Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

ОТЧЕТ

К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ:

Численное решение краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности

Вариант 1

Студент	ФН2-61Б (Группа)	(Подпись, дата)	Н. О. Акиньшин (И. О. Фамилия)
Студент	ФН2-61Б (Группа)	(Подпись, дата)	А. С. Джагарян (И. О. Фамилия)

2025 г.

Оглавление

1. Контрольные вопросы

1) Оцените число действий, необходимое для перехода на следующий слой по времени методом переменных направлений.

   Ответ. схема получается 2умя полушагами

$$\frac{\bar{y}-y}{0.5\tau} = \Lambda_1\bar{y} + \Lambda_2\bar{y} + \bar{\phi}$$

$$\frac{\hat{y}-\bar{y}}{0.5\tau} = \Lambda_1\bar{y} + \Lambda_2\hat{y} + \bar{\phi}$$

   с помощью метода прогнки. Требуется $(n_2-1)(5n_1-1)$ для 1ого полушага и $(n_1-1)(5n_2-1)$ Итого требуется $(n_2-1)(5n_1-1)+(n_1-1)(5n_2-1)$ порядка n^2

2) Почему при увеличении числа измерений резко возрастает количество операций для решения неявных схем (по сравнению с одномерной схемой)?

   Ответ. При увеличении измерения на 1, на каждый шаг по добавленному измерению необходимо по количеству операций, которое требуется для вычисления аналогичной задачи при количестве измерений на одно меньше. То есть при увеличении количества измерений происходит экспоненциальный рост числа операицй.

   Пусть пространство разбито равномерной сеткой с количеством узлов M. Тогда выполняя прогонки при решении задачи для 2D случая, получаем $O(M^2)$ операций, при расширении пространства до 3D на каждую шаг по z теперь требуется выполнить $(5M-1)\cdot O(M^2) = O(M^3)$. Тогда для произвольного пространства размерности n количество операций равно $O(M^n)$

3) Можно ли использовать метод переменных направлений в областях произвольной формы?

   Ответ. Пусть область является выпуклой. Тогда зададим для внутренних точек равномерную прямоугольную сетку. Получим сетку на границе области путём проецирования внутренних точек вдоль орт декартовой системы координат. Тогда метод будет отличаться от классического наличием переменного шага в прогонке и различием в количестве узлов вдоль осей.

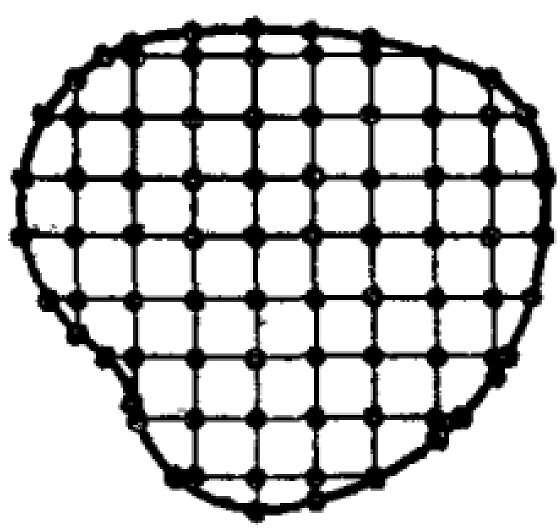

Рис. 1. Зависимость количества итераций от шага τ

Однако метод теряет порядок по τ, и в итоге получается безусловно устойчивая схема с порядком $O(\tau + \sum_i h_i^2)$.

4) Можно ли использовать метод переменных направлений для решения пространственных и вообще n-мерных задач?

Ответ. Можно использовать следующий метод

$$\frac{y^{k+1/n} - y^k}{\tau/n} = \Lambda_1 y^{k+1/n} + \Lambda_2 y^k + \ldots + \Lambda_n y^k + \phi$$
$$\frac{y^{k+2/n} - y^{k+1/n}}{\tau/n} = \Lambda_1 y^{k+1/n} + \Lambda_2 y^{k+2/n} + \ldots + \Lambda_n y^{k+1/n} + \phi$$
$$\vdots$$
$$\frac{y^{k+1} - y^{k+(n-1)/n}}{\tau/n} = \Lambda_1 y^{k+(n-1)/n} + \Lambda_2 y^{k+(n-1)/n} + \ldots + \Lambda_n y^{k+1} + \phi,$$

где n – размерность пространства. В силу несимметричности схемы, компенсация ошибок будет осутствовать, поэтому схема не будет аппроксимировать уравнение. Для такой задачи можно использовать метод дробных шагов.

Рассмотрим метод дробных шагов подробнее. Будем искать решение на промежуточных слоях с помощью следующей схемы

$$\frac{1}{\tau}(\hat{w}_\alpha - w_\alpha) = \frac{1}{2}\Lambda_\alpha \hat{w}_\alpha(\hat{w}_\alpha + w_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$
$$w_1 = y, w_2 = \hat{w}_1, w_3 = \hat{w}_2, \ldots, w_p = \hat{w}_{p-1}, \hat{y} = \hat{w}_p$$

На целых слоях схема обладает $O(\tau^2 + \sum_\alpha h_\alpha^2)$

5) Можно ли использовать метод переменных направлений на неравномерных сетках?

Ответ. Да.

$$\frac{y^{k+1/2} - y^k}{\tau/2} = \Lambda_1 y^{k+1/2} + \Lambda_2 y^k$$
$$\frac{y^{k+1} - y^{k+1/2}}{\tau/2} = \Lambda_1 y^{k+1/2} + \Lambda_2 y^{k+1}$$

где Λ_1, Λ_2

$$\Lambda_1 y^k = \frac{y^k_{i-1,j} - 2y^k_{i,j} + y^k_{i+1,j}}{(h_i^1)^2}$$
$$\Lambda_2 y^k = \frac{y^k_{i,j-1} - 2y^k_{i,j} + y^k_{i,j+1}}{(h_i^2)^2}$$

При выборе шагов таким образом, что выполняется условия устойчивости прогонки, данный метод можно использовать на неравномерных сетках. Но стоит отметить, что тогда условие симметрии пропадает, из-за этого перестает взаимноуничтожаться условный порядок сходимости, что в следствии уменьшает итоговый порядок до первого по τ.

2. Результаты

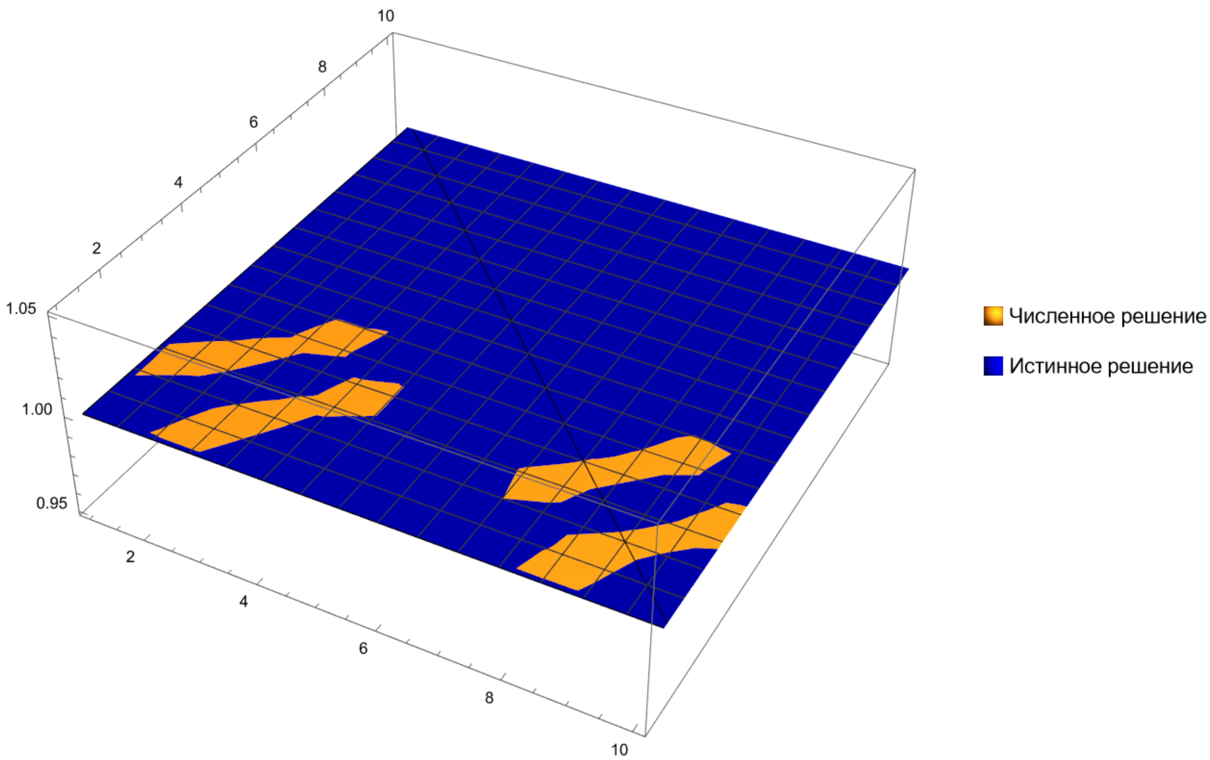

Рис. 2. Пример 1. График численного и истинного решений

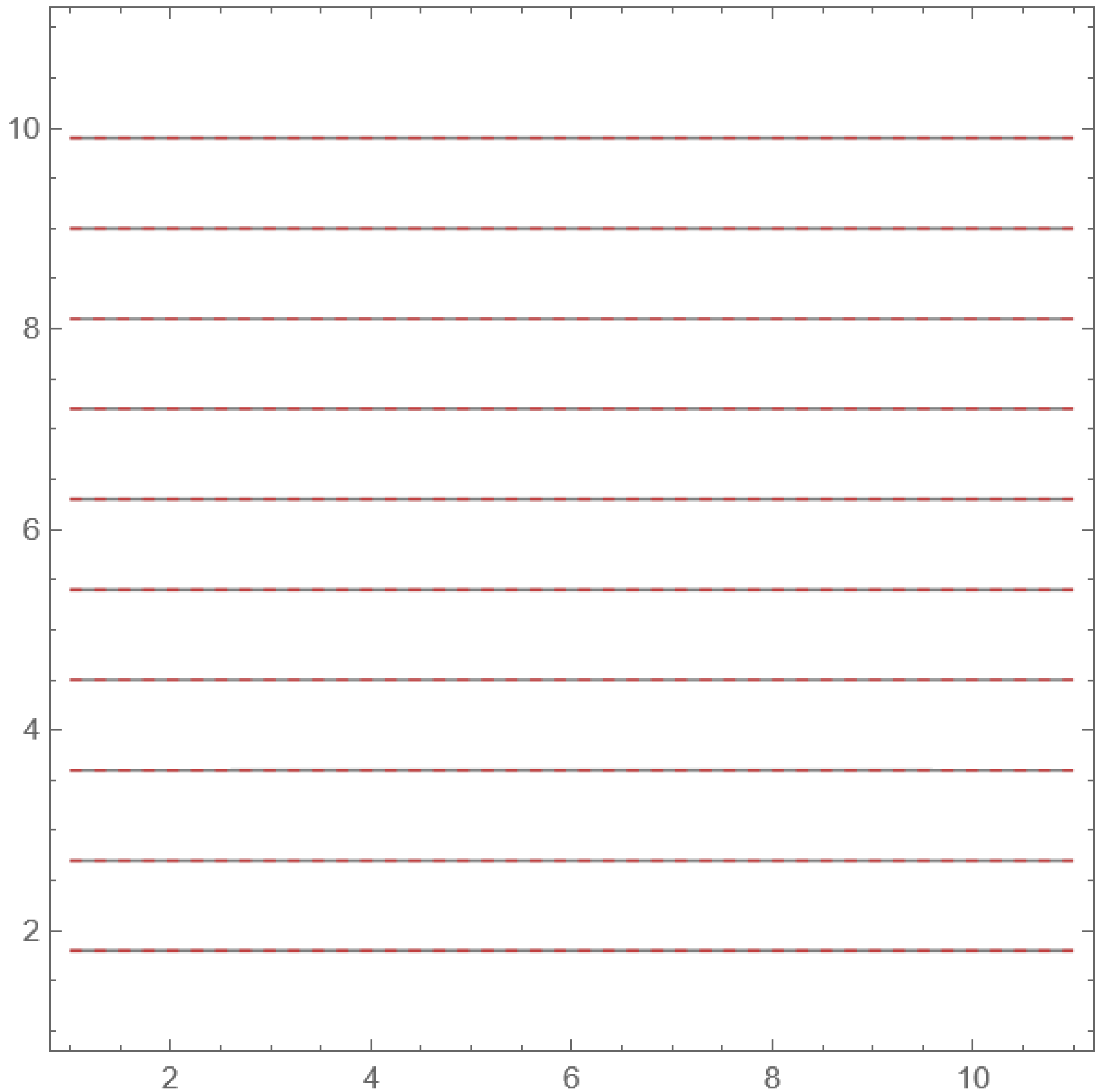

Рис. 3. Пример 2. График численного и истинного решений. Красные линии уровня - линии уровня истинного решения, черные линии уровня - линии уровня численного решения

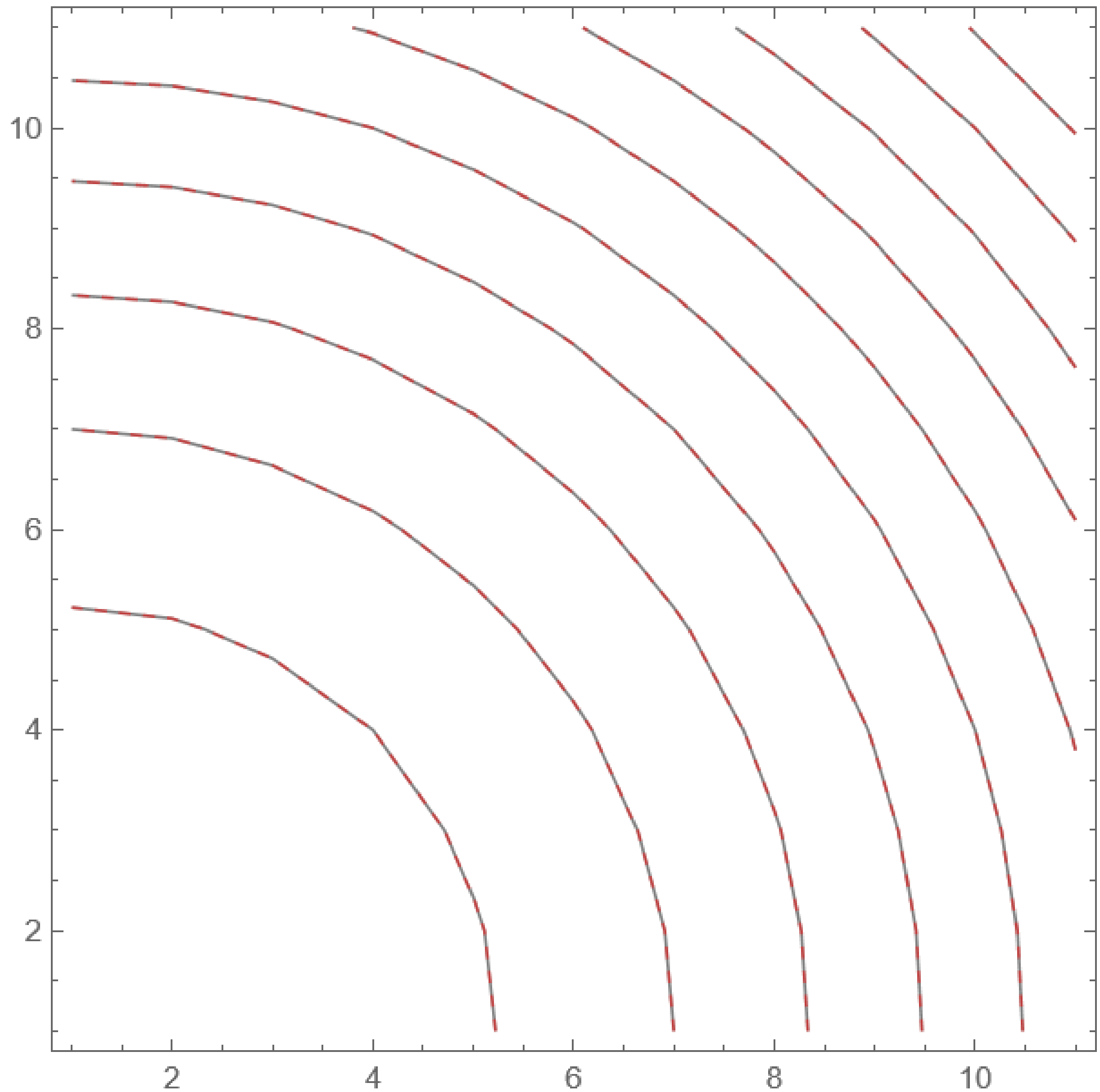

Рис. 4. Пример 3. График численного и истинного решений. Красные линии уровня - линии уровня истинного решения, черные линии уровня - линии уровня численного решения

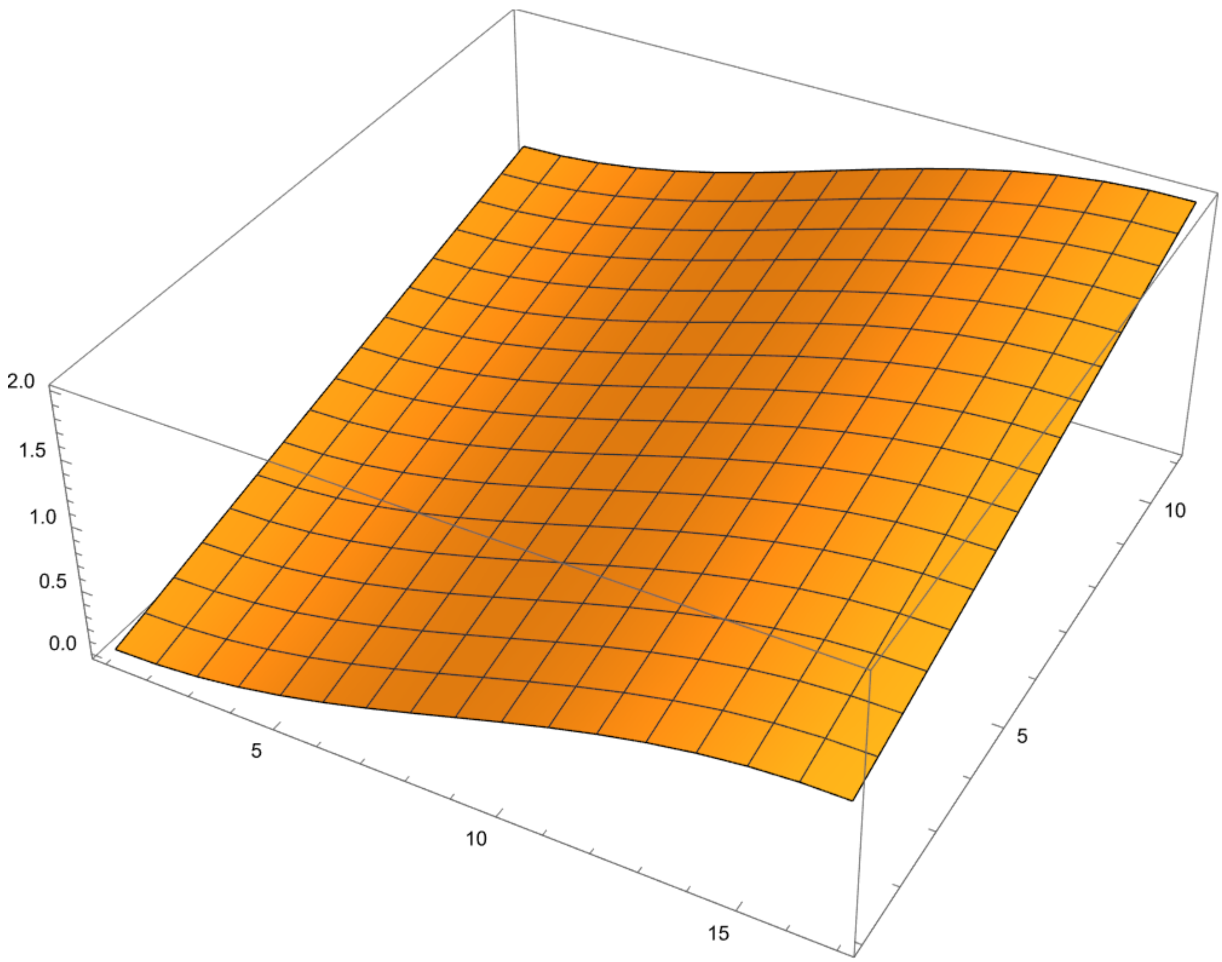

Рис. 5. Пример для варианта 1. График численного решения

3. Порядки

Порядки вычислены для следующей задачи

$$u_t - \Delta u = 0,$$
$$u|_{t=0} = \sin(2\pi x)\sin(\pi y)$$
$$u|_{(x,y)\in\partial D} = 0,$$
$$D = [0,1]\times[0,1].$$

Её аналитическое решение определяется

$$u(x,y,t) = e^{-5\pi^2 t}\sin(2\pi x)\sin(\pi y)$$

Таблица 1. Порядок аппроксимации

Шаг сетки	z_{n-1}/z_n
h_1, h_2, τ	—
$qh_1, qh_2, q\tau$	3.88543
$q^2h_1, q^2h_2, q^2\tau$	4.0218
$q^3h_1, q^3h_2, q^3\tau$	4.00548
$q^4h_1, q^4h_2, q^4\tau$	4.00034

4. Оптимальные шаги

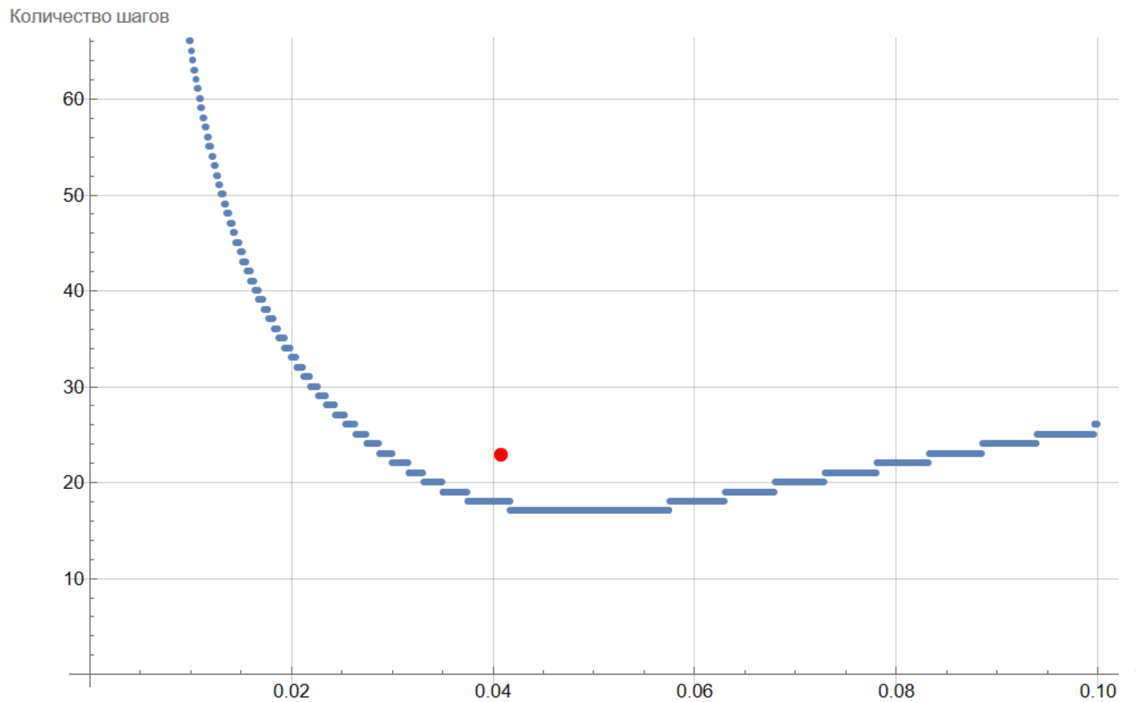

Рис. 6. Зависимость количества итераций от шага τ

При шаге $\tau = 0.041$ (теоретическая оценка) получилась погрешность $\Delta = 1.18087e - 06$, при $\tau = 0.05$ (практическая оценка) получилась погрешность $\Delta = 4.14243e - 06$.