何幻

Programming is about ideas,

languages are just a way to express them.

语言背后的代数学（九）：笛卡尔闭范畴

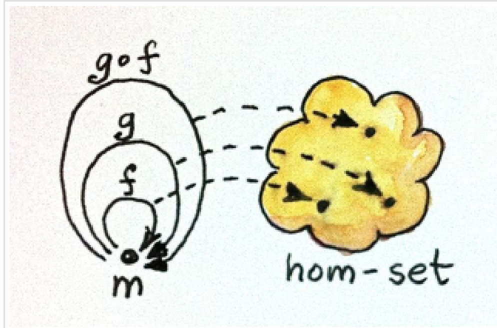
2018-02-19 | Math

回顾

上文我们简单的介绍了一些范畴论相关的内容，
范畴由一些对象和箭头组成，范畴之间的箭头称为函子，
函子之间的一族箭头称为自然变换。

范畴的对象不一定是集合，所有的箭头也不一定构成一个集合。
如果一个范畴C，它的对象都是集合，所有的箭头也构成了一个集合，
就称该范畴是一个小范畴（small categories）。

1. 定义域和值域



在集合论中，函数自变量所有可取值的集合，称为函数的**定义域**，
给定函数$f:A\to B$，其中A就是f的定义域，记为D_f，
集合$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$，称为f的**值域**，记为R_f。

在范畴论中，箭头也有定义域和值域的概念。
箭头$f:a\to b$，表示了对象a和b之间的关系，
我们称a为箭头f的**定义域**（domain），记为$dom\ f$，
b为箭头f的**值域**（codomain），记为$cod\ f$。

由此，我们还可以定义范畴C中，从对象a到对象b所有箭头的集合，
$hom(a,b)=\{f|f\in C,dom\ f=a,cod\ f=b\}$，常被称为**hom-set**。

2. 笛卡尔闭范畴

笛卡尔闭范畴是一种带有附加结构的范畴，这个名字虽然不是那么熟悉，
而实际上，我们经常遇到它。

2.1 笛卡尔积

两个集合X和Y的笛卡尔积，是以下所有可能有序对构成的集合，
$X\times Y=\{(x,y)|x\in X,y\in Y\}$。

2.2 笛卡尔积上的函数

$f:X\times Y\to Z$，是从笛卡尔积$X\times Y$到Z的函数，

我们可以用两种不同的视角来看待它，

（1）它是一个一元函数，参数取遍$X \times Y$中的所有元素。

（2）它是一个二元函数，一个参数来自于X，另一个来自于Y。

原则上，这两种理解应该是不同的，然而它们却是等价的。

2.3 柯里化

笛卡尔闭范畴就是反映这一类性质的数学结构，

一个范畴中，定义在乘积对象$a \times b$上的箭头f，

总是可以“自然的”由定义在某一个对象a或b上的箭头来决定。

这就是柯里化（curring）的概念，

将一个二元函数柯里化指的是，将它看成一个一元函数，

这个函数返回另一个一元函数。

假设$f: X \times Y \to Z$是一个函数，

令$Z^Y = \{f|f(y) \in Z, y \in Y\}$是所有$Y$到$Z$的函数，

则存在唯一的$g = X \to Z^Y$，使得$g(x)(y) = f(x,y)$，$\forall x \in X, y \in Y$。

函数g称为f的**柯里化**。

用hom-set的术语来表述就是，存在一个一一映射，使得，

$hom(X \times Y, Z) \cong \ hom(X, Z^Y)$

2.4 Cartesian Closed

将以上柯里化的概念推广到范畴论中，我们就有，

一个笛卡尔闭范畴（cartesian closed category）C，是满足以下几个额外条件的范畴。

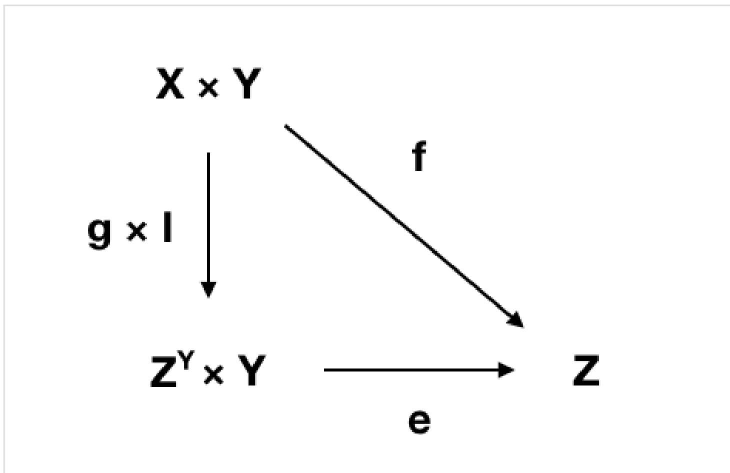
（1）C中存在一个对象1，使得对于任意对象$A \in C$，有唯一的箭头$A \to 1$，

这样的对象1，称为终对象（terminal object）。

（2）对于任意两个对象X和Y，范畴C中存在一个对象$X \times Y$，
以及两个箭头p_1和p_2，使得，$p_1 : X \times Y \rightarrow X$，$p_2 : X \times Y \rightarrow Y$。

（3）对于任意两个对象Y和Z，
范畴C中存在一个对象Z^Y，以及一个箭头$e : Z^Y \times Y \rightarrow Z$，使得，
对于任意的箭头$f : X \times Y \rightarrow Z$，存在唯一的箭头$g : X \rightarrow Z^Y$，
有$f = e \circ (g \times I)$恒成立。

即，$(e \circ (g \times I))(X \times Y) = e((g \times I)(X \times Y)) = e(Z^Y \times Y) = Z$。
其中$I : Y \rightarrow Y$，为对象Y的恒等箭头，Z^Y称为指数对象（exponential object）。



3. 项的解释

在第六篇中，为了解释简单类型化λ演算，
我们为每一个λ项，找到了一个Σ代数中数学对象与之对应，
简要的说，我们用Σ代数的载体A^σ来解释基本类型σ，
用载体上的函数集$A^{\sigma \rightarrow \tau}$来解释类型为$\sigma \rightarrow \tau$的所有函数。

现在有了笛卡尔闭范畴，我们准备为每一个基本类型选择范畴中的一个对象，
而将项常量b解释为范畴中的一个箭头$unit \rightarrow \mathscr{A}[\![b]\!]$（原因在下文解释），
其中$\mathscr{A}[\![\cdot]\!]$为我们在Henkin模型中定义的含义函数。

3.1 封闭项的解释

我们这样定义一个**含义函数**$\mathscr{C}[\![\cdot]\!]$，
（1）$\mathscr{C}[\![unit]\!] = unit$
（2）$\mathscr{C}[\![b]\!] = unit \rightarrow \mathscr{A}[\![b]\!]$
（3）$\mathscr{C}[\![\sigma \times \tau]\!] = \mathscr{C}[\![\sigma]\!] \times \mathscr{C}[\![\tau]\!]$
（4）$\mathscr{C}[\![\sigma \rightarrow \tau]\!] = \mathscr{C}[\![\sigma]\!] \rightarrow \mathscr{C}[\![\tau]\!]$

3.2 带有自由变量的项

如果$\Gamma \vdash M : \sigma$是一个含有自由变量的λ项，
则在笛卡尔闭范畴中，它应该解释为从自由变量的语义对象到σ的语义对象的一个箭头，
$\mathscr{C}[\![\Gamma \vdash M : \sigma]\!] = \mathscr{C}[\![\Gamma]\!] \to \mathscr{C}[\![\sigma]\!]$ 。

值得一提的是，
这里说明了，项常量b为什么不能被解释为范畴中的对象，
而是解释成了箭头$unit \to \mathscr{A}[\![b]\!]$。

其中，类型上下文Γ的解释，定义如下，
（1）$\mathscr{C}[\![\emptyset]\!] = unit$
（2）$\mathscr{C}[\![\Gamma, x : \sigma]\!] = \mathscr{C}[\![\Gamma]\!] \times \mathscr{C}[\![\sigma]\!]$

回顾

本文介绍了笛卡尔闭范畴，是一种具有特殊结构的范畴，
它补充了柯里化这一概念所需满足的约束条件。

接着我们用笛卡尔闭范畴解释了，
带有单位类型，乘积类型的简单类型化λ演算$\lambda^{unit,\times,\to}$。

参考

你好，类型（六）：Simply typed lambda calculus
语言背后的代数学（六）：Henkin模型
Small and Large Categories
Class
Category Theory for Computing Science
Cartesian closed category

< 如何写好一篇文档
语言背后的代数学（十）：Curry-Howard-Lambek correspondance >

© 2018
由 Hexo 强力驱动 | 主题 - NexT.Pisces