2001年度　入学試験 一般教育科目（英語なし）

■ 数学

［第 1 問］

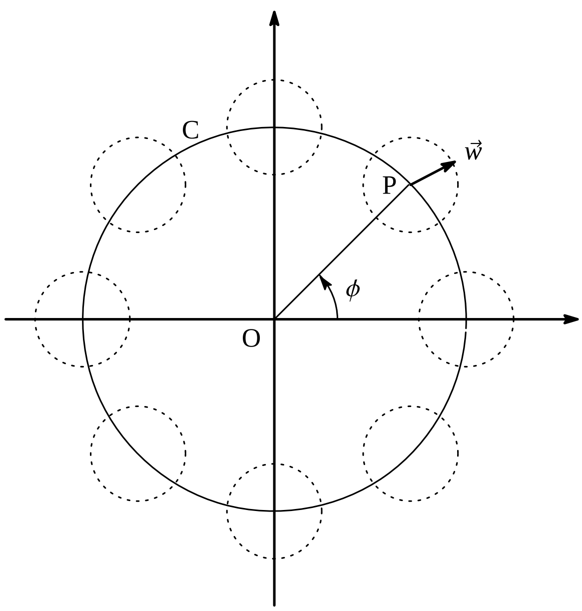
2×2 の実行列 : $A = \begin{pmatrix} 1-\gamma\cos 2\phi & -\gamma\sin 2\phi \\ -\gamma\sin 2\phi & 1+\gamma\cos 2\phi \end{pmatrix}$ に関する以下の設問に答えよ。ただし，$0 < \gamma < 1$ であるものとする。

（i）　行列 A の固有値 λ_+, λ_- を求めよ（$\lambda_+ > \lambda_-$ とする）。

（ii）　λ_+ と λ_- に対応する規格化された固有ベクトル $\vec{w}_+, \vec{w}_-$ を求めよ。

（iii）　$UAU^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$ のように A を対角化する行列 U を求めよ。また，この行列 U が表す変換はどのような操作に対応しているか簡単に述べよ。

(iv)　下図のように，単位円 C 上の点 P$(\cos\phi, \sin\phi)$ において上述の行列 A が定義されているものとし，この点 P を原点とした任意のベクトル $\vec{w}$ を，点 P を原点としたベクトル $A\vec{w}$ へ変換する。この写像によって，図に点線で示された 8 つの円はどのように変形するか。答案用紙に簡単に図示して説明せよ。



［第 2 問］

三次元ラプラス方程式は，極座標を用いて

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{\hat{L}^2}{r^2}\right)U(r,\theta,\varphi) = 0, \qquad \cdots (1)$$

$$\hat{L}^2 \equiv -\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \qquad \cdots (2)$$

と表せる。また，球面調和関数 $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ は,

$$\hat{L}^2 Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \ell(\ell+1)\,Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \qquad \cdots (3)$$

を満たす ($\ell = 0, 1, 2, \ldots$; $m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell$)。

（i）　ラプラス方程式の解 $U(r,\theta,\varphi)$ を $R_\ell(r)\,Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ と変数分離したとき，$R_\ell(r)$ の満たす微分方程式を求めよ。

（ii）　設問（i）で得られた微分方程式から $R_\ell(r)$ の独立な二つの基本解 $A_\ell(r), B_\ell(r)$ を求めよ。

$U(r,\theta,\varphi)$ に対する境界条件が球面上で与えられれば，設問（ii）で得られた $A_\ell(r)$ と $B_\ell(r)$ を用いて，

$$U(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left[\alpha_{\ell m}A_\ell(r) + \beta_{\ell m}B_\ell(r)\right]Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \qquad \cdots (4)$$

と展開し，境界条件に合うような係数 $\alpha_{\ell m},\beta_{\ell m}$ を持つ解を求めることができる。具体的に，$r = a$ 及び b（ただし $b > a > 0$ とする）での境界条件が

$$U(a,\theta,\varphi) = 0, \quad U(b,\theta,\varphi) = \sin\theta\cos\varphi \qquad \cdots (5)$$

と与えられているとき，以下の問いに答えよ。

（iii）　$\sin\theta\cos\varphi$ を $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ を用いて表せ。ただし，$Y_{00}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$，$Y_{1\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}$（複号同順），$Y_{10}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$ を用いてよい。

（iv）　境界条件 (5) と $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ の直交条件

$$\int \mathrm{d}\Omega Y^*_{\ell' m'}(\theta,\varphi)\,Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm} \qquad \cdots (6)$$

から係数 $\alpha_{\ell m},\beta_{\ell m}$ を決定せよ。

■ 数学 解答

［第 1 問］

（i）　A の固有値方程式は

$$\lambda^2 - \lambda + (1-\gamma^2) = 0 \iff (\lambda - 1 - \gamma)(\lambda - 1 + \gamma) = 0 \iff \lambda = 1 \pm \gamma$$

よって　$\lambda_+ = 1+\gamma,\ \lambda_- = 1-\gamma.$

（ii）　今，$\cos\phi \neq 0$ としておく。$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_+ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{cases} (1-\gamma\cos 2\phi)x - \gamma\sin 2\phi \cdot y = (1+\gamma)x \\ -\gamma\sin 2\phi \cdot x + (1+\gamma\cos 2\phi)y = (1+\gamma)y \end{cases} \Longrightarrow x : y = (-\sin 2\phi) : (1+\cos 2\phi)$$

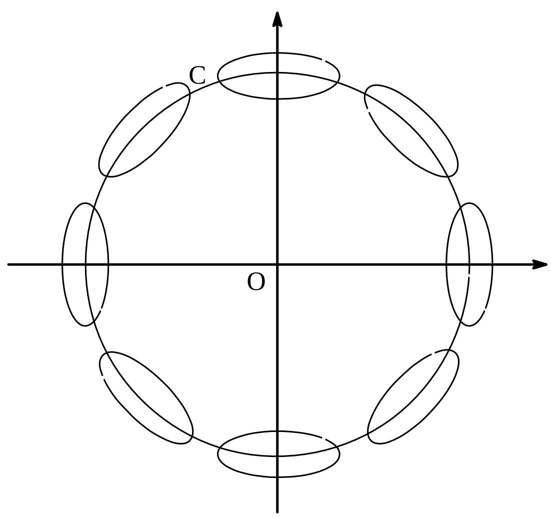
よって

$$\vec{w}_+ = \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos 2\phi)}}\begin{pmatrix} -\sin 2\phi \\ 1+\cos 2\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{2\cos\phi}\begin{pmatrix} -2\sin\phi\cos\phi \\ 2\cos^2\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}.$$

（途中で根号には絶対値をつけるべきだが，後の議論に支障はない。）同様にして，$\vec{w}_- = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$.
一方で，$\cos\phi = 0$ のときも上で求めたベクトルが固有ベクトルになっている。

（iii）　（ii）で求めた $\vec{w}_+, \vec{w}_-$ を用いて，$U = {}^t(\vec{w}_-, \vec{w}_+) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$.
この行列が表す変換は，位置ベクトルを原点周りに $-\phi$ だけ回転させる操作に対応している。

（iv）　次の図のように，各々の円は C の動径方向に $(1-\gamma)$ 倍，接線方向に $(1+\gamma)$ 倍される。



［第 2 問］

（i）　$R_\ell(r)\,Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ を $\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}r-\dfrac{\hat{L}^2}{r^2}\right)U(r,\theta,\varphi)=0$ に代入すると，

$$\left\{\begin{aligned}&Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}rR_\ell(r)\right\}-R_\ell(r)\frac{\hat{L}^2}{r^2}Y_{\ell m}(\theta,\varphi)=0\\&\frac{1}{R_\ell(r)}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}rR_\ell(r)\right\}-\frac{1}{Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}Y_{\ell m}(\theta,\varphi)=0\\&\left\{r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+2r\frac{\partial}{\partial r}-\ell(\ell+1)\right\}R_\ell(r)=0\end{aligned}\right. \qquad\cdots(1)$$

これが $R_\ell(r)$ の満たす微分方程式である。

（ii）　$R_\ell(r)=r^\lambda\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nr^n\ (c_0\neq0)$ とおいて（i）の答の式に代入すると，r^λ の係数について

$$\begin{aligned}[\lambda(\lambda-1)+2\lambda-\ell(\ell+1)]\,c_0&=0\\\lambda^2+\lambda-\ell(\ell+1)&=0\\(\lambda-\ell)(\lambda+\ell+1)&=0\\\lambda&=\ell,-\ell-1\end{aligned}$$

また，$r^{\lambda+n}$ の係数について

$$\begin{aligned}(\lambda+n)(\lambda+n-1)\,c_n+2(\lambda+n)\,c_n-\ell(\ell+1)\,c_n&=0\\(\lambda+n-l)(\lambda+n+l+1)\,c_n&=0\end{aligned}$$

よって

a）$\lambda=\ell$ のとき，$n(n+2\ell+1)\,c_n=0$，ゆえに $n\neq0,-2\ell-1$ ならば $c_n=0$

b）$\lambda=-\ell-1$ のとき，$(n-2\ell-1)\,nc_n=0$，ゆえに $n\neq0,2\ell+1$ ならば $c_n=0$

このことから独立な 2 つの基本解として

$$A_\ell(r)=r^\ell,\ B_\ell(r)=r^{-\ell-1}$$

が求められる。

（iii）　次のように表される。

$$\begin{aligned}\sin\theta\cos\phi&=\frac{1}{2}\sin\theta\cdot e^{i\phi}+\frac{1}{2}\sin\cdot e^{-i\phi}\\&=-\sqrt{\frac{2\pi}{3}}Y_{1,1}(\theta,\varphi)+\sqrt{\frac{2\pi}{3}}Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\\&=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\{-Y_{11}(\theta,\varphi)+Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\}\end{aligned}$$

（iv）　直交条件より

$$\int \mathrm{d}\Omega Y_{lm}(\theta,\varphi)\,U(b,\theta,\varphi) = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}} & (\ell = 1, m = 1) \\ \sqrt{\dfrac{2\pi}{3}} & (\ell = 1, m = -1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

よって $U(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left[\alpha_{\ell m}A_\ell(r) + \beta_{\ell m}B_\ell(r)\right]Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ を代入して,

$$\begin{cases} \alpha_{11}\cdot a + \beta_{11}\cdot\dfrac{1}{a^2} &= 0 \\ \alpha_{11}\cdot b + \beta_{11}\cdot\dfrac{1}{b^2} &= -\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ \alpha_{1,1} = -\frac{b^2}{b^3-a^3}\sqrt{\frac{2\pi}{3}},\quad \beta_{1,1} = \frac{a^3b^2}{b^3-a^3}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}.$$

同様にして

$$\alpha_{1,-1} = \frac{b^2}{b^3-a^3}\sqrt{\frac{2\pi}{3}},\quad \beta_{1,-1} = -\frac{a^3b^2}{b^3-a^3}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}.$$

その他の $\alpha_{\ell m},\beta_{\ell m}$ については 0 である。