何幻

Programming is about ideas,
languages are just a way to express them.

语言背后的代数学（八）：范畴

2018-02-11 | Math

回顾

上文中，我们用群，拓扑空间，CPO作为例子，
来说明什么是数学结构，以及数学结构是如何通过映射来保持的。
群同态保持了群结构，连续映射保持了拓扑结构，
连续函数保持了完全偏序结构。

那么群结构与拓扑结构之间是否有联系呢？
我们能否建立拓扑空间与群之间的对应关系呢？

在代数拓扑中，就存在这样的例子，
人们找到了和拓扑空间相关的群论概念，例如基本群和同调群，

拓扑空间的连续映射可以导出这些群的群同态。

这就为了人们使用代数学方法研究其他数学分支，奠定了基础，
实际上，最原始的范畴论想法也是起源于此。

1. 图示法

在前一篇中我们学过了幺半群，
它指的是一个集合M，以及M上的二元运算$\cdot$，满足以下两个条件，
（1）$\forall x,y,z\in M$，$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot (y\cdot z)$，
（2）$\exists e\in M$，$\forall x\in M$，$x\cdot e=e\cdot x=x$。

这两个条件除了可以用等式来表示，还可以用**图**（diagram）来表示，

$$\begin{tikzcd} \langle x,y,z\rangle \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \langle x,yz\rangle \arrow[d, mapsto] \\ \langle xy,z\rangle \arrow[r, mapsto] & (xy)z=x(yz), \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \langle 0,x\rangle \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \langle u,x\rangle \arrow[d, mapsto] \\ x \arrow[r, phantom, "="] & ux, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \langle x,u\rangle \arrow[d, mapsto] & \langle x,0\rangle \arrow[l, mapsto] \arrow[d, mapsto] \\ xu \arrow[r, phantom, "="] & x. \end{tikzcd}$$

我们称以上两张图都是**可交换的**（commutative），
即，沿着不同的路径进行运算，只要起点和终点相同，则运算的结果就相同。

例如，$<x,y,z>\mapsto <x,yz>\mapsto x(yz)$，
总是等于$<x,y,z>\mapsto <xy,z>\mapsto (xy)z$，
即，$x(yz)=(xy)z$，表明M中元素的运算满足结合律。

又例，$<0,x>\mapsto <e,x>\mapsto ex$，总是等于$<0,x>\mapsto x$，即$ex=x$，
$<x,0>\mapsto <x,e>\mapsto xe$，总是等于$<x,0>\mapsto x$，即$xe=x$。
因此，$ex=x=xe$，表明M中存在幺元e。

所以，我们可以用以上两个图表，作为幺半群的定义，称为**图示法**。

另一方面，考虑在集合论中讨论映射的时候，一般都不写具体元素，还可以表示为，

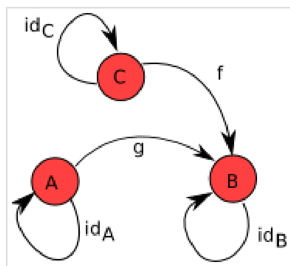
$$
\begin{tikzcd}
M \times M \times M \arrow[r, "1 \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times 1"] & M \times M \arrow[d, "\mu"] \\
M \times M \arrow[r, "\mu"] & M ,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \times M \arrow[r, "\eta \times 1"] \arrow[d, "\lambda"] & M \times M \arrow[d, "\mu"] & M \times 1 \arrow[l, "1 \times \eta"'] \arrow[d, "\varrho"] \\
M \arrow[r, equal] & M \arrow[r, equal] & M ;
\end{tikzcd}
$$

其中，$\mu : M \times M \to M$，$\eta : 1 \to M$，是两个函数，
$1 = \{0\}$是只有一个元素的集合。

用图示法来表示幺半群，更具一般性。

2. 范畴

范畴是一个数学概念，也可以用图示法来表示。



一个**范畴**Cat由一系列**对象**（object）和**箭头**（arrow）组成。
对于每一个箭头f，有两个对象与之关联，
称为箭头f的定义域（domain）和值域（codomain）。

并且，还要满足以下几条规则，
（1）对于每一个对象a，存在恒等箭头（identity arrow），$i : a \to a$
（2）箭头满足结合律，对于任意的箭头f, g, h，有$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$
（3）箭头的集合在箭头组合运算下是封闭的

其中，$f \cdot g$表示g和f的组合运算，
它也是一个箭头，其中g的值域是f的定义域。

例子：
所有的集合，以集合为对象，集合之间的映射作为箭头，构成了一个范畴，
所有的群，以群作为对象，群同态作为箭头，构成了一个范畴，
所有的拓扑空间，以拓扑空间作为对象，拓扑空间之间的连续映射为箭头，构成了一个范畴。

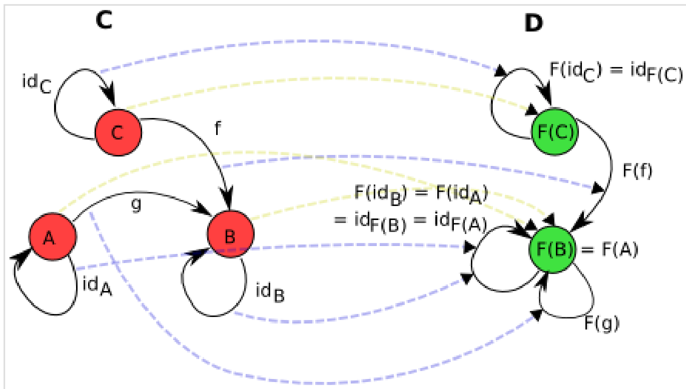
以上三个例子中，
范畴中的对象都是集合，箭头都是映射，这就很容易造成误解。

因为，**范畴中的对象可以不是集合，箭头也可以不是映射，**
理解这一点至关重要。

例如，完全偏序$(D,\leqslant)$，
以D中的元素作为对象，以$x\leqslant y$作为x,y之间的箭头，同样构成了一个范畴。

3. 函子

函子就是两个范畴之间的箭头。



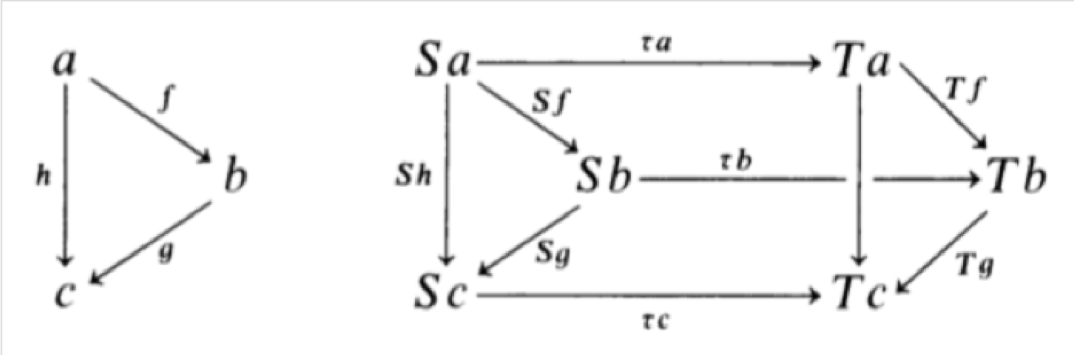
一个**函子**F是范畴C到范畴D的箭头，$F:C\to D$，它满足以下条件，
F把C中的对象c映射为D中的对象$F\ c$，把C中的箭头f映射为D中的箭头$F\ f$。
并且，$F\ (f\cdot g)=(F\ f)\cdot(F\ g)$。

值得注意的是，
等式左边的$\cdot$，表示C中的箭头组合运算，
等式右边的$\cdot$，表示D中的箭头组合运算。

4. 自然变换

自然变换（natural transformation）是一族箭头，
将范畴A在一个函子中的像（picture），变换成了另一个函子的像。

给定两个函子$S,T:A\to B$，其中A和B是范畴。
自然变换的每个分量（components）使下图可交换。



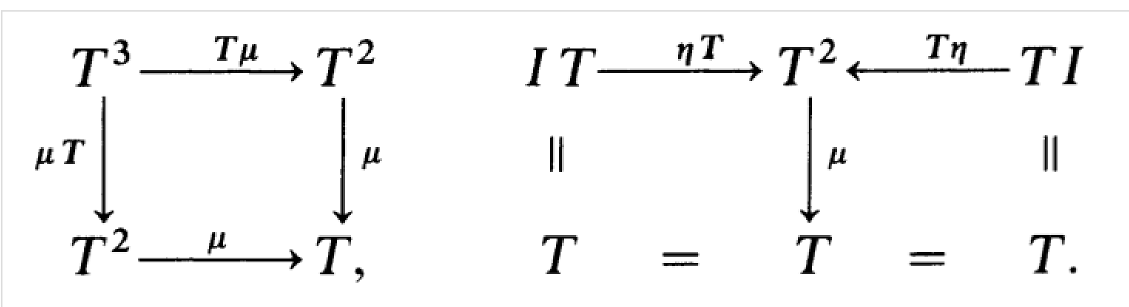
其中，τ_a是B中的箭头，$\tau_a:Sa\to Ta$。

5. Monad

范畴到自身的函子，称为**自函子**（endofunctor）。
设$T:X\to X$是任意范畴X上的自函子，自函子复合之后仍为自函子，
$T^2=T\circ T:X\to X$，$T^3=T^2\circ T:X\to X$。

令$\mu:T^2\to T$是一个自然变换，其分量为$\mu_x:T^2x\to Tx$，$\forall x\in X$，
则使用μ可以定义另外两个自然变换，
$T\mu:T^3\to T^2$，它的分量为$(T\mu)_x=T(\mu_x):T^3x\to T^2x$，
$\mu T:T^3\to T^2$，它的分量为$(\mu T)_x=\mu_{Tx}$。

范畴X上的一个**Monad**，指的是三元组$\langle T,\eta,\mu\rangle$，
它们使下图可交换，



其中，$T:X\to X$是范畴X上的自函子，
$\eta:I_X\to T$，$\mu:T^2\to T$是两个自然变换。

值得注意的是，Monad与幺半群的图示法是相似的，
只需要将幺半群定义中的$\times$，改写成自函子的复合运算，
把单位集合1，改写成单位自函子即可。

因此，我们说Monad是自函子范畴上的一个幺半群。

> All told, a monad in X is just a monoid in the category of endofunctors of X, with product x replaced by composition of endofunctors and unit set by the identity endofunctor.

6. Hask范畴上的Monad

如果把Haskell语言中的类型作为对象，把类型之间的函数看做箭头，
则在函数复合运算下，构成了一个范畴，称为**Hask范畴**。

函子

Haskell中类型类（type class） Functor 的每一个实例，

定义了Hask范畴中的一个函子。

```
class Functor (f :: * -> *) where
  fmap :: (a -> b) -> f a -> f b
```

fmap 表示了函子作用在箭头上的结果。

作用在对象上，可以使用 pure :: a -> f a 来表示。

在Haskell中，一个类型要成为 Functor 的实例，

还要满足相应的“Functor Law”，

```
fmap id = id
fmap (f . g) = fmap f . fmap g
```

可以证明，

这些“Functor Law”刚好使 f ， fmap 和 pure 构成了范畴论意义上的函子。

Monad

Haskell中类型类 Monad 的每一个实例，

定义了Hask范畴中的一个Monad。

```
class Functor m => Monad m where
  return :: a -> m a
  (>>=)  :: m a -> (a -> m b) -> m b
```

在Haskell中，一个类型要成为 Monad 的实例，

还要满足相应的“Monad Law”，

```
return a >>= k                  =  k a
m        >>= return             =  m
m        >>= (\x -> k x >>= h)  =  (m >>= k) >>= h
```

可以证明，

这些“Monad Law”刚好使 m ， >>= 和 return 构成了范畴论意义上的Monad。

总结

本文介绍了范畴论相关的一些内容，
介绍了什么是范畴，什么是函子，什么是自然变换，
这些都是理解笛卡尔闭范畴所必须的。

为了理解什么是范畴，我们列举了前一篇提到的群，拓扑空间，CPO作为例子，
还借用了Haskell中的Functor和Monad学习了Hask范畴。

下文我们将继续学习范畴论，
理解什么是笛卡尔闭范畴，以及如何用它解释简单类型λ演算的语义。

参考

Category (mathematics)
Haskell/Category theory
Categories for the Working Mathematician

‹ 语言背后的代数学（七）：数学结构　　　　如何写好一篇文档 ›