

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-7-14

УДК 51-74; 517.18

Дата: поступления статьи: 18.01.2023
после рецензирования: 28.02.2023
принятия статьи: 30.05.2023

А.В. Киптенко

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: kiptenkoandrei@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3837-1013>

И.М. Избяков

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: iliya-izbyakov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3358-966X>

О РАЗРЕЖЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОРТОГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ¹

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассмотрена модель получения разреженного представления вектора-сигнала в \mathbb{R}^k , основанная на системе линейных уравнений с ортогональной матрицей. Такое представление является минимизацией целевой функции, которая сочетает в себе отклонение от точного решения и выбранный функционал J . В качестве функционала выбраны евклидова норма, норма $\|\cdot\|_1$ и квазинорма $\|\cdot\|_0$. Евклидова норма не позволяет получить другие решения кроме точного, а две другие позволяют балансировкой невязки и параметра λ при функционале получать более разреженные решения. Построены графики зависимости между координатами оптимального вектора и параметром λ . Приведены примеры.

Ключевые слова: разреженные представления; целевая функция; минимизация целевой функции; нормы; псевдонормы; допустимый уровень погрешности.

Цитирование. Киптенко А.В., Избяков И.М. О разреженных приближениях решения линейной системы с ортогональной матрицей // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 1. С. 7–14. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-7-14>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Киптенко А.В., 2023

Киптенко Андрей Викторович — аспирант кафедры безопасности информационных систем, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Избяков И.М., 2023

Избяков Илья Михайлович — аспирант кафедры безопасности информационных систем, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

¹Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-931).

1. Предварительные сведения

В настоящее время активно разрабатывается новый метод сжатия информации, основанный на снижении размерности данных. Простейшая модель такого сжатия выглядит так.

Рассмотрим линейную систему уравнений с прямоугольной матрицей [1–3]

$$D_{n \times k} \alpha = x, k \geq n.$$

Например, для $k=3$, $n=2$ система принимает вид:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Исходная информация моделируется вектором α , сжатая — вектором x меньшей размерности. Матрицу D принято называть словарем, а её столбцы — атомами.

Предполагая, что ранг матрицы D полный, система имеет бесконечное число решений. Для создания быстрых алгоритмов восстановления информации предпочтение отдается векторам, имеющим наибольшее количество нулевых координат. Такие решения называются разреженными. Тематика, связанная с разреженными представлениями, широко освещена в литературе, включая источники [1–10]. В общем виде можно сформулировать следующую задачу: найти такой функционал Q , минимизируя который можно было бы добиться единственности в выборе решения. Формально постановка задачи выглядит следующим образом: $\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} Q(\alpha)$ и $D\alpha = x$. Традиционный выбор в качестве функционала Q евклидовой нормы позволяет найти единственное решение, которое, однако, не является разреженным [1]. Для поиска разреженных решений интересно рассмотреть нормы и псевдонормы, отличные от евклидовой.

В данной работе будут рассмотрены функционалы вида $Q(\alpha) = \begin{cases} \|\alpha\|_p^p & p = 1, 2 \\ \|\alpha\|_0 & p = 0 \end{cases}$.

Для $p = 0$ функционал $Q(\alpha)$ определяет количество ненулевых координат вектора α .

Для этого функционала формулируется задача минимизации $(P_0) : \hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \|\alpha\|_0$ такая, что $D\alpha = x$.

Представляет интерес и такая постановка задачи. Допускается ϵ -отклонение от точного решения системы, но по-прежнему сохраняется требование получить разреженное решение [4]. Одна из возможных постановок такой задачи выглядит так: $(P_p^\epsilon) : \hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} Q(\alpha)$, $p = 0, 1, 2$ такое, что $\|D\alpha - x\|_2 \leq \epsilon$.

2. Основные результаты

В данной работе в качестве словаря рассматривается вещественная ортогональная $k \times k$ -матрица D , и для такого словаря решаются задачи (P_p^ϵ) , $p = 0, 1, 2$. Для решения поставленных задач составляется целевая функция [1] с параметром $\lambda > 0$, с классическими нормами при $p = 1$, $p = 2$ и с псевдонормой при $p = 0$:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \|D\alpha - x\|_2^2 + \lambda Q(\alpha),$$

и задача сводится к нахождению вектора α , который минимизирует определенную таким образом функцию, $\alpha, x \in \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$. $\lambda > 0$.

Используя ортогональность матрицы D , имеем:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{1}{2} \|D\alpha - x\|_2^2 + \lambda Q(\alpha) = \frac{1}{2} \|D\alpha - DD^T x\|_2^2 + \lambda Q(\alpha) = \\ &= \frac{1}{2} \|D(\alpha - \beta)\|_2^2 + \lambda Q(\alpha) = \frac{1}{2} \|(\alpha - \beta)\|_2^2 + \lambda Q(\alpha). \end{aligned}$$

В первом переходе использовалось свойство унитарности, $DD^T = I$. Второй осуществляется с использованием точного решения $\beta := D^T x$. Последний переход использует изометрию унитарного преобразования относительно евклидовой нормы.

Получившееся равенство можно записать следующим образом:

$$f(\alpha) = \sum_{j=1}^k \left[\frac{1}{2} (\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda Q(\alpha_j) \right].$$

Такая форма записи позволяет заменить задачу векторной оптимизации серией задач скалярной оптимизации.

3. Задача (P_0^ϵ)

В этой задаче оптимальные координаты принимают вид:

$$\alpha_j^{opt} = \arg \min_{\alpha_j} [\frac{1}{2}(\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda]$$

при $\alpha_j \neq 0$ и

$$\alpha_j^{opt} = \arg \min_{\alpha_j} [\frac{1}{2}\beta_j^2]$$

при $\alpha_j = 0$.

Минимум первой функции достигается при $\alpha_j = \beta_j$ и равен λ ; а минимум второй достигается при $\alpha_j = 0$ и равен $\beta_j^2/2$.

Сравним найденные экстремумы для получения условий для α_j^{opt}

$$\frac{1}{2}\beta_j^2 \leq \lambda, \quad |\beta_j| \leq \sqrt{2\lambda}.$$

Соответственно

$$\alpha_j^{opt} = \begin{cases} 0; & |\beta_j| \leq \sqrt{2\lambda}, \\ \beta_j; & |\beta_j| > \sqrt{2\lambda}. \end{cases}$$

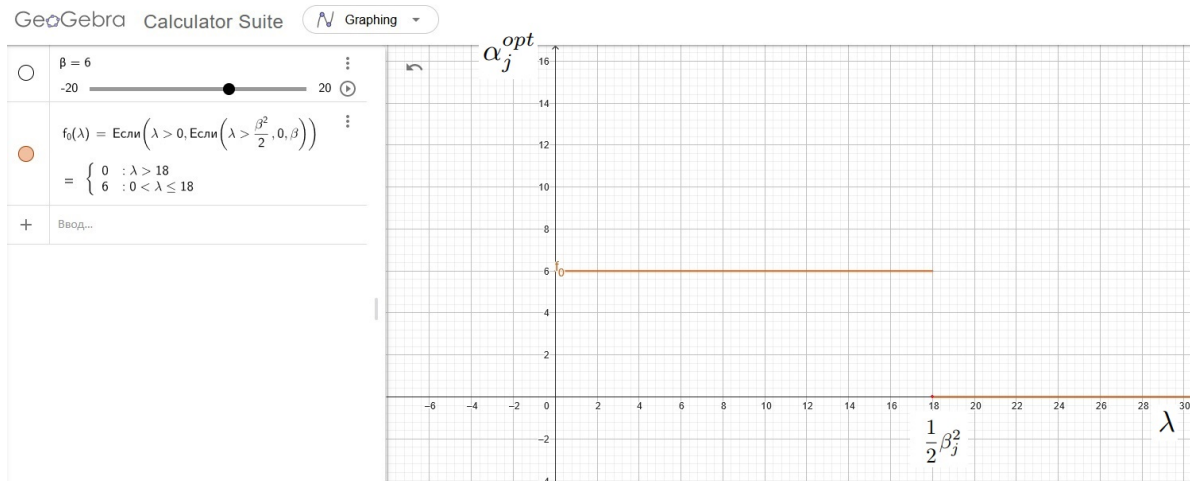


Рис. 1. График зависимости оптимальных координат α_j от параметра λ для ℓ_0 квазинормы
 Fig. 1. Graph of the dependence of the optimal coordinates α_j on the parameter λ for the ℓ_0 quasi-norm

Данный график (рис. 1) известен как жесткий порог. Для $|\beta| \leq \sqrt{2\lambda}$ оптимальным представлением будет $\alpha = 0$. Когда $|\beta| \geq \sqrt{2\lambda}$, оптимальное представление $\alpha = \beta$. Таким образом, варьируя невязку и параметр λ , можно сделать нулевыми те координаты точного решения β , которые удовлетворяют условию $|\beta| \leq \sqrt{2\lambda}$.

4. Задача (P_1^ϵ)

При рассмотрении нормы ℓ_1 функции $Q(\alpha_j) = |\alpha_j|$, используя целевую функцию $\frac{1}{2}(\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda Q$, можно получить оптимизационную задачу [4]

$$\alpha_j^{opt} = \arg \min_{\alpha_j} [\frac{1}{2}(\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda|\alpha_j|].$$

Находим значение α_j , при котором $F(\alpha_j) = \frac{1}{2}(\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda|\alpha_j|$ достигает минимума.

Для этого найдем критические точки, в которых $F'(\alpha_j) = 0$ или $F'(\alpha_j)$ не существует. Производная представлена следующим выражением:

$$F'(\alpha_j) = \alpha_j - \beta_j + \lambda \frac{\alpha_j}{|\alpha_j|}, \quad \alpha_j \neq 0.$$

F' разбивается на два случая

$$F'(\alpha_j) = \begin{cases} \alpha_j - \beta_j + \lambda & \alpha_j > 0, \\ \alpha_j - \beta_j - \lambda & \alpha_j < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай $\alpha_j > 0$

$$F'_1(\alpha_j) = \alpha_j - \beta_j + \lambda; \alpha_j > 0.$$

Приравниваем к нулю, получаем одну критическую точку

$$\alpha_j = \beta_j - \lambda.$$

Прделаем то же самое с $F'_2(\alpha_j) = \alpha_j - \beta_j - \lambda; \alpha_j < 0$. Приравниваем к нулю, получаем одну критическую точку

$$\alpha_j = \beta_j + \lambda.$$

Для доказательства того, что данные критические точки являются точками минимума, необходимо взять вторую производную и проверить найденные критические точки. $F''(\alpha_j) = 1 \Rightarrow \beta_j + \lambda$ и $\beta_j - \lambda$ — минимумы функции.

Далее, необходимо узнать, при каких условиях найденные минимумы меньше 0

$$\beta_j - \lambda < 0 \Rightarrow \beta_j < \lambda,$$

$$\beta_j + \lambda < 0 \Rightarrow \beta_j < -\lambda.$$

Проверяем оставшуюся критическую точку

$$\begin{cases} 0 < \beta_j + \lambda; \\ 0 < \beta_j - \lambda; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_j < -\lambda; \\ \beta_j < \lambda. \end{cases}$$

При сравнении $\beta_j + \lambda$ и $\beta_j - \lambda$ получаем, что $-\lambda < \lambda$ или $-\lambda > \lambda$. Т.к. $\lambda > 0$, можно прийти к выводу, что $\alpha_j^{opt} = \beta_j - \lambda$ используется при $\beta_j > \lambda > 0$, а $\alpha_j^{opt} = \beta_j + \lambda$ при $\beta_j < -\lambda < 0$.

Таким образом, решение задачи минимизации для ℓ_1 нормы можно записать в таком виде:

$$\alpha_j^{opt} = \begin{cases} \beta_j - \lambda; & \beta_j > \lambda, \\ 0; & |\beta_j| \leq \lambda, \\ \beta_j + \lambda; & \beta_j < -\lambda. \end{cases}$$

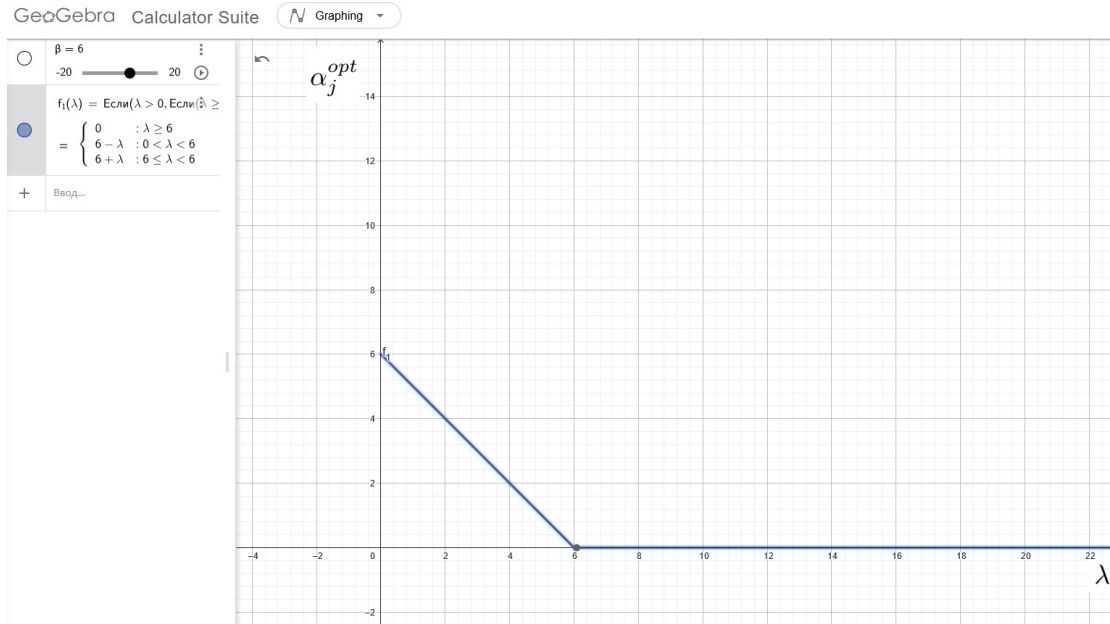


Рис. 2. График зависимости оптимальных координат α_j от параметра λ для ℓ_1 нормы
 Fig. 2. Graph of the dependence of the optimal coordinates α_j on the parameter λ for the ℓ_1 norm

Таким образом, варьируя невязку и параметр λ , получаем возможность сделать нулевыми те координаты точного решения β , которые удовлетворяют условию $|\beta| \leq \lambda$ (рис. 2).

5. Задача (P_2^ϵ)

При рассмотрении нормы ℓ_2 функции Q, получаем $Q(\alpha_j) = |\alpha_j|^2$.

Таким образом, оптимизационная задача сводится к следующему виду:

$$\alpha_j^{opt} = \arg \min_{\alpha_j} \left[\frac{1}{2} (\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda |\alpha_j|^2 \right],$$

$F(\alpha_j) = \frac{1}{2}(\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda|\alpha_j|^2$, $F(\alpha_j) = \frac{1}{2}(\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda\alpha_j^2$. Находим значение α_j , при котором $F(\alpha_j)$ достигает минимума.

$$F'(\alpha_j) = \alpha_j - \beta_j + 2\lambda\alpha_j.$$

Приравниваем к нулю, получаем одну критическую точку

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{1 + 2\lambda}.$$

Данная точка является точкой минимума функции. Следовательно, $\alpha_j^{opt} = \frac{\beta_j}{1+2\lambda}$.

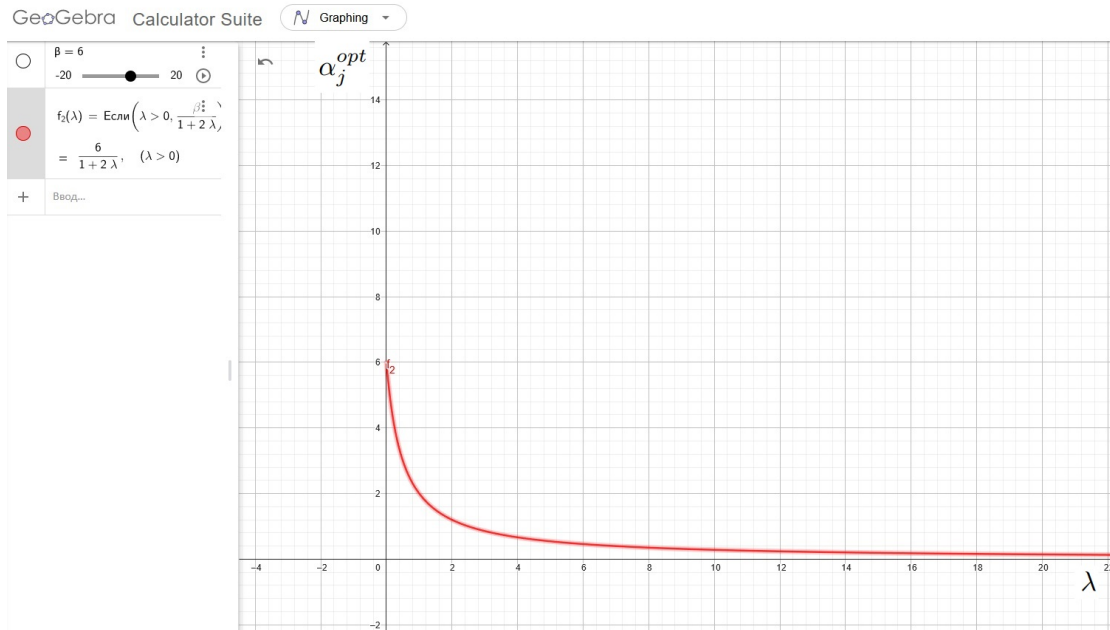


Рис. 3. График зависимости оптимальных координат α_j от параметра λ для ℓ_2 нормы
 Fig. 3. Graph of the dependence of the optimal coordinates α_j on the parameter λ for the ℓ_1 norm

Таким образом, получаем, что ℓ_2 норма не позволяет получить дополнительных нулевых координат (рис. 3).

6. Примеры нахождения разреженных решений

В качестве словаря возьмем единичную матрицу 4×4

$$D = D^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Возьмем $\lambda = 2$. Для ℓ_1 нормы оптимальным решением будет:

$$\alpha_j^{opt} = \begin{cases} \beta_j - \lambda; & \beta_j > \lambda, \\ 0; & |\beta_j| \leq \lambda, \\ \beta_j + \lambda; & \beta_j < -\lambda, \end{cases}$$

$$\alpha_j^{opt} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получили более разреженное решение для вектора x . Нетрудно заметить, что при использовании ℓ_1 нормы всегда можно получить более разреженное решение путем соответствующего выбора λ .

Также можно заметить, что при использовании ℓ_2 нормы и $\alpha_j^{opt} = \frac{\beta_j}{1+2\lambda}$ невозможно получить α_j , отличное от 0 при $\beta_j \neq 0$. Таким образом, норма ℓ_2 не может решить поставленную задачу.

Используя псевдонорму ℓ_0 , имеем

$$\alpha_j^{opt} = \begin{cases} 0; & |\beta_j| \leq \sqrt{2\lambda}, \\ \beta_j; & |\beta_j| > \sqrt{2\lambda} \end{cases}$$

и, изменяя параметр λ , можно получить любое количество нулевых координат приближенного решения.

В качестве словаря возьмем ортогональную матрицу 4×4

$$D = D^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Возьмем $\lambda = 2$. Для ℓ_1 нормы оптимальным решением будет:

$$\alpha_j^{opt} = \begin{cases} \beta_j - \lambda; & \beta_j > \lambda, \\ 0; & |\beta_j| \leq \lambda, \\ \beta_j + \lambda; & \beta_j < -\lambda, \end{cases}$$

$$\alpha_j^{opt} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы получили одну дополнительную нулевую координату.

Выводы

Выбор параметра λ позволяет регулировать количество нулевых координат в зависимости от выбранной невязки ϵ . При использовании ℓ_0 или ℓ_1 нормы всегда можно получить более разреженное решение путем соответствующего выбора λ .

Также можно заметить, что при использовании ℓ_2 нормы и $\alpha_j^{opt} = \frac{\beta_j}{1+2\lambda}$ невозможно получить α_j , отличное от 0, при $\beta_j \neq 0$. Таким образом, ℓ_2 норма не позволяет получить дополнительных нулевых координат в приближенном представлении точного решения.

Литература

- [1] Elad M. Sparse and Redundant Representations. From Theory to Applications in Signal and Image Processing. New York: Springer. 2010. 376 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7011-4>.
- [2] Novikov S.Ya. Processing of sparse signals and mutual coherence of "measurable" vectors // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. № 4. Pp. 666–675. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220040174>. EDN: <https://www.elibrary.ru/hrjatz>.
- [3] Natarajan B.K. Sparse approximate solutions to linear systems // SIAM Journal on Computing. 1995. Vol. 24. Issue 2. Pp. 227–234. DOI: <http://doi.org/10.1137/S0097539792240406>.
- [4] Donoho D.L., Elad M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2003. Vol. 100. Issue 5. Pp. 2197–2202. DOI: <http://doi.org/10.1073/pnas.0437847100>.
- [5] Candes Emmanuel J. Compressive sampling // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. 2006. Vol. 3. Pp. 1433–1452. URL: <https://candes.su.domains/publications/downloads/CompressiveSampling.pdf>.
- [6] Candes Emmanuel J. Mathematics of sparsity (and a few other things). International Congress of Mathematicians. 2014. URL: <https://candes.su.domains/publications/downloads/ICM2014.pdf>.

- [7] Candes Emmanuel J., Romberg J.K., Tao T. Stable Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Measurements. Available online: arXiv:math/0503066.
- [8] Cohen R., Elad M., Milanfar P. Regularization by Denoising via Fixed-Point Projection (RED-PRO). Available online: arXiv:2008.00226v2.
- [9] Candes Emmanuel J., Plan Ya. Regularization by Denoising via Fixed-Point Projection (RED-PRO). Available online: arXiv:1011.3854v3.
- [10] Qu Q., Sun Ju, Wright J. Finding a sparse vector in a subspace: Linear sparsity using alternating directions. Available online: arXiv:1412.4659.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-7-14

Submitted: 18.01.2023

Revised: 28.02.2023

Accepted: 30.05.2023

A.V. Kiptenko

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: kiptenkoandrei@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3837-1013>

I.M. Izbiakov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: iliya-izbyakov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3358-966X>

ON SPARSE APPROXIMATIONS OF SOLUTIONS TO LINEAR SYSTEMS WITH ORTHOGONAL MATRICES²

ABSTRACT

This article discusses a model for obtaining a sparse representation of a signal vector in \mathbb{R}^k , based on a system of linear equations with an orthogonal matrix. Such a representation minimizes a target function that combines the deviation from the exact solution and a chosen functional J . The functionals chosen are the Euclidean norm, the norm $|\cdot|_1$, and the quasi-norm $|\cdot|_0$. The Euclidean norm only allows for the exact solution, while the other two allow for a balance between the residual and the parameter λ in the functional, resulting in sparser solutions. Graphs are plotted showing the dependence between the coordinates of the optimal vector and the parameter λ , and examples are provided.

Key words: sparse representations; objective function; minimization of the objective function; norms; pseudonorms; admissible error level.

Citation. Kiptenko A.V., Izbiakov I.M. On sparse approximations of solutions to linear systems with orthogonal matrices. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 7–14. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-7-14>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Kiptenko A.V., 2023

Andrei V. Kiptenko — post-graduate student of the Department of Information Security, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Izbiakov I.M., 2023

Ilya Mikhailovich. Izbiakov — post-graduate student of the Department of Information Security, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Elad M. Sparse and Redundant Representations. From Theory to Applications in Signal and Image Processing. New York: Springer, 2010, 376 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-1-4419-7011-4>.

²The work was carried out within the frameworks of realization of the program of development of Research and Educational Mathematical Center of the Volga Federal District (agreement № 075-02-2023-931).

- [2] Novikov S.Ya. Processing of sparse signals and mutual coherence of "measurable" vectors. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, vol. 41, no. 4, pp. 666–675. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1995080220040174>. EDN: <https://www.elibrary.ru/hrjatz>.
- [3] Natarajan B.K. Sparse approximate solutions to linear systems. *SIAM Journal on Computing*, 1995, vol. 24, issue 2, pp. 227–234. DOI: <http://doi.org/10.1137/S0097539792240406>.
- [4] Donoho D.L., Elad M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2003, vol. 100, issue 5, pp. 2197–2202. DOI: <http://doi.org/10.1073/pnas.0437847100>.
- [5] Candes Emmanuel J. Compressive sampling. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 2006, vol. 3, pp. 1433–1452. Available at: <https://candes.su.domains/publications/downloads/CompressiveSampling.pdf>.
- [6] Candes Emmanuel J. Mathematics of sparsity (and a few other things). International Congress of Mathematicians. 2014. Available at: <https://candes.su.domains/publications/downloads/ICM2014.pdf>.
- [7] Candes Emmanuel J., Romberg J.K., Tao T. Stable Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Measurements. Available online: [arXiv:math/0503066](https://arxiv.org/abs/math/0503066).
- [8] Cohen R., Elad M., Milanfar P. Regularization by Denoising via Fixed-Point Projection (RED-PRO). Available online: [arXiv:2008.00226v2](https://arxiv.org/abs/2008.00226v2).
- [9] Candes Emmanuel J., Plan Ya. Regularization by Denoising via Fixed-Point Projection (RED-PRO). Available online: [arXiv:1011.3854v3](https://arxiv.org/abs/1011.3854v3).
- [10] Qu Q., Sun Ju, Wright J. Finding a sparse vector in a subspace: Linear sparsity using alternating directions. Available online: [arXiv:1412.4659](https://arxiv.org/abs/1412.4659).