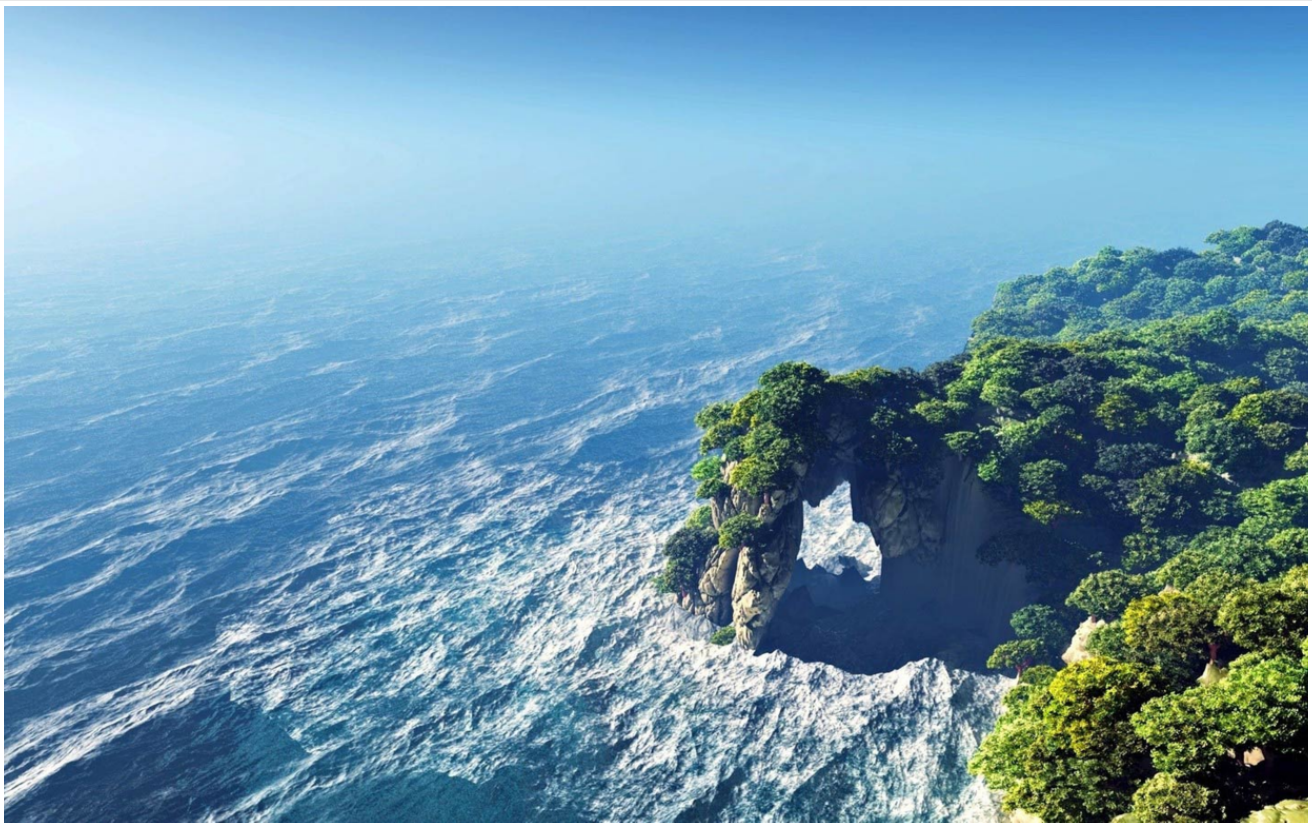
何幻

Programming is about ideas,

languages are just a way to express them.

语言背后的代数学（一）：语义解释

2018-01-14 | Math



1. 初窥语义

在《你好，类型》系列中，我们介绍了一些形式系统，

例如λ_β系统（λ演算），CL_w（组合子逻辑），

它们由一些合法的符号，以及这些符号的推导规则构成，

命题逻辑与谓词逻辑，也可以用这种公理化的方式构建起来。

然而，在讨论这些系统的时候，我们只是把它们看成了单纯的符号演算，

并没有过多考虑这些符号到底代表什么含义。

例如，λ项$(\lambda x.x(xy))N$，经过β变换，

我们可以得到，$N(Ny)$，

$(\lambda x.x(xy))N \triangleright_\beta N(Ny)$。

它看起来真的好像一个函数调用啊。

这就给我们带来了以下思考，

是否可以把$(\lambda x.x(xy))$解释为一个函数呢？

```
function (x){
    return x(x(y));
}
```

是否可以认为，$(\lambda x.x(xy))N$是用参数N对该函数进行调用呢？

```
(function (x){
    return x(x(y));
}(N));

// 调用后相当于返回了以下结果
N(N(y))
```

这样解释的话，β变换就可以看做函数调用了。

这一切似乎顺理成章，显而易见。

可是，我们为什么可以这样做呢？

β变换与函数调用之间的关系是唯一确定的吗？

为了回答好这些问题，还得重新研读语义学这个有趣的学科。

2. 公理化

首先我们先回顾一下，

形式系统是怎么用公理化的方式构建的。

我们以一个称之为“pq”的系统为例。

（出自《哥德尔、艾舍尔、巴赫——集异璧之大成》）

2.1 公理化步骤

第一步，

我们要有一些符号。

例如：“pq系统”只有三个符号， p ， q ， - 。

第二步，

我们要说明什么样的符号串是合法的，即指定一套语法。

例如，我们规定“pq系统”中合法的符号串，形如 xqypz ，

其中， x ， y ， z 仅由一串短杠组成。

```
term := n 'q' n 'p' n
n := '-' | '-' n
```

因此， --q-p- ， ---q--p- 都是合法的符号串。

第三步，

我们要指定公理和推导规则，

其中公理是推导的出发点，由公理推导得出的符号串称为定理。

（1）“pq”系统的公理如下，

只要 x 仅由一串短杠组成，那么 x-qxp- 就是一条公理。

（2）“pq”系统的推导规则是这样的，

假设 x ， y 和 z 都代表只包含短杠的特定的符号串，

并且假设 xqypz 是一条已知的公理/定理，

那么 x-qypz- 就是一条定理。

即它们满足$\frac{xqypz}{x-qypz-}$，表示如果$xqypz$是定理，则$x-qypz-$也是定理。

例子，根据公理的定义，我们知道 --q-p- 是一条公理，

又根据这条公理和推导规则，我们得到了 ---q-p-- 是一条定理。

小结：

以上三步我们通过公理化的方式构建了一个形式系统，

它由符号，语法，公理，推导规则组成，

我们可以用公理和旧定理生成新定理，不断演算。

在其他系统中，公理和定理的个数可能是有限的，

而“pq”系统则是无限的。

2.2 解释

我们说以上“pq系统”定义了一个形式语言，

这里的“语言”是一种数学上的定义，指的是字符串的集合。

“pq”系统的形式语言，

就是系统中公理和定理的集合。

考察一个形式语言，通常我们要研究它的两个方面，

其一，形式语言的语法，指的是字符串的构成方式，

其二，形式语言的语义，指的是每个字符串的含义。

我想大家都已经读过《计算机程序的构造与解释》了吧，

所谓构造，指的就是语法，而解释指的就是语义。

那我们来看一看“pq系统”的形式语言该怎样解释吧。

我们可以选择这样的解释方式，

例如，我们可以将 q 解释为“等于”，而将 p 解释为“加”，

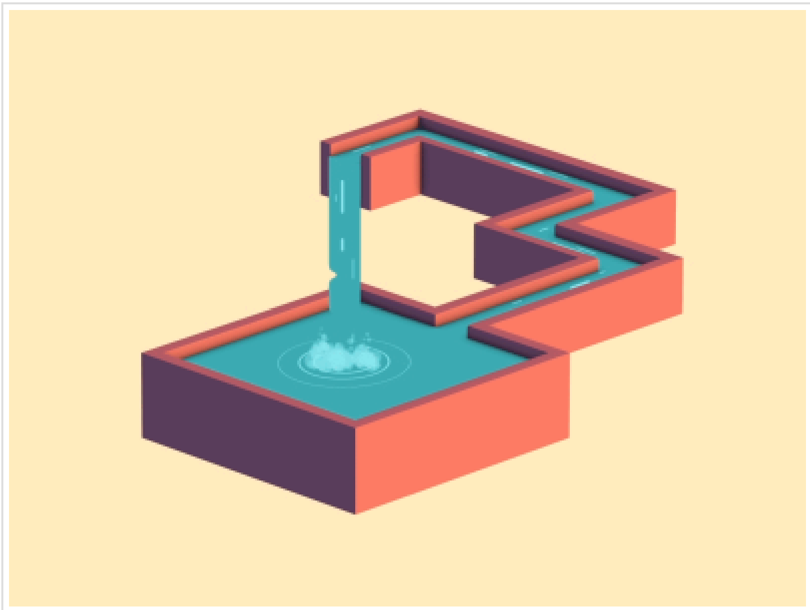
将短杠解释为数字。

于是， ---q-p-- 就可以被解释为“3等于1加2”了。

值得注意的是，合理的解释并不一定是唯一的，

例如，我们将 q 解释为“减”，将 p 解释为“等于”，也是可以的。

3. 重新解释



上文中我们先给出了形式系统，
然后再为系统选择一个合理的解释，
这种思维过程是值得提倡的。

考虑语义问题的时候，
我们应该总是先想想，当前在对什么系统进行解释。

例如，对“pq”系统，我们再引入一条新的公理，

新公理：
只要 x 仅由一串短杠组成，那么 xqxp- 也是一条公理。

现在来看，引入的新公理对“pq系统”产生了什么影响。
首先， -q-p- 在新系统中是一条公理，而在老系统中不是。
其次，根据推导规则， --q-p-- 是新系统中的一条定理，而在老系统中也不是。

考虑到我们之前对符号串的解释，我们发现，

如果仍然沿用老系统对符号串的解释，

--q-p-- 应该被解释为“2等于1加2”，

这显然是不正确的。

因此，在系统发生变化的时候，旧的解释可能就行不通了，

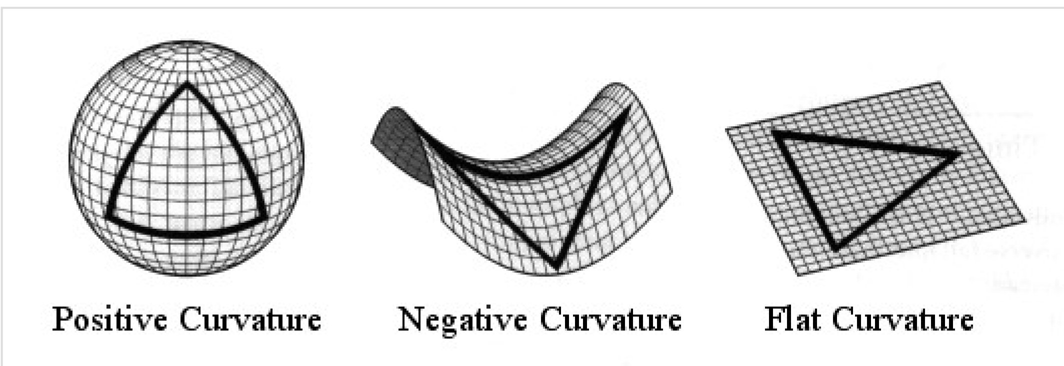
我们要对系统选择一个新的解释。

例如，我们只需要将 q 解释为“小于或等于”就行了。

然而，现在看来这种顺利成章的事情，却困扰了数学家们很多年。

> 这是整个19世纪数学的最深刻的教训之一。

4. 非欧几何



大家应该都听说过欧几里得第五公设的故事，

欧几里得采用了公理化的方式构建了几何学，

其中第五公设又称平行公设，它既不能被其他公设证明，也不能证否，

两千年来，在第五公设问题上，耗费了无数年轻数学家的生命和心血。

> 如果两条直线与第三条直线相交时，在第三条直线的某一侧三条线所夹的内角之和小于两个直角的和，则那两条直线沿着这一侧延伸足够长之后必然相交

1820年左右，俄国喀山大学教授罗巴切夫斯基，

提出了一个与第五公设相矛盾的命题，
然后与欧几里得的前四个公设结合成一个公理系统，展开一系列的推理。
他认为如果这个系统在推理中出现矛盾，就等于证明了第五公设，
此即数学中的反证法。

但是，在他极为细致深入的推理过程中，
得出了一个又一个在直觉上匪夷所思，
但在逻辑上毫无矛盾的命题。

这在当时是一件很难理解的事情，
因为人们一致认为，欧几里得几何是物质空间中图形性质的正确理想化。
正确的几何结论不应该与我们的直观感受不符。

现在看来，这样理解当然是有问题的，
因为，它混淆了公理系统中的结论，和对这些结论的解释。

就好像上文中我们为“pq”系统增加了新公理一样，
新定理仍然是正确推导的产物，只是不能沿用旧方式进行解释了。

关于欧几里得第五公设，最终人们得到了三种常用的几何学，
称为欧几里得几何，罗巴切夫斯基几何，以及黎曼几何。
这些公理系统，对研究不同的数学对象起到了关键作用。

5. 总结

本文通过一个称之为“pq”的系统，介绍了形式系统公理化的典型步骤，
并且严格区分了，公理系统中的结论与对它的解释之间的不同。

通过更改公理系统，不论修改公理或者修改推导规则，我们将得到一个新的系统，
从而对新系统中的结论，我们就得采用审慎的方式重新解释。
这是数学史给我们带来的最有价值的经验教训之一。

参考

你好，类型（一）：开篇

Formal system

Formal language

语义学

哥德尔、艾舍尔、巴赫——集异璧之大成

平行公设

非欧几何学的诞生

‹ 李群和李代数

语言背后的代数学（二）：初等代数 ›