

8. UNIDAD DIDACTICA 8: TANGENCIAS Y ENLACES

8.1. TANGENCIAS

Se dice que dos figuras planas son tangentes cuando tienen un solo punto en común, al que se conoce como **punto de tangencia**.

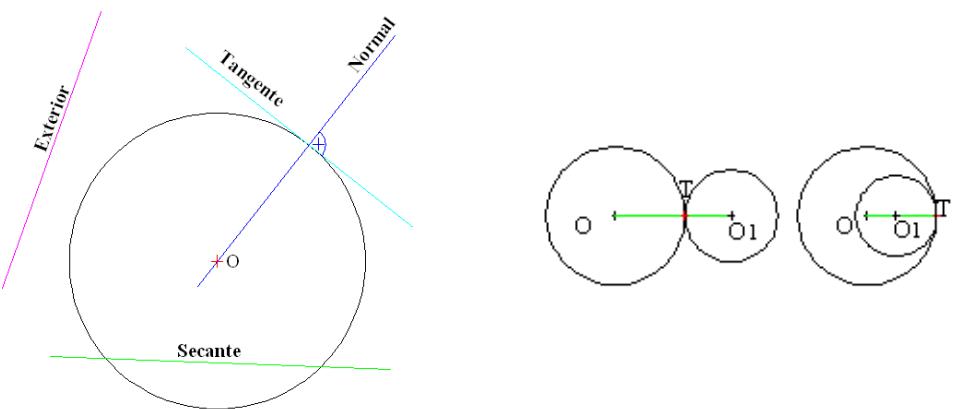
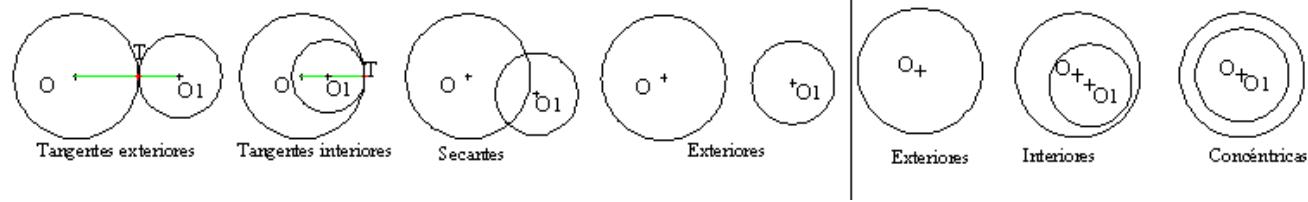
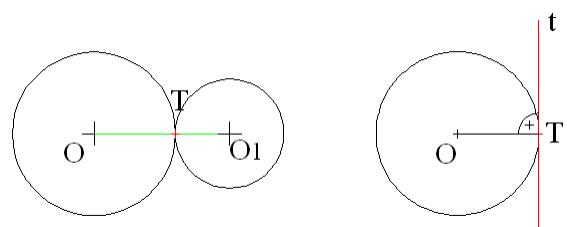
Las tangencias pueden producirse entre circunferencias y rectas, entre polígonos y rectas, entre circunferencias y polígonos, etc. Sin embargo, las tangencias más habituales en dibujo técnico son aquellas que se generan entre rectas y circunferencias, y entre circunferencias entre sí.

8.1.1. PROPIEDADES

Para solucionar con exactitud los trazados de tangencias, han de tenerse en cuenta los siguientes puntos:

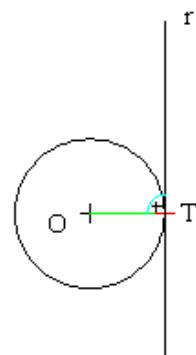
1.-Una recta y una circunferencia, o dos circunferencias son tangentes entre sí, si tienen un único punto en común, llamado **punto de tangencia(T)**.

2.-Una recta y una circunferencia, o dos circunferencias, son exteriores si no tiene ningún punto en común, y secantes si tienen dos puntos comunes.

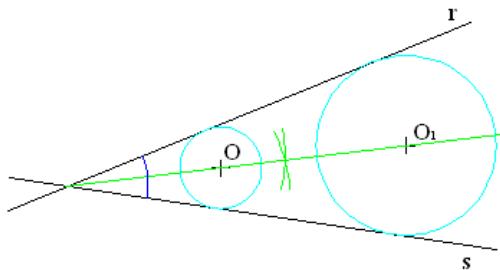


3.- Si dos circunferencias son tangente, el punto de tangencia común está en la línea que une sus centros.

4.- Si una recta es tangente a una circunferencia el punto de tangencia es el pie de la perpendicular trazada desde el centro de la circunferencia a la recta.



- 5.- El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a dos rectas, es la bisectriz de ambas.

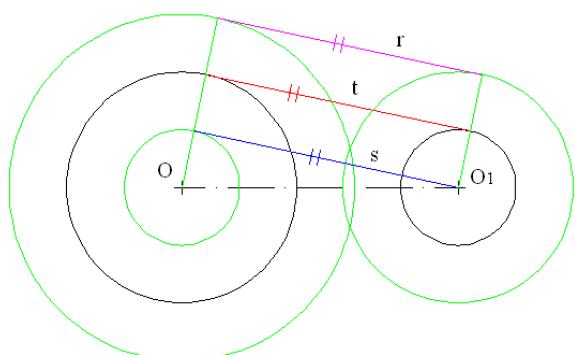


- 6.- En toda circunferencia las mediatrices de sus cuerdas pasan por su centro.

- 7.- Dilatar negativa o positivamente una circunferencia es aumentar o disminuir su radio.

- 8.- Si la recta t es tangente a dos circunferencias, las rectas r y s paralelas a t serán igualmente tangentes a las circunferencias concéntricas con las anteriores y de radio aumentado o disminuido en la distancia que separa T de r.

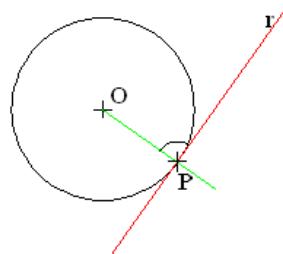
- 9.- Un punto se puede considerar como una circunferencia de radio O.



8.1.1.1. Construcción de tangencias entre rectas y circunferencias:

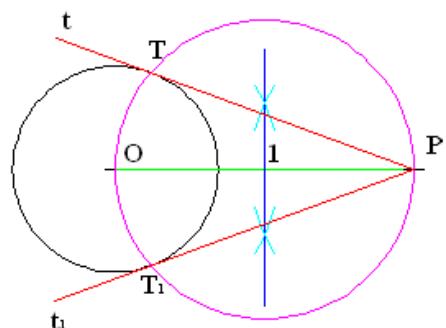
8.1.1.1.1. Tangente a una circunferencia en un punto de ella:

- 1.- Se traza el radio que une los puntos O y P, siendo este último punto por donde se ha de trazar la recta tangente a la circunferencia.
- 2.- A continuación, se dibuja por el punto P la recta t perpendicular al radio, que es la recta tangente t buscada.



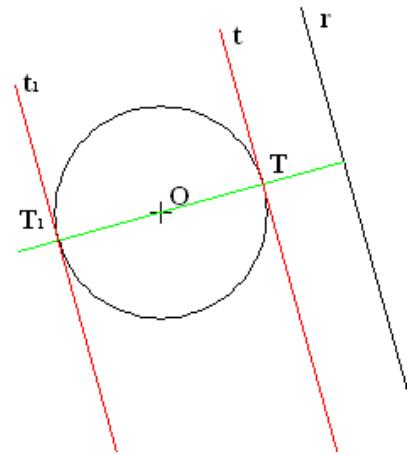
8.1.1.1.2. Tangentes a una circunferencia desde un punto P exterior a ella:

- 1.- Se une el punto P dado con el centro de la circunferencia, O, y se dibuja la mediatrix, obteniéndose así el punto I.
- 2.- Con centro en I y radio I-O, se traza un arco que corta a la circunferencia en los puntos T y T₁, que son los puntos de tangencia.
- 3.- Las rectas de tangencia t y t₁ resultan de unir el punto P con puntos T y T₁.



8.1.1.1.3. Tangentes a una circunferencia y paralelas a una dirección:

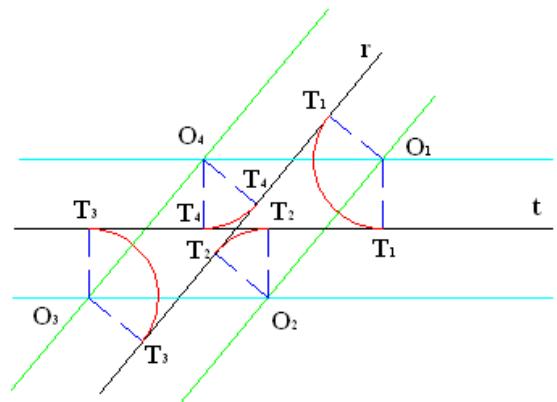
- 1.- Se traza por el centro de la circunferencia una recta t perpendicular a la dirección dada. Esta perpendicular determina los puntos T y T_1 de tangencia al cortar la circunferencia.
- 2.- Las rectas tangentes t y t_1 son las paralelas a la dirección d que contienen a los puntos de tangencia T y T_1 .



8.1.1.1.4. Circunferencias de radio conocido $r=15$ mm tangentes a dos rectas convergentes (r y s).

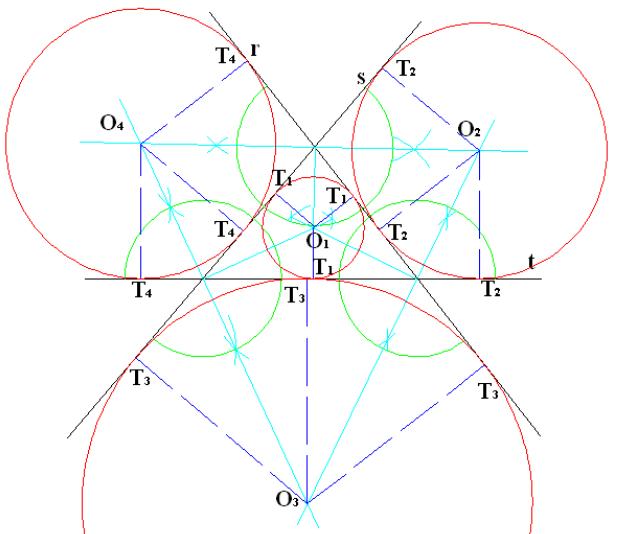
Como puede observarse, hay cuatro ángulos diferentes; por tanto, se podrán dar cuatro soluciones a este problema.

- 1.- Se dibujan las paralelas a las rectas dadas a una distancia igual al radio r dado de la circunferencia que se cortan en los puntos O_1 , O_2 , O_3 y O_4 , que son los centros de las circunferencias buscadas.
- 2.- Por los puntos O_1 , O_2 , O_3 y O_4 , se trazan perpendiculares a las rectas r y s que nos determinan los puntos de tangencia T_1 , T_2 , T_3 y T_4 .
- 3.- Se trazan los arcos de circunferencia con centro en los puntos O_1 , O_2 , O_3 y O_4 , de radio dado 15 mm.



8.1.1.1.5. Circunferencia tangente a tres rectas que se cortan dos a dos (r , s , y t):

- 1.- Los centros de las circunferencias tangentes a las rectas r , s y t , se encuentran en la intersección de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas al cortarse entre sí.
- 2.- Por tanto, en este caso, existen cuatro posibles soluciones. Al cortarse las bisectrices se obtienen los centros O_1 , O_2 , O_3 y O_4 , de las circunferencias tangentes.
- 3.- Los puntos de tangencia T_1 , T_2 , T_3 y T_4 , se determinan trazando, por los centros O_1 , O_2 , O_3 y O_4 , hallados, rectas perpendiculares a r , s y t .



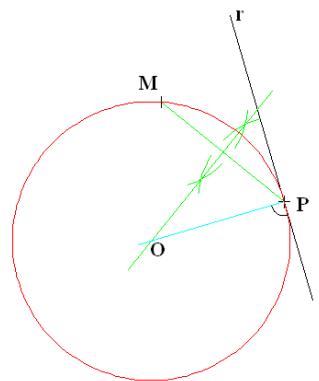
8.1.1.6. Circunferencia que pasa por un punto dado (M) y es tangente a una recta r en otro punto de ella, también dado:

1.- Puesto que \underline{M} y \underline{P} tienen que ser puntos de la circunferencia que se desea trazar, su centro tiene que encontrarse en la mediatrix de \underline{MP} .

2.- Trazamos la mediatrix de \underline{MP} .

3.- Al ser \underline{P} el punto de tangencia en la recta \underline{r} , el centro \underline{Q} de la circunferencia se sitúa en la perpendicular trazada desde \underline{P} a \underline{r} .

4.- Donde la perpendicular a \underline{r} trazada desde \underline{P} corta a la mediatrix de \underline{MP} se encuentra el centro \underline{Q} de la circunferencia.



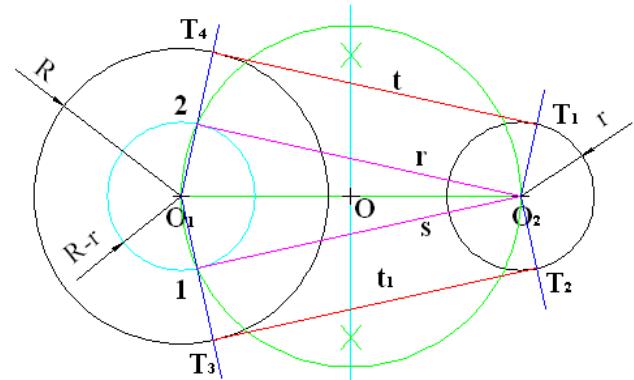
8.1.1.7. Rectas tangentes exteriores a dos circunferencias conocidas de distinto radio:

1.- Se unen los puntos $\underline{O_1}$ y $\underline{O_2}$ y se halla el punto medio de éstos, que se denomina \underline{Q} . Se traza una circunferencia con centro en \underline{Q} y que pase por los centros $\underline{O_1}$ y $\underline{O_2}$.

2.- Se traza una circunferencia concéntrica a la de mayor radio centro en $\underline{O_1}$ que sea igual a la diferencia entre radios mayor y menor ($R-r$).

3.- La circunferencia anterior corta a la auxiliar de centro en \underline{Q} en los puntos $\underline{1}$ y $\underline{2}$. Se une $\underline{O_1}$ con $\underline{1}$ y $\underline{2}$, resultando así los puntos de tangencia $\underline{T_3}$ y $\underline{T_4}$.

4.- Se dibujan por $\underline{O_2}$ dos radios paralelos a $\underline{O_1-T_3}$ y $\underline{O_1-T_4}$ para determinar los puntos $\underline{T_1}$ y $\underline{T_2}$. Al unir $\underline{T_1}$ con $\underline{T_4}$ y $\underline{T_2}$ con $\underline{T_3}$, se trazan las rectas tangentes \underline{t} y $\underline{t_1}$.



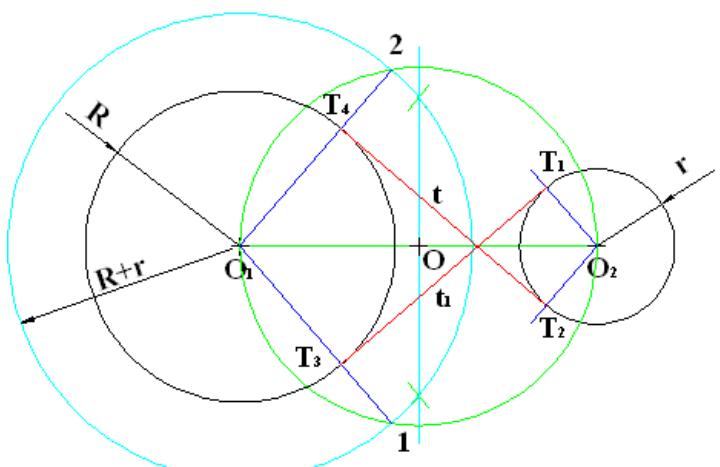
8.1.1.8. Rectas tangentes interiores a dos circunferencias conocidas y de distinto radio:

1.- Se unen los puntos $\underline{O_1}$ y $\underline{O_2}$ y se halla el punto medio de éstos, que se denomina \underline{Q} . Se traza una circunferencia con centro en \underline{Q} y que pase por los centros $\underline{O_1}$ y $\underline{O_2}$.

2.- Se traza una circunferencia concéntrica a la de mayor radio centro en $\underline{O_1}$ que sea igual a la diferencia entre radios mayor y menor ($R+r$).

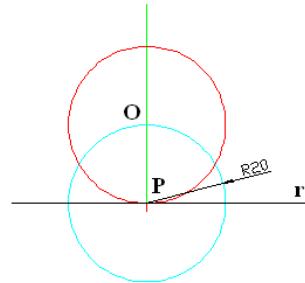
3.- La circunferencia anterior corta a la auxiliar de centro en \underline{Q} en los puntos $\underline{1}$ y $\underline{2}$. Se une $\underline{O_1}$ con $\underline{1}$ y $\underline{2}$, resultando así los puntos de tangencia $\underline{T_3}$ y $\underline{T_4}$.

4.- Se dibujan por $\underline{O_2}$ dos radios paralelos a $\underline{O_1-T_3}$ y $\underline{O_1-T_4}$ a diferentes lado del eje $\underline{O_1-O_2}$ para determinar los puntos $\underline{T_1}$ y $\underline{T_2}$. Al unir $\underline{T_1}$ con $\underline{T_3}$ y $\underline{T_2}$ con $\underline{T_4}$, se trazan las rectas tangentes \underline{t} y $\underline{t_1}$.

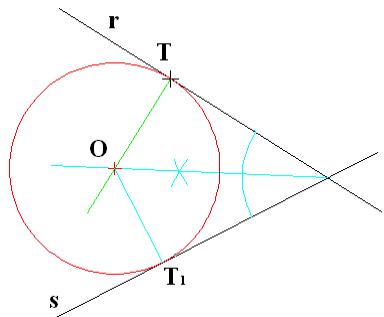


8.1.1.1.9. Circunferencia de radio $r=20$ mm., tangente a una recta en un punto P :

- 1.- Se traza una perpendicular por P .
- 2.- Se lleva desde P , sobre la perpendicular trazada anteriormente la medida del radio dado.
- 3.- Obtenemos el centro Q de la circunferencia solución.
- 4.- Al otro lado de la recta r tendríamos otra solución.

**8.1.1.10. Circunferencia tangente común a dos rectas que se cortan, (r y s), con un punto T de tangencia dado:**

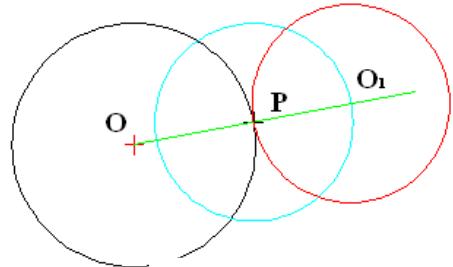
- 1.- Hallamos la bisectriz del ángulo formado por las dos recta r y s .
- 2.- Trazamos una perpendicular por T a la recta r , hasta que corte a la bisectriz, y obtenemos el punto Q , centro de la circunferencia solución.
- 3.- Hallamos el otro punto de tangencia T_1 trazando una perpendicular desde Q a la recta s y trazamos la circunferencia.

**8.1.1.2. Construcción de tangencias entre circunferencias:**

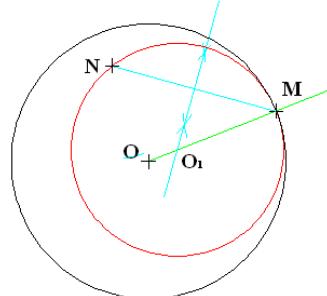
Las circunferencias tangentes pueden ser de dos tipos: interiores y exteriores: en las primeras, la distancia de sus centros es igual a la diferencia de sus radios; y en las segundas, la distancia de sus centros es igual a la suma de sus radios.

8.1.1.2.1. Circunferencia de radio r tangente exterior a otra circunferencia conocida de centro Q en el punto P , de radio ($r=20$ mm.)

- 1.- Se prolonga un radio de la circunferencia dada, Q , que contenga el punto P . Se le suma el radio r conocido a partir de P y se determina el centro, Q_1 , de la circunferencia buscada.
- 2.- Finalmente, se traza la circunferencia que se busca con centro en Q_1 y radio Q_1-P .

**8.1.1.2.2. Circunferencia tangente a otra conocida en un punto M y que pasa por otro punto interior N :**

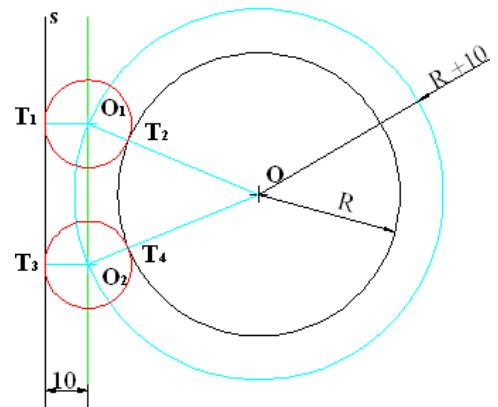
- 1.- Al ser M y N puntos de la misma circunferencia, su centro está en la mediatrix de $M-N$.
- 2.- Trazamos la mediatrix de $M-N$.
- 3.- Se une Q , con M y, donde corta a la mediatrix, se obtiene el centro Q_1 de la circunferencia, que se dibuja con radio Q_1-N .



8.1.1.2.3. Circunferencia de radio r conocido, ($r=10$ mm), tangente a otra circunferencia y a una recta s dada:

1.- Se traza un arco con centro en \underline{O} , y que tenga como radio la suma del radio de la circunferencia dada más el radio r conocido.

2.- Se traza una recta paralela a la dada que diste de ésta la medida del radio r ($r=10$) que se conoce. La intersección de esta paralela con el arco son los el centros $\underline{O_1}$ y $\underline{O_2}$ de la circunferencia buscada, y los puntos $\underline{T_1}$, $\underline{T_2}$, $\underline{T_3}$ y $\underline{T_4}$ son los puntos de tangencia



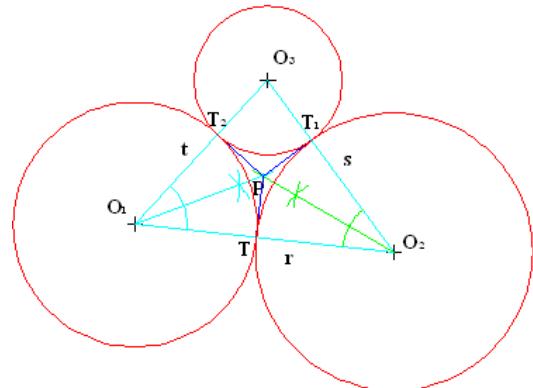
8.1.1.2.4. Circunferencias tangentes dos a dos, conociendo sus centros:

1.- Se unen los centros $\underline{O_1}$, $\underline{O_2}$ y $\underline{O_3}$ conocidos de las circunferencias, determinando un triángulo.

2.- Se hallan las bisectrices de los vértices del triángulo, obteniendo el punto P .

3.- Se trazan perpendiculares a los lados del triángulo r , s y t , desde el punto P ; de este modo se determinan los puntos de tangencia $\underline{T_1}$, $\underline{T_2}$ y $\underline{T_3}$, el radio de cada una de las circunferencias.

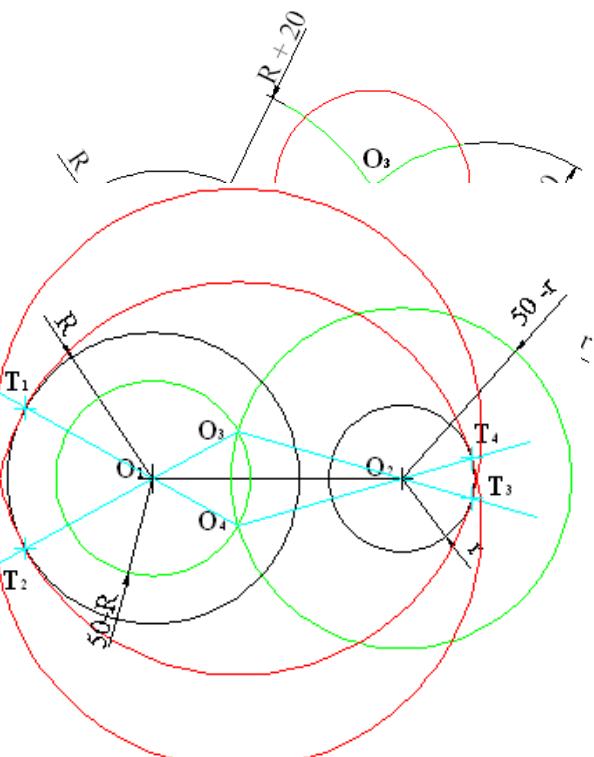
4.- Con centro en $\underline{O_1}$, $\underline{O_2}$ y $\underline{O_3}$ trazamos las circunferencias que pasan por $\underline{T_1}$, $\underline{T_2}$ y $\underline{T_3}$.



8.1.1.2.5. Circunferencias de radio r conocido, ($r=20$ mm.), tangente y exterior a dos circunferencias dadas:

1.- Desde $\underline{O_1}$ y $\underline{O_2}$ se trazan arcos cuyo radio sea igual a la suma del radio conocido r y el respectivo de la circunferencia dada, es decir, ($R+20$) y ($r+20$). Al cortarse estos arcos, quedan determinados los centros $\underline{O_3}$ y $\underline{O_4}$ de las circunferencias que hay que trazar. Uniendo $\underline{O_1}$ y $\underline{O_2}$ con $\underline{O_3}$ y $\underline{O_4}$ resultan los puntos de tangencia $\underline{T_1}$, $\underline{T_2}$, $\underline{T_3}$ y $\underline{T_4}$.

2.- Se dibujan las circunferencias pedidas, con centro en $\underline{O_3}$ y $\underline{O_4}$ y radio r .



8.1.1.2.6. Circunferencias de radio r

conocido, tangente interior a dos circunferencias dadas: ($r=50 \text{ mm.}$)

1.- El proceso es parecido al trazado anterior.

1.- Desde $\underline{O_1}$, y $\underline{O_2}$ se trazan arcos cuyo radio sea igual a la diferencia del radio conocido r y el respectivo de las circunferencias dadas, es decir, ($\underline{50-R}$) y ($\underline{50-r}$). Al cortarse estos arcos, quedan determinados los centros $\underline{O_3}$ y $\underline{O_4}$ de las circunferencias que hay que trazar. Uniendo $\underline{O_1}$, y $\underline{O_2}$ con $\underline{O_3}$ y $\underline{O_4}$ resultan los puntos de tangencia $\underline{T_1}$, $\underline{T_2}$, $\underline{T_3}$ y $\underline{T_4}$.

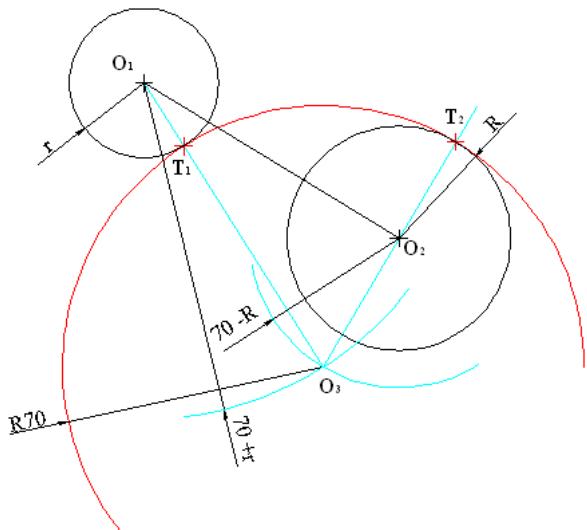
2.- Se dibujan las circunferencias pedidas, con centro en $\underline{O_3}$ y $\underline{O_4}$ y radio $\underline{50 \text{ mm.}}$

8.1.1.2.7. Arco de circunferencia de radio r conocido, ($r = 70 \text{ mm.}$), tangente a dos circunferencias dadas que corta a la línea que une sus centros:

1.- Con centro en $\underline{O_1}$, se dibuja un arco de radio $\underline{70+r}$, y se toma como centro $\underline{O_2}$; se traza otro arco de radio $\underline{70-R}$ que corta al anterior, lo que determina un punto $\underline{O_3}$, que es el centro del arco que se pide.

2.- Al unir $\underline{O_3}$ con $\underline{O_1}$ y con $\underline{O_2}$ se obtienen los puntos $\underline{T_1}$ y $\underline{T_2}$ de tangencia.

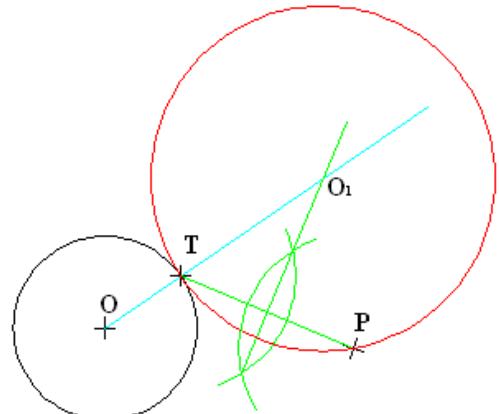
3.- Por último, se traza el arco que se quiere determinar con centro en $\underline{O_3}$ y radio $\underline{r=70 \text{ mm.}}$

**8.1.1.2.8. Circunferencia tangente a otra dada en T y que pase por P:**

1.- Unimos \underline{OT} y prolongamos.

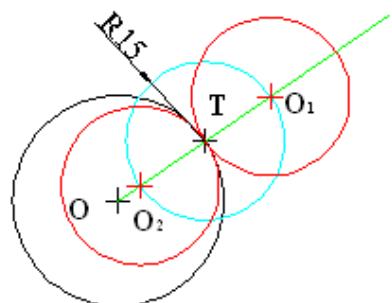
2.- Unimos \underline{TP} .

3.- Trazamos la mediatrix de \underline{TP} hasta que corte a la prolongación de \underline{OT} en $\underline{O_1}$, centro de la circunferencia solución.

**8.1.1.2.9. Circunferencia de radio $r=15 \text{ mm.}$, tangente a otra circunferencia dado el punto T de tangencia:**

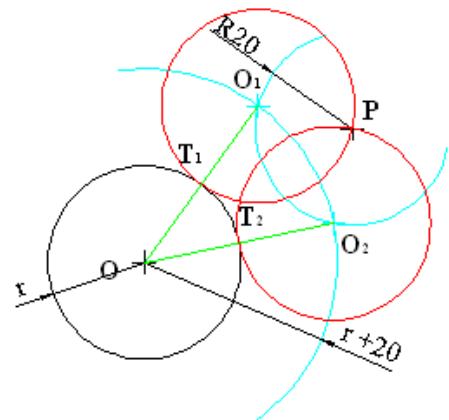
1.- Unimos \underline{O} con \underline{T} y prolongamos.

2.- Con centro en \underline{T} y medida del radio dado $\underline{r=15 \text{ mm.}}$, trazamos arcos que corten a la prolongación \underline{OT} , en los puntos $\underline{O_1}$, y $\underline{O_2}$, centros de las circunferencias solución.



8.1.1.2.10. Circunferencia de radio $r=20$ mm., tangente a otra circunferencia y que pase por P:

- 1.- Trazamos una circunferencia de centro Q y radio $\underline{r+20}$ mm
- 2.- Con centro en P y radio dado $\underline{r=20}$ mm, trazamos un arco que corte a la circunferencia anterior, en los puntos $\underline{O_1}$, y $\underline{O_2}$, centros de las circunferencias solución.
- 3.- Unimos los centros $\underline{O_1}$, y $\underline{O_2}$ con O y determinamos los puntos de tangencia $\underline{T_1}$, y $\underline{T_2}$.
- 4.- Trazamos las circunferencias solución de centros $\underline{O_1}$, y $\underline{O_2}$ y radio $\underline{20}$ mm.

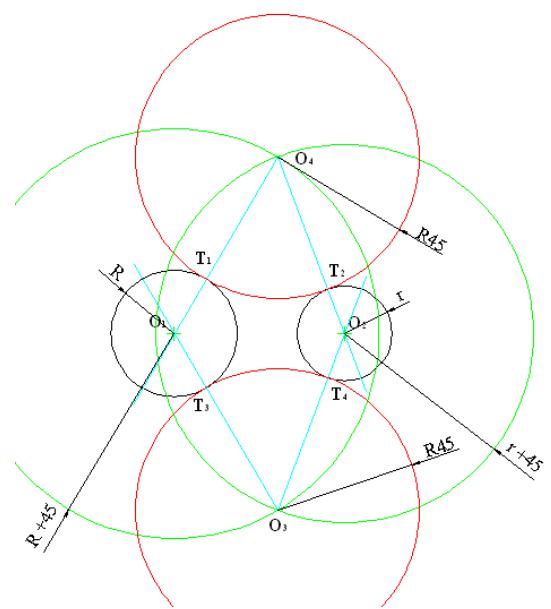


8.1.1.2.11. Circunferencias de radio dado, $r=45$ mm., tangentes a otras dos circunferencias dadas:

Este ejercicio tiene cuatro formas de hacerse, cada una dos soluciones.

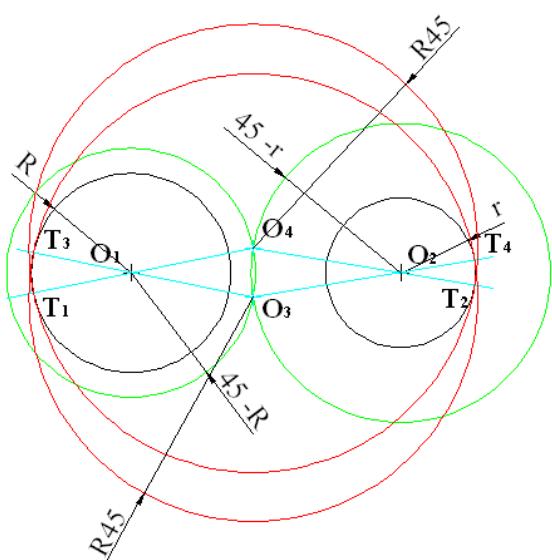
Primera forma:

- 1.- Se suma a ambas circunferencias el radio de las circunferencias tangentes que se piden $\underline{r=45}$ mm.
- 2.- Donde se corten las circunferencias concéntricas a ambas, son los centros de las circunferencias tangentes.



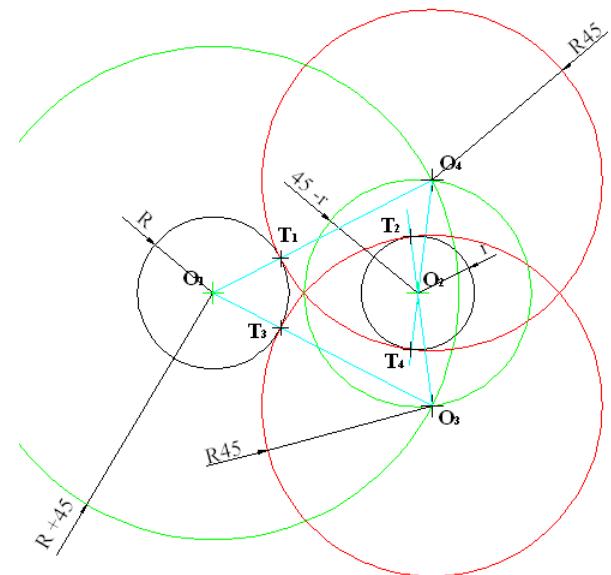
Segunda forma:

- 1.- Restamos al radio de las circunferencias solución $\underline{r=45}$ mm el radio de las circunferencias dadas R y r .
- 2.- Donde se corten las circunferencias concéntricas a ambas, son los centros de las circunferencias tangentes.

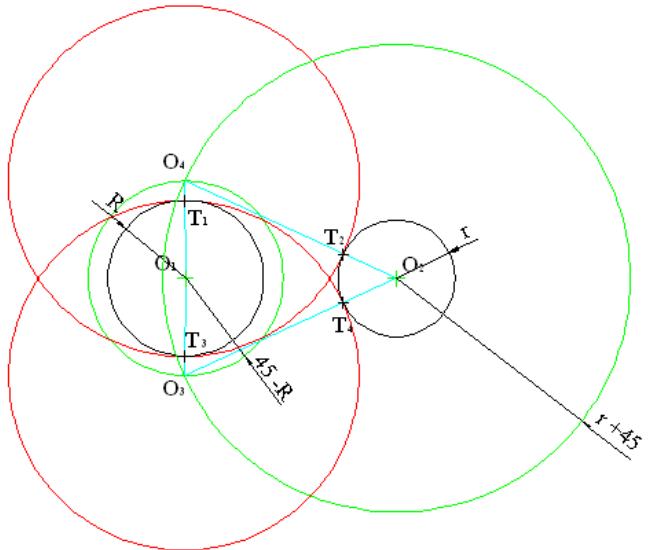


Tercera forma:

- 1.- Restamos al radio dado $r=45 \text{ mm}$ el radio de la circunferencia pequeña y se lo sumamos a la grande.
- 2.- Donde se corten las circunferencias concéntricas a ambas, son los centros de las circunferencias tangentes.

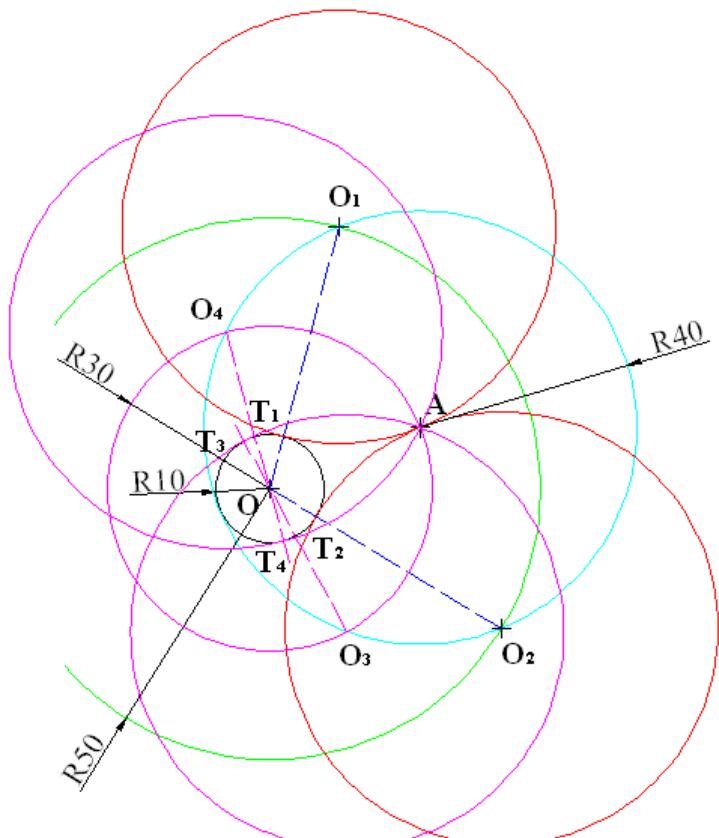
**Cuarta forma:**

- 1.- Sumamos el radio dado $r=45 \text{ mm}$ a la circunferencia pequeña y restamos al radio dado $r=45 \text{ mm}$ el radio de la circunferencia pequeña.
- 2.- Donde se corten las circunferencias concéntricas a ambas, son los centros de las circunferencias tangentes.



8.1.1.2.12. Dada una circunferencia de radio 10 mm y un punto A exterior a ella a 30 mm desde el centro, traza circunferencias de radio 40 mm tangentes a la dada y que pasen por A. ¿Cuántas soluciones hay?

- 1.- Con centro en A, arco de 40 mm. y con centro en O, arco de 40+10=50. Obtenemos 2 soluciones, O₁ y O₂.
- 2.- Con centro en A, arco de 40 mm. y con centro en O, arco de 40-10=30. Obtenemos otras 2 soluciones, O₃ y O₄.



8.2. ENLACES

La unión armónica entre curvas y rectas o de curvas entre sí se denomina **enlace**, y esta unión debe producirse por tangencia.

8.2.1. CONSTRUCCIÓN DE ENLACES

El modo de operar es el siguiente:

Se determinan los puntos de tangencia del problema planteado.

Se traza la línea de enlace entre los puntos de tangencia. De este modo el conjunto de líneas, rectas y curvas entre sí, aparece como una sola línea continua y armónica.

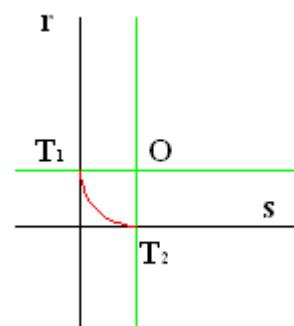
8.2.1.1. Enlace de dos rectas perpendiculares, mediante un arco de radio dado, $r=10$ mm.

1.- A la distancia dada $r=10$ mm, se trazan paralelas a r y s, que se cortan en el punto O.

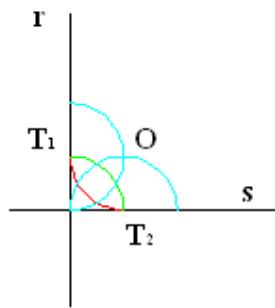
2.- Los puntos T₁, y T₂ son los puntos de tangencia

3.- Con centro en O y radio $O T_1$, se traza el arco pedido desde el punto T₁, hasta el punto T₂.

También se puede construir de la forma siguiente.

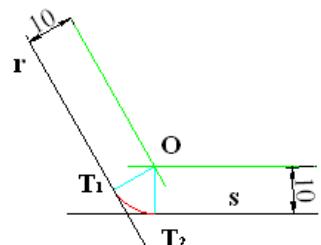


- Con centro en la intersección de traza una arco de circunferencia de radio $r=10\text{ mm}$. Que determina T_1 , y T_2 que son los puntos de tangencia
- Con centro en T_1 , y T_2 se trazan otros dos arco de circunferencia de $r=10\text{ mm}$ que determinan el centro Q del arco.



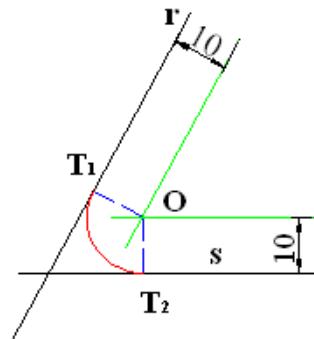
8.2.1.2. Enlace de dos rectas que forman un ángulo mayor de 90º por medio de un arco de radio dado, $r=10\text{ mm}$.

- A la distancia dada $r=10\text{ mm}$, se trazan paralelas a r y s , que se cortan en el punto Q .
- Por el punto Q se trazan perpendiculares a las rectas r y s , que determinan los puntos T_1 , y T_2 son los puntos de tangencia
- Con centro en Q y radio QT_1 , se traza el arco pedido desde el punto T_1 , hasta el punto T_2 .



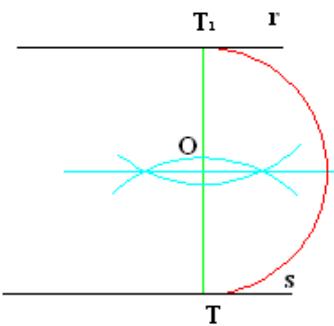
8.2.1.3. Enlace de dos rectas que forman un ángulo menor de 90º por medio de un arco de radio dado, $r=10\text{ mm}$.

- A la distancia dada $r=10\text{ mm}$, se trazan paralelas a r y s , que se cortan en el punto Q .
- Por el punto Q se trazan perpendiculares a las rectas r y s , que determinan los puntos T_1 , y T_2 son los puntos de tangencia
- Con centro en Q y radio QT_1 , se traza el arco pedido desde el punto T_1 , hasta el punto T_2 .



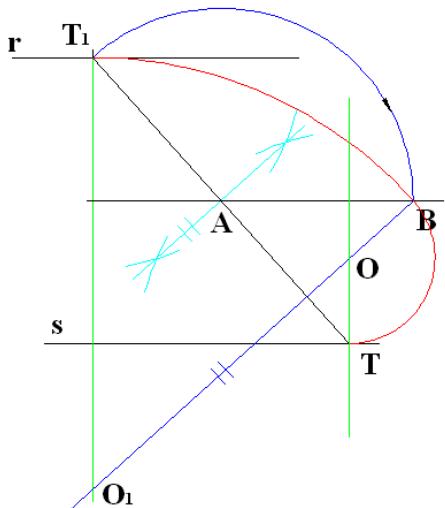
8.2.1.4. Enlace de dos rectas paralelas mediante un arco de circunferencia:

- A partir de un punto cualquiera T de la recta s se levanta una perpendicular que determina el punto T_1 .
- Se halla la mediatrix del segmento TT_1 y haciendo centro en Q y radio QT se traza el arco que enlaza las dos rectas dada.



8.2.1.5. Enlace de dos rectas paralelas mediante dos arcos del mismo sentido y distinto radio conociendo los puntos T y T_1 de tangencia:

- Se trazan por los puntos de tangencia T y T_1 perpendiculares a las rectas dadas r y s . Se traza el segmento TT_1 y se halla su mediatrix obteniendo el punto A .
- Por A se traza una recta paralela a las rectas r y s . Con centro en A y radio AT_1 se describe un arco (con sentido a la derecha),



que corta a la paralela en el punto \underline{B} , punto de tangencia de los dos arcos que unen las rectas \underline{r} y \underline{s} .

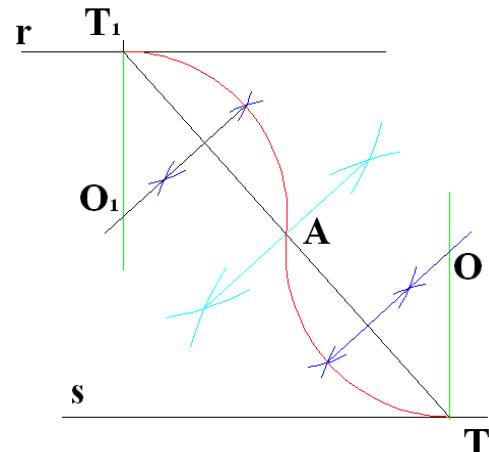
3.- Por el punto \underline{B} se traza una paralela a la mediatrix de $\underline{T-T_1}$ que corta a las perpendiculares trazadas desde \underline{T} y $\underline{T_1}$ a las rectas \underline{r} y \underline{s} . respectivamente, en los puntos \underline{Q} y $\underline{Q_1}$, centros de los arcos buscados.

8.2.1.6. Enlace de dos rectas paralelas con dos arcos de igual radio y sentido contrario, conociendo los puntos de tangencia con las rectas T y T_1 :

1.- Se trazan por los puntos de tangencia \underline{T} y $\underline{T_1}$ perpendiculares a las rectas dadas \underline{r} y \underline{s} . Se traza el segmento $\underline{T-T_1}$ y se halla su mediatrix obteniendo el punto \underline{A} .

2.- Se hallan las mediatrixes de los segmentos $\underline{A-T}$ y $\underline{A-T_1}$ que al cortarse con las perpendiculares que pasan por los puntos \underline{T} y $\underline{T_1}$ determinan los puntos \underline{Q} y $\underline{Q_1}$, centros de arcos de enlace.

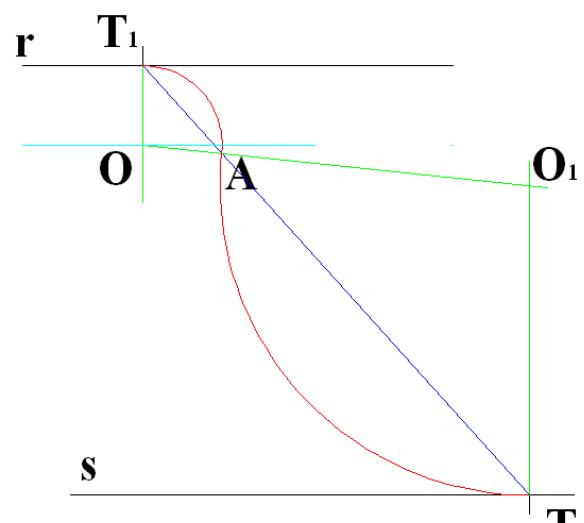
Si quisiéramos que los arcos no tuvieran el mismo radio, se toma el punto A no coincidente con la mediatrix es decir a $\underline{A-T}$ no igual que $\underline{A-T_1}$.



8.2.1.7. Enlace de dos rectas paralelas con dos arcos de sentido contrario, conociendo los puntos de tangencia con las rectas y el radio de uno de los arcos, ($r=10\text{ mm.}$):

1.- Se trazan por los puntos de tangencia \underline{T} y $\underline{T_1}$ perpendiculares a las rectas dadas \underline{r} y \underline{s} . Se traza el segmento $\underline{T-T_1}$.

2.- Con distancia $\underline{r=10\text{ mm.}}$, se traza una paralela a \underline{r} , (hacia abajo), que corta a la perpendicular en el punto \underline{Q} centro del primer arco de radio $\underline{r=10\text{ mm.}}$.



3.- Trazamos el arco de radio $\underline{=10\text{ mm.}}$ y centro \underline{Q} que corta a la recta $\underline{T-T_1}$ en el punto A punto de tangencia de los dos arcos.

4.- Unimos \underline{Q} con \underline{A} y prolongamos y obtenemos el punto $\underline{Q_1}$, al cortarse con la perpendicular a \underline{s} por \underline{T} .

5.- Trazamos el arco de centro $\underline{Q_1}$ y radio $\underline{Q_1-T}$.

La construcción de este ejercicio es semejante a la de unir dos rectas concurrentes.