

## ALGEBRALLISET RAKENTEET I 2022 – VIIKON 6 LISÄTEHTÄVÄT

### Laskennallinen lisätehtävä 1: Alternoivan ryhmän aliryhmät

Tässä tehtävässä on tarkoitus tarkistaa laskennallisesti onko ryhmällä  $A_4$  kuuden alkion aliryhmää. Voit yrittää tehdä tämän fiksummin, jos haluat, mutta alla on hahmotelma, että kuinka tämän voi tehdä. Relevanttia SymPy-materiaalia löytyy taas täältä [https://docs.sympy.org/latest/modules/combinatorics/perm\\_groups.html](https://docs.sympy.org/latest/modules/combinatorics/perm_groups.html).

- (1) Tarkista SymPy:llä, että joukko

$$A_4 = \{e, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

on ryhmä. Tämän voit esimerkiksi tehdä antamalla kullekin näistä permutaatioista nimen ja tarkastamalla, että onko niiden generoima ryhmä (rakennetaan komennolla `PermutationGroup`) sama kuin itse joukko.

- (2) Käy läpi kaikki kuusialkioiset aliryhmäkandidaatit (esimerkiksi kuusialkioiset osajoukot, jotka sisältävät neutraalialkion) ja onko niiden generoima ryhmä sama kuin kyseinen kuusialkioinen joukko. Jos ei mitään tällaista kuusialkioista joukkoa, jonka virittämä ryhmä on joukko itse, ei voi olla kuuden alkion aliryhmää.

Kirjoita lyhyt raportti tästä.

### Ratkaisu:

```
from sympy.combinatorics import Permutation
from sympy.combinatorics.polyhedron import Polyhedron
from sympy.combinatorics.perm_groups import PermutationGroup
```

```
A = Permutation(123)
B = Permutation(132)
C = Permutation(124)
D = Permutation(142)
E = Permutation(134)
F = Permutation(143)
G = Permutation(234)
H = Permutation(243)
I = Permutation(12, 34)
J = Permutation(13, 24)
K = Permutation(14, 23)
```

```
PG = PermutationGroup(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K)
```

```
print(PG)
```

Tulostus: `PermutationGroup([(243)(12 34), (243)(13 24), (243)(14 23)])`

Huomataan, ettei generoitu ryhmä ole sama kuin joukko  $A_4$ . Voimme kuitenkin tästä nähdä, että ryhmällä  $A_4$  voi olla kuuden alkion aliryhmä.