



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки  
КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

ОТЧЕТ  
*К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ*  
*НА ТЕМУ:*

*Численное решение краевых задач для  
одномерного уравнения теплопроводности*  
*Вариант 1*

Студент	ФН2-61Б (Группа)	_____ (Подпись, дата)	Н. О. Акиншин (И. О. Фамилия)
Студент	ФН2-61Б (Группа)	_____ (Подпись, дата)	А. С. Джагарян (И. О. Фамилия)

## Оглавление

1. Контрольные вопросы . . . . .	3
2. Порядки . . . . .	6
3. Дополнительные вопросы . . . . .	6

## 1. Контрольные вопросы

- 1) Предложите разностные схемы, отличные от схемы «крест», для численного решения задачи (3.1)–(3.4).

**Ответ.** Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = \varphi(t) \\ u(l, t) = \psi(t) \end{cases}$$

1. Схема Рундсона (Крест)

$$y_{t\bar{t}} = a^2 y_{x\bar{x}}$$

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2}$$

2. Схема Дюфорта - Франкел (ромб) В схеме Рундсона нужно заменить  $y_i^j = \frac{y_{i-1}^j + y_{i+1}^j}{2}$  Получаем следующие схемы

- 2.1)

$$\frac{y_i^{j+1} - 2(\frac{y_{i-1}^j + y_{i+1}^j}{2}) + y_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^j - 2(\frac{y_{i-1}^{j-1} + y_i^j}{2}) + y_{i+1}^j}{h^2}$$

- 2.2)

$$\frac{y_i^{j+1} - (2(\frac{y_{i-1}^j + y_{i+1}^j}{2})) + y_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^j - 2(\frac{y_{i-1}^{j-1} + y_i^j}{2}) + y_{i+1}^j}{h^2}$$

3. Схема Т(неявный крест)

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2}$$

4. Схема обратная Т (абсолютно явный)

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i+1}^{j-1}}{h^2}$$

5. Схема ступенька вверх

$$y_{t\bar{t}} = a^2 \frac{\hat{y}_x - \check{y}_{\bar{x}}}{h}$$

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{a}{h^2} ((y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - (y_i^{j-1} - y_{i-1}^{j-1}))$$

6. Схема ступенька вниз

$$y_{t\bar{t}} = a^2 \frac{\check{y}_x - \hat{y}_{\bar{x}}}{h}$$

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{a}{h^2} ((y_{i+1}^{j-1} - y_i^{j-1}) - (y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}))$$

7. Схема Почти ступенька вверх

$$y_{t\bar{t}} = a^2 \frac{\hat{y}_x - y_{\bar{x}}}{h}$$

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{a}{h^2} ((y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - (y_i^j - y_{i-1}^j))$$

8. Схема Почти ступенька вниз

$$y_{t\bar{t}} = a^2 \frac{y_x - \hat{y}_{\bar{x}}}{h}$$

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{a}{h^2} ((y_{i+1}^j - y_i^j) - (y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}))$$

9. Схема П (неявная)

$$\frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_{i-1}^j + y_{i-1}^{j-1}}{\tau^2} + \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_{i+1}^j + y_{i+1}^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2}$$

10. Схема П (явная)

$$\frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_{i-1}^j + y_{i-1}^{j-1}}{\tau^2} + \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_{i+1}^j + y_{i+1}^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2}$$

11. Схема перевернутая П (неявная)

$$\frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_{i-1}^j + y_{i-1}^{j-1}}{\tau^2} + \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_{i+1}^j + y_{i+1}^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i+1}^{j-1}}{h^2}$$

- 2) Постройте разностную схему с весами для уравнения колебаний струны. Является ли такая схема устойчивой и монотонной?

**Ответ.**

$$y_{t\bar{t}} = a^2 (\sigma \hat{y}_{x\bar{x}} + (1 - \sigma) y_{x\bar{x}})$$

Исследуем на монотонность

Обозначим  $\gamma = \frac{\tau^2 a^2}{h^2}$

$$\hat{y} - 2y + \check{y} = \gamma (\sigma (\hat{y}_{+1} - 2\hat{y} + \hat{y}_{-1}) + (1 - \sigma) (y_{+1} - 2y + y_{-1}))$$

выразим относительно ведущего элемента  $\hat{y}$  и получим, что коэффициент перед  $\check{y}$  отрицательный. Не выполняется УПК. Схема безусловно не монотонна.

Рассмотрим 9 точечную схему с весами

$$y_{t\bar{t}} = a^2 (\sigma \hat{y}_{x\bar{x}} + (1 - 2\sigma) y_{x\bar{x}} + \sigma \check{y}_{x\bar{x}})$$

$$\frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2} = a^2 \left( \sigma \frac{\hat{y}_{+1} - 2\hat{y} + \hat{y}_{-1}}{h^2} + (1 - 2\sigma) \frac{y_{+1} - 2y + y_{-1}}{h^2} + \sigma \frac{\check{y}_{+1} - 2\check{y} + \check{y}_{-1}}{h^2} \right)$$

Воспользуемся необходимым спектральным признаком устойчивости.  $y_i^j = \rho^j e^{i\tilde{i}\varphi}$

$$\rho^2 - 2 \frac{1 - 2 \left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (1 - 2\sigma)}{1 + 4\sigma \left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \rho + 1 = 0.$$

Для устойчивости необходимо  $\rho_1 \leq 1$ ,  $\rho_2 \leq 1$ . Однако если корни действительные, то в силу теоремы Виета  $\rho_1 * \rho_2 = 1$ , и следовательно один из корней неизбежно будет больше 1. Поэтому необходимо (но не достаточно), чтобы корни были мнимыми. Т.е  $D \leq 1$

$$\left| \frac{1 - 2 \left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (1 - 2\sigma)}{1 + 4\sigma \left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right| \leq 1,$$

Решая, получаем

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4a^2\tau^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4a^2\tau^2}.$$

Проверим схему на монотонность.

$$\frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2} = a^2 \left( \sigma \frac{\hat{y}_{+1} - 2\hat{y} + \hat{y}_{-1}}{h^2} + (1 - 2\sigma) \frac{y_{+1} - 2y + y_{-1}}{h^2} + \sigma \frac{\check{y}_{+1} - 2\check{y} + \check{y}_{-1}}{h^2} \right),$$

Разрешая, относительно ведущего элемента  $\hat{y}$

$$\hat{y}(1 + 2\gamma\sigma) = \gamma\sigma(\hat{y}_{+1}\hat{y}_{-1} + \check{y}_{+1} + \check{y}_{-1}) + \gamma(1 - 2\sigma)(y_{-1} + y_{+1}) + y(2 - 2\gamma(1 - 2\sigma)) + \check{y}(-1 - 2\gamma\sigma)$$

Коэффициент перед  $\check{y}$  отрицательный, значит схема не монотонна.

3) Предложите способ контроля точности полученного решения.

**Ответ.** Пусть у нас есть решение на сетке с шагом  $h$  и  $\tau$ . Хотим узнать на сколько точным оно получилось. Запишем погрешность на двух сетках:  $(h, \tau)$  и  $(h/2, \tau/2)$ :

$$\begin{aligned} \|z_{h,\tau}\| &= C_1\tau^2 + C_2h^2 \\ \|z_{h/2,\tau/2}\| &= \frac{1}{4}(C_1\tau^2 + C_2h^2) \end{aligned}$$

Далее запишем

$$\|z_{h,\tau}\| = \|y_{(h)}^{(\tau)} - u\| = \|y_{(h)}^{(\tau)} - y_{(h/2)}^{(\tau/2)} + y_{(h/2)}^{(\tau/2)} - u\| \leq \|y_{(h)}^{(\tau)} - y_{(h/2)}^{(\tau/2)}\| + \|z_{h/2,\tau/2}\|,$$

где  $y_{(h)}^{(\tau)}$  и  $y_{(h/2)}^{(\tau/2)}$  – решения на текущем временном слое, полученное с помощью соответствующей сетки. Также вычитая погрешности на разных сетках, получим:

$$\|z_{h,\tau}\| - \|z_{h/2,\tau/2}\| = \frac{3}{4}\|z_{h,\tau}\|$$

Тогда подставляя в неравенство

$$\|z_{h,\tau}\| \leq \frac{4}{3}\|y_{(h)}^{(\tau)} - y_{(h/2)}^{(\tau/2)}\|$$

Получили оценку для погрешности на текущей сетке. Теперь рассмотрим способы получения решения на сетке  $(h/2, \tau/2)$ :

- (а) Путем параллельного расчета на двух сетках.
  - (б) Получить промежуточные точки по  $x$  можно с помощью сплайн-интерполяции. Получить промежуточные точки по  $t$  можно с помощью выполнения двух шагов по времени с предыдущего временного слоя.
- 4) Приведите пример трехслойной схемы для уравнения теплопроводности. Как реализовать вычисления по такой разностной схеме? Является ли эта схема устойчивой?

**Ответ.** Схема Дюфорта-Франкела:

$$\frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} = a^2 \frac{y_{+1} - \hat{y}_i - \check{y}_i + y_{-1}}{h^2}$$

Временной слой при  $t = 0$  получаем из начального условия. Далее, чтобы вычислить слой  $t = \tau$ , разложим по формуле Тейлора:

$$y_i^1 = y_i^0 + \tau y_i' + O(\tau^2),$$

где производная вычислена от  $\varphi(x)$ , где  $\varphi(x) = y(x, 0)$ .

Далее будем исследовать на устойчивость. Сделаем замену:

$$y_i^j = \rho^j e^{i\tilde{i}\varphi},$$

где  $\tilde{i} = \sqrt{-1}$ . Подставим в схему с учетом  $\gamma = \frac{\tau a^2}{h^2}$

$$\rho + 1/\rho = 2\gamma \left( e^{i\tilde{i}\varphi} - \rho - \rho^{-1} + e^{-i\tilde{i}\varphi} \right) = 2\gamma (2 \cos \varphi - (\rho + 1/\rho))$$

В итоге получаем

$$\rho = \frac{2\gamma \cos \varphi \pm \sqrt{4\gamma^2 \cos^2 \varphi - 4\gamma^2 + 1}}{1 + 2\gamma}$$

Получаем следующую оценку для  $|\rho|$ :

$$|\rho| \leq \frac{|2\gamma \cos \varphi| + \sqrt{1 - 4\gamma^2 \sin^2 \varphi}}{1 + 2\gamma}$$

Рассмотрим 2 случая:

Пусть  $1 - 4\gamma^2 \sin^2 \varphi > 0$ :

$$|\rho| < 1 - \frac{1}{1 + 2\gamma} + \frac{\sqrt{1 - 4\gamma^2}}{1 + 2\gamma} < 1 - \frac{1}{1 + 2\gamma} + \frac{1}{1 + 2\gamma} < 1$$

Пусть  $1 - 4\gamma^2 \sin^2 \varphi < 0$ :

$$|\rho|^2 = \frac{4\gamma \cos^2 \varphi + (1 - 4\gamma^2 \sin^2 \varphi)}{(1 + 2\gamma)^2} = \frac{1 + 4\gamma(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{1 + 4\gamma^2 + 4\gamma} < \frac{1 + 4\gamma}{1 + 4\gamma^2 + 4\gamma} < 1$$

Тогда получаем, что схема безусловно устойчива.

## 2. Порядки

Таблица 1. Порядок аппроксимации

Шаг сетки	$p$
$h, \tau$	—
$qh, q\tau$	2.810873236323846
$q^2h, q^2\tau$	2.220212471275546
$q^3h, q^3\tau$	1.999999999999998
$q^4h, q^4\tau$	2.00006100061483

## 3. Дополнительные вопросы

- 1) Уравнение колебаний, физ. величины, тип уравнений, характеристики.

**Ответ.**

Уравнение колебаний – гиперболическое уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

$u$  – отклонение струны от Ох,  $[u] = \text{м}$ ,  $[u_{tt}] = \text{м} / (\text{с}^2 \cdot \text{с})$ ,  $u_{xx} = 1 / \text{м}$ .  $a$  – скорость распространения волны Найдём характеристики из характеристического уравнения.

$$(dx)^2 = a^2 (dy)^2$$

$$(dx - adt)(dx + adt) = 0$$

Характеристики  $x + at = const$ ,  $x - at = const$ .

2) Схема Крест Монотонность

**Ответ.**

$$\frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} = a^2 \frac{y_{+1} - 2y + y_{-1}}{h^2}$$

выражая относительно ведущего узла, имеем

$$y(2\gamma - 2) = (y_{+1} + y_{-1})\gamma - \check{y} - \hat{y}$$

Не выполняется УПК, значит схема не монотонна.

3) Почему используем явные схемы?

**Ответ.** Явные схемы лучше неявных т.к. из формулы Даламбера

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(y) dy$$

Следует, что решение у текущем узле определяется только узлами с предыдущего временного слоя, а именно  $y_i^{j+1}$  определяется  $y_{i-1}^j$ ,  $y_{i+1}^j$ . При использовании неявной схемы на текущий узел  $y_i^{j+1}$  влияют  $y_{i-1}^{j+1}$ ,  $y_{i+1}^{j+1}$ , чего теоретически быть не должно. Поэтому явные схемы лучше работают по сравнению с неявными.

4) Схема Ричардсона

**Ответ.** Запишем схему:

$$y_t = a^2 y_{x\bar{x}}$$

Раскрывая, получим

$$\frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} = a^2 \frac{y_{+1} - 2y + y_{-1}}{h^2}$$

Выбрав за ведущий узел  $\hat{y}$ , запишем в каноническом виде при  $\gamma = \frac{a^2\tau}{h^2}$

$$\hat{y} = \frac{1}{2}\check{y} + \gamma y_{+1} - 2\gamma y + \gamma y_{-1}$$

В силу того, что  $\gamma > 0$ , то схема не монотонна.

Исследуем схему на устойчивость, применяя метод гармоник, при  $y_i^j = \rho^j e^{ii\varphi}$  получим:

$$\rho^2 + 8\rho\gamma \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1 = 0;$$

$$D > 0 \Rightarrow \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho_1 \cdot \rho_2 = -1;$$

$$\rho_1 = -\frac{1}{\rho_2} \Rightarrow \exists |\rho| > 1 \Rightarrow \text{схема безусловно неустойчива.}$$