何幻

Programming is about ideas,

languages are just a way to express them.

语言背后的代数学（四）：哥德尔定理

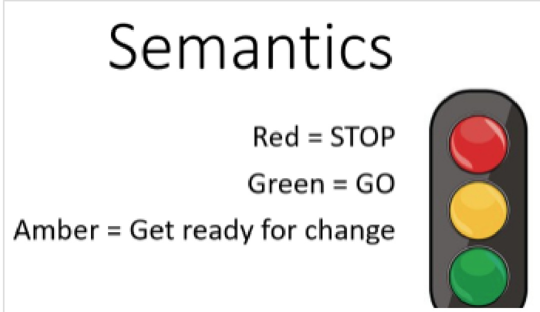
2018-01-30 | Math

回顾

上文我们介绍了一阶逻辑的语义模型，它包括结构和赋值两个部分，
其中，结构给出了常元符号、函数符号以及谓词符号在论域中的解释，
而赋值给出了变元符号在论域中的解释。

我们通过这种方式，建立了形式符号和论域中数学对象之间的关联，
本文将继续研究符号和其语义之间的关系。

1. 语义方面（模型）



1.1 公式的可满足性

我们知道在公理化系统中，逻辑公式A可以用来表示推导规则的前提和结论，
它在给定模型(M,σ)中的语义$A_{M[\sigma]}$是一个真假值。
这是合情合理的。
因为推导本来就应该是从真命题推导出另一个真命题的过程。

由于模型是可以人为选择的，所以，给定一个逻辑公式A，
其语义的真假性，有可能会受到所选模型的影响。

如果存在模型(M,σ)，使得$A_{M[\sigma]}=T$成立，
我们就称公式A关于模型(M,σ)是**可满足的**，
记为$M\models_\sigma A$。

此外，如果有公式集Γ，
其中的每一个公式关于模型(M,σ)都是可满足的，
我们就称，公式集Γ关于模型(M,σ)是可满足的，
记为$M\models_\sigma \Gamma$。

1.2 重言式

如果公式A，对于任意模型(M,σ)都是可满足的，
即，对任意结构M和赋值σ，$M\models_\sigma A$都成立，
我们就称A是永真公式，也称为**重言式**，记为$\models A$。

重言式，是与模型无关的公式，
它们在任何模型下都为真。

例：$A\vee\neg A$，$\forall x(x\doteq x)$都是重言式。

1.3 逻辑推理

有了可满足性，我们就可以进行逻辑推理了。

设A为公式，Γ为公式集，M为任意结构，σ为任意赋值，并且，
如果$M \models_\sigma \Gamma$成立，就有$M \models_\sigma A$成立，
我们就称，A是公式集Γ的**逻辑结论**或语义结论，
记为$\Gamma \models A$，也称结论$\Gamma \models A$**有效。**

因此，$\Gamma \models A$表示了一种语义关系，
它指出，对任意M和任意σ，如果Γ为真，那么A也为真。

2. 语法方面（符号）

2.1 序贯

在《你好，类型》系列文章中，
我们介绍过序贯的概念。

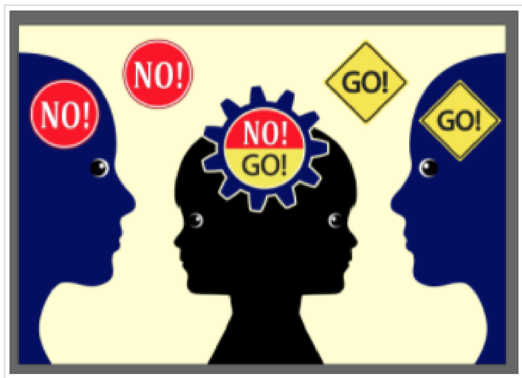
我们知道，在公理系统中，序贯可以用来表示前提和结论之间的符号联系。
序贯$\Gamma \vdash \Delta$，表示从公式集Γ出发，根据推导规则，

可以证明出Δ中至少有一条公式成立。

习惯上，序贯$\Gamma\vdash\Delta$成立，也称$\Gamma\vdash\Delta$**可证**。

值得注意的是，序贯谈论的都是语法层面（符号层面）上的，
和这些符号的所选择的具体语义无关。

2.2 协调性（一致性）



设Γ为公式集，
如果不存在一个公式A使得序贯$\Gamma\vdash A$与$\Gamma\vdash\neg A$均可证，
我们就称，公式集Γ是**协调的**，也称一致的。

设Γ是一阶语言$\mathscr{L}$的公式集，该集合可以是有限集或可数集，
如果Γ协调，则称Γ是一阶语言$\mathscr{L}$的**形式理论**。

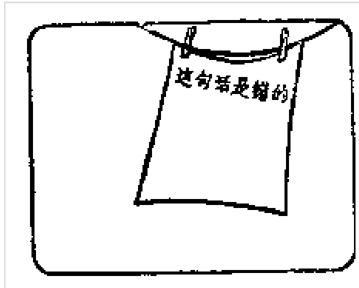
3. 语法（符号）和语义（模型）

3.1 可靠性和完全性

把公理系统的语法和语义联合起来，
我们还可以定义出以下这些系统性质。

如果序贯$\Gamma \vdash \Lambda$可证，那么$\Gamma \models \Lambda$成立，就说系统是**可靠的**。
如果$\Gamma \models A$成立，那么$\Gamma \vdash A$可证，就说系统是**完全的**。

3.2 不完全性与协调性不可证



是不是任意一个公理系统都是可靠且完全的呢？
可惜并不是如此。

哥德尔在1931年给出了两个定理，终结了人们的幻想，
分别称为哥德尔不完全性定理，和哥德尔协调性定理。他指出，

不完全性
如果Γ是一个有穷，并包含初等算术Π的形式理论，
那么Γ是一个不完全的形式理论。

协调性
如果形式理论Γ包含初等算术Π，
那么Π的协调性不能在Γ中被证明。

> 所以，在软件开发过程中，检查一个软件系统是否符合设计要求，所使用的方法就是对它进行测试，在这个软件系统之外进行证明。

总结

文本介绍语法（符号证明）和语义（模型）之间的关系，
让我们认识到了形式化方法的局限性。
一个足够有用的系统，总会出现不可证的事实，
并且，在该系统内部，我们甚至都无法证明它是否含有矛盾。

参考

你好，类型（四）：Propositional log
数理逻辑

哥德尔不完备定理

语言背后的代数学（三）：语义模型

代数"> 语言背后的代数学（五）：Σ代数