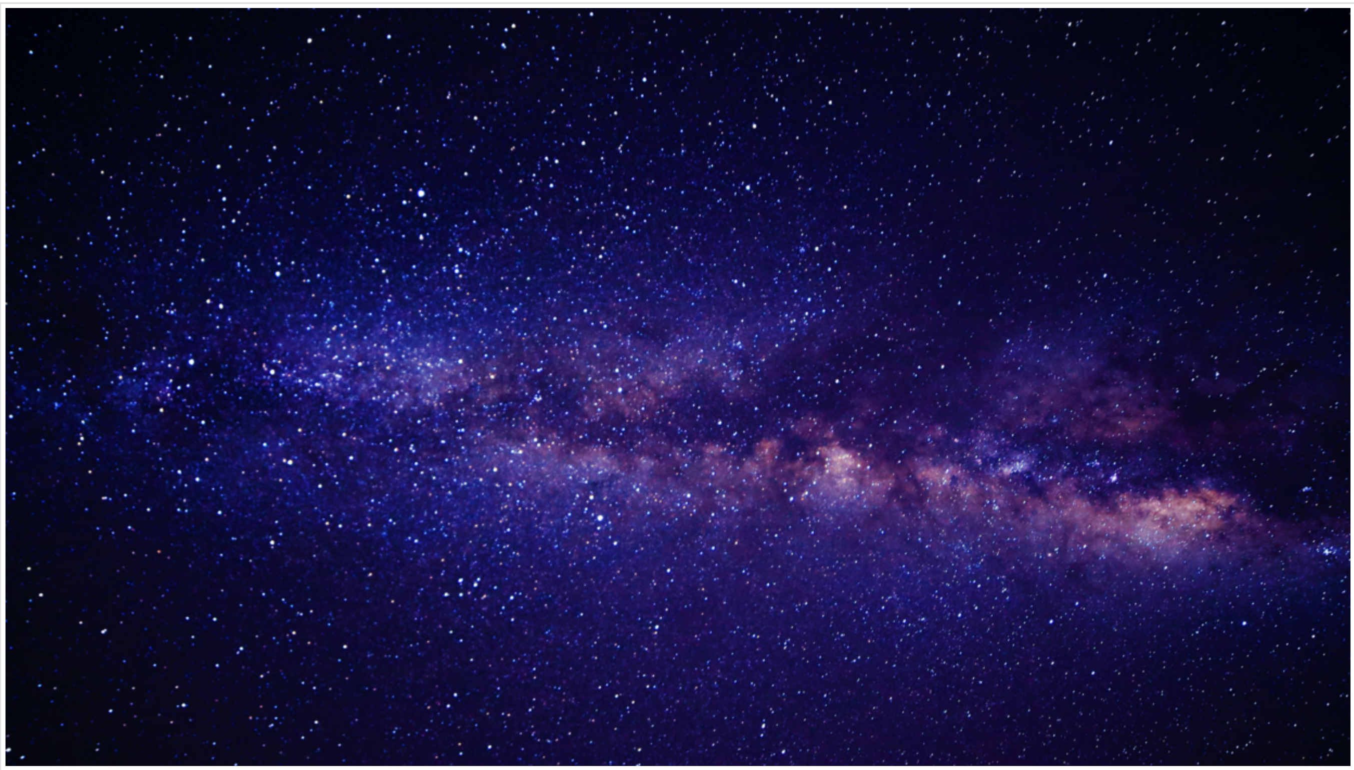
何幻

Programming is about ideas,

languages are just a way to express them.

语言背后的代数学（十）：Curry-Howard-Lambek correspondance

2018-02-23 | Math



回顾

上文我们介绍了笛卡尔闭范畴，它给出了简单类型化λ演算系统$\lambda^{unit,\times,\rightarrow}$的语义，

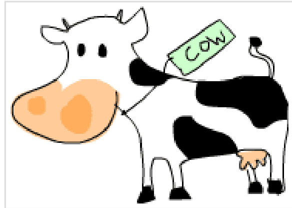
我们还看到了笛卡尔闭范畴与柯里化之间的关系。

结合《你好，类型》系列文章，

到目前为止我们已经有了，类型理论，逻辑学和范畴论的知识基础了。

现在我们介绍Curry-Howard-Lambek correspondence，将三者联系起来。

1. 类型方面



参考《你好，类型（二）：Lambda calculus》，
我们来回顾一下简单类型化λ演算系统。

1.1 语法

$t ::= x|tu|\lambda x.t$

例子：
$\lambda x.x+1$
$\lambda f.\lambda x.fx$

1.2 类型

基本类型（basic types），$B ::= \iota|\cdots$
一般类型（general types），$T ::= B|T \to T|T \times T$

例子：
$\iota \to \iota \to \iota$，
$(\iota \to \iota) \to \iota$

1.3 类型推导规则

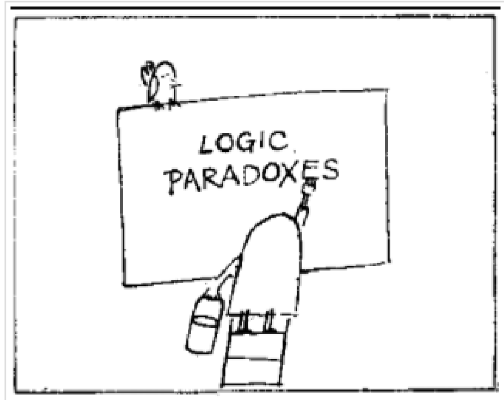
（1）$\frac{}{\Gamma,x:t\vdash x:T}$

（2）$\frac{\Gamma\vdash t:T \quad \Gamma\vdash u:U}{\Gamma\vdash \langle t,u\rangle:T\times U}$，$\frac{\Gamma\vdash v:T\times U}{\Gamma\vdash \pi 1 v:T}$，$\frac{\Gamma\vdash v:T\times U}{\Gamma\vdash \pi 2 v:U}$

（3）$\frac{\Gamma,x:U\vdash t:T}{\Gamma\vdash \lambda x.t:U\to T}$，$\frac{\Gamma\vdash t:U\to T \quad \Gamma\vdash u:U}{\Gamma\vdash tu:T}$

其中，$\pi_1 \langle v_1, v_2\rangle = v_1$，$\pi_2 \langle v_1, v_2\rangle = v_2$。

2. 逻辑方面



参考《你好，类型（四）：Propositional logic》，
我们构建一个只包含逻辑联接词$\wedge$和$\rightarrow$的命题逻辑系统。

2.1 逻辑推导规则

（1）$\frac{}{\Gamma,A\vdash A}$

（2）$\frac{\Gamma\vdash A \quad \Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\wedge B}$，$\frac{\Gamma\vdash A\wedge B}{\Gamma\vdash A}$，$\frac{\Gamma\vdash A\wedge B}{\Gamma\vdash B}$

（3）$\frac{\Gamma,A\vdash B}{\Gamma\vdash A\rightarrow B}$，$\frac{\Gamma\vdash A\rightarrow B \quad \Gamma\vdash A}{\Gamma\vdash B}$

2.2 Curry-Howard correspondence

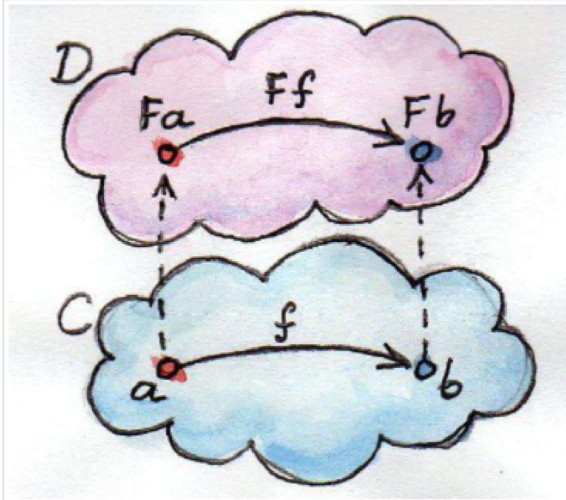
我们看到，只要将逻辑系统中的$\wedge$和$\rightarrow$，替换成简单类型化λ演算中的$\times$和$\rightarrow$，
那么这两个系统从推导规则上来看是一致的。

逻辑中的命题，对应了简单类型化λ演算中的类型，
逻辑中命题的证明，对应了简单类型化λ演算中的项（的类型断言）。

命题$A\rightarrow B$，可以这样理解，
如果该命题可证，则存在将A的证明转换为B的证明的构建过程（construction）。
命题$A\wedge B$，可以这样理解，它是A和B的证明序对（pair）。

考虑到以上命题逻辑与类型之间的对应关系，
我们可以说，proofs as programs。

3. 范畴论方面



结合《语言背后的代数学（九）：笛卡尔闭范畴》，
我们给出了简单类型化λ演算的范畴论解释。

3.1 对象

将简单类型化λ演算系统的类型，解释为笛卡尔闭范畴C中的对象。
$\mathscr{C}[\![\sigma \times \tau]\!] = \mathscr{C}[\![\sigma]\!] \times \mathscr{C}[\![\tau]\!]$
$\mathscr{C}[\![\sigma \rightarrow \tau]\!] = \mathscr{C}[\![\sigma]\!] \rightarrow \mathscr{C}[\![\tau]\!]$

3.2 箭头

将带有自变量项，解释为从自变量类型到项类型的箭头。
$\mathscr{C}[\![\Gamma \vdash M : \sigma]\!] = \mathscr{C}[\![\Gamma]\!] \rightarrow \mathscr{C}[\![\sigma]\!]$

3.3 Curry-Howard-Lambek correspondance

根据简单类型化λ演算系统中的推导规则，
我们可以为范畴C添加对象和箭头之间的约束条件，

（1）$\frac{}{\pi 2 : \Gamma \times A \rightarrow A}$

（2）$\frac{f : \Gamma \rightarrow A \quad g : \Gamma \rightarrow B}{\langle f, g \rangle : \Gamma \rightarrow A \times B}$，$\frac{f : \Gamma \rightarrow A \times B}{\pi 1 \circ f : \Gamma \rightarrow A}$，$\frac{f : \Gamma \rightarrow A \times B}{\pi 2 \circ f : \Gamma \rightarrow B}$

（3）$\frac{f : \Gamma \times A \rightarrow B}{g f : \Gamma \rightarrow B^A}$，$\frac{f_1 : \Gamma \rightarrow B^A \quad f_2 : \Gamma \rightarrow A}{e \circ \langle f_1, f_2 \rangle : \Gamma \rightarrow B}$

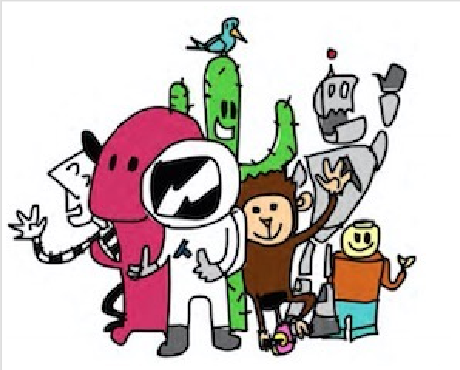
$g_f = \Gamma \rightarrow B^A$是一个箭头，和$e : B^A \times A \rightarrow B$的定义，
可以参考前一篇文章中关于笛卡尔闭范畴的定义。

笛卡尔闭范畴作为简单类型化λ演算系统的语义模型，
范畴中箭头之间约束关系，与类型推导规则是一致的，
而根据Curry-Howard correspondence，类型推导规则与命题逻辑又是一致的。

因此，类型理论，逻辑学和范畴论产生了关联，

这种三者的对应关系，称为**Curry-Howard-Lambek correspondance**。

总结



本文介绍了Curry-Howard-Lambek correspondance，

它将本来毫无关系的三个学科联系在了一起，

类型理论与程序和计算相关，逻辑学与证明（论）相关，

范畴论与模型（论）和代数学相关。

本系列文章到此结束了，与代数学和范畴论相关的内容其实还有很多，

例如，quotient algebra，comonad，adjoint functor，free monoid，等等概念，

书山有路勤为径，学海无涯苦作舟，让我们一起努力吧。

参考

你好，类型（一）：开篇

你好，类型（四）：Propositional logic

语言背后的代数学（九）：笛卡尔闭范畴

Curry–Howard correspondence

Curry-Howard-Lambek correspondence

The Curry-Howard Correspondence, and beyond

Lectures on the curry-howard Isomorphism

Intuitionistic logic

‹ 语言背后的代数学（九）：笛卡尔闭范畴 项目中的信息流动 ›