ALGEBRALLISET RAKENTEET I 2022 – TENTTIVASTAUS

Akira Taguchi 014801457

Ratkaisu:

Tehtävä 1

(1) Kyllä
(2) Ei
(3) Ei
(4) Kyllä
(5) Kyllä
(6) Ei

Ratkaisu:

Tehtävä 2

(1) Muunnetaan syklinotaatiot matriisimuotoon:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luodaan σ käyttäen syklien tulon määritelmää. $1 \to 3 \to 2$, $2 \to 1 \to 1$ ja $3 \to 2 \to 3$. Nyt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12)$$

(2) Ryhmän määritelmän mukaan ryhmässä täytyy olla neutraalialkio, käänteisalkio sekä laskutoimituksen täytyy olla liitännäinen. Voimme näiden perusteella osoittaa, että $g \in H$.

Ratkaisu:

Tehtävä 3

(1)
(2) Isomorfian määritelmän mukaan meidän täytyy tarkastaa ovatko H_1 ja H_2 operaation $\star$ suhteen bijektiiviset. Myös $\star(g \star_1 h) = \star(g) \star_2 \star(h)$ kaikilla $g, h \in H_1$.

Ratkaisu:

Tehtävä 4

(1) Lagrangen lauseen mukaan $|G| = [G : H]|H|$. Koska $\frac{7}{4} \neq \mathbb{Z}$, ei kyseenlaista objektia ole olemassa.
(2) Suoritetaan ristiriitatodistus Lagrangen lauseen avulla.
(3) $\mathbb{Z}_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, \{1, 2, 3\}\}$