Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

ОТЧЕТ

К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Вариант 1

Студент	ФН2-61Б (Группа)	(Подпись, дата)	Н. О. Акиньшин (И. О. Фамилия)
Студент	ФН2-61Б (Группа)	(Подпись, дата)	А. С. Джагарян (И. О. Фамилия)

2025 г.

Оглавление

1. Контрольные вопросы

1) Сформулируйте условия существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Выполнены ли они для вашего варианта задания?

Ответ. Теорема (о существовании и единственности Задачи Коши)

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t,u) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Условие 1 гарантирует существование решения Задачи Коши, а условие 2 единственность. Таким образом существует и единственно решение Задачи Коши при выполнении следующих условий

1) Функция $f(t,u)$ определена и непрерывна в прямоугольнике

$$D = \{(t,u) : \, |t - t_0| \leqslant a; \, |u_i - u_{0,i}| \leqslant b, \, i = \overline{1,n}\}$$

в прямоугольнике все компоненты $|f_i| \leqslant M$

2)Функция $f(t,u)$ липшиц-непрерывна с постоянной L по переменным $u_1, u_2, \dots u_n$:

$$|f(t,u^{(1)}) - f(t,u^{(2)})| \leqslant L \sum_{i=1}^{n} |u_i^{(1)} - u_i^{(2)}|$$

Тогда существует единственное решение задачи Коши на участке

$$|t - t_0| \leqslant \min\{a, b/M, 1/L\}$$

Замечание. Верно следующее включение $C^1 \subset C_L \subset C$

2) Что такое фазовое пространство? Что называют фазовой траекторией? Что называют интегральной кривой?

Ответ. Пусть дана система

$$\dot{u_i} = f(t, \mathbf{u}), \quad i = 1, \dots, n$$

Тогда решение системы для любого момента времени $t \in T \subset \mathbb{R}$ можно изобразить в $n-$мерном пространстве, которое называется фазовым. Интегральной кривой называют кривую $\Gamma = \{(t,\mathbf{u}) | \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), t \in T\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, где u_i – решение системы. Фазовой траекторией называется кривая $\tilde{\Gamma} = \{(u_1, u_2, \dots, u_n)\} \subset \mathbb{R}^n$, где u_i – решение системы.

3) Каким порядком аппроксимации и точности обладают методы, рассмотренные в лабораторной работе?

Ответ. Порядок аппроксимации:

1)Метод Эйлера(явный, неявный) имеют 1ый порядок аппроксимации.

2)Симметричная схема имеет 2ой порядок аппроксимации.

3)Методы Рунге-Кутты, Адамса-Башфорта, прогноз-коррекция имеют 4ый порядок аппроксимации

Порядок точности:

Явный метод Эйлера является частным случаем метода Рунге-Кутты, а неявный Эйлер, симметричная схема и метод Адамса-Башфорта является частным случаем линейного m-шагового разностного метода, следовательно требуется рассмотреть сходимость только методов Рунге-Кутты и линейного m-шагового разностного метода.

Рассмотрим метод Рунге-Кутты

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}=\sum_{j=1}^{m}\sigma_j k_j,\ k_j=f\left(t_n+a_j\tau,\ y_n+\sum_{i=1}^{j-1}b_{ji}\tau k_i\right),\ j=\overline{1,m}; a_1=0$$

Запишем приближенное решение в виде $y_n=z_n+u_n$, u_n - точное решение, z_n - погрешность. Тогда

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{\tau}=\psi_h^{(1)}+\psi_h^{(2)}$$

где

$$\psi_h^{(1)}=\sum_{i=1}^{m}\sigma_i k_i(t_n,u_n,\tau)-\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau};$$

$$\psi_h^{(2)}=\sum_{i=1}^{m}\sigma_i\left(k_i(t_n,y_n,\tau)-k_i(t_n,u_n,\tau)\right);$$

Теорема о погрешности методов Рунге-Кутты.

Пусть правая часть ОДУ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу с постоянной L. Тогда для погрешности метода Рунге-Кутты при $n\tau\leqslant T$ справедлива оценка

$$|z_n|=|y_n-u(t_n)|\leqslant Te^{\alpha T}\max_{0\leqslant j\leqslant n-1}|\psi_j^{(1)}|$$

где $\alpha=\sigma Lm(1+Lb\tau)^{m-1}$, где $\sigma=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|\sigma_i|$; $b=\max|b_{ij}|$

Следствие. При выполнении условий теоремы порядок точности метода Рунге-Кутты совпадает с порядком аппроксимации.

Это следует из оценки погрешности и равномерной по τ ограниченности α

$$\alpha=\sigma Lm(1+Lb\tau)^{m-1}\leqslant\sigma Lme^{(m-1)Lb\tau}\leqslant\sigma Lme^{(m-1)LbT}$$

Рассмотрим линейный m-шаговый разностный метод решения ОДУ

$$\frac{a_0y_n+a_1y_{n-1}+\ldots a_my_{n-m}}{\tau}=b_0f_n+b_1f_{n-1}+\ldots+b_mf_{n-m}$$

Теорема о погрешности m-шаговых разностных методов. Пусть разностный m-шаговый метод удовлетворяет условию корней и $|f_y'|\leqslant L$. Тогда для любого $m\tau\leqslant t_n=n\tau\leqslant T$ при достаточно малом τ выполнена оценка

$$|y_n-u(t_n)|\leqslant M\left(\max_{0\leqslant j\leqslant m-1}|y_j-u(t_j)|+\max_{m\leqslant j\leqslant n}|\psi_{h,j}^{(1)}|\right)$$

Таким образом методы имеют следующий порядок точности зависит от того с какой точностью будут найдены первые m значений. Пусть k порядок точности с которой найдены первые m значение т.е.

$$\max_{0\leqslant j\leqslant m-1}|y_j-u(t_j)|=O(\tau^k)$$

Тогда порядок точности равен $\min\{k,p\}$

4) Какие задачи называются жесткими? Какие методы предпочтительны для их решения? Какие из рассмотренных методов можно использовать для решения жестких задач?

Ответ.

5) Как найти y_1, y_2, y_3, чтобы реализовать алгоритм прогноза и коррекции (1.18)?

   Ответ. 1) Можно использовать любой из численных методов решения ОДУ требующих только начальное приближение. Например метод Рунге-Кутты или метод Эйлера и.т.д

   2)Можно раскладывать в ряд Тейлора в предыдущей точке т.е.

$$\boldsymbol{y_1} \approx \boldsymbol{u}(t_1) = \boldsymbol{u}(t_0) + \tau \boldsymbol{u'}(t_0)$$

$$\boldsymbol{y_2} \approx \boldsymbol{u}(t_2) = \boldsymbol{u}(t_1) + \tau \boldsymbol{u'}(t_1)$$

$$\boldsymbol{y_3} \approx \boldsymbol{u}(t_3) = \boldsymbol{u}(t_2) + \tau \boldsymbol{u'}(t_2)$$

   Производные можно найти из ОДУ $u' = f(t, u)$

   3)Можно раскладывать в ряд Тейлора в начальной точке т.е.

$$\boldsymbol{y_1} \approx \boldsymbol{u}(t_1) = \boldsymbol{u}(t_0) + \tau \boldsymbol{u'}(t_0)$$

$$\boldsymbol{y_2} \approx \boldsymbol{u}(t_2) = \boldsymbol{u}(t_0) + 2\tau \boldsymbol{u'}(t_0)$$

$$\boldsymbol{y_3} \approx \boldsymbol{u}(t_3) = \boldsymbol{u}(t_0) + 3\tau \boldsymbol{u'}(t_0)$$

   Замечание 2 и 3 по сути является методом Эйлера

6) Какой из рассмотренных алгоритмов является менее трудоемким? Какой из рассмотренных алгоритмов позволяет достигнуть заданную точность, используя наибольший шаг интегрирования? Какие достоинства и недостатки рассмотренных алгоритмов вы можете указать?

   Ответ.

7) Какие алгоритмы, помимо правила Рунге, можно использовать для автоматического выбора шага?

   Ответ.