ALGEBRALLISET RAKENTEET I 2022 – VIIKON 5 HARJOITUSTEHTÄVÄT

CHRISTIAN WEBB

Harjoitustehtävä 1: Merkinnät ja peruskäsitteet

Pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa? Ei tarvitse perustella.

(1) $\mathbb{Z} = \langle -1 \rangle$.
(2) Jos $(G, \star)$ on ryhmä ja $g \in G$, niin $\langle g^2 \rangle \subset \langle g \rangle$.
(3) Jos $(G, \star)$ on ryhmä ja $g \in G$, niin $\langle g^{-1} \rangle = \langle g \rangle$.
(4) Syklin $(12) \in S_3$ kertaluku on 3.
(5) Kaikki sykliset ryhmät ovat keskenään isomorfisia.

Ratkaisu:

(1) Ei päde
(2) Pätee
(3) Ei päde
(4) Pätee
(5) Pätee

Harjoitustehtävä 2: Transpositiot ja symmetrisen ryhmän virittäminen

Permutaatiota $\sigma \in S_n$ kutsutaan *transpositioksi*, jos se on 2-sykli: $\sigma = (ab)$ jollakin $a, b \in \{1, ..., n\} : a \neq b$.

(1) Osoita, että mikä tahansa sykli $(a_1 a_2 ... a_k)$ voidaan kirjoittaa transpositioiden tulona:
$$(a_1 a_2 .... a_k) = (a_1 a_k)(a_1 a_{k-1}) \cdots (a_1 a_2).$$
(2) Olkoon $T_n = \{\sigma \in S_n : \sigma \text{ on transpositio}\}$ transpositioiden joukko. Osoita, että $\langle T_n \rangle = S_n$.

Vihje: mieti ensimmäisessä kohdassa mille alkiolle kyseinen transpositioiden tulo kuvaa alkion a_j. Jälkimmäisessä kohdassa on varmaankin hyvä ajatus muistaa, että jokainen permutaatio voidaan kirjoittaa syklien tulona, ja käyttää ensimmäistä osaa.

Harjoitustehtävä 3: Kertaluku

(1) Olkoon $\tau \in S_n$ k-sykli: $\tau = (a_1 ... a_k)$. Mikä on alkion τ kertaluku? (Perustele)
(2) Olkoon $\tau_1, \tau_2 \in S_n$ erillisiä syklejä: $\tau_1 = (a_1 \cdots a_k)$ ja $\tau_2 = (b_1 ... b_l)$ missä $a_i \neq b_j$. Mikä on alkion $\tau_1 \tau_2$ kertaluku? (Perustele)
(3) Osaatko kuvata mielivaltaisen permutaation $\sigma \in S_n$ kertalukua sen syklihajotelman avulla?

Vihje: jos ensimmäisessä kohdassa et heti pääse vauhtiin, voit miettiä mikä on 2-syklin kertaluku, mikä on 3-syklin kertaluku, ja miettiä, että osaatko yleistää. 2-kohtaan voisi riittää vihjeeksi lyhenne pyj. 3-kohtaan mainittakoon, että pyj voidaan määritellä myös useammalle luvulle.

Harjoitustehtävä 4: Jäännösluokkaryhmän virittäminen

Olkoon p jokin alkuluku ja tarkastellaan jäännösluokkaryhmää $\mathbb{Z}_p$. Osoita, että $\langle g \rangle = \mathbb{Z}_p$ jokaisella $g \in \mathbb{Z}_p \setminus \{[0]_p\}$.
Vihje: Luentomuistiinpanojen Propositiosta 11.3 saattaa olla tässä hyötyä. Erityisesti kannattaa muistaa, että jos $k \in \{1, .., p-1\}$ ja p on alkuluku, niin $\text{syt}(k, p) = 1$. Tehtävä on hyvin lyhyt kun löydät sopivan lähtökohdan.

Ratkaisu:

Olkoon p jokin alkuluku. Proposition 11.3.(5) mukaan

$$\text{Jos } syt(k, n) = 1, \text{ niin} \langle g^k \rangle = G$$

Koska tiedämme, että

$$\text{jos } k \in \{1, \cdot, p-1\} \text{ ja } p \text{ on alkuluku, niin } syt(k, p) = 1$$

Siis $\langle g^k \rangle = G$.
Proposition 11.3.(2) mukaan kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ pätee $\langle g^k \rangle = \langle g^{syt(n,k)} \rangle$. Aikaisemman perusteella $\langle g^{syt(n,k)} \rangle = \langle g^1 \rangle$. Koska $\mathbb{Z}_p$ on 1:n virittämä ryhmä, voimme todeta $\langle g \rangle = \mathbb{Z}_p$, jokaisella $g \in \mathbb{Z}_p \setminus \{[0]_p\}$.

Harjoitustehtävä 5: Syklisyyden puute

(1) Osoita, että $(\mathbb{Q}, +)$ ei ole syklinen.
(2) Osoita, että S_4:n aliryhmä $H = \{e, (12), (34), (12)(34)\}$ ei ole syklinen (saat tietää, että H on ryhmä).

Vihje: Muistiinpanojen Propositio 11.1 ja 2. viikon harjoitukset saattavat auttaa ensimmäisessä kohdassa. Toisessa, huomaa, että Propositio 11.1 sanoisi, että H:n tulisi olla isomorfinen $\mathbb{Z}_4$:n kanssa. Koita miettiä miksi tämä on mahdotonta (huom, jokainen H:n alkio σ toteuttaa $\sigma^2 = e$).

Ratkaisu:

(1) Tehdään ristiriitatodistus. Oletetaan, että $(\mathbb{Q}, +)$ on syklinen. Proposition 11.1 jompi kumpi ehdoista täytyy pätea, jotta $(\mathbb{Q}, \star)$ on syklinen ryhmä. Koska $\mathbb{Q}$:n kertaluku ei ole äärellinen, voimme keskittyä tutkimaan ehtoa $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}$. Harjoituksen 2.6 perusteella huomaamme, ettei viimeinenkään ehto pidä paikkaansa. Siis $(\mathbb{Q}, +)$ ei ole syklinen.
(2) Huomaamme propositiosta 11.1 bijektioristiriidan kohdassa (2), siis $H \ncong \mathbb{Z}_4$. Näin ollen H ei ole syklinen.

Harjoitustehtävä 6: Virittämisestä

Anna alla oleville ryhmille $(G, \star)$ esimerkki joukosta $S \subset G$, jolla $S \neq G$ (ja sovitaan myös, että $S \neq G \setminus \{e\}$), mutta $\langle S \rangle = G$. Ei tarvitse perustella.
(1) $(G, \star) = (\mathbb{R}, +)$.
(2) $(G, \star) = (\{-1, 1\} \times \{-1, 1\}, \cdot)$, missä $(a, b) \cdot (x, y) = (ax, by)$, missä ax ja by ovat kokonaislukujen tuloja.
(3) $(G, \star) = (0, \infty)$ varustettu tulolla.

Email address: `christian.webb@helsinki.fi`