Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

ОТЧЕТ
К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:

Методы решения нелинейных уравнений
Вариант 1

Студент ФН2-51Б (Группа) ________ (Подпись, дата) Н. О. Акиньшин (И. О. Фамилия)

Студент ФН2-51Б (Группа) ________ (Подпись, дата) А. С. Джагарян (И. О. Фамилия)

2024 г.

Оглавление

1. Контрольные вопросы

1) Можно ли использовать методы бисекции и Ньютона для нахождения кратных корней уравнения $f(x) = 0$ (т. е. тех, в которых одна или несколько первых производных функций $f(x)$ равны нулю)? Обоснуйте ответ.

   Ответ. Рассмотрим метод бисекции. Если корень имеет четную кратность, то метод бисекции окажется неприменим, т.к. $f(x_1)f(x_2) > 0$. То есть на границах локализации значения функции имеют один знак. Однако если корень имеет нечётную кратность, то такое свойство не выполняется, поэтому можно использовать метод бисекции.
   Рассмотрим метод Ньютона:
   $$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}.$$
   Пусть корень уравнения $f(x) = 0$ кратности m в точке x_0, т.е.
   $$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$$
   Тогда при $x^k \to x_0$
   $$x^{k+1} = x_0 - \lim_{x^k \to x_0} \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$
   Рассмотрим отдельно
   $$\lim_{x^k \to x_0} \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} = \lim_{x^k \to x_0} \frac{f'(x^k)}{f''(x^k)} = \ldots = \lim_{x^k \to x_0} \frac{f^{(m-1)}(x^k)}{f^{(m)}(x^k)} = 0$$
   Значит если $x^k \approx x_0$, то $x^{(k+1)} \to x_0$ при $k \to \infty$.

2) При каких условиях можно применять метод Ньютона для поиска корней уравнения $f(x) = 0,\ x \in [a, b]$? При каких ограничениях на функцию $f(x)$ метод Ньютона обладает квадратичной скоростью сходимости? В каких случаях можно применять метод Ньютона для решения систем нелинейных уравне- ний?

   Ответ. Теорема. Пусть функция $F(x)$ липшиц-непрерывна с постоянной $q \in (0; 1)$ на отрезке $[c-\delta; c+\delta]$ т.е. верно $\forall x', x'' \in [c-\delta; c+\delta]\ |F(x')-F(x'')| \leqslant q|x'-x''|$ и верно $|F(c)-c \leqslant (1-q)\delta|$
   Тогда уравнение $x = F(x)$ имеет единственное решение x_*
   Следствие. Если вместо условия липшиц-непрерывности функции $F(x)$ верно неравенство $|F'(x)| \leqslant q < 1$ на $[c - \delta; c + \delta]$, то уравнение $x = F(x)$ имеет единственное решение x_*.
   Метод Ньютона для решения уравнения можно применять, если метод сходиться. Рассмотрим условия, при которых метод сходиться. Метод Ньютона имеет вид $x^{k+1} = x^k - f(x^k)/f'(x^k)$. $F(x) = x - f(x)/f'(x)$. Тогда $F'(x) = f * f''/(f')^2$. Пусть на отрезке $[a, b]$ выполнено $|f'(x)| \geqslant m > 0$, $|f''(x)| \leqslant M$. Тогда существует ε окрестность корня x_*, что если начально приближение лежит в этой окрестности, то итерационный процесс сходится к корню т.к верна оценка $|F'(x)| = |\frac{ff''}{(f')^2}| \leqslant \frac{|f|}{m^2}M$. Из непрерывности функции $f(x)$ следует, что для любого q найдется окрестность корня, в которой справедливо $|f(x)| \leqslant qm^2/M$. Следовательно $|F'(x)| = q \leqslant 1$ т.е выполнены условия следствия поэтому метод Ньютона сходится при выборе начального приближения из соответствующей окрестности.
   Оценим погрешность метода Ньютона. По формуле Тейлора.
   $$f(x_*) = f(x^k) + f'(x^k)(x_* - x^k) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x^k - x_*)^2 = 0$$

Тогда

$$x^{k+1} = x^k - f(x^k)/f'(x^k) = x^k - \frac{f(x^k) - f(x_*)}{f'(x^k)} = x_* + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x^k)(x^k - x_*)^2}$$

Следовательно верно $|x^{k+1} - x_*| \leqslant \frac{M}{2m}|x^k - x_*|^2$. Таким образом Метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости, если $f'(x) \neq 0$. В противном случае скорость сходимости снижается до линейной.

Метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений имеет вид $F'(x^k)(x^{k+1} - x^k) + F(x^k) = 0$. Таким образом аналогично одномерному случаю нужно чтобы существовала обратная матрица к $F'(x^k)$.

3) Каким образом можно найти начальное приближение?

Ответ. Начальное приближение корня можно найти используя метод вилки для локализации корней. Тогда для каждого корня x_k^* будут найдены границы $[x_k^{(1)}, x_k^{(2)}]$. И начальное приближение $x_k^{(0)}$ можно выбирать как $x_k^{(0)} = \dfrac{x_k^{(2)} + x_k^{(1)}}{2}$. Этот способ требует некоторого количества итераций.

Если у уравнения $f(x) = 0$ имеется 1 корень нечетной кратности на отрезке $[a, b]$, то начальное приближение можно найти за $O(1)$, используя метод хорд:

$$x^{(0)} = \frac{f(a) \cdot b - f(b) \cdot a}{f(a) - f(b)}$$

Данная точка получена путём пересечения прямой, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

4) Можно ли использовать метод Ньютона для решения СЛАУ?

Ответ. Метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений имеет вид $F'(x^k)(x^{k+1} - x^k) + F(x^k) = 0$. Пусть СЛАУ имеет вид $Ax = f$. Тогда $F(x) = Ax - f$. Заметим, что $F'(x) = A$ в силу линейности. Тогда метод Ньютона имеет вид $A(x^{k+1} - x^k) + Ax^k - f$ т.е $Ax^{k+1} = f$ т.е решение СЛАУ на прямую каким либо методом и с помощью метода Ньютона это одно и то же. Следовательно особого смысла использовать метод Ньютона при решении СЛАУ нет.

5) Предложите альтернативный критерий окончания итераций в методе бисекции, в котором учитывалась бы возможность попадания очередного приближения в очень малую окрестность корня уравнения.

Ответ. Новый критерий будет выглядеть следующим образом:
$|x^{k+1} - x^k| < \varepsilon$ `OR` $|f(x^{k+1})| < \varepsilon_0$ `OR` $iters < MAXITER$

6) Предложите различные варианты модификаций метода Ньютона. Укажите их достоинства и недостатки.

Ответ. Рассмотрим различные модификации метода Ньютона в одномерном случаи. 1) Для вычисления производной функции в точке требуется 2 вычисления значения функции, если функция сложная, то имеет смысл в методе Ньютона выбрать точку и на каждой итерации производную считать в ней. Также данный способ хорош тем, что в процессе метода не получиться выйти за исследуемую область т.к. производная берется на каждой итерации одна и та же 2) Также можно рассмотреть следующую модификацию имеющую 3ей порядок сходимости

$$x^{k+1} = x^k - f(x^k)/f'(x^k) - \frac{f(x^k - f(x^k)f'(x^k)^{-1})}{f'(x^k)}$$

Модификации метода Ньютона в многомерном случаи. Классический метод Ньютона имеет вид $F'(x^k)(x^{k+1} - x^k) + F(x^k) = 0$ 1)Аналогично одномерному случаи можно зафиксировать точку в которой считается матрица Якоби.

2)Можно ввести параметр в метод Ньютона т.е рассмотреть алгоритм $F'(x^k)\frac{(x^{k+1}-x^k)}{\tau_{k+1}} + F(x^k) = 0$ 3) Кроме того в процессе метода Ньютона требуется решать СЛАУ, для решения можно применять различные алгоритмы: Гаусса, QR, методом простой итерации, Якоби, Зейделем, релаксацией.

7) Предложите алгоритм для исключения зацикливания метода Ньютона и выхода за пределы области поиска решения?

Ответ. Заметим, что зацикливание метода Ньютона происходит означает, что алгоритм выдаёт одну и ту же последовательность точек x^k с некоторым периодом. То есть

$$x^{k+T+1} = x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)},$$

где $T \in \mathbb{N}$ – период. Это может происходить только в некоторых точках (не более, чем счетном множестве точек) области определения функции $f(x)$, в силу того, что $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ – счётно. Для борьбы с зацикливанием в формуле следующего приближения x^{k+1} можно всегда добавлять некоторое малое число ε_0. Тогда формула преобразуется

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} + \varepsilon_0,$$

Из-за этого добавления алгоритм не перестанет сходиться (может увеличиться число итераций) для тех уравнений, в которых нет зацикливания.

Рассмотрим выход за границу поиска решений.

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \notin [a,\, b]$$

Тогда в таких случаях будет задавать x^{k+1} в некоторой малой окрестности границ поиска решений, то есть

if $x^{k+1} < a$ **then**
    $x^{k+1} = a + \varepsilon_0$
end if
if $x^{k+1} > b$ **then**
    $x^{k+1} = b - \varepsilon_0$
end if

Тогда итоговый алгоритм имеет вид

while $(|x^k - x^{k+1}| > \varepsilon)$ and $(iterations < MAXITER)$ **do**
    $iterations++;$
    $x^k = x^{k+1}$
    $x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} + \varepsilon_0$
    if $x^{k+1} < a$ **then**
        $x^{k+1} = a + \varepsilon_0$
    end if
    if $x^{k+1} > b$ **then**
        $x^{k+1} = b - \varepsilon_0$
    end if
end while

2. Результаты

Таблица 1. Исследование скорости сходимости функции $y = \sin(\pi x)$, $h = 0.5$, $q = 0.5$ для сплайн-интерполяции

n	$\lvert x^{k+1} - x^k \rvert$	$x_k - x*$	Скорость сходимости p	
1	h	1.39461	—	—
2	qh	0.764926	0.548487	0.86647
3	q^2h	0.390168	0.510073	0.971225
4	q^3h	0.196034	0.502435	0.992992
5	q^4h	0.0981353	0.500603	0.99826