Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

ОТЧЕТ
К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:

Численное решение краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности
Вариант 1

Студент	ФН2-61Б (Группа)	(Подпись, дата)	Н. О. Акиньшин (И. О. Фамилия)
Студент	ФН2-61Б (Группа)	(Подпись, дата)	А. С. Джагарян (И. О. Фамилия)

2025 г.

Оглавление

1. Контрольные вопросы

1) Дайте определения терминам: корректно поставленная задача, понятие аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой, порядок аппроксимации, однородная схема, консервативная схема, монотонная схема, устойчивая разностная схема (условно/абсолютно), сходимость.

   Ответ. Пусть дана задача

   $$Au = f \text{ в } G, \quad Ru = \mu \text{ на } \partial G,$$

   для которой известна разностная схема

   $$A_h y = \phi \text{ в } G_h, \quad R_h y = \nu \text{ на } \partial G_h.$$

   Разностная схема $A_h y = \varphi,\ R_h y = \nu$ называется корректной, если её решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Погрешность аппроксимации данной разностной схема определяется как $\Psi_h = (\varphi - f_n) + ((Av)_h - A_h v_h)$. Погрешность аппроксимации граничных и начальных условий $\chi_h = (\nu - \mu_n) + ((Rv)_h - R_h v_h)$.

   Разностная схема аппроксимирует исходную задачу, если $\|\Psi_h\| \to 0, \|\chi_h\| \to 0$ при $h \to 0$.

   Аппроксимация имеет порядок p, если$\|\Psi_h\| = O(h^p),\ \|\chi_h\| = O(h^p),$ при $h \to 0$. Аппроксимацию называют условной, если она имеет место только при наличии некоторой зависимости между шагами по разным направлениям и безусловной в противном случае.

   Разностная схема называется устойчивой, если её решение непрерывно зависит от входных данных. Устойчивость называется условной, если её наличие зависит от соотношения шагов сетки по разным направлениям, и безусловной в противном случае.

   Схема называется консервативной, если её решение удовлетворяет дискретному аналогу закона сохранения, присущего данной задаче.

   Разностная схема называется монотонной, если она удовлетворяет аналогу принципа максимума, присущего исходной задаче.

2) Какие из рассмотренных схем являются абсолютно устойчивыми? Какая из рассмотренных схем позволяет вести расчеты с более крупным шагом по времени?

   Ответ.

3) Будет ли смешанная схема (2.15) иметь второй порядок аппроксимации при $a_i = \dfrac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i) + K(x_{i-1})}$

   Ответ. Достаточное условие второго порядка аппроксимации:

   $$a_i = K(x_i) - \frac{h}{2}K'(x_i) + O(h^2)$$

   Тогда

   $$\frac{2K_i(K_i - hK_i' + \frac{h^2}{2}K_i'' + O(h^3))}{2K_i - hK_i' + \frac{h^2}{2}K_i'' + O(h^3)} = K_i - \frac{h}{2}K_i' + O(h^2)$$

   Далее, домножая на знаменатель, получаем

   $$2K_i^2 - 2hK_iK_i' + O(h^2) = 2K_i^2 - hK_iK_i' - hK_iK_i' + O(h^2)$$

   Из чего следует второй порядок аппроксимации.

4) Какие методы (способы) построения разностной аппроксимации граничных условий (2.5), (2.6) с порядком точности $O(\tau + h^2),\ O(\tau^2 + h^2),\ O(\tau^2 + h)$

   Ответ.

5) При каких $h,\ \tau,\ \sigma$ смешанная схема монотонна? Проиллюстрируйте результатами расчетов свойства монотонных и немонотонных разностных схем.

Ответ. Запишем расчетную схему в каноническом виде

$$\hat{y}(\frac{c\rho}{\tau}+\frac{\sigma a_{i+1}}{h^2}+\frac{a_i\sigma}{h^2})=y\left(\frac{c\rho}{\tau}-\frac{1-\sigma}{h^2}-\frac{a_i}{h^2}(1-\sigma)\right)+y_{+1}\left(\frac{1-\sigma}{h^2}a_{i+1}\right)+\hat{y}_{+1}\frac{\sigma}{h^2}a_{i+1}+\hat{y}_{-1}\frac{a_i\sigma}{h^2}.$$

Заметим, что $F\equiv 0$, следовательно $Ly=0$. Далее получаем следующую систему

$$\begin{cases}\frac{c\rho}{\tau}+\frac{\sigma a_{i+1}}{h^2}+\frac{a_i\sigma}{h^2}>0,\\ \frac{c\rho}{\tau}-\frac{1-\sigma}{h^2}-\frac{a_i}{h^2}(1-\sigma)>0,\\ \frac{1-\sigma}{h^2}a_i>0,\\ \frac{\sigma}{h^2}a_{i+1}>0,\\ \frac{a_i\sigma}{h^2}>0.\end{cases}$$

В силу естественных условий на a_i,σ,τ,ρ,c,h получаем следующее условие

$$\frac{c\rho}{\tau}-\frac{1-\sigma}{h^2}-\frac{a_i}{h^2}(1-\sigma)>0$$

Рассмотрим $D=A(x)-\sum\limits_{\xi\in S'(x)}B(\xi,\,x)$

$$D=\frac{c\rho}{\tau}+\frac{\sigma a_{i+1}}{h^2}+\frac{a_i\sigma}{h^2}-(\frac{c\rho}{\tau}-\frac{1-\sigma}{h^2}-\frac{a_i}{h^2}(1-\sigma))-\frac{1-\sigma}{h^2}a_i-\frac{\sigma}{h^2}a_{i+1}-\frac{a_i\sigma}{h^2}\equiv 0$$

В итоге если выполнено условие $\frac{c\rho}{\tau}-\frac{1-\sigma}{h^2}-\frac{a_i}{h^2}(1-\sigma)>0$, то по теореме о выполнении принципа максимума для расчетной схемы, данная схема будет монотонна.

6) Какие ограничения на h, τ и σ накладывают условия устойчивости прогонки?

Ответ. Запишем расчетную схему в трехдиагональном виде

$$\hat{y}_{-1}(\tau\sigma k_{-1/2})+\hat{y}(-\tau\sigma k_{+1/2}-\tau\sigma k_{-1/2}-c\rho h^2)+\hat{y}_{i+1}(\tau\sigma k_{+1/2})=$$
$$=-c\rho h^2 y-\tau(1-\sigma)(k_{+1/2}(y_{+1/2-y})-k_{-1/2}(y-y_{-1/2}))$$

Из теоремы об устойчивости и корректности прогонки

$$|b_i|\geqslant|a_i|+|c_i|$$

Тогда получаем

$$\tau\sigma k_{+1/2}+\tau\sigma k_{-1/2}+c\rho h^2\geqslant\tau\sigma k_{-1/2}+\tau\sigma k_{+1/2}$$

Что верно всегда. Теперь рассмотрим положительность $|b_1|>0$. Запишем расчетную схему для левого граничного условия

$$\hat{y}(-\tau\sigma k_{1/2}+\tau\sigma\frac{b}{\beta_1}-\frac{c\rho h^2}{2})+\hat{y}_1\tau\sigma k_{1/2}=-\tau(1-\sigma)(k_{1/2}(y_1-y)+\frac{h}{\beta_1}(\alpha_1 y-P_1))-\frac{c\rho h^2}{2}y+\tau\sigma\frac{h}{\beta_1}P_1$$

Заметим, что всегда выполнено условие $|b_1|>0$. Условие неравенства 0 для c_i очевидно. Заметим, что $|b_1|>|c_1|$. Также накладывается следующее условие

$$|-\tau\sigma k_{1/2}+\tau\sigma\frac{b}{\beta_1}-\frac{c\rho h^2}{2}|>|\tau\sigma k_{1/2}|$$

$$\tau\sigma k_{1/2}+\frac{c\rho h^2}{2}-\tau\sigma\frac{b}{\beta_1}>\tau\sigma k_{1/2}$$

$$\frac{c\rho h^2}{2} - \tau\sigma\frac{b}{\beta_1} > 0$$

Что эквивалентно Теперь проверим для правого граничного условия условие $|b_n| > |a_n|$ Запишем расчетную схему для правого граничного условия

$$\hat{y}_{n-1}\tau\sigma k_{n-1/2} +$$
$$+\hat{y}(-\tau\sigma k_{n-1/2} - \tau\sigma\frac{h}{\beta_2}\alpha_2 - \frac{c\rho h^2}{2}) = f_n$$

Из схемы видно, что

$$|b_n| > |a_n|$$

Тогда по теореме о корректности и устойчивости метода прогонки

7) В случае $K = K(u)$ чему равно количество внутренних итераций, если итерационный процесс вести до сходимости, а не обрывать после нескольких первых итераций?

   Ответ.

8) Для случая $K = K(u)$ предложите способы организации внутреннего итерационного процесса или алгоритмы, заменяющие его.

   Ответ. Вместо использования метода простой итерации, можно пользоваться любым итерационный методом для решения нелинейных систем. Например, метод Ньютона.