



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки
КАФЕДРА _____ Прикладная математика

ОТЧЕТ
К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:

Решение задач интерполирования
Вариант 1

Студент _____ ФН2-51Б
(Группа)

(Подпись, дата) Н. О. Акиншин
(И. О. Фамилия)

Студент _____ ФН2-51Б
(Группа)

(Подпись, дата) А. С. Джагарян
(И. О. Фамилия)

Оглавление

1. Контрольные вопросы	3
2. Дополнительные вопросы	7
3. Результаты	8

1. Контрольные вопросы

- 1) Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке многочленом Лагранжа (включая построение самого многочлена) на сетке с числом узлов, равным n .

Ответ. Запишем полином Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \prod_{j=0; j \neq k}^n \left(\frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k$$

Оценим количество операций для построения коэффициентов, сразу подставив нужную точку.

$$S = (n - 1) \cdot (n + 1) = n^2 - 1$$

- 2) Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке кубическим сплайном (включая затраты на вычисление коэффициентов сплайна) на сетке с числом узлов, равным n .

Ответ. Пусть имеется точка $x_0 \in [x_{i-1}, x_i]$, тогда по следующей формуле можно вычислить $s_i(x_0)$ за 9 операций умножения.

$$s_i = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, i = 1 \dots n$$

Однако для этого надо вычислить $a_i, b_i, c_i, d_i \forall i = 1 \dots n$.

Подсчитаем количество операций требуемое для вычисления коэффициентов a_i .

$$a_i = y_{i-1} \forall i = 1, 2, \dots n$$

Таким образом требуется 0 операций умножения

Подсчитаем количество операций требуемое для вычисления коэффициентов c_i . Заметим, что $c_1 = 0$. Остальные коэффициенты можно найти решив следующую трех-диагональную систему методом прогонки. Для начала нужно вычислить следующие вспомогательные коэффициенты $h_i = x_i - x_{i-1}$, $g_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$, $\forall i = 1 \dots n$. Для вычисления требуется n умножений. Также $2 \cdot (n-1)$ для вычисления коэффициентов системы. Теперь требуется решить систему.

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3(g_i - g_{i-1}), \forall i = 1 \dots n$$

Данная система имеет размерность $n-1$ на $n-1$. Из теории известно, что для решения такой системы требуется $5 \cdot (n-1) - 4$ умножений.

Подсчитаем количество операций требуемое для вычисления коэффициентов b_i

$$b_i = g_i - \frac{(c_{i+1} + 2c_i)h_i}{3}, \forall i = 1 \dots n$$

Из формул следует, что требуется $2 \cdot n$ операций.

Подсчитаем количество операций требуемое для вычисления коэффициентов d_i

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3 \cdot h_i}, \forall i = 1 \dots n$$

Из формул следует, что требуется $2 \cdot n$ операций.

Итого требуется $9 + n + 2(n - 1) + 5 \cdot (n - 1) - 4 + 2n + 2n = 12n - 2$ операций.

- 3) Функция $f(x) = e^x$ интерполируется многочленом Лагранжа на отрезке $[0, 2]$ на равномерной сетке с шагом $h = 0,2$. Оцените ошибку экстраполяции в точке $x = 2,2$, построив многочлен Лагранжа и подставив в него это значение, а также по формуле для погрешности экстраполяции.

Ответ. Построим многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \prod_{j=0; j \neq k}^n \left(\frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k =$$

$$= 7.6167 \cdot 10^{-7} * x^{10} + 2.53759 \cdot 10^{-8} * x^9 + 3.29048 \cdot 10^{-5} * x^8 + 0.000183677 * x^7 + 0.00140624 * x^6 +$$

$$+ 0.00831992 * x^5 + 0.0416734 * x^4 + 0.166665 * x^3 + 0.5 * x^2 + 1 * x + 1$$

Подставим точку $x = 2.2$

$$L_n(2.2) = 9.02501$$

Тогда погрешность

$$|L_n(2.2) - e^{2.2}| = 3.49943 * 10^{-6}$$

Теперь посчитаем погрешность по формуле для экстраполяции

$$|f(x^*) - L_n(x^*)| \leq h^{n+1} \max_{y \in [a; b]} |f^{(n+1)}(y)|,$$

где $x^* \in [b + h, b + 2h]$. Тогда для $x^* = 2.2$

$$|e^{2.2} - L_n(2.2)| \leq 0.2^{11} e^2 \approx 1.51328 * 10^{-7}$$

- 4) Выпишите уравнения для параметров кубического сплайна, если в узлах x_0 и x_n помимо значений функции y_0 и y_n заданы первые производные $y'(x_0)$ и $y'(x_n)$

Ответ. Сплайн на i -ом отрезке выглядит следующим образом $s_i = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3$. Всего $4n$ коэффициентов. Таким образом для определения коэффициентов нужно $4n$ условий.

Сплайн должен проходить через все заданные точки т.е. должно выполняться условие $S(x_i) = y_i$, что тоже самое $s_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$, $s_i(x_i) = y_i$, $\forall i = 1 \dots n$. Отсюда получаем 2n условий.

Из условия непрерывности первой и второй производной (т.е. производные справа и слева в узлах сетки должны совпадать) для внутренних узлов сетки получаем.

$$S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0), S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0), \forall i = 1 \dots n - 1$$

Данные условия можно переписать, как

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i), S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i), \forall i = 1 \dots n - 1$$

Получили $4n-2$ условий требуется еще 2 условия. В классической интерполяции полагаются условия $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$. Однако, поскольку даны условия на первые производные, то имеем следующие условия $S'(x_0) = y'_0$, $S'(x_n) = y'_n$ либо, что тоже самое $S'_1(x_0) = y'_0$, $S'_n(x_n) = y'_n$

В итоге коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i можно найти из следующей системы

$$\begin{cases} S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, S_i(x_i) = y_i, \forall i = 1 \dots n \\ S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i), S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i), \forall i = 1 \dots n - 1 \\ S'_1(x_0) = y'_0, S'_n(x_n) = y'_n \end{cases} \quad (1)$$

- 5) Каковы достоинства и недостатки сплайн-интерполяции и интерполяции многочленом Лагранжа?

Ответ.

- (a) Интерполяционный полином Лагранжа имеет вид $L_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$. Также интерполяция Лагранжа является глобальной т.е. один полином приближает функцию, в отличие от интерполяции Сплайном, где на каждом отрезке свой приближающий полином.

При добавлении точек многочлен Лагранжа приходится полностью пересчитывать, в отличие от интерполяции сплайном в котором, придется либо добавить либо изменить один сплайн, а остальные сплайны не изменятся.

Пусть значения функции f известны не точно, а лишь с некоторой погрешностью δf_i : $f_i = f_i^0 + \delta f_i$. Как сильно исказится при этом интерполяционный полином?

Имеем

$$L_n(x) = L_n(x, f^0 + \delta f) = L_n(x, f^0) + L_n(x, \delta f)$$

- (b) Для того чтобы установить влияние погрешности входных данных на построенный полином, необходимо оценить $\max_{\|\delta f\| \leq \delta} \|L_n(x, \delta f)\|_C$. Если ввести нормированную погрешность, то для оценки влияния погрешности входных данных требуется вычислить величину $\eta = \max_{\|\delta f\| \leq 1} \|L_n(x, \delta f)\|_C$

Для равномерной сетки $\eta = O(2^n)$. Для $\eta = O(\ln n)$. Таким образом погрешности связанные с неточностью входной информации при глобальной интерполяции сильно возрастают.

- (c) Если функция не имеет $n+1$ ой ограниченной производной, то погрешность в случае глобальной интерполяции в отличие от интерполяции сплайном может вести себя плохо. Рассмотрим следующие теоремы

Теорема(Фабера). Для любой последовательности сеток, существует непрерывная на отрезке функция $f(x)$ такая, что последовательность $\{L_n(x)\}$ не сходится равномерно $f(x)$

Теорема(Марцинкевича). Для любой непрерывной на отрезке функции $f(x)$ существует последовательность сеток такая, что $\{L_n(x)\} \Rightarrow f(x)$

Например рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$

Использование глобальной полиномиальной интерполяции на равномерной сетке дает расходимость на участках $|x| \in (0.73; 1)$ при бесконечном увеличении числа точек разбиения. Причиной этого, очевидно, является увеличение нормы производной данной функции при возрастании ее порядка.

Однако при интерполяции сплайном имеет место следующая теорема

Теорема. Пусть $u = f(x) \in C^4[a, b]$, $f''(a) = f''(b) = 0$, $M_4 = \|f^{(4)}\|_C$, $S_3(x)$ – сплайн третьей степени. Тогда верно

$$\|f - S_3\|_C \leq C_1 M_4 h^4; \|f' - S_3'\|_C \leq C_2 M_4 h^3; \|f'' - S_3''\|_C \leq C_3 M_4 h^2$$

Отсюда следует, что для указанного класса функций не только S_3 сходится к f , но и ее первая и вторая производные сходятся к соответствующим производным. Функцию S_3 можно дифференцировать.

6) Какие свойства полиномов Чебышева и чебышевских сеток Вам известны?

Ответ. При интерполяции желательно, чтобы погрешность $\|f - \tilde{f}\|$ была минимальна, также при увеличении числа точек интерполяции погрешность должна стремиться к 0. Однако в случае глобальной интерполяции (полиномом Лагранжа)

$$\|f - \tilde{f}\|_C = \|f - L_n\| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \|w\|_C$$

Таким образом выберем функцию $w(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, так чтобы $\|w\|_C$ была минимальна т.е. требуется решить задачу $\min_{x_0, \dots, x_n} \max_{x \in [a, b]} |w(x)|$. Решением данной задачи является полином Чебышева.

$$w(x) = T_{n+1}(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \cos((n+1) \arccos(\frac{2x - (b+a)}{b-a}))$$

Таким образом узлы Чебышевской сетки имеют вид

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)})$$

Также $\|w\|_C = \frac{1}{2^{2n+1}} (b-a)^{n+1}$. Итого для Чебышевской сетки имеем оценку погрешности

$$\|f - \tilde{f}\| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} = \epsilon_{ch}$$

Сравним данную сетку с равномерной. Для равномерной сетки имеем оценку погрешности

$$|f - L_n| \leq \frac{M_{n+1}}{n+1} h^{n+1} = \frac{M_{n+1}}{n+1} (\frac{b-a}{n})^{n+1} = \epsilon_R$$

Рассмотрим отношение погрешностей

$$\frac{\epsilon_R}{\epsilon_{ch}} = (\frac{4}{e})^n \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty$$

Следовательно при увеличении количества узлов интерполяции погрешность на Чебышевской сетке будет меньше чем на равномерной сетке (на любой сетке) в соответствующее число раз.

Для равномерной сетки $\eta = O(2^n)$. Для $\eta = O(\ln n)$. Т.е. погрешность возникающая из неточности входных данных будет меньше на Чебышевской сетки чем на равномерной.

2. Дополнительные вопросы

- 1) Оценка количества операций для построения полинома Лагранжа

Ответ. Сначала посчитаем количество операций для построения одного коэффициента многочлена Лагранжа.

$$c_k(x) = \prod_{j=0; j \neq k}^n \left(\frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right)$$

Тогда одно умножение в скобке, и для перемножения n многочленов 1 степени необходимо 2^n умножений. Тогда для расчета коэффициента $c_k(x)$ необходимо $S_1 = 2^{n-1} * (n-1) * (n-1)$, где первый множитель $n-1$ отвечает за умножение в знаменателе, а второй – за деление получившегося многочлена $n-1$ степени на знаменатель. Согласно

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x) y_k$$

$S_2 = S_1 + 1$ и итоговая сумма

$$S = (n+1)S_2 = (n+1)(2^{n-1} * (n-1) * (n-1) + 1) = 1 + 2^{n-1} + n + 2^{n-1}n - 2^n n + 2^{n-1}n^2 - 2^n n^2 + 2^{n-1}n^3$$

- 2) Почему на функции Рунге норма ошибки стремится к бесконечности при достаточно большом количестве узлов?

Ответ.

- 3) Что такое многочлен, наименее отклоняющийся от 0?

Ответ.

3. Результаты

Таблица 1. Норма ошибка в зависимости от сетки и узлов на ней для $y = x^2$

Количество узлов n	Норма ошибки интерполяции на равномерной сетке	Норма ошибки интерполяции на чебышевской сетке
4	1.38778e-17	1.11022e-15
8	1.56541e-14	8.27116e-14
16	4.16477e-11	4.11692e-10
32	0.00135712	0.0270299
64	1.79857e+11	9.43626e+13
128	3.30446e+41	3.3719e+46

Таблица 2. Норма ошибка в зависимости от сетки и узлов на ней для примера Рунге

Количество узлов n	Норма ошибки интерполяции на равномерной сетке	Норма ошибки интерполяции на чебышевской сетке
4	0.0222816	0.0121951
8	0.00225823	0.000358938
16	3.99059e-05	3.11367e-07
32	0.00299503	0.024117
64	1.33188e+13	1.03685e+14
128	4.17637e+43	4.16101e+46

Таблица 3. Норма ошибка в зависимости от сетки и узлов на ней для $y = \frac{1}{\arctg(1 + 10x^2)}$

Количество узлов n	Норма ошибки интерполяции на равномерной сетке	Норма ошибки интерполяции на чебышевской сетке
4	0.41874	0.439841
8	1.24549	0.311175
16	54.2254	0.142036
32	194965	0.0273522
64	3.17024e+16	5.28623e+14
128	3.24367e+50	5.39712e+46

Таблица 4. Норма ошибка в зависимости от сетки и узлов на ней для $y = (4x^3 + 2x^2 - 4x + 2)^{\sqrt{2}} + \arcsin \frac{1}{5+x-x^2} - 5$

Количество узлов n	Норма ошибки интерполяции на равномерной сетке	Норма ошибки интерполяции на чебышевской сетке
4	0.599609	0.330792
8	0.0247732	0.00794908
16	0.00853036	7.25871e-05
32	0.00849413	0.0038532
64	6.79558e+11	4.35913e+14
128	5.66375e+43	2.29985e+47

Таблица 5. Норма ошибка в зависимости от сетки и узлов на ней для тестового примера варианта №2

Количество узлов n	Норма ошибки интерполяции на равномерной сетке	Норма ошибки интерполяции на чебышевской сетке
4	2.473	1.81
8	2.79	2.42
16	32.12	2.62
32	2563.75	2.43
64	1.24941e+13	2.4652e+14
128	2.98996e+43	8.24608e+45