上級ミクロ経済学: 演習問題集

石原章史

財務省 財政経済理論研修 2020

(注意)

- 演習時間内にいくつか取り扱う予定だが、時間の制約上全ては取り扱わないと思うので、残った問題は各自で取り組むこと。
- 設問が不可解である時は、適宜仮定 (場合によっては修正) すること。

第1章　最適化問題

1.1　(確認問題)

以下を微分可能性を仮定せずに示せ。

1. $f(\mathbf{x})$ が凹関数ならば $-f(\mathbf{x})$ は凸関数である。
2. $f(\mathbf{x})$ を凸関数とする。この時 $f(\mathbf{x})$ は準凸関数である。

1.2

以下を示せ。

1. $f(x) = e^x$ は凸関数である。
2. $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$ (ただし $0 < a < 1$、$x_1 > 0$、$x_2 > 0$) は凹関数である。
3. $f(x_1, x_2) = a \ln x_1 + (1-a) \ln x_2$ (ただし $0 < a < 1$、$x_1 > 0$、$x_2 > 0$) は凹関数である。

1.3

$f(\mathbf{x})$ を n 変数の準凹関数、$g(y)$ を 1 変数の増加関数とする。この時、$g(f(\mathbf{x}))$ 準凹関数はであることを示せ。

1.4

1 階条件を使って以下を導出せよ (関数の凹凸の判断はしなくても良い)。

1. $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ を最大にする (x_1^*, x_2^*)。
2. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$ を最小にする (x_1^*, x_2^*)。

1.5

以下の最適化問題を解け。

1.

$$\max_x (x-2)^2 \text{ subject to } 0 \leq x \leq a.$$

(ただし $a > 0$)。

2.

$$\max_{x_1,x_2} \ln(x_1+1)+\ln(x_2+1) \text{ subject to } 2x_1+x_2 \leq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

1.6

以下の最小化問題を考える。

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \text{ subject to } g(\mathbf{x}) \geq 0.$$

「$f(\mathbf{x})$ の最小化」が「$-f(\mathbf{x})$ の最大化」と同値であることに注意し、この最小化問題のキューンタッカー条件を書き下せ。

1.7

以下の最適化問題を考える。

$$\max_{x_1,x_2} \ln(x_1)+x_2 \text{ subject to } x_1+x_2 \leq m, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

ただし m は正の定数とする。

1. ラグランジュ関数を定義せよ。
2. 定義したラグランジュ関数からキューンタッカー条件を導出せよ。
3. キューンタッカー条件を使って解を求めよ。
4. 最適解での目的関数 $V(m)$ を導出し、横軸を m としてそのグラフを描写せよ。

1.8

以下の最適化問題を考える。

$$\max_{x_1,x_2} \ln x_1+\ln x_2 \text{ subject to } x_1+x_2 \leq 12, x_1 \geq b, x_2 \geq 0.$$

ただし $b \in [0,12)$ は非負の定数とする。

1. 実行可能集合を (x_1, x_2) 座標上に図示し、b の変化によって実行可能集合がどう変化するか説明せよ。
2. ラグランジュ関数を定義せよ。
3. 定義したラグランジュ関数からキューン・タッカー条件を導出せよ。
4. キューン・タッカー条件を使って解を求めよ。
5. 最適解での目的関数 $V(b)$ を導出し、横軸を b としてそのグラフを描写せよ ($V(b)$ の増減と凹凸について明示すること)。

第2章　消費者理論

2.1　(確認問題)

$u(\mathbf{x})$ を選好 $\succsim$ を表現する効用関数、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を厳密な増加関数とする。この時、関数 $f(u(\mathbf{x}))$ は $\succsim$ を表現していることを示せ。

2.2　(確認問題)

以下の効用最大化問題を考える。

$$\max_{\mathbf{x}\in X} u(\mathbf{x}) \text{ subject to } \mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, y).$$

1. $u(\mathbf{x})$ を厳密な増加関数とする。この時、予算制約 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \leq y$ は解において有効であることを以下の手順 (背理法) で示せ。
   (a) 解 $\mathbf{x}^*$ が $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^* < y$ を満たすとする。この時、新しい消費ベクトル $\tilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}^* + (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)$ を考える。
   (b) $\mathbf{p}\cdot\tilde{\mathbf{x}} \leq y$ を満たす $\varepsilon > 0$ を特定化する。
   (c) $u(\tilde{\mathbf{x}}) > u(\mathbf{x}^*)$ であることを示せれば、予算制約を満たし効用が厳密に高くなる他の消費ベクトルが存在するので、$\mathbf{x}^*$ が解であることに矛盾する。
2. 間接効用関数 $v(\mathbf{p}, y)$ は y に関して非減少関数であることを示せ。

2.3　(確認問題)

以下の支出最小化問題を考える。

$$\min_{\mathbf{x}\in X} \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \text{ subject to } u(\mathbf{x}) \geq \overline{u}.$$

顕示選好の論理を使って、支出関数 $e(\mathbf{p}, \overline{u})$ は $\mathbf{p}$ と $\overline{u}$ に関して増加関数であることを示せ。

2.4　(確認問題)

等価変分を

$$EV = e(\mathbf{p}^1, \overline{u}^1) - e(\mathbf{p}^0, \overline{u}^1)$$

と

$$EV = \int_{p_i^0}^{p_i^1} x_i^h(\mathbf{p}, \overline{u}^1) dp_i$$

で表現できることを示せ (ただし $\overline{u}^1 \equiv v(\mathbf{p}^1, y) = v(\mathbf{p}^0, y - EV)$)。

2.5

2財での効用最大化問題において、解は一意であるとする。先月価格ベクトルは $(p_1, p_2) = (1, 1)$ であり、この時、この消費者が $(x_1, x_2) = (y/3, 2y/3)$ を選択したとする。今月に入り、財1の価格が $p_1 = 3/2$ に上がり、財2の価格が $p_2 = 1/2$ に下がったとする。この消費者は今月 $(x_1, x_2) = (5y/8, y/8)$ を選ばないことを示せ。

2.6

(制約のない) 最適化問題 $\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, a)$ を考える (ただし、f は微分可能で $a \in \mathbb{R}$ は外生変数)。$\mathbf{x}^*(a)$ を a を所与としたときの一意の解とし、$f^*(a) \equiv f(\mathbf{x}^*(a), a)$ とする。この時、包絡線定理を以下の手順で示せ。

1. $\mathbf{x}^*(a)$ の1階条件を導出する。
2. 1階条件から

$$\frac{df^*}{da}(a) = \frac{\partial f}{\partial a}(\mathbf{x}^*(a), a)$$

   を示す。

2.7

以下の効用関数は CES 効用関数と呼ばれる

$$u(x_1, x_2) \equiv (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$$

(ただし $\rho \in (0, 1)$)。

1. マーシャルの需要関数と間接効用関数を導出せよ。
2. 以下を確認せよ。
   (a) 需要関数は0次同次である。
   (b) ロイの恒等式が成り立つ。
3. $p_2 = 1$ と仮定する。財の間の代替の弾力性

$$\eta(p_1, y) = -\frac{\partial [x_1(p_1, 1, y)/x_2(p_1, 1, y)]}{\partial p_1} \frac{p_1}{x_1(p_1, 1, y)/x_2(p_1, 1, y)}.$$

を導出し、これは p_1 と y に寄らず一定であることを示せ。(CES は「代替の弾力性一定 [Constant Elasticity of Substitution]」を意味する。)

2.8

ある消費者の効用関数が連続でかつ厳密な増加関数である時、少なくとも 1 つの財は正常財であることを示せ。(ヒント: もし全ての財が下級財であるならば、マーシャルの需要関数が効用最大化の解になっていないことを示せばよい。)

2.9

以下のコブ・ダグラス [Cobb-Douglas] 型効用関数を考える。

$$u(x_1, x_2) \equiv x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

(ただし $0 < \alpha < 1$。)

1. 財 1 と 2 のマーシャルの需要関数を導出せよ。
2. 間接効用関数を導出せよ。
3. 財 1 と 2 の補償需要関数を導出せよ。
4. スルツキー方程式から、財 1 の各価格 p_1 と p_2 に関する代替効果と所得効果を求めよ。

2.10

2 財に直面する消費者の効用関数が

$$u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2,$$

で与えられているとする (ただし $v(x_1)$ は厳密な増加かつ厳密な凹関数)。また $p_2 = 1$ とする。

1. 財 1 には所得効果がないことを示せ。
2. 以下 $v(x_1) = \sqrt{x_1}$ とする。
   (a) 財 1 のマーシャルの需要関数と補償需要関数を求めよ。
   (b) 財 1 の現在の価格 p^C、将来の価格を $p^N(> p^C)$ とする。財 1 の補償変分、等価変分、消費者余剰 (の変分) をそれぞれ求めよ。

第3章　一般均衡

3.1　(確認問題)

- $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \leq \mathbf{0}$ かつ
- 各 k について「もし $p_k = 0$ ならば $z_k(\mathbf{p}) > 0$」

であるならば $z_k(\mathbf{p}^*) = 0$ (つまり $\mathbf{p}^*$ が競争均衡) であることを「$z_k(\mathbf{p}^*) < 0$ だと矛盾が生じる」ことをによって示せ。

3.2

$I = 2$(2 消費者) かつ $n = 2$(2 財) の交換経済を考える。各消費者 $i(= 1, 2)$ の効用関数は

$$u^1(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}, u^2(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}.$$

で与えられる。$e_k^i \geq 0$ を消費者 i の k 財の初期保有とする。以下 (i)$e_2^1 = e_1^2 = 0$; (ii) $0 < e_1^1 < 2e_2^2$; (iii) 財 1 の価格は 1 に標準化 (つまり $(p_1, p_2) = (1, p_2)$) とする。

1. 消費者 1 の需要関数 $\mathbf{x}^1(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^1)$ を求めよ。
2. 消費者 2 の需要関数は $x_1^2(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^2) = x_2^2(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^2)$ を満たすことを示せ。(ヒント: もしそうでなければある別の消費ベクトルが存在し、それは予算制約を満たしかつ効用が厳密に増えることを示す。)
3. 消費者 2 の需要関数 $\mathbf{x}^2(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^2)$ を求めよ。
4. 各財の集計超過需要関数を求めよ。
5. 競争均衡での財 2 の価格 p_2^* を求めよ。
6. 競争均衡配分を求めよ。
7. 初期保有の組として以下の二つを考える。

    (a) $\mathbf{e}^1 = (3, 0)$, $\mathbf{e}^2 = (0, 2)$;

    (b) $\mathbf{e}^1 = (2, 0)$, $\mathbf{e}^2 = (0, 4)$.

    各消費者が交換経済で競争均衡を実現するとき、消費者 1 はどちらを初期保有として好むか？また消費者 2 はどちらを初期保有として好むか？

3.3

2 人の消費者と 2 財による (完全競争的な) 交換経済を考え、$\mathbf{p} \equiv (p_1, p_2)(>> 0)$ を価格ベクトルとする。

1. 所得が y の時の消費者 1 の間接効用関数が $v^1(\mathbf{p}, y) \equiv 2\ln y - \ln p_1 - \ln p_2 - 2\ln 2$ である時、この消費者 1 の (マーシャルの) 需要関数 $\mathbf{x}^1(\mathbf{p}, y)$ を求めよ。

2. 所得が y の時の消費者 2 の間接効用関数が $v^2(\mathbf{p}, y) \equiv y/(p_1 + p_2)$ である時、この消費者 2 の (マーシャルの) 需要関数 $\mathbf{x}^2(\mathbf{p}, y)$ を求めよ。

3. 以下、消費者 1 は財 1 を 10 単位、消費者 2 は財 2 を 10 単位、それぞれ初期保有として持っているとする。(また、両者とも所得は一切持っていないとする。)
   (a) 各財の集計超過需要関数を求めよ。
   (b) $p_2 = 1$ の時の、財 1 の競争均衡価格 p_1^* を求めよ。
   (c) 競争均衡配分を求めよ。

3.4

2 人の消費者 (A と B) と 2 財 (財 1 と 2) による完全競争的な交換経済を考える。各消費者の選好を表す効用関数は

$$u^A(x_1^A, x_2^A) = \min\{x_1^A, \alpha x_2^A\}, u^B(x_1^B, x_2^B) = \min\{\alpha x_1^B, x_2^B\},$$

(ただし $\alpha > 1$) で表され、各人とも各財 1 単位ずつの初期保有 (つまり $\mathbf{e}^A = \mathbf{e}^B = (1, 1)$) が与えられている。$\mathbf{p} \equiv (p_1, p_2)(>> 0)$ を価格ベクトルとする。

1. 各消費者の (マーシャルの) 需要関数が $x_1^A(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}^A) = \alpha x_2^A(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}^A)$ および $x_1^B(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}^A) = x_2^B(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}^A)/\alpha$ となることを簡潔に説明せよ。

2. 各消費者の需要関数がを導出せよ。

3. 以下、財 1 の価格を 1 となっている競争均衡 (つまり $p_1^* = 1$) を考える。
   (a) 競争均衡価格 p_2^* と競争均衡配分 $\mathbf{x}^* \equiv (x_1^{A*}, x_2^{A*}, x_1^{B*}, x_2^{B*})$ を導出せよ。
   (b) α が増加すると p_2^* と $\mathbf{x}^*$ はどのように変化するか説明せよ。
   (c) $\mathbf{x}^*$ が初期保有配分 $\mathbf{e}$ をパレート支配していることを示せ。

第4章　不確実性とリスク態度

4.1　(確認問題)

$u(x)$ を vNM 効用関数、g をくじとする。以下を示せ。

1. リスク回避的であるならば、$CE < E[g]$ かつ $P > 0$。
2. リスク中立的であるならば、$CE = E[g]$ かつ $P = 0$。
3. リスク愛好的であるならば、$CE > E[g]$ かつ $P < 0$。

4.2　(確認問題、補足ノートより)

くじに対する選好 $\succsim$ が単調性を満たし $a_1 \succsim a_n$ である時、$a_1 \succ a_n$ となることを示せ。

4.3

期待効用理論と整合的ではない例として、「アレー [Allais] の逆説」と呼ばれるものがある。以下の 4 つのギャンブルを考える。

- g_1: 確実に 100 万円をもらう。
- g_2: 確率 0.1 で 500 万円、確率 0.89 で 100 万円をもらうが確率 0.01 で何ももらえない。
- g_3: 確率 0.11 で 100 万円もらうが、確率 0.89 で何ももらえない。
- g_4: 確率 0.1 で 500 万円もらうが、0.9 で何ももらえない。

実験を行うと多くの被験者は

- g_1 を g_2 よりも好み、かつ
- g_4 を g_3 よりも好む。

u_5、u_1、u_0 をそれぞれ 500 万円もらったとき、100 万円もらったとき、何ももらえなかった時の vNM 効用とする。

1. g_1 を g_2 よりも好む条件 (不等式) を導出せよ。
2. g_4 を g_3 よりも好む条件 (不等式) を導出せよ。
3. この二つの条件は両立しないことを示せ。

4.4

赤木君は絶対リスク回避度が一定で vNM 効用関数が $u(x) = -\exp(-\alpha x)$ である (ただし $\alpha > 0$、x は円)。赤木君にとって次の二つの選択肢は無差別であるとする

- A: 10000 円を確実に受け取る。
- B: 15000 円を確率 p で、5000 円を確率 $1-p$ で受け取る。

この時、以下の二つの選択肢も無差別であることを示せ (ただし $a \geq 5000$)。

- A': a 円を確実に受け取る。
- B': $(a+5000)$ 円を確率 p で、$(a-5000)$ 円を確率 $1-p$ で受け取る。

4.5

木暮君の相対リスク回避度が一定で vNM 効用関数が $u(x) = x^\rho$ であるとする。(ただし $\rho \in (0,1)$、x は円)。

1. 木暮君は次のくじに直面しているとする。
   - $100W$ 円を確率 $1/(1+W)$ で受け取るが、確率 $W/(1+W)$ で何も受け取らない (ただし $W > 0$)。

   この時、ρ が増加すると確実同値額は増加することを示せ。

2. 木暮君にとって次の二つの選択肢は無差別であるとする
   - A: 10000 円を確実に受け取る。
   - B: 15000 円を確率 p で、5000 円を確率 $1-p$ で受け取る。

   この時、以下の二つの選択肢も無差別であることを示せ (ただし $a > 0$)。
   - A': a 円を確実に受け取る。
   - B'': $3a/2$ 円を確率 p で、$a/2$ 円を確率 $1-p$ で受け取る。

第5章　標準形ゲーム

5.1　(確認問題)

講義ノートの囚人のジレンマゲームにおけるプレーヤー2の利得関数 $u_2(s_1, s_2)$ を定義せよ。

5.2　(確認問題)

以下の利得表で表現される2プレーヤーの標準形ゲームを考える。

$1 \setminus 2$	A	B
A	(2, 2)	(-1, -1)
B	(-1, -1)	(-1, -1)

1. 純粋戦略ナッシュ均衡を全て求めよ。
2. 各純粋戦略ナッシュ均衡の戦略は弱支配されているかどうかを調べよ。

5.3

以下の第2位封印価格オークションと呼ばれるオークションを考える。第1位封印価格オークションとの違いは一番高い入札をした入札者がオークションの勝者となり財を獲得するが、勝者は*2*番目に高い入札額を支払う。

1. 入札者の利得を書き下せ。
2. ほかの入札者がどのような入札額 s_{-i} をしようとも入札者 i は自分の財の価値を入札額にすることで自分の利得を最大にする (つまり全ての $s_{-i} \in S_{-i}$ と $s_i \in S_i$ に対して $u_i(v_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$) ことを以下の手順で示せ。
   (a) 他の入札者の中で最高入札額が v_i よりも厳密に低い時に、$s_i = v_i$ は入札者 i の利得を最大にする。
   (b) 他の入札者の中で最高入札額が v_i である時に、$s_i = v_i$ は入札者 i の利得を最大にする。
   (c) 他の入札者の中で最高入札額が v_i よりも厳密に高い時に、$s_i = v_i$ は入札者 i の利得を最大にする。

5.4

ゲルダとヤンガスは手元の300ドルを以下のようなルールで分け合うことにした。各自が0、100、200、300のいずれかの数字を同時に言う。もし彼らの数字の和が300以下ならば、各自が言った数字分のドルを受け取る。もし彼らの数字の和が300を超えたならば、両者ともそのドルは受け取れない(300ドルはどこかに寄付される)。各自の利得は受け取ったドルの額と等しいとする。

1. 標準形ゲームとして定義をし、利得表を書け。
2. 純粋戦略ナッシュ均衡を全て求めよ。

5.5

以下の男女の争いのゲームで混合戦略ナッシュ均衡を全て求めよ。

$1 \setminus 2$	O	F
O	$(2,1)$	$(0,0)$
F	$(0,0)$	$(1,2)$

5.6

じゃんけん [rock-paper-scissors] は以下の利得表によって標準形ゲームとして表現できる。

$1 \setminus 2$	R	P	S
R	$(0,0)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$
P	$(1,-1)$	$(0,0)$	$(-1,1)$
S	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(0,0)$

各プレーヤーが各純粋戦略を確率1/3で選ぶ混合戦略の組がナッシュ均衡になっていることを示せ。

5.7

以下の表によって表現できるプレーヤーが2人の標準形ゲームを考える。

$1 \setminus 2$	L	R
T	(α,α)	$(3,0)$
B	$(4,1)$	$(2,3)$

ただしαは正の値であるとする。

1. 純粋戦略ナッシュ均衡が存在するためのαの必要十分条件を導出し、そのときの純粋戦略ナッシュ均衡を求めよ。
2. 以下、純粋戦略ナッシュ均衡が存在しないαを仮定する。

(a) 混合戦略ナッシュ均衡を求めよ。

(b) α が (少し) 増加することにより

i. プレーヤー 1 が T を選択する確率は増加するか?

ii. プレーヤー 2 が L を選択する確率は増加するか?

5.8 (興味のある人向け)

純粋戦略 s_i を確率 $p \in (0,1)$、純粋戦略 $s_i'(\neq s_i)$ を確率 $1-p$ で選ぶプレーヤー i の混合戦略 σ_i が他のプレーヤーの混合戦略の組 σ_{-i} に対して最適反応になっているとする。この時純正戦略 s_i および s_i' 自体も σ_{-i} に対して最適反応になっていることを示せ。

第6章　不完全競争

6.1　(確認問題)

クールノーの複占モデル ($J = 2$) を考える。昨年度、両企業とも限界費用は同じ $c(> 0)$ であった。今年度に入り、企業 1 はある技術の開発に成功し、その結果、限界費用が $c' \in (0, c)$ に削減された。(企業 2 の限界費用は c のままであった。)

1. 昨年度と今年度の最適反応曲線を一つの $q_1 - q_2$ 座標上に描け。各企業の最適反応曲線はどのように変化するか？

2. 描写したグラフを用いて、クールノー均衡が昨年度から今年度どのように変化したかを説明せよ。(クールノー均衡を明示的に求める必要はない。)

6.2

市場の (集計された) 需要関数が $q^d(p) = 1 - p$ で与えられており、市場にいる全ての企業の可変費用関数が $c(q) = q^2/2$ であるとする。

1. 市場に 2 企業のみ存在するとき、(短期の) 競争均衡とその時の取引量を求めよ。

2. 各企業がこの市場に参入するときに可変費用に加えて 1/18 の参入費用が必要であるとする。長期の競争均衡とその取引量、またその時の参入している企業の数を求めよ。

6.3

以下のような価格競争を考える。2 企業が市場に存在し、各企業 $i(= 1, 2)$ は

$$q_i(p_i, p_j) = 1 - p_i + p_j.$$

という需要関数に直面している。生産費用は 0 と仮定され、よって企業 i の利潤は $p_i q_i(p_i, p_j)$ で表される。各企業は、価格 p_i を同時に決めるベルトラン複占を考える。

1. 一階条件から各企業 i の相手企業の価格 p_j に対する最適反応を導出せよ。

2. 最適反応からベルトラン・ナッシュ均衡を導出せよ。

6.4

企業 1 と 2 による (差別化された財による) 複占市場での価格競争を考える。各企業 i と j 価格 (p_i, p_j) をつけた時、企業 i の財の需要関数は

$$D_i(p_i, p_j) = a_i - 2p_i + p_j,$$

ただし a_i は正の定数とする企業 i は限界費用 $c_i \geq 0$ で生産を行う (固定費用はなし)。

1. 企業の i の利潤を価格 (p_i, p_j) の関数として書け。
2. 各企業の最適反応を導出し、最適反応曲線を (p_1, p_2) 座標に描け (p_1 軸、p_2 軸上のどこで交わるか明示せよ。)
3. 図を用いて、以下の時に均衡がどう変化するかを説明せよ (ここで均衡を明示的に導出する必要はない)。
   (a) c_1 が増加した時。
   (b) a_2 が増加した時。
4. $a_1 = a_2 = 200$ かつ $c_1 = c_2 = 20$ の時にナッシュ均衡を導出せよ。

6.5 (興味のある人向け)

ホテリングの立地選択モデルを考える。

1. 企業の数が 3 の時、純粋戦略均衡は存在しないことを示せ。
2. 企業の数が 5 の時、純粋戦略均衡を導出せよ。

第7章　外部性と公共財

7.1　(確認問題)

外部性のある競争均衡での利得 $(\phi_1(h^o)+w_1+T, \phi_2(h^o)+w_2-T)$ はパレート効率的でないことを示せ。

7.2

代表的消費者と代表的企業による以下のような経済体系を考える。代表的企業はある財を生産する際に環境を悪化させせる行動を伴う。代表的消費者は x 単位の財を消費し、代表的企業が q 単位の生産を行うと $x-q^2/3$ の効用を得る ($q^2/3$ は外部性不効用に相当する)。また、代表的企業が q 単位の生産を行ったときの生産費用は $q^2/8$ となる。代表的消費者は 1 単位の所得を持つ。財の価格は $p>0$ とし、この価格は両者にとって市場で与えられた所与のもでであるとする。

1. 消費者の効用最大化問題を定式化し、p の下での財の需要関数 $x^d(p)$ を求めよ。
2. 生産者の利潤最大化問題を定式化し、p の下での財の供給関数 $x^s(p)$ を求めよ。
3. 消費者と生産者の需給が一致する価格を競争均衡と定義した時、競争均衡、とその時の生産量を求めよ。
4. 消費者の効用を最大にする財の生産量 q^O を求めよ。
5. 1 単位生産あたりに生産者に t の税金を課し税収は消費者に配分されるとする。課されるピグー税を求めよ。 競争均衡で q^O を達成するような税 t とその時の競争均衡価格を求めよ。
6. 上記のピグー税で得られた税収が生産者に返還されることによって、ピグー税は競争均衡配分をパレート支配していることを示せ。

7.3

N 人のプレーヤーが私的財を用いて公共財を供給するという状況を考える。プレーヤー i は現在 $k_i>0$ 単位の私的財を保有し、そのうち $x_i \geq 0$ 単位を公共財として供給する。全てのプレーヤーは公共財の便益として $\alpha \ln X$ が得られる (ただし $X=\sum_{j=1}^{N} x_j$ は公共財供給量の総和、$\alpha \geq 0$)。残りの $k-x_i$ 単位はプレーヤー i が私的財として消費し、結果プレーヤー i の利得は $u_i(x_i, x_{-i}) = \alpha \ln X + \ln[k_i - x_i]$ となる。

1. 1 階条件を用いて、プレーヤー i の x_{-i} に対する最適反応関数を求めよ。

2. $N = 2$ とする。

   (a) このゲームは戦略的代替か戦略的補完か (動学ゲームの章を参照) を説明せよ。

   (b) このゲームのナッシュ均衡を求めよ。(出てくるナッシュ均衡が $0 \leq x_i \leq k_i$ となるように k_1、k_2、α が決まっていると仮定して良い。)

   (c) k_1 が変化するとプレーヤー 2 の供給量はどう変化するか議論せよ。

3. $N \geq 2$ かつ $k_1 = k_2 = \cdots = k_N = k$ とする。

   (a) ナッシュ均衡を求めよ。(出てくるナッシュ均衡が $0 \leq x_i \leq k$ となるように k と α が決まっていると仮定して良い。)

   (b) N が増加するとナッシュ均衡はどう変化するか議論せよ。

   (c) 全プレーヤーの利得の和を最大にするような公共財供給量の組 $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*)$ を求めよ。

   (d) $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*)$ に比べて、ナッシュ均衡はどうなっているか議論せよ。

7.4

2 人の住人が私的財を用いて公共財を供給するという状況を考える。住人 $i(= 1, 2)$ は現在 $k_i(> 0)$ 単位の私的財を保有し (ただし $k_1/2 < k_2 < 2k_1$)、そのうち $x_i(\geq 0)$ 単位の私的財を投資することで x_i 単位分の公共財を供給することができる。

以下、各住人 i が公共財供給量 x_i を決める戦略的状況を考える。公共財の総量が $X \equiv \sum_{i=1}^{2} x_i$、住人 i が消費できる私的財の量を $y_i \equiv k_i - x_i$ となり、この時、住人 i の利得はその積 Xy_i として表される。

1. 各住人 i の利得を x_1 と x_2 の関数として表現せよ。

2. 各住人が同時に x_i を決定するとする。

   (a) 住人 i の相手の $x_j(\in [0, k_i])$ に対する最適反応を導出せよ。

   (b) 各住人の最適反応のグラフを x_1-x_2 座標に描写せよ。

   (c) (k_1 は固定したまま)k_2 が増加した時にナッシュ均衡がどう変化するかをグラフを使って説明せよ。

3. まず、住人 1 が x_1 を決め、その後 x_1 を観察した住人 2 が x_2 を決める展開形ゲームを考える。また $k_1 = 30$、$k_2 = 20$ とする。この時、部分ゲーム完全均衡における各住人の公共財供給量を求めよ。

第8章　動学ゲーム

8.1　(確認問題)

次のような 3 期間のゲームを考える

1 期: 企業 1 が数量 q^1 を決める

2 期: q^1 を観察した企業 2 が数量 q^2 を決める

3 期: (q^1, q^2) を観察した企業 1 が再び数量 q^1 を決め直す

このゲームを後ろ向き帰納法で考え、以下のように部分ゲーム完全均衡を分析せよ。

1. 3 期目の時点で (q^1, q^2) が観察されているとする。
   (a) 企業 1 が数量を $\tilde{q}^1$ と決めた時の企業 1 の利潤を書け。
   (b) 企業 1 の最適な数量 $\tilde{q}^{1*}(q^1, q^2)$ を導出し、これが q^1 に依存しないことを確認せよ。
2. 2 期目に企業 2 は q^1 を観察し、q^2 の決定した後に企業 1 が $\tilde{q}^{1*}(q^1, q^2)$ を選択すると予想しているとする。
   (a) 企業 2 が数量を q^2 と決めた時の企業 2 の利潤を書け。
   (b) 企業 2 の最適な数量 $q^{2*}(q^1)$ を導出し、これが q^1 に依存しないことを確認せよ。
3. 1 期目に企業 1 は企業 2 が $q^{2*}(q^1)$、3 期目に企業 1 が $\tilde{q}^{1*}(q^1, q^{2*})$ を選択すると予想しているとする。企業 1 が数量を q^1 と決めた時の企業 1 の利潤を書き、これが q^1 に依存しないことを確認せよ。
4. 上記より、任意の 1 期目の数量 q^1 が企業 1 にとって最適になることに注意し、均衡での各企業の生産量を求めよ。

8.2

ハリエットとビルが 1 単位分のアイスを分け合おうとしている。各自の利得は受け取れるアイスの大きさと等しい。

1. アイスを以下のルールで分け合うとする。
   1) ハリエットがアイスを二つに分ける。
   2) ビルは分けられたアイスのどちらかを選ぶ。
   3) ハリエットが残った方をもらう。

この時、部分ゲーム完全均衡においてアイスは等分で分け合うことを示せ。

2. アイスを以下のルールで分け合うとする。

ラウンド 1 ：

1) ハリエットが自分の分のアイスの割合 $x_1 \in [0,1]$ を提案する。
2) ビルはその提案を受諾するか拒否するかを決める。
   a. 受諾されたらビルは $1-x_1$ 単位、ハリエットは x_1 単位のアイスを受け取り、ゲームは終了する。
   b. 拒否されたら、ラウンド 2 に進む。

ラウンド 2 ：

1) アイスクリームが溶けて 1/3 になってしまう。
2) ビルが自分の分のアイスの割合 $x_2 \in [0,1/3]$ を提案する。
3) ハリエットはその提案を受諾するか拒否するかを決める。
   a. 受諾されたらハリエットは $1/3-x_2$ 単位、ビルは x_2 単位のアイスを受け取り、ゲームは終了する。
   b. 拒否されたら両者ともアイスはもらえず、ゲームは終了する。

以下、もし受諾するのと拒否をするので利得が同じ場合、受諾をするような部分ゲーム完全均衡を考える。

(a) ビルがラウンド 2 で提示する割合 x_2 を求めよ。
(b) ビルがラウンド 1 で受諾する x_1 の範囲を求めよ。
(c) ハリエットがラウンド 1 で提示する割合 x_1 を求めよ。
(d) ビルはハリエットがラウンド 1 で提示するその割合 x_1 を受諾するかどうかを判断せよ。
(e) 各自が受け取れるアイスの大きさを求めよ。

8.3

講義ノートの市場参入のゲームの環境で、企業 2(独占企業) が最初に価格競争を仕掛けるか共存を図るかを決め、その後に、企業 1(参入企業) が参入するかどうかを決めるゲームを考える。

1. ゲームの木を描写し、部分ゲーム完全均衡を導出せよ。
2. 企業 2 は最初に動くのとあとに動くのではどちらを好むか？

8.4

第 6 章の問 6.3 のベルトラン競争を考える。今、企業 1 が最初に価格 p^1 を決定し、それを観察して企業 2 が p^2 を決定するとする。

1. p^1 が決定された時の、企業 2 の最適価格 $p^{2*}(p^1)$ を求めよ。

2. 企業 1 が p^1、企業 2 が $p^{2*}(p^1)$ を決定した時の企業 1 の利潤を書け。

3. 部分ゲーム完全均衡の価格 p^{1*} と $p^{2*}(p^{1*})$ を求めよ。

4. 部分ゲーム完全均衡での各企業の需要を求め、どちらの企業の需要が大きいかを判別せよ。

5. 部分ゲーム完全均衡での各企業の利潤を求め、どちらの企業の利潤が大きいかを判別せよ。

8.5

ある地域の消費者に対して独占的に供給する酒屋 (下流企業) と、その酒屋に対して独占的に日本酒を供給する酒蔵 (上流企業) が存在する。酒蔵は q 単位の酒を製造すると、生産費用として cq がかかる (ただし $c \in (0,1)$ は限界費用)。酒屋はこの日本酒を (追加的費用無しに) その地域の消費者に販売する。もし酒屋が 1 単位あたりの酒の (小売) 価格を p_M と設定すると、その酒の消費者需要は $q = 1 - p_M$ で表される。もし、酒蔵は酒屋への卸売価格として 1 単位あたり p_S と設定し、小売価格が p_M で設定されていると、酒屋は消費者の需要量 $q = 1 - p_M$ 単位の日本酒を酒蔵から購入するので、酒屋の利潤は $(p_M - p_S)q = (p_M - p_S)(1 - p_M)$、酒蔵の利潤は $(p_S - c)q = (p_S - c)(1 - p_M)$ となる。

酒屋と酒蔵は以下の順番で意思決定をするとする。

1) 酒蔵が p_S を決める。

2) p_S を観察し酒屋が p_M を決める。

この時、部分ゲーム完全均衡を以下の手順で分析せよ。

1. p_S を所与として酒屋の最適小売価格 $p_M^*(p_S)$ を求めよ。

2. 酒屋が $p_M^*(p_S)$ を選択することを所与として、酒蔵の最適卸売価格 p_S^* を求めよ。

3. 均衡での消費者の需要量 q^*、酒屋および酒蔵の利潤をそれぞれ求めよ。

8.6

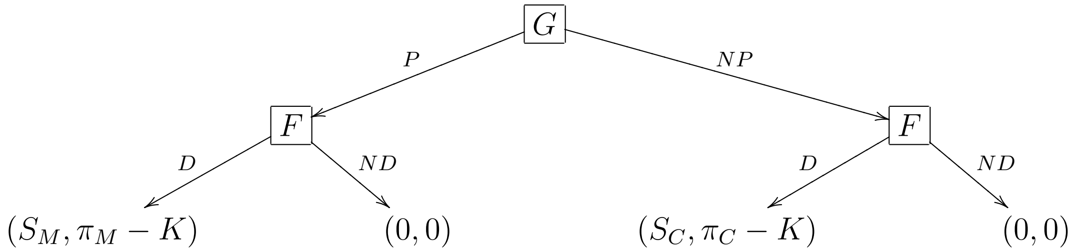
医薬品企業 F はある日、費用 $K > 0$ である難病の特効薬の開発に成功する見積りが出来た。その特効薬の独占供給が可能であるならば市場で独占利潤 $\pi_M > 0$ をあげられる。しかし、ライバル企業にはすぐ模倣されてしまうものであり、模倣されると市場での利潤は π_C になってしまうと考えている。($\pi_M > K > \pi_C > 0$ とする。) 政府は現在、薬品に対して特許制度を導入するかどうかを検討中で、特許が認められるとライバル企業は模倣が出来ず、F は独占利潤を享受できるようになる。

今、次のような意思決定を考える。

1. 政府 (G) が特効薬の特許制度を導入する (P) かしない (NP) か決める。

2. 医薬品企業が特効薬を開発する (D) かしない (ND) かを決める。

この状況は以下のようなゲームの木で記述出来る。



利得は (G の利得, F の利得) を表している。政府は特効薬が広まるほど総余剰が増加すると考えており、$S_C > S_M > 0$ であるとする。

以下の問いに答えよ。

1. 部分ゲーム完全均衡において政府が一番高い総余剰 S_C を達成できるかどうかを議論せよ。

2. 部分ゲーム完全均衡において政府が特許制度の導入し S_M を達成できる (必要十分) 条件を求めよ。

3. 上記の議論を踏まえ、政府が特許制度によって独占利潤を担保することの利点を簡潔に議論せよ。

4. F が先に意思決定をして、その後政府が意思決定する場合、その状況のゲームの木を描き、部分ゲーム完全均衡を求めよ。

5. 政府は先に意思決定するのとあとに意思決定をするのをどちらを好むか、その直観的理由とともに説明せよ。

第9章　情報の経済学

9.1　(確認問題)

付録 F の補足ノートを確認せよ。

9.2

ノートの労働者のモラルハザード問題で労働者の期待効用を $u(w) = w^{\alpha}$(ただし $\alpha \in (0,1)$)、努力費用を $c = 1$ とする。また $pR > 1$、かつ労働者が雇用されなかったた時の企業の利得を 0 とする。

1. 努力水準 e が観察されている時の (期待収益を含む) 企業の利得を求め、労働者を雇用しなかった時よりも利得が高いことを示せ。
2. 努力水準 e が観察されていない時の (期待収益を含む) 企業の利得を求めよ。
3. 相対リスク回避度 α が十分に小さい (0 に近い) 時、努力水準 e が観察できないのであれば、企業は労働者を雇用しない方がいいことを示せ。

9.3

価格差別のモデルにおいて、誘因両立制約 (ICH) と (ICL) が成り立っているとき $q_H \geq q_L$ となることを示せ。

9.4

ヨタヨタ自動車はエンジンの部品会社と取引を行おうとしている。部品会社は q 単位の生産を行ったときの費用は $\theta_i q^2/2$ であり、θ_i は部品会社の私的情報になっている。ヨタヨタは確率 f_i の確率で θ_i だと予想しており、i は H または L(つまり $f_L + f_H = 1$) で $\theta_L < \theta_H$ とする。ヨタヨタは q 単位の部品を購入するとそのまま q の価値を得られる。よってヨタヨタが q 単位の生産に対して p の価格を部品会社に支払った時にヨタヨタの利得は $q - p$、タイプ θ_i の部品会社の利得は $p - \theta_i q^2/2$ である。

1. ヨタヨタが部品会社のタイプを正確に θ_i 知っている時、部品会社に提示する生産量と価格の組 (p_i^I, q_i^I) を求めよ。

2. 以下、ヨタヨタは部品会社のタイプを正確に知らないとする。ヨタヨタがメニュー価格を $((q_L, p_L), (q_H, p_H))$ を提示したときのよたよたの期待利得、参加制約および誘引両立制約を書け。

3. 参加制約および誘引両立制約の下でヨタヨタの期待利得を最大にする最適化問題を考える。この時 θ_H の誘引両立制約と θ_L の参加制約を無視して問題をときの最適解 $((q_L^*, p_L^*), (q_H^*, p_H^*))$ を特徴づけけよ。

4. この最適解が θ_H の誘引両立制約と θ_L の参加制約を満たすことを以下の手順で示せ。

   1) θ_L の誘引両立制約と θ_H の参加制約から θ_L の参加制約が成り立つことを示せ。

   2) 最適解は $q_L^* > q_H^*$ を満たすことを示せ。

   3) $q_L^* > q_H^*$ と θ_L の誘引両立制約から θ_H の誘引両立制約が成り立つことを示せ。

5. $q_H^* < q_H^I$ となっていることを確認せよ。

6. θ_L の利得を求め、それが正になっていることを確認せよ。