黎曼几何基础

作者：thzt

可微函数

n 维**欧氏空间**，简记为 R^n，是有序的 n 元实数组的集合，
并赋予标准的距离 d 所构成的空间，其元素称为“点”。

R^n中任意两点 $a=(a_1,\cdots,a_n)$，$b=(b_1,\cdots,b_n)$之间的距离定义为，
$d(a,b)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}$。

设 U 是 R^n的一个开集，r 为正数，
如果 U 上的实函数 $f:U\to R$ 具有直到 r 阶的各阶连续偏导数，
则称 f 为 U 上的一个 r 次**可微函数**。

U 上的 r 次可微函数的集合记为 $C^r(U)$，
依此记法，U 上的连续函数的集合记作 $C^0(U)$。

给定函数 $f:U\to R$，如果对于任意的非负整数 r，
都有 $f\in C^r(U)$，则称函数 f 是 U 上的一个**光滑函数**，
U 上的光滑函数的集合记作 $C^\infty(U)$。

为了方便起见，把 $C^r(U)$中的函数，称为（U 上的）C^r函数。

欧氏空间之间的映射

设 U 是 R^n的一个开子集，
$f:U\to R$ 是从 U 到 k 维欧氏空间 R^k的映射，
显然，映射 f 可以用 U 上的 k 个实函数 $f^\alpha(1\leqslant\alpha\leqslant k)$表示为，
$f=(f^1,\cdots,f^k)$，
其中，$f^\alpha(1\leqslant\alpha\leqslant k)$称为映射 f 的**分量**。

如果对于每一个 $\alpha(1\leqslant\alpha\leqslant k)$，$f^\alpha$都是 U 上的 C^r函数，
则称映射 f 为（从 U 到 R^k的）C^r映射。

特别的，如果 U 是 R 的一个开区间，

则 C^∞映射 $f:U\to R^k$又称为 R^k中的一条**光滑曲线**。

拓扑流形和微分流形

设 M 是一个非空的 Hausdorff 空间，
如果对于每一点 $p\in M$，都存在 p 点的开邻域 $U\subseteq M$，
以及从 U 到 m 维欧氏空间 R^m的某个开集上的同胚 $\varphi:U\to R^m$，
则称 M 为一个 m 维**拓扑流形**。

上述定义中的(U,φ)称为 M 的一个**坐标卡**，
此时，开集 U 称为点 $p\in M$ 的**坐标邻域**，φ 称为**坐标映射**。
于是，所谓的拓扑流形实际上就是在局部上同胚于 m 维欧氏空间的 Hausdorff 空间，
即它的每一点都有同胚于 R^n中某个开集的坐标邻域。

设 M 是一个 m 维拓扑流形，(U,φ)与(V,ψ)是 M 的两个坐标卡，
如果 $U\cap V=\varnothing$，或者当 $U\cap V\neq\varnothing$时，映射
$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(V)$
和 $\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\varphi(U)$，
都是 C^r映射，则称坐标卡(U,φ)与(V,ψ)是 C^r**相容的**。

显然，拓扑流形 M 的任意两个坐标卡必定是 C^0相容的。

设 M 是一个拓扑流形，
$\mathrm{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha);\alpha\in I\}$是 M 的若干坐标卡构成的集合，I 为指标集。
如果 A 满足下列三个条件，
则称 A 为拓扑流形 M 的一个 C^r**微分结构**，
（1）$\{U_\alpha;\alpha\in I\}$是 M 是一个开覆盖，
（2）$\forall\alpha,\beta\in I$，$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$与$(U_\beta,\varphi_\beta)$是 C^r相容的，
（3）A 是**极大的**，换句话说，对于 M 的任意一个坐标卡(U,φ)，
如果它和 A 中的每一个成员都是 C^r相容的，则它一定属于 A。

C^∞微分结构，称为**光滑结构**。

设 M 是一个 m 维拓扑流形，A 是 M 的一个 C^r微分结构，
则称(M,A)是一个 m 维 C^r**微分流形**。
此时，A 中的坐标卡统称为 C^r微分流形(M,A)的**容许坐标卡**。

特别的，C^∞微分流形，又称为**光滑流形**。
在不引起混淆的情况下，也用 M 表示一个 C^r微分流形$(M,\mathcal{A})$。

局部坐标系

设(U,φ)是 m 维微分流形 M 的一个容许坐标卡，
则对于$\forall p\in U$，把 $x=\varphi(p)$在 R^m中的坐标$(x^1(p),\cdots,x^m(p))$，
称为点 p 的**局部坐标**。

以这样的方式，在 U 上确定了一个坐标系，
称为 M 在 p 点的一个（由局部坐标卡(U,φ)给出的）**局部坐标系**，
记为$(U,\varphi;x^i)$，或$(U;x^i)$，
其中，定义在 U 上的 m 个函数 $x^i:U\to R$ $(i=1,\cdots,m)$，
称为**（局部）坐标函数**。

对于 M 的任意两个 C^r相容的局部坐标系$(U,\varphi;x^i)$和$(V,\psi;y^i)$，
如果 $U\cap V\neq\emptyset$，则称映射，
$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$，
为从$(U,\varphi;x^i)$到$(V,\psi;y^i)$的**（局部）坐标变换**，
它可以表示为，
$y^i=(\phi\circ\varphi^{-1})^i=y^i(x^1,\cdots,x^m)$，$1\leqslant i\leqslant m$。

$$J_{x;y}=\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^i}\right)$$，由此所得到的 m 阶方阵，
称为局部坐标变换 $\psi\circ\varphi^{-1}$的 **Jacobi 矩阵**，
相应的行列式称为 $\psi\circ\varphi^{-1}$的 **Jacobi 行列式**，
并且记，

$$\frac{\partial(x^1,\cdots,x^m)}{\partial(y^1,\cdots,y^m)}=det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^i}\right)。$$

流形间的映射

设 M 是一个 m 维光滑流形，G 为 M 的非空子集，
$f:G\to R$ 是定义在 G 上的实值函数，
如果对于 M 的任意一个容许坐标卡(U,φ)，当 $U\cap G\neq\emptyset$时，
$f\circ\varphi^{-1}:\varphi(G\cap U)\to R$，是 C^s函数，
则称 f 是 G 上的 C^s函数。
G 上的 C^∞函数又称为**光滑函数**。

开集 G 上全体 Cs函数的集合记作 $Cs(G)$，
特别的，M 上全体光滑函数的集合记作 $C\infty(M)$。
不难看出，$Cs(G)$关于函数的加法和乘法构成一个环。

设 M 为光滑流形，$p\in M$，f 是定义在 p 点某个邻域 A 上的函数，
如果存在 p 的开邻域 $U\subseteq A$，使得 $f|U$是 U 上的 Cs函数，
则称 f 是定义在 p 点**附近**的 Cs函数，简称为在 p 点的 Cs函数。

全体在 p 点的 Cs函数构成的集合记作 Cps，
一般的，Cps中两个函数可以有不同的定义域，
但是它们在 p 点的某一个开邻域上都有定义并且是 Cs的，
因此，Cps中可以定义加法和乘法。

设 M,N 分别是 m,n 维光滑流形，$f:M\to N$ 为映射，$p\in M$，
如果存在 M 在点 p 的容许坐标卡(U,φ)，
以及 N 在点 $f(p)$的容许坐标卡(V,ψ)，使得 $f(U)\subseteq V$，
并且复合映射，$f\sim=\psi\circ f\circ\varphi-1:\varphi(U)\to\psi(V)$，是 $C\infty$映射，
则称映射 f 在 p 点是 $C\infty$的（或**光滑的**）。

通常，称映射$f\sim$为映射 f 关于坐标卡(U,φ)和(V,ψ)的**局部表示**，
具体的写出来，它由 n 个 m 元实函数组成。

设 $f:M\to N$ 是光滑流形 M,N 间的映射，
如果 f 在 M 的每一点 p 处都是 $C\infty$的，
则称 f 为 $C\infty$映射，或**光滑映射**。

设 M 和 N 是两个光滑流形，$f:M\to N$ 是一个同胚，
如果 f 及其逆映射 $f-1:N\to M$ 都是光滑的，
则称 f 是从 M 到 N 的**光滑同胚**，或**微分同胚**。
此时，也称 M 和 N 彼此光滑（或微分）同胚。

如果 $f:M\to N$ 是一个光滑映射，并且对于每一点 $p\in M$，
都有 p 的一个开邻域 U 使得 $f(U)$是 N 中的开子集，
并且，$f|U:U\to f(U)$是从 U 到 $f(U)$的光滑同胚，
则称 f 是从 M 到 N 的**局部光滑同胚**。

显然，如果 f 是从 M 到 N 的光滑同胚，

则 f^{-1} 是从 N 到 M 的光滑同胚。

切向量

假定 M 是一个 m 维光滑流形，$p\in M$，
C_p^∞ 表示在 p 点的光滑函数的集合。
光滑流形 M 在点 $p\in M$ 的一个**切向量** v 指的是，
满足以下两个条件的映射 $v:C_p^\infty\to R$，
（1）$\forall f,g\in C_p^\infty$，$\forall \lambda\in R$，$v(f+\lambda g)=v(f)+\lambda v(g)$，
（2）$\forall f,g\in C_p^\infty$，$v(fg)=v(f)g(p)+f(p)v(g)$。

设 $(U,\varphi;x^i)$ 是 p 点的一个局部坐标系，
对于任意的 $f\in C_p^\infty$，记，

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)=\frac{\partial (f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))。$$

设 $M=R^m$，$x_0\in R^m$，
对于向量 $v\in R^m$，我们定义映射 $D_v:C_{x_0}^\infty\to R$ 如下，
对于任意的函数 $f\in C_{x_0}^\infty$，令，
$D_vf=\frac{d}{dt}f(x_0+tv)\Big|_{t=0}$，
则 D_vf 是函数 f 在点 x_0 沿向量 v 的**方向导数**。

容易验证，方向导数算子 D_v 满足切向量的条件，
所以它是 R^m 在 x_0 点的一个切向量。

假定 $v=(v^1,\cdots,v^m)$，则，
$D_vf=\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\cdot v^i$。
因此，算子 D_v 是由向量 v 唯一决定的。

反之，可以证明，如果映射 $\sigma:C_{x_0}^\infty\to R$ 满足切向量的条件，
则必有唯一的一个向量 $v\in R^m$，使得相应的方向导数算子 $D_v=\sigma$。

所以，向量 v 与方向导数算子 D_v 是一一对应的，
这就是说，可以把 v 和 D_v 等同起来。

设 M 是一个 m 维光滑流形，
$\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是 M 上的一条光滑曲线，记 $p=\gamma(0)$，
利用 γ 可以定义一个映射 $v:C_p^\infty\to R$ 如下，

对于任意的 $f\in C_p^\infty$，令，
$v(f)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f\circ\gamma(t)=\frac{d}{dt}f(\gamma(t))\Big|_{t=0}$。

容易验证，映射 $v:C_p^\infty\to R$ 满足切向量的条件，
因此，v 是光滑流形 M 在 p 点的一个切向量，
称为曲线 γ 在 $t=0$ 点处的**切向量**，记为 $\gamma'(0)$，
这样上式成为，$\gamma'(0)(f)=\frac{d}{dt}f(\gamma(t))\Big|_{t=0}$。

切空间

把光滑流形 M 在点 p 处的切向量构成的集合，记为 T_pM，
在 T_pM 中，引入加法和数乘运算如下，
对于任意的 $u,v\in T_pM$，$\lambda\in R$，以及 $f\in C_p^\infty$，定义，
$(u+v)(f)=u(f)+v(f)$，
$(\lambda u)(f)=\lambda\cdot u(f)$。

显然，这样定义的 $u+v$ 和 λu 仍然是 M 在 p 点的切向量，
即 T_pM 关于这样的加法和数乘运算是封闭的。
进一步可以验证，T_pM 关于上述的加法和数乘运算构成一个实向量空间。

向量空间 T_pM，称为光滑流形 M 在点 p 的**切空间**。

设$(U,\varphi;x^i)$是 M 在 p 点的一个局部坐标系，
$x^i(p)=x_0^i$，$1\leqslant i\leqslant m$，
对于每一个 i，
设 $\gamma_i:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是通过点 p 的第 i 条坐标曲线（称为 x^i曲线），
即对于任意的 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，
$\gamma_i(t)=\varphi^{-1}(x_0^1,\cdots,x_0^i+t,\cdots,x_0^m)$。

因此，$\gamma_i'(0)$是 M 在 p 点的一个切向量，以后记为$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$。
由定义，对于任意的 $f\in C_p^\infty$，
$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p(f)=\frac{d}{dt}f(\gamma_i(t))\Big|_{t=0}$
$=\frac{d}{dt}_{t=0}f\circ\varphi^{-1}(x_0^1,\cdots,x_0^i+t,\cdots,x_0^m)$
$=\frac{\partial}{\partial x^i}(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))$
$=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$。

设 M 是一个 m 维光滑流形，$p\in M$，

$(U;x^i)$是包含 p 点的任意一个容许的局部坐标系，
则 M 在 p 点的 m 个切向量，$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$，$1\leqslant i\leqslant m$，
构成了切空间 T_pM 的一个基底，特别的，$\dim T_pM=m$。

通常把基底$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p,\ 1\leqslant i\leqslant m\right\}$，
称为在 p 点处由局部坐标系$(U;x^i)$给出的**自然基底**。

可证，任何一个切向量 v，在自然基底$\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p,\ 1\leqslant j\leqslant m\right\}$下的分量 v^i，
恰好是该切向量，在第 i 个局部坐标函数 x^i上作用得到的值，$v(x^i)$，
$v=\sum_{i=1}^{m}v(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$。

余切向量

切空间 T_pM 的对偶空间，称为光滑流形 M 在 p 点的**余切空间**，记为 T_p^*M，
其中的元素，即线性函数 $\alpha:T_pM\to R$，称为 M 在 p 点的**余切向量**。

为了强调切空间与余切空间的对偶性，
常常把一个余切向量 $\alpha\in T_p^*M$ 在切向量 $v\in T_pM$ 上的作用记为 $\alpha(v)=\langle v,\alpha\rangle$。
由$(v,\alpha)\mapsto\langle v,\alpha\rangle$确定的映射，
$\langle\cdot,\cdot\rangle:T_pM\times T_p^*M\to M$，
称为 T_pM 与 T_p^*M 之间的**配合**。

设 $f\in C_p^\infty$，定义映射 $df:T_pM\to R$ 如下，
对于任意的 $v\in T_pM$，
$\langle v,df\rangle=df(v)=v(f)\in R$。

显然 df 是 T_pM 上的线性函数，即 $df\in T_p^*M$，
有时，为了强调 df 是在 p 点的一个余切向量，也把 df 记为 $df|_p$，或 $df(p)$。

设$(U;x^i)$是光滑流形 M 的一个容许局部坐标系，$p\in U$，
由于每个坐标函数都是 U 上的光滑函数，因而 $dx^i|_p\in T_p^*M$，并且，
$\left\langle\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p,dx^i|_p\right\rangle=\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\Big|_p=\delta_j^i$。

由此可见，$\{dx^i|_p;\ 1\leqslant i\leqslant m\}$是 T_p^*M 中与自然基底
$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p;\ 1\leqslant i\leqslant m\right\}$
对偶的基底。

一般的，对于任意的 $\alpha\in T_p^*M$，有
$\alpha=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i dx^i|_p=\sum_{i=1}^{m}\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p,\alpha\rangle dx^i|_p$，
特别的，对于任意的 $f\in C_p^\infty$，
$df|_p=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i|_p$。
因此，余切向量 $df|_p=df(p)$，也称为函数 f 在 p 点的**微分**。

切映射和余切映射

设 M,N 分别是 m,n 维光滑流形，$F:M\to N$ 是光滑映射，$p\in M$，
对于任意的 $v\in T_pM$，我们可以通过映射 F 得到切向量 $F_*(v)\in T_{F(p)}N$，其定义为，
$F_*(v)(f)=v(f\circ F)$，$\forall f\in C_{F(p)}^\infty$。

这样，就得到一个映射 $F_*:T_pM\to T_{F(p)}N$，
易知，F_*是线性映射，称为光滑映射 F 在 p 点的**切映射**，或微分，
它的对偶映射 $F^*:T_{F(p)}^*N\to T_p^*M$，
称为光滑映射 F 在 p 点的**余切映射**，或拉回映射。

由对偶映射的定义，余切映射 $F^*:T_{F(p)}^*N\to T_p^*M$ 也是线性映射，
并且对于任意的 $\omega\in T_{F(p)}^*N$，$F^*\omega$ 由下式定义，
$(F^*\omega)(v)=\omega(F_*(v))$，$\forall v\in T_pM$。

为了强调对于点 p 的依赖性，
常常用 F_{*p}和 F_p^*来表示映射 F 在 p 点的切映射和余切映射。

切向量场

设 M 是一个 m 维光滑流形，M 在每一点 p 处都有切空间 T_pM，记
$TM=\bigcup_{p\in M}T_pM$。

M 上的一个**切向量场** X 是指，在 M 的每一个点 p 处指定了 M 在该点的一个切向量 $X(p)$，
换句话说，M 上的切向量场是一个映射 $X:M\to TM$，
使得对于任意一点 $p\in M$，$X(p)\in T_pM$。

比如，在 M 的任意一个容许局部坐标系$(U;x^i)$下，

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\text{是 } U \text{ 上的切向量场，}$$

特别的，这样一组切向量场在 U 中每一点 p 处的值，构成该点的切空间 T_pM 的一个基底。
通常称这样一组切向量场为 U 上的一个**标架场**，

为了叙述的方便，以后把$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\}$称为，
M 在局部坐标系$(U;x^i)$下的**自然标架场**。

设 $X:M\to TM$ 是 m 维光滑流形 M 上的切向量场，
如果对于每一点 $p\in M$，存在 p 点的容许局部坐标系$(U;x^i)$，
使得 X 限制在 U 上的局部坐标表达式，

$$X|_U=\sum_{i=1}^{m}X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

中的分量 X^i都是 U 上的光滑函数（$1\leqslant i\leqslant m$），
则称 X 是 M 上的**光滑切向量场**。

由定义和局部坐标系的 C^∞相容性可得，
M 上的一个切向量场 X 为光滑切向量场
$\Leftrightarrow X$ 关于每一个自然标架场的分量是光滑函数
$\Leftrightarrow X$ 在每一个容许坐标系$(U;x^i)$上的限制 $X|_U$是 U 上的光滑切向量场。

M 上光滑切向量场的集合，记为 $\mathfrak{X}(M)$，
显然，$\mathfrak{X}(M)$关于加法和数乘是封闭的，因而它是一个向量空间。

张量场

M 在点 p 处的一个(r,s)型张量 τ，是指一个 $r+s$ 重线性映射，
$r:T_p^*M\times\cdots\times T_p^*M\times T_pM\times\cdots\times T_pM\to\mathbb{R}$，
其中，T_p^*M 有 r 个，称为**反变阶数**，T_pM 有 s 个，称为**协变阶数**。

若以 $T_s^r(p)$表示 M 在 p 点的所有(r,s)型张量构成的集合，则有，
$T_s^r(p)=\mathscr{L}(T_p^*M,\cdots,T_p^*M,T_pM,\cdots,T_pM;\mathbb{R})$。

不难看出，$T_s^r(p)$是一个 m^{r+s}维向量空间，
并且，在 p 点的容许局部坐标系$(U;x^i)$下，$T_s^r(p)$有一个自然基底，即，
$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\big|_p\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\big|_p\otimes dx^{j_1}|_p\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}|_p$，
$1\leqslant i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s\leqslant m$。

由此可见，$T_s^r(p)=T_pM\otimes\cdots\otimes T_pM\otimes T_p^*M\otimes\cdots\otimes T_p^*M$，
其中 T_pM 有 r 个，T_p^*M 有 s 个。

令，$T_s^r(M)=\bigcup_{p\in M}T_s^r(p)$，
光滑流形 M 上的一个(r,s)型**张量场** τ，

是指从 M 到 $Tsr(M)$的一个映射 $\tau:M\to Tsr(M)$，
使得对于任意的 $p\in M$，都有 $\tau(p)\in Tsr(p)$。

M 上的$(r,0)$型和$(0,s)$型张量场，分别称为 r 阶反变张量场和 s 阶协变张量场。

光滑流形 M 上的一个(r,s)型张量场 $\tau:M\to Tsr(M)$称为**光滑的**，
如果对于任意的 $p\in M$，存在 p 点的容许局部坐标系$(U;xi)$，
使得 τ 在 U 上的限制具有如下局部表达式，
$\tau|U=\tau j1\cdots jsi1\cdots ir\partial xi1\partial\otimes\cdots\otimes\partial xir\partial\otimes dxj1\otimes\cdots\otimes dxjs$，
其中，$\tau j1\cdots jsi1\cdots ir$是 U 上的光滑函数。

M 上光滑的(r,s)型张量场构成的集合记作 J$sr(M)$，特别的，
J$01(M)$=X(M)，J$00(M)=C\infty(M)$。

在集合 J$sr(M)$中有自然的加法，数乘等运算，
任意两个光滑张量场能够逐点作张量积运算，另外，张量场还可以与光滑函数相乘，
使得 J$sr(M)$成为一个 $C\infty(M)$-模。

光滑的一阶协变张量场（即余切向量场），又称为 **1 次微分式**。
把光滑流形 M 上的 1 次微分式的集合记为 $A1(M)$，即 $A1(M)$=J$10(M)$。

外微分

光滑流形 M 上的一个光滑的 r 阶协变张量场 φ 是**反对称的**，
如果它作为映射，φ:X$(M)\times\cdots\times$X$(M)\to C\infty(M)$，
关于所有的自变量是反对称的，即交换任意两个自变量的位置，所得的值反号。
或等价的说，在任意的局部坐标系下，φ 的分量关于下指标是反对称的。

光滑流形 M 上的一个光滑的 r 阶反对称协变张量场 φ，
称为 M 上的一个 r 次**外微分式**。
同时，还约定，M 上的 1 次外微分式，就是 M 上的 1 次微分式，即光滑的一阶协变张量场。
M 上的 0 次外微分式，指的是 M 上的光滑函数。

M 上的 r 次外微分式的集合记作 $Ar(M)$，特别的，
$A1(M)$=J$10(M)$，$A0(M)=C\infty(M)$。

由定义可知，若 $\varphi\in Ar(M)$，则在每一点 $p\in M$，

$\varphi(p)$是 TpM 上的一个 r 次外形式，
即，$\varphi(p):TpM\times\cdots\times TpM\to R$，
是一个反对称的 r 重线性函数。

此外，每一个 r 次外微分式 φ，可以等同于反对称的 r 重 $C\infty(M)$-线性映射，
$\varphi:\mathrm{X}(M)\times\cdots\times\mathrm{X}(M)\to C\infty(M)$。

通过逐点定义的方式，可以引入外微分式的加法，数乘和外积运算，
比如，外积的定义如下，$\forall\varphi\in Ar(M),\psi\in As(M)$，
$(\varphi\wedge\psi)(p)=\varphi(p)\wedge\psi(p)$
$=r!s!(r+s)!Ar+s(\varphi(p)\otimes\psi(p))$
$=r!s!(r+s)!Ar+s(\varphi\otimes\psi)(p)$，$\forall p\in M$。

即有，$\varphi\wedge\psi=r!s!(r+s)!Ar+s(\varphi\otimes\psi)$，
这里的 $Ar+s$是反对称化算子。

进而，若令 $A(M)=r=0\bigoplus mAr(M)$，$m=dim\ M$，
则在 $A(M)$上可以引入外微分运算。

设 M 是 m 维光滑流形，则存在唯一的一个映射，$d:A(M)\to A(M)$，
使得对于任意的非负整数 r，有 $d(Ar(M))\subseteq Ar+1(M)$，
并且满足以下条件，
（1）d 是线性的，即对于任意的 $\varphi,\psi\in A(M)$，$\lambda\in R$，有，
$d(\varphi+\lambda\cdot\psi)=d\varphi+\lambda d\psi$，
（2）$\forall\varphi\in Ar(M),\psi\in A(M)$，有，
$d(\varphi\wedge\psi)=d\varphi\wedge\psi+(-1)r\varphi\wedge d\psi$，
（3）$\forall f\in A0(M)$，df 是 f 的微分，
（4）$d2=d\circ d=0$。
这样的映射 d，称为**外微分（算子）**。

外微分算子 d 满足 $d\circ d=0$，
这意味着 $d:Ar(M)\to Ar+1(M)$可以看做拓扑学忠的上边缘算子，
在这里，$Ar(M)$被看做加法群。

令 $Zr(M)=\{\alpha\in Ar(M):d\alpha=0\}$，
$Br(M)=d(Ar-1(M))=\{\alpha\in Ar(M):\exists\beta\in Ar-1(M),\alpha=d\beta\}$，
$Zr(M)$中的元素称为 M 上的 r 次**闭微分式**，

$Br(M)$中的元素称为 M 上的**恰当微分式**，
这样，性质 $d\circ d=0$，表明 $Br(M)$是 $Zr(M)$的子群。

商群 $Hr(M)=Zr(M)/Br(M)$称为光滑流形 M 上的第 r 个 **de Rham 上同调群**。

应该注意的是，de Rham 上同调群 $Hr(M)$是光滑流形的光滑结构的产物，
但是，著名的 de Rham 定理说，当 M 是紧致光滑流形时，de Rham 上同调群 $Hr(M)$与 M 的第 r 个实系数上同调群是同构的，
由此可见，de Rham 上同调群 $Hr(M)$是流形 M 的拓扑不变量。

向量丛

设 E,M 是两个光滑流形，$\pi:E\to M$ 是一个光滑的满映射，
$V=Rq$是 q 维向量空间，如果在 M 上存在一个开覆盖$\{U\alpha;\alpha\in I\}$，
以及一组映射$\{\psi\alpha;\alpha\in I\}$，它们满足下列条件，
（1）$\forall\alpha\in I$，映射 $\psi\alpha$是从 $U\alpha\times Rq$到 $\pi-1(U)$的光滑同胚，
并且对于任意的 $p\in U\alpha$，$y\in Rq$有，
$\pi\circ\psi\alpha(p,y)=p$。
（2）对于任意固定的 $p\in U\alpha$，令，
$\psi\alpha,p(y)=\psi\alpha(p,y)$，$\forall y\in Rq$，
则映射 $\psi\alpha,p:Rq\to\pi-1(p)$是同胚，
而当 $p\in U\alpha\cap U\beta\neq\emptyset$时，
映射 $g\beta\alpha(p)=\pi\beta,p-1\circ\psi\alpha,p:Rq\to Rp$，
是线性同构，即 $g\beta\alpha(p)\in GL(q)$。
（3）当 $U\alpha\cap U\beta\neq\emptyset$时，
映射 $g\beta\alpha:U\alpha\cap U\beta\to GL(q)$是光滑的。

则称(E,M,π)为光滑流形 M 上的秩为 q 的**向量丛**，
其中，E 称为**丛空间**，M 称为**底流形**，
映射 $\pi:E\to M$ 称为**丛投影**。

为了方便，以后也把向量丛(E,M,π)，记为 $\pi:E\to M$，或 E。

易证，对于任意的 $p\in M$，在 $\pi-1(p)$上具有自然的线性结构，
使得映射 $\psi\alpha,p:Rq\to\pi-1(p)$为线性同构，
以后把 $\pi-1(p)$称为向量丛 E 在点 $p\in M$ 的**纤维**，也记为 Ep。

由此可见，向量丛 $\pi:E\to M$，
是一簇“栽种在”光滑流形 M 上的 q 维向量空间。
映射 $\psi\alpha:U\alpha\times Rq\to\pi-1(U\alpha)$，
称为向量丛 E 的**局部平凡化**。

$\pi:TM\to M$ 是 M 上秩为 m 的向量丛，
称为光滑流形 M 上的**切向量丛**，简称为 M 的**切丛**。

设 $\pi:E\to M$ 是光滑流形 M 上的向量丛，$U\subseteq M$ 为开集，
若有光滑映射 $s:U\to E$，使得，
$\pi\circ s=id:U\to U$，
则称 s 为向量丛(E,M,π)的定义在 U 上的一个**光滑截面**，
特别的，当 $U=M$ 时，则称 s 为向量丛 E 的一个光滑截面。

向量丛 $\pi:E\to M$ 的光滑截面的集合记为 $\Gamma(E)$，
不难验证，集合 $\Gamma(E)$是一个 $C\infty(M)$-模，
因而也是 R 上的向量空间，
一般而言，$\Gamma(E)$作为实向量空间是无限维的。

因此，流形 M 上的光滑切向量场，是切丛 TM 的光滑截面，
反之亦然，因此 $X(M)=\Gamma(TM)$。

设 $\pi:E\to M$ 是光滑流形 M 上秩为 q 的向量丛，$U\subseteq M$，
如果存在 q 个局部光滑截面，$sa\in\Gamma(U)$，$1\leqslant a\leqslant q$，
使得$\{sa\}$是处处线性无关的，即对于任意的 $p\in U$，
$\{sa(p)\}$构成向量空间 $\pi-1(p)$的一个基底，
则称$\{sa\}$是向量丛 E 的（定义在 U 上的）一个**局部标架场**。

特别的，当 $U=M$ 时，称$\{sa\}$是大范围的定义在 M 上的标架场。
一般来说，向量丛的定义在整个底流形上的标架场未必是存在的，
而局部标架场总是存在的。

对偶丛

设 $\pi:E\to M$ 是光滑流形 M 上的秩为 q 的向量丛，
对于任意的 $p\in M$，用 $Ep*=(Ep)*$表示 q 维实向量空间 Ep的对偶空间，
并记 $E*=p\in M\bigcup Ep*$，

再定义映射$\pi\sim:E*\to M$，使得，
$\pi\sim(\omega)=p$，$\forall\omega\in Ep*$，于是，
$\pi\sim-1(p)=Ep*$。

假定 $\psi\alpha:U\alpha\times Rq\to\pi-1(U\alpha)$，$\alpha\in I$，
是向量丛(E,M,π)的局部平凡化，且$\{U\alpha;\alpha\in I\}$是 M 的一个开覆盖，
取定 Rq的一个标准基底 $\delta=\{\delta a;a=1,\cdots,q\}$，它的对偶基底记作 $\delta*=\{\delta a\}$，
对于任意的 $\alpha\in I$，设 E 在 $U\alpha$上的局部截面 $e\alpha,a$由
$e\alpha,a=\psi\alpha(p,\delta a)$确定，
$\forall p\in U\alpha$，用$\{e\alpha a(p)\}$表示$\{e\alpha,a(p)\}$在纤维$\pi\sim-1(p)$中的对偶基底。
于是，可以定义映射，
$\psi\sim\alpha:U\alpha\times Rq\to\pi\sim-1(U\alpha)$，
使得，
$\psi\sim\alpha(p,y)a\sum yae\alpha a(p)$，$\forall p\in U\alpha$，
$y=ya\delta a\in(Rq)*=Rq$。

类似于切丛的构造方法，在 $E*$中可以引入微分结构，使得 $E*=(E*,M,\pi\sim)$成为秩是 q 的向量丛，
而$\{\psi\sim\alpha\}$就是它的局部平凡化。
新构造出的向量丛 $E*$称为已知向量丛 E 的**对偶丛**。

特别的，光滑流形 M 的切丛 TM 的对偶丛$(TM)*$，
就是 M 上的所有余切向量构成的向量丛，
称为 M 的**余切向量丛**，或**余切丛**，并记为 $T*M$，
$T*M$ 的（局部）标架场，称为**（局部）余切标架场**。

向量丛的直和与张量积

设 $\pi:E\to M$ 和$\pi\sim:E\sim\to M$ 是光滑流形 M 上的两个向量丛，它们的秩分别是 q 和$q\sim$，
则由 E 和$E\sim$，可以构造出**向量丛的直和** $E\oplus E\sim$，
和**张量积** $E\otimes E\sim$，具体做法如下。

$\forall p\in M$，向量丛 E 和$E\sim$在 p 点的纤维，
分别记为 Ep和$E\sim p$，
它们是两个实向量空间，并且 $dim\ Ep=q$，$dim\ E\sim p=q\sim$，令，
$E\oplus E\sim=p\in M\bigcup Ep\oplus E\sim p$，
$E\otimes E\sim=p\in M\bigcup Ep\otimes E\sim p$。

可以自然的引入投影映射，

$$\pi_1: E\oplus\tilde{E}\to M,$$

和 $$\pi_2: E\otimes\tilde{E}\to M,$$

以及相应的微分构造，使得，

$(E\oplus\tilde{E},M,\pi_1)$，

和$(E\otimes\tilde{E},M,\pi_2)$

分别成为秩是 $q+\tilde{q}$和 $q\tilde{q}$的向量丛，

称为向量丛 E 和$\tilde{E}$的直和及张量积。

特别的，光滑流形 M 的 r 个切丛 TM，和 s 个余切丛 T^*M 的张量积，

$T^r_s(M)=TM\otimes\cdots\otimes TM\otimes T^*M\otimes\cdots\otimes T^*M$，

是由 M 上在各点处的(r,s)型张量构成的集合，

它是秩为 m^{r+s}的向量丛，即有，

$T^r_s(M)=\bigcup_{p\in M}T^r_s(p)$，

其中，$T^r_s(p)=T_pM\otimes\cdots\otimes T_pM\otimes T_p^*M\otimes\cdots\otimes T_p^*M$，

是流形 M 在一点 p 处的(r,s)型张量空间。

向量丛 $T^r_s(M)$称为光滑流形 M 上的(r,s)型**张量丛**，

它的光滑截面就是 M 上的光滑张量场。

类似的，对于任意的 $p\in M$，若以$\bigwedge^r T_p^*M$ 表示 M 在点 p 的 r 次外形式空间，

并设$\bigwedge^r T^*M=\bigcup_{p\in M}\bigwedge^r T_p^*M$，

则$\bigwedge^r T^*M$ 也是一个向量丛，称为 M 上的 r 次**外形式丛**。

外形式丛的光滑截面是 M 上的外微分式，

于是有 $\Gamma(\bigwedge^r T^*M)=A^r(M)$。

黎曼向量丛

设 $\pi:E\to M$ 是光滑流形 M 上的一个向量丛，

如果对于每一点 $p\in M$，在纤维 π^{-1}上指定了一个欧氏内积$\langle\cdot,\cdot\rangle_p$，

并且$\langle\cdot,\cdot\rangle_p$光滑的依赖于点 p，

则称$\langle\cdot,\cdot\rangle_p$是向量丛$(E,M,\pi)$上的一个**黎曼结构**，

指定了一个黎曼结构的向量丛，称为**黎曼向量丛**。

内积

在 n 维向量空间 V 上，**内积**是指满足下列条件的双线性形式，
$\langle\cdot,\cdot\rangle:V\times V\to R$，
（1）对称性：$\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$，$\forall u,v\in V$，
（2）正定性：$\forall u\in V$，$\langle u,u\rangle\geqslant 0$，其中等号成立当且仅当 $u=0$。

换句话说，V 上的一个内积，就是 V 上的一个对称，正定的二阶协变张量，
指定了一个内积的向量空间 V，称为**欧氏向量空间**，
在这样的空间中，能够定义向量的长度以及向量之间的夹角。

设 M 是一个 m 维光滑流形，g 是 M 上的一个光滑的二阶协变张量场，
如果 g 是对称，正定的，即对于每一点 $p\in M$，$g(p)$是切空间 TpM 上的一个对称，正定的二阶协变张量，
则称 g 是 M 上的一个**黎曼度量**，
指定了一个黎曼度量 g 的光滑流形 M，称为**黎曼流形**，
记为(M,g)，或简记为 M。

根据定义，$g(p)$是 TpM 上的内积（$\forall p\in M$），
所以光滑流形 M 上的黎曼度量，就是以光滑的依赖于点 p 的方式，
在每一点 $p\in M$ 的切空间 TpM 上，指定一个内积，使之成为欧氏向量空间。
特别的，每一个欧氏向量空间，都是黎曼流形。

设$(U;xi)$是 M 的一个容许的局部坐标系，则黎曼度量 g 有局部坐标表达式，
$g|U=gijdxi\otimes dxj$，
其中 $gij=g(\partial xi\partial,\partial xj\partial)\in C\infty(U)$，$gij=gji$，
d 定义，在每一点 $p\in U$，$(gij(p))$都是正定矩阵，
如果引入对称化的乘积（对称张量积），
$dxidxj=21(dxi\otimes dxj+dxj\otimes dxi)$，
则 $g|U$可以写成二次微分形式，$g|U=gijdxidxj$。

弧长

设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是 M 中一条光滑曲线，令，
$L(\gamma)=\int ab|\gamma'(t)|dt=\int ab\surd\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle dt$，
并称之为曲线 γ 的**弧长**（长度）。

如果 $\gamma([a,b])$落在区域 U 内，则它可用局部坐标表示为，
$xi(t)=xi(\gamma(t))$，$1\leqslant i\leqslant m$，

因而，$L(\gamma)=\int ab\sqrt{}gij(\gamma(t))dtdxidtdxjdt$，

曲线的弧长与曲线的正则参数变换无关，也与光滑流形的局部坐标系的取法无关。

协变微分

设(M,g)是一个 m 维黎曼流形，$X\in \mathrm{X}(M)$，

如果$(U;xi)$是 M 的一个容许坐标系，并且 $X|U=Xi\partial xi\partial$，则，

$$D(X|U)=(dXi+Xj\Gamma jkidxk)\otimes\partial xi\partial$$
$$=(\partial xk\partial Xi+Xj\Gamma jki)dxk\otimes\partial xi\partial,$$

是与局部坐标系的选取无关的(1,1)型光滑张量场。

于是，如果令$(DX)|U=D(X|U)$，则 DX 是大范围定义在 M 上的(1,1)型光滑张量场。
DX 称为光滑向量场 X 的**协变微分**，或绝对微分，
相应的映射 D:$\mathrm{X}(M)\to \mathrm{J}11(M)$，
称为黎曼流形(M,g)上的**协变微分算子**，或绝对微分算子。

设 $X,Y\in \mathrm{X}(M)$，
$DYX=C11(Y\otimes DX)$，称为光滑切向量场 X 沿 Y 的**协变导数**，或协变微商，
其中 $C11$是指张量场关于第一个反变指标和第一个协变指标的缩并运算。

在局部坐标系$(U;xi)$下，$(DYX)|U$有如下的局部坐标表达式，

$$(DYX)|U=Yk(\partial xk\partial Xi+Xj\Gamma jki)\partial xi\partial。$$

由此可见，协变微分算子 D 又可视为映射 D:$\mathrm{X}(M)\times \mathrm{X}(M)\to \mathrm{X}(M)$，
其定义是，对于任意的 $X,Y\in \mathrm{X}(M)$，$D(X,Y)=DYX\in \mathrm{X}(M)$。

联络

设 M 是 m 维光滑流形，M 上的一个**联络** D，是指满足下列条件的映射，
D:$\mathrm{X}(M)\times \mathrm{X}(M)\to \mathrm{X}(M)$，
（1）$DY+fZX=DYX+fDZX$，
（2）$DY(X+\lambda Z)=DYX+\lambda DYZ$，
（3）$DY(fX)=Y(f)X+fDYX$
其中，$DYX=D(X,Y)$，$X,Y,Z\in \mathrm{X}(M)$，$\lambda\in R$，$f\in C\infty(M)$。

黎曼流形(M,g)上的协变微分算子 D 是光滑流形 M 上的一个联络，
由于在满足第二可数公理的光滑流形 M 上黎曼度量总是存在的，
因而 M 上的联络也是存在的。
不过，一般说来，光滑流形上的联络不是唯一的。

指定了一个联络 D 的光滑流形(M,D)，称为一个**仿射联络空间**，
在这样的空间里，可以对光滑切向量场求协变微分和协变导数，
比如，对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$，
光滑切向量场 DYX 称为向量场 X 沿 Y 的**协变导数**，或协变微商。

设(M,g)是 m 维黎曼流形，则在 M 上存在唯一的一个与度量 g 相容的无挠联络 D，
称为(M,g)的**黎曼联络**，或 Levi-Civita 联络。

微分算子

设 $X\in\mathfrak{X}(M)$，则 DX 是 M 上的(1,1)型光滑张量场，
讲 DX 进行缩并，便得到 M 上的光滑函数，称它为光滑切向量场 X 的**散度**，
并记作 $div\ X$，即有 $div\ X=C11(DX)$。

由 $X\mapsto div\ X$ 所确定的线性映射 $div:\mathfrak{X}(M)\to C\infty(M)$，
称为黎曼流形(M,g)上的**散度算子**。

设 $f\in C\infty(M)$，则 $df\in A1(M)=\mathfrak{T}10(M)$，
借助黎曼度量 g，df 对应 M 上一个光滑切向量场，记为$\triangledown f$，
使得对于任意的 $X\in\mathfrak{X}(M)$有，$g(\triangledown f,X)=df(X)=X(f)$，
切向量场$\triangledown f$ 称为光滑函数 f 在黎曼度量 g 下的**梯度**，
有时也用 $grad\ f$ 或 $gradg\ f$ 表示光滑函数 f 的梯度。

显然，由 $f\mapsto\triangledown f$ 确定的映射$\triangledown:C\infty(M)\to\mathfrak{X}(M)$，
是作用在光滑函数上的一阶线性微分算子，称为黎曼流形(M,g)上的**梯度算子**。

把梯度算子$\triangledown$与散度算子 div 复合起来，便得到一个新的线性映射，
$\triangle=div\circ\triangledown:C\infty(M)\to C\infty(M)$，
称为黎曼流形(M,g)上的 **Beltrami-Laplace 算子**。

平行移动

设(M,D)是一个 m 维仿射联络空间，$\gamma:[a,b]\to M$ 是 M 中的一条光滑曲线，
$X\in \mathfrak{X}(M)$，如果沿曲线 γ 有，
$D\gamma'(t)X=0$，$\forall t\in[a,b]$，
则称切向量场 X 沿曲线 γ 是**平行**的，
或称 X 是沿曲线 γ 的**平行向量场**。

设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是光滑流形 M 上的一条连续曲线，
如果存在区间$[a,b]$的一个划分，$a=t0<t1<\cdots<tr-1<tr=b$，
使得对于每一个 i，$1\leqslant i\leqslant r$，
$\gamma|[ti-1,ti]:[ti-1,ti]\to M$ 是 M 上的光滑曲线，
则称 γ 是 M 上的一条**分段光滑曲线**。

此时 $\gamma(ti)$，$(1\leqslant i\leqslant r-1)$称为曲线 γ 的**顶点**，
向量$t\to ti-\lim\gamma'(t)$与$t\to ti+\lim\gamma'(t)$，
之间的夹角称为曲线 γ 在顶点 $\gamma(ti)$处的**转角**。

上述定义中的划分，称为分段光滑曲线 γ 的一个**光滑划分**。

设 γ 是 M 上的一条分段光滑曲线，X 是 M 上沿曲线 γ 定义的连续切向量场，
如果存在 γ 的一个光滑划分，$a=t0<t1<\cdots<tN-1<tN=b$，
使得 X 在每一个小区间$[ti-1,ti]$上的限制都光滑的依赖于自变量 t，
则称 X 是沿曲线 γ 定义的**分段光滑（切）向量场**。

如果对于任意的 i，X 沿光滑曲线段 $\gamma[ti-1,ti]$都是平行的，
则称切向量场 X 沿 γ 是平行的，
或称 X 是沿 γ 的**（分段光滑的）平行向量场**。

设(M,D)是一个 m 维仿射联络空间，$p\in M$，
$\gamma:[0,b]\to M$ 是从点 $p=\gamma(0)$出发的一条分段光滑曲线，
则对于任意的 $X0\in TpM$，沿曲线 γ 存在唯一的一个分段光滑平行向量场 $X=X(t)$，
满足初始条件 $X(0)=X0$。

因此，沿分段光滑曲线 γ 的平行向量场的集合，构成一个与 TpM 同构的向量空间，
特别的，对于任意取定的 t，$0\leqslant t\leqslant b$，
沿 γ 的平行向量场给出了从 TpM 到 $T\gamma(t)M$ 的线性同构，

$P_{0t}: T_pM \to T_{\gamma(t)}M$，
称为沿曲线 γ 从 $t=0$ 到 t 的**平行移动**。

这样，由切向量 $X_0 \in T_pM$ 确定的沿曲线 γ 平行的向量场 X 可以表示为，
$X(t)=P_{0t}(X_0)$，$0\leqslant t\leqslant b$。

总之，在光滑流形上只要指定了联络，就可以建立平行移动的概念，
反过来，切向量场的协变导数（联络）也可以借助平行移动来得到。

设(M,D)是一个 m 维仿射联络空间，$\gamma:[0,b]\to M$，
是 M 中任意一条光滑曲线，则对于任意的 $X\in \mathfrak{X}(M)$，

$$D_{\gamma'(t)}X=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{t+\Delta t\,t}(X\circ\gamma(t+\Delta t))-X\circ\gamma(t)}{\Delta t}。$$

曲率张量场

设(M,D)是 m 维仿射联络空间，对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$，
定义映射 $\mathrm{R}:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$如下，
$\mathrm{R}(X,Y)Z=D_XD_YZ-D_YD_XZ-D_{[X,Y]}Z$，$\forall Z\in\mathfrak{X}(M)$，
并称 $\mathrm{R}(X,Y)$为仿射联络空间(M,D)关于光滑切向量场 X,Y 的**曲率算子**。

由曲率算子可以定义如下三重线性映射，
$\mathrm{R}:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$，
$(Z,X,Y)\mapsto\mathrm{R}(X,Y)Z$，$\forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$。
可知，R 对于每一个自变量都是 $C^\infty(M)$-线性的，
故 R 是 M 上的$(1,3)$型光滑张量场，
称为仿射联络空间(M,D)的**曲率张量（场）**。

作为张量场，R 在每一点 $p\in M$ 给出一个$(1,3)$型张量，
$\mathrm{R}_p:T_pM\times T_pM\times T_pM\to T_pM$，
使得$(w,u,v)\mapsto\mathrm{R}(u,v)w$，$\forall u,v,w\in T_pM$。
R_p称为(M,D)在 p 点的**曲率张量**。

利用 D 在局部坐标系下的联络系数，可以算出曲率张量 R 的分量。
$\mathrm{R}=R^l_{kij}dx^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^l}\otimes dx^i\otimes dx^j$，
其中，$R^l_{kij}=\frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j}+\Gamma^h_{kj}\Gamma^l_{hi}-\Gamma^h_{ki}\Gamma^l_{hj}$。

因此，对于任意的 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$，如果

$$X=Xi\partial xi\partial，Y=Yj\partial xj\partial，$$

则作为(1,1)型张量场的曲率算子 R(X,Y)有下述局部坐标表达式，

$$\mathrm{R}(X,Y)=XiYjRkijldxk\otimes\partial xl\partial。$$

特别的，对于黎曼流形(M,g)来说，它具有唯一确定的黎曼联络 D，
它的曲率张量称为黎曼流形(M,g)或度量 g 的曲率张量。
在局部坐标系(U;xi)下，黎曼流形(M,g)的曲率张量的分量，让然由上式给出，
只是其中的联络系数 Γijk是度量张量的分量，

$$gij=g(\partial xi\partial,\partial xj\partial)$$

的 Christoffel 记号。

设(M,g)是黎曼流形，令
$R(X,Y,Z,W)=g(\mathrm{R}(Z,W)X,Y)$，$\forall X,Y,Z,W\in \mathrm{X}(M)$，
则得到一个四重线性映射，
$R:\mathrm{X}(M)\times\mathrm{X}(M)\times\mathrm{X}(M)\times\mathrm{X}(M)\to C\infty(M)$。
显然 R 对每一个自变量是 $C\infty(M)$-线性的，
因此，R 是 M 上的四阶协变张量场，称为黎曼流形(M,g)的**黎曼曲率张量（场）**。