**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»**
**(МГТУ им. Н. Э. Баумана)**

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

# ОТЧЕТ

# *К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ*

# *НА ТЕМУ:*

## *Методы решения нелинейных уравнений*

## *Вариант 1*

Студент ФН2-51Б (Группа) _______ (Подпись, дата) Н. О. Акиньшин (И. О. Фамилия)

Студент ФН2-51Б (Группа) _______ (Подпись, дата) А. С. Джагарян (И. О. Фамилия)

2024 г.

# Оглавление

# 1. Контрольные вопросы

1) Можно ли использовать методы бисекции и Ньютона для нахождения кратных корней уравнения $f(x) = 0$ (т. е. тех, в которых одна или несколько первых производных функций $f(x)$ равны нулю)? Обоснуйте ответ.

   **Ответ.** Рассмотрим метод бисекции. Если корень имеет четную кратность, то метод бисекции окажется неприменим, т.к. $f(x_1)f(x_2) > 0$. То есть на границах локализации значения функции имеют один знак. Однако если корень имеет нечётную кратность, то такое свойство не выполняется, поэтому можно использовать метод бисекции.
   Рассмотрим метод Ньютона:
$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}.$$
   Пусть корень уравнения $f(x) = 0$ кратности $m$ в точке $x_0$, т.е.
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$$
   Тогда при $x^k \to x_0$
$$x^{k+1} = x_0 - \lim_{x^k \to x_0} \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$
   Рассмотрим отдельно
$$\lim_{x^k \to x_0} \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} = \lim_{x^k \to x_0} \frac{f'(x^k)}{f''(x^k)} = \ldots = \lim_{x^k \to x_0} \frac{f^{(m-1)}(x^k)}{f^{(m)}(x^k)} = 0$$
   Значит если $x^k \approx x_0$, то $x^{(k+1)} \to x_0$ при $k \to \infty$.

2) При каких условиях можно применять метод Ньютона для поиска корней уравнения $f(x) = 0, \ x \in [a, b]$? При каких ограничениях на функцию $f(x)$ метод Ньютона обладает квадратичной скоростью сходимости? В каких случаях можно применять метод Ньютона для решения систем нелинейных уравне- ний?

   **Ответ.** Теорема. Пусть функция $F(x)$ липшиц-непрерывна с постоянной $q \in (0; 1)$ на отрезке $[c-\delta; c+\delta]$ т.е. верно $\forall x', x'' \in [c-\delta; c+\delta]\ |F(x')-F(x'')| \leqslant q|x'-x''|$ и верно $|F(c)-c \leqslant (1-q)\delta|$ Тогда уравнение $x = F(x)$ имеет единственное решение $x_*$
   Следствие. Если вместо условия липшиц-непрерывности функции $F(x)$ верно неравенство $|F'(x)| \leqslant q < 1$ на $[c - \delta; c + \delta]$, то уравнение $x = F(x)$ имеет единственное решение $x_*$.
   Метод Ньютона для решения уравнения можно применять, если метод сходиться. Рассмотрим условия, при которых метод сходиться. Метод Ньютона имеет вид $x^{k+1} = x^k - f(x^k)/f'(x^k)$. $F(x) = x - f(x)/f'(x)$. Тогда $F'(x) = f * f''/(f')^2$. Пусть на отрезке $[a, b]$ выполнено $|f'(x)| \geqslant m > 0$, $|f''(x)| \leqslant M$. Тогда существует $\varepsilon$ окрестность корня $x_*$, что если начально приближение лежит в этой окрестности, то итерационный процесс сходится к корню т.к верна оценка $|F'(x)| = |\frac{ff''}{(f')^2}| \leqslant \frac{|f|}{m^2}M$. Из непрерывности функции $f(x)$ следует, что для любого $q$ найдется окрестность корня, в которой справедливо $|f(x)| \leqslant qm^2/M$. Следовательно $|F'(x)| = q \leqslant 1$ т.е выполнены условия следствия поэтому метод Ньютона сходится при выборе начального приближения из соответствующей окрестности.
   Оценим погрешность метода Ньютона. По формуле Тейлора.
$$f(x_*) = f(x^k) + f'(x^k)(x_* - x^k) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x^k - x_*)^2 = 0$$

Тогда

$$x^{k+1} = x^k - f(x^k)/f'(x^k) = x^k - \frac{f(x^k) - f(x_*)}{f'(x^k)} = x_* + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x^k)(x^k - x_*)^2}$$

Следовательно верно $|x^{k+1} - x_*| \leqslant \frac{M}{2m}|x^k - x_*|^2$. Таким образом Метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости, если $f'(x) \neq 0$. В противном случае скорость сходимости снижается до линейной.

Метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений имеет вид $F'(x^k)(x^{k+1} - x^k) + F(x^k) = 0$. Таким образом аналогично одномерному случаю нужно чтобы существовала обратная матрица к $F'(x^k)$.

3) Каким образом можно найти начальное приближение?

   **Ответ.** Начальное приближение корня можно найти используя метод вилки для локализации корней. Тогда для каждого корня $x_k^*$ будут найдены границы $[x_k^{(1)}, x_k^{(2)}]$. И начальное приближение $x_k^{(0)}$ можно выбирать как $x_k^{(0)} = \dfrac{x_k^{(2)} + x_k^{(1)}}{2}$. Этот способ требует некоторого количества итераций.

   Если у уравнения $f(x) = 0$ имеется 1 корень нечетной кратности на отрезке $[a, b]$, то начальное приближение можно найти за $O(1)$, используя метод хорд:

$$x^{(0)} = \frac{f(a) \cdot b - f(b) \cdot a}{f(a) - f(b)}$$

   Данная точка получена путём пересечения прямой, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

4) Можно ли использовать метод Ньютона для решения СЛАУ?

   **Ответ.** Метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений имеет вид $F'(x^k)(x^{k+1} - x^k) + F(x^k) = 0$. Пусть СЛАУ имеет вид $Ax = f$. Тогда $F(x) = Ax - f$. Заметим, что $F'(x) = A$ в силу линейности. Тогда метод Ньютона имеет вид $A(x^{k+1} - x^k) + Ax^k - f$ т.е $Ax^{k+1} = f$ т.е решение СЛАУ на прямую каким либо методом и с помощью метода Ньютона это одно и то же. Следовательно особого смысла использовать метод Ньютона при решении СЛАУ нет.

5) Предложите альтернативный критерий окончания итераций в методе бисекции, в котором учитывалась бы возможность попадания очередного приближения в очень малую окрестность корня уравнения.

   **Ответ.** Новый критерий будет выглядеть следующим образом:
   $|x^{k+1} - x^k| < \varepsilon$ `OR` $|f(x^{k+1})| < \varepsilon_0$ `OR` $iters < MAXITER$

6) Предложите различные варианты модификаций метода Ньютона. Укажите их достоинства и недостатки.

   **Ответ.** Рассмотрим различные модификации метода Ньютона в одномерном случаи. 1) Для вычисления производной функции в точке требуется 2 вычисления значения функции, если функция сложная, то имеет смысл в методе Ньютона выбрать точку и на каждой итерации производную считать в ней. Также данный способ хорош тем, что в процессе метода не получиться выйти за исследуемую область т.к. производная берется на каждой итерации одна и та же 2) Также можно рассмотреть следующую модификацию имеющую 3ей порядок сходимости

$$x^{k+1} = x^k - f(x^k)/f'(x^k) - \frac{f(x^k - f(x^k)f'(x^k)^{-1})}{f'(x^k)}$$

   Модификации метода Ньютона в многомерном случаи. Классический метод Ньютона имеет вид $F'(x^k)(x^{k+1} - x^k) + F(x^k) = 0$ 1)Аналогично одномерному случаи можно зафиксировать точку в которой считается матрица Якоби.

2)Можно ввести параметр в метод Ньютона т.е рассмотреть алгоритм $F'(x^k)\frac{(x^{k+1}-x^k)}{\tau_{k+1}} + F(x^k) = 0$ 3) Кроме того в процессе метода Ньютона требуется решать СЛАУ, для решения можно применять различные алгоритмы: Гаусса, QR, методом простой итерации, Якоби, Зейделем, релаксацией.

7) Предложите алгоритм для исключения зацикливания метода Ньютона и выхода за пределы области поиска решения?

**Ответ.** Заметим, что зацикливание метода Ньютона происходит означает, что алгоритм выдаёт одну и ту же последовательность точек $x^k$ с некоторым периодом. То есть

$$x^{k+T+1} = x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)},$$

где $T \in \mathbb{N}$ – период. Это может происходить только в некоторых точках (не более, чем счетном множестве точек) области определения функции $f(x)$, в силу того, что $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ – счётно. Для борьбы с зацикливанием в формуле следующего приближения $x^{k+1}$ можно всегда добавлять некоторое малое число $\varepsilon_0$. Тогда формула преобразуется

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} + \varepsilon_0,$$

Из-за этого добавления алгоритм не перестанет сходиться (может увеличиться число итераций) для тех уравнений, в которых нет зацикливания.

Рассмотрим выход за границу поиска решений.

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \notin [a,\, b]$$

Тогда в таких случаях будет задавать $x^{k+1}$ в некоторой малой окрестности границ поиска решений, то есть

**if** $x^{k+1} < a$ **then**
    $x^{k+1} = a + \varepsilon_0$
**end if**
**if** $x^{k+1} > b$ **then**
    $x^{k+1} = b - \varepsilon_0$
**end if**

Тогда итоговый алгоритм имеет вид

**while** $(|x^k - x^{k+1}| > \varepsilon)$ and $(iterations < MAXITER)$ **do**
    $iterations + +;$
    $x^k = x^{k+1}$
    $x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} + \varepsilon_0$
    **if** $x^{k+1} < a$ **then**
        $x^{k+1} = a + \varepsilon_0$
    **end if**
    **if** $x^{k+1} > b$ **then**
        $x^{k+1} = b - \varepsilon_0$
    **end if**
**end while**

# 2. Результаты

Таблица 1. Исследование скорости сходимости методом Ньютона примера из варианта с точной производной

| $n$ | $\lvert x^{k+1} - x^k \rvert$ | $\lvert x_k - x* \rvert$ | Скорость сходимости $p \geqslant \frac{\ln \lvert \frac{x^{k+1}-x^*}{x^k-x^*} \rvert}{\ln \lvert \frac{x^k-x^*}{x^{k-1}-x^*} \rvert}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.115399 | 0.0698055 | -inf |
| 2 | 0.0537737 | 0.0160318 | 1.50771 |
| 3 | 0.0147672 | 0.00126461 | 1.72642 |
| 4 | 0.00125545 | 9.16016e-06 | 1.94017 |
| 5 | 9.15967e-06 | 4.87457e-10 | 1.99713 |
| 6 | 4.87456e-10 | 1.22125e-15 | 1.31052 |

Таблица 2. Исследование скорости сходимости методом Ньютона примера из варианта с численной производной

| $n$ | $\lvert x^{k+1} - x^k \rvert$ | $\lvert x_k - x* \rvert$ | Скорость сходимости $p \geqslant \frac{\ln \lvert \frac{x^{k+1}-x^*}{x^k-x^*} \rvert}{\ln \lvert \frac{x^k-x^*}{x^{k-1}-x^*} \rvert}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.115399 | 0.0698055 | -inf |
| 2 | 0.0537737 | 0.0160318 | 1.50771 |
| 3 | 0.0147672 | 0.00126461 | 1.72642 |
| 4 | 0.00125545 | 9.16006e-06 | 1.94018 |
| 5 | 9.15957e-06 | 4.86101e-10 | 1.99769 |
| 6 | 4.86099e-10 | 1.88738e-15 | 1.26565 |

Таблица 3. Исследование скорости сходимости методом секущих примера из варианта

| $n$ | $\lvert x^{k+1} - x^k \rvert$ | $\lvert x_k - x* \rvert$ | Скорость сходимости $p \geqslant \frac{\ln \lvert \frac{x^{k+1}-x^*}{x^k-x^*} \rvert}{\ln \lvert \frac{x^k-x^*}{x^{k-1}-x^*} \rvert}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.268736 | 0.116468 | -1.63339 |
| 2 | 0.0390087 | 0.0774592 | 0.340978 |
| 3 | 0.051838 | 0.0256212 | 2.7125 |
| 4 | 0.0182839 | 0.00733733 | 1.13026 |
| 5 | 0.00641625 | 0.000921088 | 1.65955 |
| 6 | 0.000883577 | 3.75105e-05 | 1.54249 |
| 7 | 3.73108e-05 | 1.99651e-07 | 1.63571 |
| 8 | 1.99608e-07 | 4.35018e-11 | 1.61036 |
| 9 | 4.35011e-11 | 7.21645e-16 | 1.30543 |

Таблица 4. Исследование скорости сходимости методом Ньютона $y = (x - 0.1)(x - 0.22)(x - 0.55)(x - 0.7)(x - 0.75)$;

| $n$ | $\lvert x^{k+1} - x^k \rvert$ | $\lvert x_k - x* \rvert$ | Скорость сходимости $p \geqslant \dfrac{\ln\lvert\frac{x^{k+1}-x^*}{x^k-x^*}\rvert}{\ln\lvert\frac{x^k-x^*}{x^{k-1}-x^*}\rvert}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.0522861 | 0.0477139 | -inf |
| 2 | 0.031341 | 0.0163729 | 1.4455 |
| 3 | 0.0135728 | 0.00280008 | 1.65108 |
| 4 | 0.00269778 | 0.000102301 | 1.87402 |
| 5 | 0.000102157 | 1.43725e-07 | 1.98453 |
| 6 | 1.43725e-07 | 2.84175e-13 | 1.99974 |

Таблица 5. Исследование скорости сходимости методом Ньютона с точной производной $y = (x - 0.1)(x - 0.22)(x - 0.55)(x - 0.7)(x - 0.75)$;

| $n$ | $\lvert x^{k+1} - x^k \rvert$ | $\lvert x_k - x* \rvert$ | Скорость сходимости $p \geqslant \dfrac{\ln\lvert\frac{x^{k+1}-x^*}{x^k-x^*}\rvert}{\ln\lvert\frac{x^k-x^*}{x^{k-1}-x^*}\rvert}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.0522861 | 0.0477139 | -inf |
| 2 | 0.031341 | 0.0163729 | 1.4455 |
| 3 | 0.0135728 | 0.00280008 | 1.65108 |
| 4 | 0.00269778 | 0.000102301 | 1.87402 |
| 5 | 0.000102157 | 1.43725e-07 | 1.98453 |
| 6 | 1.43725e-07 | 2.84259e-13 | 1.99969 |

Таблица 6. Исследование скорости сходимости методом секущих $y = (x - 0.1)(x - 0.22)(x - 0.55)(x - 0.7)(x - 0.75)$;

| $n$ | $\lvert x^{k+1} - x^k \rvert$ | $\lvert x_k - x* \rvert$ | Скорость сходимости $p \geqslant \dfrac{\ln\lvert\frac{x^{k+1}-x^*}{x^k-x^*}\rvert}{\ln\lvert\frac{x^k-x^*}{x^{k-1}-x^*}\rvert}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.00968368 | 0.0153163 | 0.353429 |
| 2 | 0.0115289 | 0.00378744 | 2.85174 |
| 3 | 0.00311513 | 0.000672311 | 1.23725 |
| 4 | 0.000638737 | 3.35742e-05 | 1.73363 |
| 5 | 3.32657e-05 | 3.08482e-07 | 1.56487 |
| 6 | 3.08339e-07 | 1.42472e-10 | 1.63764 |
| 7 | 1.42472e-10 | 6.10623e-16 | 1.60934 |

Таблица 7. Исследование скорости сходимости методом Ньютона с точной производной $y = \sqrt{x+1} - 1$

| $n$ | $\lvert x^{k+1} - x^k \rvert$ | $\lvert x_k - x* \rvert$ | Скорость сходимости $p \geqslant \dfrac{\ln\lvert\frac{x^{k+1}-x^*}{x^k-x^*}\rvert}{\ln\lvert\frac{x^k-x^*}{x^{k-1}-x^*}\rvert}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.20911 | 0.00910977 | -inf |
| 2 | 0.00908893 | 2.0842e-05 | 1.96834 |
| 3 | 2.08419e-05 | 1.08599e-10 | 2.00075 |
| 4 | 1.08599e-10 | 1.11149e-16 | 1.13379 |

Таблица 8. Исследование скорости сходимости методом Ньютона с численной производной $y = \sqrt{x+1} - 1$

| $n$ | $\lvert x^{k+1} - x^k \rvert$ | $\lvert x_k - x* \rvert$ | Скорость сходимости $p \geqslant \dfrac{\ln\lvert \frac{x^{k+1}-x^*}{x^k-x^*}\rvert}{\ln\lvert \frac{x^k-x^*}{x^{k-1}-x^*}\rvert}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.20911 | 0.00910977 | -inf |
| 2 | 0.00908893 | 2.0842e-05 | 1.96834 |
| 3 | 2.08418e-05 | 1.08551e-10 | 2.00082 |
| 4 | 1.08552e-10 | 1.17853e-16 | 1.1289 |

Таблица 9. Исследование скорости сходимости методом секущих $y = \sqrt{x+1} - 1$

| $n$ | $\lvert x^{k+1} - x^k \rvert$ | $\lvert x_k - x* \rvert$ | Скорость сходимости $p \geqslant \dfrac{\ln\lvert \frac{x^{k+1}-x^*}{x^k-x^*}\rvert}{\ln\lvert \frac{x^k-x^*}{x^{k-1}-x^*}\rvert}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 3.95049 | 1.54951 | -0.743107 |
| 2 | 2.47413 | 0.924621 | 0.407567 |
| 3 | 1.35751 | 0.432888 | 1.46986 |
| 4 | 0.289951 | 0.142937 | 1.4601 |
| 5 | 0.156549 | 0.0136115 | 2.12214 |
| 6 | 0.0140833 | 0.000471769 | 1.42981 |
| 7 | 0.000470158 | 1.61068e-06 | 1.68933 |
| 8 | 1.61087e-06 | 1.89945e-10 | 1.59255 |
| 9 | 1.89945e-10 | 1.58551e-16 | 1.54732 |

Таблица 10. Исследование скорости сходимости методом Ньютона с численной производной $y = 35x^3 - 67x^2 - 3x + 3$

| $n$ | $\lvert x^{k+1} - x^k \rvert$ | $\lvert x_k - x* \rvert$ | Скорость сходимости $p \geqslant \dfrac{\ln\lvert \frac{x^{k+1}-x^*}{x^k-x^*}\rvert}{\ln\lvert \frac{x^k-x^*}{x^{k-1}-x^*}\rvert}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.134528 | 0.0345277 | -inf |
| 2 | 0.0327142 | 0.00181346 | 2.77083 |
| 3 | 0.0018076 | 5.85487e-06 | 1.9466 |
| 4 | 5.8548e-06 | 6.15891e-11 | 1.99841 |

Таблица 11. Исследование скорости сходимости методом Ньютона с точной производной $y = 35x^3 - 67x^2 - 3x + 3$

| $n$ | $\lvert x^{k+1} - x^k \rvert$ | $\lvert x_k - x* \rvert$ | Скорость сходимости $p \geqslant \dfrac{\ln\lvert \frac{x^{k+1}-x^*}{x^k-x^*}\rvert}{\ln\lvert \frac{x^k-x^*}{x^{k-1}-x^*}\rvert}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.134528 | 0.0345277 | -inf |
| 2 | 0.0327142 | 0.00181346 | 2.77083 |
| 3 | 0.0018076 | 5.85487e-06 | 1.9466 |
| 4 | 5.85481e-06 | 6.1594e-11 | 1.99839 |

Таблица 12. Исследование скорости сходимости методом секущих $y = 35x^3 - 67x^2 - 3x + 3 =$

| $n$ | $\lvert x^{k+1} - x^k \rvert$ | $\lvert x_k - x* \rvert$ | Скорость сходимости $p \geqslant \frac{\ln \lvert \frac{x^{k+1}-x^*}{x^k-x^*} \rvert}{\ln \lvert \frac{x^k-x^*}{x^{k-1}-x^*} \rvert}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.391892 | 0.0918919 | -2.91806 |
| 2 | 0.0592447 | 0.0326472 | 0.874645 |
| 3 | 0.0404213 | 0.00777412 | 1.38663 |
| 4 | 0.00826115 | 0.000487032 | 1.93053 |
| 5 | 0.000480353 | 6.67876e-06 | 1.54839 |
| 6 | 6.68461e-06 | 5.85221e-09 | 1.64123 |
| 7 | 5.85228e-09 | 7.02494e-14 | 1.60944 |

Таблица 13. Исследование скорости сходимости методом Ньютона с точной производной $y = x^2$

| $n$ | $\lvert x^{k+1} - x^k \rvert$ | $\lvert x_k - x* \rvert$ | Скорость сходимости $p \geqslant \frac{\ln \lvert \frac{x^{k+1}-x^*}{x^k-x^*} \rvert}{\ln \lvert \frac{x^k-x^*}{x^{k-1}-x^*} \rvert}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.25 | 0.25 | -inf |
| 2 | 0.125 | 0.125 | 1 |
| 3 | 0.0625 | 0.0625 | 1 |
| 4 | 0.03125 | 0.03125 | 1 |
| 5 | 0.015625 | 0.015625 | 1 |
| 6 | 0.0078125 | 0.0078125 | 1 |
| 7 | 0.00390625 | 0.00390625 | 1 |
| 8 | 0.00195312 | 0.00195312 | 1 |
| 9 | 0.000976562 | 0.000976562 | 1 |
| 10 | 0.000488281 | 0.000488281 | 1 |
| 11 | 0.000244141 | 0.000244141 | 1 |
| 12 | 0.00012207 | 0.00012207 | 1 |
| 13 | 6.10352e-05 | 6.10352e-05 | 1 |
| 14 | 3.05176e-05 | 3.05176e-05 | 1 |
| 15 | 1.52588e-05 | 1.52588e-05 | 1 |
| 16 | 7.62939e-06 | 7.62939e-06 | 1 |
| 17 | 3.8147e-06 | 3.8147e-06 | 1 |
| 18 | 1.90735e-06 | 1.90735e-06 | 1 |
| 19 | 9.53674e-07 | 9.53674e-07 | 1 |
| 20 | 4.76837e-07 | 4.76837e-07 | 1 |

Таблица 14. Исследование скорости сходимости методом Ньютона с численной производной $y = x^2$

| $n$ | $\|x^{k+1} - x^k\|$ | $\|x_k - x*\|$ | Скорость сходимости $p \geqslant \frac{\ln\|\frac{x^{k+1}-x^*}{x^k-x^*}\|}{\ln\|\frac{x^k-x^*}{x^{k-1}-x^*}\|}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.25 | 0.25 | -inf |
| 2 | 0.125 | 0.125 | 1 |
| 3 | 0.0625 | 0.0625 | 1 |
| 4 | 0.03125 | 0.03125 | 1 |
| 5 | 0.015625 | 0.015625 | 1 |
| 6 | 0.0078125 | 0.0078125 | 1 |
| 7 | 0.00390625 | 0.00390625 | 1 |
| 8 | 0.00195313 | 0.00195313 | 1 |
| 9 | 0.000976563 | 0.000976563 | 1 |
| 10 | 0.000488281 | 0.000488281 | 1 |
| 11 | 0.000244141 | 0.000244141 | 1 |
| 12 | 0.00012207 | 0.00012207 | 1 |
| 13 | 6.10352e-05 | 6.10352e-05 | 1 |
| 14 | 3.05176e-05 | 3.05176e-05 | 1 |
| 15 | 1.52588e-05 | 1.52588e-05 | 1 |
| 16 | 7.62939e-06 | 7.62939e-06 | 1 |
| 17 | 3.8147e-06 | 3.8147e-06 | 1 |
| 18 | 1.90735e-06 | 1.90735e-06 | 1 |
| 19 | 9.53674e-07 | 9.53674e-07 | 1 |
| 20 | 4.76837e-07 | 4.76837e-07 | 1 |