ALGEBRALLISET RAKENTEET I 2022 – VIIKON 6 HARJOITUSTEHTÄVÄT

Tämän viikon harjoituksissa (**6 tehtävää**) tutkitaan ekvivalenssiluokkia, sivuluokkia ja Lagrangen lausetta. **Muista perustella päättelysi joko määritelmästä (esim. joko luentomuistiinpanot tai kurssikirja), lemmasta tai muusta tuloksesta, jostakin "yleisesti tunnetusta faktasta", tai sitten jostakin aiemmin päättelemästäsi.**

Palauta ratkaisusi Moodlessa pe 4.3. klo 23.59 mennessä.

Aloitetaan lämmittelyllä, jossa kerrataan viikon pääkäsitteet.

Harjoitustehtävä 1: Monivalintaa

Pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa? Ei tarvitse perustella.

(1) $xRy \quad \Leftrightarrow \quad a \geq b$ on kokonaislukujen ekvivalenssirelaatio.
(2) $xRy \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}$ on reaalilukujen ekvivalenssirelaatio.
(3) Jos $(G, \star) = (\mathbb{Z}_4, +)$ on jäännösluokkaryhmä ja $H = \{[0]_4, [2]_4\}$ (saat tietää, että tämä on aliryhmä). Tällöin $[1]_4 H = [3]_4 H$.
(4) Edellisen kohdan tapauksessa, $[1]_4 H = [2]_4 H$.
(5) Kolmannen kohdan tapauksessa, aliryhmän H indeksi on $[G : H] = 2$.
(6) Ryhmällä $(G, \star) = (\mathbb{Z}_9, +)$ voi olla aliryhmä H, jossa on viisi alkiota.

Vihje: (1) ja (2) kohtiin riittänee kerrata ekvivalenssirelaation määritelmä. (3) ja (4) kohtiin kannattaa laskea mitkä kyseiset sivuluokat ovat. (5) kohdassa kannattaa muistutta mieliin indeksin määritelmä tai sitten käyttää Lagrangen lausetta. Samoin (6) kohdassa Lagrangen lause on varmasti avuksi.

Ratkaisu:

(1) Pitää
(2) Pitää
(3) Pitää
(4) Ei pidä
(5) Pitää
(6) Ei pidä

Harjoitellaan sitten ekvivalenssirelaatioon liittyviä käsitteitä.

Harjoitustehtävä 2: Eräs ekvivalenssirelaatio

Olkoon A reaalisten polynomien joukko: $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ on polynomi}\}$. Sanotaan, että polynomeille p, q, $pRq \quad \Leftrightarrow \quad p(0) = q(0)$.

(1) Osoita, että R on ekvivalenssirelaatio.
(2) Kuvaile polynomin $p(x) = x$ ekvivalenssiluokkaa $[p]_R$. Perustele. (Tähän kelpaa useammalla tavalla muotoiltu vastaus kunhan se on oikein).

Vihje: Tässä ehkä selviää ilman vihjeitä.

Ratkaisu:

(1) R on ekvivalenssirelaatio, mikäli Määritelmän 10.3 ehdot täyttyvät:
  (a) pRp (refleksiivisyys): $p(0) = p(0)$
  (b) Jos pRq, niin qRp (symmetrisyys): Jos $p(0) = q(0)$, niin $q(0) = p(0)$
  (c) Jos pRq ja qRr, niin pRr (transitiivisuus): Jos $p(0) = q(0)$ ja $q(0) = r(0)$, niin $p(0) = r(0)$

  Siis R on ekvivalenssirelaatio.

(2)

Katsotaan sitten sivuluokkiin liittyvää ajatusta.

Harjoitustehtävä 3: Sivuluokista

Olkoon $(G, \star)$ ryhmä ja $H \leq G$.

(1) Osoita, että jos $h \in H$, niin $hH = H$.
(2) Osoita, että jos $g \notin H$, niin $gH \neq H$.

Vihje: Ensimmäisessä kohdassa kannattaa yrittää osoittaa, että $hH \subset H$ ja $H \subset hH$. Toisessa kohdassa riittää löytää alkio sivuluokasta gH, joka ei ole H:n alkio. (Tiedät varmuudella ainakain yhden alkion sivuluokasta, joka ei ole H:n alkio).

Ratkaisu:

(1)

Lasketaan vielä konkreettisesti joitakin sivuluokkia.

Harjoitustehtävä 4: Lisää sivuluokista

Olkoon $(G, \star) = (\mathbb{Z}_8, +)$ ja $H = \{[0]_8, [4]_8\}$.

(1) Osoita, että $H \leq G$.
(2) Määritä kaikki sivuluokat gH, missä $g \in G$.

Vihje: Ensimmäinen seuraa esim. aliryhmäehdosta. Toinen kohta vaatii sitten lähinnä kärsivällisyyttä, kun kaikki käydään läpi.

Ratkaisu:

(1)

Tutustutaan sitten Lagrangen lauseen käyttöön.

Harjoitustehtävä 5: Lagrangen lauseen käyttöä

Olkoon p ja q alkulukuja, ja olkoon $(G, \star) = (\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q, +)$, missä laskutoimitus on $([a]_p, [b]_q) + ([c]_p, [d]_q) = ([a+c]_p, [b+d]_q)$ – tämä on ryhmä muistiinpanojen Proposition 4.1 nojalla.

Osoita, että jos $H \leq G$ ja $H \neq G$, niin H on syklinen ryhmä.

Vihje: Lagrangen lauseesta ja Propositiosta 13.2 pitäisi olla apua.

Ratkaisu:

Katsotaan lopuksi vielä toista Lagrangen lauseen sovellusta.

Harjoitustehtävä 6: Lagrangen lauseen käyttöä v2

(1) Perustele miksi permutaatioryhmä $\{e, (123), (132)\}$ (saat tietää tämän olevan ryhmä) ei voi olla isomorfinen minkään $\mathbb{Z}_8$:n aliryhmän kanssa.
(2) Onko $\{e, (123), (132)\}$ isomorfinen jonkin $\mathbb{Z}_9$:n aliryhmän kanssa?

Vihje: ensimmäisessä kohdassa Lagrangen lauseesta voi olla apua. Toinen kohta mennee suoraan aikaisempien kertojen työkaluilla.

Ratkaisu:

(1)