Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

ОТЧЕТ

К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

Численное решение краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности

Вариант 1

Студент ФН2-61Б (Группа) _______ (Подпись, дата) Н. О. Акиньшин (И. О. Фамилия)

Студент ФН2-61Б (Группа) _______ (Подпись, дата) А. С. Джагарян (И. О. Фамилия)

2025 г.

Оглавление

1. Контрольные вопросы

1) Дайте определения терминам: корректно поставленная задача, понятие аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой, порядок аппроксимации, однородная схема, консервативная схема, монотонная схема, устойчивая разностная схема (условно/абсолютно), сходимость.

   Ответ. Пусть дана задача

$$Au = f \ \text{ в } G, \quad Ru = \mu \ \text{ на } \partial G,$$

   для которой известна разностная схема

$$A_h y = \phi \text{ в } G_h, \quad R_h y = \nu \text{ на } \partial G_h.$$

   Разностная схема $A_h y = \varphi,\ R_h y = \nu$ называется корректной, если её решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Погрешность аппроксимации данной разностной схема определяется как $\Psi_h = (\varphi - f_n) + ((Av)_h - A_h v_h)$. Погрешность аппроксимации граничных и начальных условий $\chi_h = (\nu - \mu_n) + ((Rv)_h - R_h v_h)$.
   Разностная схема аппроксимирует исходную задачу, если $\|\Psi_h\| \to 0, \|\chi_h\| \to 0$ при $h \to 0$.
   Аппроксимация имеет порядок p, если$\|\Psi_h\| = O(h^p),\ \|\chi_h\| = O(h^p),$ при $h \to 0$. Аппроксимацию называют условной, если она имеет место только при наличии некоторой зависимости между шагами по разным направлениям и безусловной в противном случае.
   Разностная схема называется устойчивой, если её решение непрерывно зависит от входных данных. Устойчивость называется условной, если её наличие зависит от соотношения шагов сетки по разным направлениям, и безусловной в противном случае.
   Схема называется консервативной, если её решение удовлетворяет дискретному аналогу закона сохранения, присущего данной задаче.
   Разностная схема называется монотонной, если она удовлетворяет аналогу принципа максимума, присущего исходной задаче.

2) Какие из рассмотренных схем являются абсолютно устойчивыми? Какая из рассмотренных схем позволяет вести расчеты с более крупным шагом по времени?

   Ответ. Рассмотрим устойчивость схемы с весами.

$$y_t - k\tau\sigma y_{t\bar{x}x} = k y_{\bar{x}x}$$

   Разложим y по собственным функциям μ_j, которые соответствуют собственному значению λ_j. Отметим, что на λ_j накладываются следующие условия

$$\frac{9}{l^2} \leqslant \lambda_j \leqslant \frac{4}{h^2}$$

   Тогда y представимо

$$y = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \mu_j$$

   Подставим в схему

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(c_{j,t} + k\tau\sigma\lambda_j c_{j,t} + k\lambda_j c_j\right) \mu_j = 0$$

   Тогда для $j = 1, \ldots, n-1$:

$$(1 + k\tau\sigma\lambda_j) c_{j,t} + k\lambda_j c_j = 0$$

Далее получаем

$$(1 + k\tau\sigma\lambda_j)\hat{c_j} = (1 + k\tau\sigma)c_j - k\tau\lambda_j c_j$$

Тогда

$$\hat{c_j} = \rho_j c_j,$$

где

$$\rho_j = \frac{1 + k\tau\sigma\lambda_j - k\tau\lambda_j}{1 + k\tau\sigma\lambda_j}$$

при $|\rho_j| \leqslant 1$ справедливо

$$\|\hat{y}\|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \hat{c_j}^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j^2 c_j^2 \leqslant \|y\|^2$$

Заметим, что

$$1 + k\tau\sigma\lambda_j > 0$$

Тогда

$$\sigma > \frac{-1}{k\tau\lambda_j}$$

Запишем ограничения на ρ_j

$$k\tau\lambda_j \leqslant 2 + 2k\tau\sigma\lambda_j$$

Тогда

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4k\tau}$$

Из рассмотренных схем смешанная и неявная схемы абсолютно устойчивы, явная схема — условно устойчива. В силу того, что смешанная схема имеет порядок аппроксимации $O(t^2 + h^2)$, то она позволяет совершать больший шаг по времени, чем другие схемы.

3) Будет ли смешанная схема (2.15) иметь второй порядок аппроксимации при $a_i = \dfrac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i) + K(x_{i-1})}$

Ответ. Достаточное условие второго порядка аппроксимации:

$$a_i = K(x_i) - \frac{h}{2}K'(x_i) + O(h^2)$$

Тогда

$$\frac{2K_i(K_i - hK_i' + \frac{h^2}{2}K_i'' + O(h^3))}{2K_i - hK_i' + \frac{h^2}{2}K_i'' + O(h^3)} = K_i - \frac{h}{2}K_i' + O(h^2)$$

Далее, домножая на знаменатель, получаем

$$2K_i^2 - 2hK_iK_i' + O(h^2) = 2K_i^2 - hK_iK_i' - hK_iK_i' + O(h^2)$$

Из чего следует второй порядок аппроксимации.

4) Какие методы (способы) построения разностной аппроксимации граничных условий (2.5), (2.6) с порядком точности $O(\tau + h^2),\ O(\tau^2 + h^2),\ O(\tau^2 + h)$

Ответ. Пусть заданы следующие граничные условия

$$-K(0)u_x(0,t) = P_1(t)$$
$$-K(L)u_x(L,t) = P_2(t)$$

Схема для внутренних точек имеет второй порядок по каждой переменной, значит будем рассматривать только границы. Поскольку границы имеет один род граничных условий, то ограничимся рассмотрением левого граничного условия.

Пользуясь интегро-интерполяционным методом, получим следующие выражение

$$\int\limits_{0}^{x_{1/2}} (u(x,t_{j+1}) - u(x,t_j))dx = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (K_{1/2}u_x(x_{1/2},t) + P_1(t))dt$$

Тогда аппроксимируем интегралы с помощью левых прямоугольников. Получаем

$$\frac{1}{2\tau}(\hat{y}_1 - y_0) = K_{1/2}\frac{y_1 - y_0}{h^2} + \frac{1}{h^2}P_1$$

Вычисление погрешности аппроксимации приводит к

$$\psi_h = O(\tau + h^2)$$

Если аппроксимировать интегралы с помощью схемы с весами и принять вес $\sigma = 1/2$, то получим

$$\hat{y_0}(-\frac{1}{2}\tau K_{1/2} - h^2/2) + \hat{y_1}(\frac{1}{2}\tau K_{1/2}) = -\tau(1/2)(K_{1/2}(y_1 - y_0) + hP_1) - \frac{h^2}{2}y_0 + \tau\frac{1}{2}h\hat{P_1}$$

Разложим в ряд в y_0 и получим следующий порядок аппроксимации

$$\psi_h = O(\tau^2 + h^2)$$

Далее будем считать, что $K = const$ и $P_1 = const,\ P_2 = const$, тогда

$$u_x(0,t) = Q_1$$
$$u_x(L,t) = Q_2$$

Если в выражении, полученным интегро-интерполяционным методом интеграл по x аппроксимировать через левые прямоугольники, а интеграл по t аппроксимировать через центральные, то получим

$$\frac{1}{2\tau}(\hat{y}_1 - y_0) = \frac{1}{2}\tau(K\frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h^2}) - \frac{1}{2}\tau(K\frac{y_1 - y_0}{h^2})$$

Тогда получим

$$\psi_h = O(\tau^2 + h)$$

5) При каких $h,\ \tau,\ \sigma$ смешанная схема монотонна? Проиллюстрируйте результатами расчетов свойства монотонных и немонотонных разностных схем.

Ответ. Запишем расчетную схему в каноническом виде

$$\hat{y}(\frac{c\rho}{\tau} + \frac{\sigma a_{i+1}}{h^2} + \frac{a_i\sigma}{h^2}) = y\left(\frac{c\rho}{\tau} - \frac{1-\sigma}{h^2} - \frac{a_i}{h^2}(1-\sigma)\right) + y_{+1}\left(\frac{1-\sigma}{h^2}a_{i+1}\right) + \hat{y}_{+1}\frac{\sigma}{h^2}a_{i+1} + \hat{y}_{-1}\frac{a_i\sigma}{h^2}.$$

Заметим, что $F \equiv 0$, следовательно $Ly = 0$. Далее получаем следующую систему

$$\begin{cases} \frac{c\rho}{\tau} + \frac{\sigma a_{i+1}}{h^2} + \frac{a_i\sigma}{h^2} > 0, \\ \frac{c\rho}{\tau} - \frac{1-\sigma}{h^2} - \frac{a_i}{h^2}(1-\sigma) > 0, \\ \frac{1-\sigma}{h^2}a_i > 0, \\ \frac{\sigma}{h^2}a_{i+1} > 0, \\ \frac{a_i\sigma}{h^2} > 0. \end{cases}$$

В силу естественных условий на $a_i, \sigma, \tau, \rho, c, h$ получаем следующее условие

$$\frac{c\rho}{\tau} - \frac{1-\sigma}{h^2} - \frac{a_i}{h^2}(1-\sigma) > 0$$

Рассмотрим $D = A(x) - \sum\limits_{\xi \in S'(x)} B(\xi,\, x)$

$$D = \frac{c\rho}{\tau} + \frac{\sigma a_{i+1}}{h^2} + \frac{a_i \sigma}{h^2} - (\frac{c\rho}{\tau} - \frac{1-\sigma}{h^2} - \frac{a_i}{h^2}(1-\sigma)) - \frac{1-\sigma}{h^2} a_i - \frac{\sigma}{h^2} a_{i+1} - \frac{a_i \sigma}{h^2} \equiv 0$$

В итоге если выполнено условие $\frac{c\rho}{\tau} - \frac{1-\sigma}{h^2} - \frac{a_i}{h^2}(1-\sigma) > 0$, то по теореме о выполнении принципа максимума для расчетной схемы, данная схема будет монотонна.

6) Какие ограничения на h, τ и σ накладывают условия устойчивости прогонки?

Ответ. Запишем расчетную схему в трехдиагональном виде

$$\begin{gathered} \hat{y}_{-1}(\tau\sigma k_{-1/2}) + \hat{y}(-\tau\sigma k_{+1/2} - \tau\sigma k_{-1/2} - c\rho h^2) + \hat{y}_{i+1}(\tau\sigma k_{+1/2}) = \\ = -c\rho h^2 y - \tau(1-\sigma)(k_{+1/2}(y_{+1/2-y}) - k_{-1/2}(y - y_{-1/2})) \end{gathered}$$

Из теоремы об устойчивости и корректности прогонки

$$|b_i| \geqslant |a_i| + |c_i|$$

Тогда получаем

$$\tau\sigma k_{+1/2} + \tau\sigma k_{-1/2} + c\rho h^2 \geqslant \tau\sigma k_{-1/2} + \tau\sigma k_{+1/2}$$

Что верно всегда. Теперь рассмотрим положительность $|b_1| > 0$. Запишем расчетную схему для левого граничного условия

$$\hat{y}(-\tau\sigma k_{1/2} + \tau\sigma\frac{b}{\beta_1} - \frac{c\rho h^2}{2}) + \hat{y}_1 \tau\sigma k_{1/2} = -\tau(1-\sigma)(k_{1/2}(y_1 - y) + \frac{h}{\beta_1}(\alpha_1 y - P_1)) - \frac{c\rho h^2}{2} y + \tau\sigma\frac{h}{\beta_1} P_1$$

Заметим, что всегда выполнено условие $|b_1| > 0$. Условие неравенства 0 для c_i очевидно. Заметим, что $|b_1| > |c_1|$. Также накладывается следующее условие

$$|-\tau\sigma k_{1/2} + \tau\sigma\frac{b}{\beta_1} - \frac{c\rho h^2}{2}| > |\tau\sigma k_{1/2}|$$

$$\tau\sigma k_{1/2} + \frac{c\rho h^2}{2} - \tau\sigma\frac{b}{\beta_1} > \tau\sigma k_{1/2}$$

$$\frac{c\rho h^2}{2} - \tau\sigma\frac{b}{\beta_1} > 0$$

Что эквивалентно Теперь проверим для правого граничного условия условие $|b_n| > |a_n|$ Запишем расчетную схему для правого граничного условия

$$\begin{gathered} \hat{y}_{n-1}\tau\sigma k_{n-1/2} + \\ + \hat{y}(-\tau\sigma k_{n-1/2} - \tau\sigma\frac{h}{\beta_2}\alpha_2 - \frac{c\rho h^2}{2}) = f_n \end{gathered}$$

Из схемы видно, что

$$|b_n| > |a_n|$$

Тогда по теореме о корректности и устойчивости метода прогонки

7) В случае $K = K(u)$ чему равно количество внутренних итераций, если итерационный процесс вести до сходимости, а не обрывать после нескольких первых итераций?

Ответ.

Таблица 1. Среднее количество итераций

$\varepsilon = 1e-6$	$\varepsilon = 1e-8$	$\varepsilon = 1e-10$
3	4	5

8) Для случая $K = K(u)$ предложите способы организации внутреннего итерационного процесса или алгоритмы, заменяющие его.

   Ответ. Вместо использования метода простой итерации, можно пользоваться любым итерационным методом для решения нелинейных систем. Например, методом Ньютона. Рассмотрим достоинства и недостатки некоторых итерационных методов. Среди достоинств метода Ньютона можно отметить быструю сходимость (сойдется за 1-2 итерации), однако среди недостатков стоит отметить долгую сходимость в случае попадания начального условия на плато функции. Среди достоинств метода простой итерации отметим простоту реализации, явное вычисление следующих итераций, однако к недостаткам относится более медленная сходимость по сравнению с методом Ньютона.

2. Дополнительные вопросы

1) Записать общее решение уравнения теплопроводности.

   Ответ. Пусть дана следующая задача

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \\ u(x,0) = \phi(x), \\ \alpha_1 u(0,t) - \beta_1 u_t(0,t) = \mu_1(t), \\ \alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_t(l,t) = \mu_2(t), \\ x \in [0,l], t > 0 \end{cases}$$

   Тогда её решение представимо в следующем виде

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e^{-a^2 \lambda_n t} X_n(t) + \int_0^t \int_0^l f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau) d\xi d\tau,$$

$$G(x,\xi,t-\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_n (t-\tau)} X_n(\xi) X_n(x)$$

2) Записать прогочные коэффициенты когда слева задан поток, а справа – постоянная температура

   Ответ. Запишем аппроксимированное левое граничное условие

$$(-\frac{1}{2}c\rho h^2 - \tau\sigma K_{1/2})\hat{y}_0 + \tau\sigma K_{1/2}\hat{y}_1 = -\tau(1-\sigma)(K_{1/2}(y_1 - y_0) - h\check{p}_1/\beta_1) - \frac{1}{2}c\rho h^2 \check{y}_0 + \tau\sigma h\check{p}_2/\beta_1$$

   Представляя

$$\hat{y}_0 = \varkappa \hat{y}_1 + \mu,$$

   получим

$$\varkappa = -\frac{\tau\sigma K_{1/2}}{-\frac{1}{2}c\rho h^2 - \tau\sigma K_{1/2}},$$

$$\mu = \frac{-\tau(1-\sigma)(K_{1/2}(y_1 - y_0) - h\check{p}_1/\beta_1) - \frac{1}{2}c\rho h^2 \check{y}_0 + \tau\sigma h\check{p}_2/\beta_1}{(-\frac{1}{2}c\rho h^2 - \tau\sigma K_{1/2})}$$

Для правого граничного условия:

$$\hat{y}_n = p_2$$

В силу того, что на правом конце ничего аппроксимировать не нужно, то получим

$$\varkappa = 0,$$

$$\mu = p_2$$

3) Пример неконсервативной расчетной схемы

Ответ. Рассмотрим следующую задачу

$$(k(x)u_x)_x = 0, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = 1,$$
$$u(1) = 0$$

Пусть

$$k(x) = \begin{cases} 2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1/2; \\ 1,\ 1/2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Ее точное решение имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2x}{3},\ 0 \leqslant x < 0.5; \\ \frac{4(1-x)}{3},\ 0.5 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

В точке разрыва коэффициента справедливы соотношения $u|_{0.5-0} = u|_{0.5+0}$, $(ku_x)|_{0.5-0} = (ku_x)|_{0.5+0}$ Для решения исходной задачи всюду, кроме точки $x = 0.5$, справедливо уравнение $ku_{xx} = 0$. Для такого уравнение можно записать разностную схему $ky_{\overline{x}x}$. Если узел сетки не поподает на точку разрыва коэффициента, то такая процедура выглядит на первый взгляд вполне приемлимой. Коэффициент $k = 1$ или $k = 2$ в зависимости от точки. Уравнение $ky_{\overline{x}x} = 0$ можно на него разделить и в результате получить совершенно точное решение такой разностной схемы $y = 1 - x$, $y_i = 1 - ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $nh = 1$. При этом норма разности решений точной и приближенной задач равна

$$||y - u_h||_C = 2/3 - 1/2 = 1/6 \not\to 0$$

при $h \to 0$

3. Порядки

Таблица 2. Порядок аппроксимации для схемы $\sigma = 1$

Шаг сетки	p
h, τ	—
$qh, q^2\tau$	3.18332
$q^2h, q^4\tau$	2.13314
$q^3h, q^8\tau$	2.03735
$q^4h, q^{16}\tau$	2.00962

Таблица 3. Порядок аппроксимации для схемы $\sigma = 0.5$

Шаг сетки	p
h, τ	—
$qh, q\tau$	5.33143
$q^2h, q^2\tau$	1.98742
$q^3h, q^3\tau$	1.99696
$q^4h, q^4\tau$	1.99925

Таблица 4. Порядок аппроксимации для схемы $\sigma = 0$

Шаг сетки	p
h, τ	—
$qh, q^2\tau$	2.01596
$q^2h, q^4\tau$	2.00398
$q^3h, q^8\tau$	2.00099
$q^4h, q^{16}\tau$	2.00025