Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

ОТЧЕТ

К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

Численное решение краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности

Вариант 1

Студент	ФН2-61Б (Группа)	(Подпись, дата)	Н. О. Акиньшин (И. О. Фамилия)
Студент	ФН2-61Б (Группа)	(Подпись, дата)	А. С. Джагарян (И. О. Фамилия)

2025 г.

Оглавление

1. Контрольные вопросы

1) Предложите разностные схемы, отличные от схемы «крест», для численного решения задачи (3.1)–(3.4).

Ответ. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = \varphi(t) \\ u(l,t) = \psi(t) \end{cases}$$

1. Схема Ричардсона (Крест)

$$y_{t\bar{t}} = a^2 y_{x\bar{x}}$$

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2}$$

2. Схема Дюфорта - Франкел (ромб) В схеме Ричардсона нужно заменить $y_i^j = \frac{y_{i-1}^j + y_{i+1}^j}{2} = \frac{y_i^{j-1} + y_i^{j+1}}{2}$ Получаем следующие схемы

2.1)

$$\frac{y_i^{j+1} - 2(\frac{y_{i-1}^j + y_{i+1}^j}{2})) + y_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^j - 2(\frac{y_i^{j-1} + y_i^{j+1}}{2})) + y_{i+1}^j}{h^2}$$

2.2)

$$\frac{y_i^{j+1} - (2(\frac{y_{i-1}^j + y_{i+1}^j}{2}))) + y_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^j - 2(\frac{y_i^{j-1} + y_i^{j+1}}{2})) + y_{i+1}^j}{h^2}$$

3. Схема Т(неявный крест)

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2}$$

4.Схема обратная Т (абсолютно явный)

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i+1}^{j-1}}{h^2}$$

5. Схема ступенька вверх

$$y_{t\bar{t}} = a^2 \frac{\hat{y}_x - \check{y}_{\bar{x}}}{h}$$

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{a}{h^2}((y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - (y_i^{j-1} - y_{i-1}^{j-1}))$$

6. Схема ступенька вниз

$$y_{t\bar{t}} = a^2 \frac{\check{y}_x - \hat{y}_{\bar{x}}}{h}$$

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{a}{h^2}((y_{i+1}^{j-1} - y_i^{j-1}) - (y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}))$$

7.Схема Почти ступенька вверх

$$y_{t\bar{t}} = a^2 \frac{\hat{y}_x - y_{\bar{x}}}{h}$$

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{a}{h^2}((y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - (y_i^j - y_{i-1}^j))$$

8.Схема Почти ступенька вниз

$$y_{t\bar{t}} = a^2 \frac{y_x - \hat{y}_{\bar{x}}}{h}$$

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{a}{h^2}((y_{i+1}^j - y_i^j) - (y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}))$$

9. Схема П (неявная)

$$\frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_{i-1}^j + y_{i-1}^{j-1}}{\tau^2} + \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_{i+1}^j + y_{i+1}^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2}$$

10.Схема П (явная)

$$\frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_{i-1}^j + y_{i-1}^{j-1}}{\tau^2} + \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_{i+1}^j + y_{i+1}^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2}$$

11. Схема перевернутая П(неявная)

$$\frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_{i-1}^j + y_{i-1}^{j-1}}{\tau^2} + \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_{i+1}^j + y_{i+1}^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i-1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i+1}^{j-1}}{h^2}$$

2) Постройте разностную схему с весами для уравнения колебаний струны. Является ли такая схема устойчивой и монотонной?

Ответ.

$$y_{t\bar{t}} = a^2(\sigma \hat{y}_{x\bar{x}} + (1-\sigma) y_{x\bar{x}})$$

Исследуем на монотонность

Обозначим $\gamma = \frac{\tau^2 a^2}{h^2}$

$$\hat{y} - 2y + \check{y} = \gamma(\sigma(\hat{y_{+1}} - 2\hat{y} + \hat{y_{-1}}) + (1-\sigma)(y_{+1} - 2y + y_{-1}))$$

выразим относительно ведущего элемента $\hat{y}$ и получим, что коэффициент перед $\check{y}$ отрицательный. Не выполняется УПК. Схема безусловно не монотонна монотонна.

Рассмотрим 9 точечную схему с весами

$$y_{t\bar{t}} = a^2(\sigma \hat{y}_{x\bar{x}} + (1-2\sigma) y_{x\bar{x}} + \sigma \check{y}_{x\bar{x}})$$

$$\frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2} = a^2 \left(\sigma \frac{\hat{y_{+1}} - 2\hat{y} + \hat{y_{-1}}}{h^2} + (1-2\sigma) \frac{y_{+1} - 2y + y_{-1}}{h^2} + \sigma \frac{\check{y_{+1}} - 2\check{y} + \check{y_{-1}}}{h^2} \right)$$

Воспользуемся необходимым спектральным признаком устойчивости. $y_i^j = \rho^j e^{i\bar{i}\varphi}$

$$\rho^2 - 2\frac{1 - 2\left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}(1-2\sigma)}{1 + 4\sigma\left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}}\rho + 1 = 0.$$

Для устойчивости необходимо $\rho_1 \leqslant 1$, $\rho_2 \leqslant 1$. Однако если корни действительные, то в силу теоремы Виета $\rho_1 * \rho_2 = 1$, и следовательно один из корнец неизбежно будет больше 1. Поэтому необходимо(но не достаточно), чтобы корни были мнимыми. Т.е $D \leq 1$

$$\left| \frac{1 - 2\left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}(1-2\sigma)}{1 + 4\sigma\left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}} \right| \leq 1,$$

Решая, получаем

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4a^2\tau^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4a^2\tau^2}.$$

Проверим схему на монотонность.

$$\frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2} = a^2\left(\sigma\frac{\hat{y}_{+1} - 2\hat{y} + \hat{y}_{-1}}{h^2} + (1-2\sigma)\frac{y_{+1} - 2y + y_{-1}}{h^2} + \sigma\frac{\check{y}_{+1} - 2\check{y} + \check{y}_{-1}}{h^2}\right),$$

Разрешая, относительно ведущего элемента $\hat{y}$

$$\hat{y}(1+2\gamma\sigma) = \gamma\sigma(\hat{y}_{+1}\hat{y}_{-1} + \check{y}_{+1} + \check{y}_{-1}) + \gamma(1-2\sigma)(y_{-1} + y_{+1}) + y(2 - 2\gamma(1-2\sigma)) + \check{y}(-1-2\gamma\sigma)$$

Коэффициент перед $\check{y}$ отрицательный, значит схема не монотонна.

3) Предложите способ контроля точности полученного решения.

Ответ. Пусть у нас есть решение на сетке с шагом h и τ. Хотим узнать на сколько точным оно получилось. Запишем погрешность на двух сетках: (h,τ) и $(h/2,\tau/2)$:

$$\|z_{h,\tau}\| = C_1\tau^2 + C_2h^2$$
$$\|z_{h/2,\tau/2}\| = \frac{1}{4}(C_1\tau^2 + C_2h^2)$$

Далее запишем

$$\|z_{h,\tau}\| = \|y_{(h)}^{(\tau)} - u\| = \|y_{(h)}^{(\tau)} - y_{(h/2)}^{(\tau/2)} + y_{(h/2)}^{(\tau/2)} - u\| \leqslant \|y_{(h)}^{(\tau)} - y_{(h/2)}^{(\tau/2)}\| + \|z_{h/2,\tau/2}\|,$$

где $y_{(h)}^{(\tau)}$ и $y_{(h/2)}^{(\tau/2)}$ – решения на текущем временном слое, полученное с помощью соответствующей сетки. Также вычитая погрешности на разных сетках, получим:

$$\|z_{h,\tau}\| - \|z_{h/2,\tau/2}\| = \frac{3}{4}\|z_{h,\tau}\|$$

Тогда подставляя в неравенство

$$\|z_{h,\tau}\| \leqslant \frac{4}{3}\|y_{(h)}^{(\tau)} - y_{(h/2)}^{(\tau/2)}\|$$

Получили оценку для погрешности на текущей сетке. Теперь рассмотрим способы получения решения на сетке $(h/2,\tau/2)$:

(a) Путем параллельного расчета на двух сетках.

(b) Получить промежуточные точки по x можно с помощью сплайн-интерполяции. Получить промежуточные точки по t можно с помощью выполнения двух шагов по времени с предыдущего временного слоя.

4) Приведите пример трехслойной схемы для уравнения теплопроводности. Как реализовать вычисления по такой разностной схеме? Является ли эта схема устойчивой?

Ответ. Схема Дюфорта-Франкела:

$$\frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} = a^2\frac{y_{+1} - \hat{y}_i - \check{y}_i + y_{-1}}{h^2}$$

Временной слой при $t = 0$ получаем из начального условия. Далее, чтобы вычислить слой $t = \tau$, разложим по формуле Тейлора:

$$y_i^1 = y_i^0 + \tau y_i' + O(\tau^2),$$

где производная вычислена от $\varphi(x)$, где $\varphi(x) = y(x, 0)$.
Далее будем исследовать на устойчивость. Сделаем замену:

$$y_i^j = \rho^j e^{i\tilde{i}\varphi},$$

где $\tilde{i} = \sqrt{-1}$. Подставим в схему с учетом $\gamma = \frac{\tau a^2}{h^2}$

$$\rho + 1/\rho = 2\gamma\left(e^{\tilde{i}\varphi} - \rho - \rho^{-1} + e^{-\tilde{i}\varphi}\right) = 2\gamma(2\cos\varphi - (\rho + 1/\rho))$$

В итоге получаем

$$\rho = \frac{2\gamma\cos\varphi \pm +\sqrt{4\gamma^2\cos^2\varphi - 4\gamma^2 + 1}}{1 + 2\gamma}$$

Получаем следующую оценку для $|\rho|$:

$$|\rho| \leqslant \frac{|2\gamma\cos\varphi| + \sqrt{1 - 4\gamma^2\sin^2\varphi}}{1 + 2\gamma}$$

Рассмотрим 2 случая:
Пусть $1 - 4\gamma^2\sin^2\varphi > 0$:

$$|\rho| < 1 - \frac{1}{1 + 2\gamma} + \frac{\sqrt{1 - 4\gamma^2}}{1 + 2\gamma} < 1 - \frac{1}{1 + 2\gamma} + \frac{1}{1 + 2\gamma} < 1$$

Пусть $1 - 4\gamma^2\sin^2\varphi < 0$:

$$|\rho|^2 = \frac{4\gamma\cos^2\varphi + (1 - 4\gamma^2\sin^2\varphi)}{(1 + 2\gamma)^2} = \frac{1 + 4\gamma(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{1 + 4\gamma^2 + 4\gamma} < \frac{1 + 4\gamma}{1 + 4\gamma^2 + 4\gamma} < 1$$

Тогда получаем, что схема безусловно устойчива.

2. Порядки

Таблица 1. Порядок аппроксимации

Шаг сетки	p
h, τ	—
$qh, q\tau$	2.810873236323846
$q^2h, q^2\tau$	2.220212471275546
$q^3h, q^3\tau$	1.99999999999998
$q^4h, q^4\tau$	2.00006100061483