.$$

2. (i) Schrödinger 方程式は

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -\frac{2m[E - U(x)]}{\hbar^2}\psi(x).$$

束縛状態を考えるので $-U_0 < E < 0$ であって、

$$k = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(E + U_0)}}{\hbar}$$

とおくと、 $|x| \rightarrow +\infty$ で $\psi(x) \rightarrow 0$ となり、かつ連続な $\psi(x)$ は以下の形に限られる；

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{k(x+a)} \sin \delta & x < -a \\ A \sin(\kappa(x+a) + \delta) & -a < x < a \\ Ae^{-k(x-a)} \sin(2\kappa a + \delta) & x > a \end{cases}.$$

A は規格化定数であるが、位相 δ については、波動関数の位相の不定性によって $-\frac{\pi}{2} \leq \delta < \frac{\pi}{2}$ を考えれば十分である。対数微分 $\frac{d}{dx} \ln \psi(x) = \frac{\psi'}{\psi}$ も連続でなければならないから、 $x = \mp a$ でその条件を考えると、

$$k = \kappa \cot \delta, \quad -k = \kappa \cot(2\kappa a + \delta).$$

これら 2 式はそれぞれ

$$0 < \delta < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < 2\kappa a + \delta - n\pi < 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

であることを示唆している。また、簡単な書き換えによって

$$\sin \delta = \frac{\hbar \kappa}{\sqrt{2mU_0}}, \quad \sin(2\kappa a + \delta - n\pi) = -\frac{\hbar \kappa}{\sqrt{2mU_0}}$$

であるから、これら 2 式から δ を消去して次の超越方程式を得る；

$$\frac{n\pi}{2} = \kappa a + \arcsin \frac{\hbar \kappa}{\sqrt{2mU_0}}. \quad \dots (1)$$

但し、 $0 < \arcsin < \frac{\pi}{2}$ とする。上の超越方程式の右辺は E の単調増加関数であるから、 n の値はエネルギー準位の低い順に一対一対応している。特に、正整数 n の取り得る値は

$$n = 1, \dots, 1 + \left\lfloor \frac{2a\sqrt{2mU_0}}{\pi\hbar} \right\rfloor$$

である。($\lfloor \dots \rfloor$ は Gauss 記号である。)

- (ii) U_0 の値に依らず、超越方程式 ((1)) には $n = 1$ の解が必ず存在する。実際、 $n = 1$ では方程式が

$$\cos \kappa a = \frac{\hbar \kappa}{\sqrt{2mU_0}} \equiv \zeta \kappa a, \quad \zeta \equiv \frac{\hbar}{a\sqrt{2mU_0}} \gg 1$$

だから、直線 $y = \zeta \kappa a$ と曲線 $y = \cos(\kappa a)$ は $0 < \kappa a < \frac{\pi}{2}$ において必ず 1 つの交点を持つことを考えれば解の存在は明らかである。

- (iii) 条件より、 $n = 1$ の準位のみが存在する。求める準位 E は上の方程式の解である。条件から、 $\kappa a \ll 1$ と考えられるから、 $\cos \kappa a$ を Taylor 展開して

$$1 - \frac{(\kappa a)^2}{2} \simeq \zeta \kappa a.$$

更に $(\kappa a)^2 = \left(\frac{\cos \kappa a}{\zeta} \right)^2 \simeq 1/\zeta^2$ と近似すると、

$$1 - \frac{1}{2\zeta^2} \simeq \zeta \kappa a.$$

これを解いて、 $\frac{ma^2}{\hbar^2} U_0$ の 1 次まで残すと、

$$E \simeq -\frac{2ma^2}{\hbar^2} U_0^2.$$

- (iv) ここまでで現れた式で $n = 1$ としたものを用いて、

$$\begin{aligned} R &= \frac{\int_{-\infty}^a |\psi(x)|^2 dx + \int_a^{\infty} |\psi(x)|^2 dx}{\int_{-a}^a |\psi(x)|^2 dx} \\ &= \frac{(\sin^2 \delta + \sin^2(2\kappa a + \delta)) \int_a^{\infty} e^{-2\kappa(x-a)} dx}{\int_{-a}^a \sin^2(\kappa(x+a) + \delta) dx} \\ &= \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2mU_0 \kappa a} \\ &= \frac{\hbar^2}{2ma^2 U_0} - 1. \end{aligned}$$

条件から、 $R \gg 1$ であることは明らかだから、相対的に井戸の外の方が井戸の中より粒子の存在確率は大きく、粒子の位置の揺らぎ Δx は井戸のスケール a よりも大きいはずである。従って $\Delta x = a$ とする見積もりが過小であった為に不確定性関係による議論は正しくなかったと考えられる。

問題 2 解答

1. 全状態数 2^N

2. 基底状態

$$\begin{cases} J > 0 & \uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow \text{ or } \downarrow\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\downarrow \\ J < 0 & \uparrow\downarrow\uparrow \cdots \uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow\downarrow \cdots \downarrow\uparrow \end{cases}$$

3. 基底状態のときエネルギーと縮重度はそれぞれ

$$\begin{cases} J > 0 & -NJ & 2 \\ J < 0 & -N|J| & 2 \end{cases}$$

4. 第一励起状態

$$\begin{array}{c} \uparrow\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\downarrow \\ \uparrow\uparrow\downarrow \cdots \downarrow\downarrow \\ \vdots \\ \uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\downarrow \end{array}$$

エネルギーは $-(N-4)J$

輪っかになっていて上のスピン配置がそれぞれ N 通りずつあるので縮重度は $N(N-1)$

5. エネルギー固有値とその縮重度

N 個鎖があるので、そのうち $2M$ 個で up,down が区切れている状態を整数 $M(0 \leq M \leq N/2)$ で指定すること

にすると、

エネルギー固有値は $-(N-4M)J$

縮重度は N 個の鎖から $2M$ 個選びそれぞれについて 2 状態ずつあるので $2_N C_{2M}$

全部足すと

$$2({}_N C_0 + {}_N C_2 + {}_N C_4 + \cdots + {}_N C_N) = 2^N$$

が確かめられる。

6. 偶数について足し合わせるとき

$${}_N C_0 + {}_N C_2 x^2 + {}_N C_4 x^4 + \cdots + {}_N C_N x^N = \left((1+x)^N - (1-x)^N \right) / 2$$

を利用する。

分配関数 Z は $\beta = k_B T$ として

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{M=0}^{N/2} 2_N C_{2M} \exp(\beta(N-4M)J) \\ &= 2 \exp(\beta N J) \sum_{M=0}^{N/2} {}_N C_{2M} \exp(-\beta 4M J) \\ &= \exp(\beta N J) \left\{ (1 + \exp(-\beta 2J))^N - (1 - \exp(-\beta 2J))^N \right\} \\ &= (\exp(\beta J) + \exp(-\beta J))^N - (\exp(\beta J) - \exp(-\beta J))^N \\ &= 2^N \{ (\cosh \beta J)^N - (\sinh \beta J)^N \} \end{aligned}$$

と計算できる。 $(x = \exp(-\beta 2J))$ として上の式を使う。)

7. $N \rightarrow \infty$ では

$$Z \rightarrow 2^N (\cosh \beta J)^N$$

となる。自由エネルギー F は $F = -\frac{1}{\beta} \ln Z$ より

$$F = -Nk_B T \ln \left[2 \cosh \left(\frac{J}{k_B T} \right) \right]$$

1 個あたりの自由エネルギーは N で割ればよいので

$$\frac{F}{N} = -k_B T \ln \left[2 \cosh \left(\frac{J}{k_B T} \right) \right]$$

8. エネルギーは $E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$ 、エントロピーは $S = (E - F)/T$ より求まる。計算すると

$$\begin{aligned} \frac{E}{N} &= -J \tanh \beta J \\ \frac{S}{N} &= -\frac{J}{T} \tanh \beta J + k_B \ln \left[2 \cosh \left(\frac{J}{k_B T} \right) \right] \end{aligned}$$

となる。高温極限 $T \rightarrow \infty (\beta \rightarrow 0)$ では

$$\begin{aligned} \frac{E}{N} &\rightarrow 0 \\ \frac{S}{N} &\rightarrow k_B \ln 2 \end{aligned}$$

$\exp(-\beta E_M) \rightarrow 1$ となるので全ての状態が同じ確率でおこる。エネルギーは平均値 0 になっている。エントロピーについては 1 個あたり up,down の 2 状態が同確率で起きることを意味している。

問題 3 解答

以下点電荷は座標の原点の近くにいるとする。

1. 光は速度 c で伝わるから、 $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$.
2. 全空間に渡る積分が e なので、 $\rho(\mathbf{r}', t') = e\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t'))$. よって $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = e\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t'))d\mathbf{x}(t')/dt'$.
3. $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 1/r$ と近似するとまず

$$c\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{c\mu_0}{4\pi r} \int e\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t'))\mathbf{v}(t')d^3r' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int e\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t'))\frac{\mathbf{v}(t')}{c}d^3r' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\mathbf{v}(t')}{c},$$

一方

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int e\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t - r/c))d^3r'$$

は $\partial|\mathbf{r}|/\partial\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}$ から $\partial|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\partial\mathbf{r}' = -\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'}$ に注意すれば

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{x}(t')}{dt'}\right)^{-1} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}(t')}{c}\right).$$

4. まず

$$c\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\mathbf{v}(t')}{c}$$

は ∇ が $1/r$ に作用すると $\propto r^{-2}$ になるので、 ∇ が t' に作用するもののみが残し、 $\nabla t' = -\hat{\mathbf{r}}/c$ なので、

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{-\hat{\mathbf{r}}}{c} \times \frac{\mathbf{a}(t_0)}{c} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}(t_0),$$

一方波動帯では横波になっていて、進行方向は $\hat{\mathbf{r}}$ だから

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\hat{\mathbf{r}} \times c\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}(t_0)).$$

5. 電磁波の強度は電場も磁場も同じだから、磁場だけ考える。

- (i) $\hat{\mathbf{r}}$ と x 軸のなす角を θ とすると、 $|\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}| \propto |\mathbf{a}| \sin \theta$ であるから、振幅は $\theta = \pi/2$, i.e. yz 平面内が一番大きい。
- (ii) z 軸となす角が θ の各点での強度を考える。 \mathbf{a} のベクトル $\hat{\mathbf{r}}$ に垂直な成分だけが効くが、双極子は $\hat{\mathbf{r}}$ に垂直な平面から θ 傾いた平面をまわっているので、 $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}$ 方向の成分は振幅 $|\mathbf{a}|$ で振動していて、 $\hat{\mathbf{z}}$ と $\hat{\mathbf{r}}$ のなす平面内の成分は振幅 $|\mathbf{a}| \cos \theta$ で振動している。よって強度は $1 + \cos^2 \theta$ 型の角度分布をするので、最大は $\theta = 0$ すなわち z 軸上がもっとも強い。

問題 4 解答

特殊相対論において、等加速度運動とはどのようなものだろうか。等速直線運動と異なり、あらゆる系から見てガリレイ運動学的な加速度運動を行うことは明らかに不可能である。なぜなら、十分な時間がたてばある慣性系から見てその運動は、光速を超えてしまう¹。しかし、相対論においても等加速度運動と呼ぶにふさわしい運動が存在し、その最ももらしい定義は本問で与えられるものである。実際、一様な場のなかでの粒子の運動はこのような結果をもたらす。参考書:「相対性理論入門」ランダウ・ジューコフ著、東京図書。

1. 固有時刻 τ とそこから微小固有時間 $d\tau$ 経た時刻 $\tau + d\tau$ を考える。その時、観測系では時刻 t と $t + dt$ が対応し、観測系から見た粒子の位置を x 、速度を $v = \frac{dx(t)}{dt}$ とおく。ここで、ローレンツ変換より、

$$c\tau = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}ct - \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}x$$

$$c(\tau + d\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}c(t + dt) - \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}(x + dx)$$

が成り立つので、辺々引き算して、

$$cd\tau = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}cdt - \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}dx$$

ここで、 $dx = vdt$ より、

$$d\tau = \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(c - \frac{v^2}{c} \right) dt = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - v^2} dt$$

となる。よって、これを t_1 から t_2 まで積分して、

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2}$$

を得る。

- 2.

$$u^\mu u_\mu = c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left[c^2 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]$$

であるが、一方 1 より、

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

なので、

$$u^\mu u_\mu = \frac{1}{1-(v/c)^2} (c^2 - v^2) = c^2$$

である。

次に、今得た $u^\mu u_\mu = c^2$ の両辺を τ で微分して、

$$a^\mu u_\mu + u^\mu a_\mu = 0$$

を得るが、与えられた計量では $u^\mu v_\mu = u_\mu v^\mu$ なので、これは、直ちに $u^\mu a_\mu = 0$ を意味する。

3. 物体の静止系で、 $a^\mu = (\frac{du^0}{d\tau}, g)$ となるべきであるが、1 より $dt = d\tau$ なので、 $u^0 = c$ であるから、 $a^\mu = (0, g)$ 。故に、

$$a^\mu a_\mu = -g^2$$

これはローレンツスカラーとして共変な式なのでどの系でも正しい。

¹光速になる瞬間までをガリレイ運動学的な等加速度運動を相対論的に扱い、相対論的な等加速度運動と定義することもやろうとすれば可能である。が、この定義は慣性系によってしまうのでローレンツ変換に共変な量で書き表すことができない。

運動方程式を導くために使う式は、

$$(u^0 + u^1)(u^0 - u^1) = c^2 \quad \dots (1)$$

$$\frac{u^0}{a^1} = \frac{u^1}{a^0} \quad \dots (2)$$

$$(a^0 + a^1)(a^0 - a^1) = -g^2 \quad \dots (3)$$

である（指示されている式を変形しただけ）。ここで、(1) と (3) の比を取って、

$$\frac{u^1 + u^0}{a^0 + a^1} \frac{u^1 - u^0}{a^0 - a^1} = \frac{c^2}{g^2}$$

となるが、(2) と加比の理より、

$$\left(\frac{u^0}{a^1}\right)^2 = \left(\frac{u^1}{a^0}\right)^2 = \left(\frac{c}{g}\right)^2$$

を得る。符号をうまく取れば、答えの運動方程式、

$$\frac{du^0(\tau)}{d\tau} = \frac{g}{c} u^1(\tau) \quad \frac{du^1(\tau)}{d\tau} = \frac{g}{c} u^0(\tau)$$

が導かれる²。

4. 微分方程式の対角化は容易であり、辺々足したり引いたりすれば良い。対角化した微分方程式は

$$\frac{d}{d\tau}(u^0 + u^1) = \frac{g}{c}(u^0 + u^1)$$

$$\frac{d}{d\tau}(u^0 - u^1) = -\frac{g}{c}(u^0 - u^1)$$

となり、一般解として、

$$u^0 = A \exp\left(\frac{g}{c}\tau\right) + B \exp\left(-\frac{g}{c}\tau\right), \quad u^1 = A \exp\left(\frac{g}{c}\tau\right) - B \exp\left(-\frac{g}{c}\tau\right)$$

を得る（ A, B は定数。）。初期条件より、

$$A + B = c, \quad A - B = 0$$

なので、定数を決定できて、解は、

$$u^0 = c \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right), \quad u^1 = c \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)$$

となる。さらに、 u の定義より、 t, x はそれぞれを積分すれば求まるので、

$$t = \frac{c}{g} \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)$$

$$x = \frac{c^2}{g} \left[\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) - 1 \right]$$

である。積分定数は初期条件を加味してうまくえらんである。

5. 4 で求めた x の式から、 τ を計算するが、十分時間がかかると思われるので、 $\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) - 1$ は $\frac{1}{2} \exp\left(\frac{g}{c}\tau\right)$ で近似してよい。これより、

$$\tau = \frac{c}{g} \ln\left(\frac{2xg}{c^2}\right) = \frac{3 \cdot 10^8}{10} \ln\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 3.1 \cdot 10^7 \cdot 10}{(3 \cdot 10^8)^2}\right) \simeq 10[\text{年}]$$

となる。

²符号であるが、(2) の条件から 複号同順で u と a の符号が同じか違うかまでは求まる。 g の定義を考えればこの答えがふさわしいことは自明である。なぜ符号の紛れが生じたかであるが、用いたのはローレンツスカラーの式のみである。ローレンツスカラーは符号反転に対して不変であるので、符号反転した運動方程式も導かれたわけである。

6. まず、ロケットの運動 $x(\tau)$ を $x(t)$ に書き換えよう。双曲線関数の公式を用いて、

$$x = \frac{c^2}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2} t^2} - 1 \right)$$

となる。求める時間間隔を s とおけば、解くべき方程式は、

$$\frac{cs}{2} = \frac{c^2}{g} \left[\sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2} \left(t + \frac{s}{2} \right)^2} - 1 \right]$$

である。両辺を 2 乗して、 s について解けば、

$$s = \frac{gt^2}{c - gt} > 0$$

を得る。 s が正でなくてはならないので、 $t < c/g$ が必要となる。この時刻はガリレイ運動学においてはロケットが光速に到達する時刻である。もちろん相対論的な運動を考えているのでこの解釈は正しくないが、結局等加速度運動は固定系から眺めると十分時間が経つと $x = c(t - t_0)$ に漸近する。よって、ある程度時間が経ってしまうと光速で追いかけても追いつけなくなってしまうことがわかる。なお比較のためにガリレイ運動学ではこの半分の時間で到達できなくなることを付け加えておく。

問題 5 解答

1. 理由 雲母薄膜どうしの接合面では反射がほとんど起こらないと考えられる。従って、雲母薄膜に入射した光は雲母と基盤の接合面および、雲母と真空 (または空気) の接触面の 2 つの面においてのみ反射が起こるとして良い。

2 つの異なる面で反射してきた光は異なる光路を進んできているから、その間に光路差が生ずる。この光路差と波長 (またはその整数倍) が一致する光については、2 つの異なる面で反射した光どうしが強め合うように干渉し、反射強度が大きくなる。一方、その条件を満たさない波長を持つ光に関しては、2 つの光どうしが弱め合うように干渉し、反射強度が小さくなる。

色がついて見えるのは強め合う条件を満たす光であり、光路差は 2 つの面の間の距離、すなわち雲母薄膜の厚さによるから、異なるステップごとに違った色が見える。

関係式 2 つの反射面の間の距離は d_j であるから、それぞれの面で反射する光の光路差は $2nd_j$ である。これが λ_j の整数倍なのだから、

$$2nd_j = l\lambda_j \quad (l = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots (1)$$

である。

2. $\delta(D)$ の定義から、

$$\begin{aligned} \delta(D) &= (k_2 D - \omega t) - (k_1 D - \omega t) \\ &= (k_2 - k_1) D \\ &= \frac{2\pi D}{\lambda} (n_2 - n_1) \\ &= \frac{2\pi D \Delta n}{\lambda} \end{aligned} \quad \dots (2)$$

である。

3. 光電場の P_A, P_B の方向の成分を E_a, E_b とおく。このとき、 E_x, E_y との関係は、

$$\begin{pmatrix} E_a \\ E_b \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

$$\left(R \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right)$$

である。以下、 x, y 方向を基底としたベクトルには x, y の添字を、 P_A, P_B 方向を基底としたベクトルには a, b の添字をつけるものとする。

水晶板を通過した光電場を $E_0 = (E_{0x}, E_{0y}) = (E_{0a}, E_{0b})$ 、偏光板 B を通過した光電場を $E_B = (E_{Bx}, E_{By}) = (E_{Ba}, E_{Bb})$ とおくと、これらは以下の関係式を満たす。

$$\begin{pmatrix} E_{0a} \\ E_{0b} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_{Bx} \\ E_{By} \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} E_{Ba} \\ E_{Bb} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_{Ba} \\ E_{Bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0b} \end{pmatrix} \quad (\text{偏光板の性質より。})$$

E_0 は与えられているから、これをもとに計算すると、

$$E_{0b} = \frac{A}{2} \alpha(D, t)$$

$$(\alpha(D, t) \equiv \{\cos(\Phi(D, t)) - \cos(\Phi(D, t) + \delta(D))\})$$

よって, E_B は,

$$\begin{pmatrix} E_{Ba} \\ E_{Bb} \end{pmatrix} = \frac{A}{2} \alpha(D, t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{あるいは,} \quad \begin{pmatrix} E_{Bx} \\ E_{By} \end{pmatrix} = \frac{A}{2} \alpha(D, t) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

である.

$\alpha(D, t)$ を変形すると,

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} \alpha(D, t) &= A' \cos(\Phi(D, t) - \phi) \\ \left(A' &\equiv A \sqrt{\frac{1 - \cos(\delta(D))}{2}} \right) \\ \left(\sin \phi &= \frac{\sin(\delta(D))}{A'}, \quad \cos \phi = \frac{1 - \cos(\delta(D))}{A'} \right) \end{aligned}$$

となる. よって, 強度 $I = (\epsilon_0/2)A'^2$ は,

$$I = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{1 - \cos(\delta(D))}{2} A^2$$

となる.

4. 3. の結果より,

$$\delta(D) = (2l + 1)\pi \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \dots (3)$$

のとき, 強度が最大となる.

5. スリットを通過してくる光は, 4. で求めた条件を満たす波長のものが主な成分となっている. 2. より, 通過する水晶の厚さ D が変化すれば, 条件を満たす波長は変化する. スリットの位置を x 軸方向に動かすということは, D を変化させるということだから, それにより通ってくる光の波長が変化する.
6. スリットを x 軸方向に dx だけ動かしたとき, 光が通過する水晶の厚さが dD だけ変化したとすると, その関係は,

$$\begin{aligned} dD &= \sin(0.1 \times 10^{-3}) dx \\ &\simeq 10^{-4} dx \end{aligned}$$

である. スリットの x 軸方向への 2.5mm の移動に対応する D の変化が ΔD だから,

$$\Delta D \simeq 2.5 \times 10^{-7} \quad [\text{m}]$$

である.

7. いま, 可視光の波長域が Δl に比べて大きく, (1) 式における自然数 l を一定値 l_0 として扱って良いとする. (この仮定が成り立たなければ, このようなデバイスで Δl を測定するのは難しい.)

雲母の, 2 種類の色に対応する雲母の厚さ d_j を d_1, d_2 とし, 光の波長を λ_1, λ_2 とおく. さらに, それらに対応する色が見えるときのスリットの位置の水晶の厚さを D_1, D_2 とおく.

上に書いた仮定が成り立つとき, λ_1, λ_2 の差が可視光の波長域に比べて小さいから, スリットを適切にずらすことによって (3) 式における l を一定にすることができる. この値を l_1 とする. このとき, $\delta(D)$ は一定になるから,

$$\frac{D_1}{\lambda_1} = \frac{D_2}{\lambda_2}$$

である. $\Delta D \equiv |D_1 - D_2|$, $\Delta \lambda \equiv |\lambda_1 - \lambda_2|$ の 2 次の項が無視できるとすると, (2), (3) 式より,

$$\Delta D = \frac{2l_1 + 1}{2\Delta n} \Delta \lambda$$

であることが分かる.

一方, $\Delta d \equiv |d_1 - d_2|$ と $\Delta \lambda$ の関係は, (1) 式より,

$$\Delta d = \frac{l_0}{2n} \Delta \lambda$$

であるから,

$$\Delta d = \frac{l_0}{2l_1 + 1} \frac{\Delta n}{n} \Delta D \quad \dots (4)$$

である.

8. Δd の大きさを求めるためには, l_0, l_1 を決めなくてはならない. これらの値は, (1), (2), (3) 式において, 波長 λ が可視領域に含まれるように決まるものであり, d, D の大きさによって変わる. これを決めるための情報は特にないので, $l_0 = 1, l_1 = 0$ として考えることとする.

このとき, (4) 式および 6. より,

$$\Delta d = 1.5 \times 10^{-9} \quad [\text{m}]$$

である.

問題 6 解答

1. (i) 図より 300K での R_H は $10^{-3} \text{ m}^3/\text{C}$ である。キャリア密度を n とすると $|R_H| = 1/ne$ なので、 $n = 6.25 \cdot 10^{21} / \text{m}^3$ 。
 - (ii) ドナー不純物が n 個、伝導帯準位が $N \gg n$ 個あるとすると、伝導帯にいるキャリアの数は $nN/(N + n \exp(E_D/kT))$ できまると考えられる。よって R_H は定数 $+ \exp(E_D/kT)$ と振る舞う。B ではキャリアの数が一定になっているので、ドナーから伝導帯に移りうるキャリアはみな移ってしまっていることが判る。一方で、価電子帯からの励起が効くのは図の A に移ってからであるから、室温でのキャリアの数はドナーの数に一致する。
 - (iii) C のかたむきから $T \ln n \propto \ln 10 \times 10^3 \text{ K}/8$ 、よって $E_D = k_B 288 \text{ K} \sim 0.025 \text{ eV}$ 。
 - (iv) これは $\hbar c/E_D \sim 8 \mu\text{m}$ に相当するので、マイクロ波。
 - (v) 単純に比例計算から、 $E_D = E_0(\epsilon/\epsilon_0)^{-2}(m^*/m_0)^{-1}$ 。
 - (vi) エネルギーとボーア半径は逆比例するので、ドナー束縛状態のボーア半径は水素原子の $13.6 \text{ eV}/0.025 \text{ eV} = 5.5 \cdot 10^2$ 倍で 29 nm 。Si の格子定数は 2.3 \AA だからこれは十分に広く、電子の質量を有効質量として、物質の誘電率を用いて計算することを妥当にしている。また、ドナー濃度からドナー間隔は 54 nm 、これはボーア半径の倍程度であり、電子密度は指数関数的に落ちるので、ほかのドナー原子を考えない近似を妥当にしている。
2. (i) $V_{3-4} = I\rho l/(wd)$ より $\rho = V_{3-4}wd/(Il) = 8 \Omega \cdot \text{mm}$ 。
 - (ii) 電流の流れている端子を用いて電圧を測ると、小さい試料の場合は端子の線内での電圧降下が馬鹿にならないので、電流の流れない端子を別に用意して測定する。四端子法と呼ばれる。
 - (iii) よわい整流作用？

問題 7 解答

1. 荷電粒子の通過を測定する装置の一つとして、シンチレーションカウンターがある。シンチレーションカウンターは、シンチレーター（蛍光体）と光電子増倍管とからできている。

荷電粒子がシンチレーターの中に入射すると、シンチレーター中の電子と相互作用し、電子を励起させる。励起した電子は、基底状態にもどるときに光子を放出する。この光子は光電面に集められ、電子とカップリングして光電子になる。

光電子が光電子増倍管のなかの電極にぶつかると、二次電子が放出される。この際、電子の数は増幅される。電子は、この衝突・増幅を何回かくりかえした後、アノード（陽極）に入射して電流をながす。

以上がシンチレーションカウンターの原理である。

解答作成者からの注）ほかに、GM 管、比例計数管、霧箱などがありますが、原理については各自で調べてください。

2. (i) カウンターから出てくる信号には、環境放射線によるものが混ざっている。しかし、環境放射線のエネルギーは、宇宙線のエネルギーにくらべて小さい。つまり、ディスクリミネーターのしきい値を、環境放射線のエネルギーより大きく、宇宙線のエネルギーより小さいレベルに設定すれば、宇宙線による信号だけをとりだすことができる。

- (ii) カウンター A の信号の立ち上がりの前後 $\pm\tau$ の間にカウンター B の立ち上がりがあれば、コインシデンスが生ずる。カウンター A の立ち上がり前後 $\pm\tau$ は、1 秒当たり $N_A \cdot 2\tau$ あり、この間にカウンター B が立ち上がるのでさらに N_B を掛けて結局答えは毎秒 $2N_A N_B \tau$ カウントとなる。

可変遅延線がない場合、宇宙線があるカウンターに入ってから別のカウンターに入るまでに時間差が生じたり、回路の違いによってコインシデンス回路に信号がとどくまでに時間差が生じたりする。可変遅延線は、これらの時間差を調整し、同じ宇宙線による信号が同時にコインシデンス回路に入るようにするために必要である。

- (iii) 偶然による同時計数が多すぎる場合、カウンターの数をふやして、すべての信号のコインシデンスをとればよい。 i 番目のカウンターから信号が出力される時間の割合を $\alpha_i (< 1)$ とすると、すべてのカウンターからの信号が重なる確率は、 $\prod \alpha_i$ となり、カウンターの数をふやせばふやすほど小さくなることがわかる。

- (iv) 実際に測定した時間は 1 秒間あたり $1 - TS$ 秒なので、真の計数は毎秒 $S/(1 - TS)$ カウントである。

- (v) ニュートリノは物質とほとんど相互作用しないため無視する。

鉛の板を透過しにくい粒子の方が、鉛を厚くしたときのスケーラーのカウント数の減り方は大きく、そちらが x に対応する。電子は μ 粒子より質量が小さいため、散乱されやすいので、電子の方が鉛の板を透過しにくいと考えられる。よって、 x が (I) 電子、 y が (III) μ 粒子だと考えることができる。

これらの粒子は、主に電磁相互作用によって電子や原子核に散乱され、制動輻射で光子を放出してエネルギーを失う。

3. (i) μ 粒子が 300 MeV の運動量をもつので、

$$\beta\gamma = \frac{pc}{Mc^2} = 2.83$$

となる。すると、問題で与えられた図から

$$\frac{R}{Mc^2} = 1.5 \times 10^3 [\text{g} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{GeV}^{-1}]$$

が得られる。 Mc^2 は 0.106 GeV なので、

$$R = 1.5 \times 10^3 \times 0.106 = 1.6 \times 10^2 [\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}]$$

となる。鉛の密度は 11.35 [g/cm³] なので、 μ 粒子を止めるのに必要な鉛の厚さは、

$$\frac{1.6 \times 10^2}{11.35} = 14 [\text{cm}]$$

だとわかる。

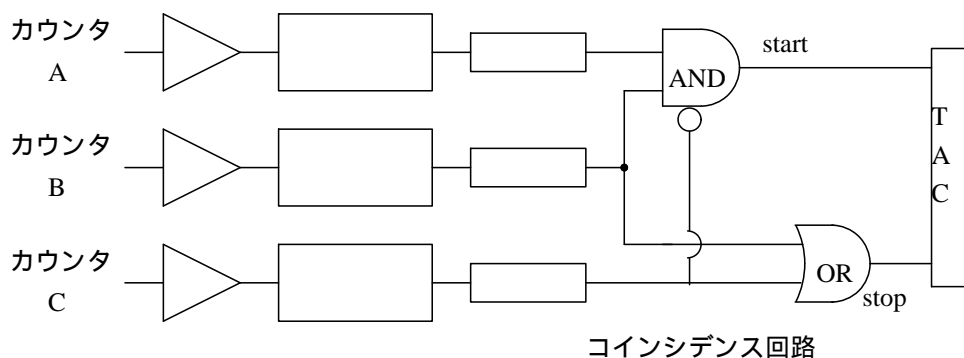
- (ii) 図の TAC とは Time to Analog Converter のことで、start が入力されてから stop が入力されるまでの時間をアナログパルスに変換する回路である。まず、カウンター A、B を使って、 μ 粒子が入射したときに start に入力する。 μ 粒子が鉛の板で止まり、C がなかったことを確認するため、C の出力を NOT しておく。

しばらくすると μ は崩壊して電子を放出する。この電子をカウンター B または C で検出して、stop 信号に入力する。こうやって出力されるパルスをデジタル化して、横軸に時間、縦軸に頻度をとったヒストグラムにすると、このグラフは $A \exp(-t/\tau)$ (τ は μ 粒子の寿命) という式でフィットできる。こうして μ 粒子の寿命を求めることができる。

可変遅延器の設定であるが、start 信号に関しては、あまり A、B からの信号が C よりはやく AND に到達すると C が鳴らなかったのを確認する以前に start 信号が出てしまうこと、またあまりはやく B からの信号が OR に到達すると、start 信号を生成した B の信号がまた stop を生成してしまいお話にならないことを注意して設定すべきである。

この実験では、環境放射線や別の μ がカウンター C に入射しても stop 信号が出てしまい、ヒストグラムに影響を与える。これらバックグラウンドの大きさが十分小さくないと、上のフィットは正しくなくなる。その場合は、 $A \exp(-t/\tau) + B$ という形でフィットする。別に環境放射線のための計数を測っておいてそれからバックグラウンドを推定することもできよう。

カウンター D を使わない理由は、必要ないからである。 μ 粒子は鉛の板で止めてしまうので、カウンター D に到達しない。 μ 粒子の崩壊の際に生成する電子は、カウンター B、C で検出するので、やはりカウンター D は必要ない。



コインシデンス回路

プリアンプ
ディスクリミネータ

可変遅延器

3(ii) の図

問題 8 解答

1. dt の間に $N(t)(k_f + k_{nf})dt$ だけ減るので、 $dN/dt = -(k_f + k_{nf})N$ である。よって $N(t) = N(0)\exp(-(k_f + k_{nf})t)$ 。
また $F(t) = k_f N(t) = k_f N(0)\exp(-(k_f + k_{nf})t)$ 。

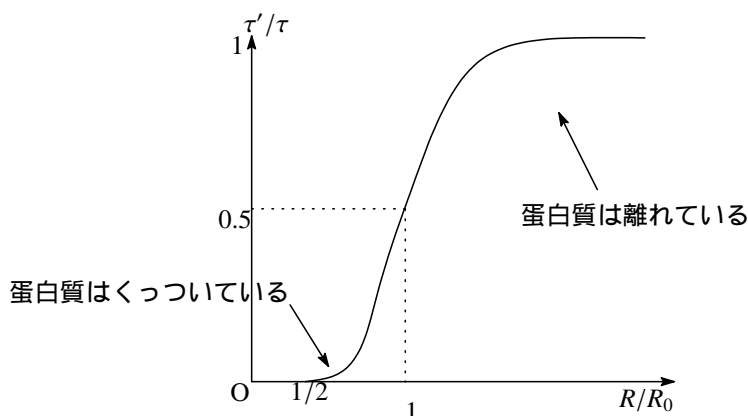
2. (i) 寿命とは数が $1/e$ になる時間のことである。よって励起エネルギー移動がなければ $\tau = (k_f + k_{nf})^{-1}$ 、励起エネルギー移動があれば $\tau' = (k_f + k_{nf} + \alpha k_f J \kappa^2 R^{-6})^{-1}$ 。よって

$$\frac{\tau}{\tau'} = \frac{k_f + k_{nf} + \alpha k_f J \kappa^2 R^{-6}}{k_f + k_{nf}}。$$

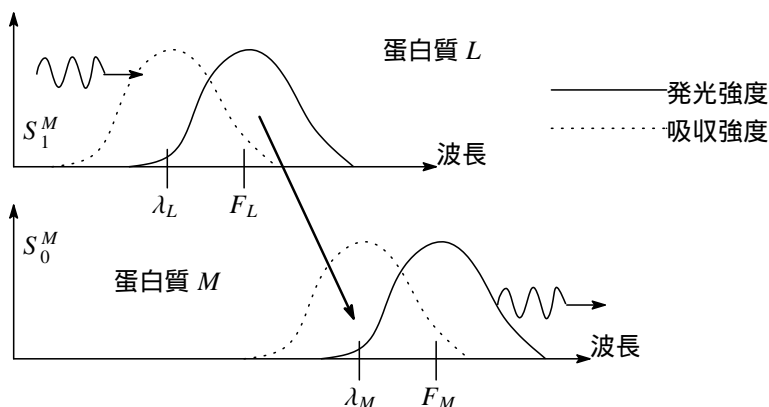
- (ii) 直前の式を $= 2$ と置いて $\alpha k_f J \kappa^2 R_0^{-6} = k_f + k_{nf}$, よって $R_0 = (\alpha k_f J \kappa^2 / (k_f + k_{nf}))^{1/6}$ 。また

$$\frac{\tau}{\tau'} = 1 + \left(\frac{R_0}{R}\right)^6。$$

- (iii) 蛋白質 L と M が接した時の双極子間の距離は $R_0/2$ である。よって $\tau'/\tau = 1/(1 + (R/R_0)^6)$ はおよそ以下
のようになる:



3. L を λ_L で励起し、 M の F_M の波長の光を観測すれば良い。すなわち、 λ_L で励起された L が F_L で発光し、それがスペクトルに重なりのある M の λ_M から吸収され、結局 F_M で放射されるからである (図)。



問題 9 解答

1. (i) 陽子の重心まわりの換算質量は $M/2$ なので、シュレーディンガー方程式は

$$E\psi(\mathbf{R}) = -\frac{\hbar^2}{M} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} \psi(\mathbf{R}) + U_2(|\mathbf{R}|)\psi(\mathbf{R})$$

である。

- (ii) 上式ハミルトニアンは球対称なので波動関数を角運動量の固有値で展開すれば

$$\frac{\hbar^2 L(L+1)}{r^2 M} - \frac{\hbar^2}{2Mr^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + U_2$$

となる。振動状態による r 部分のエネルギー期待値の変化を小さいと考えれば、回転運動によるエネルギー固有値は

$$\frac{\hbar^2 L(L+1)}{MR_0^2}$$

と求まる。特に

$$E_1 - E_0 = \frac{\hbar^2(1 \cdot 2 - 0 \cdot 1)}{MR_0^2} = \frac{\hbar^2}{(1840m)(1.40a_B)^2} = \frac{3.2 \times 10^5}{1840 \cdot 1.40^2} \text{K} = 88.7 \text{K}.$$

- (iii) 陽子はフェルミオンだから、2 陽子系の波動関数は軌道部分とスピン部分をとともに交換したとき符号を変えねばならぬ。軌道波動関数は L の偶奇に従って符号を変え、スピン波動関数は全スピン 0 のときが奇で全スピンが 1 のときは偶だから、

- $p\text{-H}_2$: $L = 0, 2, 4, \dots$ 縮重度はそれぞれ $1, 5, 9, \dots$;
- $o\text{-H}_2$: $L = 1, 3, 5, \dots$ 縮重度はそれぞれ $3, 7, 11, \dots$

となる。

- (iv) $U_2(R)$ の最小まわりを $U_2(R_0) + \frac{1}{2}k(R - R_0)^2 + \dots$ と展開するとその中を動く質量 M の振動子のゼロ点エネルギーは

$$\frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{M}}$$

である。よって合成核スピン 0 の水素分子の基底状態のエネルギーは $(\hbar/2)\sqrt{k/M}$ 。一方でスピン 1 ふたつからスピン 0 をつくとスピン波動関数は対称だから (なぜならベクトルふたつを内積してスカラーをつくる操作は対称だから) 合成核スピンの重水素分子の基底状態の角運動量は $L = 1$ である。よって

$$\frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{M}} + 4.46 \text{eV} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{2M}} + \frac{\hbar^2 \cdot 1 \cdot 2}{2MR_0^2} + 4.54 \text{eV}$$

以上より $(\hbar/2)\sqrt{k/M} = 0.299 \text{eV}$ 。

2. (i) 水素原子が水素分子に近づくことによって双方の中間状態に誘起される双極子間の相互作用によるエネルギー。van der Waals 力。
- (ii) 3 つの水素原子のそれぞれの電子が $1s$ 状態にあることによるエネルギー。すなわち Rydberg 定数の 3 倍で $-3 \times 13.6 \text{eV} = -40.8 \text{eV}$ 。
- (iii) 越えなければならないポテンシャルの峠がもっとも低いのは $\theta = \pi$ のときである。角が θ の方向から近づいて角が θ の方向へぬけて行くと $\pi - 2\theta$ だけ曲がるので、結局ビームの入射方向から 180° まわってもと来た方向へ生成分子は飛んでいくと考えられる。
- (iv) 平衡反応ではなくて、一方向に反応が進むとして、越えなければならないエネルギーの峠を E_a とすると、収量は $\exp(-E_a/kT)$ に比例すると考えられる。 $\exp(-E_a/k(300\text{K}))/\exp(-E_a/k(270\text{K})) = 3.6$ から $E_a = 0.30 \text{eV}$ と求まる。これは図の (d) の峠の高さとほぼ一致しているので、この峠を抜けて反応が起こったと考えられる。