

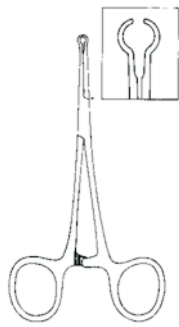
# TEMA 3. TANGENCIAS

3º ESO

**TANGENCIAS:** Dos o más figuras geométricas son tangentes cuando únicamente tienen UN PUNTO EN COMÚN. Los casos que nosotros vamos a estudiar son **entre circunferencias** o **entre circunferencias y rectas**. La construcción de tangencias sirve, básicamente, para diseñar objetos, figuras o planos donde intervengan curvas realizadas con compás.



joyas



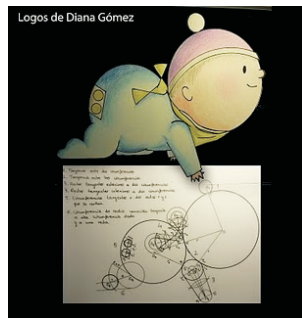
instrumental



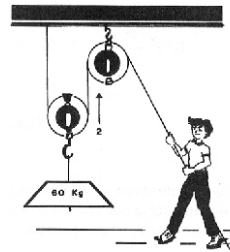
muebles



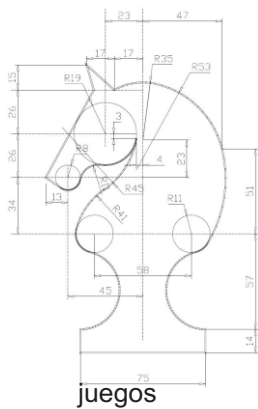
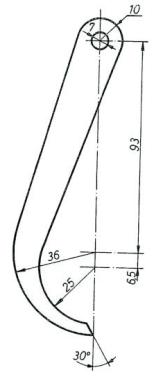
arquitectura



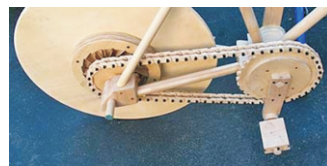
juguetes



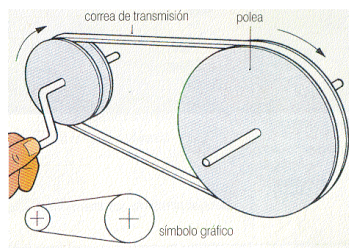
## Poleas



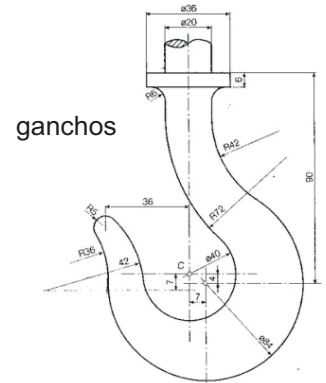
juegos



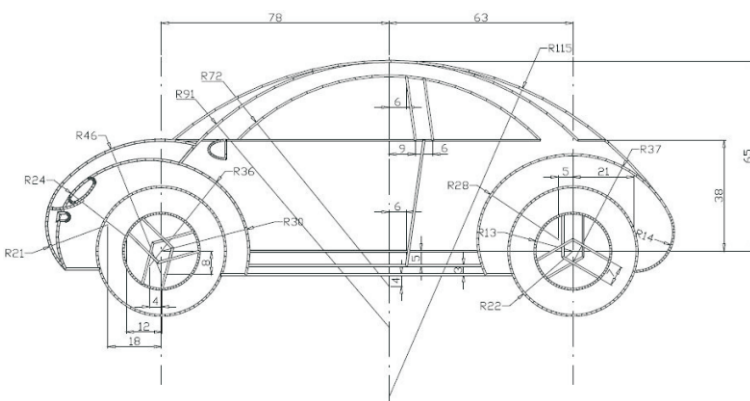
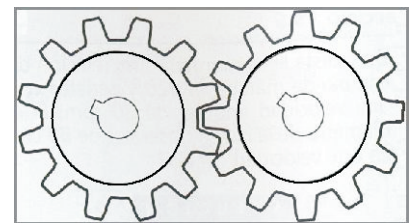
encadenados



grifos



ganchos



objetos industriales

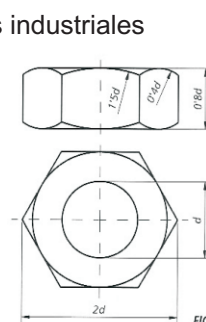


FIG. 31

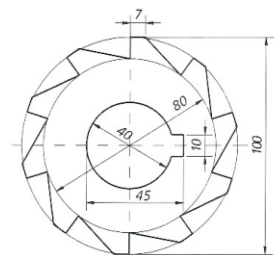


FIG. 32

Fecha	Nombre alumno	Curso:
N. lámina	Nombre lámina <b>TANGENCIAS</b>	Nota:

## PROPIEDADES DE LAS TANGENCIAS:

Hay una tangencia cuando dos figuras geométricas tienen UN PUNTO en común, solamente UNO.

1. Si dos circunferencias son tangentes entre sí, el punto de tangencia se encuentra en la recta que une los centros. (figura 1)

Cuando queramos dibujar una circunferencia que sea tangente a otra circunferencia y que además pase por un punto de tangencia de esta última, lo que tenemos que hacer es unir el centro de la circunferencia con el punto de tangencia y prolongar.

En esta recta estarán todos los centros de las circunferencias (infinitas) que son tangentes a la primera. figura 2

2. Si una recta es tangente a una circunferencia, el radio en el punto de tangencia es perpendicular a la tangente. figura 3

Cuando queramos hallar una circunferencia que sea tangente a una recta por un punto de tangencia de ésta lo primero que tenemos que hacer es levantar una perpendicular por este punto a la recta. figura 4

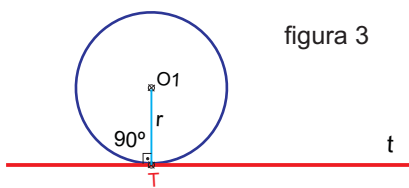


figura 3

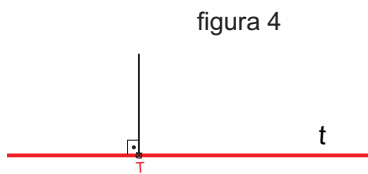


figura 4

3. Recordemos que una mediatriz es la recta de todos los puntos que equidistan de otros dos (extremos de un segmento). Por lo tanto el centro de cualquier circunferencia que pase por dos puntos está en la mediatriz del segmento que lo forman. figura 5

4. El centro de cualquier circunferencia tangente a dos rectas se encuentra en la bisectriz del ángulo que lo forman.

figura 6

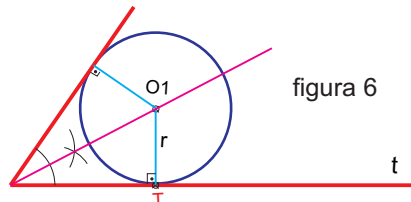


figura 6

Aplicación de los principios anteriores en un caso de tangencias:

- Circunferencia tangente a una circunferencia que pase por un punto T de tangencia de ésta y por un punto P exterior. figura 7

1. Se aplica la propiedad 1: se une el centro O1 con el punto de tangencia T

2. Se une P con T y se halla la mediatriz de PT. Donde corte la mediatriz con la primera recta estará el centro de la circunferencia buscada.

ENLACES: Es la unión de varias curvas tangentes entre sí o bien curvas con rectas, creando un enlace continuo o curva continua.

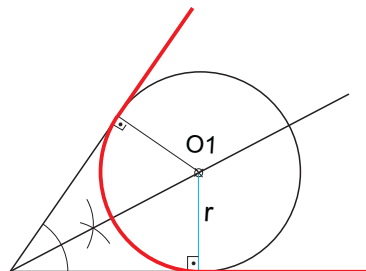
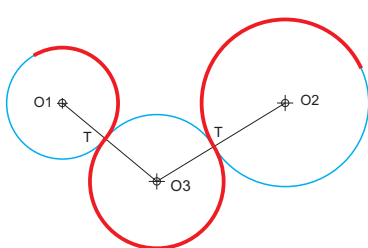
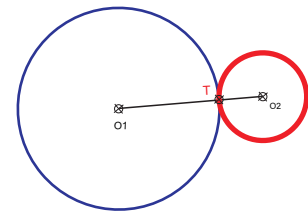


figura 1

CIRCUNFERENCIAS  
TANGENTES EXTERIORES



CIRCUNFERENCIAS  
TANGENTES INTERIORES

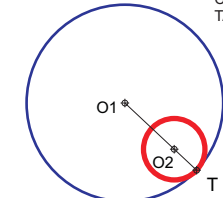
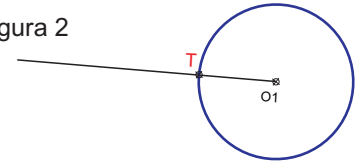


figura 2



Se pueden hacer exteriores o interiores.

figura 5

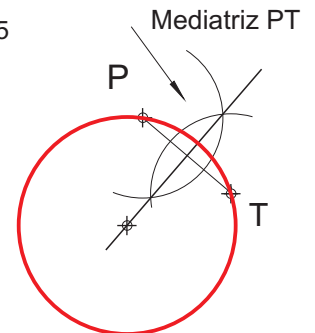
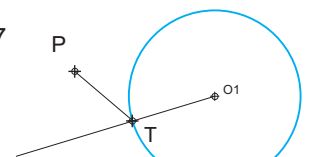
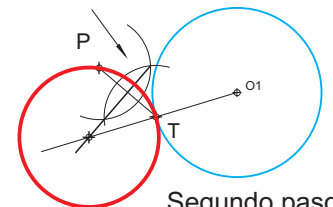


figura 7



Primer paso

Mediatriz PT



Segundo paso

Fecha	Nombre alumno	Curso:
N. lámina	Nombre lámina	Nota:
TANGENCIAS		

Marcar solamente un recuadro con la respuesta correcta.

**1. Una tangencia es::**

- ☐ Cuando un triángulo se corta con un cuadrado.
- ☐ Dos circunferencias que se cortan.
- ☐ Cuando dos figuras geométricas tienen solamente un punto en común.

**2. Las tangencias más comunes son:**

- ☐ Entre circunferencias y entre circunferencias y rectas.
- ☐ Aquellas que son más grandes que pequeñas.
- ☐ Otras:.....

**3. Para que haya una tangente entre dos circunferencias debe de pasar que:**

- ☐ Las circunferencias se corten.
- ☐ Una circunferencia sea más grande que la otra.
- ☐ Sólo tengan un punto en común.

**4. Para hallar el punto de tangencia entre dos circunferencias que son tangentes hay que:**

- ☐ Unir los centros de las circunferencias
- ☐ Buscarlo en el libro de texto.
- ☐ No lo se muy bien pero lo podría deducir.

**5. ¿Dónde estará el centro de una circunferencia tangente a otra y que pase por un punto de tangencia?:**

- ☐ En el patio del instituto, cerca del pabellón.
- ☐ No lo se muy bien pero lo podría deducir.
- ☐ En la recta resultante de unir el centro de la circunferencia dada con el punto de tangencia.

**6. Una recta tangente a una circunferencia es cuando:**

- ☐ La recta corta a la circunferencia
- ☐ La circunferencia corta a la recta.
- ☐ La recta y la circunferencia se cortan entre sí.
- ☐ La recta y la circunferencia solamente tienen un punto en común.

**7. Cuando una recta es tangente a una circunferencia debe de pasar que:**

- ☐ La recta y el radio de la circunferencia sean perpendiculares
- ☐ La recta y el radio de la circunferencia sean oblicuas.
- ☐ La circunferencia no tenga radio.

**8. Para hallar la recta tangente a una circunferencia por un punto de tangencia dado:**

- ☐ Hay que unir los centros de las circunferencias dadas.
- ☐ Hay que dibujar una recta que sea perpendicular al radio de la circunferencia por ese punto.
- ☐ Hay que preguntárselo al profesor de sociales.

Fecha	Nombre alumno	Curso:
N. lámina	Nombre lámina <b>TANGENCIAS</b>	Nota:

### 1. Circunferencias tangentes EXTERIORES a una circunferencia a la dada y entre ellas.

Dada la circunferencia O1 debemos dibujar una circunferencia O2 que sea tangente a la primera. Después vamos a dibujar otra circunferencia O3 que sea tangente a O1 y a O2.

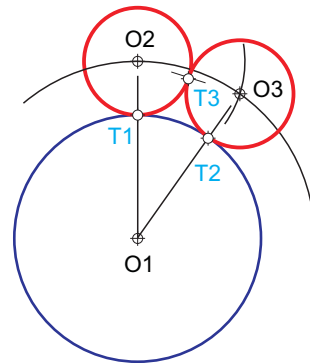
1. **Para hallar circunferencia exteriores hay que sumar datos**, es decir **SUMAMOS LOS RADIOS**. Sumamos el radio de O1 + el radio de O2, y desde O1 dibujamos una circunferencia concéntrica a O1.

2. Si no tenemos otra condición, pondremos O2 en cualquier punto de esta circunferencia concéntrica a O1.

3. Para hallar el punto de tangencia entre O1 y O2, UNIMOS LOS CENTROS mediante una recta. Donde corta la recta a la circunferencia O1 estará T1.

4. Dibujar la circunferencia O2. Poner el compás en el centro O2 y abrir hasta T1.

5. Para dibujar la circunferencia O3 hay que sumar O1 + O3 (ya la tenemos dibujada anteriormente) y sumar los radios de O2 + O3, después dibujamos un arco con esta medida hasta que corte a la circunferencia concéntrica. Ese punto será el centro O3. Unir O3 con O1 y con O2 para hallar los puntos de tangencia T2 y T3.



### 2. Circunferencias tangentes INTERIORES a una circunferencia a la dada y entre ellas.

Dada la circunferencia O1 debemos dibujar una circunferencia O2 que sea tangente a la primera. Después vamos a dibujar otra circunferencia O3 que sea tangente a O1 y a O2.

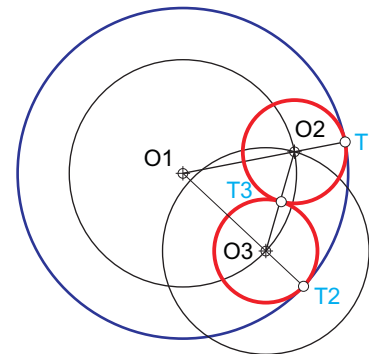
1. **Para hallar circunferencias interiores hay que restar datos**, es decir **RESTAMOS LOS RADIOS**. Restamos el radio de O1 - el radio de O2, y desde O1 dibujamos una circunferencia concéntrica a O1.

2. Si no tenemos otra condición, pondremos O2 en cualquier punto de esta circunferencia concéntrica a O1.

3. Para hallar el punto de tangencia entre O1 y O2, UNIMOS LOS CENTROS mediante una recta. Donde corta la recta a la circunferencia O1 estará T1.

4. Dibujar la circunferencia O2. Poner el compás en el centro O2 y abrir hasta T1.

5. Para dibujar la circunferencia O3 hay que restar O1 - O3 (ya la tenemos dibujada anteriormente) y sumar los radios de O2 + O3, después dibujamos un arco con esta medida hasta que corte a la circunferencia concéntrica. Ese punto será el centro O3. Unir O3 con O1 y con O2 para hallar los puntos de tangencia T2 y T3.



### 3. Circunferencias tangentes EXTERIORES a una circunferencia a la dada y que pase por un punto P dado.

Dada la circunferencia O1 debemos dibujar una circunferencia O2 que sea tangente a la primera y que además pase por el punto P (habrá dos circunferencias O2 y O3).

1. Sumamos radios: O1 y O2 y con esta medida dibujamos una circunferencia concéntrica a O1.

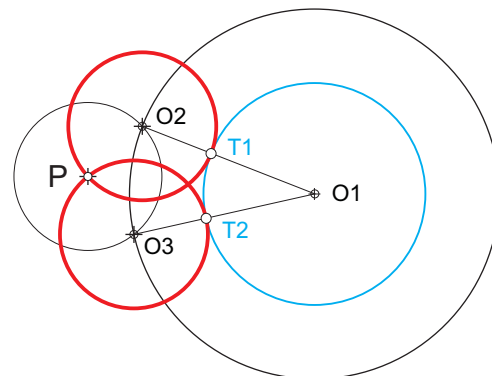
2. Desde el punto P dibujamos una circunferencia con el radio de O2.

3. Donde corte esta última circunferencia a la circunferencia concéntrica estará el centro de O2. Como en realidad se corta en dos puntos pondremos dos circunferencias O2 y O3.

4. Unir los centros. Unimos O2 con O1 para hallar T1, punto de tangencia de ambas.

5. Hacemos lo mismo con O3 y O1.

6. Dibujar las circunferencias y comprobar que son tangentes a O1 y que pasan por P.



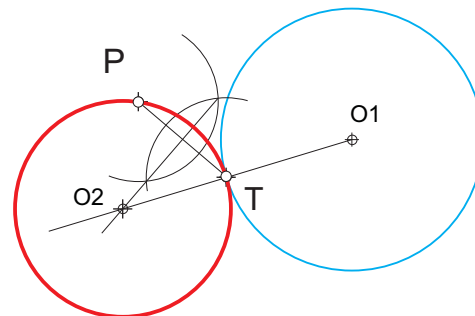
### 4. Circunferencia tangente EXTERIOR a una circunferencia dada, que pase por un punto P y por el punto de tangencia T.

Dada la circunferencia O1 y un punto T de tangencia de ella, debemos dibujar una circunferencia O2 que sea tangente a la primera por T y que además pase por el punto P que nos dan.

1. Lo primero que debemos hacer es dibujar una recta que pase por el centro de O1 y por el punto de tangencia T. En esta recta están TODOS los centros de TODAS las circunferencias que son tangentes a O1. Nosotros buscamos solamente una: la que pase además por P. Como O2 debe de pasar por T y por P tenemos un problema de geometría ya estudiado: Dibujar una circunferencia que pase por 2 puntos. El centro de O2 estará a la misma distancia de P y de T (tendrá el mismo radio).

2. Unimos P y T y dibujamos la mediatriz de este segmento.

3. Donde la mediatriz corte a la recta O1T estará el centro de O2 buscado.

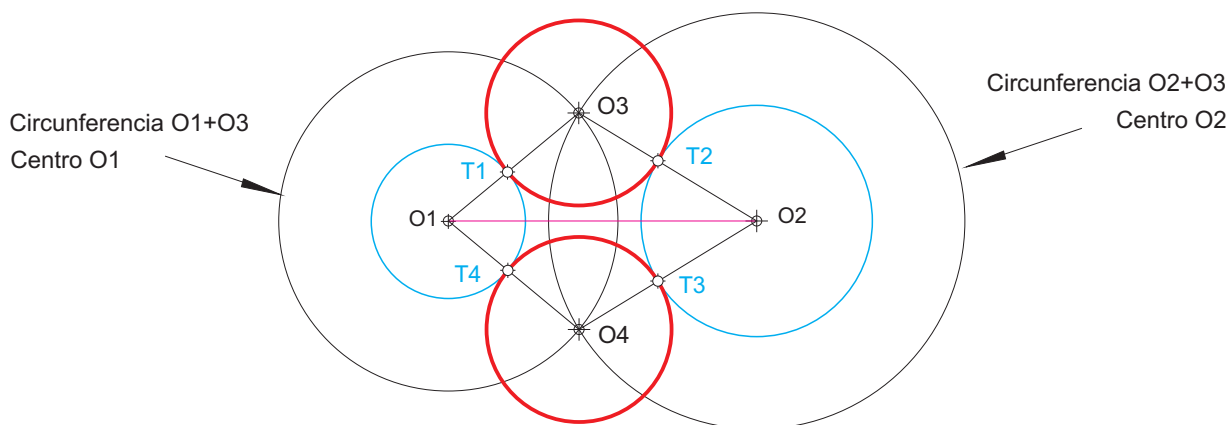


Fecha	Nombre alumno	Curso:
N. lámina	Nombre lámina	Nota:
TANGENCIAS ENTRE CIRCUNFERENCIAS		

## 5. Circunferencias tangentes EXTERIORES a dos circunferencias dadas.

Dadas las circunferencias O1 y O2 debemos dibujar una circunferencia O3 (en el ejercicio dibujamos dos O3 y O4) que sea tangente común EXTERIOR a O1 y a O2. Para ello deducimos que el radio de O3 será el mismo hasta la circunferencia O1 como hasta la circunferencia O2. Recordar el ejercicio nº 1 de esta lámina. SUMAMOS DATOS, SUMAMOS LOS RADIOS.

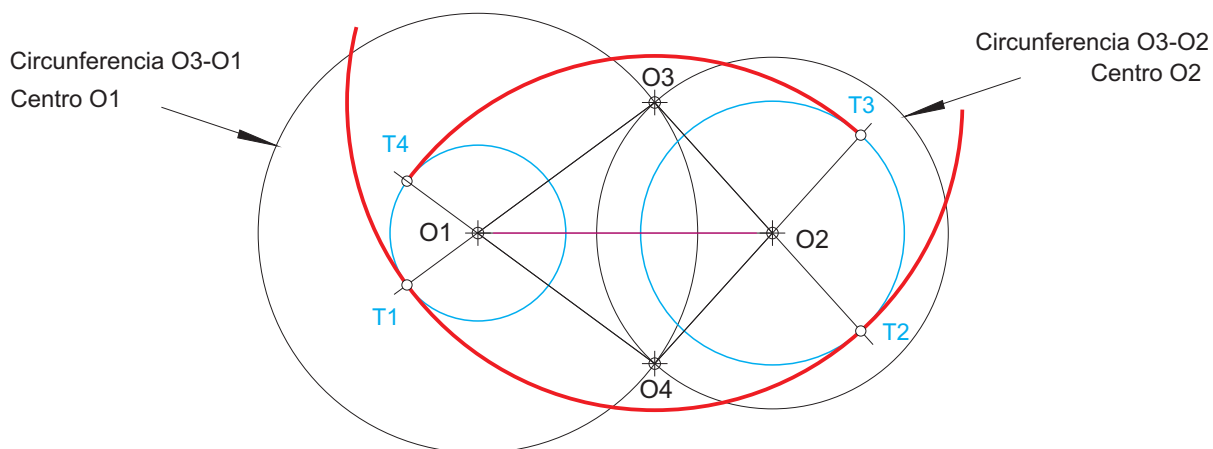
1. Sumamos los radios de O1 y de O3. Desde el centro de O1 dibujamos una circunferencia concéntrica con esta medida.
  2. Realizamos la misma operación con O2 y O3, los sumamos y dibujamos una circunferencia desde O2.
  3. Donde se corten las dos circunferencias concéntricas auxiliares dibujadas estará el centro de O3. Como se cortan en dos puntos, pondremos O3 y O4.
  4. UNIMOS CENTROS para hallar los puntos de tangencia.
  5. Donde corte la recta O3O1 con la circunferencia O1 estará T1. Donde corte la recta O3 con O2 estará T2, Haremos lo mismo con O4 para hallar T3 y T4.
  6. Para dibujar O3 poner el compás en el centro O3 y abrirlo hasta T1. Al dibujar la circunferencia ésta debe de pasar por T2. No debe quedarse corta ni cortar a O2.
- Se puede rectificar el centro O3 para poner el compás si el ejercicio no coincide con T1 y T2.



## 6. Circunferencias tangentes INTERIORES a dos circunferencias dadas.

Dadas las circunferencias O1 y O2 debemos dibujar una circunferencia O3 (en el ejercicio dibujamos dos O3 y O4) que sea tangente común INTERIOR a O1 y a O2. Para ello deducimos que el radio de O3 será el mismo hasta la circunferencia O1 como hasta la circunferencia O2. Recordar el ejercicio nº 2 de esta lámina. RESTAMOS DATOS, RESTAMOS LOS RADIOS.

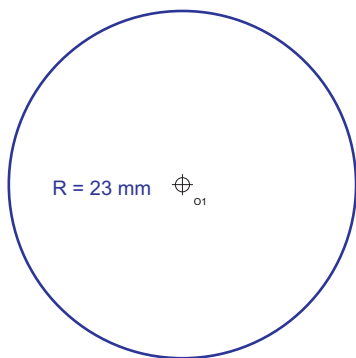
1. Restamos los radios de O1 y de O3. Desde el centro de O1 dibujamos una circunferencia concéntrica con esta medida.
  2. Realizamos la misma operación con O2 y O3, los restamos y dibujamos una circunferencia desde O2.
  3. Donde se corten las dos circunferencias concéntricas auxiliares dibujadas estará el centro de O3. Como se cortan en dos puntos, pondremos O3 y O4.
  4. UNIMOS CENTROS para hallar los puntos de tangencia. Tener en cuenta que en este ejercicio la recta se PROLONGA hasta cortar O1.
  5. Donde corte la recta O3O1 con la circunferencia O1 estará T1. Donde corte la recta O3 con O2 estará T2, Haremos lo mismo con O4 para hallar T3 y T4.
  6. Para dibujar O3 poner el compás en el centro O3 y abrirlo hasta T1. Al dibujar la circunferencia, ésta debe de pasar por T2. No debe quedarse corta ni cortar a O2.
- Se puede rectificar el centro O3 para poner el compás si el ejercicio no coincide con T1 y T2.



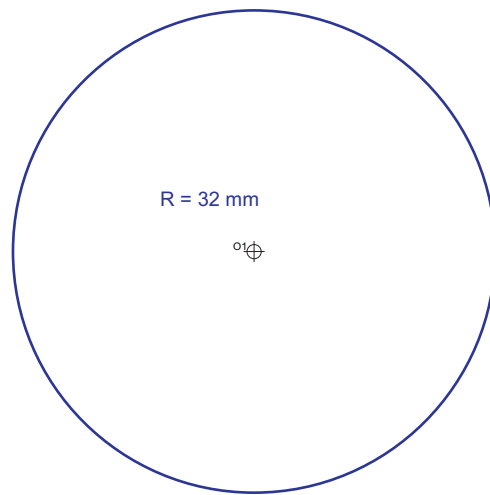
Fecha	Nombre alumno	Curso:
N. lámina	Nombre lámina	Nota:
<b>TANGENCIAS ENTRE CIRCUNFERENCIAS</b>		



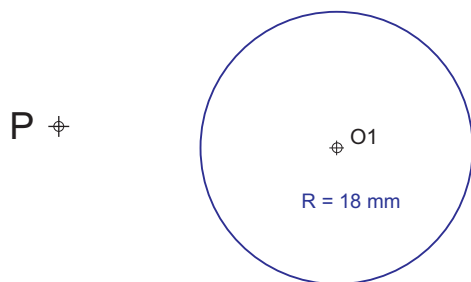
1.- Dibujar 2 circunferencias radio 10 mm. que sean **TANGENTES EXTERIORES** a la dada y entre ellas.



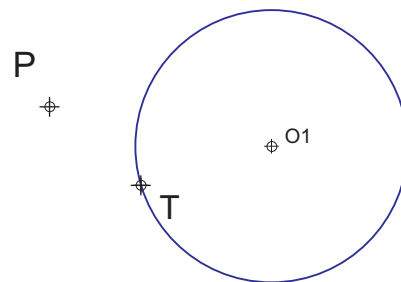
2.- Dibujar 2 circunferencias radio 10 mm. que sean **TANGENTES INTERIORES** a la dada y entre ellas.



3.- Dibujar las circunferencias de  $r = 12 \text{ mm.}$ , **TANGENTES** a la dada **y que pase por el PUNTO P.**



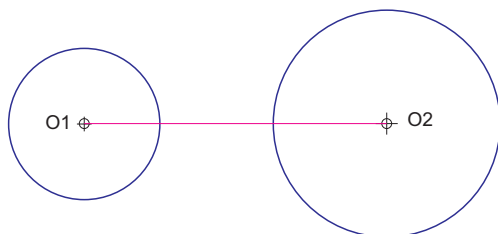
4.- Circunferencias tangentes a otra de  $r = 18 \text{ mm.}$  dada, que pase por un punto  $P$  exterior y por un punto de tangencia  $T$ .



El radio de la circunferencia que se busca se sabrá cuando se acabe el ejercicio.

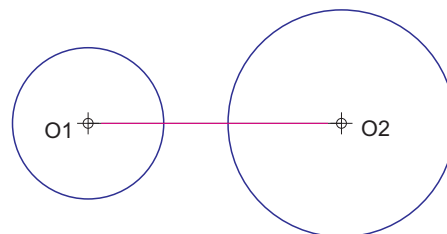
5.- Hallar las circunferencias tangentes **COMUNES EXTERIORES** de  $r = 12 \text{ mm.}$ , a las circunferencias dadas  $O_1$  y  $O_2$ .

$O_1 = 10 \text{ mm}$   $O_2 = 15 \text{ mm}$   $O_1 - O_2 = 40 \text{ mm}$



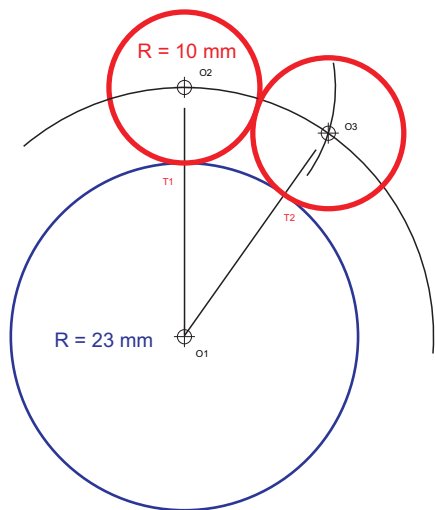
6.- Hallar las circunferencias tangentes **COMUNES INTERIORES** de  $r = 35 \text{ mm.}$ , a las circunferencias dadas  $O_1$  y  $O_2$ .  $O_1 - O_2 = 30 \text{ mm}$

$O_1 = 10 \text{ mm}$   $O_2 = 15 \text{ mm}$

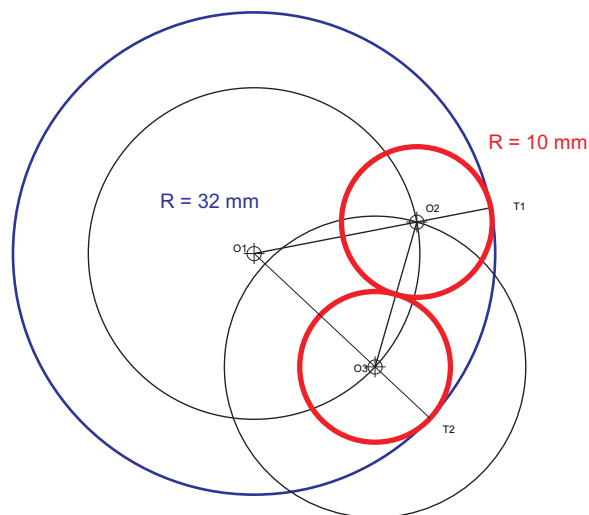


Fecha	Nombre alumno	Curso:
N. lámina	Nombre lámina	Nota:
<b>TANGENCIAS ENTRE CIRCUNFERENCIAS</b>		

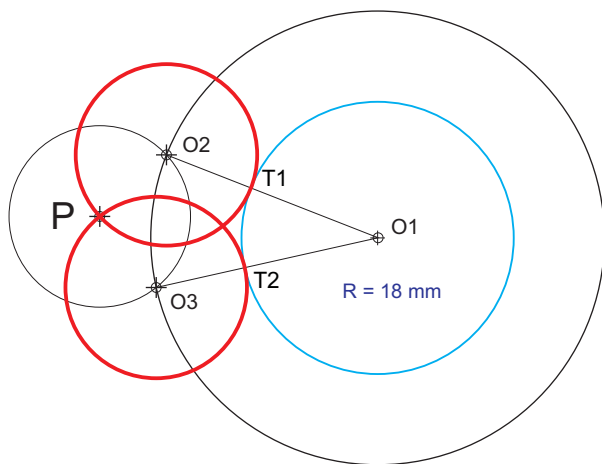
1.- Dibujar 2 circunferencias radio 10 mm. que sean **TANGENTES EXTERIORES** a la dada y entre ellas.



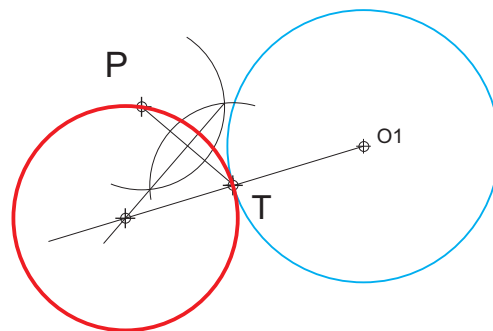
2.- Dibujar 2 circunferencias radio 10 mm. que sean **TANGENTES INTERIORES** a la dada y entre ellas.



3.- Dibujar las circunferencias de  $r = 12$  mm., **TANGENTES** a la dada y que pase por el **PUNTO P**.



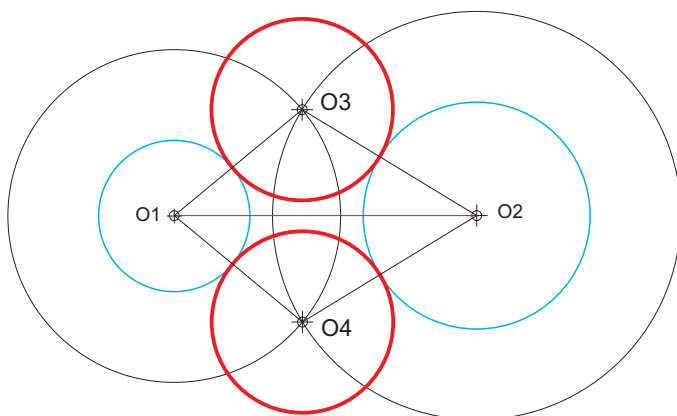
4.- Circunferencias tangentes a otra de  $r = 18$  mm. dada, que pase por un punto P exterior y por un punto de tangencia T.



El radio de la circunferencia que se busca se sabrá cuando se acabe el ejercicio.

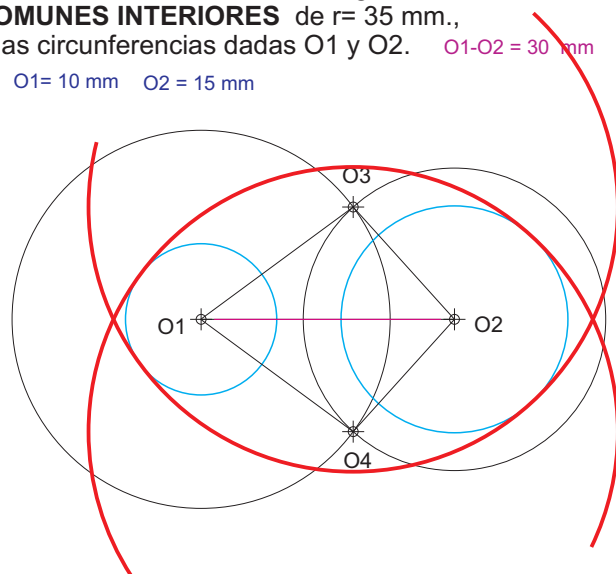
5.- Hallar las circunferencias tangentes **COMUNES EXTERIORES** de  $r = 12$  mm., a las circunferencias dadas O1 y O2.

O1 = 10 mm O2 = 15 mm O1-O2 = 40 mm



6.- Hallar las circunferencias tangentes **COMUNES INTERIORES** de  $r = 35$  mm., a las circunferencias dadas O1 y O2. O1-O2 = 30 mm

O1 = 10 mm O2 = 15 mm



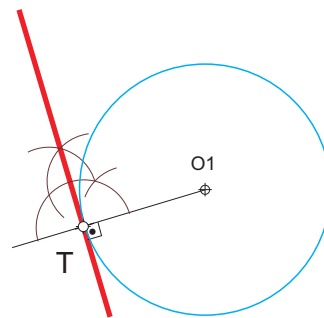
Fecha	Nombre alumno	Curso:
N. lámina	Nombre lámina	Nota:
<b>TANGENCIAS ENTRE CIRCUNFERENCIAS</b>		



### 1. Recta tangente a la circunferencia O1 por un punto T.

Dada la circunferencia O1 debemos dibujar una recta que sea tangente a ella por el punto T de tangencia. Como veíamos al principio del tema en el resumen de tangencias, la máxima de tangentes entre rectas y circunferencias es: el radio de la circunferencia es perpendicular a la recta tangente. Para hallar los puntos de tangencia entre rectas y circunferencias hay que dibujar una perpendicular desde el centro de la circunferencia hasta la recta. Como lo que tenemos nosotros en el ejercicio es el punto de tangencia, habrá que hacer exactamente lo contrario: dibujar una perpendicular al radio de la circunferencia.

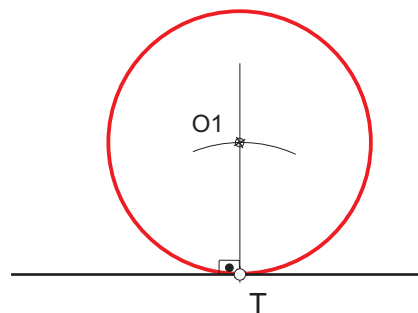
1. Dibujar el radio de la circunferencia que pase por el punto T.
2. Dibujar una recta perpendicular al radio por el punto T.
3. Repasar más oscuro o bien en color igual de fino.



### 2. Dibujar una circunferencia de radio r que sea tangente a la recta dada por T.

Este ejercicio es exactamente al contrario que el nº1 anterior. Lee toda la teoría inicial del ejercicio porque es exactamente igual.

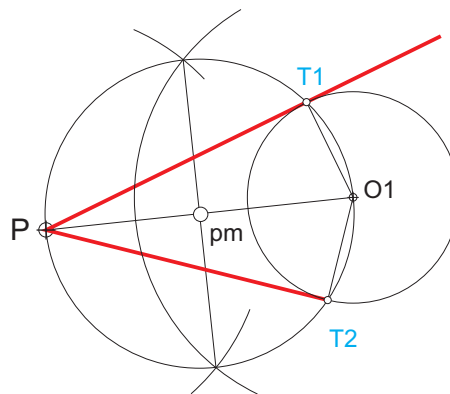
1. Dibujar una recta perpendicular a la recta r por el punto de tangencia T.
2. Desde el punto T poner el compás con la medida del radio r que debemos dibujar.
3. Dibujar un arco que corte a la recta perpendicular: éste será el centro de la circunferencia buscada.
4. Poner el compás en O1 y abrirlo hasta T y dibujar la circunferencia.



### 3. Dibujar las rectas tangentes a una circunferencia desde un punto P exterior.

Esta es una construcción específica de tangencias:

1. Unir el punto P con el centro de la circunferencia O1.
2. Dibujar la mediatriz de P01 para hallar el punto medio (pm).
3. Con centro en pm dibujar una circunferencia que pasa por P y por O1.
4. Esta circunferencia corta a O1 en los puntos de tangencia T1 y T2.
5. Unir mediante rectas P con T1 y T2.
6. Para comprobar que las rectas son tangentes a la circunferencia, dibujar los radio de O1 hasta T1 y T2 y comprobar que forman ángulos de 90°.

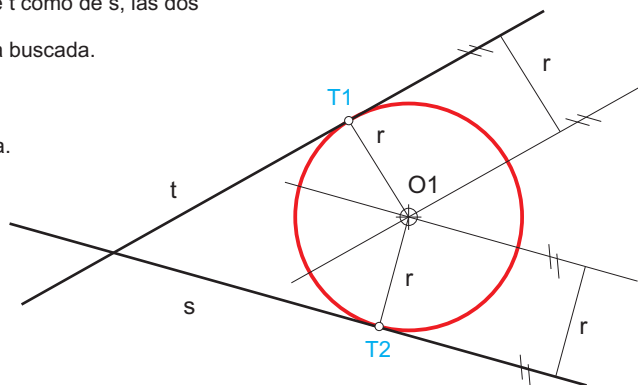


4.- Dibuja la circunferencia de radio 15 mm. que sea tangente a las rectas que se cortan dadas.

### 4. Dibujar una circunferencia de radio r que sea tangente a dos rectas que se cortan.

El radio de la circunferencia que buscamos será el mismo tanto desde t como de s, las dos rectas que se cruzan. Por lo tanto:

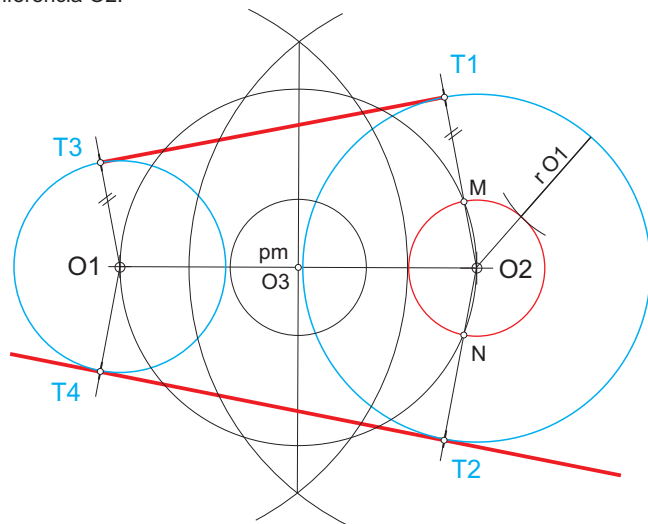
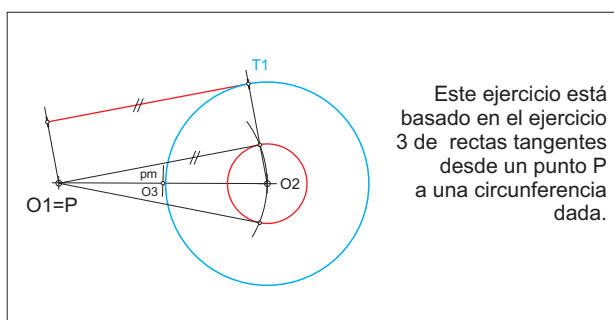
1. Dibujar paralelas desde s y desde t con el radio de la circunferencia buscada.
2. Donde se corten las dos paralelas: centro O1 de la circunferencia.
3. Desde O1 dibujar perpendiculares a t y a s para hallar los puntos T1 y T2 de tangencia.
4. Poner el compás en O1 y abrirlo hasta T1 y dibujar la circunferencia.
5. La circunferencia debe de pasar por T1 y T2.



Fecha	Nombre alumno	Curso:
N. lámina	Nombre lámina	Nota:
TANGENCIAS ENTRE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS		

## 5. Dibujar las RECTAS tangentes comunes EXTERIORES a dos circunferencias dadas.

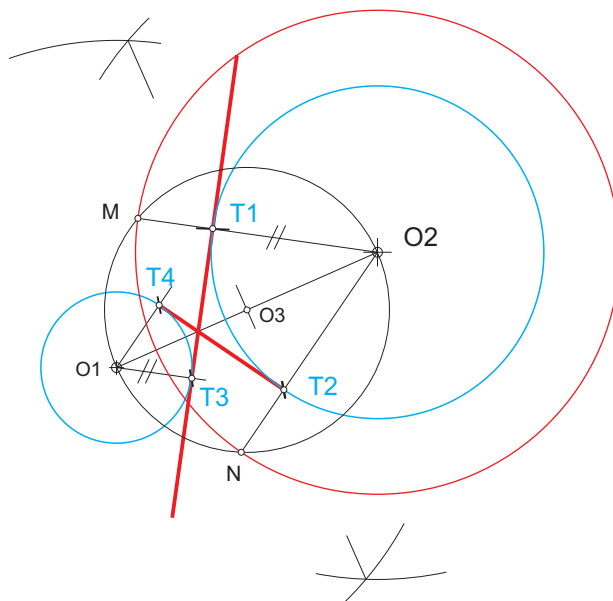
1. Unir  $O_1$  y  $O_2$  mediante una recta.
2. Hallar el punto medio de  $O_1O_2$  (pm).
3. Dibujar una circunferencia auxiliar que pase por  $O_1$  y  $O_2$ , le llamaremos  $O_3$ .
4. Para este ejercicio se **RESTAN los radios** de circunferencia  $O_1$  y  $O_2$ , y con esa medida se dibuja una circunferencia concéntrica a  $O_2$  (es decir, con la medida que nos da de restar  $O_2-O_1$  se dibuja una circunferencia poniendo el compás en  $O_2$ : es la circunferencia roja). También se puede realizar este punto 4 de forma gráfica: Se toma con el compás la medida del radio de  $O_1$  y se señala en el radio de  $O_2$ , desde el exterior hacia el interior. Desde el centro  $O_2$  se dibuja una circunferencia que pase por esa marca.
5. La primera circunferencia auxiliar que pasa por  $O_1$  y  $O_2$  corta a ésta última (la roja  $O_2-O_1$ ) en los puntos M y N.
6. Pasar líneas o radios de  $O_2$  por M y por N hasta que corten a la circunferencia  $O_2$ . Los puntos de corte serán  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente.
7. Dibujar una paralela a  $O_2T_1$  por el centro de la circunferencia dada  $O_1$  hasta que la corte: será el punto  $T_3$ .
8. Dibujar una paralela a  $O_2T_2$  por el centro de la circunferencia dada  $O_1$  hasta que la corte: será el punto  $T_4$ .
9. Unir  $T_1$  con  $T_3$ . Unir  $T_2$  y  $T_4$  con rectas.



## 6. Hallar las RECTAS tangentes comunes INTERIORES a las dos circunferencias dadas.

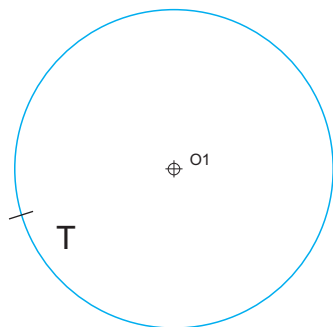
Este ejercicio es básicamente igual al anterior pero con la diferencia que para rectas INTERIORES los radios  $O_1$  y  $O_2$  se SUMAN.

1. Unir  $O_1$  y  $O_2$  mediante una recta
2. Hallar el punto medio de  $O_1O_2$  (pm).
3. Dibujar una circunferencia auxiliar que pase por  $O_1$  y  $O_2$ , le llamaremos  $O_3$ .
4. Para este ejercicio se **SUMAN los radios** de circunferencia  $O_1$  y  $O_2$ , y con esa medida se dibuja una circunferencia concéntrica a  $O_2$  (es decir, con la medida que nos da de SUMAR  $O_2+O_1$  se dibuja una circunferencia poniendo el compás en  $O_2$ : es la circunferencia roja). También se puede realizar este punto 4 de forma gráfica: Se toma con el compás la medida del radio de  $O_1$  y se señala en el radio de  $O_2$ , hacia el exterior de la circunferencia. Desde el centro  $O_2$  se dibuja una circunferencia que pase por esa marca.
5. La primera circunferencia auxiliar que pasa por  $O_1$  y  $O_2$  corta a ésta última (la roja  $O_2+O_1$ ) en los puntos M y N.
6. Pasar líneas o radios de  $O_2$  por M y por N hasta que corten a la circunferencia  $O_2$ . Los puntos de corte serán  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente.
7. Dibujar una paralela a  $O_2T_1$  por el centro de la circunferencia dada  $O_1$  hasta que la corte: será el punto  $T_3$ .
8. Dibujar una paralela a  $O_2T_2$  por el centro de la circunferencia dada  $O_1$  hasta que la corte: será el punto  $T_4$ .
9. Unir  $T_1$  con  $T_3$ . Unir  $T_2$  y  $T_4$  con rectas.



Fecha	Nombre alumno	Curso:
N. lámina	Nombre lámina	Nota:
<b>TANGENCIAS ENTRE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS</b>		

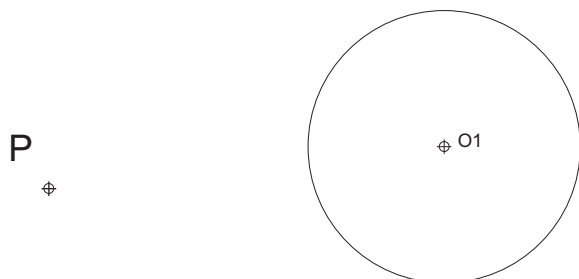
1.-Dibuja la recta r tangente a la circunferencia O1 por el punto dado de tangencia (T).



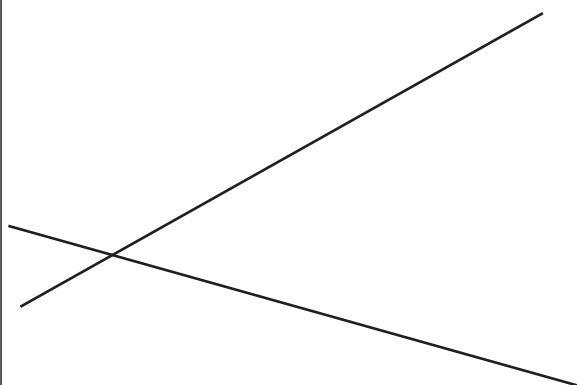
2.- Dibuja la circunferencia de radio 13 mm. que sea tangente a la recta dada y que pase por el punto T dado.



3.- Dibuja las rectas tangentes a la circunferencia O1 dada y que pasen por P

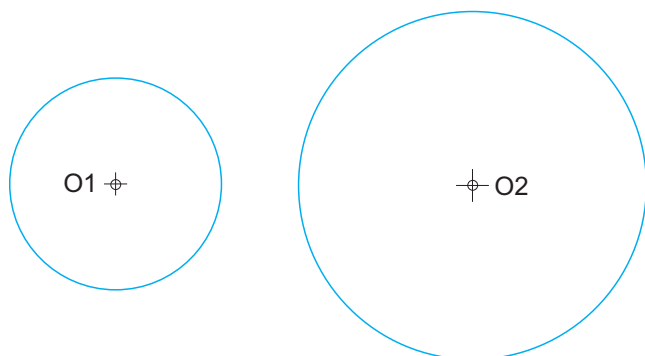


4.- Dibuja la circunferencia de radio 15 mm. que sea tangente a las rectas que se cortan dadas.



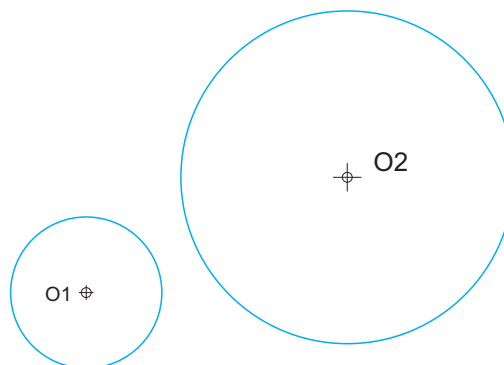
5.- Hallar las RECTAS tangentes **COMUNES EXTERIORES** a las dos circunferencias dadas..

O1= 14 mm    O2 = 23 mm



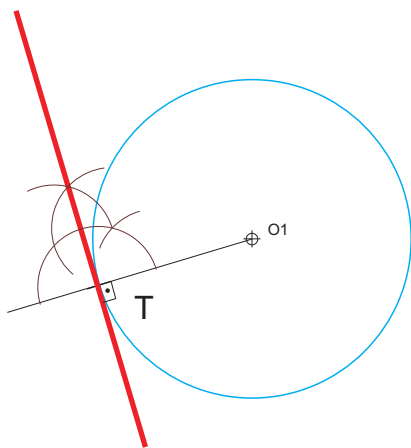
6.- Hallar las RECTAS tangentes **COMUNES INTERIORES** a las dos circunferencias dadas..

O1= 10 mm    O2 = 22 mm

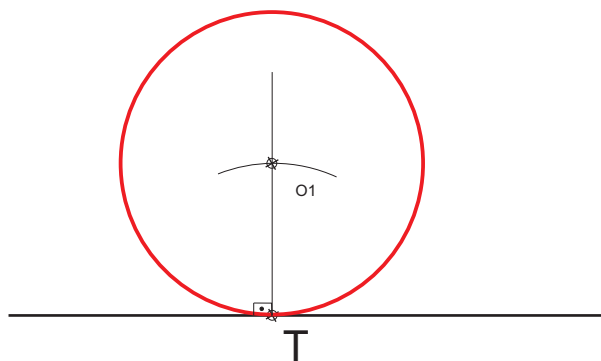


Fecha	Nombre alumno	Curso:
N. lámina	Nombre lámina	Nota:
<b>TANGENCIAS ENTRE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS</b>		

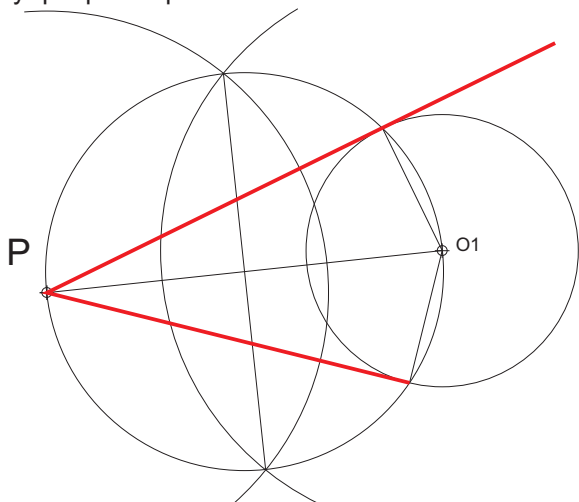
1.-Dibuja la recta r tangente a la circunferencia O1 por el punto dado de tangencia (T).



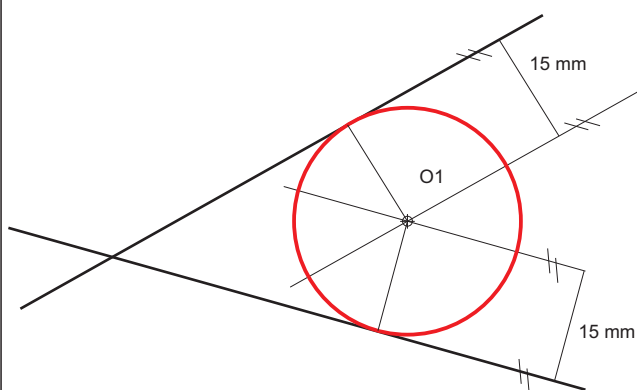
2.- Dibuja la circunferencia de radio 13 mm. que sea tangente a la recta dada y que pase por el punto T dado.



3.- Dibuja las rectas tangentes a la circunferencia O1 dada y que pasen por P

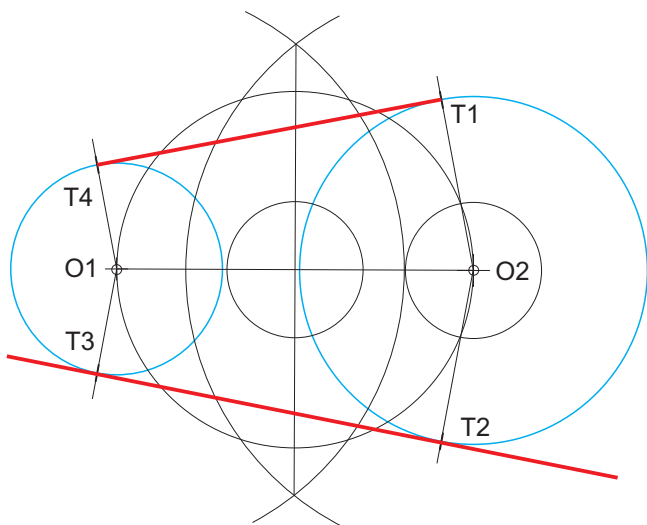


4.- Dibuja la circunferencia de radio 15 mm. que sea tangente a las rectas que se cortan dadas.



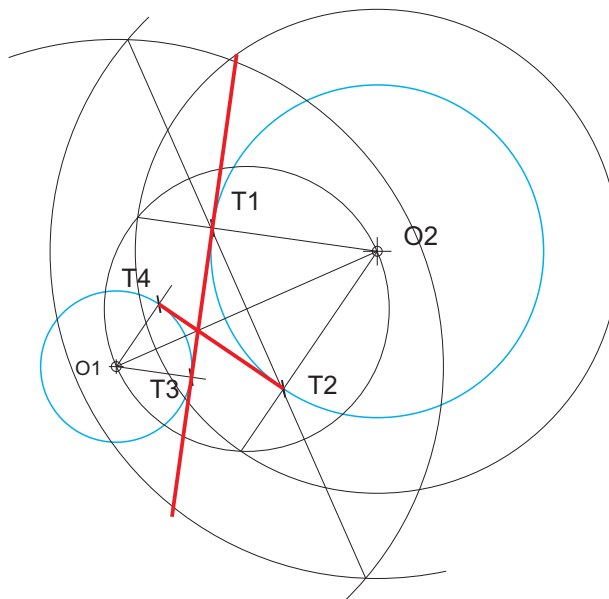
5.- Hallar las RECTAS tangentes **COMUNES EXTERIORES** a las dos circunferencias dadas..

O1= 14 mm O2 = 23 mm



6.- Hallar las RECTAS tangentes **COMUNES INTERIORES** a las dos circunferencias dadas..

O1= 10 mm O2 = 22 mm



Fecha	Nombre alumno	Curso:
N. lámina	Nombre lámina	Nota:
<b>TANGENCIAS ENTRE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS</b>		

EJERCICIO DE TANGENCIAS.

Dibuja la figura dada a escala 1:1 dejando constancia de las operaciones gráficas.

Debe quedar centrada en la lámina.

C1

C2

C3

C5

C4

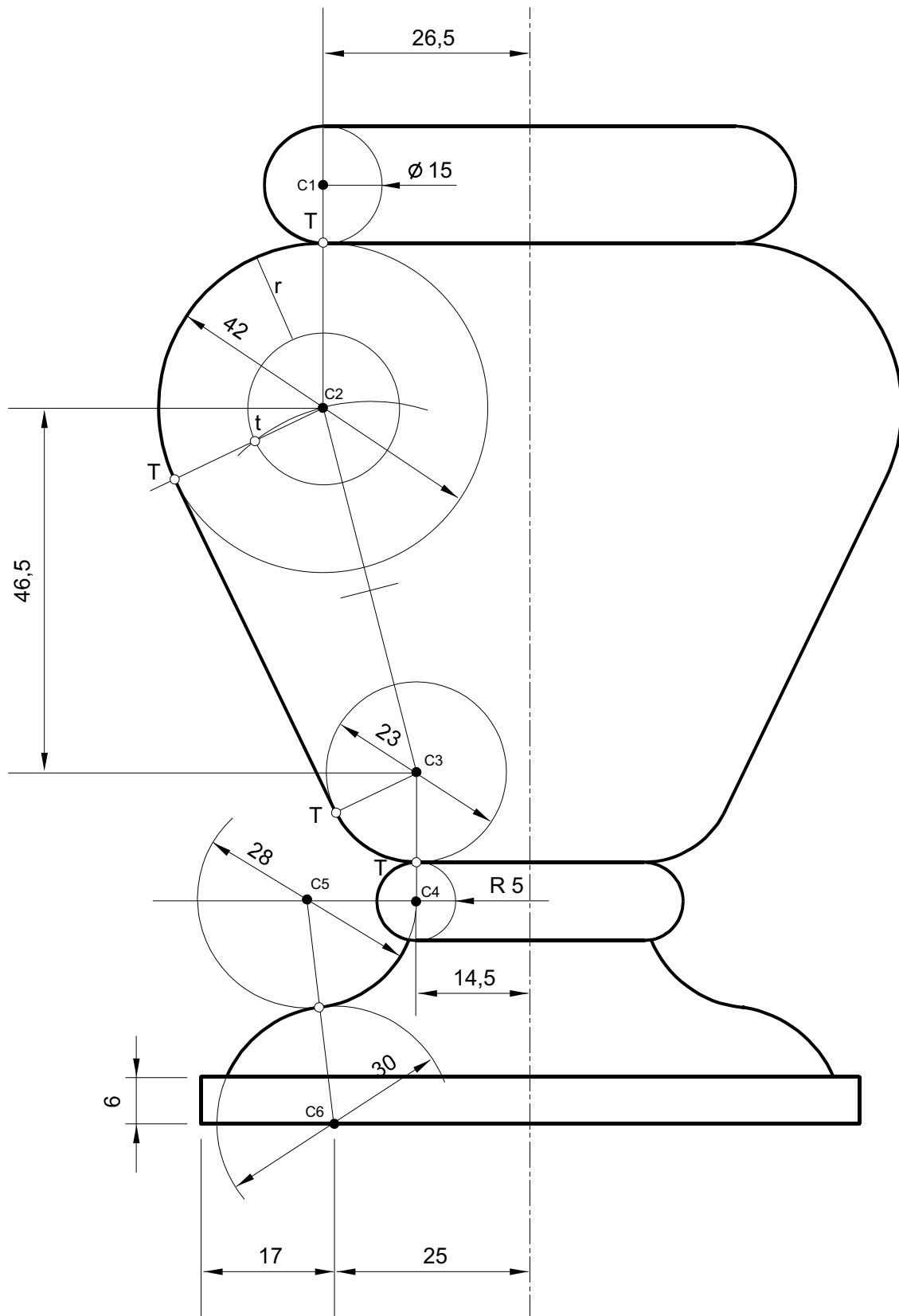
C6

Fecha:	Alumno/a:	Curso:
Nº Lámina:	Nombre de lámina: <b>TANGENCIAS Y ENLACES</b>	Calificación: <b>Tangencias y enlaces</b>

### EJERCICIO DE TANGENCIAS.

Dibuja la figura dada a escala 1:1 dejando constancia de las operaciones gráficas.

Debe quedar centrada en la lámina.



Fecha:	Alumno/a:	Curso:
Nº Lámina:	Nombre de lámina: <b>TANGENCIAS Y ENLACES</b>	Calificación:
	<b>Tangencias y enlaces</b>	

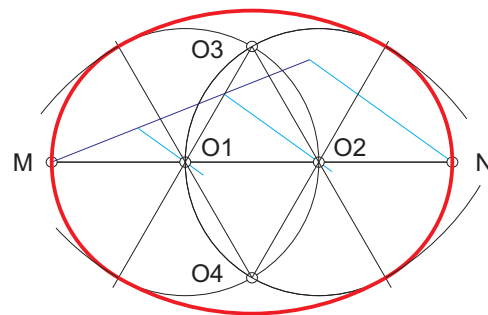
## Los óvalos.

Los óvalos son formas que recuerdan a las elipses. Se construyen trazando cuatro arcos iguales dos a dos. Los óvalos son simétricos según sus dos ejes perpendiculares, eje mayor y eje menor. Los centros de los arcos también serán simétricos.

### Construcción de un óvalo conociendo el EJE MAYOR.

**MN** es el segmento **eje mayor** del óvalo.

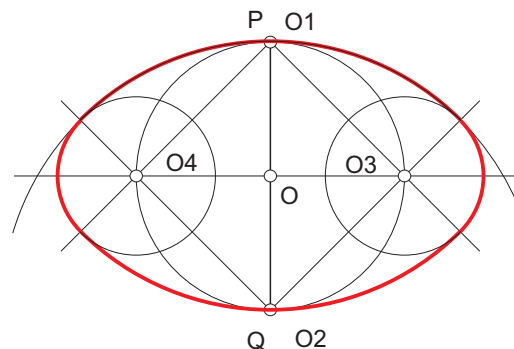
1. Se divide el segmento MN en tres partes iguales obteniendo los puntos O1 y O2.
2. Con centro en O1 Y O2 se trazan las circunferencias de radios O1M y O2N.
3. Los puntos de intersección de estas dos circunferencias, O3 y O4, serán los centros de los otros dos arcos del óvalo. Unir, como siempre en tangencias, los centros de los arcos para marcar los puntos de tangencia.



### Construcción de un óvalo conociendo el EJE MENOR.

**PQ** es el segmento **eje menor** del óvalo.

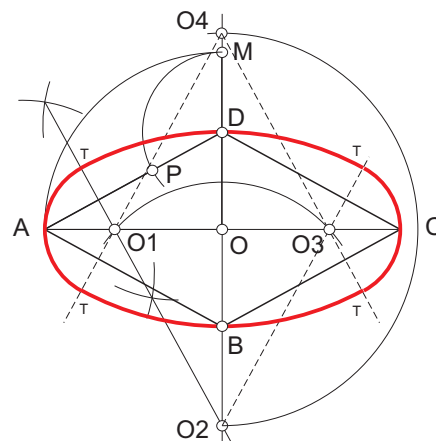
1. Se dibuja una circunferencia de diámetro PQ y se traza el diámetro perpendicular a PQ.
2. Se une P, que es igual a O1, con O3 que es el punto que se obtiene cuando se corta la circunferencia antes dibujada con el eje mayor, perpendicular a PQ.
3. Se actúa de igual manera con Q que será O2 y O4.
4. Con centro en en estos puntos se trazan los cuatro arcos que forman el óvalo: entro en O1 y radio O1O2. Etc.



### Construcción de un óvalo circunscrito a un rombo. (construcción de un óvalo conociendo los dos ejes).

Las diagonales del rombo coinciden con los ejes del óvalo.

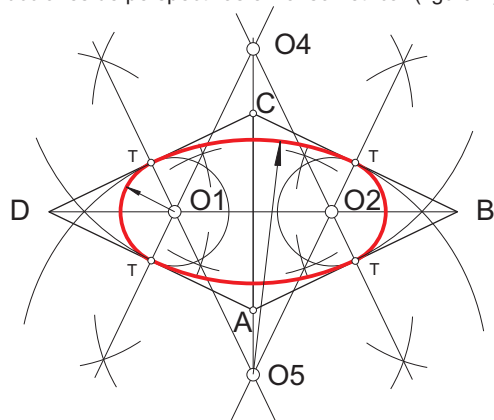
1. Se dibuja un arco con centro en O y radio igual a la mitad del eje mayor OA. Este arco corta a la prolongación del eje menor en M.
2. Se traza un arco con centro en D y radio DM que corte al lado del rombo AD en P.
3. Se dibuja la mediatriz del segmento AP. Esta mediatriz corta al eje mayor en O1 y al eje menor en O2.
4. Los simétricos de O1 y O2 con respecto a los ejes serán O3 y O4.
5. Faltaría unir, como en todas estas curvas, los centros de los arcos para acotar los puntos de tangencia. O1 con O4 y O3 con O2.



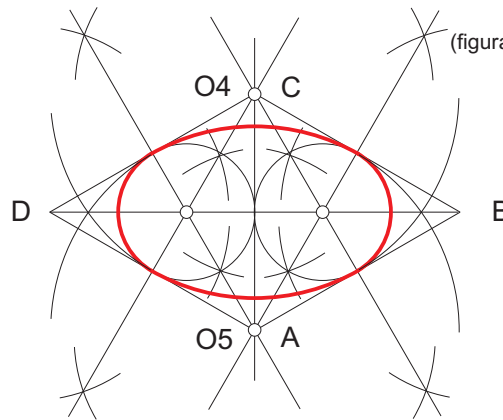
### Construcción de un óvalo inscrito en un rombo.

Se dibujan las mediatrices de los lados del rombo. Las intersecciones de dichas mediatrices son los centros O1 y O2. Estos centros estarán siempre en el eje mayor del rombo. O4 y O5 son los vértices A y C del rombo. (figura 1). Cuando el rombo tiene dos ángulos de 60°, tenemos un caso particular ya que las mediatrices de los lados coinciden con las medianas y los vértices del rombo. Se utiliza para simular las elipses en las construcciones de perspectivas en la isométrica. (figura 2)

(figura 1)



(figura 2)



Fecha	Nombre de Alumno	Curso
Nº de lámina	Título de lámina ÓVALOS Y OVOIDES.	Nota



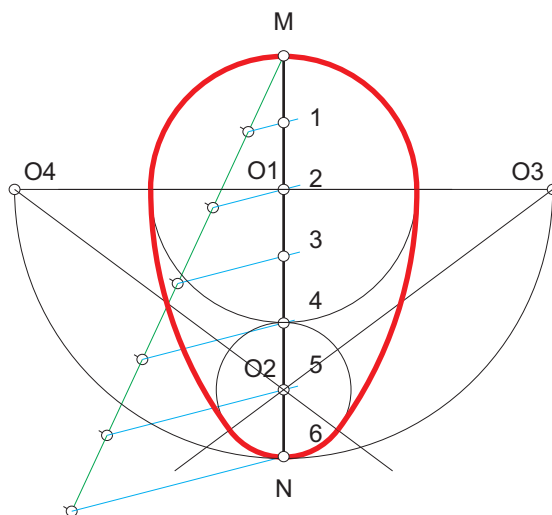
### Los ovoides.

El ovoide es una curva plana, cerrada formada por cuatro arcos de circunferencia: uno de ellos es una semicircunferencia y dos de ellos son simétricos. El ovoide tiene un eje un eje, llamado eje mayor, y un diámetro llamado también eje menor. El ovoide es simétrico únicamente sobre su eje mayor.

#### Construcción de un ovoide conociendo el EJE MAYOR.

MN es el segmento **eje mayor** del ovoide.

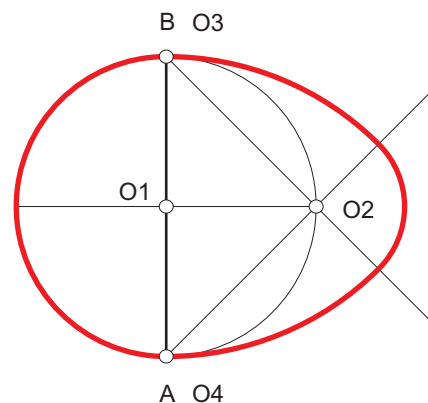
1. Se divide el segmento MN en seis partes iguales. (teorema de thales). Se numeran y se llama al número 2 como O1 y al número 5 O2.
2. Con centro en O1 y radio O1N se dibuja un arco que corte a la prolongación del eje menor (diámetro de la circunferencia O1M) en los centros O3 y O4.
3. Se unen los centros O3 y O4 con O2, prolongando.
4. Se dibujan los arcos correspondientes.



#### Construcción de un ovoide conociendo el diámetro o EJE MENOR.

AB es el segmento diámetro del ovoide y eje menor.

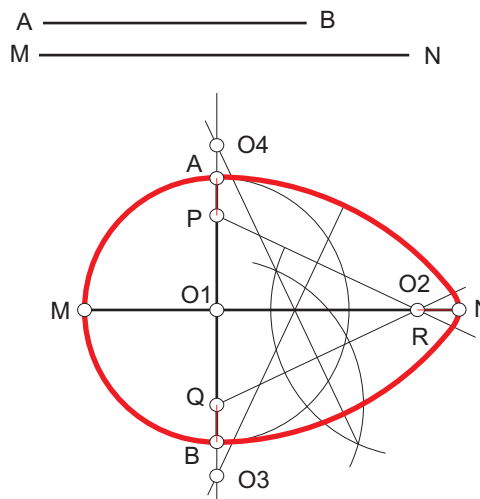
1. Se dibuja la circunferencia de centro O1, centro del segmento AB, y radio O1A.
2. Los puntos A y B serán los centros de los arcos O3 y O4.
3. Se traza una perpendicular por el centro de AB, que será el eje mayor.
4. Donde la perpendicular corte a la circunferencia será O2.
5. Se unen los centros O3 y O4 con O2 para delimitar los arcos con los puntos de tangencia.
6. Se trazan los arcos de centros O1, O2, O3 y O4.



#### Construcción de un ovoide conociendo el diámetro y el eje mayor.

MN es el eje mayor y AB el diámetro.

1. Se dibuja la circunferencia de diámetro AB y cuyo centro es O1.
2. Se traza por el punto O1 la recta perpendicular a AB, que corta a la semicircunferencia en M.
3. Sobre la perpendicular anterior y a partir del punto M se lleva el eje mayor MN.
4. A partir de los puntos A, B y N se llevan hacia el interior los segmentos AP, BQ y NR, iguales al radio del arco menor del ovoide O2N, que se elige arbitrariamente.
5. Se hallan las mediatrices de los segmentos Po2 y Qo2 que cortan a la prolongación del diámetro AB en los puntos O3 y O4.



### CURVAS TÉCNICAS.

Se construyen con arcos de circunferencias y con los enlaces en cada unión de cada curva. Es decir, para construir una curva técnica hay que hallar los centros de los arcos a trazar y los puntos de tangencia de los enlaces.

Los óvalos y los ovoides están formados a partir de circunferencias tangentes entre sí. Son formas muy utilizadas en el diseño industrial y arquitectónico, dada la sencillez de su trazado.

Fecha	Nombre de Alumno	Curso
Nº de lámina	Título de lámina ÓVALOS Y OVOIDES.	Nota

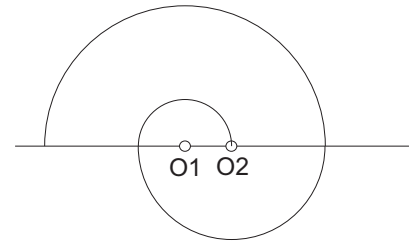
### Espirales.

- La espiral es una línea curva que se da vueltas alrededor de un punto. Pueden ser infinitas tanto hacia el interior como hacia el exterior. Se llama "paso" a la distancia radial que existe entre dos vueltas consecutivas.
- Las "Volutas" no son espirales propiamente dicho aunque lo parezcan. Son curvas formadas por arcos de circunferencia, cuyos radios se van ampliando o reduciendo. Los centros de los arcos pueden ser desde dos hasta cualquier nº de vértices que tenga un polígono regular.
- La evolvente del círculo es una curva que se genera por rectas tangentes a una circunferencia.
- Las hélices son curvas que se generan por un punto que se mueve sobre una superficie de revolución.

### Construcción de volutas de varios centros.

- Voluta de dos centros (espiral de Honnecourt). Está formada por circunferencias tangentes entre sí con centros en dos puntos dados:

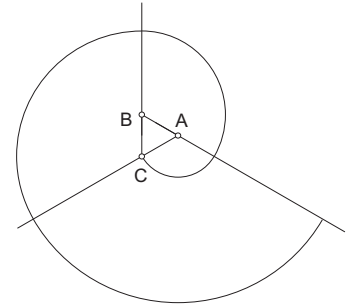
1. Se dibuja una recta y en ella se colocan los dos centros.
2. Se dibuja una semicircunferencia con centro en O1 y radio O1O2.
3. Con centro en O2 se dibuja otra circunferencia tangente a la primera. (centro O2 y radio O2M). Así sucesivamente.



- Voluta de tres centros (centros en los vértices de un triángulo).

1. Se dibuja el polígono regular. En este caso un triángulo. Si nos dan el paso, éste sería de la siguiente manera: medida del lado del triángulo = 1/3 del paso, luego medida del paso /3.
2. Se prolongan los lados de manera que no se corten las prolongaciones.
3. Desde el vértice A y con radio AC se dibuja un arco de medida el ángulo del lado y la prolongación.
4. Desde B y enlazando con el arco anterior se dibuja un segundo arco hasta que corte a la prolongación del vértice B.
5. Desde C y enlazando donde corte el arco anterior se dibuja otro arco. Continuar así tantas veces como sea necesario.

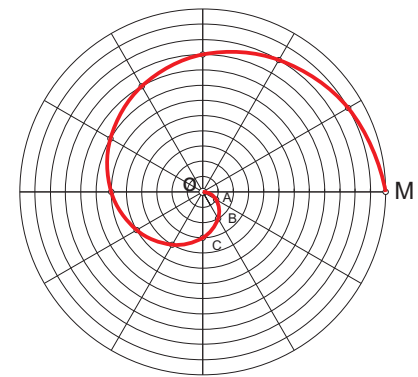
Se pueden dibujar volutas con las prolongaciones de cualquier polígono regular



### Construcción de la Espiral de Arquímedes.

Es la consecuencia del desplazamiento de un punto con un movimiento angular regular con respecto a otro punto fijo central.

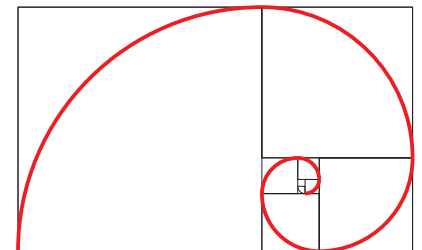
1. Sea el paso de la espiral OM.
2. Se divide la circunferencia en tantas partes como vamos a dividir OM. En nuestro caso en 12 partes iguales.
3. Se trazan las circunferencias concéntricas con centro en el punto O y radios O1, O2, O3, ... Así nos darán los puntos A, B, C, etc.
4. Se unen a mano alzada o con plantilla los puntos anteriores, que configuran la espiral.



### Construcción de la Espiral áurea.

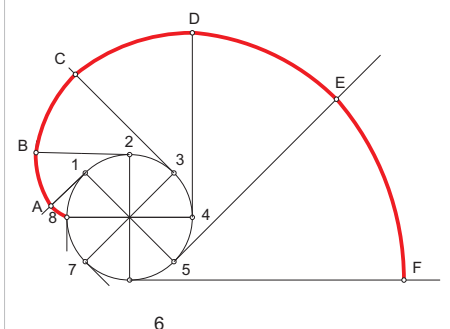
Está basada en la construcción del rectángulo áureo, está formada por arcos de circunferencia tangentes entre sí que cumplen que  $r/r' = f$ .

Para construirla dibujaremos un rectángulo de oro y en él la sucesión de divisiones áureas en forma de cuadrados y rectángulos áureos. Trazaremos los arcos áureos como se indica en la figura.



### Construcción de la evolvente de la circunferencia conociendo el radio.

1. Se dibuja la circunferencia.
  2. Se divide en un número igual de partes (8 en el ejemplo)
  3. Por cada división se dibujan tangentes.
  4. El primer arco 1A. Esta distancia es la rectificación del arco 1-8.
  5. En la tangente desde 2 se pone la distancia - rectificación de 1-8 dos veces o bien se rectifica el arco 2-8. Se realiza la misma operación con todos los puntos.
- Los puntos obtenidos A, B, C, D, etc. se unen a mano alzada o con plantilla. Se puede hacer una variante con arcos de circunferencia desde 1, 2, 3, 4, etc. y radios 1A, 2B, 3C, 4D, etc.



Fecha	Nombre de Alumno	Curso
Nº de lámina	Título de lámina ÓVALOS Y OVOIDES.	Nota

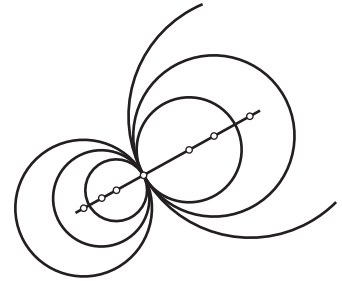
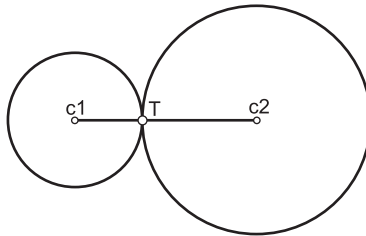
# Las Tangencias

Dos elementos son tangentes cuando tienen un punto en común denominado punto de tangencia. Estos elementos son circunferencias (o arcos de circunferencia, en algunos casos curvas conicas también) y rectas.

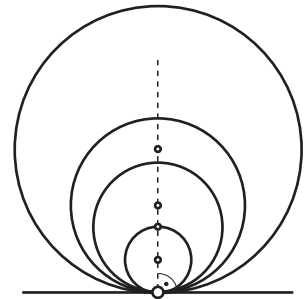
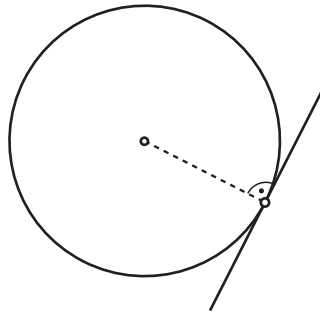
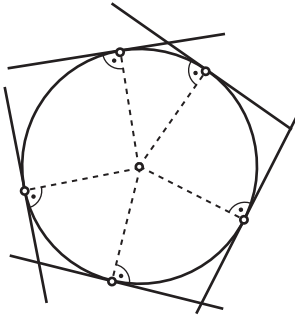
Un enlace es la unión armónica de curvas con curvas o curvas con rectas. Los enlaces son la aplicación práctica de las tangencias.

## Propiedades fundamentales de las tangencias

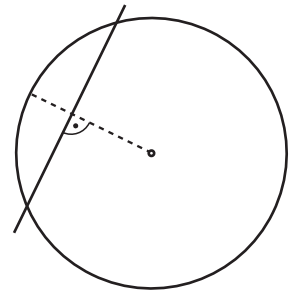
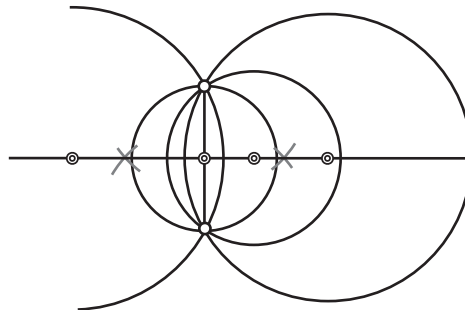
- 1- Los centros de dos circunferencias tangentes entre sí están alineados con el punto de tangencia.



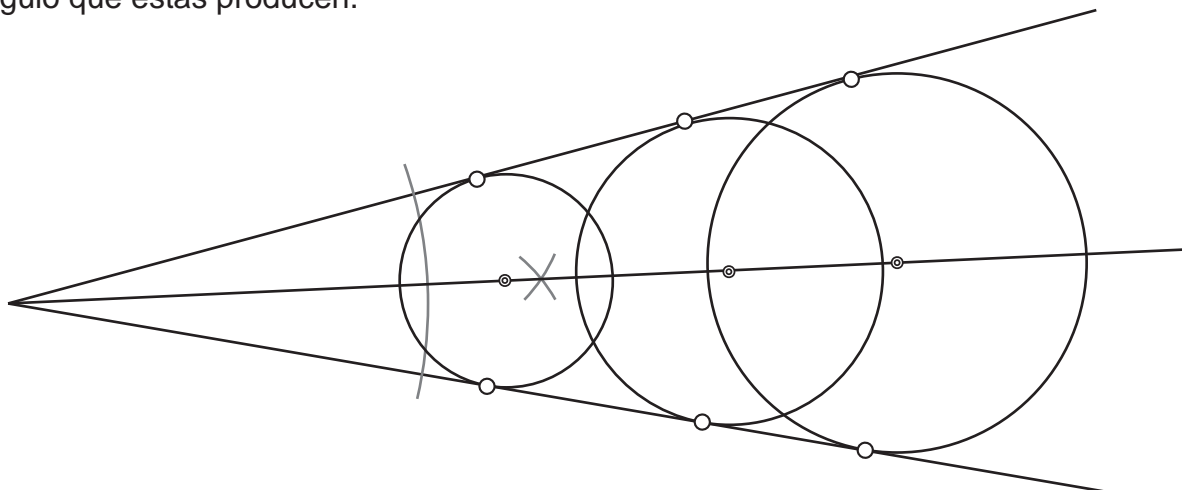
- 2- Una recta tangente a una circunferencia es siempre perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia.



- 3- El centro de cualquier circunferencia que pasa por dos puntos se encuentra en la mediatriz del segmento que definen los dos puntos. Todo radio perpendicular a una cuerda de circunferencia divide a esta en dos mitades iguales.



- 4- El centro de cualquier circunferencia tangente a dos rectas se encuentra en la bisectriz del ángulo que estas producen.



## Tangencias: Teoremas fundamentales y lugares geométricos

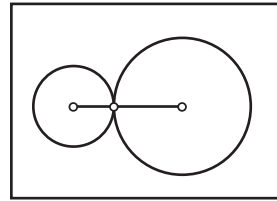
Conociendo los cuatro teoremas fundamentales de las tangencias aun no sabemos lo suficiente para resolver problemas básicos de tangencias.

Es necesario conocer el concepto de LUGAR GEOMÉTRICO. Y hacer uso de al menos dos tipos de lugares geométricos.

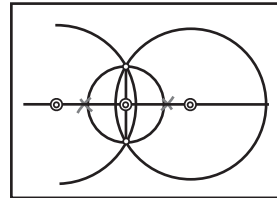
Un LUGAR GEOMETRICO es un conjunto de puntos en el plano que cumplen unas circunstancias, características o propiedades comunes respecto a un elemento geometrico (puede ser un plano, una circunferencia, un segmento, un ángulo, etc)

Para resolver problemas básicos de tangencias tenemos que tener claros dos lugares geometricos: Las rectas paralelas y las circunferencias concéntricas.

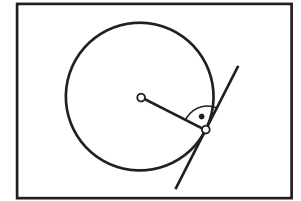
1º Centros alineados con el punto de tangencia



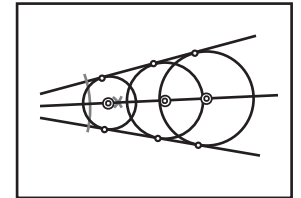
3º Centros de cir. que pasan por dos pts. en mediatriz



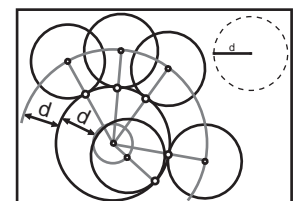
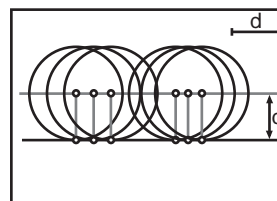
2º Radio perpendicular a recta tg. por el punto de tg.



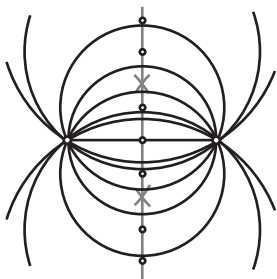
4º Centros de cir. tg. a dos rectas. en bisectriz



Lugares Geométricos: PARALELAS Y CIR. CONCÉNTRICAS



### DEFINICIONES DE ALGUNOS LUGARES GEOMÉTRICOS IMPORTANTES PARA TANGENCIAS



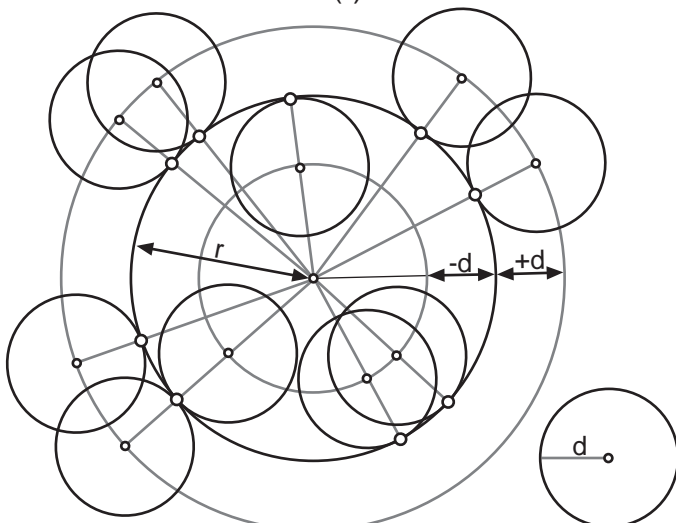
**MEDIATRIZ:** Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos. Una mediatriz contiene los centros de TODAS las circunferencias que pasan por los extremos del segmento. Cuanto más se aleje el centro del punto medio del segmento más amplio será el radio.

**BISECTRIZ:** Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas. Presente en las propiedades fundamentales de las tangencias. La bisectriz de un ángulo contiene a todos los centros de circunferencias tangentes a los lados. Cuanto más alejado esté el centro del vértice del ángulo más amplitud tendrá el radio de la circunferencia tangente.

**EJE RADICAL:** El es lugar geométrico de los puntos del plano que son centros de circunferencia de igual radio tangentes a otras dos.

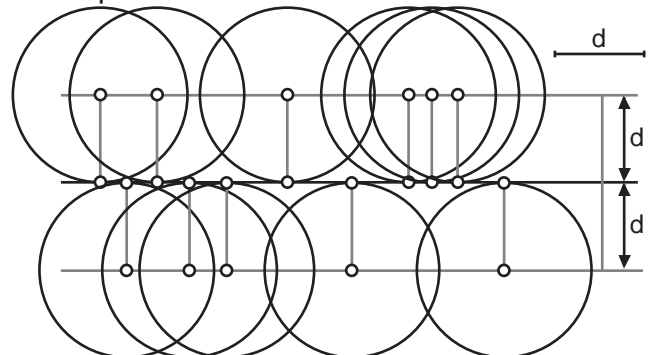
#### CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS

Una cir. concéntrica de radio  $(r+d)$  a otra de radio  $(r)$  es el lugar geométrico de los puntos del plano que son centros de las circunferencias TANGENTES EXTERIORES de radio  $(d)$  a la circunferencia de radio  $(r)$ .



#### PARALELAS A UNA DISTANCIA

Una recta paralela a una distancia  $(d)$  es el lugar geométrico de los puntos del plano que son centros de circunferencias de radio  $(d)$  tangentes a una recta que se encuentra a la distancia  $(d)$  de su paralela.

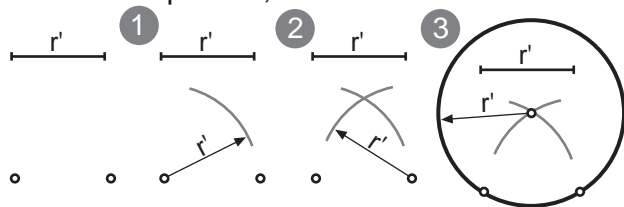


Una cir. concéntrica de radio  $(r-d)$  a otra de radio  $(r)$  es el lugar geométrico de los puntos del plano que son centros de las circunferencias TANGENTES INTERIORES de radio  $(d)$  a la circunferencia de radio  $(r)$ .

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TANGENCIAS

Las soluciones a los problemas de tangencias son rectas y circunferencias tangentes a otras rectas y/o circunferencias. Pero la base de las soluciones y un requisito importante en estas es situar correctamente LOS PUNTOS DE TANGENCIA Y LOS CENTROS (si la solución es una circunferencia).

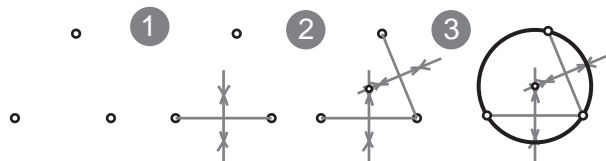
Dados dos puntos, trazar la circunferencia que pasa por estos con un radio  $r'$



- 1º- Trazamos un arco con radio  $r'$  con centro en el primer punto (lugar geométrico donde se encontrará el centro solución, cir. concéntricas).
- 2º- Trazamos otro arco con radio  $r'$  con centro en el segundo punto (lugar geométrico donde se encontrará el centro solución, cir. concéntricas).
- 3º- En el punto de intersección se encuentra la solución. Trazamos la circunferencia.

EL CENTRO DE LAS SOLUCIONES SIEMPRE SE ENCONTRARÁ EN LA MEDIATRIZ DEL SEGMENTO QUE PASA POR DOS PUNTOS. PARA ESTE PROBLEMA ENCONTRAMOS OTRA SOLUCIÓN EN EL LADO OPUESTO DEL SEGMENTO.

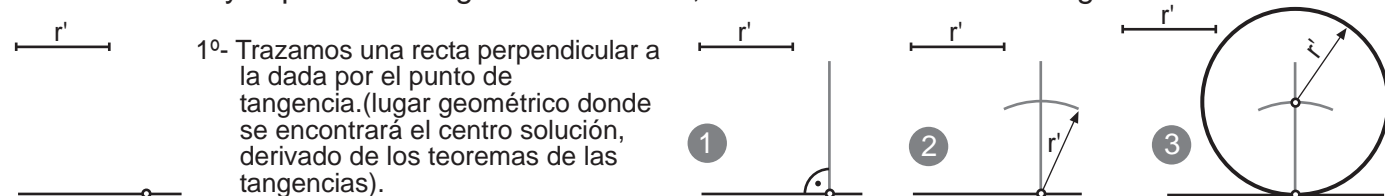
Dados tres puntos, trazar la circunferencia que pasa por estos.



- 1º- Unimos dos puntos y trazamos su mediatriz.
- 2º- Unimos el otro punto con cualquiera de los anteriores y trazamos la mediatriz del segundo segmento.
- 3º- En el punto de intersección se encuentra la solución. Trazamos la circunferencia.

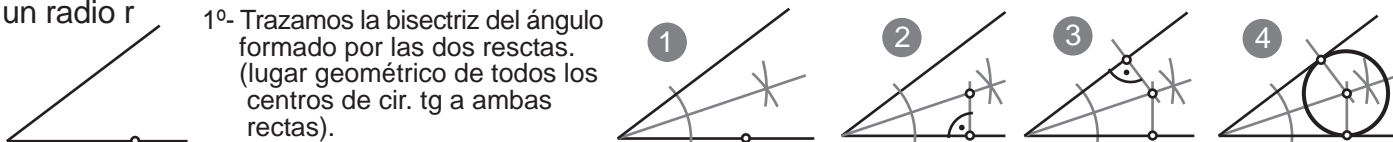
LA MEDIATRIZ DEL SEGMENTO QUE PASA POR DOS PUNTOS CONTIENE TODOS LOS CENTROS DE LAS CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR ESOS DOS PUNTOS. EL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE DOS MEDIATRICES DE DOS SEGMENTOS PRODUCIDOS POR TRES PUNTOS ES EL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR LOS TRES PUNTOS. CIRCUNCENTRO DE UN TRIÁNGULO.

Dada una recta y el punto de tangencia sobre ella, trazar la circunferencia tangente con un radio  $r'$



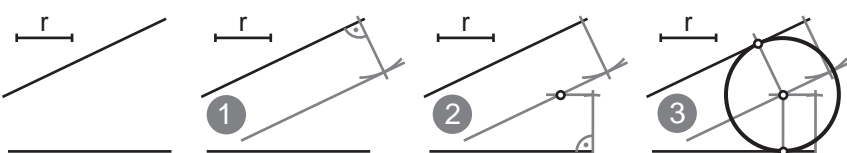
- 1º- Trazamos una recta perpendicular a la dada por el punto de tangencia. (lugar geométrico donde se encontrará el centro solución, derivado de los teoremas de las tangencias).
- 2º- Con centro en el punto de tangencia trazamos un arco de radio  $r'$  que corta a la perpendicular. (lugar geométrico donde se encontrará la solución, circunferencia concéntrica).
- 3º- En el punto de intersección se encuentra la solución. Trazamos la circunferencia.

Dadas dos rectas y el punto de tangencia sobre una de ellas, trazar la circunferencia tangente con un radio  $r$



- 1º- Trazamos la bisectriz del ángulo formado por las dos rectas. (lugar geométrico de todos los centros de cir. tg a ambas rectas).
- 2º- Trazamos una perpendicular a la recta que contiene el pto. de tg. pasando por este. (Lugar geométrico de todos los centros de cir. que son tangentes por ese punto a la recta).
- 3º- La intersección de la bisectriz con la perpendicular es el centro buscado. (Coincidencia de dos lugares geométricos). Desde ese centro trazamos una perpendicular a la otra recta que nos da el otro pto. de tg.
- 4º- Trazamos la cir. buscada.

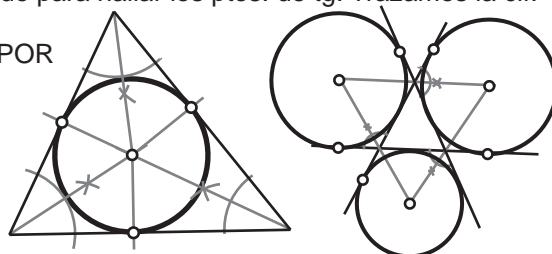
Dadas dos rectas, trazar la circunferencia de radio  $r$  tangente a ambas.



- 1º- Trazamos una paralela a una distancia  $r$  de una recta.
- 2º- Hacemos lo mismo con la otra recta. Donde las paralelas se cortan es el centro de la solución.

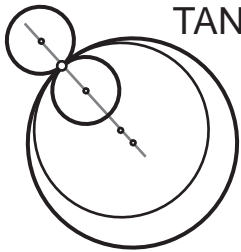
- 3º- Desde el centro trazamos perpendiculares a las rectas del enunciado para hallar los pto. de tg. Trazamos la cir.

LA BISECTRIZ DE UN SEGMENTO DE UN ÁNGULO PRODUCIDO POR DOS RECTAS CONTIENE TODOS LOS CENTROS DE LAS CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A ELLAS. EL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE DOS BISECTRICES DE DOS ÁNGULOS PRODUCIDOS POR TRES RECTAS ES EL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA TANGENTE A LAS TRES. INCENTRO DE UN TRIÁNGULO.



Las tangencias problemas básicos  
una, dos o tres rectas o puntos.





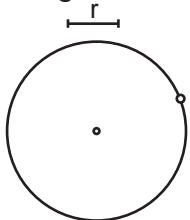
## TANGENCIAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS: PRINCIPIOS.

Nos pueden pedir tres tipos de circunferencias tangentes a una dada .

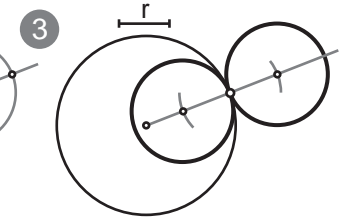
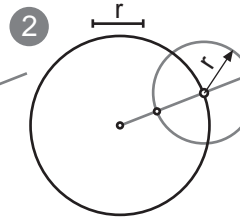
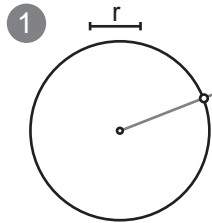
- 1- Las tangentes interiores que se encuentran contenidas por la circunferencia dada, con la cual comparten el punto de tangencia. Obviamente estas tendrán que tener un radio menor a la dada para poder ser contenidas sin ser secantes.
- 2- Las tangentes exteriores que se encuentran fuera de la circunferencia dada.
- 3- Las circunferencias tangentes que contienen a la dada. Estas tendrán que tener un radio mayor a la circunferencia dada.

EN CUALQUIER CASO LOS CENTROS DE CIRCUNFERENCIAS TANGENTES SIEMPRE ESTÁN ALINEADOS CON EL PUNTO DE TANGENCIA.

Dada una circunferencia de radio  $R$  y el punto de tangencia sobre ella, trazar la circunferencias tangentes con un radio  $r$

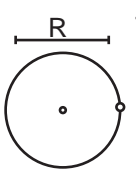


- 1º- Trazamos una recta que une el centro con el punto de tangencia (lugar geométrico donde se encontrará el centro solución, derivado de los teoremas de las tangencias).

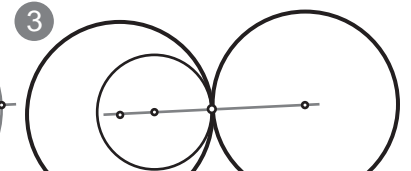
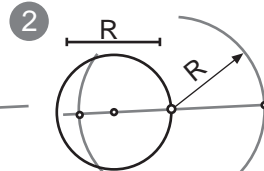
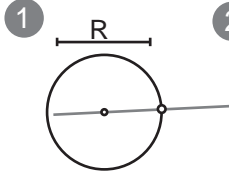


- 2º- Con centro en el punto de tangencia trazamos un arco de radio  $r$  (lugar geométrico donde se encontrará la solución, circunferencia concéntrica) que corta a la recta en dos puntos, los cuales serán los centros de las soluciones.
- 3º- En el punto de intersección se encuentra la solución. Trazamos la circunferencia.

Dada una circunferencia de radio  $r$  y el punto de tangencia sobre ella, trazar la circunferencias tangentes con un radio  $R$ .

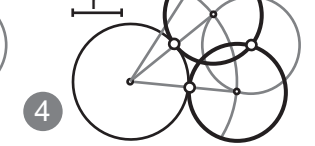
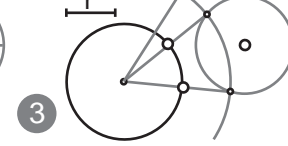
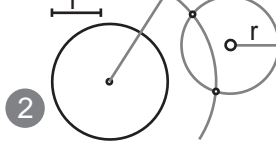
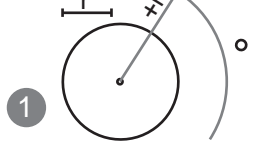
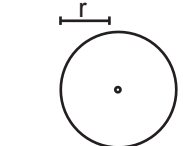


- 1º- Trazamos una recta que une el centro con el punto de tangencia (lugar geométrico donde se encontrará el centro solución, derivado de los teoremas de las tangencias).



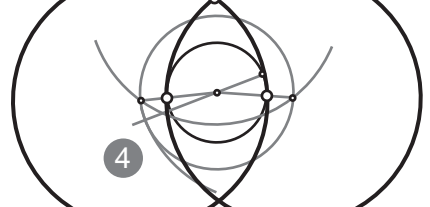
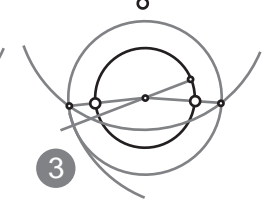
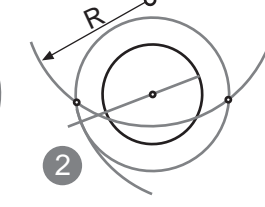
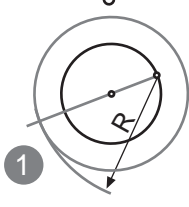
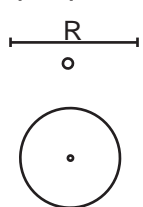
- 2º- Con centro en el punto de tangencia trazamos un arco de radio  $R$  (lugar geométrico donde se encontrará la solución, circunferencia concéntrica) que corta a la recta en dos puntos, los cuales serán los centros de las soluciones.
- 3º- En el punto de intersección se encuentra la solución. Trazamos la circunferencia.

Dada una circunferencia de radio  $R$  y un punto exterior a ella, trazar las cir. tangentes de radio  $r$  que pasan por el punto.



- 1º- Trazamos un radio arbitrario y a partir del punto de intersección con la circunferencia copiamos ( $r$ ), trazamos un arco concéntrico a la circunferencia de radio ( $+r$ ).
- 2º- Con centro en el punto dado trazamos una circunferencia de radio ( $r$ ). Los puntos de intersección con el arco anterior son los centros de la solución (coincidencia de dos lugares geométricos).
- 3º- Unimos los centros hallados con el centro de la circunferencia dada para hallar los puntos de tangencia.
- 4º- Trazamos las circunferencias buscadas.

Dada una circunferencia de radio  $r$  y un punto exterior a ella, trazar las cir. tangentes de radio  $R$  que pasan por el punto.

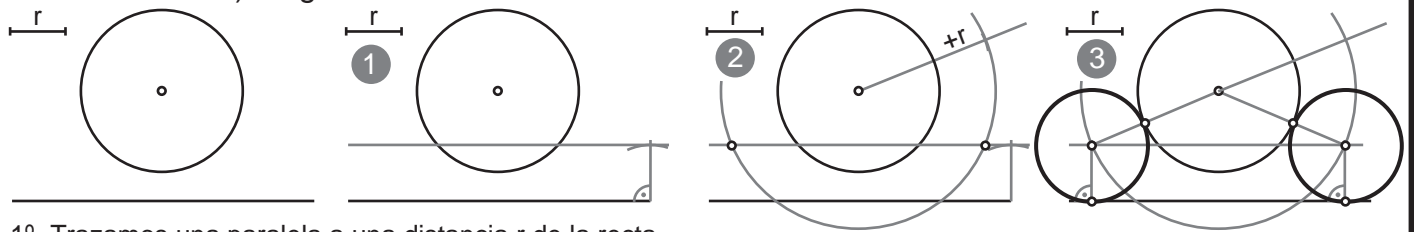


- 1º- Trazamos un diámetro arbitrario y a partir del punto de intersección con la circunferencia copiamos ( $R$ ) sobre la totalidad del diámetro), trazamos un arco concéntrico a la circunferencia de radio.
- 2º- Con centro en el punto dado trazamos una circunferencia de radio ( $R$ ). Los puntos de intersección con la circunferencia anterior son los centros de la solución (coincidencia de dos lugares geométricos).
- 3º- Unimos los centros hallados con el centro de la circunferencia dada para hallar los puntos de tangencia.
- 4º- Trazamos las circunferencias buscadas.

Circunferencias TANGENTES a otra circunferencia dado el radio de la solución y un punto

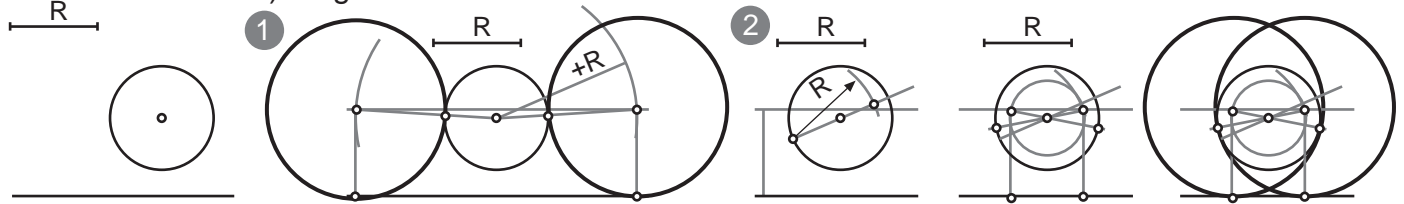
## TANGENCIAS DADOS DOS ELEMENTOS (rectas o circunferencias) y el radio de la circunferencia solución.

Dada una recta y una circunferencia de radio  $R$ , trazar la circunferencia de radio  $r$  (menor al radio de la dada) tangente a ambas.



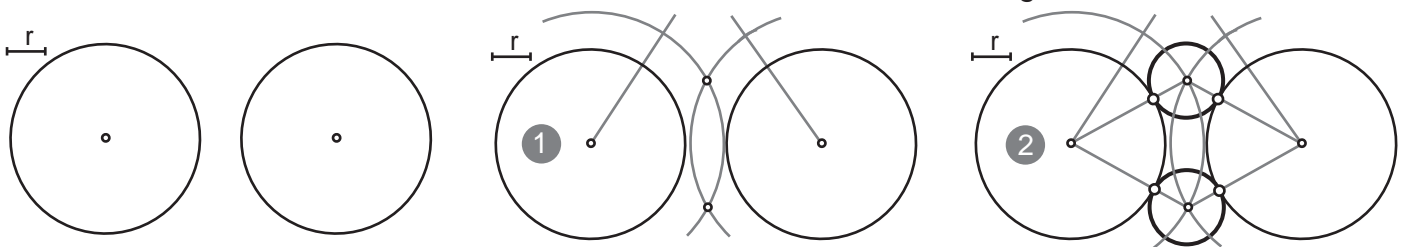
- 1º- Trazamos una paralela a una distancia  $r$  de la recta.
- 2º- Trazamos un arco concéntrico a la dada de radio  $(+r)$ . Conseguimos esto trazando un radio arbitrario y a partir del punto de corte con la circunferencia transportar la medida  $(r)$ . Los puntos de intersección con la recta paralela serán los centros de las circunferencias soluciones. (coincidencia de dos lugares geométicos)
- 3º- Hallamos los puntos de tangencia: a partir de los centros perpendiculares a las rectas y segmentos con el otro extremo en la circunferencia de la dada. Trazamos las circunferencias que solucionan el problema.

Dada una recta y una circunferencia de radio  $r$ , trazar las circunferencias de radio  $R$  (mayor al radio de la dada) tangente a ambas.



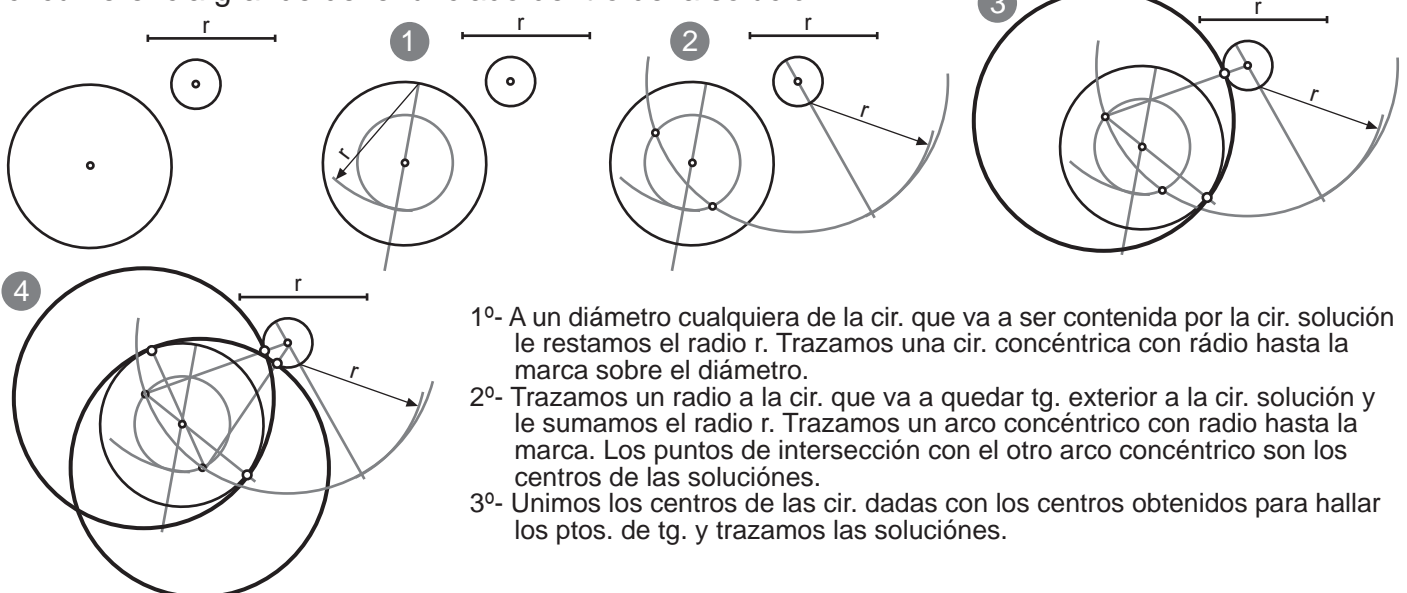
- 1º- Procederemos del mismo modo que en el problema anterior para hallar las mismas soluciones. Tg. exteriores.
- 2º- Situaremos la medida de  $R$  sobre el diámetro a partir de un extremo para encontrar los centros de las cir. tg. que contienen a la dada. Unimos los centros solución con el dado para hallar pts. de tg. y desde estos trazamos perpendiculares a las rectas para hallar pts. de tg. sobre la recta. Trazamos las cir. solución que contienen a la dada.

Dadas dos circunferencias trazar las circunferencias de radio  $r$  tangentes exteriores a ambas.



- 1º- Sumamos a los radios de ambas circunferencias  $r$  y trazamos dos arcos concéntricos que se cortan en dos pts. que serán los centros de las soluciones.
- 2º- Unimos los centros de la solución con los dados y obtenemos los pts. de tg. Trazamos las cir. solución.

Dadas dos circunferencias trazar la circunferencia de radio  $r$  tangente a ambas quedando la circunferencia grande del enunciado dentro de la solución.

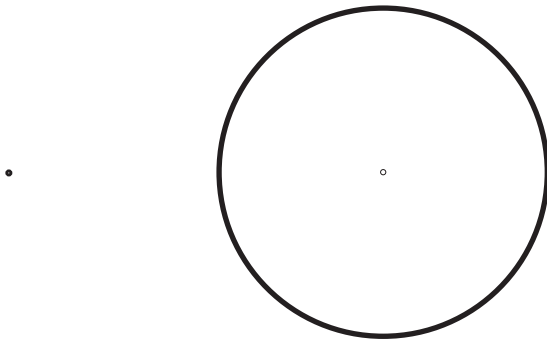


- 1º- A un diámetro cualquiera de la cir. que va a ser contenida por la cir. solución le restamos el radio  $r$ . Trazamos una cir. concéntrica con radio hasta la marca sobre el diámetro.
- 2º- Trazamos un radio a la cir. que va a quedar tg. exterior a la cir. solución y le sumamos el radio  $r$ . Trazamos un arco concéntrico con radio hasta la marca. Los puntos de intersección con el otro arco concéntrico son los centros de las soluciones.
- 3º- Unimos los centros de las cir. dadas con los centros obtenidos para hallar los pts. de tg. y trazamos las soluciones.

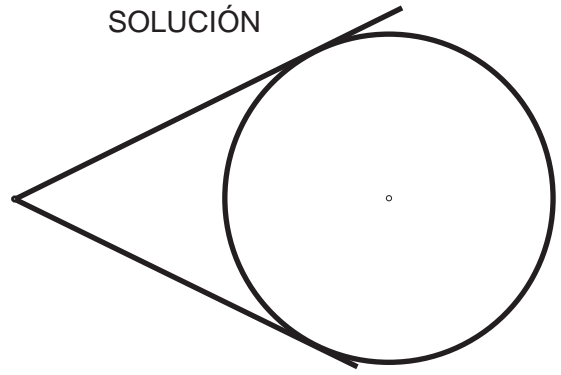


En el enunciado se presenta una circunferencia con su centro y un punto exterior a ella. Se piden las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por el punto exterior

ENUNCIADO



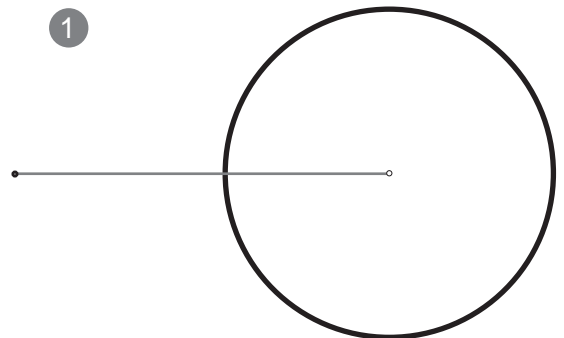
SOLUCIÓN



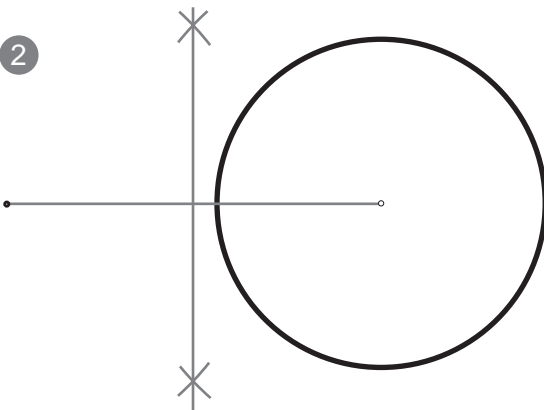
Para resolverlo necesitamos trazar ciertos trazados auxiliares que se pueden explicar cuatro pasos

- 1º- Unimos el centro de la circunferencia con el punto exterior a ella trazando un segmento.
- 2º- Trazamos la mediatriz del segmento obteniendo el punto medio de este.
- 3º- Con centro en el punto medio y radio hasta el punto exterior o el centro (lo cual es lo mismo), trazamos una circunferencia que corta a la dada en dos puntos, los Puntos de tangencia.
- 4º Trazamos radios hasta los puntos de tangencia
- 5º Desde el punto exterior hasta los puntos de tangencia trazamos las rectas que son solución

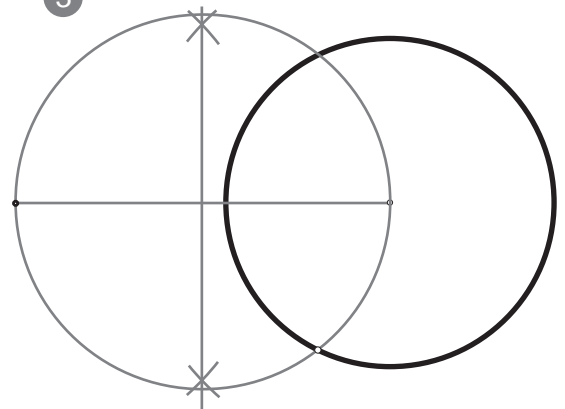
1



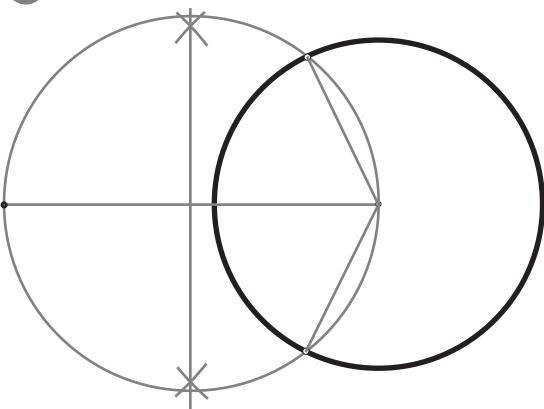
2



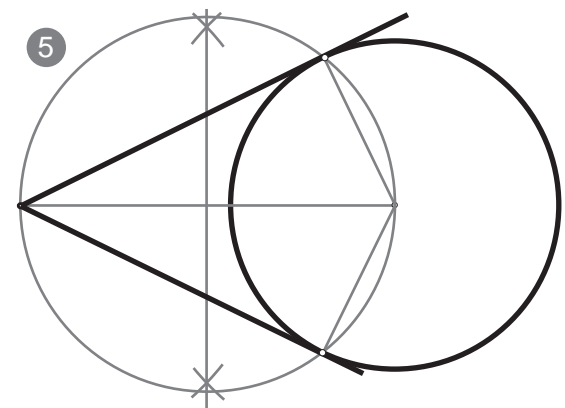
3



4

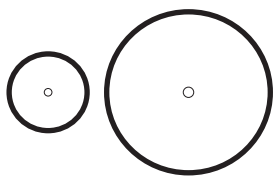


5

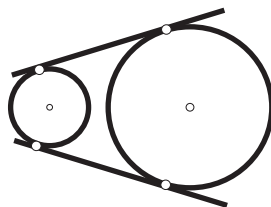


## Tangentes exteriores e interiores a dos circunferencias

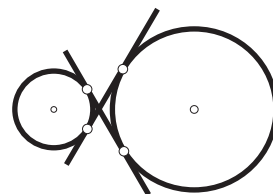
ENUNCIADO



SOLUCIÓN tangentes exteriores



SOLUCIÓN tangentes interiores

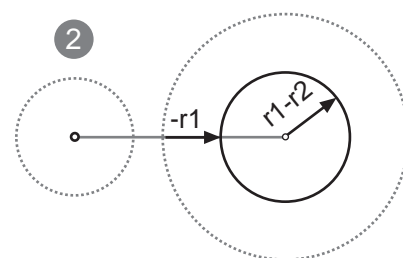
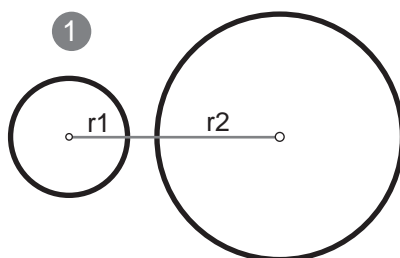


Para resolver estos dos problemas necesitamos reducirlos al problema pto-circunferencia. tendremos que hacer el esfuerzo de "olvidarnos" (ignorar visualmente) el enunciado original y resolver el problema pto-circunferencia. una vez conseguido el resultado del problema original no trae mas dificultad que llevar las rectas y los radios a su sitio trazando paralelas con escuadra y cartabón

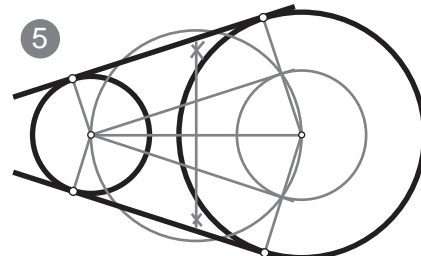
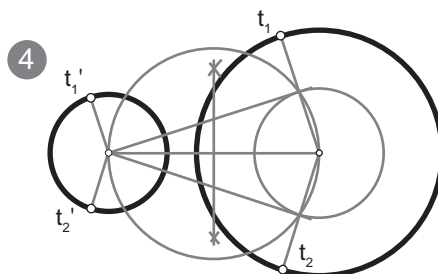
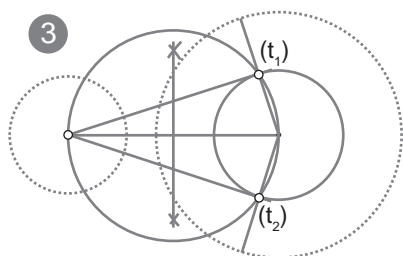
### Tangentes exteriores a dos circunferencias

- 1º Trazamos el segmento que une los dos centros
- 2º Sobre el segmento, a la circunferencia grande, con el compás, le restamos el radio de la circunferencia pequeña.

DE ESTE MODO HEMOS REDUCIDO EL PROBLEMA A RECTAS TANGENTES PUNTO-CIRCUNFERENCIA



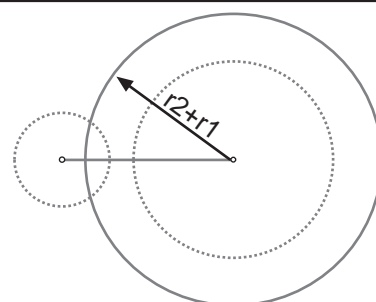
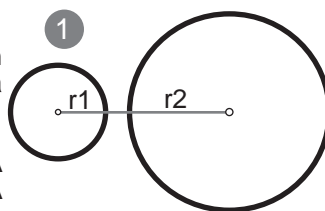
- 3º- Resolvemos el problema reducido, trazamos los radios que van a (t1) y (t2) lo suficientemente largos para que corten a la circunferencia grande original.
- 4º- A partir del centro de la circunferencia pequeña original trazamos radios con la misma inclinación (escuadra y cartabón). Así, con los cuatro radios trazados obtenemos t1 y t2 sobre la grande y t1' y t2' sobre la pequeña
- 5º- Unimos t1 con t1' y t2 con t2'



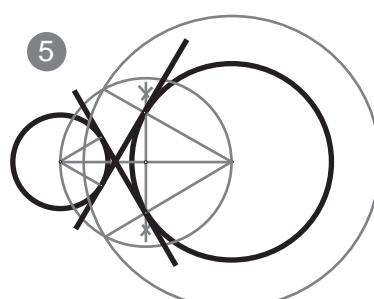
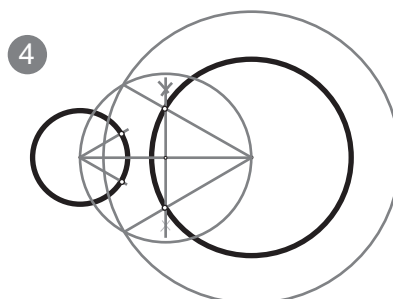
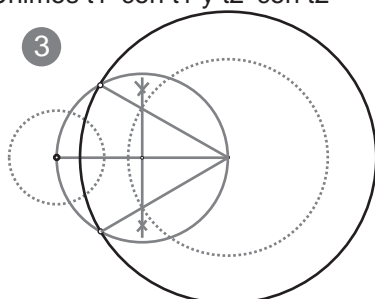
### Tangentes interiores a dos circunferencias

- 1º Trazamos el segmento que une los dos centros
- 2º Sobre el segmento, a la circunferencia grande, con el compás, le sumamos el radio de la circunferencia pequeña.

DE ESTE MODO HEMOS REDUCIDO EL PROBLEMA A RECTAS TANGENTES PUNTO-CIRCUNFERENCIA

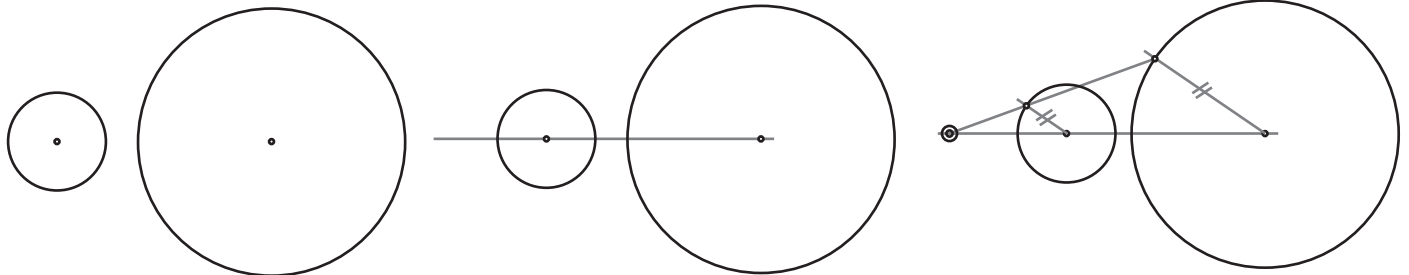


- 3º- Resolvemos el problema reducido, obteniendo así (t1) y (t2), pero esta vez no trazamos las rectas tangentes para no contaminar con demasiadas líneas el dibujo.
- 4º- Trazamos radios paralelos a los de la circunferencia grande en la circunferencia pequeña, pero invirtiendo su posición (el radio de arriba en la grande, abajo en la pequeña y viceversa). Los puntos de tangencia del problema original se encuentran en las intersecciones de los radios.
- 5º- Unimos t1' con t1 y t2' con t2

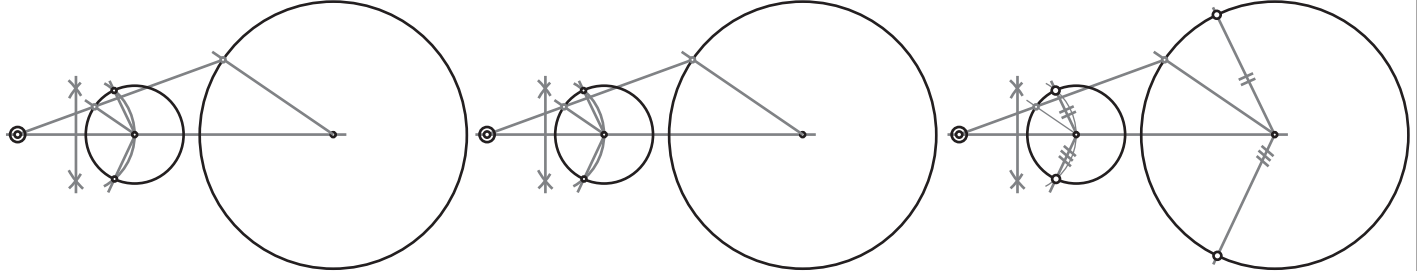


Rectas tangentes a dos circunferencias

Dadas dos circunferencias y sus centros, trazar las tangentes exteriores empleando las propiedades de la homotecia.

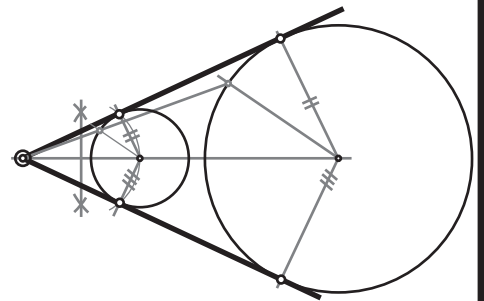


- 1º- Trazamos una recta que une los centros de las dos circunferencias.
- 2º- Trazamos dos radios paralelos a las circunferencias y unimos los dos puntos de intersección con las circunferencias para DETERMINAR sobre la recta que une los centros de las circunferencias el CENTRO DE HOMOTECIA directa

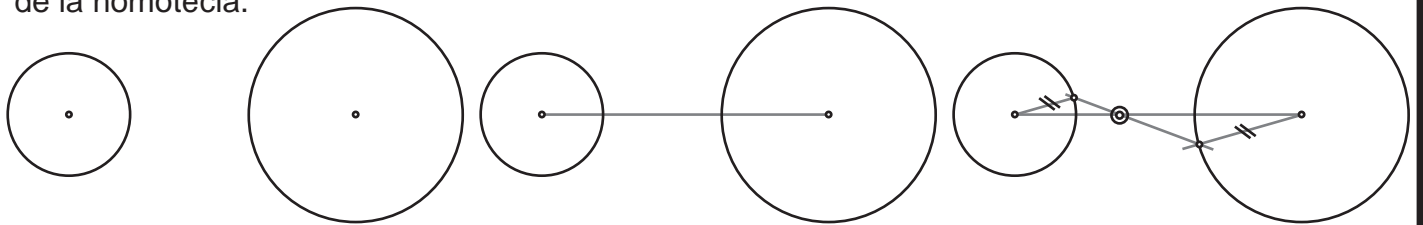


- 3º- Hallamos los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la circunferencia más próxima al centro de homotecia que pasan por este. No las dibujamos todavía, sólo los radios que van a los puntos de tangencia.
- 4º- En la circunferencia mayor trazamos radios paralelos (homotéticos) a los hallados en el paso anterior y determinamos los puntos de tangencia.
- 5º- Las rectas tangentes exteriores deben de pasar por los puntos de tangencia dos a dos y por el centro de homotecia, las trazamos.

HEMOS ENCONTRADO EL CENTRO DE HOMOTECIA DIRECTA, HALLADO LOS PUNTOS DE TANGENCIA CON UNA CIR. Y ENCONTRADO SUS HOMOTÉTICOS EN LA SEGUNDA PARA RESOLVER EL PROBLEMA.

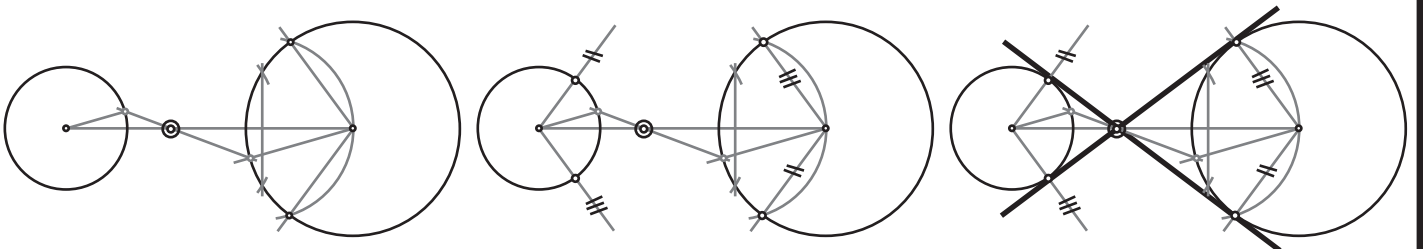


Dadas dos circunferencias y sus centros, trazar las tangentes interiores empleando las propiedades de la homotecia.



BUSCAMOS EL CENTRO DE HOMOTECIA INDIRECTA:

- 1º- Unimos los centros de las circunferencias. Sobre este segmento se encontrará el centro de homotecia.
- 2º- Trazamos dos radios paralelos a las circunferencias pero en lados opuestos de la recta que une los centros. Obtenemos dos puntos de intersección, uno en sobre cada circunferencia. Los unimos y el punto de intersección de este segmento con el que une los dos centros de la circunferencia es el CENTRO DE HOMOTECIA INVERSA.



- 3º- Hallamos los puntos de tangencia de las rectas tangentes que pasan por el centro de homotecia a una de las circunferencias (hemos usado la más grande por claridad). No trazamos las tangentes pero sí sus radios.
- 2º- Trazamos radios paralelos a los últimos en la otra circunferencia pero invirtiendo el lado de la recta que une los centros al que se encuentran. Así obtenemos los puntos de tangencia en la otra circunferencia.
- 5º- Unimos los puntos de tangencia para obtener las rectas tangentes, estas tienen que cortarse en el centro de homotecia.

Tangentes interiores y exteriores a una circunferencia  
Por homotecia