

# 2004 年度 入学試験 物理専門科目

## 第 1 問

幅  $a$ 、深さ  $-V_0 (< 0)$  の一次元井戸型ポテンシャル  $V(x)$  を考える (図 1)。質量  $m$  の粒子が、 $x = -\infty$  から波数  $k$  の平面波  $e^{ikx}$  で入射すると、その一部は反射し、一部は透過する。このとき、 $x < -a/2$  と  $x > a/2$  における波動関数を、それぞれ  $\psi = e^{ikx} + Re^{-ikx}$ ,  $\psi = Te^{ikx}$  とし、また  $-a/2 \leq x \leq a/2$  における波動関数を  $\psi = \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx}$  とし、以下の設問に答えよ。但し、 $\hbar = h/(2\pi)$  ( $h$  はプランク定数) とする。

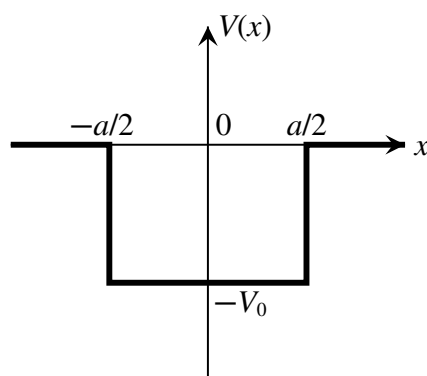


図 1:

1. 入射波、反射波、透過波に対するフラックス (確率密度の流れ) を、 $\hbar, m, k, R, T$  を用いて表せ。また  $T$  と  $R$  の関係式を与えよ。
2.  $T = |T|e^{i\theta}$  と書くとき、位相  $\theta$  が現れる物理的理由を簡潔に述べよ。
3.  $p$  を  $\hbar, m, k, V_0$  を用いて表せ。
4.  $T$  を以下の式のように表すとき、 $A$  と  $B$  を  $k$  と  $p$  を用いて表せ。

$$T = \frac{e^{-ika}}{A \cos(pa) - iB \sin(pa)}$$

5. 入射した波が反射を全く受けない (完全透過する) 為の  $k$  が満たすべき条件を求めよ。また、完全透過がおこる物理的理由を簡潔に述べよ。
6.  $|T|^2$  を  $k$  の関数として図示せよ。

## 第 2 問

金属中の伝導電子系をフェルミ・ディラック統計に従う自由電子気体とみなす単純なモデルを考える。図 2 に示したように、金属内部を表す一辺  $L$  の立方体の箱の中はポテンシャルがゼロで、外部は  $V(> 0)$  になっているものとする。この中に  $N$  個の電子が存在する。このとき以下の設問に答えよ。ただし、電子の質量を  $m$ 、ボルツマン定数を  $k_B$ 、 $\hbar = h/(2\pi)$  ( $h$  はプランク定数) とする。なお、設問 2 以降では、 $L$  および  $N$  が十分に大きいとし、エネルギー準位の分布はほぼ連続と見なして良い。

1.  $V$  が十分に大きいものとし、波動関数  $\psi(x, y, z)$  に周期的境界条件

$$\psi(x + L, y, z) = \psi(x, y, z), \quad \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z), \quad \psi(x, y, z + L) = \psi(x, y, z),$$

を適用することによって、箱の中の電子状態を表す固有関数と固有エネルギーを求めよ。

2. 状態密度  $g(\epsilon)$  を求めよ。状態密度とは、エネルギーが  $\epsilon$  と  $\epsilon + d\epsilon$  の範囲にある単位体積あたりの電子状態の数を  $g(\epsilon)d\epsilon$  と表したときの  $g(\epsilon)$  である。
3. 温度  $T = 0$  における化学ポテンシャル (フェルミ準位)  $\mu_0$  と、電子の数密度  $n = N/L^3$  との関係を求めよ。
4. 温度  $T > 0$  では高いエネルギー状態にも有限の確率で電子が分布するので、一部の電子は表面から外部 (真空中) に飛び出すことができる。表面に垂直で外向きの方向を  $+z$  軸として、単位面積から単位時間に外部に流れ出す電子の数  $J_n$  を、フェルミ分布関数  $f(\epsilon)$ 、電子の  $z$  方向の速度  $v_z$  を含む三次元波数空間での積分をして表せ。その際、三次元波数空間の積分範囲を明示せよ。
5.  $k_B T \ll (V - \mu)$  (ただし  $\mu$  は有限温度での化学ポテンシャル) という近似のもとで設問 4 の積分を実行することにより、表面から単位時間、単位面積あたりに外部に流れ出す電子の数が

$$J_n = \frac{4\pi m (k_B T)^2}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{V - \mu}{k_B T}\right)$$

となることを示せ。

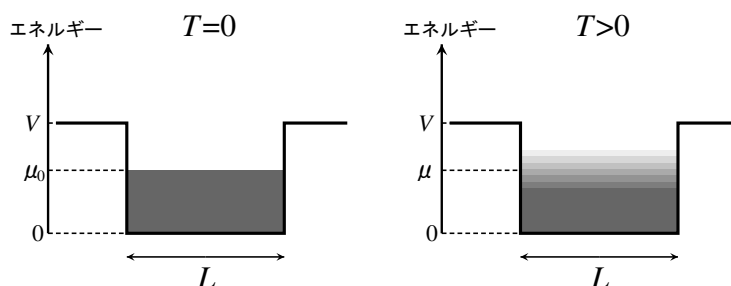


図 2:

### 第 3 問

真空中で、高い強度の単色光（電磁波）と自由電子（質量  $m$ 、電荷  $-e$ ）との相互作用を考える。電子にはたらく力  $\mathbf{F} = -e\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ （ $E, B$  はそれぞれ光の電場と磁束密度、 $v$  は電子の速度）のうち、光の磁場成分と電子の相互作用の寄与が十分小さいのはどのような場合かを具体的に考察しよう。空間内のある点で、 $x$  方向に直接偏光した角振動数  $\omega$  を持つ単色平面波の電場を  $E_x = E_0 \sin \omega t$  と表すとき、以下の設問に答えよ。ただし、真空中での光の速さを  $c$  とする。

1. 光の電場の振幅  $E_0$  と磁束密度の振幅  $B_0$  の比  $E_0/B_0$  が  $c$  であることに注意し、電子には働く力のうち、光の磁場成分と電子との相互作用の寄与が十分小さくなるための  $v$  の大きさに関する条件を求めよ。

以下の設問 2,3,5 では、設問 1 で考察した光の磁場成分と電子との相互作用の寄与が十分小さく、無視して良い場合を考える。

1. 時刻  $t = t_0$  で電子の速度が 0 であったとする。時刻  $t > t_0$  における光の電場  $E_x$  中での電子の運動エネルギーを求めよ。
2. 設問 2 で求めた運動エネルギーについて、光の電場の 1 周期  $T = 2\pi/\omega$  にわたる平均を求めよ。また、求めた平均が取り得る最小値を明示し、その物理的意味を簡潔に説明せよ。時間に依存するある物理量  $u(t)$  の 1 周期にわたる平均  $\langle u(t) \rangle$  は、

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t') dt'$$

で定義される。

3. 光の強度  $I$  [ $\text{W/m}^2$ ] がポインティングベクトル  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times (\mathbf{B}/\mu_0)$ （ $\mu_0$  は真空の透磁率）の大きさの 1 周期平均に相当することに注意し、電場の振幅  $E_0$  を光の強度  $I$  と  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ （ $\epsilon_0$  は真空の誘電率）を含む式で表せ。 $Z_0$  は真空の放射インピーダンスと呼ばれる。
4. 電子の運動エネルギーについて、設問 3 で求めた平均が取り得る最小値を  $U$  と書く。設問 4 の結果を用い、 $U$  [J] の標識を、光の強度  $I$  [ $\text{W/m}^2$ ]、その波長  $\lambda$  [m]、電子の質量  $m$  [kg] と電荷の大きさ  $e$  [C]、光の速さ  $c$  [m/s]、及び  $Z_0$  を用いて表せ。
5. 設問 5 で得られた  $U$  の表式に光の強度  $I$  と波長  $\lambda$  以外の物理量を代入すると、数値係数は  $1.5 \times 10^{-24} \text{ s}$  となる。いま、 $\lambda = 0.8 \mu\text{m} = 8 \times 10^{-7} \text{ m}$  のとき、 $I < 10^{18} [\text{W/m}^2]$  であれば、設問 1 で考察したように、電子に働く力のうち、光の磁場成分と電子との相互作用の寄与が十分小さいことを示せ。ただし、 $m = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$  とする。

## 第 4 問

1. ガンマ線と物質の相互作用に関して以下の設問に答えよ。

- (i) 物質によるガンマ線の減衰を測定するために、エネルギーが  $E$  のガンマ線を一定の強度で等方的に放出するガンマ線源 (S)、厚さ  $x$  の物質 (O)、ガンマ線検出器 (D) を、図 3 のように配置して実験を行った。なお、D は波高分析装置 (PHA) に接続されており、エネルギー  $E$  をもつガンマ線だけをカウントすることができる。

$T$  秒間の測定により得られたカウント数は、 $Y$  ( $Y \gg 1$ ) であった。次に、O を取り除いて同じく  $T$  秒間測定し、カウント数を求めると、 $Y_0$  であった。さらに、S を取り除いたとく  $T$  秒間のカウント数は 0 であった。この物質 O の微小厚さ  $\Delta x$  で失われるガンマ線の割合が、 $\mu \Delta x$  であるとして、 $\mu$  を、 $x, Y, Y_0$  を用いて表せ。

- (ii) カウント数の統計誤差に起因する  $\mu$  の実験誤差を求めよ。なお、この実験装置の不感時間は無視できるとしてよい。

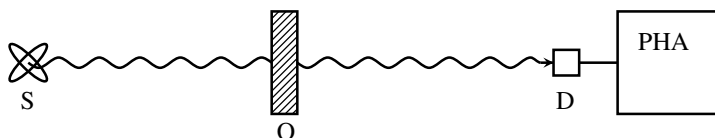


図 3:

- (iii) ガンマ線と物質内の原子の相互作用に関して、主要な過程は 3 つある。図 4(a), (b) にはこのうち、2 つを模式的に示し、また、図 5 の A, B, C の曲線は、ゲルマニウムに対する、それぞれからの  $\mu$  への寄与を示す。図 4(a) および (b) の過程はそれぞれどう呼ばれているか、またそれぞれが図 5 の A, B, C のどれに対応するかを答えよ。さらに、残りの過程の名称を答え、その特徴を示す模式図を図 4 にならって描け。

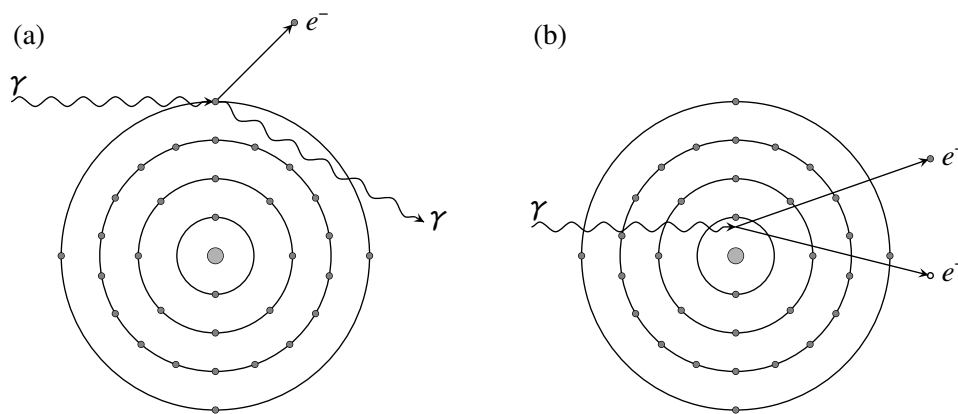


図 4:

2. 原子核や素粒子の崩壊によって放出されるガンマ線に関して以下の設問に答えよ。

- (i) 図 6(a) のように、ある励起した原子核  $A^*$  は、その静止系で、 $1.4\text{MeV}$  のエネルギーのガンマ線を放出して原子核 A に崩壊する。実験室で原子核反応により励起した原子核  $A^*$  を生成したところ、実験室系での速さが光速  $c$  の 80% であった。図 6(b) に示すように、実験室系で、崩壊前の  $A^*$  の速度ベクトルの方向に対するガンマ線の放出角度を  $\theta_L$  とする。 $\theta_L = 60^\circ$  でガンマ線を観測すると、観測されるガンマ線のエネルギーがいくらになるか。有効数字 2 桁で答えよ。

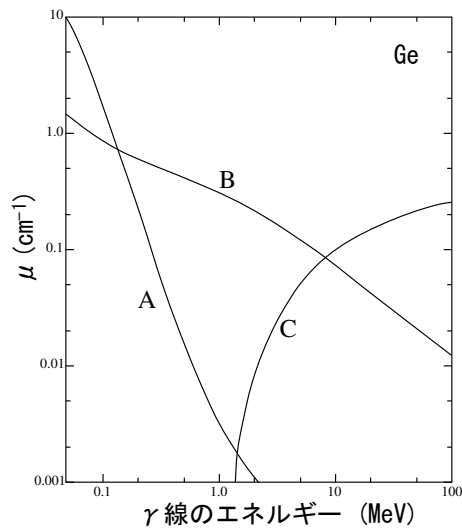


図 5:

なお、実験室系の  $z$  軸方向に速さ  $v = \beta c$  で静止系が運動しているとき、静止系における 4 元反変ベクトル  $X_C$  と実験室系における 4 元反変ベクトル  $X_L$  は、ローレンツ変換

$$X_C = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} X_L$$

で関連づけられる。ただし、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  である。

(a) 静止系

(b) 実験室系

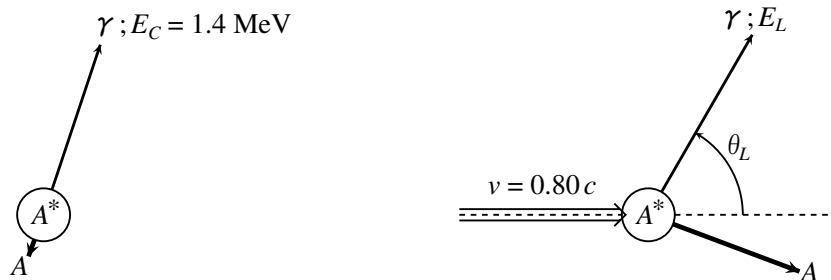


図 6:

- (ii)  $\pi^0$  中間子 (質量  $m$ ) は、おもに 2 個のガンマ線に崩壊する。実験室でこの崩壊が観測されたとき、2 個のガンマ線のそれぞれのエネルギー ( $E_1$  および  $E_2$ )、2 個のガンマ線の方角ベクトルのなす角度  $\theta$ 、および  $m$  との間にどのような関係が成り立つかを示せ。なお、光速を  $c$  とせよ。

## 第 5 問

放電管のスペクトルを調べるために、分光器を使って図 7 のような実験を行った。放電管から出た発行は、凸レンズによって入り口スリット  $S_1$  上に集光される。 $S_1$  を通った光線は、凹面鏡 1 によって平行光線となり、回折格子  $G$  に入射する。回折光は凹面鏡 2 によって出口のスリット  $S_2$  上に集光されて、光電子増倍管によって検出される。 $G$  を回転することにより、 $S_2$  から出てくる光の波長を変化させることができる。

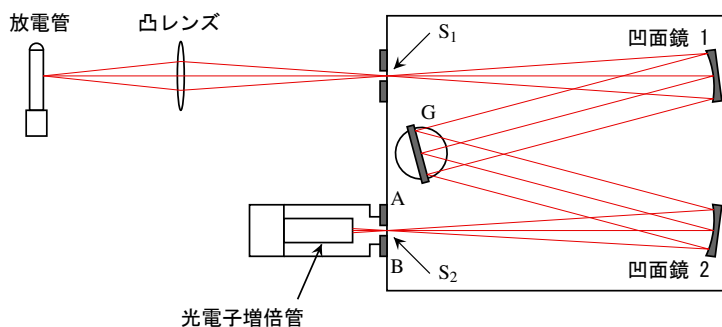


図 7:

分光器の働きを理解するために、まず回折格子について考察する。回折格子の拡大図を図 8 に示す。ただし、取り扱いを簡単にするために、溝の部分からの反射はまったくなく、平らな部分（反射面）の幅は溝に比べて十分に狭いと仮定する。入射光、回折光が回折格子の法線となす角度をそれぞれ  $\alpha, \beta$ 、入射光の波長を  $\lambda$ 、格子の間隔を  $D$  とする。 $j = 1, \dots, N$  は反射面の番号である。以下の設問に答えよ。

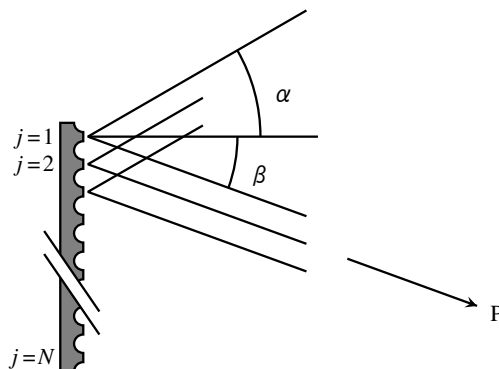


図 8:

1. 十分遠方の点  $P$  における、 $j$  番目と  $j+1$  番目の反射面からの回折光の位相差  $\phi$  を求め、回折光が強くなるための条件を、 $\alpha, \beta$  を含む式で書け。ただし、空気の屈折率は 1 と考えてよい。
2.  $j = 1$  の反射面からの回折光の点  $P$  における電場が、複素表示で

$$E = E_0 \exp(i\omega t)$$

と与えられるとして、 $N$  本の反射面からの回折光をたし合わせた電場  $E_{\text{tot}}$  を、 $\phi$  を含む複素表示で書け。ただし、 $E_0$  は  $\alpha, \beta$  によらないものとする。

3. 点  $P$  における蛍光強度は  $|E_{\text{tot}}|^2$  に比例する。 $|E_{\text{tot}}|^2$  の  $\phi = 2\pi$  近傍でのふるまいを、 $\phi$  の関数として図示せよ。なお、最大値及び、極大、極小などの特徴的な点の  $\phi$  座標を記入すること。

つぎに、図 7 に示した実際の分光器に単色光を入射した場合について考察する。

1. 設問 3 で、 $\phi = 2\pi$  のピークは一次回折光とよばれ、分光に利用される。回折格子  $G$  によって、ある一定の方向に回折された光は、凹面鏡 2 によって  $S_2$  を含む平面 AB 上の 1 点に位相差なく集光されるものとする。はじめに、波長  $\lambda$  において 1 次の回折光が  $S_2$  に集光されるように  $G$  の角度を固定 ( $\alpha, \beta$  を固定することに対応) する。次に、入射する単色光の強度を一定に保ちながら  $\lambda$  をわずかに変化させ、 $\lambda + \Delta\lambda$  とする。このとき、 $S_2$  における光の強度を、 $\Delta\lambda$  の関数として、 $\Delta\lambda \geq 0$  の領域で図示し、最初に現れる極小点における  $\Delta\lambda$  の値を、mm 単位で求めよ。ただし、波長  $\lambda$  を 600nm、回折格子の 1mm あたりの溝の本数を 1000、回折格子の溝に垂直方向の幅を 60nm とする。また、回折格子の全面が一様に回折に寄与しているとする。
2. 設問 4 で求めた最初の極小点における  $\Delta\lambda$  の値は、分光器のスペクトル分解能のめやすを与える。しかし、実際の分光器のスペクトル分解能は、スリット ( $S_1, S_2$ ) の幅にも依存する。その理由を簡潔に述べよ。
3. この実験で光検知器として用いている「光電子増倍管」の原理を、簡潔に説明せよ。また、この光電子増倍管は図 9 にしめすような波長感度特性を持っているが、短波長と長波長で感度がゼロに近づいていくのはなぜか。その理由を簡潔に説明せよ。

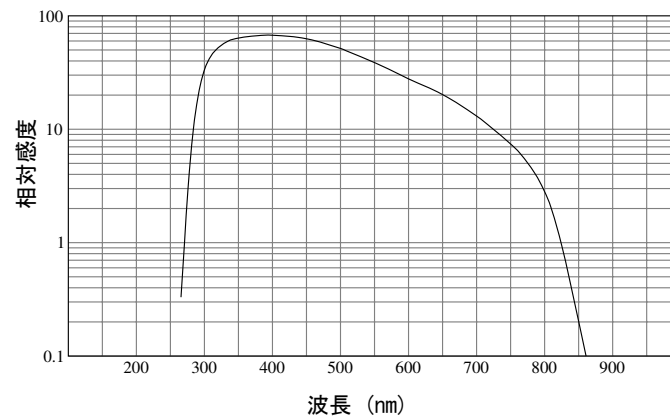


図 9:

## 第 6 問

実験においては、熱力学的な孤立系を取り扱うことは極めてまれである。例えば、温度を一定に保つために恒温槽を用いたり、圧力を一定に保つために大気圧下で実験を行う。このような系では、外界と系との間で熱の出入りや仕事のやりとりがあり、実験に都合のよい熱力学量を用いることが必要である。その一つがギブズ自由エネルギー ( $G$ ) であり、

$$G = H - TS$$

で与えられる。ここで、 $H, T, S$  は、それぞれ、エンタルピー、絶対温度、エントロピーである。以下の設問に答えよ。ただし、 $H = E + pV$  である。 ( $E, p, V$  は、それぞれ、系の内部エネルギー、圧力、体積である)。

1. 可逆過程において、外界より系に流入する微少な熱量  $\delta Q$  とエントロピーの微小変化  $dS$  との間に成り立つ関係式を示せ。
2. 可逆過程において、 $G$  の全微分  $dG$  が、

$$dG = Vdp - SdT$$

で与えられることを、熱力学の第 1 法則から出発して示せ。

3. 一般に、以下の関係式が成立することを証明せよ。

$$S - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_p$$

$$H = -T^2 \left( \frac{\partial (G/T)}{\partial T} \right)_p$$

4. 次に、大気圧下で温度上昇によりもたらされる。鎖状分子の立体構造変化 (熱転移) について考えてみよう。この鎖状分子 (例えば、蛋白質などの生体高分子を考える) は  $N$  このユニットが直鎖状につながったものであり、低温では唯一の立体構造を取るが、温度を上昇させると、ある温度で協同的に熱転移してランダム構造に変わる。ランダム構造では、1 ユニットあたり  $n$  通りの状態を自由に取ることができるとかていすると、一つの鎖状分子あたりの可能な状態数は  $n^N$  通りあることになる。 $N = 100$  かつ  $n = 10$  のとき、低温構造から低温ランダム構造への変化に伴って起こる、分子 1 モルあたりのエントロピーの変化  $\Delta S_C$  を求めよ。必要であれば、 $\ln 10 = 2.3$ 、気体定数  $R = 8.3 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  を使ってよい。
5. 設問 4 における熱転移は一次相転移として扱うことができる。転移に伴うエントロピー変化が設問 4 の  $\Delta S_C$  のみであると仮定すると、熱転移温度が 90 の時、熱転移に伴うエンタルピー変化はいくらか。



## 第 1 問 解答

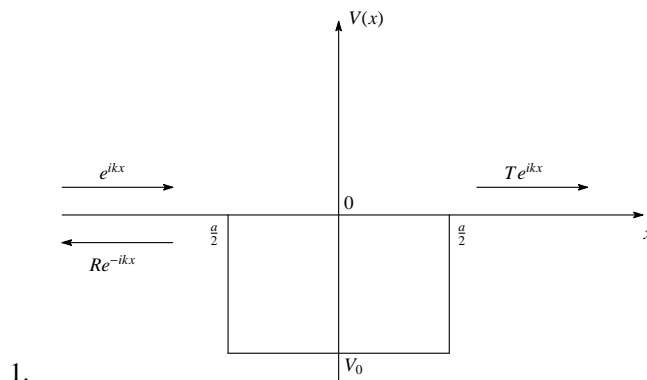


図 10: 井戸型ポテンシャル

Flux は次のように定義される .

$$\vec{J} = \text{Re} \left( \psi^* \frac{\hbar}{im} \nabla \psi \right) = \frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*] \quad \dots (1)$$

今の場合  $x$  成分を考えると ,

$x < -a/2$  のとき

$$\begin{aligned} J_{x,I} &= \text{Re} \left[ (e^{-ikx} + R^* e^{ikx}) \frac{\hbar}{im} ik(e^{ikx} - Re^{-ikx}) \right] \\ &\quad (I = (-\infty, -a/2)) \\ &= \frac{\hbar k}{m} \text{Re} \left[ \{1 - |R|^2 + (R^* e^{2ikx} - Re^{-2ikx})\} \right] \\ &= \frac{\hbar k}{m} (1 - |R|^2) \quad \dots (2) \end{aligned}$$

$-a/2 < x < a/2$  のとき

$$J_{x,II} = \frac{\hbar k}{m} (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \quad (II = (-a/2, a/2)) \quad \dots (3)$$

$x > a/2$  のとき

$$J_{x,III} = \frac{\hbar k}{m} |T|^2 \quad (III = (a/2, \infty)) \quad \dots (4)$$

よって入射波 , 反射波 , 透過波に対するフラックスはそれぞれ

$$J_{\text{in}} = \frac{\hbar k}{m}, \quad J_{\text{re}} = \frac{\hbar k}{m} |R|^2, \quad J_{\text{tr}} = \frac{\hbar k}{m} |T|^2 \quad \dots (5)$$

フラックスの保存により

$$\begin{aligned} \frac{\hbar k}{m} (1 - |R|^2) &= \frac{\hbar k}{m} (|\alpha|^2 - |\beta|^2) = \frac{\hbar k}{m} |T|^2 \\ 1 &= |R|^2 + |T|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ .

2. 入射波は  $x = \pm a/2$  で一部が反射し, 残りが透過する.  $a = a/2$  で反射した波は再び  $x = -a/2$  で反射波と透過波に分かれ, さらに  $x = -a/2$  で反射した波は再び  $x = a/2$  で反射波と透過波に分かれる. このように  $-a/2 < x < a/2$  の両端では何度も波が反射と透過を繰り返す. 従って, 最終的に  $a/2 < x$  の領域に出てくる波  $Te^{ikx}$  はそれらの波の重ね合わせになっていると考えられる. この結果, 透過波の位相が入射波の位相からずれる. また, 同様の理由で  $Re^{-ikx}$  の位相も入射波の位相からずれているはずである.

3. Schrödinger eq. は

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad \dots (6)$$

である.

井戸の外側 ( $|x| > a/2$ ) では  $V(x) = 0$  であって  $\psi(x) = Te^{ikx}$  (or,  $e^{ikx} + Re^{-ikx}$ ) を式 (6) に代入すると

$$\frac{\hbar^2}{2m} k^2 = E \quad \dots (7)$$

を得る.

他方, 井戸の内側 ( $|x| < a/2$ ) のときは  $V(x) = -V_0$  であり  $\psi(x) = \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx}$  を式 ((6)) に代入して

$$\frac{\hbar^2 p^2}{2m} = V_0 + E \quad \dots (8)$$

を得る. 式 ((7)), ((8)) から

$$p = \sqrt{k^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2}} \quad \dots (9)$$

となる.

4. 波動関数は  $x = \pm a/2$  で滑らかに接続される.

$$(x = a/2 =: b) \quad \begin{cases} Te^{ikb} = \alpha e^{ikb} + \beta e^{-ikb} \\ ikTe^{ikb} = ip(\alpha e^{ikb} - \beta e^{-ikb}) \end{cases} \quad \dots (10)$$

$$(x = -b) \quad \begin{cases} e^{-ikb} + Re^{ikb} = \alpha e^{-ipb} + \beta e^{ipb} \\ ik(e^{-ikb} - Re^{ikb}) = ip(\alpha e^{-ipb} - \beta e^{ipb}) \end{cases} \quad \dots (11)$$

式 ((4)) より

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{Te^{ikb}}{2p} \begin{bmatrix} (p+k)e^{-ipb} \\ (p-k)e^{ipb} \end{bmatrix} \quad \dots (12)$$

これを 式 ((4)) に代入し,  $R$  を消去すると

$$T = \frac{e^{-ika}}{\cos(pa) - i \frac{p^2 + k^2}{2kp} \sin(pa)} \quad \dots (13)$$

が得られた.

5. 保存の式 ( $|R|^2 + |T|^2 = 1$ ) より, 完全透過するのは  $|T|^2 = 1$  の時である. 式 ((13)) より

$$|T|^2 = \frac{1}{\cos^2(pa) + \left(\frac{p^2+k^2}{2kp}\right)^2 \sin^2(pa)} = 1$$

$$(p^2 - k^2)^2 \sin^2(pa) = 0 \quad \dots (14)$$

$V_0 \neq 0$  であるから  $p \neq k$ . よって

$$pa = n\pi \Leftrightarrow (ka)^2 = (n\pi)^2 - \frac{2ma^2V_0}{\hbar^2} \quad (n \in \mathbf{Z}_{>0}) \quad \dots (15)$$

但し最後の変形には式 ((9)) を用いた.

ここで求めた条件は一種の干渉現象と考えることができる. 井戸型のポテンシャルの幅  $a$  が半波長の整数倍

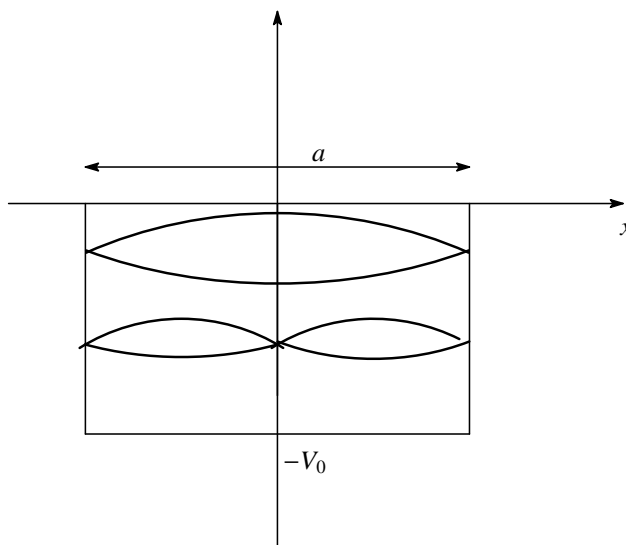


図 11: 干渉現象

を含むとき, 定在波が生じる (図 11). 定在波が生じると, 波動関数は常に  $x = \pm a/2$  で節になる. よって, 入射波は反射することなく井戸を越えることができる. 定在波が生じる条件は

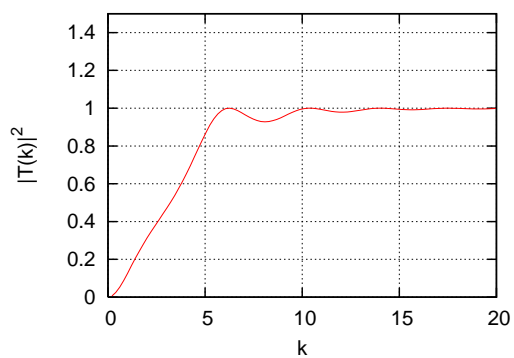
$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{p} \times n \quad (n \in \mathbf{Z}_{>0}) \quad \dots (16)$$

と現されるが, これは確かに式 ((15)) に等しい.

- 6.

$$|T(k)|^2 = \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{2mV_0}{\hbar^2} \right)^2 \frac{\sin^2(pa)}{p^2k^2} \right]^{-1}$$

を図示すると図 12 のようになる. 透過係数はだんだんと増していく下縁の包絡線と 1 の間を振動する.

図 12:  $|T(k)|^2$  の振る舞い

## 第 2 問 解答

1. 箱の中の Schrödinger eq. は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = E\psi \quad \dots (1)$$

$\psi$  を変数分離して  $\psi = X_1(x)X_2(y)X_3(z)$  として式 ((1)) に代入し,  $\psi$  でわると

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{X_1''(x)}{X_1(x)} + \frac{X_2''(y)}{X_2(y)} + \frac{X_3''(z)}{X_3(z)} \right) = E \quad \dots (2)$$

左辺の第 1 項, 第 2 項, 第 3 項は定数である必要があり, それぞれ  $E_1, E_2, E_3 (> 0)$  とおくと式 ((2)) は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} X_i'' = E_i X_i$$

$$k_i^2 \equiv \frac{2mE_i}{\hbar^2}$$

とおくと

$$X_1(x) = e^{ik_1x}, X_2(y) = e^{ik_2y}, X_3(z) = e^{ik_3z} \quad \dots (3)$$

よって波動関数は

$$\psi = e^{i(k_1x+k_2y+k_3z)} \quad \dots (4)$$

規格化すると

$$\int_{\text{BOX}} d^3x \psi^* \psi = L^3$$

より

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i(k_1x+k_2y+k_3z)} \quad \dots (5)$$

ただし, 周期的境界条件より波数の満たす条件は  $X_i(\xi + L) = X_i(\xi)$  ( $\xi = x, y, z$ )

$$e^{ik_iL} = 1 \Rightarrow k_iL = 2\pi n_i \quad (n_i \in \mathbf{Z}) \quad \dots (6)$$

固有エネルギーは

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \quad \dots (7)$$

2. ((6)) より, 波数空間では状態数は一辺  $(2\pi/L)$  の格子状に分布している. このとき半径  $[k, k + dk]$  の間に含まれる状態数を数えると, スピンの自由度に気をつけて

$$2 \times \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3} = L^3 g(\epsilon) d\epsilon \quad \dots (8)$$

$\epsilon = k^2 \hbar^2 / 2m$  より  $k dk = m / \hbar^2 d\epsilon$  であるから式 ((8)) の左辺は

$$2 \times \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3} = \frac{4\pi L^3}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon \quad \dots (9)$$

$$g(\epsilon) = \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} \quad \dots (10)$$

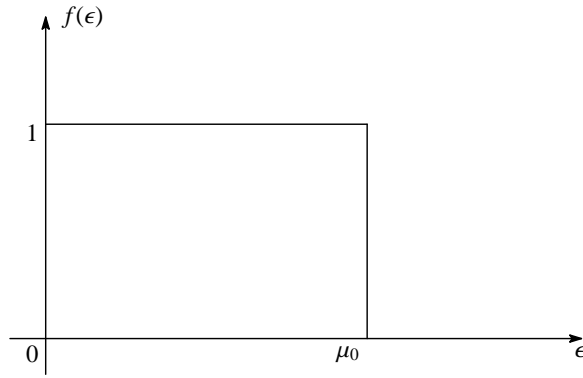


図 13: Fermi Distribution Function

3. 電子数密度は

$$n = \frac{N}{L^3} = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) f(\epsilon) \quad \dots (11)$$

とかける．ここで  $f(\epsilon)$  は Fermi 分布関数であり

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$$

である．今  $T = 0$  であるから  $\beta \rightarrow \infty$  であり分布関数は図 13 のようになる．電子は Fermi ポテンシャル以下の状態に収まっており式 ((11)) は以下ようになる．

$$\begin{aligned} n &= \int_0^{\mu_0} d\epsilon g(\epsilon) = \int_0^{\mu_0} d\epsilon \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} \\ &= \frac{8\pi}{3h^3} (2m)^{3/2} \mu_0^{3/2} \end{aligned}$$

4. 電子が飛び出す条件は  $v_z(> 0)$  が

$$\frac{1}{2}mv_z^2 > V \quad \dots (12)$$

であることである． $v_z$  がこの条件を満たすとき， $J_n$  は題意により図 14 の直方体の中に含まれる電子の総数に等しい．波数が  $[k, k + dk]$  にある単位体積あたりの電子状態の数は

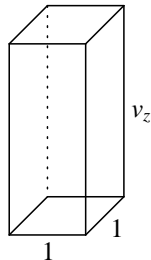


図 14: 単位体積から単位時間に流れ出す電子が含まれる

$$\frac{2}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z$$

であるから

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int_{v_z > \sqrt{2V/m}} dk_z \int_{\mathbf{R}} dk_x \int_{\mathbf{R}} dk_y g(k) f(k) \\
 &= \int_{v_z > \sqrt{2V/m}} dk_z \int_{\mathbf{R}} dk_x \int_{\mathbf{R}} dk_y \frac{2v_z}{(2\pi)^3} \\
 &\quad \times \frac{1}{\exp\left[\beta\left\{\frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - \mu\right\} + 1\right]} \quad \dots (13)
 \end{aligned}$$

5. ((12)) より

$$\begin{aligned}
 \exp\left(\beta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)\right) &> \exp(\beta(V - \mu)) \\
 \beta(V - \mu) &\gg 1 \Rightarrow \exp(\beta(V - \mu)) \gg 1
 \end{aligned}$$

よって ((4)) の被積分関数の指数関数部分は

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\exp\left[\beta\left\{\frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - \mu\right\} + 1\right]} \\
 &= \exp\left[-\beta\left\{\frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - \mu\right\}\right]
 \end{aligned}$$

とかける．従って

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int_{v_n > \sqrt{2V/m}} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \frac{2v_z}{(2\pi)^3} \\
 &\quad \times \exp\left[-\beta\left\{\frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - \mu\right\}\right] \\
 &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{\beta\hbar} \exp(\beta\mu) \int_{\sqrt{2mV/\hbar}}^{\infty} dk_z \exp\left[-\frac{\beta\hbar^2 k_z^2}{2m}\right] \\
 &= \frac{4m\pi}{(2\pi\hbar)^3 \beta^2} \exp\{-\beta(V - \mu)\}
 \end{aligned}$$

とかける．

## 第3問 解答

この問題はとても簡単なので解答を読む前に自分でやってみてください。僕も一応解きましたが、でもなんだか三番の平均値が取りうる物理的な意味あたりで答えがしっくりとしません。

1. 一般的に電磁場をあわらしてもいいのですが、この問題での一般性は失わないので + z 方向に進行しているとして具体的に表現してしまいます。

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_o \sin(\omega t - kz + \phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots (1)$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_o \sin(\omega t - kz + \phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots (2)$$

このとき力は x 成分しかなく、ちょこっと書き下してみると、

$$F_x = -eE_o \sin(\omega t - ky + \phi) \left(1 + v_y \times \frac{B_o}{E_o}\right) \quad \dots (3)$$

となり、B が無視できるためには  $v_y \leq c$  であればよい。

2. ちゃんと初期条件を考えて運動方程式をたてる。

$$x(t_0) = x_0, \quad v_x(t_0) = 0, \quad \ddot{x} = -eE_x \quad \dots (4)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad v_y(t_0) = 0, \quad \ddot{y} = 0 \quad \dots (5)$$

$$z(t_0) = z_0, \quad v_z(t_0) = 0, \quad \ddot{z} = 0 \quad \dots (6)$$

これを解くと、

$$x(t) = x_0 + \frac{eE_o}{\omega^2} \sin(\omega t - ky_0 + \phi) \quad \dots (7)$$

$$v_x(t) = \frac{eE_o}{\omega} \cos(\omega t - ky_0 + \phi) \quad \dots (8)$$

運動エネルギーを  $u(t)$  と置くと、

$$u(t) = \frac{1}{2} \frac{e^2 E_o^2}{m\omega^2} \cos^2(\omega t - ky_0 + \phi) \quad \dots (9)$$

3. 2 で求めた運動エネルギー  $u(t)$  の平均値を求める。

$$\begin{aligned} \langle u(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{1}{2} \frac{e^2 E_o^2}{m\omega^2} \cos^2(\omega t' - ky_0 + \phi) dt' \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{2} \frac{e^2 E_o^2}{m\omega^2} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t' - ky_0 + \phi) dt' \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^2 E_o^2}{m\omega^2} \frac{T}{2} \\ &= \frac{e^2 E_o^2}{4m\omega^2} \end{aligned} \quad \dots (10)$$

物理的意味は、仕事をされない、周波数が高いときに 0 になるとか。。



4. 光の強度  $I$  がポインティングベクトルの一周期平均に相当することより、

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |S(\acute{t})| d\acute{t} \\
 &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |E \times \frac{B}{\mu_0}| d\acute{t} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{e^2 E_o^2}{m \omega^2} \frac{T}{2} \\
 &= \frac{E_o^2}{2Z_0}
 \end{aligned}
 \quad \dots (11)$$

よって、 $E_o = \sqrt{2Z_0 I}$

5. 最小値というのが気になるが .. 3 の答えを使うと、

$$U = \frac{e^2 Z_0 I \lambda^2}{8\pi^2 m c^2} \quad \dots (12)$$

6. 問題の条件のとき運動エネルギーの平均値は

$$U < 9.6 \times 10^{-19} [J] \quad \dots (13)$$

このとき粒子の速さの上限は、

$$\frac{1}{2} m v^2 < 9.6 \times 10^{-19} \quad \dots (14)$$

上式に電子の質量  $m = 9 \times 10^{-31} [kg]$  を代入すると、

$v \simeq 1.5 \times 10^6 [m/sec]$  となり、これは光速より二桁小さいので 1 で考察した条件を満たしていると考ええる。

## 第 4 問 解答

### I. ガンマ線と物質の相互作用について

1. 物質を  $\Delta x$  通るとカウント数が  $Y\mu\Delta x$  減少するので、

$$-\frac{dY}{dX} = \mu Y \quad \dots (1)$$

これを初期値  $X = 0$  で  $Y = Y_0$  の元で解くと、

$$Y = Y_0 e^{-\mu x} \quad \dots (2)$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{X} \ln \frac{Y_0}{Y} \quad \dots (3)$$

2. 実験でカウントしているのは、 $Y, Y_0$  の 2 つの量であるので、

$$\Delta\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial Y}\Delta Y\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial Y_0}\Delta Y_0\right)^2} \quad \dots (4)$$

$$= \frac{1}{X} \sqrt{\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y_0}} \quad \dots (5)$$

ただし、 $Y, Y_0$  の統計義差をそれぞれ  $\sqrt{Y}, \sqrt{Y_0}$  とした。

3. (放射線の実験テキスト参照)

(a) コンプトン散乱、曲線は B

(b) 電子陽電子対生成、曲線は C

曲線 A の過程は光電効果であり、図は以下ようになる。

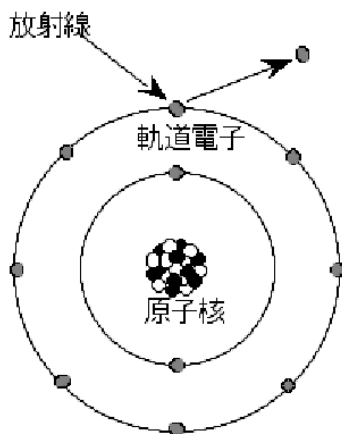


図 15: 光電効果の模式図

### II. 粒子崩壊の計算

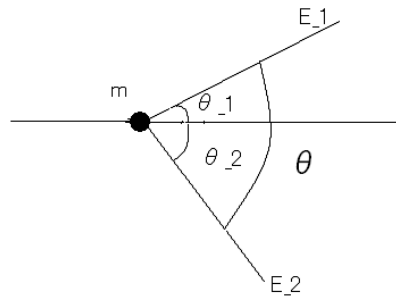
1. 反応が起こっている平面を  $x$ - $z$  平面とし、図の右方向を  $z$  軸とし、図の上方向を  $x$  軸とする。ガンマ線は質量ゼロなので  $E_L = p_L c$  である。従って、 $p_{Lz} = p_L \cos \theta_L = (E_L/c) \cdot \cos \theta_L$  となる。ガンマ線の四元運動量  $(E/c, \vec{p})$  に対して問題文に与えられたローレンツ変換を用いると、

$$E_C/c = \gamma(E_L/c - \beta p_{Lz}) = \gamma(E_L/c - \beta \cos \theta_L E_L/c), \quad \dots (6)$$

$$E_C = E_L \gamma (1 - \beta \cos \theta_L). \quad \dots (7)$$

これに  $\theta_L = 60^\circ$ ,  $E_C = 1.4 \text{ MeV}$ ,  $\beta = 0.8$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 1/0.6$  を代入すると  $E_L = 1.4 \text{ MeV}$  が得られる。

2.  $\pi^0$  中間子の実験室系での速度を  $\beta c$  とする。  $E_1 = p_1 c$ ,  $E_2 = p_2 c$  として、運動量の保存より



$$m\gamma\beta c = p_1 \cos \theta_1 + p_2 \cos \theta_2 \quad \dots (8)$$

$$0 = p_1 \sin \theta_1 - p_2 \sin \theta_2 \quad \dots (9)$$

式 ((8))  $\times \sin \theta_1$  - 式 ((9))  $\times \sin \theta_2$  より

$$m\gamma\beta \sin \theta_1 c = p_2 \sin \theta \quad \dots (10)$$

式 ((8))  $\times \cos \theta_1$  + 式 ((9))  $\times \sin \theta_1$  より

$$m\gamma\beta \cos \theta_1 c = p_1 + p_2 \cos \theta \quad \dots (11)$$

式 ((10)) と式 ((11)) を辺々2乗して足すと、

$$(m\gamma\beta c)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos \theta \quad \dots (12)$$

$$= \left(\frac{E_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{c}\right)^2 + 2\frac{E_1 E_2}{c^2} \cos \theta \quad \dots (13)$$

ここで  $\beta\gamma$  は、エネルギー保存則より

$$(m\gamma\beta c^2)^2 + (mc^2)^2 = (E_1 + E_2)^2 \quad \dots (14)$$

をみたすので、式 ((13)) ((14)) より

$$2E_1 E_2 (1 - \cos \theta) = (mc^2)^2 \quad \dots (15)$$

を得る。

## 第 5 問 解答

1.  $j$  番目と  $j+1$  番目の反射面からの回折光の光路差は  $D(\sin \alpha - \sin \beta)$  で与えられるから、求める位相差  $\phi$  は

$$\phi = 2\pi \times \frac{D(\sin \alpha - \sin \beta)}{\lambda} \quad \dots (1)$$

また、 $n$  を整数とすると回折光が強くなる条件は、

$$D(\sin \alpha - \sin \beta) = n\lambda \quad \dots (2)$$

2.  $j$  番目の反射面からの回折光の点 P における電場は

$$E_j = E_0 \exp[i\omega t - i(j-1)\phi] \quad \dots (3)$$

と書けるから、

$$\begin{aligned} E_{tot} &= \sum_{j=0}^{N-1} E_j = \sum_{j=0}^{N-1} E_0 \exp(i\omega t - i j \phi) \\ &= E_0 \exp(i\omega t) \frac{1 - e^{-iN\phi}}{1 - e^{-i\phi}} \end{aligned} \quad \dots (4)$$

3. 前問の結果より、

$$\begin{aligned} |E_{tot}|^2 &= |E_0|^2 \frac{(1 - e^{iN\phi})(1 - e^{-iN\phi})}{(1 - e^{i\phi})(1 - e^{-i\phi})} \\ &= |E_0|^2 \frac{1 - \cos N\phi}{1 - \cos \phi} \\ &= |E_0|^2 \left( \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \right)^2 \end{aligned} \quad \dots (5)$$

となるから、 $|E_{tot}|^2$  の  $\phi = 2\pi$  近傍での振舞いは下図のようになる。

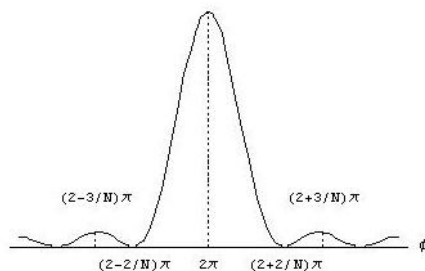


図 16:

- 4.

$$\phi(\Delta\lambda) = 2\pi \times \frac{D(\sin \alpha - \sin \beta)}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{2\pi C}{\lambda + \Delta\lambda} \quad \dots (6)$$

とおくと、一次回折光では  $\phi(0) = 2\pi$  より  $C = \lambda$  である。

回折格子の全面が一様に回折に寄与することから、 $S_2$  における光の強度を  $I(\Delta\lambda)$  とおくと、

$$I(\Delta\lambda) \propto |E_{tot}|^2 = |E_0|^2 \frac{\sin^2 \frac{N\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} \quad \dots (7)$$

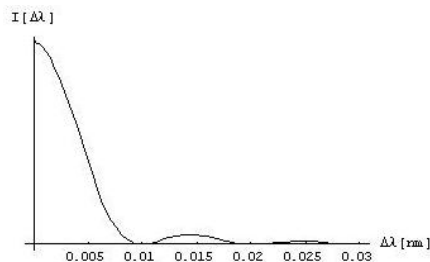


図 17:

であるから、 $A$  を定数として

$$I(\Delta\lambda) = A \left[ \frac{\sin \frac{N\pi}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}}}{\sin \frac{\pi}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}}} \right]^2 \quad \dots (8)$$

と書ける。(8) 式に  $N = 60000$ 、 $\lambda = 600\text{nm}$  を代入し、 $I(\Delta\lambda)$  を図示すると図のようになる。

また、最初に極小点が現れるとき、3. の結果より

$$\frac{\pi}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}} = (1 - \frac{1}{N})\pi \quad \dots (9)$$

であるからこれを解いて

$$\Delta\lambda = \frac{1}{N-1}\lambda = 1.0 \times 10^{-2}\text{nm} \quad \dots (10)$$

5. スリット  $S_1$  と  $S_2$  においても回折が起こり、光が広がるため。
6. 光電子増倍管の原理光子が光電面に当たると、光電効果により電子を放出する。放出された電子は電場によって加速され、ダイノードをたたく。このときダイノードより多数の電子が放出される。この放出された電子は次のダイノードとの間にかけられた電場によって加速され、次のダイノードに当たり、さらに多くの電子を放出する。これを繰り返し、一つの光子から多数の電子が生成され、電流として観測する。

波長感度特性長波長の光子に対する感度は主に光電陰極の光の吸収の減少と光電子に与えられるエネルギーの減少で決められる。波長が長くなると光電子は光電陰極の表面から離脱することのできるエネルギーを持たなくなり、感度はゼロに近づく。

一方、短波長側の応答は光が光電子放出層に到達するまでに通過する窓の性質によって決まる。窓の遮断波長より短い光に対しては感度が悪くなる。

## 第 6 問 解答

1 .

$$\delta Q = Tds \quad \dots (1)$$

2 .  $G = H - TS$ 、 $H = U + pV$ 、第一法則  $dU = \delta Q - pdV$  より、

$$dG = dU + Vdp + pdV - TdS - SdT \quad \dots (2)$$

$$= \delta Q + Vdp - Tds - SdT \quad \dots (3)$$

$$= Vdp - SdT \quad \dots (4)$$

3 . (2) 式より偏微分して、

$$-\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = S \quad \dots (5)$$

次に、 $G/T$  を  $T$  で偏微分すると、

$$\left(\frac{\partial(G/T)}{\partial T}\right)_p = -\frac{G}{T^2} + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p \quad \dots (6)$$

$$= -\frac{G}{T^2} - \frac{S}{T} \quad \dots (7)$$

となるので、

$$-T^2\left(\frac{\partial(G/T)}{\partial T}\right)_p = G + ST = H \quad \dots (8)$$

となる。

4 . エントロピーは状態数  $W$  を用いて、 $S = k \ln W$  と表せるので、エントロピー変化  $\Delta S_C$  は、

$$\Delta S_C = N_A(k \ln 10^{100} - k \ln 1 = 100k \ln 10) \quad \dots (9)$$

$$= R \cdot 100 \ln 10 \quad \dots (10)$$

$$\simeq 8.3 \cdot 100 \ln 10 \quad \dots (11)$$

$$= 1.909 \times 10^3 \quad \dots (12)$$

$$\simeq 1.9 \times 10^3 [J/K] \quad \dots (13)$$

$$\dots (14)$$

となる。

5 .

$$dH = dG + TdS + SdT = Vdp + TdS \quad \dots (15)$$

圧力は変化しないそうなので、

$$\Delta H = T\Delta S_C = 90 \times 1909 = 171810 \simeq 1.7 \times 10^5 [J] \quad \dots (16)$$

となる。