何幻

Programming is about ideas,
languages are just a way to express them.

语言背后的代数学（二）：初等代数

2018-01-20 | Math

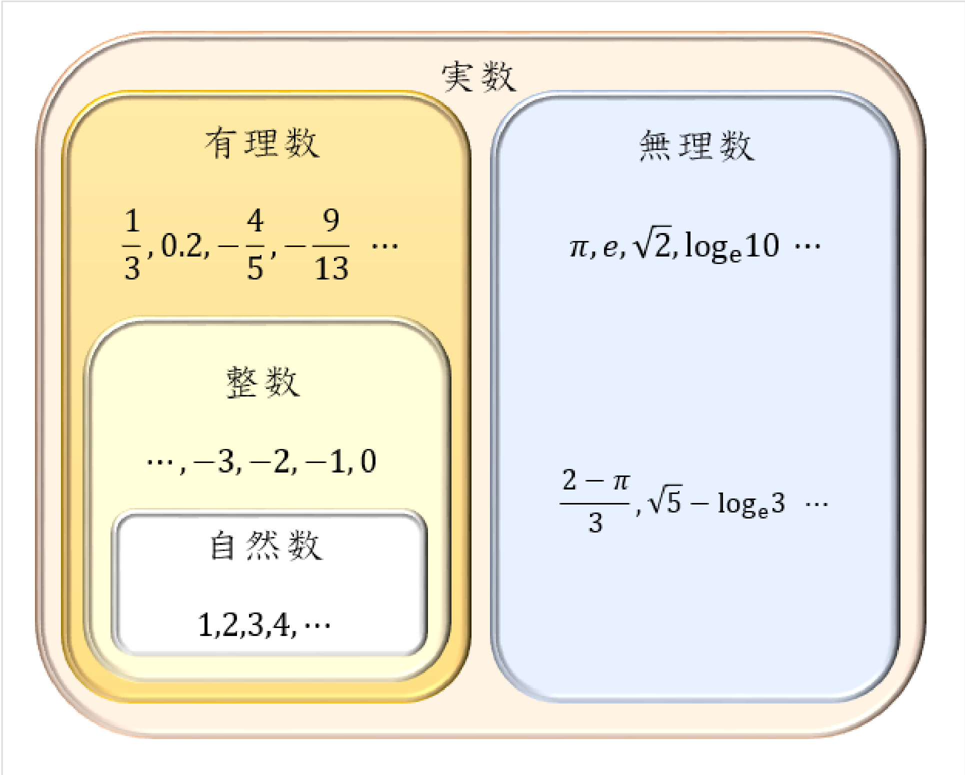
回顾

上文中我们介绍了一个称为“pq”的系统，
并且给它选择了一个合理的语义解释。
我们将 ---q-p-- 解释为“3等于1加2”。

此外，我们还知道了，
解释的方式，是随着形式系统的公理化条件而改变的。
更改了“pq系统”的公理或者推导规则的时候，
系统中公理和定理的含义都会发生改变。

为此我们回顾了几何学中的欧几里得第五公设问题，
看到了语义问题对数学家们造成的困扰。

自然数语言



从读小学的时候开始，我们就认识了自然数，

我们可以从零开始计数，每个数字比它前面的多一，

$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ \cdots$

这些数字可以用来表示物品的个数。

它们是如此的贴近生活，如此自然，

以致我们一直以来，就把两个不同的**概念混淆**在了一起。

一个概念是自然数的语法构造，属于编码问题，

另一个概念则是对这种语法构造的解释，属于语义问题。

为了看清这一点，

我们使用公理化方式定义一个**自然数形式系统**。

为此我们要问自己这些问题。

（1）这个形式系统包含了哪些符号呢？

它只包含 0~9，这个十个字符。

（2）哪些符号串是合法的？

一位符号串，或者不是 0 开头的多位符号串，都是合法的。

所有这些合法的符号串，构成了一个集合，称为该形式系统的“**语言**”。

（3）哪些符号串被认为是公理或定理，定理之间的推导规则是什么？

对于自然数形式系统来说，符号串 0 可以看做公理，后继函数可以看做推导规则。

（4）这些符号串的含义是什么？

简单起见，我们可以直接指定符号串的含义为它所对应的那个自然数。

例如， 3 是一个符号串，我们指定它对应3这个自然数。

其中 3 是语法符号，3是数学对象。

Peano系统

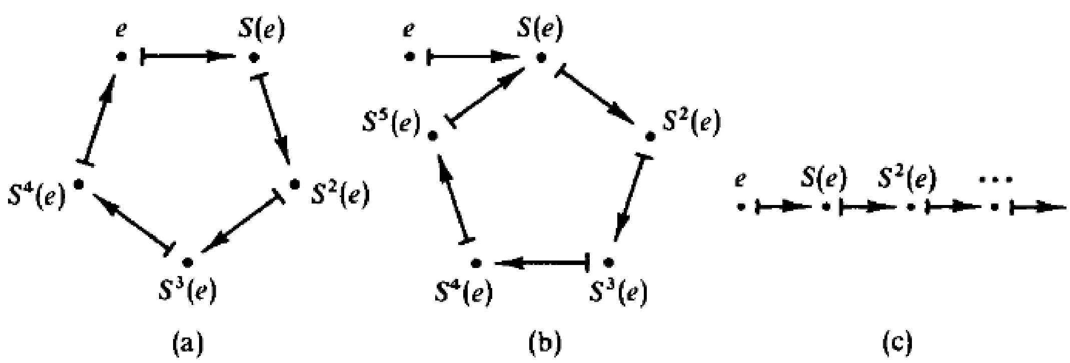


Fig. 16. Any Peano system must behave like (c).

上一节我们使用公理化的方式建立了一个形式系统，

并且选择了自然数作为该形式系统中符号串的解释。

可是在数学上，自然数到底是什么呢？

要回答这个问题，

还要回顾《你好，类型》系列文章中介绍的Peano系统，

皮亚诺（Peano）将自然数理论建立在了集合论之上。

其中，$\{\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \cdots\}$构成了一个归纳集。

我们将$\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \cdots$定义为**自然数**，（von Neumann construction）

每一个自然数就和一个集合对应起来了。

因此，自然数3是一个集合，

$\emptyset^{+++} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$，

其中，A^+为集合A的后继运算，$A^+ = A \cup \{A\}$。

总而言之，符号串 3 的数学解释，

是一个集合$\emptyset^{+++}$。

（不必惊讶。

自然数代数

在读小学的时候，数学课只有一门，主要学有理数的四则运算，
而到了初中，数学就变成了两门，分为代数课与几何课，
代数课主要讲方程和函数，几何课主要讲平面几何。

平面几何是很直观的，也很容易和其他数学划清界线，
因此，初中生们对“什么是几何”都没有太多疑惑。
但是至于“**什么是代数**”，就比较费解了，这个问题也困扰了我很久。

到大学，我们又学了线性代数，这种困扰日益加深，
因为居然出现了一种“线性的”“代数”，
却没有人事先告诉我们到底什么是“代数”。

后来我们学了抽象代数，这个问题才得以解决，
我找到了一个令自己满意的答案。

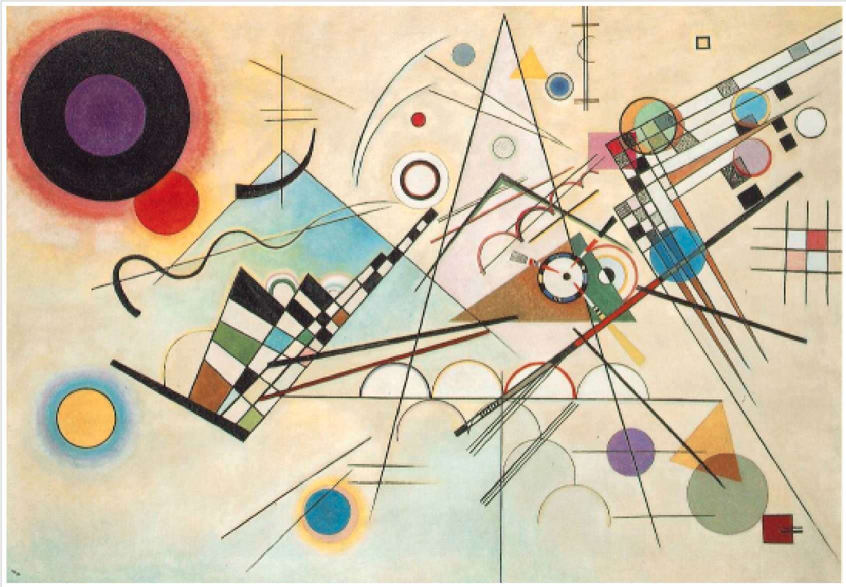
为了说明“什么是代数”，最简单的办法就是下定义，
设集合M上定义了一组运算，$a_1,a_2,\cdots,a_n$，
运算结果仍是M中的元素，则称M相对于这n个运算，构成了一个**代数**。

> 一般来说，代数问题的特点，
> 是对一类问题，利用统一的运算性质，求出所有可能的解答。

因此，代数学就是研究**运算系统性质**的学问。
而Peano系统，是最简单的运算系统之一，又称为一阶算术系统。
自然数就是这个系统中的运算对象。

因此，小学数学也称为“算术”。

代数学观点



随着代数学的发展，人们发明了许多运算系统，
例如，整数的加减法，有理数的四则运算，实数的根式或指数运算，等等。
它们都有现实的对应物，**仿佛**数学的研究对象就是现实世界一样。

然而，实际上并非如此。

例如，复数$1+2i$，它是没有现实对应的，
但是我们仍然可以对复数进行运算。
一个n次方程可能在实数范围内无解，但必定会存在n个复数解。

引入了复数之后，我们也才能体会到欧拉公式之美，
$e^{i\pi}+1=0$

另一方面，代数学的研究重点也发生了改变，
一开始人们研究的是单个的，独立的，具体的运算系统，
但是后来人们逐渐发现，很多运算系统有相同的运算性质，
可以**抽象**出来进行讨论。

例如，计算机系统中的无符号数，连同加法运算，构成了一个阿贝尔群。
而阿贝尔群中的加法，满足交换律和结合律，
因此，编译器就可以采用任意的顺序进行计算，不影响最终结果。

从运算性质的角度来分析问题，越来越流行了，
成为了现代数学不可或缺的一部分，
并且，代数学考虑问题的方法，也逐渐影响着其他学科。

总结

本文从语义和代数学角度重新认识了自然数，
自然数是Peano系统中的运算对象，
自然数集连同其上定义的后继运算，构成了一个代数（一阶算术系统）。

更重要的是，从代数学角度来看待问题，
有利于我们抓住系统中所隐含的**运算性质**。

参考

你好，类型（二）：Lambda calculus
计算机语言的形式语义
近世代数初步
深入理解计算机系统

语言背后的代数学（一）：语义解释
语言背后的代数学（三）：语义模型