上級ミクロ経済学: 講義ノート

石原章史

財務省 財政経済理論研修 2020

目 次

第0章　講義紹介

0.1　事務的なこと

0.1.1　基本情報

- 担当講師: 石原章史 (いしはら あきふみ)
  - ◇ 東京大学 社会科学研究所 准教授
  - ◇ Email: `akishihara@iss.u-tokyo.ac.jp`
- 講義内容: 学部中上級から大学院初級レベルのミクロ経済学の講義
- ウェブサイト: `sites.google.com/view/akishihara/teaching/2020MoFMicro`
- 以下の数学の基本的な知識を前提とする:
  - ◇ 集合
  - ◇ 多変数微積分
  - ◇ 線形代数
  - ◇ 確率

0.1.2　講義内容

- 講義スケジュール、内容はシラバスを参照
- 講義ノートを配布し、それに基づいて講義を進める
- 関連する教科書
  - ◇ Jehle, G. and Reny, P. (2011): *Advanced Microeconomic Theory, 3rd edition*
  - ◇ Varian (1992), *Microeconomic Analysis, 3rd edition.*
  - ◇ Tadelis (2012), *Game Theory: An Introduction.*
- その他参考書はシラバスを参照

0.2 ミクロ経済学とは？

0.2.1 問題意識

- どのように**希少な資源が配分されるのか?**および**配分されるべきか?**
  - ◇ いわゆる「経済活動」はその一面で、必ずしも「経済活動」に特化して考えるわけではない
- 二つの重要な要因
  - ◇ インセンティブ [Incentive] (動機、意図、誘因...)
  - ◇ 制度 [Institution] (法律、規制、ルール、慣習...)

インセンティブ

- 各意思決定主体には「(結果に関する) 好み」があり、好ましい結果が実現されるように意思決定を行う
  - ◇ 例えば各個人の望ましい消費パターン、お金の使い方を実行する
  - ◇ 自己実現欲求、他人が実現した結果に関する好みなど、心理的な要因を考慮することも原理的には可能
  - ◇ 生産主体 (企業) も目的を持って意思決定を行う
    - ∗ 典型的には「利潤」
    - ∗ 「存続年数」や「従業員満足度」の場合もあるかもしれない
- 各個人の意思決定の結果は、目的の追求 (インセンティブ) の結果として実現される

制度

- 制度: 社会における**ルール**ないしは**メカニズム**
  - ◇ 集権的な経済 (計画経済、共産主義) と分権的な経済 (市場経済、資本主義)
  - ◇ 法律・税制・規制などの影響
- 制度の下でどのように資源が配分されるのか？
  - ◇ 人々は違う制度の下では異なる意思決定を行う (異なるインセンティブを持つ) かもしれない
  - ◇ 制度によって資源配分が変わってくる

0.2.2 アプローチ

- **モデル分析**: 複雑な現実を単純化することで
  - ◇ 直観的かつ一般的な法則・原理を捉える
  - ◇ 実証可能な仮説を提示する
- 2 種類の問題:
  - ◇ **規範的** [Normative] 問題: 望ましい状況の解明 (何がなされるべきか)
  - ◇ **事実解明的** [Positive] 問題: 実際に起こることの予測 (何が起こるのか)
- 分析上の二つのツール
  - ◇ **最適化**: 意思決定主体は (数値で表現可能な) 目的を持ち、それを最適にするように意思決定する
  - ◇ **均衡分析**: 誰もその意思決定を変更する誘因がない状況 (均衡 [Equilibrium]) が結果として実現する
- 変数の区別:
  - ◇ **内生** [Endogenous] 変数: 選択される変数
  - ◇ **外生** [Exogenous] 変数: 固定された変数 (パラメーター)
- **比較静学** [Comparative statics]: 外生変数の変化は**内生変数の変化を通じて**結果の変化を引き起こす
  - ◇ 例: 所得税の引き上げは税収の増加につながるのか?
    - ∗ 一単位の所得あたりの収入は増加する (直接効果)
    - ∗ 労働者がそれに伴い労働時間を減らして所得を減らすと、課税できる所得が減る (間接効果)

0.2.3 経済分析の流れ

- **数理的**分析
  - ◇ ロジックの正しさを保証 (間違っているとしたら「仮定」か「結論」のどちらか)
- 定理の確立と解釈
  - ◇ 直観との整合性の確認
  - ◇ 検証可能な形への変換

第1章　最適化問題

- Jehle and Reny Ch. A1, A2

1.1　制約条件のない最適化

1.1.1　関数

- 集合 D と R に対して、任意の D の元に対して R の元を 1 つ対応させるルールを**関数** [Function] ないしは**写像** [Mapping] という
  - ◇ f: $D \to R$
  - ◇ 全ての $x \in D$ に対して
    - ∗ 関数: $f(x) \in R$ (必ず単一の元に対応)
    - ∗ **対応** [Correspondence]: $f(x) \subset R$ (複数の元に対応)
  - ◇ D: **定義域** [Domain]、 R: **値域** [Range]
- 以下、$f(\mathbf{x})$ を $D \subset \mathbb{R}^n$、$R \subset \mathbb{R}$ の**実数値関数**とする

1.1.2　局所最適と大域最適

- $B_\varepsilon(\mathbf{x}^0) \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid ||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}|| < \varepsilon\}$ を ε-**近傍** [Neighbourhood] という

定義 . n 変数関数 $f(\mathbf{x})$ と $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ に対して、ある正の実数 $\varepsilon > 0$ が存在し全ての $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}^*) \cap D$ に対して $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}))$ であるとき、$f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ で**極大** [Local maximum] (**極小** [Local minimum]) であるという。

- 「制限された範囲」での最適値: **局所最適**

定義 . 多変数関数 $f(\mathbf{x})$ と $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ に対して、全ての $\mathbf{x} \in D$ に対して $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})$ ($f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$) であるとき、$f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ で**最大** [Global maximum] (**最小** [Global minimum]) であるという。

- 「全範囲」での最適値: **大域最適**
- 最大 (最小) $\Longrightarrow$ 極大 (極小)
- 内点解と端点解

定義． ある $\varepsilon > 0$ が存在し $B_\varepsilon(\mathbf{x}^*) \subset D$ である時、$\mathbf{x}^*$ は D での**内点** [Interior] であるという。

- 内点: 「厳密に定義域内」の点

定義． $\mathbf{x}^*$ が D の内点ではないとき、**端点** [Boundary] であるという。

- 端点: 「境界上」の点

1.1.3　1 階条件

- 内点で関数が最適化される時、**1 階条件** [First order condition] が満たされなくてはならない

定理． $f(\mathbf{x})$ を 1 階微分可能の n 変数関数とし、$\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ が内点の極値 (極大もしくは極小) であるとする。この時、以下が成り立つ。

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) \equiv \begin{bmatrix} \partial f(\mathbf{x}^*)/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f(\mathbf{x}^*)/\partial x_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

- $\nabla f(\mathbf{x})$: **勾配ベクトル** [Gradient vector]
- 内点の極値では必ず**傾きが 0**
- 1 階条件は**必要条件**: 1 階条件が満たされても内点の極値とは限らない
  - ◇ 例: $f(x_1) = x_1^3$

1.1.4　2 階条件

- 1 階条件が満たされている時、それは極大なのか極小なのか？
  $\to$ 関数の**形状**による

定義． $f(\mathbf{x})$ を n 変数関数 (定義域 D) とする。

- 全ての $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in D$ と $t \in [0,1]$ において $f(t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2) \geq tf(\mathbf{x}^1) + (1-t)f(\mathbf{x}^2)$ の時、f を**凹関数** [Concave] という。
- 全ての D 上の点 $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$ と $t \in (0,1)$ において $f(t\mathbf{x}^1+(1-t)\mathbf{x}^2) > tf(\mathbf{x}^1)+(1-t)f(\mathbf{x}^2)$ の時、f を**厳密な凹関数** [Strictly concave] という。
- 全ての $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in D$ と $t \in [0,1]$ において $f(t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2) \leq tf(\mathbf{x}^1) + (1-t)f(\mathbf{x}^2)$ の時、f を**凸関数** [Convex] という。
- 全ての D 上の点 $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$ と $t \in (0,1)$ において $f(t\mathbf{x}^1+(1-t)\mathbf{x}^2) < tf(\mathbf{x}^1)+(1-t)f(\mathbf{x}^2)$ の時、f を**厳密な凸関数** [Strictly convex] という。

- 厳密な凹 (凸) 関数 $\Longrightarrow$ 凹 (凸) 関数
- $f(\mathbf{x})$ が凹 (凸) 関数 $\Longrightarrow -f(\mathbf{x})$ は凸 (凹) 関数 [演習]
- 関数の形状が下に凸 (凸関数) か上に凸 (凹関数)
- 関数の凹凸によって一階条件が (大域) 最適の十分性を保証

定理． $f(\mathbf{x})$ を 1 階微分可能の n 変数関数で (厳密な) 凹関数であり、$\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ が定義域の内点であるとする。この時、次の同値関係が成り立つ。

$$\mathbf{x}^* \text{が } f(\mathbf{x}) \text{ を (唯一) 最大化} \iff \nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

定理． $f(\mathbf{x})$ を 1 階微分可能の n 変数関数で (厳密な) 凸関数であり、$\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ が定義域の内点であるとする。この時、次の同値関係が成り立つ。

$$\mathbf{x}^* \text{が } f(\mathbf{x}) \text{ を (唯一) 最小化} \iff \nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

- 関数が 2 階微分可能である場合は、凹凸は **2 階微分**によって判定できる
  - ◇ 1 変数の場合: $f(x_1)$ が凹 (凸) 関数 $\iff$ 全ての x_1 で $f''(x_1) \leq (\geq) 0$
  - ◇ n 変数の場合にも一般化された条件があるが、少し複雑
    (補足ノートを参照)
  - ◇ 2 階微分による凹凸の判定方法は **2 階条件** [Second order condition] と呼ばれる
- より一般化された概念: **準凹 (凸)** 関数 [Quasi concavity/convexity]

定義． $f(\mathbf{x})$ を n 変数関数 (定義域 D) とする。

- 全ての $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in D$ と $t \in [0,1]$ において $f(t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2) \geq \min\{f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)\}$ の時、f を**準凹関数** [Quasiconcave] という。
- 全ての D 上の点 $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$ と $t \in (0,1)$ において $f(t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2) > \min\{f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)\}$ の時、f を**厳密な準凹関数** [Strictly quasiconcave] という。
- 全ての $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in D$ と $t \in [0,1]$ において $f(t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2) \leq \max\{f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)\}$ の時、f を**準凸関数** [Quasiconvex] という。
- 全ての D 上の点 $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$ と $t \in (0,1)$ において $f(t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2) < \max\{f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)\}$ の時、f を**厳密な準凸関数** [Strictly quasiconvex] という。

- (厳密な) 凹関数/凸関数 $\Longrightarrow$ (厳密な) 準凹関数/準凸関数 [演習]
- 厳密な準凹/準凸によって一階条件が (大域) 最適の十分性を保証

定理． $f(\mathbf{x})$ を 1 階微分可能の n 変数関数で**厳密な準凹関数**であり、$\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ が定義域の内点であるとする。この時、次の同値関係が成り立つ。

$$\mathbf{x}^* \text{で } f(\mathbf{x}) \text{ を唯一最大化} \iff \nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

定理． $f(\mathbf{x})$ を 1 階微分可能の n 変数関数で**厳密な準凸関数**であり、$\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ が定義域の内点であるとする。この時、次の同値関係が成り立つ。

$$\mathbf{x}^* \text{で } f(\mathbf{x}) \text{ を唯一最小化} \iff \nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

- (**厳密ではない**) 準凹/凸関数では、1 階条件は必ずしも最大/最小を保証するとは限らない

1.2 制約条件付き最適化

1.2.1 定式化

- 制約条件付き最適化問題:

$$\max_{\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \text{ subject to } g^j(\mathbf{x}) \geq 0, j = 1, \ldots, m$$

  ◇ $f(\mathbf{x})$: 目的関数 [Objective function]

  ◇ $\mathbf{x}$: 選択変数

  ◇ $g^j(\mathbf{x}) \geq 0$: 制約式 [Constraint]

    * $\{\mathbf{x} \mid g^j(\mathbf{x}) \geq 0, j = 1, \ldots, m\}$: 実行可能集合 [Feasible set]

- 最小化問題: $\max -f(\mathbf{x})$ と考えればよい

- $g^j(\mathbf{x}) = 0$ の時、制約は**有効である** [Binding] という
- 以下では f と g^j は連続微分可能とする

1.2.2 キューン・タッカー条件

- 最適化問題の解のための必要条件は以下の**キューン・タッカー** [Kuhn-Tucker] 条件 (以下 KT 条件) によって特徴付けることが出来る

定理 (Kuhn and Tucker). $\mathbf{x}^*$ が制約条件付き最適化問題の解であり、(一般性を失いことなく) ある $K \in \{0, 1, \ldots, m\}$ が存在して

$$g^j(\mathbf{x}^*) = 0 \text{ for } j = 1, \ldots, K, \quad g^j(\mathbf{x}^*) > 0 \text{ for } j = K+1, \ldots, m$$

とする。さらに勾配ベクトル $[\nabla g^1(\mathbf{x}^*), \ldots, \nabla g^K(\mathbf{x}^*)]$ は一次独立であるとする。この時、ベクトル $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^m$ が一意に存在し、以下を満たす。

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \frac{\partial g^j}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0, \; i = 1, \ldots n,$$
$$g^j(\mathbf{x}^*) \geq 0, \; \lambda_j^* g^j(\mathbf{x}^*) = 0, \; j = 1, \ldots, m.$$

- 一次独立: 補足ノート (もしくは線形代数の教科書) を参照
  - ◇ (この講義では) 基本的に満たされていると考えて差し支えない
- **ラグランジュ関数** [Lagrangian] を以下のように定義する:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) \equiv f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g^j(\mathbf{x})$$

- KT の 1 階条件は $\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*)/\partial x_i = 0$: **ラグランジュ関数の 1 階条件**と同値
- $\lambda_j^* g^j(\mathbf{x}^*) = 0$: **相補性** [Complementary slackness] 条件
  - ◇ $j \geq K+1$ に対して $g^j(\mathbf{x}^*) > 0 \to \lambda_j^* = 0$
  - ◇ 1 階条件: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^K \lambda_j^* \dfrac{\partial g^j}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0$
    有効でない制約は無視できる

1.2.3 図解

- 選択変数 2 つ、制約 2 つの問題を考える:

$$\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) \text{ subject to } g^j(x_1, x_2) \geq 0, j = 1, 2$$

- $f(x_1, x_2) = y^0$ となるような曲線を (x_1, x_2) 平面に描く

- この関数が $x_2 = v(x_1)$ の形 (陽関数) で表現できるとすると、任意の x_1 に対して $f(x_1, v(x_1)) = y^0$ となるので、合成関数の微分より

$$\frac{df}{dx_1}(x_1, v(x_1)) = f_1(x_1, v(x_1)) + f_2(x_1, v(x_1))v'(x_1) = 0$$
$$\iff [1, v'(x_1)] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = 0$$

- 内積が 0 $\iff$ 2 つのベクトルは垂直に交わる
  - ◇ $[1, v'(x_1)]$: 曲線の傾きを表すベクトル
  - ◇ $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$: 勾配ベクトルは曲線の傾きと垂直に交わる
- 同様に、$g^j(x_1, x_2) = 0$ の曲線の傾きを表すベクトルと勾配ベクトル $\begin{bmatrix} g_1^j \\ g_2^j \end{bmatrix}$ は垂直に交わる
- KT 条件を書き下すと:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = -\lambda_1^* \begin{bmatrix} g_1^1 \\ g_2^1 \end{bmatrix} - \lambda_2^* \begin{bmatrix} g_1^2 \\ g_2^2 \end{bmatrix}$$

- $g^1(x_1^*, x_2^*) = 0$ かつ $g^2(x_1^*, x_2^*) > 0(\to \lambda_2^* = 0)$ の場合:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = -\lambda_1^* \begin{bmatrix} g_1^1 \\ g_2^1 \end{bmatrix}$$

  - ◇ 2 つの勾配ベクトルは同じ方向を向いている
  - ◇ (x_1^*, x_2^*) で接している
- $g^1(x_1^*, x_2^*) = g^2(x_1^*, x_2^*) = 0$ (かつ $\lambda_1^*, \lambda_2^* > 0$) の場合:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = -\lambda_1^* \begin{bmatrix} g_1^1 \\ g_2^1 \end{bmatrix} - \lambda_2^* \begin{bmatrix} g_1^2 \\ g_2^2 \end{bmatrix}$$

  - ◇ 勾配ベクトル $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} g_1^1 \\ g_2^1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} g_1^2 \\ g_2^2 \end{bmatrix}$ の一次結合と同じ方向を向く

1.2.4 必要性と十分性

- KT 条件は制約条件付き最大 (もしくは最小) の必要条件
  - ◇ KT 条件の方程式を解けば解の候補は出てくる
  - ◇ 解は KT 条件を満たすので、**KT 条件から解の特長について何か言えるかもしれない**
- 追加的な条件の下では KT 条件は制約条件付き最大の十分条件になる

定理． $f(\mathbf{x})$ を微分可能な**凹関数**、$j = 1, \ldots, m$ に対して $g^j(\mathbf{x})$ を微分可能な**準凹関数**とする。さらに $\mathbf{x}^*$ は KT 条件 (と一次独立条件) を満たすとする。この時 $\mathbf{x}^*$ は制約条件付き最大化問題の解である。

第2章　消費者理論

- Jehle and Reny Ch. 1, 4
- Varian Ch. 10
- Kreps Ch. 12

2.1　消費者問題

2.1.1　予算集合

- ある消費者が n 種類の財の購入を検討している
  - ◇ 財 $i(i = 1, \ldots, n)$ の市場価格が $p_i(> 0)$ で、消費者にとって**外生的に**与えられているとする (**価格受容者** [Price taker])
  - ◇ $\mathbf{p} \equiv (p_1, \ldots, p_n)$: 価格ベクトル
  - ◇ この消費者は $y \geq 0$ 単位の所得を持っているとする
- 財 i を x_i 単位購入したとき ($\mathbf{x} \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ を消費ベクトルとすると)、支出は

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$$

- この消費者の**予算集合** [Budget set](購入可能な財の組の集合):

$$B(\mathbf{p}, y) \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y\}$$

2.1.2　選好

- 消費者は消費の組み合わせについて**選好** [Preference] を持っている
  - ◇ $\mathbf{x}^0$ と $\mathbf{x}^1$ を比べると以下の可能性がある
    - ∗ $\mathbf{x}^0$ の方が好き
    - ∗ $\mathbf{x}^1$ の方が好き
    - ∗ どちらも同じくらい好き (**無差別** [Indifferent])
- ここでは消費者の選好は以下の**効用関数** [Utility function] によって表現できるとする

定義． 消費者は効用関数 $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ を持ち、以下のような意味を持つ: 全ての $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in X$ に対して

$$u(\mathbf{x}^0) \geq u(\mathbf{x}^1) \iff \mathbf{x}^0 \text{は} \mathbf{x}^1 \text{より好む、もしくは無差別}$$

- 数字が大きいほうが好ましい消費ベクトル
- 疑問: このような効用関数によって消費者の選好を表現する妥当性は？
- 答え: 消費者の選好がそれなりに自然な性質 (数学的に言うと**公理**) を満たしているならば、選好を包括的に表現できる
  - ◇ 増加 ($= \mathbf{x}^0 >> \mathbf{x}^1$ ならば $u(\mathbf{x}^0) > u(\mathbf{x}^1)$) かつ
  - ◇ 準凹

  の効用関数 $u(\cdot)$ が存在することが知られている (補足ノート参照)
- 注意: 効用の値自体は何も意味を持たない

定理． $u(\mathbf{x})$ がある消費者の効用関数であり、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を増加関数であるとする。この時、合成関数 $f(u(\mathbf{x}))$ はその消費者の選好を表現している。

- 例: チャーリーの効用関数が $u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ であるとする、
  - ◇ チャーリーが $(x_1, x_2) = (2, 2)$ を選んだ時、$(x_1, x_2) = (1, 1)$ を選んだときよりも**2倍うれしいわけではない**
  - ◇ 効用関数が $v(x_1, x_2) = 2(x_1 + 2x_2)$ のルーシーはチャーリーよりも**2倍うれしさを感じるわけではない**
  - ◇ ただし、ルーシーはチャーリーと**全く同じ選好を持つ**
- 効用水準の順序だけが意味を持つ: (**序数的効用** [Ordinal preference])

2.2 効用最大化問題

2.2.1 効用最大化問題

- 消費者は予算制約の下で効用を最大にする**効用最大化問題** [Utility-maximization problem, UMP]

  $$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\mathbf{x}) \text{ subject to } \mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, y)$$

  の解を選択する
- UMP の解 $\mathbf{x}^*$ は (一意に) 存在するのか？

定理． $u(\mathbf{x})$ を連続かつ厳密な準凹関数とする。この時、UMP の解 $\mathbf{x}^*$ は一意に存在する。さらに解 $\mathbf{x}^*$ は $\mathbf{p}$ と y について連続である。

- 以下、$u(\mathbf{x})$ を連続かつ厳密な準凹関数と仮定し、UMP の解を $\mathbf{x}(\mathbf{p},y) \equiv (x_1(\mathbf{p},y),\ldots,x_n(\mathbf{p},y))$ と表記する

2.2.2 需要関数

- UMP の解 $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{p},y)$ を (マーシャル [Marshallian] の、もしくはワルラス [Walrasian] の) 需要関数 [Demand function] と呼ぶ
- $u(\mathbf{x})$ が微分可能な場合
  - ◇ ラグランジュ方程式: $\mathcal{L}(\mathbf{x},\lambda) \equiv u(\mathbf{x}) + \lambda(y - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})$
  - ◇ KT 条件より:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) - \lambda^* p_i &= 0, \forall i = 1,\ldots,n \\
y - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^* &\geq 0, \\
\lambda^*(y - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^*) &= 0
\end{aligned}$$

- 予算制約は有効であることが確認できる [演習]: $y - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^* = 0$
- (u が増加関数ならば)$\lambda^* > 0$ なので [演習]

$$\lambda^* = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_i}{p_i} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_j}{p_j} \iff \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_i}{\partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

- $\dfrac{\partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_i}{\partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_j}$: 限界代替率 [Marginal rate of substitute, MRS]
  - ◇ $n = 2$ の場合、限界代替率は無差別曲線の傾きを表す
  - ◇ 効用関数が厳密な準凹関数の場合、逓減する
- $\dfrac{p_i}{p_j}$: 相対価格
- $n = 2$ ならば解で無差別曲線と予算制約式が接する
- 追加的条件の下では需要関数は $\mathbf{x}(\mathbf{p},y)$ は微分可能 (Theorem 1.5 in JR)

2.2.3 間接効用

- $v(\mathbf{p},y) \equiv u(\mathbf{x}(\mathbf{p},y))$ を間接効用関数 [Indirect utility function] と呼ぶ

定理． $u(\mathbf{x})$ を連続かつ増加関数とする。この時 $v(\mathbf{p},y)$ は

1. $(\mathbf{p},y)$ に関して 0 次同次;
2. y に関して非減少関数 ($y^0 \geq y^1$ ならば $v(\mathbf{p},y^0) \geq v(\mathbf{p},y^1)$);
3. $\mathbf{p}$ に関して非増加関数 ($\mathbf{p}^0 \geq \mathbf{p}^1$ ならば $v(\mathbf{p}^0,y) \leq v(\mathbf{p}^1,y)$) である。

定義． 関数 $f(\mathbf{x})$ が全ての $t(>0)$ に対して $f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x})$ を満たす時、**k 次同次** [Homogeneous of degree k] であるという。

- 0 次同次: $v(t\mathbf{p},ty) = v(\mathbf{p},y)$
  - ◇ 同じ割合での $(\mathbf{p},y)$ の変化は間接効用に影響しない
  - ◇ $(t\mathbf{p},ty)$ の時の予算制約:

$$\mathbf{x} \in B(t\mathbf{p},ty) \iff t\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \leq ty \iff \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \leq y \iff \mathbf{x} \in B(\mathbf{p},y),$$

    $\to$ $(\mathbf{p},y)$ の時の予算制約と全く同じ
  - ◇ なので、消費者は実質的に同じ UMP に直面する: $\mathbf{x}(t\mathbf{p},ty) = \mathbf{x}(\mathbf{p},y)$
    - $*$ 需要関数も 0 次同次

    $\to v(t\mathbf{p},ty) = u(\mathbf{x}(t\mathbf{p},ty)) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p},y)) = v(\mathbf{p},y)$
- 含意: 「実質値 (相対値) だけが意味を持つ」
  - ◇ (この世界では) 貨幣的なインフレーション (所得と価格の同じ割合での変化) は消費者の選択の影響を与えない
  - ◇ (例えば) 金融政策を議論しようとする場合は追加的な要因を加える必要がある
- 他の性質は**予算集合の拡張/縮小**という性質によって確認できる
- 今、$\mathbf{p}^1 \geq \mathbf{p}^0 \iff \mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^0 \geq \mathbf{0}$ とし、$\mathbf{x}^j$ が価格 $\mathbf{p} = \mathbf{p}^j$ での UMP の解とする
  - ◇ $\mathbf{x}^1 \geq 0$ であるので $(\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^0)\cdot\mathbf{x}^1 \geq 0 \iff \mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^1 \geq \mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^1$
  - ◇ $\mathbf{x}^1$ は $\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^1 \leq y$ を満たすので $\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{x}^1 \leq \mathbf{p}^1\cdot\mathbf{x}^1 \leq y$
    $\to \mathbf{x}^1$ は $\mathbf{p} = \mathbf{p}^0$ の時も購入可能 ($\mathbf{x}^1 \in B(\mathbf{p}^0,y)$).
  - ◇ $\mathbf{p} = \mathbf{p}^0$ の時、$\mathbf{x}^1$ は購入可能であるにもかかわらず実際は $\mathbf{x}^0$ が選ばれているので、$v(\mathbf{p}^0,y) = u(\mathbf{x}^0) \geq u(\mathbf{x}^1) = v(\mathbf{p}^1,y)$.
- 「選択可能だが実際には選ばれていない」という考え方を**顕示選好** [Revealed preference] という
  - ◇ 顕示選好によって v が y について非減少関数であることも証明できる [演習]
- 微分可能性を仮定すると、**包絡線定理** [Envelope theorem] によっても確認できる

定理． $f(\mathbf{x},a), g^1(\mathbf{x},a),\ldots,g^m(\mathbf{x},a)$ を連続微分可能な関数とし、以下の制約条件付き最適化問題

$$\max_{\mathbf{x}\in D\subset\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},a) \text{ subject to } g^j(\mathbf{x},a)\geq 0, j=1,\ldots,m$$

において、解 $\mathbf{x}^*(a)$ が一意に存在し、$(\mathbf{x}^*(a),\lambda^*(a))$ は KT 条件を満たし、$j=1,\ldots,K$ では $g^j(\mathbf{x}^*(a),a)=0$、$j=K+1,\ldots,m$ では $g^j(\mathbf{x}^*(a),a)>0$ とする。最後に $f^*(a)\equiv f(\mathbf{x}^*(a),a)$ と定義する。この時以下が成り立つ。

$$\frac{df^*}{da}(a)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a}(\mathbf{x}^*(a),\lambda^*(a),a)\equiv\frac{\partial f}{\partial a}(\mathbf{x}^*(a),a)+\sum_{j=1}^{K}\lambda_j^*(a)\frac{\partial g^j}{\partial a}(\mathbf{x}^*(a),a)$$

- 証明は合成関数の微分によって与えることが出来る (補足ノート参照)
- 包絡線定理の意味: 「間接効果の無効化」
  - ◇ 外生変数 (a) の変化は 2 つの効果を持つ:
    - ∗ 問題それ自体の変化 (つまり $f(x,a)$ と $g^j(x,a)$) [直接効果]
    - ∗ 選択 $\mathbf{x}^*(a)$ の変化 [間接効果]
  - ◇ 二つ目の間接効果は (個人の最適化問題では) 現れない
- 消費者にとって $\mathbf{p}$ と y は外生変数なので、包絡線定理より ($x_i^*(\mathbf{p},y)>0$ ならば)

$$\frac{\partial v}{\partial p_i}(\mathbf{p},y)=-\lambda^*x_i^*(\mathbf{p},y)<0,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{p},y)=\lambda^*>0.$$

  - ◇ 間接効用は $\mathbf{p}$ に関して**減少**、y に関して**増加**
  - ◇ λ^*: 所得の限界効用 (シャドープライス [Shadow price])
- 包絡線定理よりさらに**ロイの恒等式** [Roy's identity] が得られる:

$$x_i^*(\mathbf{p},y)=-\frac{-\lambda^*x_i^*(\mathbf{p},y)}{\lambda^*}=-\frac{\partial v(\mathbf{p},y)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p},y)/\partial y},$$

定理 (Roy). $v(\mathbf{p},y)$ は微分可能で $\partial v(\mathbf{p},y)/\partial y\neq 0$ であるとする。この時、次が成り立つ。

$$x_i^*(\mathbf{p},y)=-\frac{\partial v(\mathbf{p},y)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p},y)/\partial y}$$

2.3 支出最小化問題

2.3.1 支出最小化問題

- 与えられた価格の下で、消費者はある水準の効用を達成するためにどれくらい支出する必要があるのか？

- $\overline{u}$ をある効用水準とする
- **支出最小化問題** [Expenditure-minimization problem, EMP]:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n_+} \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \text{ subject to } u(\mathbf{x}) \geq \overline{u}$$

- EMP の解 $\mathbf{x}^h(\mathbf{p},\overline{u})$ を**補償需要関数** [Compensated demand function] (もしくは**ヒックス** [Hicksian] の需要関数) という
- $e(\mathbf{p},\overline{u}) \equiv \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^h(\mathbf{p},\overline{u})$: **支出関数** [Expenditure function]
- 需要関数同様、顕示選好の議論から次が成立する [演習]

定理． $u(\mathbf{x})$ を連続かつ増加関数であるとする。このとき $e(\mathbf{p},\overline{u})$ は

1. $\mathbf{p}$ に関して 1 次同次;
2. $\overline{u}$ と $\mathbf{p}$ に関して非減少である。

- $u(\mathbf{x})$ が微分可能ならば包絡線定理より (適用の仕方に注意)

$$\frac{\partial e}{\partial p_i}(\mathbf{p},\overline{u}) = x_i^h(\mathbf{p},y) > 0, \qquad \frac{\partial e}{\partial \overline{u}}(\mathbf{p},\overline{u}) = \lambda^* > 0.$$

- 前者は**シェファードの補題** [Shepahrd's lemma] として知られる

補題 (Shepahrd). $e(\mathbf{p},\overline{u})$ は微分可能で $\mathbf{p} >> 0$ とする。この時、

$$x_i^h(\mathbf{p},\overline{u}) = \frac{\partial e}{\partial p_i}(\mathbf{p},\overline{u})$$

2.3.2 双対性

- **双対性** [Duality]: UMP と EMP の関連性

定理． $u(\mathbf{x})$ を連続かつ増加関数とする。この時、全ての $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$、$y \geq 0$、$\overline{u}$ に対して以下が成り立つ。

$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p},y)) = y, \qquad v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p},\overline{u})) = \overline{u}$$

さらに、もし $u(\mathbf{x})$ が厳密な準凹関数であるならば以下が成り立つ。

$$\mathbf{x}(\mathbf{p},y) = \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, v(\mathbf{p},y)), \qquad \mathbf{x}^h(\mathbf{p},\overline{u}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p},\overline{u}))$$

- 証明は JR (pp. 42, 45-46) を参照

- 消費者が価格 $\mathbf{p}$ に直面している時、
  - ◇ 所得 y の下で効用最大化を行うと、効用水準 $v(\mathbf{p}, y)$ の下での EMP の解と同じものを選択する
  - ◇ 効用水準 $\overline{u}$ の下で支出最小化を行うと、所得 $e(\mathbf{p}, \overline{u})$ の下での UMP の解と同じものを選択する

2.3.3 スルツキー方程式

- 消費者は価格変化にどのように反応するのか？
- 間接効用を $u^* = v(\mathbf{p}, y)$ とすると、双対性より任意の u^* と $\mathbf{p}$ に関して
  - ◇ $y = e(\mathbf{p}, u^*)$
  - ◇ $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u^*)) = \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, u^*)$
- (微分可能性を仮定して) 補償需要関数を微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j}(\mathbf{p}, u^*) &= \frac{dx_i}{dp_j}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u^*)) \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial p_j}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u^*)) + \frac{\partial x_i}{\partial y}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u^*))\frac{\partial e}{\partial p_j}(\mathbf{p}, u^*) \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial p_j}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u^*)) + \frac{\partial x_i}{\partial y}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u^*))x_j^h(\mathbf{p}, u^*).\end{aligned}$$

- $y = e(\mathbf{p}, u^*)$ と $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y) = \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, u^*)$ を代入し整理すると以下のスルツキー方程式 [Slutsky equation] が導出される

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(\mathbf{p}, y) = \frac{\partial x_i^h}{\partial p_j}(\mathbf{p}, u^*) - x_j(\mathbf{p}, y)\frac{\partial x_i}{\partial y}(\mathbf{p}, y).$$

  - ◇ $\dfrac{\partial x_i^h}{\partial p_j}(\mathbf{p}, u^*)$: 代替効果 [Substitution effect]
    - ∗ u^* が達成される所得水準を (仮想的に) 保った状態でどれくらい消費が変化するか
  - ◇ $-x_j(\mathbf{p}, y)\dfrac{\partial x_i}{\partial y}(\mathbf{p}, y)$: 所得効果 [Income effect]
    - ∗ (仮想的な) 所得補償を取り除いた時の効果
- $i = j$ の時、$\partial x_i^h / \partial p_i \leq 0$ (補足ノート参照)

定義． $x_i(\mathbf{p}, y)$ が y に関して

- 増加関数の時、財 i は正常財 [Normal] といい;
- 減少関数の時、財 i は下級財 [Inferior] という。

- p_i の x_i への効果:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i}(\mathbf{p}, y) \quad = \quad \underbrace{\frac{\partial x_i^h}{\partial p_i}(\mathbf{p}, u^*)}_{-} - \underbrace{x_i(\mathbf{p}, y)}_{+} \frac{\partial x_i}{\partial y}(\mathbf{p}, y).$$

- 正常財 $\to \partial x_i / \partial p_i < 0$ (**需要法則** [The Law of Demand])
- 所得効果が大きく負に働く場合 ($\partial x_i / \partial y < 0$ かつ $|\partial x_i / \partial y|$ が大きい)
$\to \partial x_i / \partial p_i > 0$: **ギッフェン財** [Giffen good]
  - ◇ 需要法則を満たさない
  - ◇ ただ、理論上はありえるが実際にはほとんど観察されない

2.4 厚生の定量化

2.4.1 支出変分

- 価格変化の効果を定量的に評価することは出来るのか？
- 間接効用から分かること: (所得を y と固定して)

$$v(\mathbf{p}^1, y) - v(\mathbf{p}^0, y) > 0$$

$\iff$ 消費者にとって $\mathbf{p}^1$ の方が $\mathbf{p}^0$ よりも望ましい

  - ◇ 価格変化の効果について**定量的には何も評価していない**

- しかし**支出関数**を用いれば定量的な評価が可能かもしれない
- 価格 $\mathbf{p}^0$ が $\mathbf{p}^1$ に変化する、というシナリオを考える
- 二つの方法:
  1. **補償変分** [Compensating variation, CV]: 新しい価格 $\mathbf{p}^1$ の下で以前の ($\mathbf{p}^0$ の下での) 効用水準を達成するために変化させる所得

$$v(\mathbf{p}^0, y) = v(\mathbf{p}^1, y + CV)$$

  2. **等価変分** [Equivalent variation, EV]: 以前の価格 $\mathbf{p}^0$ の下で変化後の状態の (新しい価格 $\mathbf{p}^1$ の下での) 効用水準を達成するために変化させる所得

$$v(\mathbf{p}^1, y) = v(\mathbf{p}^0, y - EV)$$

- 双対性より:
  - ◇ $\overline{u}^0 \equiv v(\mathbf{p}^0, y) = v(\mathbf{p}^1, y + CV)$ とすると

$$\begin{aligned} y = e(\mathbf{p}^0, \overline{u}^0), y + CV = e(\mathbf{p}^1, \overline{u}^0) \\ \Longrightarrow CV = e(\mathbf{p}^1, \overline{u}^0) - e(\mathbf{p}^0, \overline{u}^0) \end{aligned}$$

◇ 同様に $\overline{u}^1 \equiv v(\mathbf{p}^1, y) = v(\mathbf{p}^0, y - EV)$ とすると

$$EV = e(\mathbf{p}^1, \overline{u}^1) - e(\mathbf{p}^0, \overline{u}^1)$$

- CV: **変化前**の効用水準における支出額の変化

  ◇ 価格変化が実行された後の個人を補償するのに有用

- EV: **変化後**の効用水準における支出額の変化

  ◇ 価格変化による効果を事前に評価するのに有用

- 財 i の価格変化を考える:
  $\mathbf{p}^0 = (p_0^0, \ldots, p_n^0)$、$\mathbf{p}^1 = (p_1^0, \ldots, p_{i-1}^0, p_i^1, p_{i+1}^0, \ldots, p_n^0)$

- シェファードの補題より $\dfrac{\partial e}{\partial p_i}(\mathbf{p}, \overline{u}) = x_i^h(\mathbf{p}, \overline{u})$ なので

$$CV = e(\mathbf{p}^1, \overline{u}^0) - e(\mathbf{p}^0, \overline{u}^0) = \int_{p_i^0}^{p_i^1} \frac{\partial e(\mathbf{p}, \overline{u}^0)}{\partial p_i} dp_i = \int_{p_i^0}^{p_i^1} x_i^h(\mathbf{p}, \overline{u}^0) dp_i$$

  積分: 曲線の下方部分の面積

- 同様に

$$EV = \int_{p_i^0}^{p_i^1} x_i^h(\mathbf{p}, \overline{u}^1) dp_i$$

2.4.2 古典的消費者余剰

- **消費者余剰** [Consumer surplus]: 「支払い意思額」に基づいた古典的な定量的厚生評価指標

  ◇ **支払い意思額** [Willingness to pay]: 金銭額で評価された効用水準

- **消費者余剰** (の変分) は以下のように定義される:

$$\Delta CS = \int_{p_i^0}^{p_i^1} x_i(\mathbf{p}, y) dp_i,$$

- スルツキー方程式より:

$$\frac{\partial x_i^h}{\partial p_i}(\mathbf{p}, \overline{u}) = \frac{\partial x_i}{\partial p_i}(\mathbf{p}, y) + \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial y}(\mathbf{p}, y)}_{\text{所得効果}} \cdot x_i(\mathbf{p}, y)$$

- よって

$$\frac{\partial x_i^h}{\partial p_i}(\mathbf{p}, \overline{u}) \gtreqless \frac{\partial x_i}{\partial p_i}(\mathbf{p}, y) \iff \frac{\partial x_i}{\partial y}(\mathbf{p}, y) \gtreqless 0$$

  ◇ **所得効果 (正常財か下級財か)** によって需要曲線と補償需要曲線の位置関係が決まる

- - ∗ 正常財 (下級財) $\iff$ 補償需要曲線の傾きは需要曲線よりも緩やか (きつい)
    - ∗ (軸のタテヨコに注意)

- 財の価格が上昇する状況 ($p_i^0 < p_i^1$) において
    - ◇ $\partial x_i/\partial y > 0$ ならば $CV > \Delta CS > EV$
    - ◇ $\partial x_i/\partial y < 0$ ならば $CV < \Delta CS < EV$
    - ◇ $\partial x_i/\partial y = 0$ ならば $CV = \Delta CS = EV$

- 所得効果が非常に小さい状況では、消費者余剰は序数的効用しか持たない消費者であっても厚生評価の (近似的) 指標となる

第3章　一般均衡

- Jehle and Reny Ch. 5
- Varian Ch. 17

3.1　市場経済

- 市場経済: 取引相手を自由に選び、価格を取り決めて (2 者が) 取引を行う場所 (制度)
- 市場価格は市場での (買い手と売り手の) 取引を通じて決まっていくと考えるのが自然 (均衡価格)
  - ◇ 消費者理論では価格は外生的に所与
- 2 種類の市場均衡分析:
  - ◇ **部分均衡**: あるひとつの市場に焦点を絞る
  - ◇ **一般均衡**:　複数の市場を同時に考慮する
- 一般均衡理論の含意: もし**市場が「競争的」である**ならば市場メカニズムは**社会的に望ましい配分**を実現する
  - ◇ 「見えざる手」が望ましい均衡価格を導き、(様々な選好を持つ) 市場参加者の集まりの配分を改善する

3.2　交換経済

- n 種類の財が存在
- $\mathcal{I} = \{1, \ldots, I\}$: 消費者の集合
- 消費者 i は
  - ◇ **初期保有** [Initial endowment]$\mathbf{e}^i \in \mathbb{R}^n_+$ を所持
    - $*$ 財 j を e^i_j 単位保有
  - ◇ 効用関数: $u^i(\mathbf{x})$
  - ◇ 以下、効用関数に少しだけ強い仮定を置く:

仮定． それぞれの $i \in \mathcal{I}$ について、u^i は連続、厳密に準凹、かつ厳密に増加: $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ ならば $u^i(\mathbf{x}) > u^i(\mathbf{y})$。

- 市場が **(完全) 競争的**であるとは以下の状態を意味することとする:
  - ◇ 市場参加者が**非常に多い**;
  - ◇ 取引相手を探すのに (広義に) **費用**がかからない;
  - ◇ 財の質に関して**情報が対称的**
- 競争的市場では市場参加者は**価格需要者**としてふるまう
  - ◇ 例え価格を変えて取引が出来るとしても、むしろ市場価格に従って取引を行う方が各市場参加者にとって望ましい
    - ∗ 売り手は高い値段で取引しようとしても売れない
    - ∗ 買い手は低い値段で取引しようとしても買えない
- しかし**価格は市場において変わり得る**: 市場価格は各市場参加者の効用最大化行動と整合的になるように調整される
- 以下 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ を市場価格 (のベクトル) とする

3.3 需要行動と競争均衡

- 各消費者は (文字通りの) 所得は持たないと仮定するが、**初期保有を売る**ことで「所得」を確保できる
- 「所得」: 初期保有を全て売却した時の総額は

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i$$

- 消費者 i の効用最大化問題:

$$\max_{\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^n_+} u^i(\mathbf{x}^i) \text{ subject to } \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^i \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i$$

- 需要関数: $\mathbf{x}^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i)$
  - ◇ 効用関数の仮定により UMP の解は**一意**でかつ $\mathbf{p}$ に関して**連続**
  - ◇ $\mathbf{x}^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i) = \mathbf{x}^i(\lambda\mathbf{p}, \lambda\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i)$: $\mathbf{p}$ に関して 0 次同次
- 市場全体の需要 (および供給) は以下の **(集計) 超過需要関数** [(Aggregate) excess demand] で表現できる

$$z_k(\mathbf{p}) \equiv \sum_{i \in \mathcal{I}} x^i_k(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i) - \sum_{i \in \mathcal{I}} e^i_k.$$

◇ $z_k(\mathbf{p}) > 0$: 超過需要; $z_k(\mathbf{p}) < 0$: 超過供給

◇ 以下 $\mathbf{z}(\mathbf{p}) \equiv (z_1(\mathbf{p}), \ldots, z_n(\mathbf{p}))$ とする

- 均衡において総消費 (需要) と総資源 (供給) は等しい
  $\iff$ 超過需要がゼロ

定義 . $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$ を満たす価格ベクトル $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^n_{++}$ を**競争均衡** (もしくは**ワルラス均衡**)[Walrasian eqilibrium] という。

- 競争均衡は存在するのか？望ましいのか？

- 超過需要関数は以下の**ワルラス法則** [Walras' law] を満たす

定理 . 任意の $\mathbf{p} >> 0$ に対して $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$ が成り立つ。

- 証明:

  ◇ 各個人の需要関数は各個人の予算制約を (等号で) 満たすので

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i \iff \sum_{k=1}^{n} p_k [x_k^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i) - e_k^i] = 0$$

  ◇ 各個人で集計すると

$$\begin{aligned}(0 =) \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k=1}^{n} p_k [x_k^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i) - e_k^i] &= \sum_{k=1}^{n} p_k \left[\sum_{i \in \mathcal{I}} x_k^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i) - \sum_{i \in \mathcal{I}} e_k^i \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} p_k z_k(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p})\end{aligned}$$

- ワルラス法則は (均衡価格だけでなく) **任意の** $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$ で $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$ が成り立つことに注意

  ◇ ある市場で超過需要があれば必ず別の市場で超過供給が起こる

  ◇ $n-1$ 個の市場で需給が一致すれば、残りの市場の需給も一致する

- また、超過需要関数は 0 次同次

定理 . 任意の $\mathbf{p} >> 0$ と $t > 0$ に対して $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \mathbf{z}(t\mathbf{p})$ が成り立つ。

- ある財との**相対価格**だけが配分に影響を与える: $\mathbf{p}^*$ が競争均衡ならば

  ◇ $(1, p_2^*/p_1^*, p_3^*/p_1^*, \ldots, p_n^*/p_1^*)$ も競争均衡

  ◇ $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ となるような競争均衡も存在

3.4 均衡の存在

- 価格が 0 の時の場合の需要について以下の仮定を置く

仮定． $p_k = 0$ となる $\mathbf{p} \geq 0$ の時、超過需要は $z_k(\mathbf{p}) > 0$ を満たす。

定理． 追加的な仮定の下では、$\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$ となるような $\mathbf{p}^* >> \mathbf{0}$ が存在する。

- 競争均衡の存在証明において、以下の (ブラウワーの) **不動点定理** [Brouwer's fixed point theorem] は有用

定理 (Brouwer). $X \subset \mathbb{R}^n$ を有界、閉、かつ凸集合とし $f : X \to X$ を連続の関数とする。この時、不動点 ($f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ となるような $\mathbf{x}^* \in X$) が存在する。

- $X = [0, 1]$ での例
- 証明 (概略)
  1. 以下 $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ となるような価格を考え、$\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ とする
  2. 次のような関数を考える
  $$g_k(\mathbf{p}) \equiv \frac{p_k + \max\{z_k(\mathbf{p}), 0\}}{\sum_{k'}[p_{k'} + \max\{z_{k'}(\mathbf{p}), 0\}]} = \frac{p_k + \max\{z_k(\mathbf{p}), 0\}}{1 + \sum_{k'} \max\{z_{k'}(\mathbf{p}), 0\}}$$
  3. ブラウワーの不動点定理より $g_k(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$ となるような $\mathbf{p}^*$ が必ず存在する
  4. $g_k(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$ から $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \leq \mathbf{0}$ を導出する
  5. 上記の「追加的な仮定」の下では $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \leq \mathbf{0}$ と $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$ は同値であることが分かる

3.5 効率性

- 消費者全体の消費ベクトル $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^I)$ を**配分** [Allocation] という

定義． 配分 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{nI}$ が全ての $i \in \mathcal{I}$ で $u^i(\mathbf{x}^i) \geq u^i(\mathbf{y}^i)$ が成り立ち、かつある i で不等号が厳密に成り立つとき、$\mathbf{x}$ は $\mathbf{y}$ を**パレート支配** [Pareto-dominate] するという。

- パレート支配する配分はパレート支配されている配分から**全ての消費者**の状況を (少なくとも弱い意味で) 改善する
- 配分 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{nI}$ が $\mathbf{x} \in F(\mathbf{e}) \equiv \{\mathbf{x} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{x}^i = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{e}^i\}$ を満たす時、**実行可能** [Feasible] という

定義． 配分 $\mathbf{x} \in F(\mathbf{e})$ をパレート支配する実行可能な配分が存在しない時、$\mathbf{x}$ は**パレート効率的** [Pareto-efficient] であるという。

- パレート効率的な配分では、誰かの状況を悪化させることなく他の人の状況を改善することはできない
- $\mathbf{x}^* \equiv \mathbf{x}(\mathbf{p}^*) \equiv (\mathbf{x}^1(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^1), \ldots, \mathbf{x}^I(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^I))$ を**競争均衡配分**という

定理 (厚生経済学の第 1 定理)**.** 競争均衡配分は全てパレート効率的である。

- 証明 (概略)
  - ◇ もしある競争均衡配分 $\mathbf{x}^*$ がパレート効率的でなければ、パレート支配する配分 $\mathbf{y} \in F(\mathbf{e})$ が存在する、つまり:
    - $*$ 全ての i で $u^i(\mathbf{y}^i) \geq u^i(\mathbf{x}^{i*})$; かつ
    - $*$ ある i で $u^i(\mathbf{y}^i) > u^i(\mathbf{x}^{i*})$
  - ◇ $\mathbf{x}^{i*}$ は価格 $\mathbf{p}^*$ での消費者 i の UMP の解なので:
    - $*$ もし $u^i(\mathbf{y}^i) > u^i(\mathbf{x}^{i*})$ ならば $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{y}^i > \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i$
      (さもなければ $\mathbf{x}^{i*}$ は選ばれない)
    - $*$ もし $u^i(\mathbf{y}^i) = u^i(\mathbf{x}^{i*})$ ならば $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{y}^i \geq \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i$
      (詳細は JR p. 214 Lemma 5.2)
  - ◇ 不等式を集計すると

$$\sum_i \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{y}^i > \sum_i \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i \iff \mathbf{p}^* \cdot \sum_i (\mathbf{y}^i - \mathbf{e}^i) > 0$$

    これは $\mathbf{y}$ が実行可能である ($\sum_i \mathbf{y}^i = \sum_i \mathbf{e}^i$) ことに矛盾する

- 2 消費者、2 財のケースは**エッジワースの箱** [Edgeworth box] によって描写できる
- エッジワースの箱を使うと任意のパレート効率的な配分 $\overline{\mathbf{x}}$ は $\mathbf{e} = \overline{\mathbf{x}}$ の時の競争均衡によって実現でき (そうに見え) る
- この結果を**厚生経済学の第 2 定理**という

定理 (厚生経済学の第 2 定理)**.** 任意のパレート効率的な配分 $\overline{\mathbf{x}}$ に対して、ある初期保有配分 $\mathbf{e}$ が存在し、競争均衡配分が $\overline{\mathbf{x}}$ となる。

- 含意: 初期保有を (一括税・補助金などの再配分を通じて) 適当に設定できるのであれば、**任意のパレート効率的な配分を競争的な市場を通じて実現することが出来る**
- 証明: $\mathbf{e} = \overline{\mathbf{x}}$ とする
  - ◇ 競争均衡での消費者 i の消費ベクトル $\mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i)$ は競争均衡価格 $\mathbf{p}^*$ での消費者 i の UMP の解なので

$$u^i(\mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i)) \geq u^i(\overline{\mathbf{x}}^i) \text{ かつ } \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i) \leq \mathbf{p}^* \cdot \overline{\mathbf{x}}^i$$

◇ ある i で $u^i(\mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i)) > u^i(\overline{\mathbf{x}}^i)$ だと $\overline{\mathbf{x}}$ はパレート効率的ではないので、全ての i で $u^i(\mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i)) = u^i(\overline{\mathbf{x}}^i)$

◇ $\mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i) \neq \overline{\mathbf{x}}^i$ とすると、異なる消費パターン $\tilde{\mathbf{x}}^i = [\mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i) + \overline{\mathbf{x}}^i]/2$ を考えてみると

- 厳密な準凹性より $u^i(\tilde{\mathbf{x}}^i) > u^i(\mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i))$;　かつ
- $\tilde{\mathbf{x}}^i$ は予算制約を満たす:
  $\mathbf{p}^* \cdot \tilde{\mathbf{x}}^i = \mathbf{p}^* \cdot [\mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i) + \overline{\mathbf{x}}^i]/2 \leq \mathbf{p}^* \cdot \overline{\mathbf{x}}^i/2 + \mathbf{p}^* \cdot \overline{\mathbf{x}}^i/2 = \mathbf{p}^* \cdot \overline{\mathbf{x}}$

のでで $\mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i)$ が UMP の解であることに矛盾する

第4章　不確実性とリスク態度

- Jehle and Reny Ch. 2
- Tadelis Ch. 2

4.1　不確実性

- 世の中には人々の手ではコントロールしきれない**リスク** [Risk] が多く存在する
  - ◇ 景気、企業の業績、株価、災害、健康状態、競馬、宝くじ…
- 人々はリスクに対してどのような選好を持っているか？
- **期待効用理論**: リスクに対する選好の記述の仕方
- リスクの類義語: **不確実性** [Uncertainty]
  - ◇ 厳密にはリスクと不確実性は違う概念として扱われる場合もあるが、ここではこの二つの単語は同義であるとする

4.2　期待効用理論

4.2.1　期待効用: 定義

定義 . 次のような性質を満たす増加関数 $u(\cdot)$ を**フォンノイマン-モルゲンシュテルン効用関数** [von Neumann-Morgenstern (vNM) utility function]、またはベルヌーイ [Bernoulli] 効用関数という:
確率 p_{ki} で金銭 m_{ki} を受け取れる 2 つのくじ $g_k(k=1,2$、$\sum_{i=1}^{N_k} p_{ki}=1)$ に直面し、

$$g_1\text{の方が }g_2\text{よりも好ましい、もしくは無差別}$$
$$\iff U(g_1) \equiv \sum_{i=1}^{N_1} p_{1i}u(m_{1i}) \geq \sum_{i=1}^{N_2} p_{2i}u(m_{2i}) \equiv U(g_2)$$

- (混乱がなければ)$u(\cdot)$ および $U(\cdot)$ を**期待効用** [Expected utility] ともいう
- 解釈: (金銭そのものではなく)u **で評価した期待値が高い選択肢** (くじ) を好む

4.2.2　例: 宝くじの購入

- ライナスは今、¥10000 持っていて、¥5000 払うと確率 p で ¥10000 当たる宝くじを買うかどうかを決める (確率 $1-p$ で何も当たらない)

- 宝くじを買った方がいい条件は

$$\underbrace{pu(15000)}_{\text{確率 } p \text{ で ¥15000}} \quad + \quad \underbrace{(1-p)u(5000)}_{\text{確率 } 1-p \text{ で ¥5000}} \quad \geq \quad \underbrace{u(10000)}_{\text{確率 } 1 \text{ で ¥10000}}$$

- 宝くじを買った時の金額そのものの期待値は $15000p + 5000(1-p)$ なので、$p \geq 1/2$ なら金額の期待値は宝くじを買った方が高い

- しかし、$p > 1/2$ であっても

$$pu(15000) + (1-p)u(5000) < u(10000)$$

であることが有りうる (宝くじを買わない方が良い)

4.2.3　選好と効用関数

- (消費者理論の時と同様) くじの選好がいくつかの公理を満たしているならば、選好を包括的に表現できる vNM 効用関数 $u(\cdot)$ が存在することが知られている (補足ノート参照)

- くじの選好を表す期待効用 $U(g)$ は序数的か？

定理． くじに対する選好が (定義域がくじ全体の集合の) 期待効用関数 U によって表現されている時、任意の定数 α と $\beta > 0$ に対して、関数

$$V(g) \equiv \alpha + \beta U(g)$$

も、同じ選好を表現する。

- しかしながら、期待効用では効用の値自体も意味を持つ
    - ◇ 特に vNM 効用 $u(\cdot)$ の値によって**曲率** (曲線の曲がり方) が変わる場合リスクに対する選好が変化する可能性がある

4.3　リスク態度

4.3.1　リスク回避的/愛好的

- くじ g はある確率変数 X と解釈することができる

- 次の 2 つの状況を比べる

◇ くじ g をひく $\to U(g) \equiv E[u(X)]$

◇ くじからの期待金額 $E[X]$ を確実にもらう $\to u(E[X])$

定義． vNM 効用 u を持つ個人が、確率変数 X で表現できるくじ g において

1. $u(E[X]) > E[u(X)]$ を満たす時、**リスク回避的** [Risk averse] であり;
2. $u(E[X]) = E[u(X)]$ を満たす時、**リスク中立的** [Risk neutral] であり;
3. $u(E[X]) < E[u(X)]$ を満たす時、**リスク愛好的** [Risk loving] であるという。

- ジェンセンの不等式 [Jensen's inequality]

定理 (Jensen)**.** X を (1 次元の) 確率変数、$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする。もし $u(x)$ が:

1. 厳密な凹関数であるならば $u(E[X]) > E[u(X)]$;
2. x について線形であるならば $u(E[X]) = E[u(X)]$;
3. 厳密な凸関数であるならば $u(E[X]) < E[u(X)]$ となる。

- リスク回避的か愛好的かどうかは u の**凹凸**による

定理． (任意のくじにおいて) ある個人の vNM 効用 $u(x)$ が:

1. 厳密な**凹関数**であるならば**リスク回避的**;
2. x について**線形**であるならば**リスク中立的**;
3. 厳密な**凸関数**であるならば**リスク愛好的**である。

4.3.2 例: 宝くじ購入問題再訪

- ライナスがリスク中立的な場合 $u(m) = \alpha m + \beta$ の形で書ける ($\alpha > 0$)
- 宝くじを買った方がいい条件は

$$p \underbrace{(15000\alpha + \beta)}_{u(15000)} + (1-p) \underbrace{(5000\alpha + \beta)}_{u(5000)} \geq \underbrace{(10000\alpha + \beta)}_{u(10000)} \iff p \geq \frac{1}{2}$$

◇ **金額の期待値が大きければ買うべき**

◇ 確率分布など**期待値以外は気にしない**

- $p = 1/2$(金額の期待値が同じ場合) の時、ライナスは

◇ リスク回避的ならば宝くじを**買わない**

◇ リスク愛好的ならば宝くじを**買う**

4.3.3 リスク態度の指標

- リスク態度を表す指標がいくつか存在する

定義． $u(x)$ を vNM 効用関数とし、X がくじ g を表す確率変数とする。

- $E[u(X)] = u(CE)$ を満たす CE を**確実同値額** [Certainty equivalent] という。
- $P \equiv E[X] - CE$ を**リスクプレミアム** [Risk premium] という。

- CE: **くじの価値**を表している金額
  - ◇ $E[u(X)] \equiv U(g)$ はくじからの期待効用
- リスクプレミアム: リスクを引き受ける上で**追加的に補償されるべき金額**
- 次の関係が成り立つ

定理． $u(x)$ を vNM 効用関数とし X がくじ g を表す確率変数とする。

1. リスク回避的であるならば $CE < E[X]$ かつ $P > 0$ が成り立つ。
2. リスク中立的であるならば $CE = E[X]$ かつ $P = 0$ が成り立つ。
3. リスク愛好的であるならば $CE > E[X]$ かつ $P < 0$ が成り立つ。

4.3.4 リスク回避度

- リスク回避的な個人の中でどういう個人が**よりリスクを嫌う**のか？
- リスク回避的かどうかは u の凹凸で決まる → u の **2 階微分**が指標になる

定義． $u(x)$ を 2 階微分可能で厳密な増加かつ厳密な凹関数とする。正の $m > 0$ に対して

$$r_A(m) \equiv -\frac{u''(m)}{u'(m)}$$

を **(アロー・プラットの) 絶対リスク回避度** [(Arrow-Pratt) Measure of absolute risk aversion] といい、

$$r_R(m) \equiv -\frac{mu''(m)}{u'(m)}$$

を (アロー・プラットの) **相対リスク回避度** [Relative risk aversion] という。

- 重要なクラスの vNM 効用関数:

- ◇ $u(x) = -\exp(-\alpha x)$ $(\alpha > 0)$: 絶対リスク回避度が一定 [Constant absolute risk aversion, CARA utility]
- ◇ $u(x) = x^{\alpha}$ $(\alpha \in (0, 1))$, 相対リスク回避度が一定 [constant relative risk aversion, CRRA utility]

- リスク回避度↑ → 確実同値額↓ [JR (pp.114-115) を参照].

第 5 章　標準形ゲーム

- Tadelis Ch. 3, 4, 5, 6
- Jehle and Reny Ch. 7

5.1　戦略的相互関係と意思決定

- **戦略的相互関係** [Strategic interaction]: 誰かの意思決定が他の人の帰結に直接影響を与える場合、意思決定を戦略的に考える理由が出てくる
  - ◇ 相手の意思決定も読み込んで意思決定を行う
  - ◇ これまでは意思決定問題を個人の「独立の」問題として捉えてきた
    - ∗ 他の意思決定主体の決定を考慮には入れてこなかった
    - ∗ 競争的市場でも市場価格は各個人にとって外生的
- **ゲーム理論** [Game theory]: 戦略的な意思決定問題を体系的に分析できる理論

5.2　標準形ゲーム

5.2.1　例: 囚人のジレンマ [Prisoner's dilemma]

- 逮捕された 2 人の窃盗犯イリアとジーナが強盗殺人の嫌疑をかけられている (さらに、実際に強盗殺人犯であるとする)
- 各容疑者は別々の部屋に隔離され取調べを受け、選択肢は
  - ◇ 相棒の容疑を認める (**裏切る** [Defect]); か
  - ◇ 黙秘する (**協力する** [Cooperate])
- 窃盗による刑期は 1 年
- 相棒の容疑を認めると
  - ◇ 自分の刑期は 1 年短縮される
  - ◇ 相棒の刑期は 10 年増える
- 結果は以下の表で要約することが出来る

イリア \ ジーナ	C	D
C	$(-1,-1)$	$(-11,0)$
D	$(0,-11)$	$(-10,-10)$

- お互いに黙秘する (C) 方がお互いに容疑を認める (D) よりも (容疑者にとっては) 望ましい
- イリアとジーナは黙秘できるのか？

5.2.2 定義

- **標準形ゲーム** [Normal form game] は以下の要素から成り立つ

定義 . 標準形ゲーム (もしくは**戦略形** [Strategic form] ゲーム) は以下の 3 要素から構成される:

1. (有限の) **プレーヤー** [Player](の集合): $N = \{1, 2, \ldots, n\}$;
2. **戦略** [Strategy](の集合): 各 $i \in N$ について S_i;
3. **利得** [Payoff] 関数: $u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ (ただし $s_i \in S_i$)

- プレーヤー: 戦略的状況での**意思決定者**
- 戦略: プレーヤーの**選択肢**
- 利得: プレーヤーの**選好** (そのプレーヤーの利得が大きい結果を好む)
- 表記:
  - ◇ $s \equiv (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S \equiv \times_{i=1}^{n} S_n$: **戦略プロファイル (組)**[Strategy profile]
  - ◇ $s_{-i} \equiv (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S_{-i} \equiv \times_{j \neq i} S_j$: プレーヤー i 以外の戦略の組 (相手の戦略)
  - ◇ $s = (s_i, s_{-i})$
- 例: 囚人のジレンマ再訪
  - ◇ プレーヤー: $N = \{1, 2\}$ (イリア:1; ジーナ:2)
  - ◇ 戦略の集合 $S_1 = S_2 = \{C, D\}$
  - ◇ (プレーヤー 1 の) 利得: $u_1(C,C) = -1$, $u_1(D,C) = 0$, $u_1(C,D) = -11$, $u_1(D,D) = -10$
- 例: (第一位封印価格) オークション [(First price sealed bid) auction]
  - ◇ プレーヤー: $N = \{1, \ldots, n\}$ (入札者)
  - ◇ 各入札者は入札額 $s_i \in S_i = [0, \infty)$ を決める

◇ プレーヤー i の入札額が一番高かった場合、彼が財を得ることが出来、v_i の価値を得る (財を得られなければ価値は 0)

　∗ もし二人以上最高入札者がいたのならば、その中から一人が等確率で財を得られるとする

◇ 財を得たプレーヤー i は入札額 s_i を (オークショニアに) 支払う

◇ プレーヤー i の利得: $s = (s_1, \ldots, s_n)$ とすると

$$u_i(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\#\{k \in N \mid s_k = \max_{j \in N} s_j\}}[v_i - s_i] & \text{if } s_i \geq \max_{j \neq i} s_j \\ 0 & \text{if } s_i < \max_{j \neq i} s_j \end{cases}$$

- **共有知識** [Common knowledge] の仮定:

◇ 各プレーヤーはゲームの構造を知っている

◇ 各プレーヤーは「各プレーヤーはゲームの構造を知っている」ことを知っている

◇ 各プレーヤーは「各プレーヤーは『各プレーヤーはゲームの構造を知っている』ことを知っている」ことを知っている

◇ 各プレーヤーは (…中略…) 知っている

◇ これが無限に続く

5.3 均衡

5.3.1 支配戦略均衡

- ゲームの結果を (我々は) どう予測するか？
- **支配戦略** [Dominant strategy] の選択

◇ **相手の戦略によらず**戦略 s_i が他のどの自分の戦略よりも自分に良い結果をもたらすならば、戦略 s_i を取るべき

定義． 戦略 s_i が他の全ての戦略 $\tilde{s}_i \in S_i$ と全ての相手の戦略の組 $\tilde{s}_{-i} \in S_{-i}$ に対して

$$u_i(s_i, \tilde{s}_{-i}) > u_i(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{-i})$$

が成り立つ時、戦略 s_i を (厳密な) **支配戦略** [(Strict) dominant strategy] という。

定義． それぞれの i について s_i^* が支配戦略の時、その戦略の組 $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ を**支配戦略均衡** [Dominant strategy equilibrium] という。

- 例: 囚人のジレンマ再訪

$1 \setminus 2$	C	D
C	$(-1,-1)$	$(-11,0)$
D	$(0,-11)$	$(-10,-10)$

- 両方のプレーヤーにとって D は支配戦略 $\rightarrow$ (D,D) は支配戦略均衡
  - ◇ (C,C) は (D,D) を**パレート支配**しているが支配戦略均衡は (D,D)
  - ◇ 他の例
    - $*$ 企業間の価格競争
    - $*$ チームワークの中での協力行動

5.3.2 被支配戦略の逐次削除

- **被支配戦略** [Dominated strategy] の削除
  - ◇ **相手の戦略によらず**戦略 s_i が他の戦略 s_i' よりも自分に悪い結果をもたらすならば、戦略 s_i は取るべき**ではない**

定義． 全ての相手の戦略の組 $\tilde{s}_{-i} \in S_{-i}$ に対して

$$u_i(s_i, \tilde{s}_{-i}) < u_i(s_i', \tilde{s}_{-i})$$

が成り立つ時、戦略 s_i が s_i' によって (厳密に) **支配されている** [(Strictly) dominated] という。

- 支配されている戦略はもはや選択されないと考えて、削除していくと？

- 例: 2 人ゲーム

$1 \setminus 2$	L	M	R
U	$(3,0)$	$(0,-5)$	$(0,-4)$
C	$(1,-1)$	$(3,3)$	$(-2,2)$
D	$(2,4)$	$(4,1)$	$(-1,8)$

  - ◇ C は D に支配されている
  - ◇ $\rightarrow$ M は R に支配されている
  - ◇ $\rightarrow$ D は U に支配されている
  - ◇ $\rightarrow$ R は L に支配されている
  - ◇ $\rightarrow$ (U,L)

- **被支配戦略の逐次削除**: 定義の詳細は補足ノート参照
  - ◇ 厳密な被支配戦略の逐次削除は**消す順番によらず生き残る戦略は一意に決まる**
  - ◇ 共有知識の仮定が (暗黙に) 使われている

5.3.3 ナッシュ均衡

- 例: 男女の争い [Battle of the Sexes]

サリー \ ライナス	O(pera)	F(ootball)
O(pera)	$(2,1)$	$(0,0)$
F(ootball)	$(0,0)$	$(1,2)$

- 支配される戦略は存在しない → 複数の戦略が生き残る

定義 . プレーヤー i の戦略の部分集合

$$BR_i(s_{-i}) \equiv \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$$

を (相手の戦略)s_{-i} に対する**最適反応** [Best response] という。

- 最適反応: 相手の戦略を所与として利得を最大にする戦略 (の集合)

定義 . 戦略の組 $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ が全ての $i \in N$ で $s_i^* \in BR_i(s_{-i}^*)$ を満たす時、s^* を**ナッシュ均衡** [Nash equilibrium] という。

- ナッシュ均衡: 全てのプレーヤーが最適反応の戦略を選択している
  - ◇ 戦略の組がナッシュ均衡でない
→ 最適反応を選択していないプレーヤーが存在する
→ そのプレーヤーは異なる戦略に逸脱した方が利得が高くなる
- 例: 男女の争い再訪
  - ◇ ナッシュ均衡: (O,O) と (F,F)
- どのようにナッシュ均衡を探すか: **cell-by-cell 法**
  1. 相手のそれぞれの戦略を固定して、最適反応を探す
  2. 全て最適反応になっている組を探す

5.3.4 均衡概念の関係性

- 囚人のジレンマ: (D,D) は
  - ◇ 支配戦略均衡;
  - ◇ 被支配戦略の逐次削除により (唯一) 生き残る戦略の組; かつ
  - ◇ ナッシュ均衡

- 3×3 のゲームの例では: 被支配戦略の逐次削除により (唯一) 生き残る戦略の組はナッシュ均衡でもある

定理．
1. もし戦略の組 s^* が支配戦略均衡であるならば、s^* は被支配戦略の逐次削除により (唯一) 生き残る戦略の組である。
2. もし s^* は被支配戦略の逐次削除により (唯一) 生き残る戦略の組であるならば、s^* はナッシュ均衡である。

- これまで (被) 支配戦略は、利得の比較を**厳密な**不等式で考えていた
- 利得の比較を**弱い**不等式で考える支配関係を**弱 (被) 支配戦略** [Weakly dominant/dominated strategy] という
- 弱支配関係で均衡を定義した場合、上記のような (綺麗な) 関係性は必ずしも成り立たない (補足ノート参照)

5.3.5 混合戦略

- 例: コイン合わせ [Matching pennies]

アリソン \ フィルミーニョ	H(ead)	T(ail)
H(ead)	$(1,-1)$	$(-1,1)$
T(ail)	$(-1,1)$	$(1,-1)$

- cell-by-cell 法ではナッシュ均衡は見当たらない
- しかし**確率的な戦略**を考えるとナッシュ均衡は存在する
- 以後、これまで定義してきた戦略 s_i を特に**純粋戦略** [Pure strategy] と呼ぶことにする
  - ◇ S_i: 純粋戦略の集合
- **混合戦略** [Mixed strategy]: 純粋戦略に割り振る確率分布

定義． (有限の) 純粋戦略の集合 S_i に対して、

$$\Delta S_i \equiv \left\{ \sigma_i(\cdot) \mid \forall s_i \in S_i, \sigma_i(s_i) \geq 0, \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1 \right\}$$

とし、ΔS_i の元を混合戦略といい、ΔS_i を混合戦略の集合とする。

- 純粋戦略は混合戦略の特殊形でもある:
  - ◇ $\sigma_i(s_i) = 1 \iff$ 純粋戦略 s_i
- それぞれのプレーヤーは**利得の期待値**が大きくなることを好むとする

定義． 混合戦略の組 $\sigma \equiv (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ の下でのプレーヤー i の期待利得は以下で与えられる。

$$u_i(\sigma) \equiv \sum_{s \in S} \prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) u_i(s)$$

- 例: コイン合わせ再訪
  - ◇ 混合戦略は以下の (p, q) で描写できる:
    - $*$ プレーヤー 1: H を確率 $p \in [0,1]$、T を確率 $1-p$ で選択
    - $*$ プレーヤー 2: H を確率 $q \in [0,1]$、T を確率 $1-q$ で選択
  - ◇ それぞれ純粋戦略の組が実現する確率:

$1 \setminus 2$	H	T
H	pq	$p(1-q)$
T	$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

  - ◇ 各プレーヤーの期待利得:
    - $*$ P1: $pq \cdot 1 + p(1-q) \cdot (-1) + (1-p)q \cdot (-1) + (1-p)(1-q) \cdot 1$
      $= p(4q-2) + 1 - 2q$
    - $*$ P2: $pq \cdot (-1) + p(1-q) \cdot 1 + (1-p)q \cdot 1 + (1-p)(1-q) \cdot (-1)$
      $= q(2-4p) - 1 + 2p$
- 混合戦略は標準形ゲームにおける戦略の集合と利得関数を「拡張」している (に過ぎない)
- 純粋戦略ナッシュ均衡同様、混合戦略ナッシュ均衡でも各プレーヤーはお互いに最適な (混合) 戦略を選択している

定義． プレーヤー i の混合戦略の部分集合

$$BR_i(\sigma_{-i}) \equiv \arg\max_{\sigma_i \in \Delta S_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

を (相手の戦略)σ_{-i} に対する**最適反応**という。

定義． (混合) 戦略の組 $\sigma^* \equiv (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ が全ての $i \in N$ で $\sigma_i^* \in BR_i(\sigma_{-i}^*)$ を満たす時、σ^* を **(混合戦略) ナッシュ均衡**という。

- 例: コイン合わせのナッシュ均衡
  - ◇ プレーヤー 1 の最適反応は (相手の q に対して) 期待利得 $p(4q-2)+1-2q$ を最大にするような p:

$$BR_1(q) = \begin{cases} \{1\} & \text{if } 4q-2 > 0 \text{ or } q > 1/2 \\ [0,1] & \text{if } 4q-2 = 0 \text{ or } q = 1/2 \\ \{0\} & \text{if } 4q-2 < 0 \text{ or } q < 1/2 \end{cases}$$

◇ プレーヤー 2 の最適反応は (相手の p に対して) 期待利得 $q(2-4p)-1+2p$ を最大にするような q:

$$BR_2(p) = \begin{cases} \{1\} & \text{if } 2-4p>0 \text{ or } p<1/2 \\ [0,1] & \text{if } 2-4p=0 \text{ or } p=1/2 \\ \{0\} & \text{if } 2-4p<0 \text{ or } p>1/2 \end{cases}$$

◇ ナッシュ均衡 (p^*, q^*) は $p^* \in BR_1(q^*)$ かつ $q^* \in BR_2(p^*)$ を満たす:

  * 最適反応曲線の交点: $(p^*, q^*) = (1/2, 1/2)$

5.3.6 ナッシュ均衡の性質

- コイン合わせにおいても混合戦略を認めればナッシュ均衡が存在する
- 一般に**純粋戦略の数が有限**である限り (混合戦略) ナッシュ均衡は**常に**存在する

定理 (Nash). 純粋戦略の数が有限の標準形ゲームには少なくとも 1 つ (混合戦略) ナッシュ均衡が存在する。

- 証明は JR(pp 317-319) を参照
  - ◇ ナッシュ均衡は最適反応と関連する不動点で表現できるので、不動点定理で存在を示せばよい
- ナッシュ均衡の解釈については補足ノートを参照

第6章　不完全競争

- Jehle and Reny Ch. 3, 4
- Varian Ch. 13
- Tadelis Ch. 3, 4, 5, 6

6.1　企業とは

- 企業: 財の主要な供給者
  - ◇ **費用** [Cost] をかけて財を生産し、**収益** [Revenue] を得る
- 企業の目的: **利潤** [Profit](収益 − 費用) の最大化
  - ◇ 他の目的は？: 販売量、市場シェア、企業存続年数、名声と評判…
  - ◇ 利潤最大化が頑健かつ実証的には最も支持されている

6.2　完全競争

6.2.1　完全競争市場

- ある財の市場が次の条件を満たす時、**完全競争 (的)** であるいう
  - ◇ 財は**同質的** (誰が作っても同じ) (c.f. 製品差別化)
  - ◇ 価格や品質に関して**情報が正確**に分かる
    (c.f. 価値の不確実な中古車)
  - ◇ 財の生産や消費に価格を通じない影響 (**外部性** [Externality]) がない
    (c.f. 環境汚染、ネットワーク効果など)
  - ◇ 参加者が潜在的に**無数**いる (c.f. 独占、寡占)
  - ◇ 財や取引相手の探索に費用がかからない
- 完全競争市場は企業は**価格受容者**になる
  - ◇ 競争相手が多すぎて、市場で**価格支配力を保つことが出来ない**

6.2.2 競争的企業

- $\mathcal{J} = \{1, \ldots, J\}$: 同質的な財を生産し、価格受容的に市場で取引をする (潜在的な) 競争的企業の集合

- 企業 $j \in \mathcal{J}$ は $q(\geq 0)$ 単位の生産を行うのに費用 $c^j(q)$ を要するとする
  - ◇ $c^j(0)$: **固定費用** [Fixed cost]
  - ◇ $c^j_v(q) \equiv c^j(q) - c^j(0)$: **可変費用** [Variable cost]
  - ◇ $c^j_v(q)/q$: **平均可変費用** [Average variable cost]
  - ◇ $c^{j\prime}(q)$: **限界費用** [Marginal cost]

- 財の市場価格が p、企業 j が q_j 単位を販売した時、企業の利潤は

$$\underbrace{pq^j}_{\text{収益}} - \underbrace{c^j(q^j)}_{\text{費用}}$$

6.2.3 供給関数

- 利潤を最大化する生産量 $q^j(p)$: 企業 j の**供給関数** [Supply function]

$$q^j(p) \in \arg\max_{q^j}[pq^j - c^j(q^j)]$$

- 各 $j \in \mathcal{J}$ で $q^j(p) > 0$ ならば利潤最大化の 1 階条件より: $p - c^{j\prime}(q^j(p)) = 0$
  - ◇ 企業の供給関数は**限界費用と一致**する

- 産業全体の供給量: $q^S(p) \equiv \sum_{j \in \mathcal{J}} q^j(p)$

6.2.4 市場均衡

- $q^D(p)$: 財の需要関数

- 均衡: 需要と供給が一致している

- 2 種類の均衡の考え方:
  - ◇ **短期** [Short-run]: 企業の数 J は**外生的**
  - ◇ **長期** [Long-run]: 企業の数は**内生的**に決まる
    - $*$ 各企業は市場**参入**と**退出**も考慮する
    - $*$ 利潤が**正**なら**参入**し、**負**なら**退出**する

定義． (J を所与として)$q^D(p^*) = q^S(p^*)$ を満たす p^* を (**短期の**) 競争均衡という。

- 長期均衡では需給の一致に加えて**各企業の利潤が 0 になる条件** [Zero-profit condition] によって企業数が内生的に決まる

- 今 $J \simeq +\infty$ とし $\hat{J}$ を市場に参入し生産販売を行っている企業の数とする

定義． $c^j(q) \equiv c(q)$(企業は対称) とする時、以下の条件を満たす $(\hat{J}, (p^{\tilde{J}*})_{\tilde{J}=1}^{J})$ を **(長期の) 競争均衡**という:

$$\begin{aligned}
\forall \tilde{J} = 1, \ldots, \quad & q^D(p^{\tilde{J}*}) = \sum_{j=1}^{\tilde{J}} q^j(p^{\tilde{J}*}), \\
\forall j \le \hat{J}, \quad & p^* q^j(p^*) - c(q^j(p^*)) \ge 0, \\
\forall j > \hat{J}, \quad & p^{\hat{J}+1*} q^j(p^{\hat{J}+1*}) - c(q^j(p^{\hat{J}+1*})) \le 0, \\
& p^* = p^{\hat{J}*}.
\end{aligned}$$

6.2.5 厚生

- 市場均衡は望ましい結果をもたらすのか？

- 消費者の便益: **消費者余剰**
  - ◇ **需要曲線の下方部分**

- 生産者の便益: **生産者余剰** [Producer surplus, PS]
  - ◇ 定義: 「収益」 − 「可変費用」
    - ∗ 供給側が操業していない時 ($q = 0$) に比べて市場での取引で得られる追加的便益
  - ◇ 価格 p で企業 j が q^j 単位販売すると $PS = \sum_{j \in \mathcal{J}} [pq^j - c_v^j(q^j)]$

- $p^D(q) \equiv q^{D-1}(p)$: **逆需要関数** [Inverse demand function]

- $TS \equiv CS + PS$: **総余剰** [Total surplus] (または**社会厚生** [Social welfare])
  - ◇ 総余剰は市場での取引量によって決まる: 企業 j が q^j 単位販売し、$q = \sum_j q^j$ とすると

$$TS = \int_0^q p^D(z)dz - p^D(q)q + \sum_{j \in \mathcal{J}} [p^D(q)q^j - c_v^j(q^j)] = \int_0^q p^D(z)dz - \sum_{j \in \mathcal{J}} c_v^j(q^j).$$

- 総余剰を最大にする q^j は 1 階条件より $p^D(q) - c^{j\prime}(q^j) = 0$ を満たす
  - ◇ 注意:
    - ∗ ライプニッツの公式 (補足ノート参照) より $\dfrac{d}{dq^j} \displaystyle\int_0^q p^D(z)dz = p^D(q) \cdot \frac{dq}{dq^j} = p^D(q)$
    - ∗ $\dfrac{dc_v^j}{dq^j}(q^j) = \dfrac{d}{dq}[c^j(q^j) - c^j(0)] = c^{j\prime}(q^j)$

- 競争均衡 p^* での取引量 q^{j*} は以下を満たす
  - ◇ $p^* = p^D(q^*)$ ($q^* \equiv \sum_j q^{j*}$)
  - ◇ $p^* - c^{j\prime}(q^{j*}) = 0$

  $\rightarrow p^D(q^*) - c^{j\prime}(q^{j*}) = 0$: 総余剰最大化の条件と一致

- 競争均衡は需要曲線と供給曲線の交点: 総余剰を最大化を実現
  - ◇ 生産者余剰は供給曲線と価格に挟まれた**三角形の面積と一致する** (補足ノート参照)
- 完全競争的である限り、市場取引は余剰の最大化という観点からは**効率的**
  - ◇ 政府の介入 (例: 税金、補助金、参入規制など) は余剰の増加という観点からはむしろ望ましくない
- 市場に全て任せておけばいいのか？
  - ◇ **効率性以外の指標** (例: 公平性) に関しては何ともいえない
  - ◇ **「完全競争」市場であるという仮定**が重要

6.3 寡占市場

- **寡占** [Oligopoly]: 少数の企業によって操業されている市場
  - ◇ 企業はより市場において戦略的に意思決定を行う: ゲーム理論による分析
  - ◇ **競争政策**: 政府の介入が正当化される可能性
- 寡占市場や企業の産業における戦略的な側面を分析する分野は**産業組織論** [Industrial organization] と呼ばれる
- 以下では寡占理論の基本的な考え方として以下を扱う
  - ◇ **クールノー**競争 [Cournot competition]: **数量競争**
  - ◇ **ベルトラン**競争 [Bertrand competition]: **価格競争**

6.3.1 クールノー競争

設定

- J 企業が存在する市場
- 逆需要関数: $P(q) = a - bq$ ($q = \sum_{j=1}^{J} q^j$: 産業供給量)
- 企業 $j(= 1, 2, \ldots, J)$ の生産費用は cq^j
  - ◇ 限界費用一定、$a > c \geq 0$ を仮定

- 企業 j の利潤:

$$\pi^j(q^j, q^{-j}) \equiv \left(a - b\sum_{i=1}^{J} q^i\right) q^j - cq^j$$

ただし $q^{-j} \equiv (q^1, \dots, q^{j-1}, q^{j+1}, \dots, q^J)$

クールノー・ナッシュ均衡

- 最適反応: 企業 j は他企業の数量 q^{-j} を所与として、自社の利潤を最大にするように q^j を決める
- 利潤を最大にする一階条件:

$$\frac{\partial \pi^j(q^j, q^{-j})}{\partial q^j} = 0 \iff \left(a - b\sum_{i=1}^{J} q^i\right) - bq^j - c = 0$$
$$\iff q^j = \frac{a - c - b\sum_{i\neq j} q^i}{2b}$$

- J 本の一階条件を解くと、お互いに最適反応になっているクールノー・ナッシュ均衡が導出される

$$q^{1*} = \cdots = q^{J*} = \frac{a-c}{b(J+1)}$$

- $J = 2$(複占) のケースは最適反応曲線でナッシュ均衡を描写できる

競争の効果

- 産業供給量: $\displaystyle\sum_{j=1}^{J} q^{j*} = \frac{J(a-c)}{b(J+1)}$
  - ◇ J に関して増加、$J \to \infty$ の時 $\dfrac{a-c}{b}$ (= 競争均衡)
- 均衡価格: $\displaystyle a - b\sum_{j=1}^{J} q^{j*} = \frac{a + Jc}{J+1} > c$
  - ◇ J に関して減少、$J \to \infty$ の時 c
- 均衡利潤: $\dfrac{(a-c)^2}{b(J+1)^2} > 0$
  - ◇ J に関して減少、$J \to \infty$ の時 0
- $J = 1$: 独占の結果と一致 (補足ノート参照)
- $J \to \infty$: 完全競争の結果に収束 (価格 = 限界費用、利潤 0)

6.3.2 同質財のベルトラン複占

設定

- 二つの企業 1 と 2 がそれぞれ価格 p^1 および p^2 を決める
- 価格が出揃うと企業 i への需要は以下のように決まるとする

$$\begin{cases} a & \text{if } p^i < p^j \\ a/2 & \text{if } p^i = p^j \\ 0 & \text{if } p^i > p^j \end{cases}$$

  ◇ 少しでも価格の低い企業から買う

  ◇ $a(>0)$ は市場全体の需要

    ∗ (単純化のため) 価格によらず一定と仮定

- 限界費用一定を仮定: $c(q) = cq$

ベルトラン・ナッシュ均衡

- 相手企業の価格が c よりも大きい時は相手よりもわずかに低い価格を付けようとする

  ◇ $p^j > c$ の時、企業 i の利潤は

$$\begin{cases} 0 & \text{if } p^i > p^j \\ (p^i - c)a/2(>0) & \text{if } p^i = p^j \\ (p^i - c)a(>0) & \text{if } p^i < p^j \end{cases}$$

  ◇ p^j よりもわずかに下で p^j に限りなく近い価格を p^i としてつければ、$p^i = p^j$ の時よりも (ほぼ)2 倍近くの正の利潤を得られる

- よってどちらかの企業の価格が c よりも大きい場合は常に相手企業がわずかに下の価格をつけようとするインセンティブがあるので、均衡にならない
- 相手の価格が $p^j = c$ の時は企業 i は $p^i = c$ を設定するのが最適反応

  ◇ $p^j = c$ の時、企業 i の利潤は

$$\begin{cases} 0 & \text{if } p^i \geq p^j = c \\ (p^i - c)a < 0 & \text{if } p^i < p^j = c \end{cases}$$

- 均衡価格: $p^1 = p^2 = c$
- (他のナッシュ均衡は存在しない、補足ノート参照)
- 利潤: 0

6.3.3 クールノーかベルトランか？

- 同じ同質財の寡占市場でも、**数量競争と価格競争では帰結が異なる**
  - ◇ クールノー: 正の利潤
  - ◇ ベルトラン: 利潤 0、完全競争と一致 (価格 = 限界費用)
- クールノーとベルトランのどちらがより現実的か？
  - ◇ クールノー競争では数量が決まると (自動的に) 価格が決まる
    $\rightarrow$ **(数量に比べると) 価格の変更は簡単**
  - ◇ ベルトラン競争では価格が決まると (自動的に) 数量が決まる
    $\rightarrow$ **(価格に比べると) 数量の変更は簡単**
  - ◇ よって**変更しにくいかという意味で重要な戦略変数**によって、どちらのモデルが当てはまっているかが決まってくる
    - $*$ ベルトラン: **デジタルコンテンツ (ソフトウェアなど)**
    - $*$ クールノー: **製造業、重工業**など

6.3.4 立地選択

設定

- **ホテリング [Hotelling]** の立地選択モデル
  - ◇ 企業の別の重要な戦略的決定: **製品差別化 [Product differentiation]**
- 消費者が $[0,1]$ の区間に一様に存在する
- 2 つの企業 1 と 2 が**立地** x_1 と x_2 を $[0,1]$ から選択
- 各消費者は場所の近い企業に行く
  - ◇ $x \in [0,1]$ にいる消費者は
    - $*$ $\mid x - x_i \mid < \mid x - x_j \mid$: 企業 i に行く
    - $*$ $\mid x - x_i \mid = \mid x - x_j \mid$: 確率 1/2 でそれぞれどちらかにいく
- $x_i < x_j$ の時、

$$\hat{x} - x_i = x_j - \hat{x} \iff \hat{x} = \frac{x_i + x_j}{2}$$

  という境界の消費者 $\hat{x} \in [x_i, x_j]$ が存在し、
  - ◇ $x \in [0, \hat{x}]$: 企業 i に行く
  - ◇ $x \in [\hat{x}, 1]$: 企業 j に行く
- $x_1 = x_2$ の時、各企業は 1/2 ずつの需要を得る
- 各企業 i は**需要 (もしくは市場シェア)** を最大にするように x_i を決定する

ナッシュ均衡

- 両企業とも 1/2 を選択するのが唯一のナッシュ均衡
- 証明:
  - ◇ $x_i < x_j \rightarrow$ (各) 企業は相手に少し近づくことで需要量を増やせる
  - ◇ $x_1 = x_2 \neq 1/2 \rightarrow$ (各) 企業は 1/2 に少し近づくことで少なくとも 1/2 より大きな需要量を得られる
  - ◇ $x_1 = x_2 = 1/2 \rightarrow 1/2$ より大きな需要量を得られる場所は他に存在しない $\rightarrow$ ナッシュ均衡

6.3.5 製品差別化最小化原理

- ホテリングのモデルでは**企業はライバルとの製品差別化を行わない**
  - ◇ なぜコンビニが隣接して存在することがあるのか？
- ただし、この結果はかなり仮定に依存する
  - ◇ 企業が 3 社以上いる場合
  - ◇ 立地を決めた後に利潤を最大にするように価格も決める場合
- 立地選択モデルは**選挙**の分析にも応用されている
  (**ダウンズのモデル** [Downsian model] ともいわれる)
  - ◇ 有権者が $[0, 1]$ に分布していて、2 人の候補者が公約を $[0, 1]$ から選ぶ
  - ◇ 各有権者は公約が近い候補者に投票
  - ◇ 候補者は得票シェアを最大にするように公約を選ぶ
  - ◇ **中位投票者定理** [Median voter theorem]: 各候補者の公約は「中位」の投票者が好むものに収束する

第7章　外部性と公共財

- Mas-Colell, Whinston, and Green Ch. 11
- Varian Ch. 23, 24

7.1　外部性

7.1.1　外部性の種類

- 外部性 [Externality]: ある経済主体の行動が他の経済主体の環境に**直接**影響を与えるもの
  - ◇ 技術的外部性 [Technological externality]: 通常「外部性」が意味するもの
  - ◇ 金銭的外部性 [Pecuniary externality]: 市場価格の変化を通じた (ある種) 間接的な影響
- 消費の外部性: 喫煙、(大音量の) 音楽、公害、感染症……
- 生産の外部性: 川上の工場から川下の工場への汚水の流出、養蜂とりんごの果樹園…
- **外部性には通常取引の価格が付かないので、外部性のある環境での (分権的な) 市場では効率的な結果に至らない**

7.1.2　外部性のある競争均衡

- 2 消費者 $(1, 2)$、1 財の経済
- 各消費者 i は
  - ◇ w_i 単位の財の初期保有
  - ◇ x_i 単位の財を価格 p で購入/販売する
- 消費者 1 は (外部性を伴う) 行動 $h \in \mathbb{R}$ も決める
- 消費者 i の効用関数: $u_i(x_i, h) \equiv \phi_i(h) + x_i$ (ただし $\phi_i'' < 0$)
  - ◇ 正の外部性: $\phi_2' > 0$
  - ◇ 負の外部性: $\phi_2' < 0$
- 消費者 1 の効用最大化問題:

$$\max_{x_1, h} \phi_1(h) + x_1 \text{ subject to } px_1 \leq pw_1$$

- 消費者 2 の効用最大化問題:

$$\max_{x_2} \phi_2(h) + x_2 \text{ subject to } px_2 \leq pw_2$$

- 明らかにどちらも制約は有効 ($x_i = w_i$):
  - ◇ 消費者 1 の単純化された問題: $\max_h \phi_1(h) + w_1$
    - ∗ 1 階条件より消費者 1 の選ぶ h^* は $\phi_1'(h^*) = 0$
  - ◇ 消費者 2 の間接効用: $\phi_2(h^*) + w_2$
- 競争均衡の利得: $(\phi_1(h^*) + w_1, \phi_2(h^*) + w_2)$
- 均衡はパレート効率的か？
- 今、次のような h^o を考える: $\phi_1'(h^o) + \phi_2'(h^o) = 0$
  - ◇ h^o: 両者の外部性の和を最大にする h (効率的水準)
  - ◇ 明らかに $\phi_1(h^o) + \phi_2(h^o) > \phi_1(h^*) + \phi_2(h^*)$
    $\iff \phi_1(h^o) + \phi_2(h^o) + w_1 + w_2 > \phi_1(h^*) + \phi_2(h^*) + w_1 + w_2$
- よって $h = h^o$ の選択と、かつ適当な (消費者 2 から 1 への) 初期保有の移転 T は**競争均衡をパレート支配する**
  - ◇ この時の利得: $(\phi_1(h^o) + w_1 + T, \phi_2(h^o) + w_2 - T)$
  - ◇ $\phi_2(h^o) - \phi_2(h^*) \geq T \geq \phi_1(h^*) - \phi_1(h^o)$ であれば競争均衡をパレート支配する (演習)
- 正の外部性 ($\phi_2' > 0$) の場合: $\phi_1'(h^o) = -\phi_2'(h^o) < 0 = \phi_1'(h^*) \to h^* < h^o$
  - ◇ 外部性は**過小供給**
- 負の外部性 ($\phi_2' < 0$) の場合: $\phi_1'(h^o) = -\phi_2'(h^o) > 0 = \phi_1'(h^*) \to h^* > h^o$
  - ◇ 外部性は**過大供給**

7.1.3 解決方法

ピグー税

- 外部性のある経済では政府の介入が正当化される場合がある
- ピグー税 [Pigouvian tax]: 外部性のある行動に対して単位あたりの税金/補助金を導入する
  - ◇ 例: 消費者 1 は 1 単位あたりの行動に対して $t_h \equiv -\phi_2'(h^o)$ の税金を徴収し、徴収した分は消費者 2 に配分する
  - ◇ 消費者 1 の問題: $\max_h \phi_1(h) + w_1 - t_h h \to \phi_1'(h) + \phi_2'(h^o) = 0$
    - ∗ 消費者 1 は $h = h^o$ を選択する
  - ◇ 実際上の問題: 政府は
    - ∗ どのように t_h を知ることが出来るか？
    - ∗ h を (客観的に) 観察できなければならない

排出権市場

- 外部性の問題: 消費者 1 の行動に対して消費者 2 は何も影響を与えることが出来ない
- **市場の創設**: 消費者 1 の行動についても (競争的な) **市場**を通じて影響を与えることができる
  - ◇ 消費者 1 が行動を行使する場合、権利を 1 単位あたり市場価格 p_h で消費者 2 から購入しなくてはならないとする
    - ∗ 消費者 1 の問題: $\max_h \phi_1(h) + w_1 - p_h h \to \phi_1'(h) = p_h$
    - ∗ 消費者 2 の問題: $\max_h \phi_2(h) + w_2 + p_h h \to \phi_2'(h) = -p_h$
  - ◇ 市場均衡では $\phi_1(h) = -\phi_2(h) \to h = h^o$: 効率的水準
- 実際上の問題:
  - ◇ h を (客観的に) 観察できなければならない
  - ◇ 競争的な市場を作れるのか

所有権の確保

- 外部性に関する競争的市場を創設しなくても h が (客観的に) 観察でき (あるいは両者が外部性に関しての所有権が保証されて) さえすれば、**当事者間の交渉で**パレート効率的な結果が達成される
- 例: 消費者 1 が「h^o 単位の行動を行う権利を T 単位の移転で購入」という契約を消費者 2 に提示する
  - ◇ 消費者 2 が受諾する条件: $\phi_2(h^o) + w_2 + T \geq \phi_2(h^*) + w_2$
    $\to T \geq \phi_2(h^*) - \phi_2(h^o)$
  - ◇ 消費者 1 がこの契約から得する条件: $\phi_1(h^o) + w_1 - T \geq \phi_1(h^*) + w_1$
    $\to T \leq \phi_1(h^o) - \phi_1(h^*)$
  - ◇ $\phi_1(h^o) - \phi_1(h^*) \geq T \geq \phi_2(h^*) - \phi_2(h^o)$ を満たす T を提示すればパレート改善
- 消費者 2 が「h^o 単位の行動を行う権利を T 単位の移転で販売」という契約を消費者 1 に提示しても同様
- **コースの定理** [Coase theorem]:
  - ◇ 外部性がある状況でも、**交渉に費用がかからなければ**、交渉によって (パレート) 効率的な**配分が達成**される。
  - ◇ 交渉によって行われる外部性に関する決定は**所有権を誰が持っているかに依存しない**。
- 基本的なアイディア: どのように権限があろうとも交渉/契約によって
  1. まず両者の価値を最大にし

2. その後、配分を適当に決める

ことで、パレート効率的な結果を達成する

- コースはこのことを厳密に定式化したわけではない (その意味では「定理」ではない) が、その後の研究で「交渉に費用がかからない」とはどういうことかが明らかにされている
  - ◇ 各人が私的情報を持たない、契約が確実に履行される、所得効果がない、など

7.2 公共財

7.2.1 公共財の種類

- これまで考えてきた財: **私的財** [Private goods]
  - ◇ 消費はその経済主体にのみ影響を与える
- 公共財 [Public goods]: 以下の性質を満たす消費が「多方面に影響を与える」財
  - ◇ **非排除性** [Non-excludability]: 他の消費者の消費を排除することが出来ない
  - ◇ **非競合性** [Non-rivality, Non-depletable]: ある消費者が消費しても、他の人が消費できる量が減らない
- 例: 街灯、国防、景観など
- **クラブ財** [Club goods]: 非競合的であるが排除可能である財 (ケーブルテレビ、有料コンテンツなど)

7.2.2 公共財供給問題

- 2 消費者 $(1, 2)$、2 財 (私的財と公共財) の経済
- 各消費者 i は
  - ◇ w_i 単位の私的財の初期保有
  - ◇ g_i 単位の私的財の投資から $G = f(g_1 + g_2)$ 単位の公共財が産出
    (ただし $f' > 0$、 $f'' \leq 0$)
  - ◇ $x_i = w_i - g_i$ 単位の私的財を消費
- 消費者 i の効用関数: $u_i(x_i, G) \equiv \phi_i(G) + x_i$ (ただし $\phi_i' > 0$、 $\phi_i'' < 0$)
- $x_i = w_i - g_i$ と $G = f(g_1 + g_2)$ を代入すると、効用関数は (g_1, g_2) で表現できる:

$$v_i(g_i, g_j) \equiv \phi_i(f(g_1 + g_2)) + w_i - g_i$$

- 各消費者 i が g_i を個別に決定する場合 $\rightarrow$ ナッシュ均衡
  - ◇ 消費者 i の効用最大化問題: $\max_{g_i} \phi_i(f(g_1 + g_2)) + w_i - g_i$

◇ 1 階条件より $\phi_i'(G^*)f'(g_1^*+g_2^*)=1$ (ただし $G^*\equiv f(g_1^*+g_2^*)$)

- 今、(g_1^o,g_2^o) を両者の効用の和を最大にする公共財水準とすると $G^o>G^*$ となる (ただし $G^o\equiv f(g_1^o+g_2^o)$)

◇ 1 階条件より $\sum_{j=1}^2\phi_j'(G^o)f'(g_1^o+g_2^o)=1$

◇ もし $G^*\geq G^o$ ($\iff$ $g_1^*+g_2^*\geq g_1^o+g_2^o$) ならば

$$f'(g_1^o+g_2^o)=\frac{1}{\sum_{j=1}^2\phi_j'(G^o)}<\frac{1}{\phi_1'(G^o)}\leq\frac{1}{\phi_1'(G^*)}=f'(g_1^*+g_2^*)$$

だが、$f''\leq 0$ なので $g_1^*+g_2^*\geq g_1^o+g_2^o$ に矛盾

- 公共財は私的に供給されると**過小**になる

- $(g_1^*,g_2^*)\neq(g_1^o,g_2^o)$ なので、外部性の時と同様 $(g_1,g_2)=(g_1^o,g_2^o)$ と 適当な私的財の移転は**ナッシュ均衡をパレート支配する**

- 公共財の供給は**正の外部性**を伴う

◇ 自分のために公共財を産出すると、その便益は他人にも及ぶ

- **ただ乗り** [Free ride]:

◇ 自分では公共財の費用を払わず、他人が供給する公共財から便益を得ようとする

◇ お互いにそう考える結果、公共財の供給が効率的水準よりも過小になる

◇ **囚人のジレンマ**と似た構造

7.2.3 リンダール価格

- 税/補助金によって効率的な公共財水準を達成することは可能か？

- **リンダール価格/税** [Lindahl prices/taxes]: 消費者 i が公共財を利用するのに 1 単位あたり p_i の支払いを必要とするとする

- 消費者 i の効用最大化問題:

$$\max_{g_i}\phi_i(f(g_1+g_2))+w_i-g_i-p_if(g_1+g_2)$$

- 1 階条件より: $(\phi_i'(G)-p_i)f'(g_1+g_2)=1$

- $p_i=-\phi_j'(G)$ とすれば 1 階条件は公共財の効率的水準の条件と一致する
$\to$ 効率的水準の公共財が実現

- 実際上の問題:

◇ 排除性が必要

◇ どのように p_i を知ることが出来るか？

第 8 章　動学ゲーム

- Jehle and Reny Ch. 4, 7
- Tadelis Ch. 7, 8

8.1　例: 市場参入

- 戦略的意思決定は (同時ではなく) 異時点間にわたる (=**動学的**) ことも多い
- 例: 市場参入
  - ◇ 潜在的な市場への参入企業 (1) が独占企業 (2) の支配する市場へ**参入する** (E) かしない (N) かを検討している
  - ◇ 企業 1 が参入してきた場合、企業 2 は**価格競争を仕掛ける** (F) か**共存を図る** (A) かを決める
  - ◇ 利得表:

$1 \setminus 2$	F	A
E	$(0,0)$	$(2,1)$
N	$(1,2)$	$(1,2)$

- 標準形ゲームでの (純粋戦略) ナッシュ均衡: (N,F) と (E,A)
- (N,F) の解釈:
  - ◇ 企業 2 は**価格競争を仕掛けることで参入を阻止**する
  - ◇ 企業 1 は企業 2 の**攻撃的な態度のために参入をあきらめる**
- だが、企業 1 が実際に参入したあと、企業 2 にとってもコストの大きい価格競争を仕掛けることは合理的なのか？
- これを確かめるために**ゲームの木**を考える
- タイミング:
  1. 企業 1 が参入する (E) かしない (N) かを決める。
  2. 企業 1 の参入後、企業 2 は価格競争を仕掛ける (F) か共存を図る (A) を決める
- **後ろ向き帰納法**を使って、あとに意思決定する人から順番に考える
  - ◇ 2 番目の点:

* A: 利得 1
* F: 利得 0

$\to$ 参入した後には企業 2 は A(共存) を選ぶ

◇ 企業 1 は企業 2 が共存を図ることが予想できる

◇ 企業 2 が A を選ぶことを所与とすると

* E: 利得 2
* N: 利得 1

企業 1 は E(参入) を選ぶ

- (E, A) が後ろ向き帰納法からの唯一の予測結果

- 何故 (N, F) はおきないのか？ $\to$ F(価格競争) は企業 1 に対する信憑性のある脅し [Credible threat] になっていない

◇ もし企業 1 が「参入したら企業 2 が価格競争を起こす」と信じている場合ならば、企業 1 は参入すべきではない

* なので、価格競争は新規参入に対する脅しになるかもしれない

◇ しかし、いざ参入が起こると企業 2 にとって共存の方が望ましい

* 企業 1 もこれが分かっている

◇ よって価格競争という脅しには信憑性がない: そのような空脅しによって参入を阻止することは出来ない

8.2 完全情報の展開形ゲーム

8.2.1 定義

定義． 完全情報の展開形ゲーム [Extensive form game with perfect information] は以下の 5 つの要素から成り立つ:

- 手番 [Node](の集合 X);
- 枝 [edge](の集合 Z);
- プレーヤー (の集合 N);
- プレーヤー関数: ι;
- 利得関数: u_i。

ゲームの木のルール

- **手番**と**枝**によって**ゲームの木** [Game tree] を描くことが出来る
  - ◇ 手番: 意思決定もしくは結果
  - ◇ 枝: 選択肢
- 各枝はある 2 つの手番を結びつけ、(前後の) **方向**を持つ
  - ◇ 2 つの手番 x, y に対して $x > y$ と記す時、x と y は枝の方向によって前後の関係にあり、「x は y の**前にある** (y は x の**後ろにある**)」ことを示す
  - ◇ x と $y > x$ が枝で結びついているとき、「y は x の**直前にある** (x は y の**直後にある**)」という
- 手番は以下の 2 種類 (細かくは 3 種類) に分類される
  - ◇ **決定手番** [Decision node]: 後ろに手番がある手番
    - ∗ そのうち、前に手番がないものを**初期手番** [Initial node] という
  - ◇ **最終手番** [Terminal node]: 後ろに手番がない手番
- ゲームの木が描写するもの:
  - ◇ 意思決定の手順:
    1. **初期手番**からゲームが始まる
    2. それぞれの手番で選択肢 (= **枝**) を選ぶ
    3. 枝の選択後、**最終手番**に到達する
  - ◇ 任意の手番で、初期手番からその手番にたどり着くための**唯一の**経路 [Path](枝のつながり) が存在する
    - ∗ たどり着いた手番によって**どのような枝 (=選択肢) が選ばれてきたか**がわかる
    - ∗ 過去に選ばれてきた選択肢を**歴史** [History] ともいう
- ゲームの木が満たさなくてはならないルール
  1. 初期手番は一意に存在
  2. 初期手番以外のすべての手番は初期手番の後ろにある
     - ◇ 初期手番がゲームの始まり
  3. 初期手番以外のすべての手番は直前にある手番を一つだけ持つ (初期手番は前に手番は存在しない)
     - ◇ 経路は決して「交わらない」
  4. もし手番 x、y、z が $x > y$ かつ $y > z$ ならば $x > z$ となる
     - ◇ 経路は決して循環しない

プレーヤーと利得と戦略

- プレーヤーの集合: $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ もしくは $\{0, 1, \ldots, n\}$
  - ◇ プレーヤー 0 は「**自然** [Nature]」と呼ばれ、外生的に確率的に選択肢を一つ選ぶ
    - $*$ (神様が決める) **不確実性**を描写したもの
- $\hat{X} \subset X$: 決定手番の集合とする
- プレーヤー関数 $\iota : \hat{X} \to N$
  - ◇ それぞれの決定手番での**意思決定者**を割り振る
- 決定手番 x から後ろの手番につながっている枝の集合を $A(x) \subset Z$ とする
  - ◇ $A(x)$: 手番 x での**選択肢**の集合
  - ◇ それぞれの手番での選択肢を**行動** [Action] という
- 戦略:「(起こりうる) 全ての状態 (歴史) に対して行動を記述した計画」
  - ◇ **行動とは異なる**ことに注意
- 以下の二つのどちらを考えてもよい
  - ◇ **行動戦略** [Behavioural strategy]: それぞれの (自分の) 手番で何を選ぶかを全て記述したもの
  - ◇ **混合戦略**: それぞれの手番での行動の組を選ぶ確率を描写したもの
- プレーヤー i の利得関数 $u_i : X \setminus \hat{X} \to \mathbb{R}$:
  - ◇ たどり着いた最終手番 (=結果) によってそれぞれのプレーヤーの利得が決まる

8.2.2 例: タカハトゲーム

$1 \setminus 2$	H_2	D_2
H_1	$(0, 0)$	$(9, 5)$
D_1	$(5, 9)$	$(3, 3)$

- プレーヤー 1 が最初に決めて、それを観察した後プレーヤー 2 が決める
- プレーヤー 2 の行動戦略:
  (H_1 が選ばれたときの行動, D_1 が選ばれたときの行動)
  $= (H_2, H_2)$, (H_2, D_2), (D_2, H_2), (D_2, D_2)
  - ◇ 確率的なものを考えることも可能
- プレーヤー 2 の混合戦略: 上記の 4 種類の組にそれぞれ選択する確率を割り振る

8.2.3 標準形ゲーム表現

- 行動戦略の方が (恐らく) プレーヤーの選択をより直観的に記述している
- 何故混合戦略を考えるか？
  - ◇ 展開形ゲームを**標準形ゲーム**としても表現することが出来る
- 逐次決定のタカハトゲームを標準形ゲームで表現すると:

$1 \setminus 2$	(H_2, H_2)	(H_2, D_2)	(D_2, H_2)	(D_2, D_2)
H_1	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(9, 5)$	$(9, 5)$
D_1	$(5, 9)$	$(3, 3)$	$(5, 9)$	$(3, 3)$

- 標準形で表現するとナッシュ均衡を発見できる
  - ◇ ナッシュ均衡: $(D_1, (H_2, H_2))$, $(H_1, (D_2, H_2))$, $(H_1, (D_2, D_2))$
- 本当にこれらのナッシュ均衡は予測としてもっともらしいのか？

8.2.4 部分ゲーム完全均衡

定義

- 標準形での表現は**時間**の要素が排除されている
  - ◇ ゲームの木は時間の要素を (直観的に) 記述している
- 時間の要素も含めた均衡の考え方:

定義．(完全情報の) 展開形ゲーム Γ の**部分ゲーム** [Subgame]G とは、ある (最終手番以外の) 手番を初期手番とし、その後ろにある全ての手番と枝で構成された (小さな) 展開形ゲームのことである。

定義．任意の部分ゲーム G の制限下でナッシュ均衡となる (行動、もしくは混合) 戦略の組を**部分ゲーム完全 (ナッシュ) 均衡** [Subgame perfect (Nash) equilibrium] という。

- 部分ゲーム完全均衡: どの手番でも (ナッシュ均衡の意味で) 合理的に選択している
- 「有限の」展開形ゲームでは**後ろ向き帰納法** [Backward induction] によって部分ゲーム完全均衡を特徴づけることができる

定理．完全情報の展開形ゲームで X が有限集合であるとする。

1. 全ての部分ゲーム完全均衡は後ろ向き帰納法と整合的である。
2. 任意の 2 つの最終手番で全てのプレーヤーの利得が異なるならば、後ろ向き帰納法で得られる解は一意である。

- (市場参入ゲームのように) 後ろの意思決定者から順に最適な行動を選ぶと部分ゲーム完全均衡を得ることができる

部分ゲーム完全均衡とナッシュ均衡

- 定義より部分ゲーム完全均衡 $\rightarrow$ (標準形表現での) ナッシュ均衡
  - ◇ (逆は必ずしも成り立たない)
- 例: 逐次決定のタカハトゲームでは部分ゲーム完全均衡は $(H_1, (D_2, H_2))$

8.3 コミットメントの役割

- 例: 市場参入再訪
  - ◇ 部分ゲーム完全均衡では企業 2(既存企業) は企業 1(新規企業) の参入を阻止できなかった
  - ◇ 理由: 企業 2 の価格競争という脅しに信憑性がない
  - ◇ 企業 2 はどうしたら価格競争に信憑性を持たせることが出来るか？
    $\rightarrow$ 価格競争にコミットできればよい
- コミットメント [Commitment]: 決定したら覆せないようにすること
  - ◇ 将来の (他の) 選択肢の削除
  - ◇ コミットメントは将来の自由を奪うことになるので、一見すると便益がないように思える
- 企業 2 があらかじめ共存という選択肢を削除して価格競争にコミットする
  - ◇ 企業 1 は参入後に確実に価格競争に直面することが分かる
  - ◇ 企業 1 の参入を阻止することが出来る
- コミットメントの便益: 自らの意思決定を硬直的にすることで相手の戦略的行動を変更させることができる
- 価格競争にコミットすることは出来るか？
  - ◇ 例: 最低価格保証

8.4 シュタッケルベルグ競争

8.4.1 設定

- クールノー競争ではそれぞれの企業が数量を同時に決定していた
- シュタッケルベルグ競争 [Stackelberg model]: 数量を逐次的に決定する複占モデル
- クールノーの複占環境 (2 企業) を考える:
  - ◇ 市場の逆需要関数: $p(q) = a - bq$

◇ 企業 $j(=1,2)$ の生産費用: cq^j ($a > c \geq 0$ を仮定する)

◇ 企業 j の利潤 (= 利得): $\pi^j(q^j, q^{-j}) \equiv [a - b(q^1+q^2)]q^j - cq^j$

- 意思決定のタイミング

  1. 企業 1(**先手** [**Leader**]) が最初に q^1 を決める
  2. q^1 **を観察した後**、企業 2(**後手** [**Follower**]) が q^2 を決める

8.4.2　シュタッケルベルグ均衡

- 部分ゲーム完全均衡 (**シュタッケルベルグ均衡**): 後ろ向き帰納法

- 後手の意思決定: q^1 を観察した後、後手は利潤を最大にする:

$$\left[a - b(q^1+q^2)\right] q^2 - cq^2$$

- 1 階条件: $a - b(q^1+q^2) - bq^2 - c = 0 \iff q^{2*}(q^1) = \dfrac{a-c-bq^1}{2b}$

- 先手は「先手が q^1 を選んだら、後手は $q^{2*}(q^1)$ を選んでくる」ことを合理的に予想する

- よって先手は $q^{2*}(q^1)$ を織り込んだ利潤

$$\left[a - b(q^1 + q^{2*}(q^1))\right] q^1 - cq^1 = \left(\frac{a+c-bq^1}{2}\right) q^1 - cq^1$$

  を最大にするように q^1 を選ぶ

- 一階条件: $\dfrac{a+c-bq^1}{2} - \dfrac{bq^1}{2} - c = 0 \iff q^{1*} = \dfrac{a-c}{2b}$

- 後手の均衡生産量:

$$q^{2*}(q^{1*}) = \frac{a-c}{4b}$$

- 均衡利潤:

$$\Pi^{1*} = \frac{(a-c)^2}{8b}, \qquad \Pi^{2*} = \frac{(a-c)^2}{16b}$$

8.4.3　先手有利

- この環境でのクールノー均衡 (=同時決定の場合) では

$$q^{1C} = q^{2C} = \frac{a-c}{3b}, \qquad \Pi^{1C} = \Pi^{2C} = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

- シュタッケルベルグ競争では**先手が有利** [**First mover advantage**] :

- ◇ 先手はより多い、後手はより少ない生産量を選んでいる

$$q^{1*} > q^{1C} > q^{2*}(q^{1*})$$

- ◇ 先手はより大きな利潤を、後手はより小さな利潤を得る

$$\Pi^{1*} > \Pi^{1C} > \Pi^{2*}$$

- 解釈: 先手による戦略的なコミットメント
  - ◇ 先手が先に大きめの数量にコミットする
  - ◇ 後手は価格をあまり下げないようにしたいので、生産量を減らさざるを得ない
  - ◇ 先手は価格を保ったまま売り上げを大きくできる
- コミット出来ない場合は?
  - ◇ 次のようなゲームを考える
    1. 企業 1 が数量 q^1 を決める
    2. q^1 を観察した企業 2 が数量 q^2 を決める
    3. (q^1, q^2) を観察した企業 1 が再び数量 q^1 を決め直す
  - ◇ このゲームの均衡生産量は $q_1^* < q_2^*$、均衡利潤は $\Pi_1^* < \Pi_2^*$ (演習)
  - ◇ あとで数量を変更できない (= 生産にコミット) という仮定が重要
- 一般に先手が常に有利とは限らない
  - ◇ 例: コイン合わせ、じゃんけん、(差別化財市場での) ベルトラン競争
- 先手が有利か後手が有利かを決める指標として戦略的代替/補完 [Strategic substitutes/complements] がある
  - ◇ 戦略的補完 (代替): 最適反応が相手の戦略の増加関数 (減少関数)

第9章　情報の経済学

- Jehle and Reny Ch. 8
- Varian Ch. 14
- Tadelis Ch. 14

9.1　モラルハザード

9.1.1　モラルハザードとは

- **モラルハザード** [Moral Hazard]: 自動車保険に加入したおかげで事故を起こしても補償されるので安全運転を心がけなくなること
  - ◇ 元々は保険業界の言葉
- 和訳すると「道徳的危険」「倫理の欠如」
  - ◇ 本当に道徳の問題なのか？
- モラルハザードは道徳や倫理の問題よりも、むしろ**情報**と**リスク**の問題
  - ◇ **情報**: 保険屋は運転手が実際に安全運転を心がけていたのかどうかを観察するのは(少なくとも完全には) 不可能
  - ◇ **リスク**: 安全に運転させるべきならば保険は提示せず自己責任を負わせたほうが良いが、一方で運転手がリスク回避的ならば責任を全て負わせるのも望ましくない
- よって保険を設計するうえで
  - ◇ 安全運転させる**インセンティブ**と
  - ◇ 事故による**リスク**

  の**トレードオフ**を考える必要がある
- この考え方は自動車保険に限らず、**隠された行動** [Hidden action] を代理人に行わせる問題一般に適用できる
  - ◇ **プリンシパル-エージェント問題** [Principal-agent problem] と呼ばれる
  - ◇ 他の典型的な例: リスク回避的な労働者に真面目に働いてもらうような賃金/ボーナス設計

9.1.2 労働者のモラルハザード問題

設定

- ある企業がある労働者を雇おうとしている
- 労働者は真面目に働く ($e = 1$) か働かない ($e = 0$) を選ぶ
  - ◇ 労働にはコスト ce がかかる (c は正の定数)
  - ◇ 労働によって企業は pe の確率で業績が上がり $R > 0$ の収益を得るが $1 - pe$ の確率で業績は上がらず収益は 0 ($0 < p < 1$ とする)
- 企業は e がどちらであるか直接は**観察できない** (隠された行動)
- 企業は収益に応じた賃金 (w_R, w_0) を労働者に提示する
- 労働者は賃金の提示をみて、雇用されるかどうかを決める
  - ◇ 雇用されなかった場合は別の企業に行き、企業は 0、労働者は $\overline{U}$ の期待効用を得られるとする
- 労働者は受け取った賃金を期待効用 $u(w)$ で評価し、**リスク回避的**であるとする ($u' > 0$、$u'' < 0$)
  - ◇ 雇用されて e を選んだときの効用: $peu(w_R) + (1 - pe)u(w_0) - ce$
  - ◇ $\phi \equiv u^{-1}$ とする
    - $*$ $\phi' > 0$(増加) かつ $\phi'' > 0$
- 企業は**リスク中立的**とする
  - ◇ 雇用されて e が選ばれている時の効用: $pe(R - w_R) - (1 - pe)w_0$
- この状況は以下のような展開形ゲームとして記述できる
  1. 企業が (w_R, w_0) を決める
  2. 労働者は雇用されるかどうかを決める
  3. 雇用された時は e を決める
  4. (収益に応じて w_0 もしくは w_R が支払われる)

誘引両立制約と参加制約

- **労働者に企業の思惑通りに意思決定をさせる**ことを制約にしたうえで**企業の利得を最大にする**問題を考える
- 雇用して努力してもらう ($e = 1$) 均衡に焦点を絞ると、考えるべき制約式は以下の二つ
  - ◇ **参加制約** [Participation constraint]: 労働者が企業に雇用される条件

$$pu(w_R) + (1 - p)u(w_0) - c \geq \overline{U}$$

◇ 誘引両立制約 [Incentive compatibility constraint]: 労働者が $e=0$ ではなく $e=1$ を選ぶ条件

$$pu(w_R)+(1-p)u(w_0)-c \geq u(w_0)$$

- 制約が満たされていれば (観察できなくても)$e=1$ が選ばれることが予測できるので、そのときの企業の利得は

$$p(R-w_R)-(1-p)w_0 = \underbrace{pR}_{\text{期待収益}} - \underbrace{[pw_R+(1-p)w_0]}_{\text{期待支払い}}$$

◇ 企業が決めるのは賃金だけなので、**期待利得を最大にすることは期待支払額を最小にすること**と同義

ベンチマーク: e が観察可能な場合

- 情報の問題の重要性を見るために、まず e が**観察可能**で e に応じた賃金を設計できる状況を考える

◇ w_{er}: 労働者が e を選び、収益が $r \in \{0, R\}$ だった時の賃金

- $e=1$ を選んでもらうときの最大化問題は以下のように書き換えられる

$$\begin{aligned}
\max_{w_{1R},w_{10},w_{0R},w_{00}} \quad & -[pw_{1R}+(1-p)w_{10}] \\
\text{subject to} \quad & pu(w_{1R})+(1-p)u(w_{10})-c \geq \overline{U} \\
& pu(w_{1R})+(1-p)u(w_{10})-c \geq u(w_{00})
\end{aligned}$$

- (誘引両立制約の右辺が w_{00} であることに注意)
- 解は以下を満たす (補足ノート参照)

◇ 参加制約は等号で成り立つ

◇ $w_{1R}=w_{10}$ かつ十分小さい w_{00}

- e が観察できる場合、**固定賃金** $w_{1R}=w_{10}=\overline{w} \equiv \phi(c+\overline{U})$ が最適解

◇ **効率的なリスク分散**:

 * リスク中立的な企業が全てのリスクを引き受けている
 * リスク回避的な労働者は賃金の変動にさらされない

◇ $w_{00} \downarrow$: 努力しなかった時に十分に罰則を与えている

 * 不確実性を与えることなく、適切に働かせることが出来る

◇ 企業の期待支払額は $\overline{w}$

e が観察不可能な場合

- $e = 1$ を選んでもらうときの最大化問題:

$$\begin{aligned} \max_{w_R, w_0} \quad & -[pw_R + (1-p)w_0] \\ \text{subject to} \quad & pu(w_R) + (1-p)u(w_0) - c \geq \overline{U} \\ & pu(w_R) + (1-p)u(w_0) - c \geq u(w_0) \end{aligned}$$

- ラグランジェ関数:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = -[pw_R + (1-p)w_0] &+ \lambda \left[pu(w_R) + (1-p)u(w_0) - c - \overline{U}\right] \\ &+ \mu \left[pu(w_R) + (1-p)u(w_0) - c - u(w_0)\right] \end{aligned}$$

- 1 階条件:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_R} &= -p + \lambda p u'(w_R) + \mu p u'(w_R) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_0} &= -(1-p) + \lambda(1-p)u'(w_0) - \mu p u'(w_0) = 0 \end{aligned}$$

- これを (λ, μ) について解くと

$$\lambda = \frac{p}{u'(w_R)} + \frac{1-p}{u'(w_0)} > 0, \qquad \mu = (1-p)\left[\frac{1}{u'(w_R)} - \frac{1}{u'(w_0)}\right]$$

- 誘因両立制約より

$$\begin{aligned} u(w_R) - u(w_0) \geq \frac{c}{p} > 0 \implies u(w_R) > u(w_0) \implies \frac{1}{u'(w_R)} > \frac{1}{u'(w_0)} \\ \implies \mu > 0 \end{aligned}$$

- 制約のラグランジェ乗数が共に**正**なので、相補性条件より制約は両方とも**等号**で成り立つ
  - ◇ **誘引両立制約**が無視できず重要になる
- 制約式の連立方程式を解くと解が求められる:

$$u(w_R^*) = \overline{U} + \frac{c}{p},\ u(w_0^*) = \overline{U} \iff w_R^* = \phi\left(\overline{U} + \frac{c}{p}\right),\ w_0^* = \phi\left(\overline{U}\right)$$

リスクとインセンティブのトレードオフ

- $w_R^* > w_0^*$: 努力を観察できない場合は**業績に連動する賃金** (良い業績にボーナス) にしないと努力をしない
  - ◇ $w_R = w_0$ は**誘引両立制約**を満たさない

- e を観察できる時と比べて、期待支払いはジェンセンの不等式より

$$pw_R^* + (1-p)w_0^* = p\phi\left(\overline{U} + \frac{c}{p}\right) + (1-p)\phi\left(\overline{U}\right)$$
$$> \phi\left(p\left(\overline{U} + \frac{c}{p}\right) + (1-p)\left(\overline{U}\right)\right) = \phi(\overline{U} + c) = \overline{w}$$

  ◇ 努力を促すにはリスク回避的な労働者にも賃金リスクを負担させなければならない
  $\rightarrow$ リスクプレミアムを支払う必要性

  ◇ 言い換えると労働者がリスク中立的な時は問題は起きない

    * 行動が観察できないという情報の問題「だけ」だと問題にならない

9.2 スクリーニング

9.2.1 事前の情報の非対称性

- 隠された行動: インセンティブを設計したあとにエージェントが観察されない行動を決める

  ◇ 事後 [Ex post] の情報の非対称性

- 事前 [Ex ante] の情報の非対称性: 元々私的情報を保有する個人をどのようにしたら適切な方向へ導けるか？

- メカニズムデザイン [Mechanism design]: プレーヤーたちがそれぞれ私的情報を持っている状況でどのように「メカニズム」を設計すれば非対称情報に惑わされずに適切な選択を取らせることができるか

- スクリーニング [Screening]: 適切なメカニズムの設計によってプレーヤーの持っている私的情報をひきだす事

9.2.2 価格差別

設定

- 売り手と買い手

- 売り手は q 単位の財を生産するのに cq の費用がかかる

- 買い手は以下のどちらか: 財を

  ◇ 高く評価するタイプ ($\theta = \theta_H$) と

  ◇ 低く評価するタイプ ($\theta = \theta_L < \theta_H$)

- タイプ θ は q 単位購入し p を支払うと $\theta V(q) - p$ の利得が得られる

  ◇ $V'(q) > 0$、$V''(q) < 0$、$V(0) = 0$ とする

- 売り手は q 単位の財を価格 p で売ると $p - cq$ の利得が得られる
- 買い手は自分のタイプを正確に知っているが売り手は**確率的にしか**分からない (買い手の**私的情報**)
  - ◇ タイプ θ_k である確率を f_k とする ($f_H + f_L = 1$)
- 意思決定のタイミング
  1. 買い手は私的に自分のタイプ θ を知る
  2. 売り手は数量と価格の組 (p, q) を提示する
     - ◇ 2 種類以上を提示しても良い
  3. 買い手はその中から一つ選ぶかまたは何も買わないかを選ぶ
  4. 選んだ組に応じて売り手は q 単位の生産を行って買い手に財を渡し、買い手は p を支払う

ベンチマーク: タイプが分かっている (完全情報) 場合

- 売り手もタイプが $\theta = \theta_k$ だと分かっている場合を考える
- 買い手は (p, q) だけが与えられた時にそれを選ぶ条件は

$$\theta_k V(q) - p \geq 0$$

- これが成り立っている時に売り手は $p - cq$ の利得が得られる
  - ◇ p は大きい方がいいので条件式の不等号は**等号**で成り立つ
  - ◇ 代入すると売り手の利得は $\theta_k V(q) - cq$
  - ◇ 1 階条件よりこれを最大にする q は

$$\theta_k V'(q) - c = 0 \iff V'(q) = \frac{c}{\theta_k}$$

  - ◇ これを満たす q を q_k^I とすると、最適な価格は $p_k^I = cq_k^I$
- 解釈: 基本的には「コースの定理」のアイディア
  - ◇ $\theta V(q) - cq$ は**両者の利得の和**
  - ◇ よって q_k^I は (θ_k の時の) **両者の利得の和を最大にする**数量
  - ◇ p_k^I は買い手が買ってくれる**最高価格**
    - $*$ 買い手の利得はどちらのタイプも 0
- ((p_k^I, q_k^I) 以外の数量と価格の組を提示する必要は無い)
- 情報が分かっている時には**利得の和を最大にしてぎりぎりまで価格を上げる**ことで、売り手は利潤を最大に出来る
- 買い手のタイプを完全に知ってる状況で、各タイプに応じて異なる価格を提示して利潤を最大化することを**第 1 種価格差別** [First degree price discrimination] という

売り手がタイプを知らない場合

- 売り手がタイプを知らない場合、以下の**メニュー価格** $((q_H, p_H), (q_L, p_L))$ を考える
  - ◇ タイプ θ_k は (q_k, p_k) を**自発的に選ぶ**
  - ◇ タイプに応じて数量と価格の組をカスタマイズしている
    - $*$ それぞれのタイプに一つの組を与えれば十分なので、3 種類以上の組を考える必要は無い
    - $*$ ただし $(q_H, p_H) = (q_L, p_L)$ の可能性も含んでいる
- このような売り方を**第 2 種価格差別** [Second degree price discrimination] という
- 第 2 種価格差別では、各タイプが対応する組を自発的に選ぶための追加的な条件が必要になる
- 制約は 2 種類で計 4 つ
  - ◇ **参加制約**: それぞれのタイプが「**買わない**」選択肢を選ばない

$$\theta_H V(q_H) - p_H \geq 0 \qquad \text{(PCH)}$$
$$\theta_L V(q_L) - p_L \geq 0 \qquad \text{(PCL)}$$

  - ◇ **誘引両立制約**: それぞれのタイプが**違うタイプの組**を選ばない

$$\theta_H V(q_H) - p_H \geq \theta_H V(q_L) - p_L \qquad \text{(ICH)}$$
$$\theta_L V(q_L) - p_L \geq \theta_L V(q_H) - p_H \qquad \text{(ICL)}$$

- 以上の制約が満たされている時、売り手の期待利得は

$$f_H (p_H - cq_H) + f_L (p_L - cq_L)$$

- **4 つの制約**の下で売り手の**期待利得を最大にする**メニュー価格を求める
- 解は以下を満たす (詳細は補足ノートを参照)
  - ◇ (ICH) と (PCL) は等号で成り立つ
  - ◇ これらを代入すると売り手の期待利得は

$$\begin{aligned} & f_H [\theta_H (V(q_H) - V(q_L)) + \theta_L V(q_L) - cq_H] + f_L [\theta_L V(q_L) - cq_L] \\ = & f_H [\theta_H V(q_H) - cq_H] - f_H [(\theta_H - \theta_L) V(q_L)] + f_L [\theta_L V(q_L) - cq_L] \end{aligned}$$

  - ◇ 1 階条件より最適な数量 q_H^* および q_L^* は

$$\begin{aligned} V'(q_H^*) &= \frac{c}{\theta_H} \ (\to q_H^* = q_H^I) \\ V'(q_L^*) &= \frac{c}{\theta_L - f_H(\theta_H - \theta_L)/f_L} \ (\to q_L^* < q_L^I) \end{aligned}$$

- (ICH) が等号で成り立つ

$$\theta_H V(q_H^*) - p_H^* = \theta_H V(q_L^*) - p_L^*$$

  ◇ 左辺: θ_H の利得

  ◇ 右辺: θ_H が θ_L のふりをする時に得られる利得

- (PCL) より右辺は

$$\theta_H V(q_L^*) - p_L^* > \theta_L V(q_L^*) - p_L^* = 0$$

$\rightarrow$ θ_H は正の利得を得られる

  ◇ 買い手の私的情報によって高評価タイプが低評価タイプのふりをすることを防ぐために高評価のタイプに正の利得を与えるように値段を下げる必要がある

  ◇ 私的情報を通じて得られる利得を情報レント [Information rent] という

- 等号で成り立つ制約式より θ_H が得られる利得 (=情報レント) は

$$\theta_H V(q_H^*) - p_H^* = (\theta_H - \theta_L) V(q_L^*)$$

- q_L(θ_L への数量) を下げることで情報レントを節約できる
$\rightarrow$ 低評価タイプへの過少供給

  ◇ ただし低評価タイプへも販売したいので q_L をあまり下げるのも得にならない

  ◇ 高評価タイプへの情報レントの節約と低評価タイプからの利潤のトレードオフ

- 実際の例: 飛行機のビジネスクラスとエコノミークラス

付 録A　最適化問題: 補足ノート

A.1 論理

A.1.1 必要性と十分性

- A と B を (真か偽かで判定する) 言明とする
  - ◇ 数学では言明は「真 [True]」か「偽 [False]」のどちらか
  - ◇ $\neg A$: A の否定 [Negation] (A ではない)
- $A \Longleftarrow B$: A は B の必要条件 [Necessity]
  - ◇ B(が真) ならば A(は真)
- $A \Longrightarrow B$: A は B の十分条件 [Sufficiency]
  - ◇ A(が真) ならば B(は真)
- $A \iff B$: A は B の必要十分条件
  - ◇ 「A(が真) ならば B(は真)」かつ「B(が真) ならば A(は真)」
  - ◇ A と B は同値 [Equivalent]
- 「$A \Longleftarrow B$」「$A \Longrightarrow B$」「$A \iff B$」も言明

A.1.2 証明の方法

- どのように「$A \Longrightarrow B$」を証明するか？
  1. (正攻法)[Constructive proof]
     - ◇ A は真であると仮定して、B も真であることを示す
  2. (対偶法)[Contrapositive proof]
     - ◇ B は偽であると仮定して、A も偽であることを示す
     - ◇ 「$A \Longrightarrow B$」とその対偶「$\neg B \Longrightarrow \neg A$」は同値
  3. 背理法 [Proof by contradiction]
     - ◇ A は真だが B は偽であると仮定し、論理矛盾を導く
     - ◇ もし「$A \Longrightarrow \neg B$」が偽ならば「$A \Longrightarrow B$」は真である

A.2　集合

A.2.1　表記

- **集合** [Set]: 要素 [Element] の集まり
  - ◇ 集合に属する要素を**元**という
- 例:
  - ◇ $S = \{2, 4, 6, 8\}$
  - ◇ $S = \{x \mid x$ は正の偶数で 10 未満 $\}$
  - ◇ $\mathbb{N}$: 自然数の集合
  - ◇ $\mathbb{R}$: 実数の集合
  - ◇ $\mathbb{R}_+$: 非負の実数の集合
  - ◇ $\mathbb{R}_{++}$: 正の実数の集合
  - ◇ $\mathbb{R}^n$: N 次元実数ベクトルの集合 (実数空間)
  - ◇ $[a, b] \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, $(a, b) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$: 区間 [Interval]
  - ◇ $S = \emptyset$: 空集合 [Empty set] (元のない集合)
- $x \in S$: x は S の元
  - ◇ $2 \in \{2, 4, 6, 8\}$
  - ◇ $-1 \notin \mathbb{R}_+$
- $S \subset T$: S は T の**部分集合** [Subset]
  - ◇ $\{2, 4\} \subset \{2, 4, 6, 8\}$
  - ◇ $[1, 3] \not\subset [2, 5]$
  - ◇ $\{3\} \subset \mathbb{R}$, $3 \not\subset \mathbb{R}$ (「$\{3\}$」は集合だが、「3」は集合ではない)
  - ◇ $S \subset S$
- $S = T \iff S \subset T$ かつ $T \subset S$
- $S \cup T \equiv \{x \mid x \in S$ または $x \in T\}$: **和集合** [Union]
- $S \cap T \equiv \{x \mid x \in S$ かつ $x \in T\}$: **共通部分** [Intersection]
- $S \setminus T \equiv \{x \mid x \in S$ かつ $x \notin T\}$: **差集合** [Set difference]
  - ◇ $S \subset U$ の時、$S^C = U \setminus S$ を S の (U における) **補集合** [Complement] という
- $S \times T \equiv \{(x, y) \mid x \in S$ かつ $y \in T\}$: **直積** [Product]

A.2.2 量化

- $\forall x \in S$: (S に属する) 全ての x[For all, for any]
- $\exists x \in S$: (S に属する) ある x が存在して [For some, there exists]
- 言明 A を「$\forall x \in S,\ P(x)$ は真」とする
  - ◇ $\neg A$: $\exists x \in S,\ P(x)$ は真ではない
    - ∗ 反例による反証
- 言明 B を「$\exists x \in S,\ P(x)$ は真」とする
  - ◇ $\neg B$: $\forall x \in S,\ P(x)$ は真ではない
    - ∗ 反例の提示では反証には不十分 (全ての x で $P(x)$ が偽であることを示す必要がある)

A.2.3 性質

凸集合

定義． 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が全ての $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in S$ と $t \in [0,1]$ について $t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2 \in S$ を満たす時、S を**凸集合** [Convex set] という。

- $t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^2$: ($\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ の) **凸結合** [Convex combination]

開集合と閉集合

定義． $\mathbf{x}^0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して:

- $||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}|| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i^0 - x_i)^2}$: をユークリッド距離 [Euclidean metric (distance)];
- $B_\varepsilon(\mathbf{x}^0) \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid ||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}|| < \varepsilon\}$ を ε 近傍 [Neighbourhood] という。

定義． 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ の任意の点 $\mathbf{x} \in S$ に対して、ある $\varepsilon > 0$ が存在し $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset S$ となる時、S を**開集合** [Open set] という

- 大雑把に言うと: 開集合は境界上の点を一切含まない

定義． S の補集合 $S^C (= \mathbb{R}^n \setminus S)$ が開集合の時 S を**閉集合** [Closed set] という。

- 閉集合の別の定義

定理．集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ について、以下の 2 つの言明は同値である:

1. S は閉集合
2. 全ての $n = 1, \ldots$ で $\mathbf{x}^n \in S$ かつ $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^n = \mathbf{x}$ となるような任意の点列 $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbf{x} \in S$ を満たす。

- 大雑把に言うと: 閉集合は境界上の点を**全て含む**

A.3 関数

A.3.1 単調性

- (表記): $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \subset \mathbb{R}^n$ に対して以下のように表記する
  - $\diamond$ $\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \iff$ 全ての $i = 1, \ldots, N$ で $x_i \geq y_i$
  - $\diamond$ $\mathbf{x} >> \mathbf{y} \iff$ 全ての $i = 1, \ldots, N$ で $x_i > y_i$
  - $\diamond$ $\mathbf{x} > \mathbf{y} \iff \mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

定義．定義域が $D \subset \mathbb{R}^n$ の実数値関数 $f : D \to \mathbb{R}$ を考える。

- 「$\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}^1$ ならば $f(\mathbf{x}^0) \geq (\mathbf{x}^1)$」を満たす時、**非減少関数**;
- 「$\mathbf{x}^0 >> \mathbf{x}^1$ ならば $f(\mathbf{x}^0) > (\mathbf{x}^1)$」を満たす時、**増加関数**;
- 「$\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}^1$ かつ $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{x}^1$ ならば $f(\mathbf{x}^0) > (\mathbf{x}^1)$」を満たす時、**厳密な増加関数**;
- 「$\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}^1$ ならば $f(\mathbf{x}^0) \leq (\mathbf{x}^1)$」を満たす時、**非増加関数**;
- 「$\mathbf{x}^0 >> \mathbf{x}^1$ ならば $f(\mathbf{x}^0) < (\mathbf{x}^1)$」を満たす時、**減少関数**;
- 「$\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}^1$ かつ $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{x}^1$ ならば $f(\mathbf{x}^0) < (\mathbf{x}^1)$」を満たす時、**厳密な減少関数**

という。

- (テキストや人によって多少定義が違う場合もある)
- 厳密な増加 (減少) 関数 $\Longrightarrow$ 増加 (減少) 関数 $\Longrightarrow$ 非減少 (非増加) 関数

A.3.2　連続性

定義． 定義域が $D \subset \mathbb{R}^n$ の実数値関数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ を考える。

- 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し「$||\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|| < \delta$ ならば $||f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)|| < \varepsilon$」である時、$f$ は $\mathbf{x}^0 \in D$ において**連続** [Continuous] であるという
- f が全ての $\mathbf{x} \in D$ において**連続** [Continuous] である時、f は (単純に) **連続**であるという。

- 大雑把に言うと: 定義域で変化 (δ) が小さければ、値域での変化 (ε) は大きくはない
- より大雑把に言うと曲線が**つながっている**

A.3.3　微分可能性: 1 変数関数

- 微分可能性: 連続 ＋ 「滑らか」

定義． 定義域が $D \subset \mathbb{R}$ の実数値関数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ を考える。極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^0 + h) - f(x^0)}{h}$$

が存在する時、f は $x^0 \in D$ において**微分可能** [Differentiable] であるという。極限は $df(x^0)/dx$ もしくは $f'(x^0)$ と表記され**導関数**もしくは**微係数** [Derivative] という。

- 微係数の意味
  - ◇ 幾何学的には曲線の**傾き**
  - ◇ 変化率: **1 単位** x を追加した時 [Marginal] の変化
- 例:
  - ◇ (多項式) $\dfrac{d}{dx}[\alpha x^n] = n\alpha x^{n-1}$; (定数) $\dfrac{d}{dx}\alpha = 0$
  - ◇ (指数関数) ($\alpha > 0$ として) $\dfrac{d}{dx}[\alpha^x] = \alpha^x \ln \alpha$;　$\dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x$
  - ◇ (自然対数) ($x > 0$ に対して) $\dfrac{d}{dx}[\ln x] = \dfrac{1}{x}$
  - ◇ (和) $\dfrac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$
  - ◇ (積) $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
  - ◇ (商) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
  - ◇ (合成関数) $\dfrac{d}{dx}\,[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$
  - ◇ (2 階微分) $\dfrac{d}{dx}\,[f'(x)] \equiv f''(x), \dfrac{d^2}{dx^2}\,[f(x)]$

A.3.4　微分可能性: n 変数関数

定義 . 定義域が $D \subset \mathbb{R}^n$ の実数値関数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ を考える。極限

$$\frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_n)-f(\mathbf{x}^0)}{h}$$

が存在する時、f は $x^0 \in D$ において x_i に関して **(偏) 微分可能** [(Partially) differentiable] であるという。極限は $\partial f(\mathbf{x}^0)/\partial x_i$ もしくは $f_i(\mathbf{x}^0)$ と表記され **(偏) 導関数**もしくは **(偏) 微係数** [Partial derivative] という。

- 考え方: 他の変数を**固定**した時, x_i が変化すると f はどう変化するか
  - ◇ $n=1 \to \partial f/\partial x_1 = df/dx_1$
- 2 階偏微分: $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right] \equiv f_{ii}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
- 交差微分 [Cross derivative]: $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right] \equiv f_{ij}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$
- 例: $f(x_1,x_2) = x_1x_2^2 + x_1x_2$
  - ◇ $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = x_2^2 + x_2, \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1x_2 + x_2$
  - ◇ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0$
  - ◇ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 2x_2 + 1$
- **ヤング** [Young] の定理: 一般に $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$
- **チェーンルール** [Chain rule]: 微分可能な n 変数関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ と微分可能な 1 変数関数 $g^1(t),\ldots,g^n(t)$ に対して

$$\frac{df}{dt}(g^1(t),\ldots,g^n(t)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(g^1(t),\ldots,g^n(t))g^{n\prime}(t).$$

A.4　線形代数

- 行列の基本的な性質については適当な線形代数ないしは経済数学の教科書を参照

A.4.1　1次独立と1次従属

定義． $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ をそれぞれ n 次元ベクトルとする。

1. ある k 次元ベクトル $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq (0, \ldots, 0)$ が存在し $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0}$ である時、ベクトルの組 $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ は **1次従属** [Linearly dependent] であるという。
2. $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ が1次従属でない時、**1次独立** [Linearly independent] であるという。

- ($\mathbf{x}^i$ を列ベクトルとすると) 1次独立/従属は $n \times k$ 行列 $[\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k]$ の階数で判定できる

A.4.2　定符号と2階条件

定義．

$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

を $n \times n$ の対称行列 $(a_{ij} = a_{ji})$ とする。n 次元の行ベクトルを $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$、その転置ベクトル (列ベクトル) を $\mathbf{x}^T$ とする。

1. 全ての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対して $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T > 0$ となる時、A を**正値定符号** [Positive definite];
2. 全ての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T \geq 0$ となる時、A を**半正値定符号** [Positive semi-definite];
3. 全ての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対して $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T < 0$ となる時、A を**負値定符号** [Negative definite];
4. 全ての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T \leq 0$ となる時、A を**半負値定符号** [Negative semi-definite]

という。

- $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T$ を **2次形式** [Quadratic form] という
- 定符号の性質は以下の方法で確認できる
  - ◇ A の行列式による判別
  - ◇ A の固有値による判別
- 微分可能な関数の凹凸は2階微分と定符号によって判別できる。

定義． $f(\mathbf{x})$ を 2 階微分可能な n 変数関数とする。以下の $n\times n$ 行列

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{x}) & f_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{1n}(\mathbf{x}) \\ f_{21}(\mathbf{x}) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(\mathbf{x}) & f_{n2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

をヘッセ行列 [Hessian matrix] という。

定理． $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ を 2 階微分可能な定義域 D の n 変数関数 $f(\mathbf{x})$ のヘッセ行列とする。この時、以下の同値関係が成立する。

- $f(\mathbf{x})$ が厳密な凹関数 $\iff$ 全ての $\mathbf{x}\in D$ で $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ が負値定符号;
- $f(\mathbf{x})$ が凹関数 $\iff$ 全ての $\mathbf{x}\in D$ で $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ が半負値定符号;
- $f(\mathbf{x})$ が厳密な凸関数 $\iff$ 全ての $\mathbf{x}\in D$ で $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ が正値定符号;
- $f(\mathbf{x})$ が凸関数 $\iff$ 全ての $\mathbf{x}\in D$ で $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ が半正値定符号。

- 1 変数関数 $\rightarrow$ 2 階微分が正か負かが定符号の性質を決める
- ヘッセ行列は**局所最適**かどうかを確認するのにも有用

定理． $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ を 2 階微分可能な n 変数関数 $f(\mathbf{x})$ のヘッセ行列とする。

- $f(\mathbf{x})$ が内点 $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ において極大であるとする。この時、$\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ は半負値定符号である。
- $f(\mathbf{x})$ が内点 $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ において極小であるとする。この時、$\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ は半正値定符号である。

- 内点で極大 (極小) $\rightarrow$ 「**局所的に**」凹関数 (凸関数)
  - ◇ ヘッセ行列の定符号の性質を $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ の局所的な部分は満たしている

A.5 最適化問題

A.5.1 例題

- 例題:

$$\max_{x_1,x_2} -ax_1^2 - bx_2^2 \text{ subject to } x_1+x_2-1\geq 0, x_1\geq 0, x_2\geq 0$$

- ラグランジュ方程式:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \equiv -ax_1^2 - bx_2^2 + \lambda_0(x_1 + x_2 - 1) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i x_i.$$

- KT 条件:

$$\begin{aligned} -2ax_1 + \lambda_0 + \lambda_1 = 0, \\ -2bx_2 + \lambda_0 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_0(x_1 + x_2 - 1) = 0, \lambda_i x_i = 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$

- この方程式を解けばよい: 方針は以下の通り
  1. $x_1 \neq 0$ を示す ($\rightarrow x_1 > 0$)
  2. (同様に)$x_2 > 0$ を示す
  3. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ を示す
  4. $\lambda_0 > 0$ を示す
  5. $x_1 + x_2 - 1 = 0$ を示す
  6. $\lambda_0 = 2ab/(a + b)$ を示す
  7. 解は

$$x_1 = \frac{b}{a+b}, x_2 = \frac{a}{a+b}.$$

A.5.2 有益なアプローチ

- もしある乗数 λ_i が正ならば、それに対応する制約式は有効なので、ある変数の陽関数の形に変換できる場合、それを目的関数に代入することで制約式を消去できる: 上記の例では
  - ◇ $\lambda_0 > 0$ が分かれば $x_2 = 1 - x_1$ となるので、目的関数に代入すると

$$-ax_1^2 - b(1 - x_1)^2$$

  - ◇ 1 変数の問題に単純化され、(他の制約は有効でないので)1 階条件から x_1 が、制約式から x_2 が同様に得られる
- 有効でない制約式を予測し確認する: もし上記の例で解が $x_1 > 0$ かつ $x_2 > 0$ となることを予測したならば、これらの制約を無視した問題を考える

$$\max_{x_1, x_2} -ax_1^2 - bx_2^2 \text{ subject to } x_1 + x_2 - 1 \geq 0$$

  この問題の KT 条件から同じ解を得ることができ、その解が無視した制約を満たすことを後で確認すればよい
  - ◇ 制約を無視して得た解が無視しない問題でも選べるのであれば、それを選ぶはず

付 録B　消費者理論: 補足ノート

B.1　選好

- **選好関係** [Preference relation]: 消費者の選好は以下の**二項関係** [Binary relation] によって表現するところから始まる

> **定義．** 消費者の選好は $\mathbb{R}^n_+$ 上の二項関係 $\succsim$ によって表現され、次を意味する: $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^n_+$ に対して
>
> $$\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \iff \text{「}\mathbf{x}^1\text{は}\mathbf{x}^2\text{よりも好まれる、もしくは無差別」}$$

- この定義より以下も言える:
  - ◇ $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2 \iff \mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ かつ $\mathbf{x}^2 \not\succsim \mathbf{x}^1$: 「$\mathbf{x}^1$ は $\mathbf{x}^2$ よりも厳密に好まれる (無差別ではない)」
  - ◇ $\mathbf{x}^1 \backsim \mathbf{x}^2 \iff \mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ かつ $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$: 「$\mathbf{x}^1$ と $\mathbf{x}^2$ は無差別」
- 選好関係が満たすと考えられる**公理** [Axiom]
  - ◇ **完備性** [Completeness]: 全ての $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^n_+$ に対して「$\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ もしくは $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$」
    - ∗ 常に比較可能
  - ◇ **推移性** [Transitivity]: 全ての $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3 \in \mathbb{R}^n_+$ に対して

$$[\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \text{ かつ } \mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3] \Longrightarrow \mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^3$$

    - ∗ 選好に循環が起きない
- 少し技術的な公理: **連続性** [Continuity]
  - ◇ 各 $\mathbf{x}^0 \in X$ に対して次の集合を定義する
    - ∗ $\succsim(\mathbf{x}^0) \equiv \{\mathbf{x} \in X \mid \mathbf{x} \succsim \mathbf{x}^0\}$: 「望ましい消費」の集合
    - ∗ $\precsim(\mathbf{x}^0) \equiv \{\mathbf{x} \in X \mid \mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}\}$: 「望ましくならない消費」の集合
  - ◇ 全ての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ に対して $\succsim(\mathbf{x})$ と $\precsim(\mathbf{x})$ が閉集合であるとき、$\succsim$ は連続性を満たす、という
  - ◇ 直観的には連続性によって少しの変化によって選好が大きく逆転することはなくなる
- 以上の公理が満たされていると、選好関係は**効用関数**によって表現することが出来る

定理．選好関係 $\succsim$ が完備性、推移性、連続性を満たすとする。この時、連続関数 $u: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ が存在し、以下の意味で $\succsim$ を表現する: 全ての $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^n_+$ に対して、

$$\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1 \iff u(\mathbf{x}^0) \geq u(\mathbf{x}^1)$$

- 証明は Kreps (2012, Ch.1) を参照
  - ◇ JR (pp.14–16) は追加的な仮定の下での証明が与えている
- 経済学的に意味を持つ公理:
  - ◇ **局所非飽和** [Local non-satiation]: 全ての $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n_+$ と $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$ が存在し $\mathbf{x} \succ \mathbf{x}^0$.
    - ∗ 近くに必ずより良い消費ベクトルが存在する
  - ◇ **厳密な単調性** [Strict Monotonicity]: 全ての $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^n_+$ に対して

$$\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}^1 \Longrightarrow \mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1,$$
$$\mathbf{x}^0 >> \mathbf{x}^1 \Longrightarrow \mathbf{x}^0 \succ \mathbf{x}^1$$

    - ∗ 多いほうが望ましい
  - ◇ 厳密な単調性 $\Longrightarrow$ 局所非飽和
- **凸性** [Convexity]: もし $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$ ならば全ての $t \in [0,1]$ に対して $t\mathbf{x}^0 + (1-t)\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$
- **厳密な凸性** [Strict convexity]: もし $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$ かつ $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$ ならば全ての $t \in (0,1)$ に対して $t\mathbf{x}^0 + (1-t)\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^0$
  - ◇ 「極端に偏った」消費よりも「万遍ない」消費の方が望ましい
  - ◇ (ただしこの意味合いは少し強く、一見このようには見えない選好も認めている)
- 単調性と凸性によって効用関数が扱いやすいものとなる

定理．選好関係 $\succsim$ が効用関数 $u(\mathbf{x})$ によって表現されているとする。この時、以下の同値関係が成り立つ。

1. $u(\mathbf{x})$ は増加関数 $\iff$ $\succsim$ は厳密に単調;
2. $u(\mathbf{x})$ は (厳密な) 準凹 $\iff$ $\succsim$ は (厳密な) 凸。

B.2 包絡線定理

定理． $f(\mathbf{x},a), g^1(\mathbf{x},a),\dots,g^m(\mathbf{x},a)$ を連続微分可能な関数とし、以下の制約条件付き最適化問題

$$\max_{\mathbf{x}\in D\subset\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},a) \text{ subject to } g^j(\mathbf{x},a)\geq 0, j=1,\dots,m$$

において、解 $\mathbf{x}^*(a)$ が一意に存在し、$(\mathbf{x}^*(a),\lambda^*(a))$ は KT 条件を満たし、$j=1,\dots,K$ では $g^j(\mathbf{x}^*(a),a)=0$、$j=K+1,\dots,m$ では $g^j(\mathbf{x}^*(a),a)>0$ とする。最後に $f^*(a)\equiv f(\mathbf{x}^*(a),a)$ と定義する。この時以下が成り立つ。

$$\frac{df^*}{da}(a)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a}(\mathbf{x}^*(a),\lambda^*(a),a)\equiv\frac{\partial f}{\partial a}(\mathbf{x}^*(a),a)+\sum_{j=1}^{K}\lambda^*(a)\frac{\partial g^j}{\partial a}(\mathbf{x}^*(a),a)$$

- 証明:

◇ 合成関数の微分 (チェーンルール) より

$$\frac{df^*}{da}(a)=\frac{df}{da}(\mathbf{x}^*(a),a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*(a),a)\frac{dx_i^*}{da}(a)+\frac{\partial f}{\partial a}(\mathbf{x}^*(a),a) \tag{B.1}$$

◇ KT 条件より:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*(a),\lambda^*(a),a)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*(a),a)+\sum_{j=1}^{K}\lambda_j^*(a)\frac{\partial g^j}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*(a),a)=0, \tag{B.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g^j}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*(a),a)\frac{dx_i^*}{da}(a)+\frac{\partial g^j}{\partial a}(\mathbf{x}^*(a),a)=0 \tag{B.3}$$

◇ (B.3) に $\lambda_j^*(a)$ をかけて $j=1,\dots,K$ で集計すると

$$\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\lambda_j^*(a)\frac{\partial g^j}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*(a),a)\frac{dx_i^*}{da}(a)+\sum_{j=1}^{K}\lambda_j^*(a)\frac{\partial g^j}{\partial a}(\mathbf{x}^*(a),a)=0.$$

◇ (B.2) に dx_i^*/da をかけて $i=1,\dots,n$ で集計すると

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*(a),a)\frac{dx_i^*}{da}(a)+\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\lambda_j^*(a)\frac{\partial g^j}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*(a),a)\frac{dx_i^*}{da}(a)=0$$

◇ $\sum_j\sum_i\lambda_j^*(\partial g^j/\partial x_i)(dx_i^*/da)$ を消去すると

$$\sum_{j=1}^{K}\lambda_j^*(a)\frac{\partial g^j}{\partial a}(\mathbf{x}^*(a),a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*(a),a)\frac{dx_i^*}{da}(a)$$

◇ これを (B.1) に代入すれば証明終わり

B.3 補償需要の価格効果

定理．

$$\frac{\partial x_i^h}{\partial p_i}(\mathbf{p}, u^*) \leq 0$$

- 証明はシェファードの補題と $e(\mathbf{p}, \overline{u})$ が p_i に関して凹関数であるという性質から導かれる (JR, Theorem 1.7 を参照)
- 別の証明は以下の通り:
  今、2 つの価格ベクトル $\mathbf{p}^0 = (p_0^0, \ldots, p_n^0)$ と $\mathbf{p}^1 = (p_1^0, \ldots, p_{i-1}^0, p_i^1, p_{i+1}^0, \ldots, p_n^0)$ (ただし $p_i^1 > p_i^0$) を考える
  - ◇ 補償需要 $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}^0, u^*)$ と $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}^1, u^*)$ は共に効用 u^* が達成し、かつそれぞれ価格 $\mathbf{p}^0$ および $\mathbf{p}^1$ の下で支出を最小化しているので
    - ∗ $\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^h(\mathbf{p}^0, u^*) \leq \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^h(\mathbf{p}^1, u^*)$ ($\mathbf{p}^0$ の下でも $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}^1, u^*)$ は制約を満たすが、支出最小化の解として選ばれていない)
    - ∗ $\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^h(\mathbf{p}^1, u^*) \leq \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^h(\mathbf{p}^0, u^*)$ ($\mathbf{p}^1$ の下でも $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}^0, u^*)$ は制約を満たすが、支出最小化の解として選ばれていない)
  - ◇ 足し合わせると $(\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^0) \cdot (\mathbf{x}^h(\mathbf{p}^1, u^*) - \mathbf{x}^h(\mathbf{p}^0, u^*)) \leq 0$
  - ◇ $k \neq i$ は $p_k^0 = p_k^1$ なので $(p_i^1 - p_i^0)(x_i^h(\mathbf{p}^1, u^*) - x_i^h(\mathbf{p}^0, u^*)) \leq 0$
  - ◇ $p_i^1 > p_i^0$ なので $x_i^h(\mathbf{p}^1, u^*) \leq x_i^h(\mathbf{p}^0, u^*)$: 財 i の価格が上がると財 i の補償需要 $x_i^h(\mathbf{p}^1, u^*)$ は減少する

付 録C　不確実性とリスク態度: 補足ノート

C.1　くじに対する選好

- $A \equiv \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ を実現可能性のある (有限の) 結果の集合とする
  - ◇ $a \in A$: 消費量ないしは金銭額
- 確率 p_i で結果 a_i が実現するもの g を**単純くじ** [Simple gamble, simple lottery] という
  - ◇ $g \equiv (p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n)$ と表記する
    - ∗ $p_i = 0$ の時には $p_i \circ a_i$ を削除してもよいとする
    - ∗ $p_i = 1$ の時にはくじ g は単純に a_i とも表記できるとする
  - ◇ $\mathcal{G}_{\mathcal{S}} \equiv \{(p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n) \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$: 単純くじの集合
- **複合くじ** [Compound gamble]: 確率的に (新しい) くじが実現するもの
  - ◇ くじ $g^1, \ldots, g^k$ に対して $(p_1 \circ g^1, \ldots, p_k \circ g^k)$ と表現する
    - ∗ g_i が複合くじの場合もある
    - ∗ ここでは、くじの状況が必ず有限回で終わる (=永遠にくじの状況が続く可能性はない、もしくはどこかで必ず単純くじに直面する) ものを複合くじとする
- $\mathcal{G}$: (単純もしくは複合) くじの集合
- ある個人のくじの選好を ($\mathcal{G}$ 上の) 二項関係 $\succsim$ で表現する
  - ◇ $g, g' \in \mathcal{G}$ に対して

$$g \succsim g' \iff g \text{ は } g' \text{よりも好まれるか、無差別}$$

- 選好 $\succsim$ が満たす公理:
  - ◇ **完備性** [Completeness]: 全ての $g, g' \in \mathcal{G}$ に対して「$g \succsim g'$ もしくは $g' \succsim g$」
  - ◇ **推移性** [Transitivity]: 全ての $g, g', g'' \in \mathcal{G}$ に対して

$$[g \succsim g' \text{ かつ } g' \succsim g''] \Longrightarrow g \succsim g''$$

  - ◇ 完備性と推移性が満たされていると、それぞれの結果を「順序付ける」ことが出来る: 以後、一般性を失うことなく $a_1 \succsim a_2 \succsim \cdots \succsim a_n$ とする
    - ∗ a_1 は他のどのくじ (もしくは結果) よりも好まれる

* a_n は他のどのくじ (もしくは結果) よりも好まれない

- 連続性 [Continuity]: 任意のくじ $g \in \mathcal{G}$ に対して、ある確率 $\alpha \in [0,1]$ が存在して $g \sim (\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n)$
  - ◇ 全てのくじは「最良の結果と最悪の結果のくじ」によって評価できる
- 単調性 [Monotonicity]: 任意の $\alpha, \beta \in [0,1]$ に対して

$$(\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n) \succsim (\beta \circ a_1, (1-\beta) \circ a_n) \iff \alpha \geq \beta$$

  - ◇ 「最良の結果と最悪の結果のくじ」については最良のくじに高い確率を割り振ってる方を好む
  - ◇ 単調性が満たされると $a_1 \succ a_n$、つまり最良の結果と最悪の結果は無差別ではないことが分かる [演習]
- 代替性 [Substitution]: もし $g^1, \ldots, g^k, h^1, \ldots, h^k \in \mathcal{G}$ が各 i について $g^i \sim h^i$ を満たすならば

$$g \equiv (p_1 \circ g^1, p_2 \circ g^2, \ldots, p_k \circ g^k) \sim h \equiv (p_1 \circ h^1, p_2 \circ h^2, \ldots, p_k \circ h^k)$$

  - ◇ 結果として実現するくじが無差別ならば、その (確率分布の等しい) 複合くじも無差別
- 全ての複合くじには最終結果 a_i が実現する「実効確率」が存在する
  - ◇ 任意のくじ $g \in \mathcal{G}$ に対して、$Prob(a_i \mid g) = p_i$ となる単純くじ $g' \equiv (p_1 \circ a_1, p_2 \circ a_2, \ldots, p_n \circ a_n) \in \mathcal{G}_{\mathcal{S}}$ が存在する
  - ◇ この時、g は g' を引き起こすという
- 縮約可能性 [Reduction to simple gambles]: 任意のくじ $g \in \mathcal{G}$ と g によって引き起こされた単純くじ $g' \in \mathcal{G}_{\mathcal{S}}$ について、$g \sim g'$
  - ◇ 各 (複合) くじは単純くじによって表現できる
- 独立性 [Independence]: もし単純くじ $g, g' \in \mathcal{G}_{\mathcal{S}}$ が無差別 ($g \sim g'$) ならば、全ての $\alpha \in [0,1]$ と全ての単純くじ g'' に対して

$$(\alpha \circ g, (1-\alpha) \circ g'') \sim (\alpha \circ g', (1-\alpha) \circ g'')$$

  - ◇ 他のくじが同じ確率で紛れ込んでいても、選好は変わらない
  - ◇ 代替性と縮約可能性 $\Longrightarrow$ 独立性 (JR Exercise 2.20)
  - ◇ 独立性を満たさない例: アレーの逆説 [Allais Paradox] (演習を参照)
- 上記の公理を全て満たしている時、くじへの選好は効用関数によって表現できる

定理． $A \equiv \{a_1, \ldots, a_n\}$ を実現可能性のある有限の結果の集合とする。$\mathcal{G}$ 上の二項関係が $\succsim$ 完備性、推移性、連続性、単調性、代替性、縮約可能性を満たしているとする。この時、効用関数 $U : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ が存在し、以下の意味で $\succsim$ を表現する: ある関数 $u : A \to \mathbb{R}$ が存在し、単純くじ $(p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n)$ を引き起こすくじ g に対して

$$U(g) \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i)$$

を満たし、かつ任意の 2 つのくじ g と g' に対して

$$g \succsim g' \iff U(g) \geq U(g')$$

を満たす。

- 定理での $u(\cdot)$ が vNM 効用に対応する
- 証明は JR(pp.103–105) を参照
    - ◇ 考え方は、以下の例のように「効用関数を構築する」ことが出来ることを示す:
        - ∗ $A = \{¥10000, ¥1000, ¥100, -¥1000\}$ とする
            1. $u(10000) = 1$ とする $u(-1000) = 0$ (1 が最良、0 が最悪)
            2. 以下の質問に答える: 「今、¥10000(最良) が確率 α で、–¥1000(最悪) が確率 $1 - \alpha$ で実現するくじに直面している。この時、どの α ならば「¥1000 を確実にもらうくじ」と無差別か？」
            3. その α を $u(1000) = \alpha$ とする
            4. 同様の質問を ¥100 でも行う

付 録 D　標準形ゲーム: 補足ノート

D.1 被支配戦略の逐次削除

- 被支配戦略の逐次削除の定義は以下の通り
  - ◇ 各ラウンド $k(=0,1,\dots)$ で以下のルールで戦略を削除する
    - ∗ $k=0,1,\dots$ に対して $S_i^k \subset S_i$ をラウンド k で生き残っているプレーヤー i の戦略の集合 (ただし $S_i^0 \equiv S_i$) と定義する
    - ∗ 各ラウンド k で、各プレーヤー i の戦略の集合を (S_i の代わりに)S_i^k と定義した標準形ゲームを考える
      1. プレーヤー i の厳密に支配された戦略を S_i^k から取り除く
      2. 残った戦略の集合を S_i^{k+1} とする
      3. ラウンド $k+1$ に進む
  - ◇ 全ての i で $\lim_{k\to\infty} S_i^k = \{s_i^*\}$ (単元集合) となる時、$s^* \equiv (s_1^*,\dots,s_n^*)$ は被支配戦略の逐次削除により (唯一) 生き残る戦略の組として定義される

D.2 弱支配戦略

定義．戦略 s_i が他の全ての戦略 $\tilde{s}_i \in S_i$ と全ての相手の戦略の組 $\tilde{s}_{-i} \in S_{-i}$ に対して

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(\tilde{s}_i, s_{-i})$$

が成り立つ時、戦略 s_i を**弱支配戦略 [Weakly dominant strategy]** という。

定義．それぞれの i について s_i^* が弱支配戦略の時、その戦略の組 $(s_1^*,\dots,s_n^*)$ を**弱支配戦略均衡 [Weakly dominant strategy equilibrium]** という。

- 厳密な支配戦略を**強支配戦略**という場合もある
- 定義を確認すると:

$$\text{強支配戦略} \Longrightarrow \text{弱支配戦略} \Longrightarrow \text{(任意の相手の戦略に対して) 最適反応}$$

- よって次のことが言える

定理． 1. もし戦略の組 s^* が (厳密な) 支配戦略均衡であるならば、s^* は弱支配戦略均衡である。

2. もし戦略の組 s^* が弱支配戦略均衡であるならば、s^* はナッシュ均衡である。

定義． 全ての相手の戦略の組 $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して

$$u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(s_i', s_{-i})$$

が成り立つ時、戦略 s_i が s_i' によって**弱支配されている** [Weakly dominated] という。

- 弱支配されている戦略の遂次削除を行うと以下の問題点がある
  - ◇ 弱支配されている戦略を含んだ戦略の組がナッシュ均衡である場合がある
    - ∗ 例:

$1 \setminus 2$	A	B
A	$(1,1)$	$(0,0)$
B	$(0,0)$	$(0,0)$

戦略 B は (どちらのプレーヤーにとっても)A に弱支配されているが (B, B) はナッシュ均衡

  - ◇ 弱支配されている戦略の遂次削除は、順番によって生き残る戦略が変わる場合がある
    - ∗ 例:

$1 \setminus 2$	L	R
U	$(2,3)$	$(3,3)$
C	$(2,0)$	$(2,1)$
D	$(1,1)$	$(3,0)$

複数の削除の仕方:

· $C \to R \to D$: (U, L) が生き残る

· $D \to L \to C$: (U, R) が生き残る

D.3 ナッシュ均衡の解釈

D.3.1 予測としてのナッシュ均衡の欠点

- **複数均衡**: どのナッシュ均衡が実際に選ばれるのか？
  - ◇ 選び方の基準
    - ∗ パレート効率性: あるナッシュ均衡よりも他のナッシュ均衡のほうが**全員の利得が高い**のであれば、後者が選ばれる
    - ∗ **焦点** [Focal point]: ゲームの定式化で捉えられていない要因が結果に影響を及ぼす可能性

· 文化、歴史、慣習、規範、暗黙の約束...

∗ 均衡の精緻化 [Refinement]/選択 [Selection]: 均衡に新たな妥当な条件を加えて、それを満たさない均衡を排除する

- 各プレーヤー個人にとってはナッシュ均衡は戦略の選択の手がかりにならない可能性

  ◇ 他のプレーヤーが (ある) ナッシュ均衡戦略を取ってくると信じられる時だけ、そのプレーヤーは (その) ナッシュ均衡戦略を取る誘因を持つ

D.3.2 それでも何故ナッシュ均衡を考えるのか？

- 一度プレーヤー間で (単なる口約束でもいいので) 合意に至れば各プレーヤーはそのナッシュ均衡から逸脱する理由がない

- ナッシュ均衡よりも有用な予測が他にない

付 録E　不完全競争: 補足ノート

E.1　ライプニッツの法則

- 定積分の微分は以下のように与えられる

定理 (微積分の基本定理). 微分可能な 2 変数関数 $f : D_1 \times D_2 \to R$ $(D_1, D_2, R \subset \mathbb{R})$ と微分可能な関数 $\alpha : D_2 \to D_1$ と $\beta : D_2 \to D_1$ に対して

$$\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx = f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

が成り立つ。

- 証明は解析学の本を参照: 基本的なアイディアは
  - ◇ $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ は $\alpha(y)$ から $\beta(y)$ の区間の $f(x,y)$ の下方部分の面責
  - ◇ y が変化すると
    - ∗ $f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y)$: $\alpha(y)$ と $\beta(y)$ が変化し、その変化した区間の部分の面積 $(f(\alpha(y),y)$ と $f(\beta(y),y))$ が追加/削減
    - ∗ $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$: $\alpha(y)$ から $\beta(y)$ までの全区間で関数 $f(x,y)$ が y を通じて変化

E.2　生産者余剰

- 以下、短期の均衡に焦点を当てる
- まず、競争的市場での企業について次のことが言える

定理 . 競争的市場において、$q^j(p)$ が企業 j の供給関数 (価格 p の下での利潤最大化の解) であるとする。この時 $(q^1(p), \ldots, q^J(p))$ は以下の問題の解である:

$$\max_{\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}^j} \sum_{j\in\mathcal{J}} [p\tilde{q}^j - c^j(\tilde{q}^j)]$$

- 解釈: 競争的市場の下では、**代表的な (価格受容的な) 意思決定主体が総利潤を最大にするように各企業の生産を決定しても同じ供給量になる**
  - ◇ この結果は、より一般的な生産関数を考えても成立する (JR Theorem 5.11)

- 企業 j の供給量が q^j、産業供給量が $q^S \equiv \sum_j q^j$ の時、代表的企業の利潤は

$$\sum_{j\in\mathcal{J}}[pq^j - c^j(q^j)] = pq^S - \sum_{j\in\mathcal{J}} c^j(q^j)$$

  ◇ もし産業供給量 q^S が利潤を最大化しているならば、各企業の供給量 q^j は $q^S = \sum_j q^j$ の制約の下 $\sum_{j\in\mathcal{J}} c^j(q^j)$ を最小化するように決定される

  ◇ 言い換えると、

    1. 各産業供給量 q^S に対して、費用を最小にする $(q^1, \ldots, q^J)$ を考えておき
    2. どの q^S が利潤を最大にするかを、最少化された費用も考慮して決める

- つまり、

$$\overline{c}(q^S) \equiv \min_{\substack{(q^1,\ldots,q^J)\in\mathbb{R}^J_+ \\ \sum_j q^j = q^S}} \sum_{j\in\mathcal{J}} c^j(q^j)$$

  という仮想の費用関数を考えると、代表的企業によって

$$pq^S - \overline{c}(q^S)$$

  を最大化する産業供給量 $q^S(p)$ が決まる

  ◇ この時、 実際の市場では企業 j は

$$(q^1(p), \ldots, q^J(p)) \in \underset{\substack{(\tilde{q}^1,\ldots,\tilde{q}^J)\in\mathbb{R}^J_+ \\ \sum_j \tilde{q}^j = q^S}}{\arg\min} \sum_{j\in\mathcal{J}} c^j(\tilde{q}^j)$$

  となる $q^j(p)$ を供給していることになる

- 産業の供給関数は代表的企業の利潤最大化の 1 階条件より

$$p - \overline{c}'(q^S(p)) = 0$$

  を満たす: **産業供給曲線は費用を $\overline{c}$ で評価した時の限界費用曲線と一致する**

- 企業 j の供給関数 $q^j(p)$、価格 p の時、$c^j_v(0) = 0$、$\overline{c}(0) = \sum_{j\in\mathcal{J}} c^j(0)$ に注意すると生産者余剰は

$$\begin{aligned} TS(p) &= \sum_{j\in\mathcal{J}}[pq^j(p) - c^j_v(q^j(p))] = pq^S(p) - \sum_{j\in\mathcal{J}}[c(q^j(p)) - c^j(0)] \\ &= pq^S(p) - \overline{c}(q^S(p)) + \overline{c}(0) = \int_0^{q^S(p)} [p - \overline{c}'(x)]dx \end{aligned}$$

  ◇ これは価格 p と供給曲線 $\overline{c}'$ ではさまれた領域の面積に一致する

E.3 独占

- 独占 [Monopoly]: 企業 1 社のみが市場に供給者として存在し、(価格受容的ではなく) 生産量を操作することで価格も操作できる状態
- クールノー競争と同様の環境を考える
  - ◇ 財の逆需要関数: $p(q) = a - bq$
  - ◇ 独占企業の費用: cq
- 数量 q を決めた時の収益: $qp(q) = q(a - bq)$
- 利潤: $q(a - bq) - cq$
- 利潤を最大にするような供給量 q^M: 1 階条件より

$$a - 2bq^M - c = 0 \iff q^M = \frac{a-c}{2b}$$

  - ◇ 独占価格: $p^M = \dfrac{a+c}{2}$
  - ◇ クールノー競争で $J = 1$ の時に対応する
- ここでは数量を決定する独占問題を考えたが、(数量の変わりに) 価格を決める問題を考えても独占の場合は同様の結果 ($p = (a + c)/2$) が得られる

E.4 ベルトラン・ナッシュ均衡

- ベルトラン・ナッシュ均衡では企業は限界費用 c より低い価格はつけない
- 証明:
  - ◇ 少なくともどちらかの企業が c より低い価格をつけているとする
  - ◇ 今、$p_i \leq p_j$ とすると、
    - ∗ $p_i < c$ かつ
    - ∗ 企業 i の需要量 (d_i とする) は正 (a または $a/2$)

    なので、利潤は $(p_i - c)d_i < 0$
  - ◇ ここで企業 i が価格を c に変更すると需要量 d_i を問わず利潤は $(c - c)d_i = 0$ であり、利潤は厳密に増加するので企業 i は逸脱する

付 録F　情報の経済学: 補足ノート

F.1　労働者のモラルハザード問題

- e が観察可能な時、$e = 1$ を選んでもらうときの最大化問題:

$$
\begin{aligned}
\max_{w_{1R}, w_{10}, w_{0R}, w_{00}} \quad & -[pw_{1R} + (1-p)w_{10}] \\
\text{subject to} \quad & pu(w_{1R}) + (1-p)u(w_{10}) - c \geq \overline{U} \\
& pu(w_{1R}) + (1-p)u(w_{10}) - c \geq u(w_{00})
\end{aligned}
$$

- 解き方
  - ◇ 誘引両立制約は無視できる
    - ∗ w_{00} は誘引両立制約のみに影響し、これを十分に小さくしておけば誘引両立制約は常に満たされる
  - ◇ 参加制約は等号で成り立つ
    - ∗ 等号でなければ少し w_{1R} か w_{10} を下げることが出来る
  - ◇ $w_{1R} = w_{10} (= \overline{w})$(ただし $\overline{w}$ は $u(\overline{w}) - c = \overline{U}$ を満たす賃金: 参加制約を等号で満たす固定賃金額)
    - ∗ 今、解は等号で参加制約を満たすが $w_{1R} \neq w_{10}$ とする
    - ∗ u が厳密な凹関数であることからジェンセンの不等式より

$$
u(\overline{w}) - c = \overline{U} = pu(w_{1R}) + (1-p)u(w_{10}) - c < u(pw_{1R} + (1-p)w_{10}) - c
$$

より $u(pw_{1R} + (1-p)w_{10}) > u(\overline{w})$

    - ∗ u は増加関数なので $pw_{1R} + (1-p)w_{10} > \overline{w}$: $w_{1R} = w_{10} = \overline{w}$ より期待支払いが多くなる
    - ∗ よって $w_{1R} \neq w_{10}$ は解にならない

F.2　価格差別

- 4 つの制約の下での期待利得の最大化問題:

$$
\begin{aligned}
\max_{p_H, q_H, p_L, q_L} \quad & f_H (p_H - cq_H) + f_L (p_L - cq_L) & \\
\text{subject to} \quad & \theta_H V(q_H) - p_H \geq 0 & \text{(PCH)} \\
& \theta_L V(q_L) - p_L \geq 0 & \text{(PCL)} \\
& \theta_H V(q_H) - p_H \geq \theta_H V(q_L) - p_L & \text{(ICH)} \\
& \theta_L V(q_L) - p_L \geq \theta_L V(q_H) - p_H & \text{(ICL)}
\end{aligned}
$$

- 解き方の方針: (ICL) と (PCH) は無視し、(ICH) と (PCL)

$$\begin{aligned}\theta_H V(q_H) - p_H &\geq \theta_H V(q_L) - p_L \\ \theta_L V(q_L) - p_L &\geq 0\end{aligned}$$

  だけを制約とした最適化問題を考え、あとでこの問題の解が残りの制約を満たすことを確認する

- 価格は大きい方が売り手の期待利得が高いので
  - ◇ p_H を出来るだけ高くする $\rightarrow$ (ICH) は等号で成立
  - ◇ p_L を出来るだけ高くする $\rightarrow$ (PCL) は等号で成立
- 両方とも等号で成立するので代入すると売り手の期待利得は

$$\begin{aligned}& f_H\left[\theta_H(V(q_H) - V(q_L)) + \theta_L V(q_L) - cq_H\right] + f_L\left[\theta_L V(q_L) - cq_L\right] \\ = & f_H\left[\theta_H V(q_H) - cq_H\right] - f_H\left[(\theta_H - \theta_L)V(q_L)\right] + f_L\left[\theta_L V(q_L) - cq_L\right]\end{aligned}$$

- 一階条件より最適な数量 q_H^* および q_L^* は

$$\begin{aligned}V'(q_H^*) &= \frac{c}{\theta_H} \ (\rightarrow q_H^* = q_H^I) \\ V'(q_L^*) &= \frac{c}{\theta_L - f_H(\theta_H - \theta_L)/f_L} \ (\rightarrow q_L^* < q_L^I)\end{aligned}$$

- 無視した制約は最適解で満たされているのか？
- (PCH): (ICH)(PCL) が成り立っているので

$$\theta_H V(q_H^*) - p_H^* \underbrace{\geq}_{\text{(ICH)}} \theta_H V(q_L^*) - p_L^* \underbrace{\geq}_{(\theta_H > \theta_L)} \theta_L V(q_L^*) - p_L^* \underbrace{\geq}_{\text{(PCL)}} 0$$

- (ICL):
  - ◇ (ICH) が等号で成り立つので

$$\theta_L V(q_L^*) - p_L^* \geq \theta_L V(q_L^*) + \theta_H V(q_H^*) - p_H^* - \theta_H V(q_L^*)$$

  - ◇ $q_H^* > q_L^*$ より $(\theta_H - \theta_L)(V(q_H^*) - V(q_L^*)) > 0$ になるので

$$\theta_L V(q_L^*) + \theta_H V(q_H^*) - \theta_H V(q_L^*) \geq \theta_L V(q_H^*)$$

  - ◇ よって: $\theta_L V(q_L^*) - p_L^* \geq \theta_L V(q_H^*) - p_H^*$