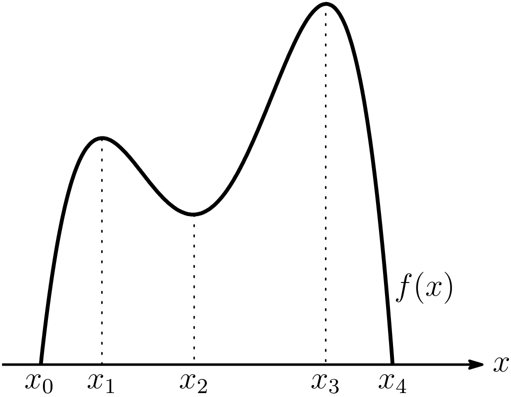
上級ミクロ経済学
最適化問題 図解補足ノート

石原章史

財務省 財政経済理論研修 2020

1.2 局所最適と大域最適

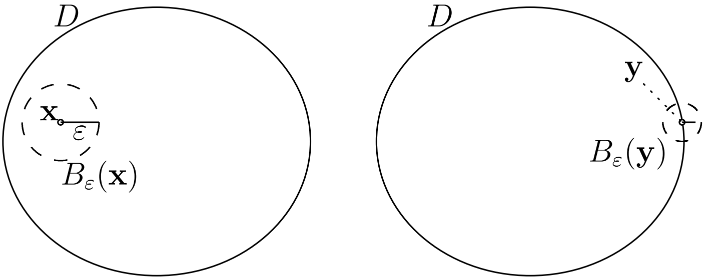
$n = 1$ の例



- x_1: 極大だけど最大ではない (x_3 の方が大きい)
- x_2: 極小だけど最小ではない (x_0 や x_4 の方が小さい)
- x_3: 極大かつ最大

1.2 局所最適と大域最適

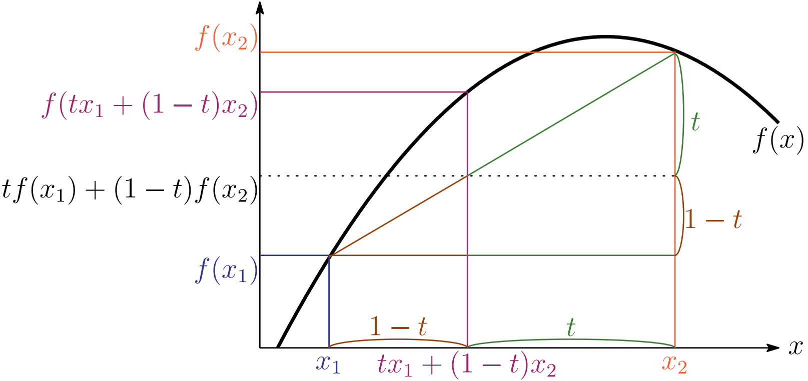
内点と端点



- 内点 x: 十分小さい ε にすれば必ず $B_\varepsilon(\mathrm{x})$ は D に含まれる
- 端点 y: どんなに小さい ε にしても必ず $B_\varepsilon(\mathrm{x})$ の一部は D に含まれない

1.4 2階条件

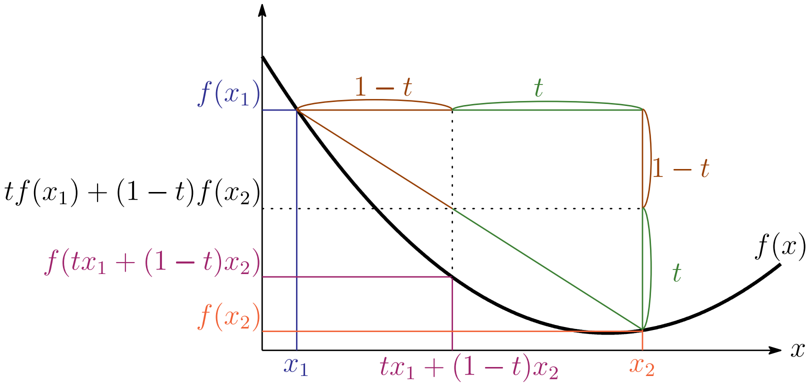
凹関数: $n = 1$ の例



- $f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$

1.4 2階条件

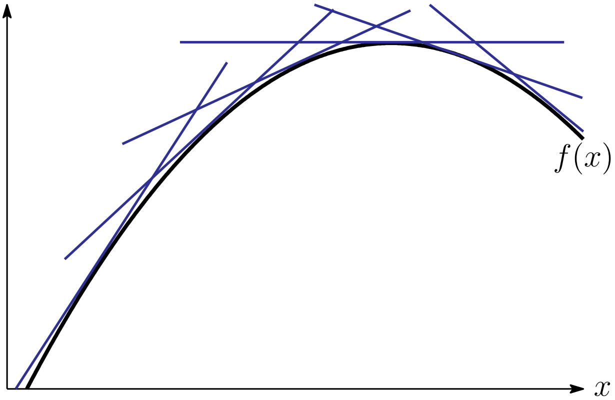
凸関数: $n = 1$ の例



- $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$

1.4 2階条件

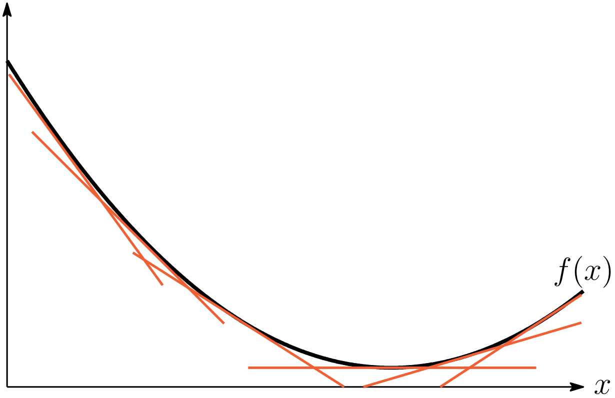
微分可能な凹関数: $n = 1$ の例



- 凹関数 $\iff$ $f''(x) \leq 0$ $\iff$ 傾き (f') が減少する

1.4 2階条件

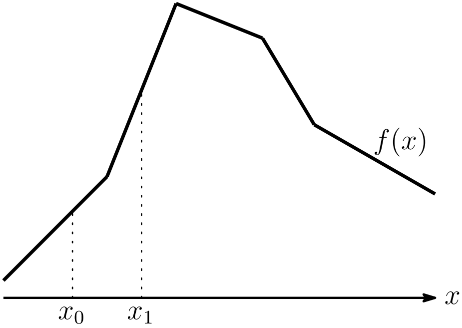
微分可能な凸関数: $n = 1$ の例



- 凸関数 $\iff$ $f''(x) \geq 0$ $\iff$ 傾き (f') が増加する

1.4 2階条件

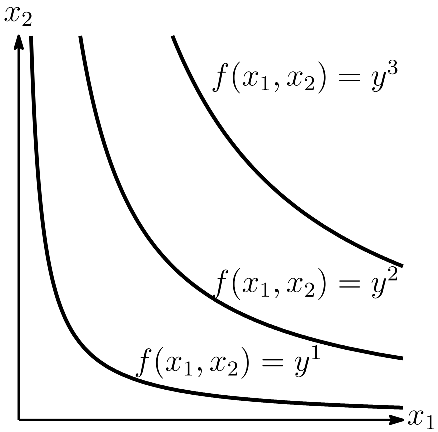
準凹関数: $n = 1$ の例



- $f(tx_0 + (1-t)x_1) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$:
  凹関数ではない
- (どのような x_0, x_1 でも)
  $f(tx_0 + (1-t)x_1) \geq \min\{f(x_0), f(x_1)\}$)

2.3 図解

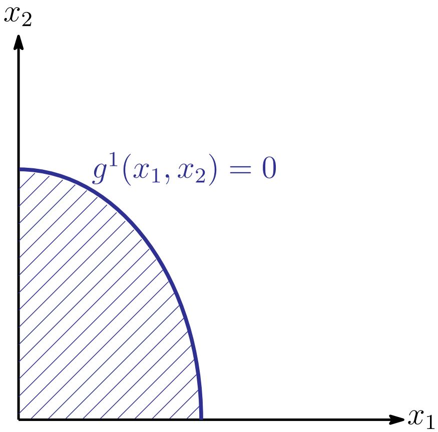
2 変数問題: $f(x_1, x_2) = y^i$ を満たす (x_1, x_2) の曲線



- ここでは $f(x_1, x_2)$ は厳密な増加関数と想定:
  $y^1 < y^2 < y^3$

2.3 図解

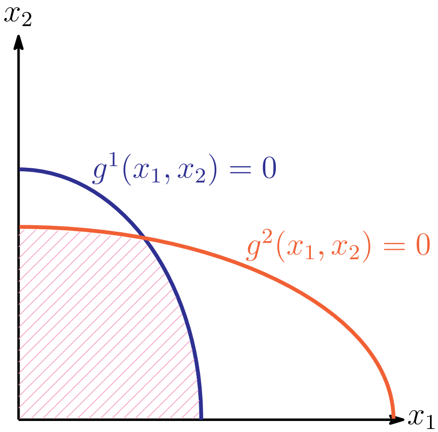
2 変数問題: 制約式 $g^1(x_1, x_2) \geq 0$



- 斜線部: $g^1(x_1, x_2) \geq 0$
- 境界上: $g^1(x_1, x_2) = 0$

2.3 図解

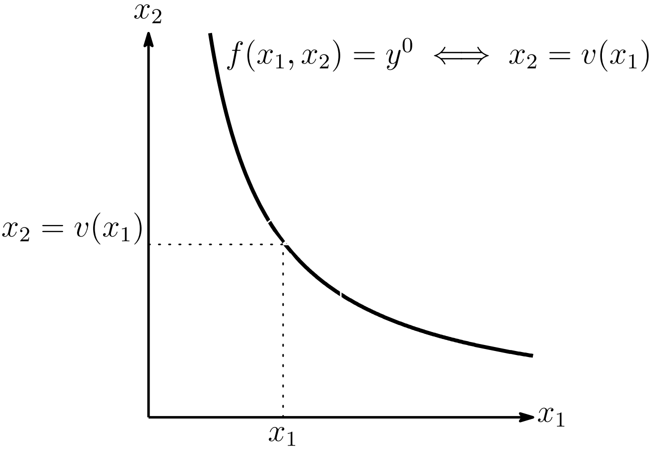
2 変数問題: 実行可能集合



- 制約は $g^1(x_1, x_2) \geq 0$ かつ $g^2(x_1, x_2) \geq 0$
- 斜線部: 実行可能集合

2.3 図解

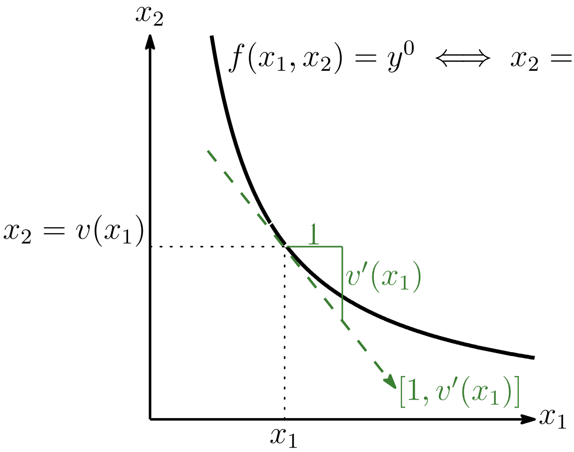
2 変数問題



- $f(x_1, x_2) = y^0 \iff x_2 = v(x_1)$ を表す曲線

2.3 図解

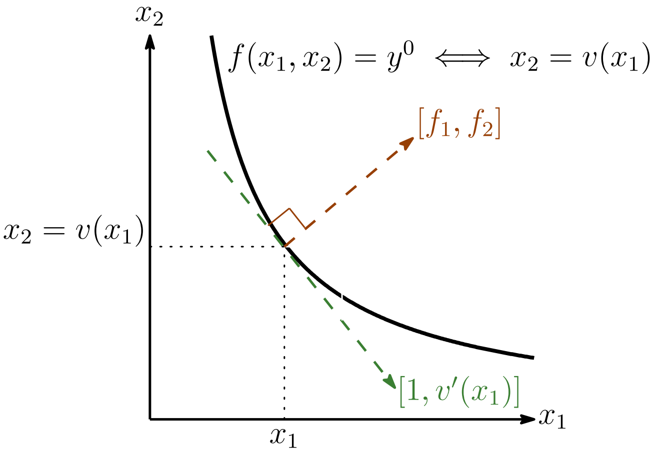
2 変数問題



- $(x_1, v(x_1))$ で接するベクトルは v の傾き: $[1, v'(x_1)]$

2.3 図解

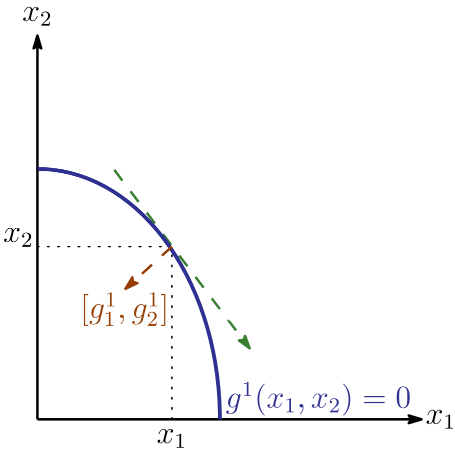
2 変数問題



- ▶ 勾配ベクトル $[f_1, f_2]$ は傾きのベクトル $[1, v'(x_1)]$ と直交

2.3 図解

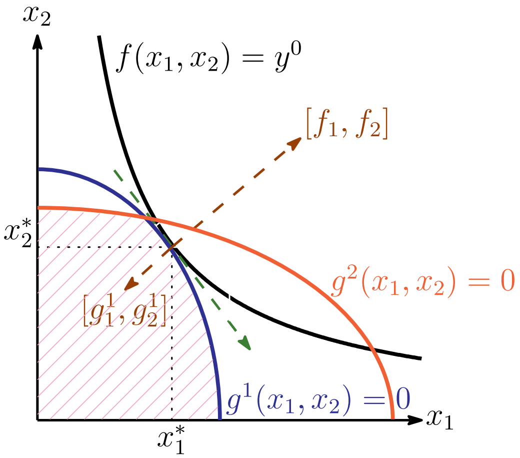
2 変数問題



- $g^j(x_1, x_2) = 0$ に関しても同様に $[g_1^j, g_2^j]$ が得られる

2.3 図解

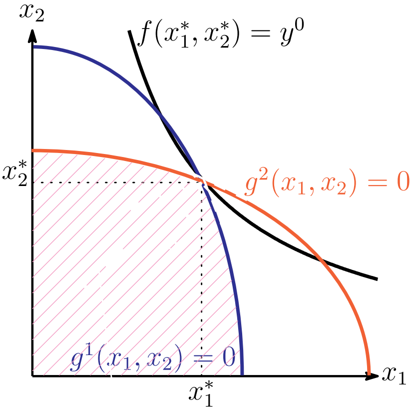
2 変数問題



- $g^1(x^*) = 0$ かつ $\lambda_2^* = 0$ の時

2.3 図解

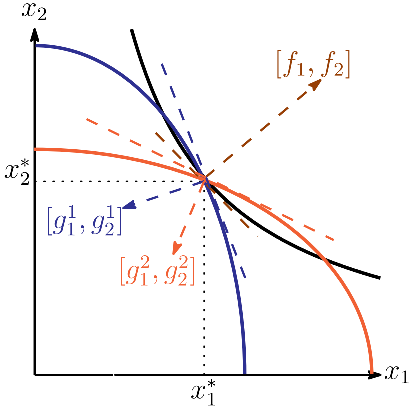
2 変数問題



- $g^1(x^*) = g^2(x^*) = 0$ の時: 交点が解

2.3 図解

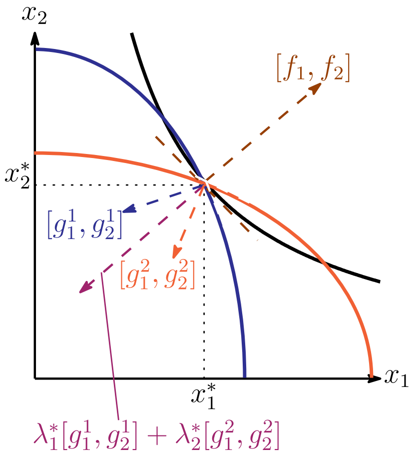
2 変数問題



- 各勾配ベクトルは平行にはならない

2.3 図解

2 変数問題



- $[g_1^j, g_2^j]$ の一次結合は $[f_1, f_2]$ と平行