Home Archive Resume LLVM# PRs Gists LAgda About

Agda 中的证明，从一点五到二

2017, Nov 6 by Tesla Ice Zhang

上一篇说了很多只有一种情况的证明，这一篇说个有两种情况的。
到目前为止，按理说所有的字符都还能正常显示。

前置知识

- 上一篇文章

以及，由于 Agda 语言的特殊性，本文将继续使用 LaTeX 和代码块来共同展示代码。 代码块唯一的作用在于便于复制，主要的呈现途径为 LaTeX 。

上一篇的习题

上一篇文章我留下了一个没提供证明的命题，现在给出完整答案：

$$\begin{aligned}&\wedge\!-\!\mathrm{assoc}_0 : \forall\{P\ Q\ R\} \to ((P \wedge Q) \wedge R) \to (P \wedge (Q \wedge R))\\&\wedge\!-\!\mathrm{assoc}_0\ (\wedge\!-\!\mathrm{intro}\ (\wedge\!-\!\mathrm{intro}\ p\ q)\ r) = \wedge\!-\!\mathrm{intro}\ p\ (\wedge\!-\!\mathrm{intro}\ q\ r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\wedge\!-\!\mathrm{assoc}_1 : \forall\{P\ Q\ R\} \to (P \wedge (Q \wedge R)) \to ((P \wedge Q) \wedge R)\\&\wedge\!-\!\mathrm{assoc}_1\ (\wedge\!-\!\mathrm{intro}\ p\ (\wedge\!-\!\mathrm{intro}\ q\ r)) = \wedge\!-\!\mathrm{intro}\ (\wedge\!-\!\mathrm{intro}\ p\ q)\ r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\wedge\!-\!\mathrm{assoc} : \forall\{P\ Q\ R\} \to (P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)\\&\wedge\!-\!\mathrm{assoc} = \wedge\!-\!\mathrm{intro}\ \wedge\!-\!\mathrm{assoc}_1\ \wedge\!-\!\mathrm{assoc}_0\end{aligned}$$

```
∧-assoc₀ : ∀ {P Q R} → ((P ∧ Q) ∧ R) → (P ∧ (Q ∧ R))
∧-assoc₀ (∧-intro (∧-intro p q) r) = ∧-intro p (∧-intro q


∧-assoc₁ : ∀ {P Q R} → (P ∧ (Q ∧ R)) → ((P ∧ Q) ∧ R)
∧-assoc₁ (∧-intro p (∧-intro q r)) = ∧-intro (∧-intro p q)


∧-assoc : ∀ {P Q R} → (P ∧ (Q ∧ R)) ⇔ ((P ∧ Q) ∧ R)
∧-assoc = ∧-intro ∧-assoc₁ ∧-assoc₀
```

确实没什么好说的，所以才能说是即得易见平凡，仿照上例显然。

或相关的证明

上一篇我有个东西没讲完，就是 “或”。 它和 “与” 相对，它只要求两个命题中的一个成立。

因此，它对应着两个不同的情况：

$$p \to (p \lor q)$$
$$q \to (p \lor q)$$

定义 GADT

把这个关系写成 GADT，就是这样：

$$\begin{aligned} &\text{data } \_\lor\_ \ (P\ Q : \text{Set}) : \text{Set where} \\ &\quad \lor\text{−intro}_0 : P \to P \lor Q \\ &\quad \lor\text{−intro}_1 : Q \to P \lor Q \end{aligned}$$

```
data _∨_ (P Q : Set) : Set where
  ∨-intro₀ : P → P ∨ Q
  ∨-intro₁ : Q → P ∨ Q
```

这里我们遇到了一种和之前不一样的情况： 我们的 GADT 有了两种 instance 。 这意味着我们需要在证明的时候考虑两种不同的情况，分别针对这两种 instance 。

证明一

比如，我们可以证明一下这个命题：

$$(p \to r) \land (q \to r) \land (p \lor q) \to r$$

它的逻辑很简单，在 `p` 和 `q` 都能推出 `r` 的时候， `p` `q` 只需要成立一个， `r` 就成立。 这个命题写成 Agda 的类型，就是：

$$\vee{-}\mathrm{elim} : \forall \{P\ Q\} \{R : \mathrm{Set}\} \to (P \to R) \to (Q \to R) \to (P \vee Q) \to R$$

```
∨-elim : ∀ {P Q} {R : Set} → (P → R) → (Q → R) → (P ∨ Q) →
```

我们在证明中，需要同时对 $(P \vee Q)$ 的两种可能的情况进行处理（因为这个类型的东西既可以是通过 `P` 构造的，也可以是通过 `Q` 构造的）， 不然 Agda 的 exhaustiveness check 会报错的（这也是为什么 `postulate` 不被推荐使用）。

首先考虑 `P` 成立的情况，我们有：

$$\vee{-}\mathrm{elim}\,\mathrm{pr}\,\_\,(\vee{-}\mathrm{elim}_0\,p) = \mathrm{pr}\,p$$

```
∨-elim pr _ (∨-intro₀ p) = pr p
```

然后考虑 `Q` 成立的情况，我们有：

$$\vee{-}\mathrm{elim}\,\_\,\mathrm{qr}\ (\vee{-}\mathrm{elim}_1\,q) = \mathrm{qr}\,q$$

```
∨-elim _ qr (∨-intro₁ q) = qr q
```

放在一起，就是：

$$\begin{aligned}&\vee\!-\!\mathrm{elim} : \forall \{P\ Q\}\{R : \mathrm{Set}\} \to (P \to R) \to (Q \to R) \to (P \vee Q) \to R\\&\vee\!-\!\mathrm{elim}\,\mathrm{pr}\,\_\ (\vee\!-\!\mathrm{elim}_0\ p) = \mathrm{pr}\,p\\&\vee\!-\!\mathrm{elim}\ \_\,\mathrm{qr}\ \ (\vee\!-\!\mathrm{elim}_1\ q) = \mathrm{qr}\,q\end{aligned}$$

```
∨-elim : ∀ {P Q} {R : Set} → (P → R) → (Q → R) → (P ∨ Q) →
∨-elim pr _ (∨-intro₀ p) = pr p
∨-elim _ qr (∨-intro₁ q) = qr q
```

这样，就 check 了。 十分简单。

证明二

和 ∧ 一样， ∨ 也有交换律：

$$\begin{aligned}&\vee\!-\!\mathrm{comm}' : \forall \{P\ Q\} \to (P \vee Q) \to (Q \vee R)\\&\vee\!-\!\mathrm{comm}'\ (\vee\!-\!\mathrm{intro}_0\ p) = \vee\!-\!\mathrm{intro}_1\ p\\&\vee\!-\!\mathrm{comm}'\ (\vee\!-\!\mathrm{intro}_1\ q) = \vee\!-\!\mathrm{intro}_0\ q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\vee\!-\!\mathrm{comm} : \forall \{P\ Q\} \to (P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee R)\\&\vee\!-\!\mathrm{comm} = \wedge\!-\!\mathrm{intro}\ \vee\!-\!\mathrm{comm}'\ \vee\!-\!\mathrm{comm}'\end{aligned}$$

```
∨-comm′ : ∀ {P Q} → (P ∨ Q) → (Q ∨ P)
∨-comm′ (∨-intro₀ p) = ∨-intro₁ p
∨-comm′ (∨-intro₁ q) = ∨-intro₀ q


∨-comm : ∀ {P Q} → (P ∨ Q) ⇔ (Q ∨ P)
∨-comm = ∧-intro ∨-comm′ ∨-comm′
```

结束

这么快就没了？

其实只是填一下上一篇留下的坑。

是的，我说完了。

Tweet this

Top

创建一个 issue 以申请评论

Create an issue to apply for commentary

协议/License

本作品 Agda 中的证明，从一点五到二 采用 知识共享署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际许可协议 进行许可，基于 http://ice1000.org/2017/11/06/ProofInAgda3/ 上的作品创作。
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License.

© 2017 Tesla Ice Zhang

| |