何幻

Programming is about ideas,

languages are just a way to express them.

语言背后的代数学（七）：数学结构

2018-02-09 | Math

回顾

上文我们介绍了Henkin模型，以及它的环境模型条件和组合模型条件，

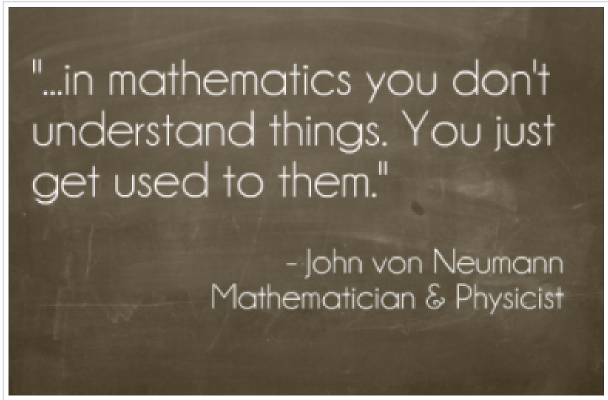
它们分别为合法的λ项和CL项，找到了对应的语义解释。

然而这只是简单类型化λ演算$\lambda^{\to}$的其中一种解释。

另一种常用的解释方式，建立在范畴论基础之上，称为**笛卡尔闭范畴**。

为了理解这个概念，我们需要补充一些简单的范畴论方面的内容。

1. 数学结构

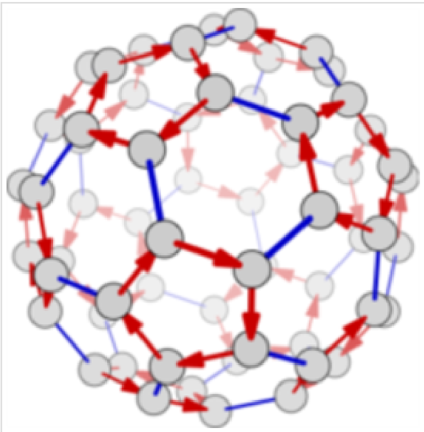


范畴论的研究数学结构的形式化方法，
它不考虑具体的数学对象，而是考虑数学对象以及它们之间的联系。

学习范畴论最好的办法，我认为不宜马上从抽象的概念开始，
而是先回到具体的例子上面，找到相似性，**理解概念被发明的动机**。

因此，我们要先理解什么是**数学结构**。
后文中，我们会首先介绍最常被提及的群结构，然后再介绍拓扑空间和CPO（完全偏序）。
有了这些例子之后，对抽象概念的理解是事半功倍的。

2. 群结构



群是一种满足结合律的乘法结构，
但是它的运算对象，却并不局限于整数，有理数甚至实数上。
因此，群论对概念采用了不同的定义方式，和初等代数有明显的不同。

在初等代数中，我们研究的是具体的运算系统，
例如，我们会先介绍什么是自然数，然后再介绍自然数上的四则运算。
群论则不然。

它会先抽象的定义满足哪些条件的运算系统是**群**，

然后再去寻找（或证明）具体的运算系统满足这些条件。

为此，我们先从条件最弱的**半群**开始，
逐渐增加约束条件，最终认识群结构是怎么建立起来的。

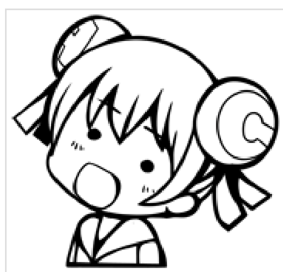
半群
集合G和G上满足结合律的二元运算$\cdot$，
所形成的代数结构，叫做**半群**，记为$(G,\cdot)$，
半群运算$x\cdot y$，也常简记为xy。

好在我们第二篇中，对“什么是代数”进行了严谨的定义，
因此，对这里提到的“代数结构”应该并不陌生，很显然半群是一个代数。

满足半群条件的例子是非常多的，
例如，自然数集以及自然数上的乘法运算，构成了一个半群。

值得注意的是，集合和运算要放在一起考虑才行，
集合包含了运算对象，运算表明了运算对象之间的关系。

幺半群



设G是半群，元素$e\in G$，称为半群G的幺元，
如果$\forall x\in G$，$ex=xe=x$。
可以证明，如果半群存在幺元，则必定是唯一的。

幺元常被记为1_S，或者直接写成1。
具有幺元的半群，称为**幺半群**，记为$(G,\cdot,e)$。

幺半群的例子，我们可以考虑字符串及其连接运算，
在连接运算下，空串是幺元。

群
设G是幺半群，如果它的每个元素都可逆，我们就称它为**群**。

所谓可逆指的是，$\forall g\in G$，$\exists g^{-1}\in G$，

使得$gg^{-1}=g^{-1}g=e$，
其中$e\in G$为G的幺元。

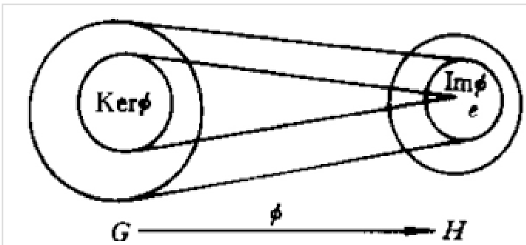
自然数集以及自然数上的乘法运算组成的代数结构，是半群，
如果把自然数1看做幺元，则构成了一个幺半群，但是它不是群。
因为，除了1之外，任何自然数都没有逆元。

字符串及其连接运算，构成了一个幺半群，但也不是群，
因为，没有任何两个非空字符串连接在一起会得到空串。

下面我们来看一个群的例子。

如果我们把整数集（包含正负整数）看做运算对象的集合，
把整数集上的加法运算看做群定义中的二元运算，
整数0看做加法运算的幺元，则这样的运算系统构成了一个群。
因为，每一个整数的相反数，都是它的逆元。

群同态



有了群之后，很自然的一步我们会考虑两个群是否足够相似，
这就需要我们找到两个群之间的对应关系。

设$(G,\cdot)$和$(G',\circ)$是两个群，
我们把映射$f:G\rightarrow G'$称为**群同态**，如果$\forall a,b\in G$，
都有$f(a\cdot b)=f(a)\circ f(b)$。

如果f是单射，则称f为单同态，
如果f是满射，则称f为满同态。

如果f是双射，则称f为**群同构**。
同构的两个群，记为$G\cong\ G'$。

小结
现在我们理解了半群，幺半群，群，群同态，
这些概念放在一起，就是所谓的群结构。
结构一般所指的是一些运算规则，或者约束条件。

为了更好的理解数学结构，
下面我们来介绍另一个概念，它来自拓扑学，称为拓扑空间。

3. 拓扑结构

拓扑学，被人们戏称橡皮膜上的几何学，
它主要研究在连续变换下保持不变的几何性质，
例如，连通性和紧致性。

这里我们先不展开，
主要看一下在拓扑学中是怎么建立数学结构的。

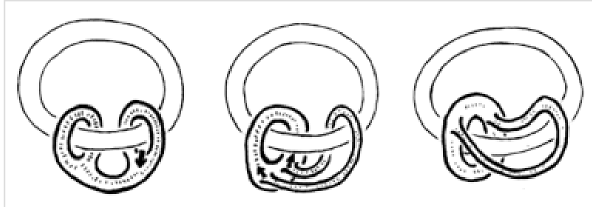
子集族
设X是一个非空集合，2^X是X的幂集（所有子集构成的集合），
把2^X的子集（即以X的一部分子集为成员的集合）称为X的**子集族**。

拓扑空间
设X是一个非空集合，X的一个子集族τ称为X的一个**拓扑**，
如果它满足
（1）X和$\emptyset$都包含在τ中
（2）τ中任意多个成员的并集仍在τ中
（3）τ中有限多个成员的交集仍在τ中

集合X和它的一个拓扑τ一起称为一个**拓扑空间**，记作(X,τ)。
称τ中的成员为这个拓扑空间的**开集**。

从定义看出，给出集合的一个拓扑就是规定它的哪些子集是开集。

连续映射



设X和Y都是拓扑空间，$f: X \to Y$是一个映射，
$x \in X$，如果对于包含$f(x) \in Y$的每一个开集V，必存在包含x的开集U，
使得，$f(U) \subseteq V$，则我们就说，f在x处**连续**。

如果映射$f: X \to Y$在任一点$x \in X$都连续，
则说f是**连续映射**。

同胚映射
如果$f: X \to Y$是双射，
并且f及其逆$f^{-1}: Y \to X$都是连续的，
则称f是一个**同胚映射**，简称同胚。

当存在X到Y的同胚映射时，就称X与Y同胚，
记作$X \cong Y$。

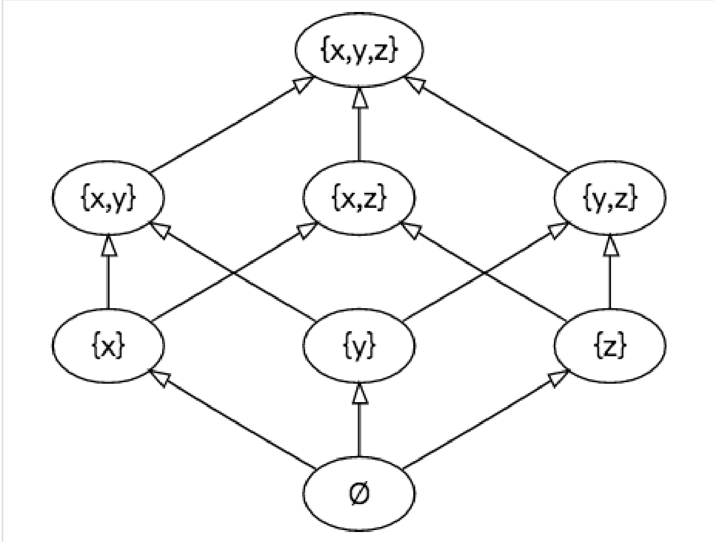
值得注意的是，同胚映射中条件f^{-1}连续不可忽视，
它不能从双射和f的连续性推出来。

小结
以上我们介绍了拓扑空间，以及两个拓扑空间之间的连续映射，
这和群以及两个群之间的群同态是很相似的。

它们表现出了一种结构上的相似性，
范畴论正是看到这种相似性，于是跳出具体的运算系统，
例如，它可以考虑群结构与拓扑结构之间的关系。

接下来我们来介绍CPO（完全偏序）。
它在范畴论中，对于摆脱集合论的观念束缚，帮助是很大的。

4. 完全偏序



在《递归函数》系列文章中，

我们已经介绍过CPO（完全偏序）的概念了。

为了方便与本文中其他概念进行对比，我们再简单的梳理一下。

二元关系

集合S和T上的**二元关系**R，

指的是它们笛卡尔积$S \times T$的子集，$R \subseteq S \times T$。

自反性，对称性，反对称性，传递性

一个二元关系$R \subseteq A \times A$是**自反的**，如果$R(a,a)$对于所有的$a \in A$成立；

是**对称的**，如果$R(a,b)$就有$R(b,a)$，对于所有的$a,b \in A$都成立；

是**反对称的**，如果$R(a,b)$且$R(b,a)$，则a,b是同一个元素，对于所有的$a,b \in A$都成立；

是**传递的**，如果$R(a,b)$和$R(b,c)$能推出$R(a,c)$，对于所有的$a,b,c \in A$都成立。

偏序关系

等价关系是同时具有自反性，对称性和传递性的关系。

偏序关系是具有自反性，反对称性和传递性的关系。

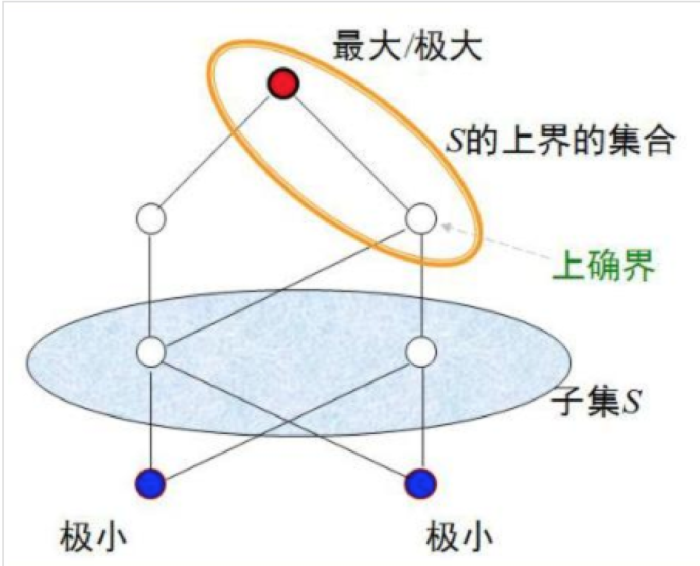
等价关系的一个例子就是相等性，

相等性关系$R(a,b)$当且仅当a,b是同一个元素。

偏序关系，例如通常的序关系$R \subseteq N \times N$，

$R(a,b)$当且仅当$a \leqslant b$。

最小元与上确界



对于偏序集$(D, \leqslant)$，以及它的一个子集$S \subseteq D$，
如果存在$y \in S$，且对于任意的$x \in S$，有$y \leqslant x$，
则称y为S的**最小元**。

对于偏序集$(D, \leqslant)$，以及它的一个子集$S \subseteq D$，
如果存在$y \in D$，（注意，y不一定在子集S中）
使得对于任意的$x \in S$，$x \leqslant y$，则称y为S的**上界**，
如果S的所有上界存在最小元，则称它为S最小上界，或**上确界**。

完全偏序集

偏序集$(D, \leqslant)$的非空子集$S \subseteq D$叫做**有向子集**，
当且仅当，对于S中的任意元素$a, b \in S$，
存在S中的一个元素c，有$a \leqslant c$且$b \leqslant c$。

如果一个偏序集$(D, \leqslant)$的每个有向子集$S \subseteq D$都有上确界（记为$\bigvee S$）
就称它是一个有向完全偏序集，
此外，如果它还有最小元，就称它是一个**完全偏序集**。

注意，完全偏序集并不是每一个子集都有上确界，
而是它的每一个有向子集都有上确界。

连续函数

假设$(D, \leqslant)$与$(E, \leqslant)$是完全偏序集，$f : D \to E$是集合上定义的一个函数，
对于任意的$d, d' \in D$，如果$d \leqslant d'$就有$f(d) \leqslant f(d')$，
我们就说f是**单调的**。

如果f是单调的，且对于任意有向子集$S \subseteq D$，
有$f(\bigvee S) = \bigvee f(S)$，就称$f$是**连续的**。

小结

我们又重新回顾了完全偏序这一概念，
实际上，任意一个CPO（完全偏序），都构成了一个范畴，
而所有的群，也构成了一个范畴。

群范畴的对象是集合，而CPO（完全偏序）范畴的对象不一定是集合。
这对摆脱集合论来理解范畴是很关键的。

总结

本文介绍了三种数学结构，群结构，拓扑结构，以及CPO（完全偏序）。
作为例子，可以为后面学习范畴论打下扎实的基础。

我们看到了这些数学结构之间的相似性，
从下一篇开始，我们要开始范畴论的学习之旅了。

参考

Category theory
离散数学教程
近世代数引论
基础拓扑学讲义

‹ 语言背后的代数学（六）：Henkin模型 语言背后的代数学（八）：范畴 ›