

筑波大学大学院博士前期課程

数理物質科学研究科修士論文

高次テンソル繰り込み群による
4次元 Ising 模型の比熱の解析

秋山 進一郎
物理学専攻

2019 年 2 月

筑波大学大学院博士前期課程

数理物質科学研究科修士論文

高次テンソル繰り込み群による
4次元 Ising 模型の比熱の解析

秋山 進一郎
物理学専攻

指導教員 藏増 嘉伸 印

概要

本修士論文ではテンソルネットワーク法の 1 つである高次テンソル繰り込み群を用いて 4 次元 Ising 模型の比熱の解析を行った。Ising 模型は磁性体のモデルの 1 つであるが、 $O(1)$ ϕ^4 理論の結合定数を無限大とする極限から構成することができるため、標準模型の Higgs 機構を記述するとされている $O(4)$ ϕ^4 理論の特別な極限と見なすことができ、素粒子物理学においても重要な模型であると言える。一方、4 次元の超立方体上に定義された $O(N)$ ϕ^4 理論の連続極限は自由場の理論である可能性が高いと考えられている。実際、4 次元の $O(4)$ ϕ^4 理論において平均場理論の臨界指数に対する対数補正が存在するならば、連続極限は自由場の理論になることが示されている。また、摂動的な繰り込み群による議論から、4 次元 $O(N)$ ϕ^4 理論の比熱や磁化率には対臨界温度に関する対数的な補正が伴うと考えられており、これらは 4 次元 $O(N)$ ϕ^4 理論の連続極限が自由場の理論であることの状況証拠と捉えられている。したがって、もし 4 次元 Ising 模型の比熱も対臨界温度に関する対数依存性を持つならば、4 次元 $O(N)$ ϕ^4 理論の自明性の問題に対してさらなる状況証拠が提出されることになる。さらに、テンソルネットワーク法は摂動論とは全く異なる方法論であるため、本研究には 4 次元 $O(N)$ ϕ^4 理論の自明性の問題に対する非摂動的な検証としての意義も伴う。なお、数値計算による 4 次元 Ising 模型の比熱の解析としては、モンテカルロ法による先行研究が存在するが、計算コストの観点から 4 次元系ではシステムサイズを大きくとれないことに起因して、対数発散のような弱い発散を捉えるのが非常に難しく、比熱の対数依存性は未だ確認されていない。そこで、本研究では高次テンソル繰り込み群の計算コストが体積に関して対数的にしか依存しないという利点に着目し、非常に大きな体積を取り扱った上で転移点および比熱の振る舞いを推定した。また、テンソルネットワーク法を 4 次元系に適用して物理量を計算したという報告は現時点では存在せず、そのため本研究にはテンソルネットワーク法の高次元系への拡張に向けた第一段階としての意義もある。高次元のテンソルネットワーク法では、実用上、ボンド次元を大きくすることが難しく、自由エネルギーそのものはある程度精度よく計算できてもその数値微分の計算精度を保つことが困難になるが、本研究では不純物テンソル法と呼ばれる物理量の計算方法を高次テンソル繰り込み群のアルゴリズムに組み込むことで、小さなボンド次元であっても自由エネルギーの 1 階微分で与えられる内部エネルギーについては数値的に安定した計算結果が得られることを示した。

目次

1	序論	1
2	平均場理論と摂動的繰り込み群	4
2.1	平均場理論の臨界指数	4
2.2	適用限界	9
2.3	摂動的繰り込み群による解析	11
2.4	上部臨界次元における対数補正	21
2.5	最近の数値計算結果	23
3	テンソルネットワーク法	26
3.1	テンソルネットワーク表示の構成	26
3.2	高次テンソル繰り込み群	28
3.3	不純物テンソル法	38
4	4 次元 Ising 模型の比熱の解析	43
5	結論と今後の展望	51
付録 A	格子上的 ϕ^4 理論と Ising 模型	53
A.1	数学的な対応	53
A.2	有効作用としての対応	54
付録 B	繰り込み群とスケーリング理論	59
B.1	繰り込み群変換	59
B.2	自由エネルギーのスケーリング仮説	63
B.3	相関関数のスケーリング則	66
B.4	スケーリング次元	68
B.5	有限サイズスケーリング	69
付録 C	$d = 4 - \epsilon$ の ϕ^4 理論	72
付録 D	転送行列法による厳密解の導出	76
D.1	1 次元 Ising 模型の厳密解	76
D.2	2 次元 Ising 模型の厳密解	79
付録 E	高次特異値分解	90
E.1	行列の特異値分解	90

E.2	テンソルに対する特異値分解	92
付録 F	テンソルネットワーク法の改良をめぐって	96

1 序論

格子上の場の理論では、摂動展開に依らずに場の量子論を数学的に厳密に定義することができる。そのため、クォークの閉じ込めや束縛状態の形成などといった非摂動的な取り扱いが不可欠な物理現象を理解する上で強力な理論体系を与えている。特に、格子量子色力学（格子 QCD）の分野ではモンテカルロ法に基づいて経路積分の評価を実行することができ、とりわけ有限温度の格子 QCD では、宇宙初期の高温状態や重イオン衝突などの理解に直結する QCD の相構造の解明に向けた研究が今日に至るまで活発に行われている。しかし、モンテカルロ法を使って経路積分が評価できるのは、Boltzmann の重みの正值性が保証される場合に限られる。そのため、複素作用を持つ有限密度の格子 QCD ではモンテカルロ法で信頼できる数値計算を行おうとすると膨大な統計数を要するという困難（符号問題）に直面する。符号問題の解決、あるいは緩和を巡っては数多くの研究がなされているが、符号問題を克服するアプローチは未だに確立されておらず、モンテカルロ法に代わるアルゴリズムの探求は大きな課題となっている（図 1.0.1）。

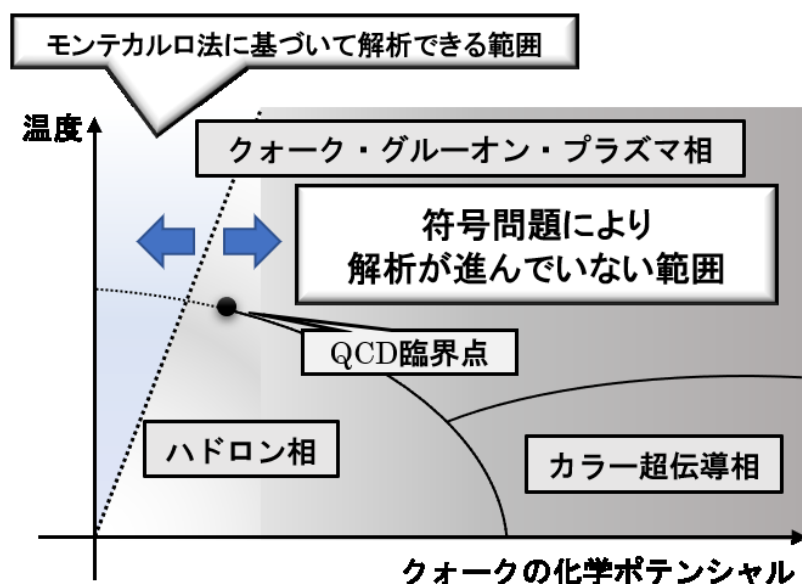


図 1.0.1 現在予想されている QCD の相図。

符号問題は、格子 QCD の分野に限らず、量子多体系を扱う研究分野全般で共通の未解決問題であるが、統計物理学の分野から誕生したテンソルネットワーク法を応用することで符号問題が解消されることが近年明らかになってきた。テンソルネットワーク法の起源は、数理的には Baxter による角転送行列（Corner Transfer Matrix）の方法 [1] に、数値計算手法としては 1 次元量子スピン系の基底状態を求めるために White が導入した密度行列繰り込み群（Density Matrix Renormalization Group）[2] にある。今日のテンソルネットワーク法は適用対象を 1 次元系に限定せず、基底状態や励起状態、あるいは経路積分や分配関数の評価をはじめとした多種多様な目的の下に様々な研究が活発に行われている [3]。その内の 1 つとして、格子上に定義された理論の分配関数をテンソルの縮約（テンソルネットワーク）で表現し、テンソル

ネットワークに対する粗視化を実行することでモンテカルロ法には必須の確率解釈に一切よらずに分配関数を評価する手法が存在する．このようなテンソルネットワークの粗視化手法として最初に登場したのは Levin と Nave が導入したテンソル繰り込み群 (Tensor Renormalization Group, 以下 TRG) であり, 伝統的な実空間繰り込み群のアイデアに行列の特異値分解を上手く組み合わせることで, 現実的な計算コストで 2 次元古典スピン系の分配関数を高い精度で決定して見せた [4]. さらにフェルミオン系を対象にした Grassmann TRG が Gu らによって提案された [5, 6]. TRG や Grassmann TRG は ϕ^4 理論 [7, 8] や $CP(N-1)$ 模型 [9], Schwinger 模型 [10–12], 有限密度の Thirring 模型 [13], $\mathcal{N}=1$ Wess-Zumino 模型 [14] などに応用され, これらの例のうち複素作用を持つものに関しては符号問題が解消されていることが確認された.

一方, TRG は 2 次元系でのみ有効なアルゴリズムであり, 高次元系へは適用することができないが, Xie らはテンソルの高次特異値分解を応用したテンソルネットワークの粗視化手法として高次テンソル繰り込み群 (Higher-Order Tensor Renormalization Group, 以下 HOTRG) を導入した [15]. HOTRG は任意の次元の系で運用できるだけでなく, [15] における 2 次元 Ising 模型での実証計算では TRG よりも 1 桁以上高い精度を誇っていることが示された. HOTRG による 3 次元系の解析としては Ising 模型 [15], Potts 模型 [16], 有限温度の \mathbb{Z}_2 ゲージ理論 [17] などが挙げられる. 特に [17] は従来は取り扱いが難しかった高次元のゲージ理論で高精度計算を実現したという点で大きな成功例として挙げられる. また, Grassmann TRG と同様にフェルミオン系へ拡張された Grassmann HOTRG による Wilson フェルミオン作用での実証計算も行われている [18, 19].

そこで, 本研究ではテンソルネットワーク法の高次元への適用を目指し, HOTRG を用いた 4 次元 Ising 模型の解析を行った. 4 次元 Ising 模型は $O(1)$ ϕ^4 理論の結合定数を無限大とする極限から構成することができる (付録 A.1 参照). そのため, 標準模型の Higgs 機構を記述するとされている $O(4)$ ϕ^4 理論の特別な極限と見なすことができ, 素粒子物理学においても重要な模型であると言える [20]. 一方, 4 次元の超立方体上に定義された $O(N)$ ϕ^4 理論の連続極限は自由場の理論である可能性が高いと考えられている [21]. 実際, 上部臨界次元である 4 次元において, 平均場の臨界指数が満たすスケーリング則のいずれかが対数補正による破れを伴うと連続極限は自由場の理論になると信じられている [22]. 特に, 4 次元 $O(4)$ ϕ^4 理論の磁化率については, 平均場理論の臨界指数に対して対臨界温度に関する対数補正が存在するならば, 連続極限は自由場の理論になる強い証拠がある [23]. また, 摂動的な繰り込み群による議論から, 4 次元 $O(N)$ ϕ^4 理論の比熱や磁化率には対臨界温度に関する対数的な補正が伴うと考えられており, これらは 4 次元 $O(N)$ ϕ^4 理論の連続極限が自由場の理論であることの状況証拠と捉えられている [24, 25]. したがって, もし 4 次元 Ising 模型の比熱も対臨界温度に関する対数依存性を持つならば, 4 次元 $O(N)$ ϕ^4 理論の自明性の問題に対してさらなる状況証拠が提出されることになる. 数値計算による 4 次元 Ising 模型の比熱の解析としては, モンテカルロ法による先行研究が複数存在するが, 計算コストの観点から 4 次元系ではシステムサイズを大きくとれないことに起因して, 対数発散のような弱い発散を捉えるのが非常に難しく, 比熱の対数依存性は未だ確認されていない [26–31]. 一方, HOTRG では計算コストが体積に関して対数的にしか依存しないため, 非常に大きな体積を取り扱うことができ, これによって 4 次元 Ising 模型の比熱に対する対数補正の有無を解明することを目指す. また, テンソルネットワーク法は摂動論とは全く異なる近似計算の枠組みであり, 摂動繰り込み群による予言に対する非摂動的な検証としての意義も伴う.

本論文の構成は以下の通りである．2 章と 3 章はそれぞれレビュー的な内容になっている．2 章では摂動的な Wilson の繰り込み群を使った議論から 4 次元 Ising 模型の比熱に平均場の臨界指数 $\alpha = 0$ に対する対数補正が伴うことを導く．3 章では HOTRG のアルゴリズムを詳解し，HOTRG を応用して物理量の期待値を直接評価できる不純物テンソル法を導入する．4 章が本研究のオリジナルな内容であり，HOTRG に基づいて 4 次元 Ising 模型の内部エネルギーを評価し，内部エネルギーから転移点と比熱のピークを読み取り，有限サイズスケーリングを実施する手続きを述べ，実際の解析結果を議論する．5 章でまとめと今後の課題について述べる．

2 平均場理論と摂動的繰り込み群

理論の分配関数を厳密に評価することが出来れば、その理論が示す臨界現象を正確に解明することができる。しかし、厳密に解ける理論は極々少数であり、ほとんどの場合何らかの近似を導入しない限り、分配関数から臨界現象の情報を引き出すことは困難である。そのような近似手法の中で、最もベーシックな方法論が平均場理論 (mean-field theory) である。平均場理論の基本的なアイデアは、1つの自由度のみに着目してそれ以外の自由度はすべて平均値に置き換えてしまうことで、多自由度系を一自由度系に落とし込むというものである。一方、揺らぎの効果が本質的に重要となる臨界点近傍の系を定量的に解析するためにはその効果を上手く取り込んでいく繰り込み群がその威力を発揮する。本章の後半では摂動展開を使った繰り込み群による議論から上部臨界次元における平均場の臨界指数に対する補正を導く。なお、対数補正の存在は格子上の Callan-Symanzik 方程式からも議論できる [24, 32]。また、繰り込み群とスケーリングの理論に関する基礎的事項に関しては付録 B を参照されたい。

2.1 平均場理論の臨界指数

本論文では d 次元の等方的な N サイトからなる格子上に定義された古典 Ising 模型について議論する。ハミルトニアンは、

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i \quad (2.1.1)$$

で与えられる。ここに、 σ_i は ± 1 の値を取るスピン変数であり、 J は交換相互作用、 h は磁場を表している。スピン変数の熱平均、すなわち磁化を m とおくと、熱平均からの揺らぎは

$$\delta\sigma_i := \sigma_i - m \quad (2.1.2)$$

である。模型が持つ並進対称性によって熱平均 m は格子点に依存しない。平均場近似では、ハミルトニアン (2.1.1) の第 1 項で、

$$\sigma_i \sigma_j = (m + \delta\sigma_i)(m + \delta\sigma_j) \approx -m^2 + m(\sigma_i + \sigma_j), \quad (2.1.3)$$

すなわち揺らぎの 2 次の項を無視する。この近似によって、考えるべきハミルトニアンは、

$$H_{\text{mf}} := NdJm^2 - (2dJm + h) \sum_i \sigma_i \quad (2.1.4)$$

となるが、交換相互作用がなくなったため即座に分配関数を計算することができる。実際、

$$\begin{aligned} Z_{\text{mf}} &:= \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H_{\text{mf}}} \\ &= e^{-\beta NdJm^2} [2 \cosh \beta(2dJm + h)]^N \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

と求まる．ただし、 $\beta = 1/T$ とする．この分配関数から得られる単位体積あたりの自由エネルギーは、

$$\begin{aligned} f_{\text{mf}} &:= -\frac{1}{N\beta} \ln Z_{\text{mf}} \\ &= dJm^2 - \frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh \beta(2dJm + h)] \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

である．ここで、上で導入した熱平均 m は、

$$0 = \frac{\partial f_{\text{mf}}}{\partial m} = 2dJ[m - \tanh \beta(2dJm + h)] \quad (2.1.7)$$

の自己無撞着方程式を満たさないとはいけない．式 (2.1.7) は β の値によって異なる解が存在する． $h = 0$ の場合の自己無撞着方程式は、

$$m = \tanh 2dJ\beta m \quad (2.1.8)$$

であり、この方程式の解は図 2.1.1 のグラフの交点である．

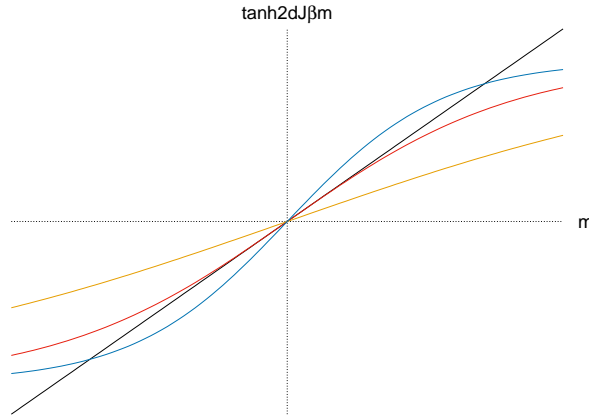


図 2.1.1 式 (2.1.8) の解は $y = m$ (黒線) と $y = \tanh 2dJ\beta m$ の交点である． $T > T_c$ (橙色のライン) では $m = 0$ のみが交点であるが、 $T < T_c$ (青色のライン) では $m = 0$ に加えて $m \neq 0$ の 2 つの交点が見れる．赤いラインは $T = T_c$ である．

$2dJ\beta < 1$ の場合は $m = 0$ が唯一の解であるが、 $2dJ\beta > 1$ では $m = 0$ の他に $m \neq 0$ の解 m_0 も存在する．すなわち、

$$T_c = 2dJ \quad (2.1.9)$$

が転移点となっている． $T \lesssim T_c$ の場合、式 (2.1.7) の右辺を展開して、

$$m_0 \approx 2dJ\beta m_0 - \frac{1}{3}(2dJ\beta m_0)^3 \quad (2.1.10)$$

とし、 m_0 を求めれば、

$$m_0 = \pm \frac{T}{T_c} \sqrt{\frac{-3(T - T_c)}{T_c}} \approx \pm \sqrt{\frac{-3(T - T_c)}{T_c}} \quad (2.1.11)$$

となる．この m_0 と $m = 0$ のどちらの解が安定であるかを評価するために自由エネルギー (2.1.6) に戻って考える． $T \lesssim T_c$ の場合を考えればよいので，式 (2.1.6) の第 2 項を m に関して展開し， h の 1 次までを残すことにすると，

$$f_{\text{mf}} \approx -T \ln 2 + \frac{1}{2}(T - T_c)m^2 + \frac{1}{12}T_c m^4 - hm \quad (2.1.12)$$

を得る．すると，

$$f_{\text{mf}}(m = 0) = -T \ln 2, \quad (2.1.13)$$

$$f_{\text{mf}}(m = m_0) = -T \ln 2 - \frac{3}{4} \frac{(T - T_c)^2}{T_c} < f_{\text{mf}}(m = 0) \quad (2.1.14)$$

より， $T \lesssim T_c$ では有限な熱平均 m_0 が実現することになる．式 (2.1.12) は Landau エネルギーと呼ばれることがある． $h = 0$ の場合，元々の Ising 模型のハミルトニアン (2.1.1) はスピン変数について大域的な \mathbb{Z}_2 対称性を持つが，式 (2.1.12) も同じ対称性を持っていることが分かる． $T \gtrsim T_c$ のそれぞれの場合で式 (2.1.12) の関数形を考えれば， $T > T_c$ では $m = 0$ が実現し， $T < T_c$ では $m = m_0$ が実現することが分かる．

以下では，Landau エネルギー (2.1.12) で

$$f_0 := -T \ln 2, \quad (2.1.15)$$

$$r := T - T_c, \quad (2.1.16)$$

$$u := 2T_c \quad (2.1.17)$$

とおき， $f_{\text{mf}} - f_0$ を改めて f_{mf} と書くことにする：

$$f_{\text{mf}}(T, h; m) = \frac{r}{2}m^2 + \frac{u}{4!}m^4 - hm. \quad (2.1.18)$$

自己無撞着方程式 (2.1.7) は

$$0 = \frac{\partial f_{\text{mf}}}{\partial m} = rm + \frac{u}{3!}m^3 - h \quad (2.1.19)$$

となる．これらを使って各種臨界指数を求めることができる．対臨界温度を $t := (T - T_c)/T_c$ とおく．磁化の温度依存性は既に式 (2.1.11) で求めた通りで，

$$m_0 = \sqrt{\frac{-6r}{u}} \propto (-t)^{1/2} \quad (2.1.20)$$

だから $\beta = 1/2$ である．磁化率 χ は式 (2.1.19) で $m \sim \chi h$ として h が十分小さい場合を考えることにより，

$$0 \approx r\chi h - h \quad (2.1.21)$$

だから,

$$\chi = \frac{1}{r} \propto t^{-1} \quad (2.1.22)$$

で $\gamma = 1$ である. また, $t = 0$ における磁化の磁場依存性は式 (2.1.19) より,

$$m \propto \left(\frac{h}{u}\right)^{1/3} \quad (2.1.23)$$

であるから $\delta = 3$ である. 平均場理論での比熱 C は $T = T_c$ で不連続であることに注意する. 実際, $T > T_c$ では $m = 0$ が実現するため,

$$f_{\text{mf}}(T, 0; 0) = 0 \quad (2.1.24)$$

であるが, $T < T_c$ では $m = m_0$ が実現するので,

$$f_{\text{mf}}(T, 0; m_0) = -\frac{3}{2} \frac{r^2}{u} \quad (2.1.25)$$

であるから, 転移点近傍での比熱は

$$C \approx -T_c \frac{\partial^2 f_{\text{mf}}}{\partial T^2} = \begin{cases} 0 & (T > T_c) \\ 3T_c/u & (T \lesssim T_c), \end{cases} \quad (2.1.26)$$

すなわち $\alpha = 0$ である. なお, 式 (2.1.19) では磁化の空間依存性が考慮されていないのでここまでの議論からは相関関数の臨界指数 ν と η を決定することはできないが, Gauss 模型を経由してこれらを求めることができる [33, 34]. いま, 式 (2.1.19) の磁化に空間依存性を持たせて,

$$F(r_0, c_0; m) := \int d^d r \left(r_0 m(\mathbf{r})^2 + c_0 (\nabla m(\mathbf{r}))^2 \right) \quad (2.1.27)$$

を考えることにしよう. ただし, $r_0 = r/2$ で c は正の定数とする. これによって $(\nabla m(\mathbf{r}))^2$ は隣り合ったスピンの向きを揃える効果を与えている. また, 式 (2.1.27) では式 (2.1.19) に含まれていた 4 次の項を無視する近似を導入している. 式 (2.1.27) を運動量空間で表示すると,

$$F = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (r_0 + c_0 \mathbf{q}^2) m(\mathbf{q}) m(-\mathbf{q}) \quad (2.1.28)$$

である. 相関関数 $G(\mathbf{r})$ は,

$$G(\mathbf{r}) = \langle m(\mathbf{r}) m(0) \rangle \quad (2.1.29)$$

で定義され, こちらも運動量空間で考えると,

$$G(\mathbf{r}) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \langle m(\mathbf{q}) m(-\mathbf{q}) \rangle e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \langle |m(\mathbf{q})|^2 \rangle e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.1.30)$$

となる. ただし, $m(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}$ であることを用いた. よって評価すべきは,

$$\langle |m(\mathbf{q})|^2 \rangle = \frac{\int \prod_{\mathbf{k}} dm(\mathbf{k}) |m(\mathbf{q})|^2 e^{-\beta F}}{\int \prod_{\mathbf{k}} dm(\mathbf{k}) e^{-\beta F}} \quad (2.1.31)$$

であるが、 $\mathbf{k} \neq \mathbf{q}$ の積分は分母分子で相殺するため、

$$\begin{aligned}
\langle |m(\mathbf{q})|^2 \rangle &= \frac{\int d\mathbf{m}(\mathbf{q}) |m(\mathbf{q})|^2 \exp[-\beta(r_0 + c_0 \mathbf{q}^2) |m(\mathbf{q})|^2 / (2\pi)^d]}{\int d\mathbf{m}(\mathbf{q}) \exp[-\beta(r_0 + c_0 \mathbf{q}^2) |m(\mathbf{q})|^2 / (2\pi)^d]} \\
&= \frac{\int d\Re m(\mathbf{q}) \int d\Im m(\mathbf{q}) |m(\mathbf{q})|^2 \exp[-\beta(r_0 + c_0 \mathbf{q}^2) |m(\mathbf{q})|^2 / (2\pi)^d]}{\int d\Re m(\mathbf{q}) \int d\Im m(\mathbf{q}) \exp[-\beta(r_0 + c_0 \mathbf{q}^2) |m(\mathbf{q})|^2 / (2\pi)^d]} \\
&= \frac{\int_0^\infty d\rho \rho^3 \exp[-\beta(r_0 + c_0 \mathbf{q}^2) \rho^2 / (2\pi)^d]}{\int_0^\infty d\rho \rho \exp[-\beta(r_0 + c_0 \mathbf{q}^2) \rho^2 / (2\pi)^d]} \\
&= \frac{(2\pi)^d}{\beta(r_0 + c_0 \mathbf{q}^2)}
\end{aligned} \tag{2.1.32}$$

と求まる。これを Fourier 逆変換によって、

$$G(\mathbf{r}) = \int d^d q \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{\beta(r_0 + c_0 \mathbf{q}^2)} \tag{2.1.33}$$

として相関関数が求まる。いま、 \mathbf{q} を \mathbf{r} と平行な成分 q_{\parallel} および \mathbf{r} と直交する補空間上のベクトル \mathbf{q}_{\perp} に分けて考えると、

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}) &= \int d q_{\parallel} d^{d-1} q_{\perp} \frac{e^{i q_{\parallel} r}}{\beta(r_0 + c_0 \mathbf{q}_{\perp}^2 + c_0 q_{\parallel}^2)} \\
&= \frac{\pi}{\beta c_0} \int d^{d-1} q_{\perp} \frac{\exp\left[-r \sqrt{\frac{r_0}{c_0} + \mathbf{q}_{\perp}^2}\right]}{\sqrt{\frac{r_0}{c_0} + \mathbf{q}_{\perp}^2}} \\
&= \frac{\pi}{\beta c_0} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_0^\infty d\rho \rho^{d-2} \frac{\exp\left[-r \sqrt{\frac{r_0}{c_0} + \rho^2}\right]}{\sqrt{\frac{r_0}{c_0} + \rho^2}}.
\end{aligned} \tag{2.1.34}$$

ここで、 $a := \sqrt{r_0/c_0}$ とおき、

$$x := \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^2} \tag{2.1.35}$$

と変数変換すると、

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}) &= \frac{\pi}{\beta c_0} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_1^\infty dx (x^2 - 1)^{(d-3)/2} e^{-arx} \\
&= \frac{1}{\beta c_0} (2\pi)^{d/2} \left(\frac{a}{r}\right)^{(d-2)/2} K_{(d-2)/2}(ar)
\end{aligned} \tag{2.1.36}$$

となる。ここに、 $K_n(x)$ は第 2 種変形 Bessel 関数である。 $x \rightarrow \infty$ では

$$K_n(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right) e^{-x} \tag{2.1.37}$$

の漸近展開ができるので、 r が十分に大きければ

$$G(\mathbf{r}) \propto \frac{e^{-ar}}{r^{(d-1)/2}} \tag{2.1.38}$$

が従う。ゆえに、相関長 ξ は a^{-1} で与えられ、

$$\xi \propto \sqrt{\frac{c_0}{r_0}} \propto t^{-1/2}, \quad (2.1.39)$$

すなわち $\nu = 1/2$ であると分かる。転移点直上では $r_0 = 0$ より、

$$G(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{\beta c_0} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_0^\infty d\rho \rho^{d-3} e^{-r\rho} \propto \frac{1}{r^{d-2}} \quad (2.1.40)$$

であるから $\eta = 0$ が結論される。

これで平均場理論の臨界指数が全て求められた。本節で得た各種臨界指数を下表にまとめておく：

臨界指数	平均場理論
α	0
β	1/2
γ	1
δ	3
ν	1/2
η	0

2.2 適用限界

平均場理論ではスピン変数の熱平均まわりの揺らぎが十分小さいことを仮定している。そのため、揺らぎの効果が大きくなってくると平均場理論で臨界現象を正しく捉えることはできなくなる。例えば、前節で d 次元の Ising 模型の転移点は $T_c = 2dJ$ で与えられるを見たが、厳密解によれば $d = 1$ では $T_c = 0$ で有限温度相転移は存在しないし、 $d = 2$ では $T_c \approx 2.269J$ である（付録 D 参照）。一般に、低次元系ほど秩序相を保つことは困難である。次元が低いほど 1 つのスピンと相互作用する周囲のスピン数が少なくなるため、小さなエネルギーで周囲のスピンと異なる状態を取ることができ、その結果として揺らぎの効果は大きくなる。反対に次元が高くなるほど揺らぎの効果は小さくなるため平均場近似は良くなっていく。

このような揺らぎの効果をスピン変数の平均値と分散の比較から定量的に表すことにしよう。いま、相関長分の距離に渡ってスピン変数の分散を足し上げれば、

$$\int_0^\xi d^d r (\sigma_{\mathbf{r}} - \langle \sigma_{\mathbf{r}} \rangle) (\sigma_0 - \langle \sigma_0 \rangle) = \int_0^\xi d^d r (\langle \sigma_{\mathbf{r}} \sigma_0 \rangle - \langle \sigma_{\mathbf{r}} \rangle \langle \sigma_0 \rangle) \quad (2.2.1)$$

であるが、非積分関数は連結相関関数に他ならない。一方、同じ積分範囲で対応する磁化の積分は、

$$\int_0^\xi d^d r \langle \sigma_{\mathbf{r}} \rangle \langle \sigma_0 \rangle \propto m^2 \xi^d \quad (2.2.2)$$

である。そこで、これらの比較として次のような指標を導入する：

$$Q := \frac{\int_0^\xi d^d r G(\mathbf{r})}{m^2 \xi^d}. \quad (2.2.3)$$

$Q > 1$ ならば揺らぎの効果が重要であり、 $Q < 1$ ならば揺らぎを無視する近似が正当化される。 Q の分子について、 $r > \xi$ では $G(r)$ は直ちに減衰するため積分範囲を全空間に広げることによれば、式 (2.1.32) を用いることで、

$$\int d^d r G(r) = \frac{(2\pi)^d}{\beta r_0} \propto \frac{\xi^2}{\beta c_0} \quad (2.2.4)$$

を得る。一方で、 $T \lesssim T_c$ では式 (2.1.20) により、 $r_0 = r/2$ と定義したことに注意すれば、

$$m^2 \xi^d \propto \frac{-6r}{u} = \frac{12c_0 \xi^{d-2}}{u} \quad (2.2.5)$$

である。以上より平均場理論が矛盾なく適用できるための必要条件として、

$$1 \gg Q = \frac{u \xi^{4-d}}{12\beta c_0^2} \quad (2.2.6)$$

が得られる。この不等式から直ちに $d > 4$ では平均場理論が信頼できることが分かる。したがって、 $d = 4$ が上部臨界次元であるが、 $d = 4$ で平均場理論が適用できるためには u が十分小さくなければならないことも分かる。この結論は前節で平均場理論の臨界指数 ν と η を求めた際に磁化の 4 次の項を無視した自由エネルギーを用いたこととも整合している。本章の以降の節では Ising 模型の有効模型である ϕ^4 理論を摂動的な繰り込み群で解析するが、ここで見た u はちょうど ϕ^4 理論の 4 点相互作用の結合定数にあたる。なお、実際に Ising 模型の有効作用として ϕ^4 理論を導く手続きに関しては付録 A.2 を参照されたい。

なお、平均場理論が矛盾なく適用できるための必要条件として $d > 4$ を導く方法は他にもある。例えば、式 (2.2.3) の分子に対して磁化率が相関関数の和で与えられることを用いることにしよう。全系の磁化 M は、

$$M := \frac{\sum_{\{\sigma\}} (\sum_i \sigma_i) e^{-\beta H}}{\sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H}} \quad (2.2.7)$$

で定義される。ただし、ハミルトニアン H は式 (2.1.1) で与えられる元々の Ising 模型のものとする。このとき、単位スピンあたりの磁化率 χ は、

$$N\chi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial h} \quad (2.2.8)$$

で与えられる。右辺を計算すれば、

$$N\chi = \beta \sum_i \sum_j \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \beta M^2 \quad (2.2.9)$$

となり、模型の並進対称性によって、

$$\chi = \beta \sum_r (\langle \sigma_r \sigma_0 \rangle - \langle \sigma_r \rangle \langle \sigma_0 \rangle) \quad (2.2.10)$$

を得るが、右辺は連結相関関数を全空間に渡って足し上げたものになっている。すると、平均場理論が矛盾なく適用できるための必要条件として、

$$1 \gg Q = \frac{T\chi}{m^2 \xi^d} \quad (2.2.11)$$

の不等式を得る．臨界指数を使って書けば

$$1 \gg T t^{-\gamma-2\beta+d\nu}, \quad (2.2.12)$$

すなわち

$$-\gamma - 2\beta + d\nu > 0 \quad (2.2.13)$$

の不等式に帰着される．前節で求めた平均場理論の臨界指数を代入すれば， $d > 4$ が結論される．不等式 (2.2.13) はハイパー・スケーリング則の破れを意味している（付録 B.3 参照）．実は， ϕ^4 理論の繰り込まれた結合定数を相関長のべきとして表現すると，ちょうど不等式 (2.2.13) の左辺の逆符号を ν で割ったものが相関長の指数になることが知られている [35]．そのため，上部臨界次元直上で平均場の臨界指数に対数補正が存在すると， $d = 4$ でもハイパー・スケーリング則が破れることになり， ϕ^4 理論の連続極限は自明となるのである．

2.3 摂動的繰り込み群による解析

ここでは，摂動的な Wilson 流の繰り込み群を使って転移点近傍の Ising 模型に対する有効模型である ϕ^4 理論を解析する．付録 A.2 により，有効作用は

$$\begin{aligned} S_\Lambda[\phi] &:= \frac{1}{2} \int_0^\Lambda \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (p^2 + r_0) \phi(\mathbf{p}) \phi(-\mathbf{p}) \\ &\quad + \frac{u_0}{4!} \left(\prod_{i=1}^4 \int_0^\Lambda \frac{d^d p_i}{(2\pi)^d} \right) (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) \phi(\mathbf{p}_1) \phi(\mathbf{p}_2) \phi(\mathbf{p}_3) \phi(\mathbf{p}_4) \\ &=: S_{\text{free}, \Lambda}[\phi] + S_{\text{int}, \Lambda}[\phi] \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

で与えられる．なお，以下では運動量空間上の積分について，

$$\int_{0 < |\mathbf{p}| < \Lambda} := \int_0^\Lambda \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \quad (2.3.2)$$

と省略して表記する．いま，スケールパラメタ $b > 1$ を用いて，次のように場 $\phi(\mathbf{p})$ を定義関数 χ で展開する：

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{p}) &= \phi(\mathbf{p}) \chi_{(0, \Lambda/b)}(\mathbf{p}) + \phi(\mathbf{p}) \chi_{[\Lambda/b, \Lambda)}(\mathbf{p}) \\ &=: \phi^<(\mathbf{p}) + \phi^>(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

すなわち， $\phi^<$ が低エネルギー側の自由度であり， $\phi^>$ が積分を実行して繰り込まれるべき高エネルギー側の自由度である．分配関数は，

$$\begin{aligned} Z &= \int [d\phi] \exp[-S_\Lambda[\phi]] \\ &= \int [d\phi^<] \int [d\phi^>] \exp[-S_\Lambda[\phi]] \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

で記述される。繰り込み群変換を導入するために $\mathbf{p}' := b\mathbf{p}$ とし、低エネルギー側の自由度に対して、

$$\zeta_b \phi'(\mathbf{p}') := \phi^<(\mathbf{p}'/b) \quad (2.3.5)$$

を定義する。目標は、

$$S'_\Lambda[\phi'] = \mathcal{R} \circ S_\Lambda[\phi] \quad (2.3.6)$$

として、

$$\begin{aligned} -S'_\Lambda[\phi'] &= -\frac{1}{2} \int_{0 < |\mathbf{p}'| < \Lambda} u'_2(\mathbf{p}') \phi'(\mathbf{p}') \phi'(-\mathbf{p}') \\ &\quad - \left(\prod_{i=1}^3 \int_{0 < |\mathbf{p}'_i| < \Lambda} \right) u'_4(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}'_3, \mathbf{p}'_4 = -\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'_3) \phi'(\mathbf{p}'_1) \phi'(\mathbf{p}'_2) \phi'(\mathbf{p}'_3) \phi'(\mathbf{p}'_4) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

となるような繰り込み群変換 \mathcal{R} を構成することである。式 (2.3.4) の $\phi^>$ に関する経路積分を実行することで 1 回繰り込み群変換が施された作用 $S'_\Lambda[\phi']$ が得られるが、厳密に $\phi^>$ の経路積分を行うことは困難なので、

$$\begin{aligned} \exp[-S'_\Lambda[\phi']] &= \int [d\phi^>] \exp[-S_\Lambda[\phi]] \\ &= \int [d\phi^>] \exp[-S_{\text{free},\Lambda}[\phi^<] - S_{\text{free},\Lambda}[\phi^>] - S_{\text{int},\Lambda}[\phi^<, \phi^>]] \\ &= \exp[-S_{\text{free},\Lambda}[\phi^<]] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int [d\phi^>] (-S_{\text{int},\Lambda}[\phi^<, \phi^>])^k \exp[-S_{\text{free},\Lambda}[\phi^>]] \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

と $S_{\text{int},\Lambda}[\phi]$ を摂動と見なして展開する。式 (2.3.8) の右辺に着目すれば、摂動的な繰り込み群変換 \mathcal{R} を実行するには、実質的には $S_{\text{free},\Lambda}[\phi^>]$ の下での $\phi^>$ の n 点関数の計算を行えばよいことが分かる。これらは Wick の定理によって 2 点関数へと展開でき、このときに出てくる 2 点関数は、

$$\overline{\phi^>(\mathbf{p})\phi^>(\mathbf{q})} = \frac{(2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{\mathbf{p}^2 + r_0} \quad (2.3.9)$$

である。なお、以下で計算するのは式 (2.3.8) であるため、式 (2.3.4) の表式へ帰着させるためには式 (2.3.8) の両辺の対数を取る必要がある。このとき、

$$\begin{aligned} -S'_\Lambda[\phi'] &= -S_{\text{free},\Lambda}[\phi^<] + \ln \left[\int [d\phi^>] \exp[-S_{\text{free},\Lambda}[\phi^>]] \right] \\ &\quad + \ln \left[\frac{\int [d\phi^>] \exp[-S_{\text{free},\Lambda}[\phi^>] - S_{\text{int},\Lambda}[\phi^<, \phi^>]]}{\int [d\phi^>] \exp[-S_{\text{free},\Lambda}[\phi^>]]} \right] \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

となるが、右辺の第 2 項は繰り込み群変換で得られる作用に対して定数分のシフトしか与えないので無視する。第 3 項は Gauss 分布の下での高次モーメントの対数であるが、

$$\begin{aligned}
& \ln \left[\frac{\int [d\phi^>] \exp [-S_{\text{free},\Lambda}[\phi^>] - S_{\text{int},\Lambda}[\phi^<, \phi^>]]}{\int [d\phi^>] \exp [-S_{\text{free},\Lambda}[\phi^>]]} \right] \\
& \approx \ln \left[1 - \langle S_{\text{int},\Lambda}[\phi^<, \phi^>] \rangle + \frac{1}{2} \langle S_{\text{int},\Lambda}^2[\phi^<, \phi^>] \rangle \right] \\
& \approx -\langle S_{\text{int},\Lambda}[\phi^<, \phi^>] \rangle + \frac{1}{2} \left(\langle S_{\text{int},\Lambda}^2[\phi^<, \phi^>] \rangle - \langle S_{\text{int},\Lambda}[\phi^<, \phi^>] \rangle^2 \right) + \dots \quad (2.3.11)
\end{aligned}$$

となるので、摂動展開の 2 次の項からくる繰り込み群変換で得られる作用への寄与は、Gauss 分布の 2 次のキュムラントに他ならず、連結相関関数で与えられることが分かる*1。

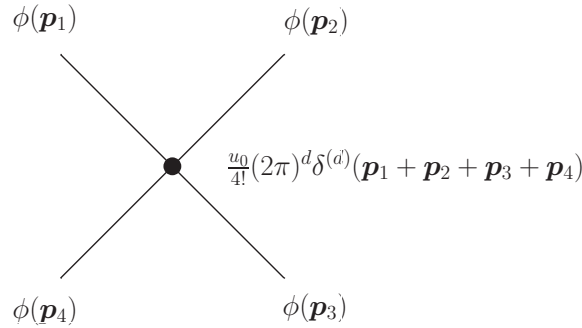


図 2.3.1 $S_{\text{int},\Lambda}[\phi]$ のダイアグラム表示。外線が運動量空間上の自由度 ϕ を表し、頂点が u_0 と運動量の保存則を表す。

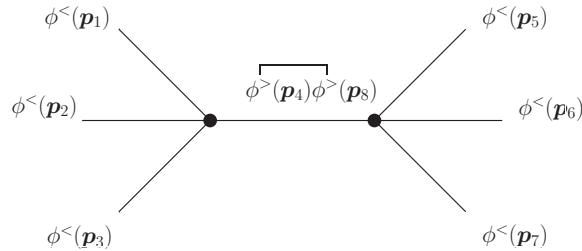


図 2.3.2 摂動展開を項別積分する際、積分される高エネルギーモードは内線で表し、積分されない低エネルギーモードは外線で表す。この図は摂動展開の 2 次の項から出てくる連結ダイアグラムの一例である。内線には 2 つの高エネルギーモードのコントラクションが対応するので、頂点での運動量保存に加えて内線上でも運動量の保存則が課される。なお、必然的にこのような連結ダイアグラムが生じることから、元々の作用には存在しなかったタイプの相互作用が繰り込み群変換の結果として導入されることを意味する。

式 (2.3.8) の右辺の摂動級数に対して Feynman ダイアグラムを用意しておくことと計算の見通しがよくなる。

*1 式 (2.3.11) の最初の式変形を \approx で結んだが、これはキュムラント展開に他ならず、いまの場合は Gauss 分布だから 3 次以上のキュムラントはすべて 0 となっている。

いま, $S_{\text{int},\Lambda}[\phi]$ に図 2.3.1 のようなダイアグラムを対応させる. これから評価したいのは $S_{\text{free},\Lambda}[\phi^>]$ の下での $\phi^>$ の n 点関数であるが, この n 点関数のダイアグラム表示として, 積分される $\phi^>$ は内線で表し, 低エネルギーモード $\phi^<$ は外線で表すことにする. 各内線では式 (2.3.9) による 2 つの運動量に関する保存則が課されていることになる. すなわち, 任意の n 点関数は図 2.3.1 のダイアグラムを複数考えて, そのうちのいくつかの外線を高エネルギーモード $\phi^>$ と見なし, そのような外線どうしをつなぎ合わせて内線を作ることで表現される (図 2.3.2).

さて, 式 (2.3.7) 中の u'_2 に寄与する代表的なダイアグラムをいくつか計算してみよう. $S_{\text{int},\Lambda}$ を摂動項と見なしたので u_0 に関する低次の項から順番に u'_2 へ寄与するダイアグラムを計算していけばよい. 考えるべきは外線を 2 本持った連結なダイアグラムである. まず, u_0 の 0 次の項として $S_{\text{free},\Lambda}[\phi^<]$ からの u'_2 への寄与は式 (2.3.5) からただちに,

$$\begin{aligned} -S_{\text{free},\Lambda}[\phi^<] &= -S_{\text{free},\Lambda}[\phi'] \\ &= -\frac{1}{2} \int_{0 < |\mathbf{p}'| < \Lambda} b^{-d} \zeta_b^2 \left(\frac{\mathbf{p}'^2}{b^2} + r_0 \right) \phi'(\mathbf{p}') \phi'(-\mathbf{p}') \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

と結論される. 次に, $O(u_0)$ の寄与として, 例えば図 2.3.3 のようなダイアグラムが考えられる.

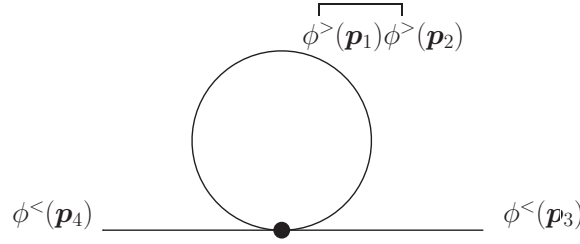


図 2.3.3 u'_2 に寄与する $O(u_0)$ のダイアグラムの例. このような形状のダイアグラムは全部で 6 通り存在し, この図はそのうちの一例を示したものである. この例では \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 が高エネルギー側に属する場合を考えている.

このダイアグラムからの寄与は,

$$\begin{aligned} & -\frac{u_0}{4!} \left(\prod_{i=1}^4 \int_{0 < |\mathbf{p}_i| < \Lambda} \right) (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) \overline{\phi^>(\mathbf{p}_1) \phi^>(\mathbf{p}_2)} \phi^<(\mathbf{p}_3) \phi^<(\mathbf{p}_4) \\ &= -\frac{u_0}{4!} \int_{\Lambda/b < |\mathbf{p}_1| < \Lambda} \int_{0 < |\mathbf{p}_3| < \Lambda} \frac{1}{\mathbf{p}_1^2 + r_0} \phi^<(\mathbf{p}_3) \phi^<(-\mathbf{p}_3) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{0 < |\mathbf{p}'| < \Lambda} \left[2 \frac{u_0}{4!} b^{-d} \zeta_b^2 \int_{\Lambda/b < |\mathbf{p}_1| < \Lambda} \frac{1}{\mathbf{p}_1^2 + r_0} \right] \phi'(\mathbf{p}') \phi'(-\mathbf{p}') \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

で与えられるが, 図 2.3.3 のような形状のダイアグラムは図 2.3.1 の 4 つの外線のうち任意の 2 本を選んでコントラクションを取ると生じるから, 全体としてはこれを 6 倍した,

$$-\frac{1}{2} \int_{0 < |\mathbf{p}'| < \Lambda} \left[\frac{u_0}{2} b^{-d} \zeta_b^2 \int_{\Lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + r_0} \right] \phi'(\mathbf{p}') \phi'(-\mathbf{p}') \quad (2.3.14)$$

が $O(u_0)$ の寄与となる．同様に， $O(u_0^2)$ の寄与としては例えば図 2.3.4 のようなダイアグラムが存在し，その寄与は，

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{u_0}{4!}\right)^2 \left(\prod_{i=1}^8 \int_{0 < |\mathbf{p}_i| < \Lambda}\right) (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{p}_5 + \mathbf{p}_6 + \mathbf{p}_7 + \mathbf{p}_8) \\
& \times \overbrace{\phi^<(\mathbf{p}_1)\phi^>(\mathbf{p}_2)\phi^>(\mathbf{p}_3)\phi^>(\mathbf{p}_4)\phi^<(\mathbf{p}_5)\phi^>(\mathbf{p}_6)\phi^>(\mathbf{p}_7)\phi^>(\mathbf{p}_8)} \\
& = \left(\frac{u_0}{4!}\right)^2 \int_{0 < |\mathbf{p}_1| < \Lambda/b} \left(\prod_{i=2}^3 \int_{\Lambda/b < |\mathbf{p}_i| < \Lambda} \frac{1}{\mathbf{p}_i^2 + r_0}\right) \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)^2 + r_0} \phi^<(\mathbf{p}_1)\phi^<(-\mathbf{p}_1) \\
& = \frac{1}{2} \int_{0 < |\mathbf{p}'_1| < \Lambda} \left[2 \left(\frac{u_0}{4!}\right)^2 b^{-d} \zeta_b^2 \left(\prod_{i=2}^3 \int_{\Lambda/b < |\mathbf{p}_i| < \Lambda} \frac{1}{\mathbf{p}_i^2 + r_0}\right) \frac{1}{(b^{-1}\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)^2 + r_0} \right] \\
& \times \phi'(\mathbf{p}'_1)\phi'(-\mathbf{p}'_1) \tag{2.3.15}
\end{aligned}$$

で与えられる．

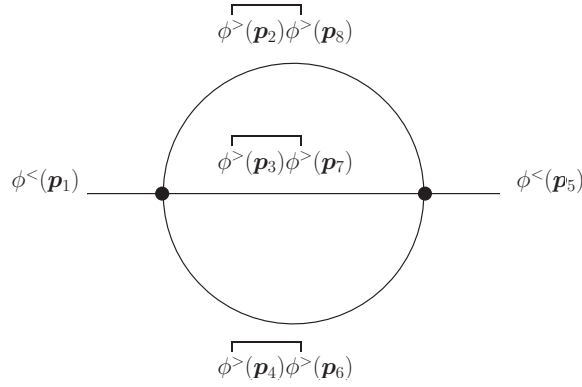


図 2.3.4 u'_2 に寄与する $O(u_0^2)$ のダイアグラムの例．このような形状のダイアグラムは全部で 96 通り存在し，この図はそのうちの一例を示したものである．

図 2.3.4 のような形状のダイアグラム全体からの寄与を考えるには，式 (2.3.8) の摂動展開の係数 $1/2!$ とコントラクションのとり方の総数が 96 通りあることから，全体を 48 倍して，

$$\frac{1}{2} \int_{0 < |\mathbf{p}'| < \Lambda} \left[\frac{u_0^2}{6} b^{-d} \zeta_b^2 \left(\prod_{i=1}^2 \int_{\Lambda/b < |\mathbf{q}_i| < \Lambda} \frac{1}{\mathbf{q}_i^2 + r_0} \right) \frac{1}{(b^{-1}\mathbf{p}' + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2 + r_0} \right] \phi'(\mathbf{p}')\phi'(-\mathbf{p}') \tag{2.3.16}$$

としたものが $O(u_0^2)$ の寄与である．ここまでの計算をまとめると，

$$\begin{aligned}
u'_2(\mathbf{p}') &= b^{-d} \zeta_b^2 \left[\left(\frac{\mathbf{p}'^2}{b^2} + r_0 \right) + \frac{u_0}{2} \int_{\Lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + r_0} \right. \\
&\quad \left. - \frac{u_0^2}{6} \left(\prod_{i=1}^2 \int_{\Lambda/b < |\mathbf{q}_i| < \Lambda} \frac{1}{\mathbf{q}_i^2 + r_0} \right) \frac{1}{(b^{-1}\mathbf{p}' + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2 + r_0} + \dots \right] \tag{2.3.17}
\end{aligned}$$

を得る．

今度は式 (2.3.4) 中の u'_4 に寄与する代表的なダイアグラムをいくつか計算してみよう．考えるべきは外線を 4 本持った連結なダイアグラムである． u'_2 のときと異なり， $S_{\text{free},\Lambda}[\phi^<]$ からの寄与はなく， $O(u_0)$ が u'_4 へ有限の寄与を与える最低次の項となる．ダイアグラムとしては図 2.3.1 ですべての外線が低エネルギーモードに属する場合であり，その表式は，

$$\begin{aligned}
& -\frac{u_0}{4!} \left(\prod_{i=1}^4 \int_{0 < |\mathbf{p}_i| < \Lambda} \right) (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) \phi^<(\mathbf{p}_1) \phi^<(\mathbf{p}_2) \phi^<(\mathbf{p}_3) \phi^<(\mathbf{p}_4) \\
& = -\frac{u_0}{4!} \left(\prod_{i=1}^4 b^{-d} \int_{0 < |\mathbf{p}'_i| < \Lambda} \right) \zeta_b^4 b^d (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \mathbf{p}'_3 + \mathbf{p}'_4) \phi'(\mathbf{p}'_1) \phi'(\mathbf{p}'_2) \phi'(\mathbf{p}'_3) \phi'(\mathbf{p}'_4) \\
& = - \left(\prod_{i=1}^3 \int_{0 < |\mathbf{p}'_i| < \Lambda} \right) \frac{u_0}{4!} b^{-3d} \zeta_b^4 \phi'(\mathbf{p}'_1) \phi'(\mathbf{p}'_2) \phi'(\mathbf{p}'_3) \phi'(-\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'_3) \quad (2.3.18)
\end{aligned}$$

である．次に， $O(u_0^2)$ の寄与として，例えば図 2.3.5 のようなダイアグラムが考えられる．

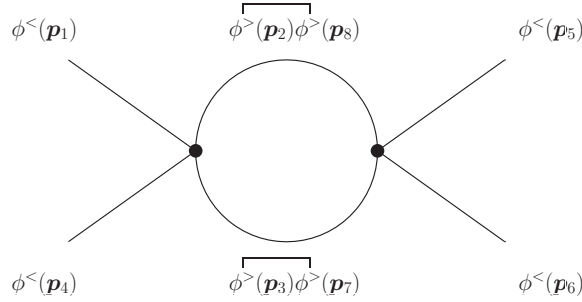


図 2.3.5 u'_4 に寄与する $O(u_0^2)$ のダイアグラムの例．このような形状のダイアグラムは全部で 72 通り存在し，この図はそのうちの一例を示したものである．

このダイアグラムからの寄与は，

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{u_0}{4!} \right)^2 \left(\prod_{i=1}^8 \int_{0 < |\mathbf{p}_i| < \Lambda} \right) (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{p}_5 + \mathbf{p}_6 + \mathbf{p}_7 + \mathbf{p}_8) \\
& \quad \times \phi^<(\mathbf{p}_1) \phi^>(\mathbf{p}_2) \phi^>(\mathbf{p}_3) \phi^<(\mathbf{p}_4) \phi^<(\mathbf{p}_5) \phi^<(\mathbf{p}_6) \phi^>(\mathbf{p}_7) \phi^>(\mathbf{p}_8) \\
& = \left(\frac{u_0}{4!} \right)^2 \left(\prod_{i=1,4,5} \int_{0 < |\mathbf{p}_i| < \Lambda/b} \right) \int_{\Lambda/b < |\mathbf{p}_2| < \Lambda} \frac{1}{\mathbf{p}_2^2 + r_0} \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4)^2 + r_0} \\
& \quad \times \phi^<(\mathbf{p}_1) \phi^<(\mathbf{p}_4) \phi^<(\mathbf{p}_5) \phi^<(-\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_5) \\
& = \left(\prod_{i=1,4,5} \int_{0 < |\mathbf{p}'_i| < \Lambda} \right) \left[\left(\frac{u_0}{4!} \right)^2 b^{-3d} \zeta_b^4 \int_{\Lambda/b < |\mathbf{p}_2| < \Lambda} \frac{1}{\mathbf{p}_2^2 + r_0} \frac{1}{(b^{-1}\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}_2 + b^{-1}\mathbf{p}'_4)^2 + r_0} \right] \\
& \quad \times \phi'(\mathbf{p}'_1) \phi'(\mathbf{p}'_4) \phi'(\mathbf{p}'_5) \phi'(-\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_4 - \mathbf{p}'_5) \quad (2.3.19)
\end{aligned}$$

であるが，図 2.3.5 の形状を持ったダイアグラム全体からの寄与を得るには式 (2.3.8) の摂動展開の係数

$1/2!$ とコントラクションのとり方の総数が 72 通りあることから、全体を 36 倍した、

$$\left(\prod_{i=1}^3 \int_{0 < |\mathbf{p}'_i| < \Lambda} \right) \left[\frac{u_0^2}{16} b^{-3d} \zeta_b^4 \int_{\Lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + r_0} \frac{1}{(b^{-1}\mathbf{p}'_1 + b^{-1}\mathbf{p}'_2 + \mathbf{q})^2 + r_0} \right] \\ \times \phi'(\mathbf{p}'_1) \phi'(\mathbf{p}'_2) \phi'(\mathbf{p}'_3) \phi'(-\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'_3) \quad (2.3.20)$$

が $O(u_0^2)$ の寄与となる．式 (2.3.20) の非積分関数の分母に着目すると、 $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_2 = 0$ とおけば取り扱いが容易になる．実際、臨界指数は相互作用の運動量依存性と無関係であるため、臨界現象を解析する上では $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_2 = 0$ としてしまって問題ない．そこで以下では、式 (2.3.20) を

$$\left(\prod_{i=1}^3 \int_{0 < |\mathbf{p}'_i| < \Lambda} \right) \left[\frac{u_0^2}{16} b^{-3d} \zeta_b^4 \int_{\Lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda} \frac{1}{(\mathbf{q}^2 + r_0)^2} \right] \phi'(\mathbf{p}'_1) \phi'(\mathbf{p}'_2) \phi'(\mathbf{p}'_3) \phi'(-\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'_3) \quad (2.3.21)$$

として議論する．上式では外線運動量に関する積分記号と非積分関数の分子における外線運動量依存性を露わに書き残したが、これらは単に u'_4 への寄与であることを明記するためのマーカーに過ぎない．ここまでの計算をまとめれば、

$$u'_4 = b^{-3d} \zeta_b^4 \left[\frac{u_0^2}{4!} - \frac{u_0^2}{16} \int_{\Lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda} \frac{1}{(\mathbf{q}^2 + r_0)^2} + \dots \right] \quad (2.3.22)$$

となる．

さて、これまでの計算の目的は式 (2.3.6) の繰り込み群変換 \mathcal{R} を構成することだった．以下では作用そのものに対してではなく、理論のパラメタに対する漸化式として繰り込み群変換 \mathcal{R} を定式化しよう．式 (2.3.17) と式 (2.3.22) から漸化式を構成すればよいが、ここでは 1 ループ近似を行うことにする．1 ループ近似とは、ダイアグラムの内線運動量に関する積分が高々 1 つしか存在しない寄与のみを取り込む近似である．例えば、式 (2.3.17) を見ると、2 行目に書いた寄与は \mathbf{q}_1 と \mathbf{q}_2 という 2 つの内線運動量に関する積分を含んでいるので、この寄与は 1 ループ近似の範囲では落とされることになる．実は、図 2.3.4 以外の上で計算したダイアグラムが 1 ループ近似で考慮すべき ϕ^4 理論のダイアグラムの全てである．

いま、繰り込み群変換の前後で作用に含まれる運動項に対して、

$$u'_2(\mathbf{p}') =: \mathbf{p}'^2 + r' \quad (2.3.23)$$

と規格化することを要請する．また、4 点相互作用の結合定数の係数も

$$u'_4 =: \frac{u'}{4!} \quad (2.3.24)$$

で統一することにする．このとき、1 ループ近似では、

$$r' = b^{-d} \zeta_b^2 \left[r_0 + \frac{u_0}{2} \int_{\Lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + r_0} \right], \quad (2.3.25)$$

$$u' = b^{-3d} \zeta_b^4 \left[u_0^2 - \frac{3u_0^2}{2} \int_{\Lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda} \frac{1}{(\mathbf{q}^2 + r_0)^2} \right] \quad (2.3.26)$$

を得る。ただし、運動項に対する規格化条件 (2.3.23) により、

$$\zeta_b = b^{1+d/2} \quad (2.3.27)$$

と ζ_b を取るものとする。元々 ζ_b は場 $\phi^<$ のスケーリング則として導入された定数であるが、1 ループ近似の範囲では、

$$\phi'(\mathbf{p}') = b^{-1-d/2} \phi^<(\mathbf{p}'/b) \quad (2.3.28)$$

となって、運動量空間での場 $\phi(\mathbf{p})$ のスケーリング次元は $-(d+2)/2$ と結論される。したがって、実空間上の場 $\phi(\mathbf{r})$ のスケーリング次元は Fourier 変換からただちに $(d-2)/2$ と分かる。すなわち、1 ループ近似から結論される場のスケーリング次元は場の質量次元に等しい。ただし、この結果は 1 ループ近似を行ったことによって得られたものであり、一般には摂動の高次からの寄与、言い換えると繰り込み群変換から新たに生じる非線型相互作用からの寄与によって場のスケーリング次元は質量次元とは異なる。スケーリング次元の質量次元からのずれを与えているのが臨界指数 η に他ならない^{*2}。一般に場 $\phi(\mathbf{p})$ が満たすスケーリングは、

$$\phi'(\mathbf{p}') = \frac{b^{-1-d/2}}{\sqrt{Z_b}} \phi^<(\mathbf{p}'/b) \quad (2.3.29)$$

であり、すなわち、

$$\zeta_b = b^{1+d/2} \sqrt{Z_b} \quad (2.3.30)$$

と取らなければならない。1 ループ近似では $Z_b = 1$ であるが議論の都合上 Z_b を明記しておくことにする。こうして ϕ^4 理論の 2 つのパラメタ r_0 と u_0 は繰り込み群変換 \mathcal{R} によって、

$$r' = b^2 Z_b \left[r_0 + \frac{u_0}{2} \int_{\Lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + r_0} \right], \quad (2.3.31)$$

$$u' = b^{4-d} Z_b^2 \left[u_0^2 - \frac{3u_0^2}{2} \int_{\Lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda} \frac{1}{(\mathbf{q}^2 + r_0)^2} \right] \quad (2.3.32)$$

と変換されることが分かった。この 2 式が繰り込み群変換 \mathcal{R} を具体的に記述した繰り込み群方程式である。

繰り込み群方程式 (2.3.31) と (2.3.32) を漸化式として定式化するためには r' と u' が満たす微分方程式を立てればよい。スケールパラメタ b は任意に選べるので、

$$b = e^l \quad (2.3.33)$$

と選ぶことにしよう。ただし、 l は非負の実数値を取るものとする。 l を大きくすることははじめからスケールパラメタ b を大きくとったことを意味するが、小さなスケールパラメタで定義された繰り込み群変換を無数に繰り返したと見なすこともできる。つまり、パラメタ l を大きくすることは十分小さなスケール

^{*2} このような事情から臨界指数 η は異常次元とも呼ばれる。

パラメタを用いた繰り込み群変換を無限回実行することと等価である。いま、 r' も u' もパラメタ l の関数と見なして、 $r_l := r'$ などとおくことにする。また、規格化定数についても $Z_l := Z_b$ とおく。すると、各パラメタの l 微分は、

$$\frac{\partial r_l}{\partial l} = \left(2 + \frac{1}{Z_l} \frac{\partial Z_l}{\partial l}\right) r_l + e^{2l} Z_l \frac{u_0}{2} \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \frac{\Lambda^d}{(\Lambda e^{-l})^2 + r_0}, \quad (2.3.34)$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial l} = \left(4 - d + 2 \frac{1}{Z_l} \frac{\partial Z_l}{\partial l}\right) u_l - e^{(4-d)l} Z_l^2 \frac{3u_0^2}{2} \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \frac{\Lambda^d}{[(\Lambda e^{-l})^2 + r_0]^2} \quad (2.3.35)$$

などと求まる。ここに、 Ω_d は半径 1 の d 次元球の表面積である。すでに述べたように 1 ループ近似では $Z_l = 1$ なので Z_l の l 微分は 0 である。パラメタ l を十分に小さくとり、 $O(l)$ を無視することになると、

$$r_0 \approx r_l \quad (2.3.36)$$

などの近似が正当化されて、

$$\frac{\partial r_l}{\partial l} = 2r_l + \frac{u_l}{2} \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \frac{\Lambda^d}{\Lambda^2 + r_l}, \quad (2.3.37)$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial l} = (4 - d) u_l - \frac{3u_l^2}{2} \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \frac{\Lambda^d}{(\Lambda^2 + r_l)^2} \quad (2.3.38)$$

の微分方程式が得られる。これが 1 ループ近似の繰り込み群変換においてパラメタが満たすべき微分方程式である。

ここで、式 (2.3.34)、式 (2.3.35) で含まれていた、

$$\eta_l := -\frac{1}{Z_l} \frac{\partial Z_l}{\partial l} \quad (2.3.39)$$

について考えておく。これを Z_l が満たす微分方程式と見なすと、

$$Z_l \propto \exp \left[- \int_0^l dl' \eta_{l'} \right] \quad (2.3.40)$$

がその解である^{*3}。もし、 η_l が

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \eta_l = \eta > 0 \quad (2.3.41)$$

のように無限回の繰り込み群変換を実行した後に正の有限値 η に収束するならば、解 (2.3.40) の関数形から、

$$\lim_{l \rightarrow \infty} Z_l = 0 \quad (2.3.42)$$

^{*3} ただし、一般には $\eta_l = \eta_l(Z_l)$ なので、微分方程式 (2.3.39) の解というよりはそれと等価な積分方程式と言った方が適切かもしれない。

が結論される．ということは、もし

$$\lim_{l \rightarrow \infty} Z_l = Z \neq 0 \quad (2.3.43)$$

ならば、式 (2.3.40) 中の積分は $l \rightarrow \infty$ の極限で有限確定である必要があるが、これを実現するためには、

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \eta_l = \eta = 0 \quad (2.3.44)$$

でなければならない．以上の考察から $\eta = \lim_{l \rightarrow \infty} \eta_l$ が有限かどうかで Z_l の挙動は大きく異なり、ひいては場 ϕ に対するスケーリングの議論に本質的な違いが生じることが予想される．そこで、場 ϕ の 2 点関数に対するスケーリングを考えてみよう．何回か繰り込み群変換を実行した後の場の 2 点関数に対して、

$$\langle \phi(\mathbf{p}) \phi(\mathbf{q}) \rangle = \frac{(2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{\mathbf{p}^2 + r_l} =: (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) G(\mathbf{p}; r_l, u_l) \quad (2.3.45)$$

とおくと、式 (2.3.29) によって、

$$\langle \phi(\mathbf{p}'/b) \phi(\mathbf{q}'/b) \rangle = b^{2+d} Z_b \langle \phi(\mathbf{p}') \phi(\mathbf{q}') \rangle, \quad (2.3.46)$$

すなわち、

$$(2\pi)^d b^d \delta^{(d)}(\mathbf{p}' + \mathbf{q}') G(\mathbf{p}'/b; r_l, u_l) = b^{2+d} Z_b (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{p}' + \mathbf{q}') G(\mathbf{p}'; r_{l+\Delta l}, u_{l+\Delta l}) \quad (2.3.47)$$

と結びつくから、運動量空間上での 2 点関数は、

$$G(\mathbf{p}'/b; r_l, u_l) = b^2 Z_l G(\mathbf{p}'; r_{l+\Delta l}, u_{l+\Delta l}) \quad (2.3.48)$$

のスケーリング関数で与えられることになる．ここで、もし無限回の繰り込み群変換の後に式 (2.3.41) が成り立っているならば、式 (2.3.40) より、

$$Z_l \propto e^{-\eta l} \Leftrightarrow Z_b \propto b^{-\eta} \quad (2.3.49)$$

となるから、

$$G(\mathbf{p}'/b'; r^*, u^*) \propto b^{2-\eta} G(\mathbf{p}'; r^*, u^*) \quad (2.3.50)$$

となり、スケーリング関数 G が

$$G(\mathbf{p}'; r^*, u^*) \propto \frac{1}{|\mathbf{p}'|^{2-\eta}} \quad (2.3.51)$$

のような関数形で与えられることを意味する．これは臨界点直上における相関関数の運動量表示に他ならず、 $\eta = \lim_{l \rightarrow \infty} \eta_l$ は異常次元を記述する臨界指数 η そのものであることが結論される．上で考察したように、 η が有限の場合には Z_l は無限回の繰り込み群変換で 0 に収束することになるが、式 (2.3.29) に戻って考えれば、十分な回数の繰り込み群変換で得られる低エネルギーモードに属する自由度に対しては無限大の因子が掛け算されることを意味する．これはまさに場の理論における繰り込みの手続きに他ならず、臨界現象の立場から見れば繰り込まれた場の理論は臨界点直上の理論によって構成されてることを示唆している．このように η_l には l で特徴づけられる回数だけ繰り込み群変換を実行して得られる低エネルギー有効理論の異常次元に相当する指数としての意味が存在するのである．

2.4 上部臨界次元における対数補正

1 ループ近似から得られた繰り込み群方程式 (2.3.37) および (2.3.38) を上部臨界次元上で考えることで、平均場の臨界指数に対する対数補正の存在が議論できる。いま、 $d = 4$ とし、

$$r_l := \frac{r_l}{\Lambda^2}, \quad u_l := \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4} u_l \quad (2.4.1)$$

で理論のパラメタを再定義すると、繰り込み群方程式 (2.3.37) および (2.3.38) は、

$$\frac{\partial r_l}{\partial l} = 2r_l + \frac{1}{2} \frac{u_l}{1+r_l}, \quad (2.4.2)$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial l} = -\frac{3}{2} \frac{u_l^2}{(1+r_l)^2} \quad (2.4.3)$$

となる。繰り込み群方程式 (2.4.2) および (2.4.3) の固定点は、

$$(r^*, u^*) = (0, 0) \quad (2.4.4)$$

のみである。式 (2.4.2) よりパラメタ r_l は初期値として 0 を与えない限り繰り込み群変換によってその絶対値は増大することが分かる。一方、固定点近傍では (2.4.3) を

$$\frac{\partial u_l}{\partial l} = -\frac{3}{2} u_l^2 \quad (2.4.5)$$

と近似できる。繰り込み群方程式 (2.4.5) には u_l について線型な項が存在せず、スケール次元は 0 であるが式 (2.4.5) より n 回の繰り込み群変化によって、

$$\int_u^{u'} \frac{1}{u_l^2} du_l = -\frac{3}{2} \int_0^{nl} dl', \quad (2.4.6)$$

すなわち、

$$\frac{1}{u'} = \frac{1}{u} + \frac{3}{2} nl \quad (2.4.7)$$

と変換される。これは u_l が繰り込み群変換を行うたびに小さくなっていくことを意味し、この意味でパラメタ u_l は有意でないことが分かる^{*4}。理論空間内の 2 次元部分空間 $\{(r, u)\}$ で繰り込み群変換の流れを示したのが図 2.4.1 である。

いま、

$$t_l := r_l + \frac{1}{4} u_l \quad (2.4.8)$$

^{*4} 式 (2.4.1) の規格化を行わない場合、式 (2.4.7) の右辺第 2 項の nl にかかる係数は $\beta_0 = 3/16\pi^2$ に他ならない。

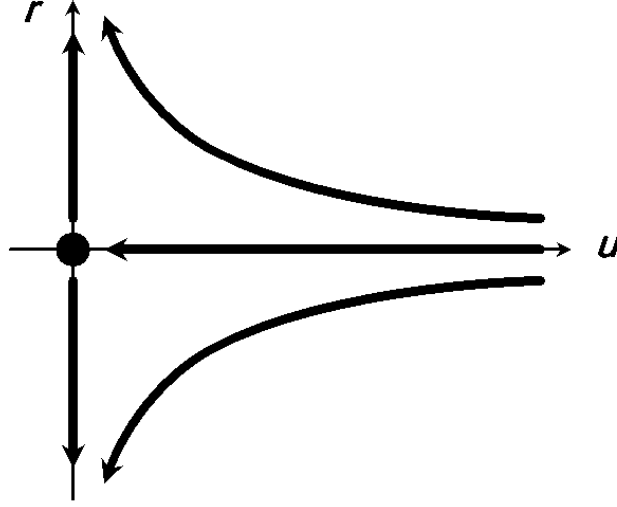


図 2.4.1 4 次元 ϕ^4 理論における繰り込み群変換の流れの概略. $r = 0$ の部分空間が臨界部分空間であり, 繰り込み群変換で固定点へと吸い込まれる. $r \neq 0$ の理論は繰り込み群変換によって $r = 0$ の理論から遠ざかってゆき, 特に $u = 0$ では固定点から湧き出す流れが存在する.

を定義すると, t_l に関する繰り込み群方程式は,

$$\frac{\partial t_l}{\partial l} = 2t_l - \frac{1}{2}u_l t_l + O(u_l^2) \quad (2.4.9)$$

となる^{*5}. 式 (2.4.6) より, (t_0, u_0) を初期値とすれば,

$$\frac{1}{u_l} = \frac{1}{u_0} + \frac{3}{2}l \quad (2.4.10)$$

を得る. これを式 (2.4.9) に代入して解くと,

$$t_l = t_0 \exp \left[2l - \frac{1}{3} \log(3u_0 l + 2) \right] \quad (2.4.11)$$

である. 右辺の e^{2l} は t のスケーリング次元が 2 であることに由来するが, 残りの因子は u に起因した効果である. 式 (2.4.7) で u はスケール次元 0 であり, 繰り込み群変換で減少するパラメタであることを確認したが, 有意な変数の繰り込み群変換において露わに影響するのである. この因子こそ平均場の臨界指数への対数補正を与えるのである. ただし, 式 (2.4.11) の l は任意の値を取ることができない. というのも, $|t_l|$ は繰り込み群変換を行うたびに大きくなるが, 式 (2.4.9) で無視した $O(u_l^2)$ の部分には t_l に関する高次項が含まれており, l を大きくし過ぎると t_l の高次を無視した近似が正当化されなくなる. 一方で, ある程度 l を稼げばパラメタ u_l が減少するため, 2.2 節の議論から平均場理論を適用することができる. そこで,

^{*5} 式 (2.4.8) で定義した t_l はスケーリング場になっている. これは $d = 4 - \epsilon$ の場合の繰り込み群方程式を固有値問題として解き, スケーリング場を求めておいてから $\epsilon \rightarrow 0$ とすることで導くことができる. この議論について付録 C を参照. なお, $d = 4$ では有意なスケーリング場の 1 つしか存在せず, それは温度に他ならない.

式 (2.4.9) と平均場の結果が両立するような l として, $t_l/t_0 \sim O(1)$ を満たすような l を考えることにする. 式 (2.4.11) から, $t_l/t_0 \sim O(1)$ では

$$l = \frac{1}{2} \log \frac{t_l}{t_0} - \frac{1}{6} \log (2 - 3u_0 l) \quad (2.4.12)$$

である. 上式は再帰的な方程式になっているが,

$$l = \frac{1}{2} \log \frac{t_l}{t_0} - \frac{1}{6} \log \left(2 - \frac{3}{2} u_0 \log \frac{t_l}{t_0} \right) \quad (2.4.13)$$

で近似することにしよう. いま, 自由エネルギーに対するスケーリング,

$$f(t_0, u_0) = e^{-4l} f(t_l, u_l) \quad (2.4.14)$$

の右辺に対して, 式 (2.1.25) で求めた平均場理論における表式,

$$f(t, u) \propto \frac{|t|^2}{u} \quad (2.4.15)$$

を用いた後に式 (2.4.11) を代入すると,

$$f(t_0, u_0) \propto \frac{|t_0|^2}{u_0} \frac{1}{2} (3u_0 l + 2)^{1/3} \quad (2.4.16)$$

となり, ここに式 (2.4.13) で与えられる l を代入することで,

$$f(t_0, u_0) \propto \frac{|t_0|^2}{u_0} \left[1 + \frac{3}{4} u_0 \log \frac{t_l}{t_0} - \frac{1}{4} u_0 \log \left(2 - \frac{3}{2} u_0 \log \frac{t_l}{t_0} \right) \right]^{1/3} \quad (2.4.17)$$

を得る. 自由エネルギーのパラメタ t による 2 階微分で比熱が与えられるので, 上部臨界次元では平均場の臨界指数に対するリーディングの補正として,

$$C(t_0, u_0) \propto \log^{1/3} t_0 \quad (2.4.18)$$

が結論される.

2.5 最近の数値計算結果

摂動的な繰り込み群による議論は, 上部臨界次元直上の ϕ^4 理論, あるいは Ising 模型の比熱に式 (2.4.18) のような対数補正が存在することを結論した. この帰結に対する非摂動的な検証として, 4 次元 Ising 模型に対するモンテカルロシミュレーションが行われてきたが, 今日に至るまで式 (2.4.18) をサポートするような数値的な結果は得られていない [26–31]. 摂動繰り込み群による結果とモンテカルロ計算の結果の不一致は, 既に述べた場の理論の自明性の問題とも深く関わるため, 数々の論争を呼んでいる [36, 37]. しかし, 現状では摂動繰り込み群による議論を積極的に疑問視することは難しく, むしろモンテカルロ計算で得られた結果に対する有限サイズスケーリング解析の困難に起因した問題という認識を持った研究者が多いのが実情だろう.

現状、最も大きなシミュレーション体積によるモンテカルロ計算という意味でベストな数値結果は Lundow と Markström によるものである [31]。彼らは周期境界条件が課された一辺のサイト数が L の 4 次元超立方体として、 $L \in [4, 80]$ の範囲を扱い、有限サイズスケール解析から比熱の振る舞いを探索した*⁶。有限体積系では転移点近傍における物理量の特異性は生じないが、システムサイズ L における比熱の最大値 $C_{\max}(L)$ は、式 (2.4.18) が正しいなら、

$$C_{\max}(L) \sim \log^{1/3} L \quad (2.5.1)$$

の体積依存性を示すことが知られている [38]。

Lundow と Markström は $C_{\max}(L)$ に対するフィッティングカーブとして、2 通りの結果を得た。1 つは、

$$C_{\max}(L) = 115 \log^{1/3} L - 56.7 \quad (2.5.2)$$

であり、無限体積では比熱が対数的な発散を伴うことを示唆する結果である。一方、もう 1 つは、

$$C_{\max}(L) = 150.9 - 180.5L^{-0.496} \quad (2.5.3)$$

であり、この結果は $L \rightarrow \infty$ で比熱は温度に関して有界な関数になることを意味している (図 2.5.1)。

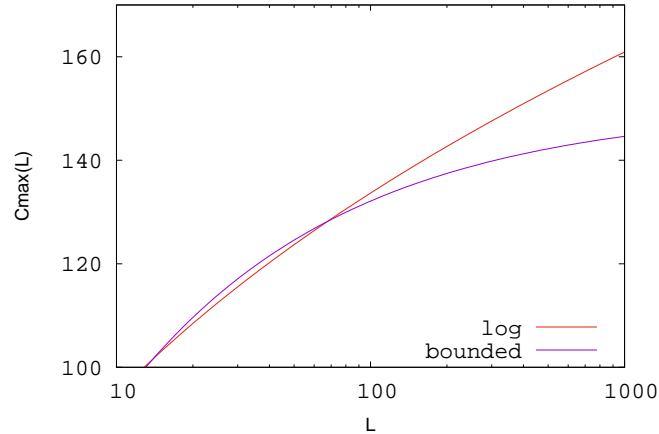


図 2.5.1 [31] で示された $C_{\max}(L)$ に対するフィッティングカーブ。いずれにしても $C_{\max}(L)$ の L 依存性は非常に小さい。モンテカルロ法の統計誤差に起因して、 $L \leq 80$ ではどちらのシナリオが適切か区別することは難しく、シミュレーション体積を大きくする必要があると思われる。

すなわち、[31] における Lundow と Markström の結論は、比熱の対数発散が存在するならば、それを捉えるためには少なくとも $L = 80$ よりも大きな体積での解析が不可欠である、あるいは式 (2.4.18) の対数発散は存在しない、ということになる。前者のシナリオが正しいなら、すでに述べたように 4 次元格子上の ϕ^4 理論の連続極限は自明であることを支持する結果となる。一方、後者のシナリオが正しいなら、自由エネルギーの 2 階微分には特異性がないことを意味するため、通常の 2 次転移ではないことになる。連続極

*⁶ 通常の比熱は内部エネルギーの温度微分として定義されるが、[31] では、内部エネルギーの逆温度微分で比熱を定義している点に注意が必要である。

限を取るためには臨界点における相関長の発散が不可欠であるから、そもそも連続極限を取ることができ
るのかが不明になる。

このように、4次元 Ising 模型の比熱の対数補正の有無を数値的に議論するためには、有限サイズスケ
ーリングが有効であるものの、非常に大きな体積下での計算が不可欠である。以下で導入するテンソルネット
ワーク法はこの難点を克服する数値計算手法として有効であると考えられる。

3 テンソルネットワーク法

本論文でテンソルネットワーク法と言った場合には、「古典統計系の分配関数（あるいは Euclid 空間上の経路積分）をテンソルの縮約（テンソルネットワーク）で表示した後に、そのネットワークに対する系統的な粗視化を実行することで、分配関数を評価する手法」という意味で用いることにする。Ising 模型のように、格子点上に離散的な値を取る模型の場合は厳密にテンソルネットワーク表示を構成することができる。一方、テンソルネットワーク、すなわちテンソルの縮約を具体的に評価するには何らかの近似が不可欠となるのだが、そのような近似の方法は実空間繰り込み群とよく似た方法論から与えられることが多く、本論文で取り扱う高次テンソル繰り込み群もテンソルネットワーク上でのブロックスピン変換と捉えれば見通しよく理解することができる。

3.1 テンソルネットワーク表示の構成

分配関数のテンソルネットワーク表示の作り方には、実空間上での定式化や双対格子上での構成など複数のやり方が存在する [39]。ここでは実空間上での転送行列に対する特異値分解を使った構成方法を採用する*7。

外部磁場が印加されていない d 次元 Ising 模型を例に説明する。 d 次元 Ising 模型のハミルトニアンは、

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \quad (3.1.1)$$

で与えられる*8。ここに、 σ_i は d 次元正方格子の i サイト上に定義された Ising 変数で $\sigma_i = \pm 1$ の値を取る。 $\langle ij \rangle$ は d 次元正方格子上の最近接サイト対を表す。分配関数は、

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[\beta \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \right] = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\langle ij \rangle} \exp [\beta \sigma_i \sigma_j] \quad (3.1.2)$$

である。 $\sigma_i = \pm 1$ の古典スピン系なので、Boltzmann の重みに対して指数法則を用いることができる。右辺において、

$$T(\sigma_i, \sigma_j) := \exp [\beta \sigma_i \sigma_j] \quad (3.1.3)$$

は 2×2 行列、

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} e^{\beta} & e^{-\beta} \\ e^{-\beta} & e^{\beta} \end{bmatrix} \quad (3.1.4)$$

の行列要素と見なすことができる。 \hat{T} は転送行列と呼ばれる（付録 D 参照）。いま、 \hat{T} に対する特異値分解を行うと、

$$\hat{T} = \hat{U}^T \hat{\Sigma} \hat{U} \quad (3.1.5)$$

*7 特異値分解によるテンソルネットワークの構成はエンタングルメント・エントロピーを主軸とした議論とも相性がよい [40]。

*8 以後、交換相互作用を表す J に関して規格化された物理量で議論する。

と表すことができる。ただし、 \hat{U} は、

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.1.6)$$

の直交行列であり、 $\hat{\Sigma}$ は、

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2 \cosh \beta & 0 \\ 0 & 2 \sinh \beta \end{bmatrix} \quad (3.1.7)$$

の対角行列である*9。すると、

$$\hat{W} := \hat{\Sigma}^{1/2} \hat{U} \quad (3.1.8)$$

を定義することで、転送行列 \hat{T} は、

$$\hat{T} = \hat{W}^T \hat{W} \quad (3.1.9)$$

のように \hat{W} どうしの行列積で表すことができる。行列要素のレベルでは、

$$T(\sigma_i, \sigma_j) = \sum_l W(l, \sigma_i) W(l, \sigma_j) \quad (3.1.10)$$

と表したことになる。式 (3.1.9) あるいは (3.1.10) の書き換えによって、実空間で異なる格子点上に定義された Ising 変数が別々の行列の脚として現れ、その間を特異値分解によって導入された自由度 l がつながり合わせる、という描像が得られた。特異値分解によって導入された新たな自由度はボンド自由度と呼ばれる。この書き換えを元の分配関数 (3.1.2) に適用すると、

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\langle ij \rangle} \sum_l W(l, \sigma_i) W(l, \sigma_j) \quad (3.1.11)$$

となる。ここで、周期境界条件を課すと、 d 次元正方格子の配位数は $2d$ であるから、上式の右辺で任意のサイト i について σ_i を行列の脚に持った \hat{W} の行列要素は全部で $2d$ 個存在する。そこで、

$$T_{x_1 x'_1 \dots x_d x'_d}^i := \sum_{\sigma_i} W(x_1, \sigma_i) W(x'_1, \sigma_i) \cdots W(x_d, \sigma_i) W(x'_d, \sigma_i) \quad (3.1.12)$$

で $2d$ 階のテンソルを定義すれば、分配関数 (3.1.2) をボンド自由度にわたる和として表すことができる*10。なお、テンソルの変換則、すなわち共変性や反変性などは議論しない。以下では、これをボンド自由度にわたるトレースとして、

$$Z = \text{Tr} \left[\prod_i T^i \right] \quad (3.1.13)$$

*9 いまの場合、転送行列 \hat{T} 自体が対称行列なので直交行列を使った対角化を行うことができる。そのため、式 (3.1.5) は \hat{T} に対する固有値分解に他ならない。

*10 外部磁場 h との相互作用 $-h \sum_i \sigma_i$ も含める場合には、式 (3.1.12) の右辺の和において、

$$V(\sigma_i) := \exp[\beta h \sigma_i]$$

を掛けておけばよい。

と書くことにする．また，式 (3.1.12) の定義から分かるように，テンソル T^i はサイト i にはよらず，全サイト上で一様なテンソルである．そのため，以降ではテンソルの右肩にあるサイトの添え字は省略する．式 (3.1.13) が d 次元 Ising 模型のテンソルネットワーク表示である．式 (3.1.13) に現れたトレースはボンド自由度にわたるトレースであるから，行列に対するトレースとは異なるものの，テンソルに対する行列表示を構成してやることで一様な行列積に対するトレースと見なすことができる（付録 E.2 参照）．すると，式 (3.1.13) は Ising 模型の密度行列要素をテンソルの縮約で表現したものとも見ることもできる．

なお，テンソルネットワーク法ではテンソルに対するダイアグラム表示がよく用いられる．ルールは非常に単純で， n 階のテンソル A は A を明示する図形（円や多角形を用いることが多い）とそれから伸びる n 本の外線（端点を持った線）で表し，外線どうしをつなぎ合わせて内線を作ることでその脚に関する縮約を取ることを表す．いくつかの例を図 3.1.1 と図 3.1.2 に示す．

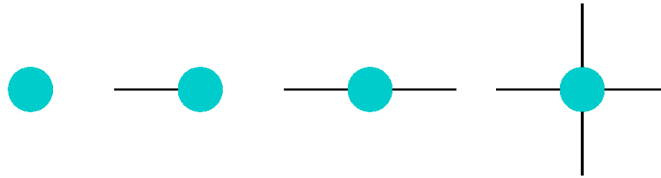


図 3.1.1 左からそれぞれスカラー，ベクトル，行列，4 階のテンソルのダイアグラム表示．

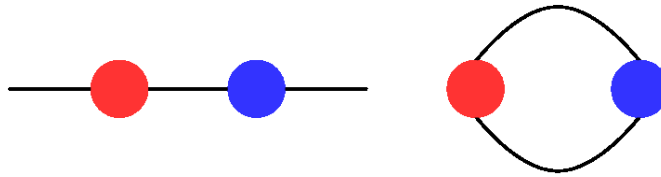


図 3.1.2 左側は 2 つの行列の行列積を表し，右側はその行列積のトレースを表している．外線を持たないダイアグラムはスカラー量になることに注意．

3.2 高次テンソル繰り込み群

式 (3.1.13) で得られた分配関数に対するテンソルネットワーク表示を評価していく方法の 1 つが，HOTRG である [15]．HOTRG の基本的なアイデアはテンソルネットワーク上で逐次テンソルに対する粗視化を実行し，実空間のサイト数だけあるテンソルを 1 つの粗視化テンソルに圧縮してしまうというものである．このようなテンソルネットワークに対する粗視化の手法には非常に多くのバリエーションが存在し，現在も様々なアルゴリズムが提案されているが，その多くは 2 次元系で有効なものであり，原理的に任意の次元の実空間で運用できるのは HOTRG のみである^{*11}．

HOTRG のアルゴリズムを説明するために，まずは 2 次元 Ising 模型の場合を議論する．2 次元でのアルゴリズムが分かれば高次元の場合への拡張は容易である．2 次元の場合，テンソルネットワークを構成する

^{*11} HOTRG と同時に提案された Higher-Order Second Renormalization Group も HOTRG 同様に任意の次元で適用可能なアルゴリズムであるが，HOTRG に比べて計算コストが非常に大きい [15]．そのため，計算精度と計算コストの兼ね合いから，現実的な数値計算に適したアルゴリズムは（本論文の執筆時点では）HOTRG のみ，という状況にある．

局所テンソル (3.1.12) は,

$$T_{xx'yy'} := \sum_{\sigma_i} W(x, \sigma_i) W(x', \sigma_i) W(y, \sigma_i) W(y', \sigma_i) \quad (3.2.1)$$

によって与えられる. 行列 \hat{W} 自体は次元に依らずに定義されており, 次元に応じて変化するのは局所テンソルを定義するために必要な行列要素の個数だけである. また, 式 (3.2.1) の脚に現れているボンド自由度 $x, x'(y, y')$ は実空間上で $x(y)$ 軸方向の近接相互作用を記述した転送行列の特異値分解から導入されたものとする (図 3.2.1).

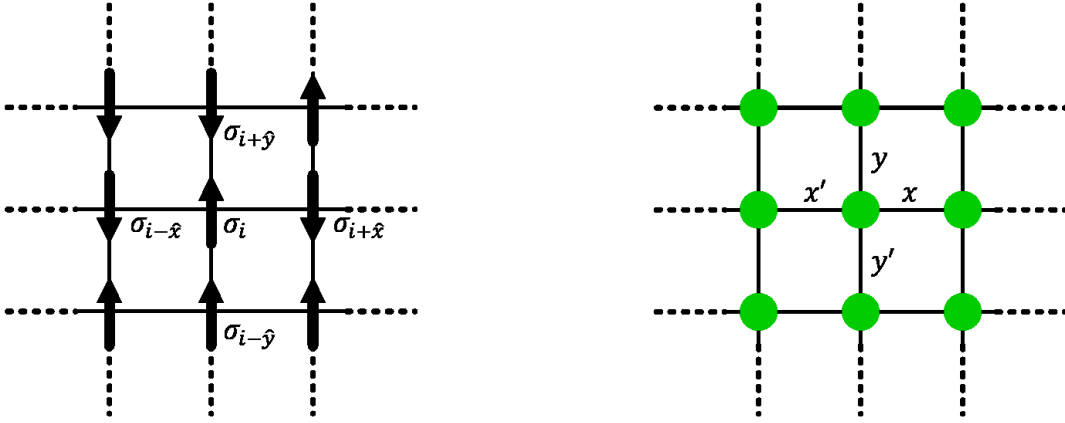


図 3.2.1 左図は元々の実空間上に定義された Ising 模型を図示したもので, 矢印は Ising 変数を表している. \hat{x}, \hat{y} はそれぞれ x, y 軸方向の単位ベクトルである. これに対し, 右図はその分配関数のテンソルネットワーク表示であり, 緑色の丸とそれから伸びる 4 本の線が式 (3.2.1) の局所テンソルを表している. 例えば, 転送行列要素 $T(\sigma_i, \sigma_{i+\hat{x}})$ の特異値分解から導入されたボンド自由度が x である.

具体的な HOTRG のアルゴリズムを説明する前に, HOTRG のストラテジーをあらかじめ述べておくことにしよう. HOTRG では局所テンソルに対して繰り返し粗視化を実行していき, 粗視化された 1 つの局所テンソルのトレースを取ることで分配関数を近似的に求める. HOTRG の n 回目の粗視化のステップでは, 2 つの局所テンソル $T^{(n)}$ を 1 つの粗視化された局所テンソル $T^{(n+1)}$ に変換する. つまり, 式 (3.2.1) の局所テンソルを初期テンソルと呼ぶことにし,

$$T_{xx'yy'}^{(0)} := T_{xx'yy'} \quad (3.2.2)$$

と書くと, $T^{(n)}$ には 2^n 個分の初期テンソル $T^{(0)}$ の情報が近似的に含まれることになるのである. $T^{(0)}$ が実空間上の各サイトごとに定義されていることを踏まえれば, $T^{(n)}$ はサイト数が 2^n 個の Ising 模型の密度行列を近似的に表したものと言ってもよい. すなわち, 式 (3.1.13) の段階では, 実空間におけるサイト数と同数の初期テンソル $T^{(0)}$ を縮約することで分配関数が得られるという描像だったのが, HOTRG による粗視化の手続きを行うことで, 粗視化の回数に応じた 2^n 個分の $T^{(0)}$ の情報が圧縮された 1 つの $T^{(n)}$ から分配関数が求まるという描像に移行できるのである. なお, HOTRG における粗視化テンソル $T^{(n)}$ の構成方法は, テンソルに対する高次特異値分解と呼ばれるテクニックから与えられる (付録 E 参照). ただし, 高次特異値分解の操作は数学的にはテンソルに対する行列表示を作った後にその行列表示から対称行列を

定義して固有値分解を実行することと全く等価であり、ここでは後者の立場を取ることにする^{*12}。

それでは具体的に HOTRG のアルゴリズムを見ていくことにしよう。いま、 $T^{(n)}$ を用いて、

$$\mathcal{T}_{x_1 \otimes x_2 x'_1 \otimes x'_2 y y'}^{(n)} := \sum_{\alpha} T_{x_1 x'_1 y \alpha}^{(n)} T_{x_2 x'_2 \alpha y'}^{(n)} \quad (3.2.3)$$

として 4 階のテンソル $\mathcal{T}^{(n)}$ を定義する。 $\mathcal{T}^{(n)}$ の第 1 次元と第 2 次元には初期テンソルのボンド自由度のテンソル積が入っており、第 1 次元と第 2 次元のサイズは $T^{(n)}$ のそれらの 2 乗になっている。あるいは、ボンド自由度についてのテンソル積を使う代わりに露わにテンソルの階数を増やして、

$$\mathcal{T}_{x_1 x_2 x'_1 x'_2 y y'}^{(n)} := \sum_{\alpha} T_{x_1 x'_1 y \alpha}^{(n)} T_{x_2 x'_2 \alpha y'}^{(n)} \quad (3.2.4)$$

の 6 階のテンソルとして $\mathcal{T}^{(n)}$ が定義されたと見なしでもよい。ダイアグラムを書く際には、式 (3.2.3) よりも式 (3.2.4) の立場を取る方がダイアグラムに現れる内線および外線の自由度の走る範囲が統一されて見通しがよい。本節では、基本的に式 (3.2.4) の立場を取るが、混乱を招かない範囲で式 (3.2.3) の流儀も用いることがある。まず、

$$\mathcal{M}_{(x_1 x_2)(x'_1 x'_2 y y')}^{(n)} = \mathcal{T}_{x_1 x_2 x'_1 x'_2 y y'}^{(n)} \quad (3.2.5)$$

で $\mathcal{T}^{(n)}$ に対する行列表示 $\mathcal{M}^{(n)}$ を定義しよう。ただし、ボンド自由度 x_1, x_2 をまとめて行と見なし、 x'_1, x'_2, y, y' をまとめて列と見なした^{*13}。左辺で $\mathcal{M}^{(n)}$ の右下の添え字における (\cdot) はこれを明示したものである。ここで、

$$\left(\mathcal{M}^{(n)} \mathcal{M}^{(n)\text{T}} \right)_{(x_1 x_2)(\tilde{x}_1 \tilde{x}_2)} = \sum_{(x'_1 x'_2 y y')} \mathcal{M}_{(x_1 x_2)(x'_1 x'_2 y y')}^{(n)} \mathcal{M}_{(x'_1 x'_2 y y')(\tilde{x}_1 \tilde{x}_2)}^{(n)} \quad (3.2.6)$$

は実対称行列であり、直交対角化できる。なお、実際の数値計算を行う場合には、

$$\left(\mathcal{M}^{(n)} \mathcal{M}^{(n)\text{T}} \right)_{(x_1 x_2)(\tilde{x}_1 \tilde{x}_2)} = \sum_{\alpha, \beta} \left(\sum_{x'_1, y} T_{x_1 x'_1 y \alpha}^{(n)} T_{\tilde{x}_1 x'_1 y \beta}^{(n)} \right) \left(\sum_{x'_2, y'} T_{x_2 x'_2 \alpha y'}^{(n)} T_{\tilde{x}_2 x'_2 \beta y'}^{(n)} \right) \quad (3.2.7)$$

から $\mathcal{M}^{(n)} \mathcal{M}^{(n)\text{T}}$ を構成した方が 6 階のテンソルを露わに作らない分だけメモリが得をする（図 3.2.2 および図 3.2.3）。 $\mathcal{M}^{(n)} \mathcal{M}^{(n)\text{T}}$ を対角化する直交行列を $\mathcal{U}_L^{(n)}$ とおくと、

$$\left(\mathcal{M}^{(n)} \mathcal{M}^{(n)\text{T}} \right)_{(x_1 x_2)(\tilde{x}_1 \tilde{x}_2)} = \sum_{\mu, \nu} \left(\mathcal{U}_L^{(n)} \right)_{(x_1 x_2) \mu} \left(\mathcal{D}_L^{(n)} \right)_{\mu \nu} \left(\mathcal{U}_L^{(n)} \right)_{(\tilde{x}_1 \tilde{x}_2) \nu} \quad (3.2.8)$$

とできる。ただし、 $\mathcal{D}_L^{(n)}$ は対角行列で、対角要素は $\mathcal{M}^{(n)}$ の特異値の 2 乗で与えられる。特異値は非負の実数であるから、 $\mathcal{D}_L^{(n)}$ の対角要素もまた非負の実数である。そこで、

$$\mathcal{D}_L^{(n)} = \text{diag} \left(d_L^{(1)}, d_L^{(2)}, \dots \right) \quad (3.2.9)$$

^{*12} 実際に HOTRG のプログラムを作成する場合も、特異値分解ではなく固有値分解を用いた方が使用するメモリを低減させることができる（すなわち、同じメモリを持った計算機で比較した場合、後述の D_{cut} をより大きくすることができる）。その理由は以下の図 3.2.2 と図 3.2.3 で説明されている。

^{*13} テンソルに対する行列表示の作り方については付録 E.2 を参照。

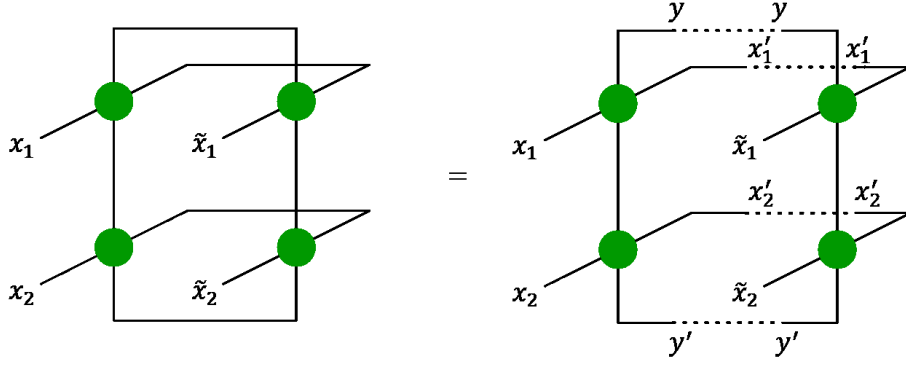


図 3.2.2 式 (3.2.6) のように $\mathcal{M}^{(n)}\mathcal{M}^{(n)\text{T}}$ を構成するには 6 階のテンソル $\mathcal{T}^{(n)}$ を露わに計算機上で用意しなければならない.

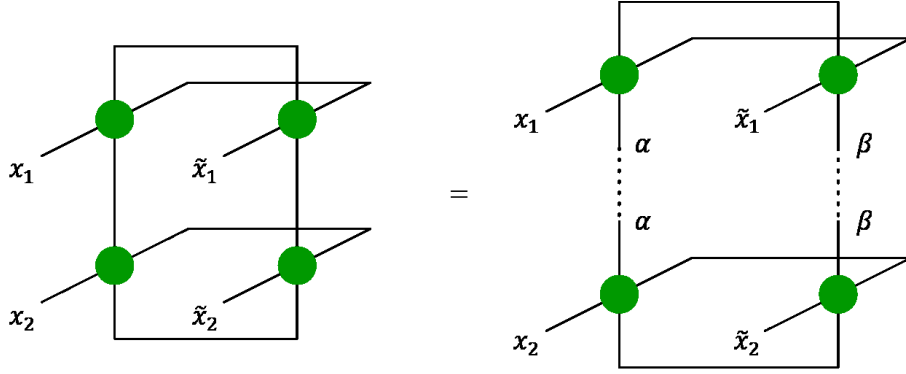


図 3.2.3 式 (3.2.7) では常に 4 階のテンソルだけを用いて $\mathcal{M}^{(n)}\mathcal{M}^{(n)\text{T}}$ が得られるため, 計算機上で必要なメモリを削減できる.

の対角要素は,

$$d_L^{(1)} \geq d_L^{(2)} \geq \dots \geq 0 \quad (3.2.10)$$

となるような順序で並べることにする. すなわち, 各固有値 $d_L^{(i)}$ に属する固有ベクトル $|d_L^{(i)}\rangle$ も直交行列 $\mathcal{U}_L^{(n)}$ 中で,

$$\mathcal{U}_L^{(n)} = \left[|d_L^{(1)}\rangle, |d_L^{(2)}\rangle, \dots \right] \quad (3.2.11)$$

の順に並べるものとする. 次に, 式 (3.2.5) とは異なる $\mathcal{T}^{(n)}$ の行列表示として,

$$\mathcal{M}'_{(x'_1 x'_2)(x_1 x_2 y y')}^{(n)} = \mathcal{T}_{x_1 x_2 x'_1 x'_2 y y'}^{(n)} \quad (3.2.12)$$

を定義し, $\mathcal{M}'^{(n)}$ に対しても式 (3.2.6) から式 (3.2.11) までと同様の議論を行う. すなわち,

$$\left(\mathcal{M}'^{(n)} \mathcal{M}'^{(n)\text{T}} \right)_{(x'_1 x'_2)(\tilde{x}'_1 \tilde{x}'_2)} = \sum_{\mu, \nu} \left(\mathcal{U}_R^{(n)} \right)_{(x'_1 x'_2) \mu} \left(\mathcal{D}_R^{(n)} \right)_{\mu \nu} \left(\mathcal{U}_R^{(n)} \right)_{(\tilde{x}'_1 \tilde{x}'_2) \nu} \quad (3.2.13)$$

の固有値分解を実行するのである。 $\mathcal{D}_R^{(n)}$ は,

$$\mathcal{D}_R^{(n)} = \text{diag} \left(d_R^{(1)}, d_R^{(2)}, \dots \right) \quad (3.2.14)$$

の対角行列で、その要素は,

$$d_R^{(1)} \geq d_R^{(2)} \geq \dots \geq 0 \quad (3.2.15)$$

の順に並べるものとし、直交行列 $\mathcal{U}_R^{(n)}$ もその順序に応じた

$$\mathcal{U}_R^{(n)} = \left[\left| d_R^{(1)} \right\rangle, \left| d_R^{(2)} \right\rangle, \dots \right] \quad (3.2.16)$$

で定義しておく。このように、 $\mathcal{T}^{(n)}$ に対して 2 通りの行列表示を作り、その行列表示に対する固有値分解を実行したわけだが、その目的は 2 つの $T^{(n)}$ から 1 つの粗視化テンソル $T^{(n+1)}$ を作ることにある。そこで、上で求めた $\mathcal{U}_{L(R)}^{(n)}$ の一部を用いて自由度を打ち切る変換を定義しよう。このとき、テンソル $T^{(n)}$ の要素のうち、熱力学極限で重要なものだけを保持し、残りの要素は捨て去ってしまうような変換を考えよう。HOTRG では $\mathcal{M}^{(n)}$ および $\mathcal{M}'^{(n)}$ の特異値を使って、保持すべき要素を決定する。いま,

$$\epsilon_L := \sum_{i > D_{\text{cut}}} d_L^{(i)}, \quad (3.2.17)$$

$$\epsilon_R := \sum_{i > D_{\text{cut}}} d_R^{(i)} \quad (3.2.18)$$

を考える。 $\epsilon_{L(R)}$ は $\mathcal{D}_{L(R)}^{(n)}$ の D_{cut} 番目より先の固有値の和である。このとき D_{cut} は自由に選べるパラメタであり、テンソルのボンド次元などと呼ばれる。すぐ分かるようにボンド次元 D_{cut} が大きいほど HOTRG の近似の精度は高くなる。もし、 $\epsilon_L < \epsilon_R$ なら,

$$U^{(n+1)} := \left[\left| d_L^{(1)} \right\rangle, \left| d_L^{(2)} \right\rangle, \dots, \left| d_L^{(D_{\text{cut}})} \right\rangle \right], \quad (3.2.19)$$

$\epsilon_L > \epsilon_R$ なら,

$$U^{(n+1)} := \left[\left| d_R^{(1)} \right\rangle, \left| d_R^{(2)} \right\rangle, \dots, \left| d_R^{(D_{\text{cut}})} \right\rangle \right], \quad (3.2.20)$$

として変換行列 $U^{(n+1)}$ を定義し,

$$T_{xx'yy'}^{(n+1)} := \sum_{i,j} U_{ix}^{(n+1)} \mathcal{T}_{ijyy'}^{(n)} U_{jx'}^{(n+1)} \quad (3.2.21)$$

によって $T^{(n)}$ の粗視化を実行する。式 (3.2.21) では式 (3.2.3) の $\mathcal{T}^{(n)}$ を 4 階のテンソルとする流儀を用いたが、 $\mathcal{T}^{(n)}$ を 6 階のテンソルと見なし、 $U^{(n+1)}$ を 3 階のテンソルと見なした方が $U^{(n+1)}$ によってボンド自由度が打ち切られている様子を視覚的に捉えやすいダイアグラムを描くことができる (図 3.2.4)。また、式 (3.2.21) の変換のことを「繰り込み」と呼ぶことがあるが、実際にはボンド自由度に対するブロック

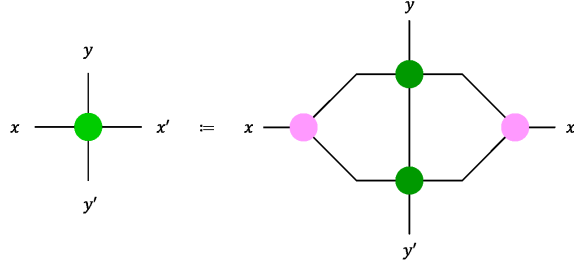


図 3.2.4 式 (3.2.21) のダイアグラム表示. x 軸方向に 2 乗で増大するボンド自由度を $U^{(n+1)}$ によって D_{cut} までで打ち切る. これはボンド自由度に対するブロックスピン変換になっている.

スピン変換と呼ぶ方がふさわしい^{*14}. 式 (3.2.21) の粗視化の正当性は次のような考察に基づいている. まず, $\mathcal{M}^{(n)}$ と $\mathcal{M}'^{(n)}$ は同じテンソル $\mathcal{T}^{(n)}$ から定義されているため,

$$\text{Tr} [\mathcal{D}_{\text{L}}^{(n)}] = \text{Tr} [\mathcal{D}_{\text{R}}^{(n)}] \quad (3.2.22)$$

が成り立つ. すなわち, 上で定義した 2 種類の ϵ を用いて書けば,

$$\sum_{i=1}^{D_{\text{cut}}} d_{\text{L}}^{(i)} + \epsilon_{\text{L}} = \sum_{i=1}^{D_{\text{cut}}} d_{\text{R}}^{(i)} + \epsilon_{\text{R}} \quad (3.2.23)$$

が成立する. 両辺とも非負の実数の和であるため,

$$\epsilon_{\text{L}} < \epsilon_{\text{R}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{D_{\text{cut}}} d_{\text{L}}^{(i)} > \sum_{i=1}^{D_{\text{cut}}} d_{\text{R}}^{(i)}, \quad (3.2.24)$$

および

$$\epsilon_{\text{L}} > \epsilon_{\text{R}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{D_{\text{cut}}} d_{\text{L}}^{(i)} < \sum_{i=1}^{D_{\text{cut}}} d_{\text{R}}^{(i)} \quad (3.2.25)$$

が従う. そのため, 式 (3.2.21) で自由度の打ち切りを行うことは,

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\mathcal{T}^{(n+1)}] &= \sum_{x,y} \sum_{i,j} U_{ix}^{(n+1)} U_{xj}^{(n+1)\text{T}} \mathcal{T}_{ijyy}^{(n)} \\ &= \sum_{i,j,y} \left(\mathbb{1} - \sum_{k > D_{\text{cut}}} |d_{\text{L(R)}}^{(k)}\rangle \langle d_{\text{L(R)}}^{(k)}| \right)_{ij} \mathcal{T}_{ijyy}^{(n)} \\ &= \text{Tr} [\mathcal{T}^{(n)}] - \epsilon_{\text{L(R)}} \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

^{*14} HOTRG に限らず, テンソルネットワーク法ではしばしば自由度の打ち切りを指して「繰り込み」という用語を当てることがある. なお, ブロックスピン変換を実際に計算機上で行う際の注意点として特異値の縮退が挙げられる. これについては付録 E.1 を参照されたい. また, 式 (3.2.21) による自由度の打ち切りを素朴に続けていくと, テンソルの各要素が大きくなっていき, ついには計算機で扱える範囲を超えてしまうので, 分配関数, あるいはテンソルの最大固有値などで規格化を行う必要がある.

を意味する．右辺第 1 項は打ち切りを行わずに厳密に $T^{(n)}$ どうしの縮約を評価した場合のトレースであり， $\epsilon_{L(R)}$ は自由度の打ち切りに起因する誤差を与えていることが分かる．すなわち，粗視化される前の局所テンソルどうしの縮約から得られるトレースと粗視化された後の局所テンソルのトレースの差を最小にするように自由度を打ち切っているのである．したがって， D_{cut} には大きな値を取らせた方が近似の精度も向上する．なお，局所テンソルどうしの縮約から得られるトレースというのは，

$$\text{Tr} [\mathcal{T}^{(n)}] = \sum_{x_1, x_2, y} \sum_{\alpha} T_{x_1 x_1 y \alpha}^{(n)} T_{x_2 x_2 \alpha y}^{(n)} = \sum_{y, \alpha} \left(\sum_{x_1} T_{x_1 x_1 y \alpha}^{(n)} \right) \left(\sum_{x_2} T_{x_2 x_2 \alpha y}^{(n)} \right) \quad (3.2.27)$$

のことであるから，

$$A_{y\alpha} := \sum_x T_{xxy\alpha}^{(n)} \quad (3.2.28)$$

の行列を定義すれば，

$$\text{Tr} [\mathcal{T}^{(n)}] = \text{Tr} [A^2] \quad (3.2.29)$$

となつて，HOTRG は行列 A の行列ノルムに対する最適近似を実行していることに他ならない．

以上が HOTRG における y 軸方向の粗視化のアルゴリズムである．実際に正方格子上に定義された Ising 模型の分配関数を計算するには x 軸方向と y 軸方向について交互に粗視化を実行する必要があるが， x 軸方向の粗視化も y 軸方向の場合と全く同様である（図 3.2.5）．それぞれの方向に n 回ずつ交互に粗視化を実行して，

$$\text{Tr} [T^{(2n)}]$$

を計算すれば，1 辺のサイズが 2^n の正方格子上で定義された Ising 模型の分配関数が近似的に求められる．逆に，1 辺 L の正方格子における分配関数を求めるためには，HOTRG による粗視化を $2 \log_2 L$ 回行えばよい．計算コストが体積について対数的にしか依存しないという点は HOTRG の大きな利点の 1 つである．このため，HOTRG では高い精度で有限サイズスケリングによるデータ解析を行うことができる．

これまでの議論から明らかなように，HOTRG の近似の精度を決定するパラメタは D_{cut} のみである．打ち切りパラメタ D_{cut} の下， $2n$ 回目の粗視化で求められる分配関数を

$$Z(\beta, D_{\text{cut}}, 2n) := \text{Tr} [T^{(2n)}] = \sum_{x=1}^{D_{\text{cut}}} \sum_{y=1}^{D_{\text{cut}}} T_{xxyy}^{(2n)} \quad (3.2.30)$$

とおき， D_{cut} を徐々に上げながら $\ln Z(\beta, D_{\text{cut}}, n)$ を計算して， D_{cut} に関して $\ln Z(\beta, D_{\text{cut}}, n)$ が収束することが確かめられれば，その収束値を与える範囲のどんな D_{cut} を選んで粗視化を進めても， $\mathcal{M}^{(n)}, \mathcal{M}'^{(n)}$ の小さな特異値を捨てた効果は熱力学極限に寄与しないことになる．実際に，HOTRG で求めた 2 次元 Ising 模型の自由エネルギー密度，

$$f(\beta, D_{\text{cut}}, n) := -\frac{1}{2n\beta} \ln Z(\beta, D_{\text{cut}}, n) \quad (3.2.31)$$

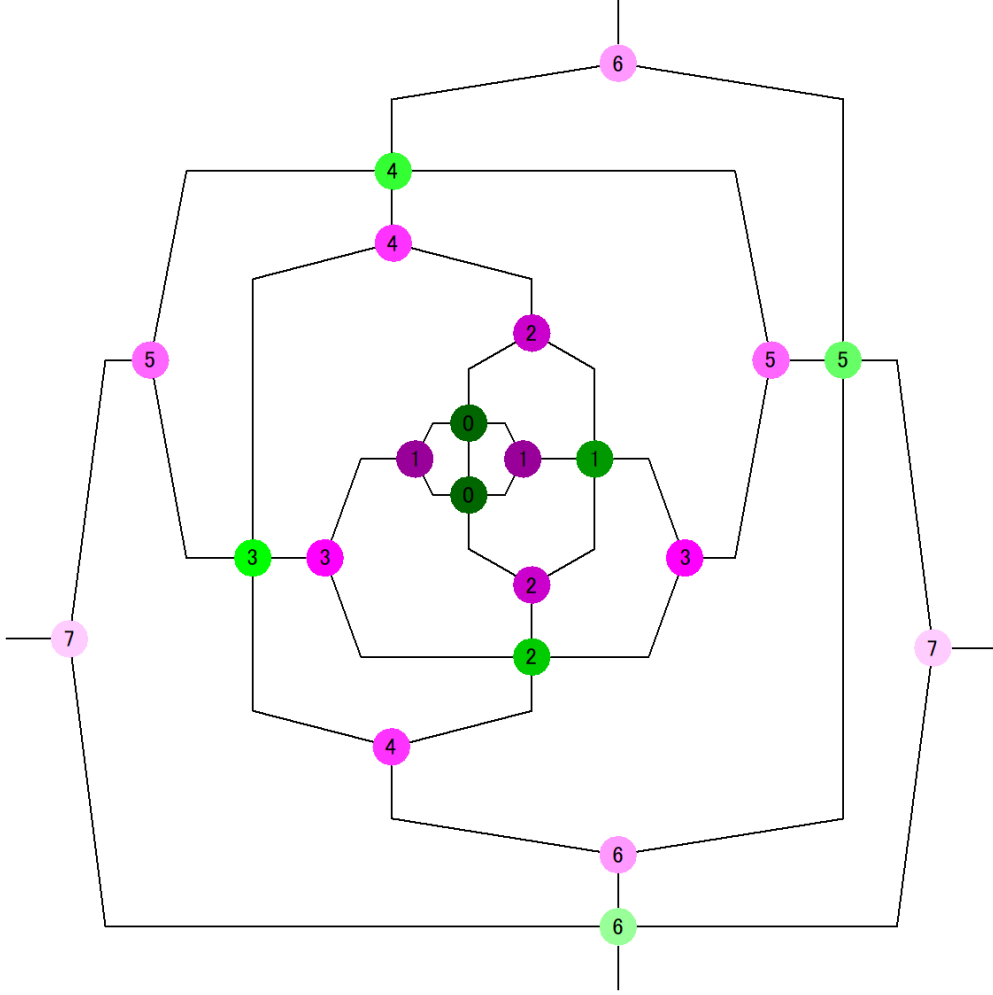


図 3.2.5 x 軸方向の粗視化と y 軸方向の粗視化を繰り返して得られるネットワーク．ダイアグラム上の数字はその数字が付されたテンソルを得るために必要な HOTRG による繰り込みの回数を表している．

を図 3.2.6 に示す．図 3.2.6 中の HOTRG で求めたデータ点は x 軸方向と y 軸方向にそれぞれ 25 回ずつ計 50 回の繰り込みを行って得られたものであるが，実際にはすでに 40 回前後の繰り込みによって，倍精度実数の範囲で

$$\ln Z(\beta, D_{\text{cut}}, n+1) = \ln Z(\beta, D_{\text{cut}}, n) \quad (3.2.32)$$

となることが確認された．このように， n に関して $\ln Z(\beta, D_{\text{cut}}, n)$ が収束するまで HOTRG による繰り込みを繰り返すことで，熱力学極限での自由エネルギー密度の値を高い精度で決定することができる．例えば， $D_{\text{cut}} = 24$ の場合の HOTRG で求めた自由エネルギー密度と厳密解との相対誤差，

$$\delta f(\beta, D_{\text{cut}}, n) := \frac{f(\beta, D_{\text{cut}}, n) - f_{\text{exact}}(\beta)}{f_{\text{exact}}(\beta)} \quad (3.2.33)$$

を示したのが図 3.2.7 である．2 次元 Ising 模型の転移点は， $T_c = 2/\ln(1+\sqrt{2}) \approx 2.269 \dots$ であるが，図 3.2.7 を見るとちょうど転移点近傍で HOTRG の近似精度が下がっていることが分かる．これは転移点近

傍では $\mathcal{M}^{(n)}, \mathcal{M}'^{(n)}$ の特異値の減衰が非臨界領域に比べて遅くなることに起因している^{*15}。そのため、転移点近傍で HOTRG の計算精度を保つにはより大きな D_{cut} が必要になる。

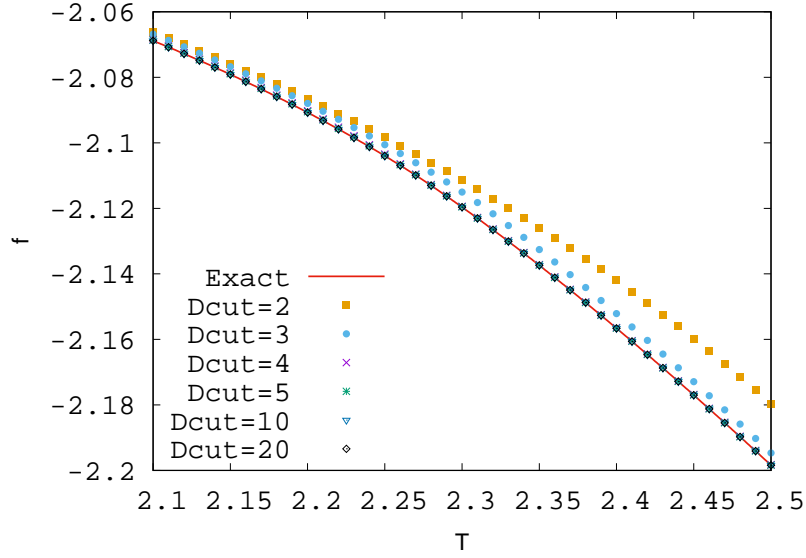


図 3.2.6 D_{cut} を上げていったときの厳密解への近づき方。赤い実線が無限体積極限での自由エネルギー密度の厳密解。 x 軸方向と y 軸方向にそれぞれ 25 回ずつ HOTRG による繰り込みを行った。

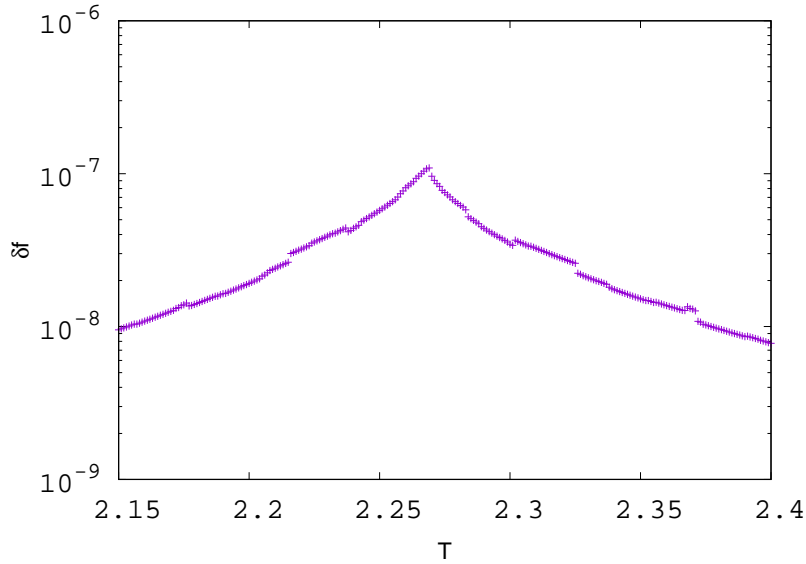


図 3.2.7 $n = 50, D_{\text{cut}} = 24$ における HOTRG で求めた自由エネルギー密度と厳密解との相対誤差。転移点近傍では特異値の打ち切りによる誤差が大きくなる。

このように、 $\mathcal{M}^{(n)}, \mathcal{M}'^{(n)}$ の特異値の減衰速度、あるいは特異値の縮退は HOTRG の近似精度と直結す

^{*15} 転移点近傍で特異値の減衰が遅くなることは転送行列法による議論からも理解することができる (付録 D 参照)。

る要因となるが、逆に特異値の縮退現象を利用して模型の転移点の推定を行うことができる [41]。いま、式 (3.2.28) で定義した A を用いて、

$$X := \frac{(\text{Tr}[A])^2}{\text{Tr}[A^2]} \quad (3.2.34)$$

なる量を考えることにする。HOTRG による繰り込みを十分な回数行った場合、この X は $T^{(n)}$ の行列表示における最大特異値の縮退度を与えている。Ising 模型の場合、 $T > T_c$ では \mathbb{Z}_2 対称性によって真空はユニークに定まるから $X \approx 1$ が成り立ち、 $T < T_c$ では \mathbb{Z}_2 対称性が自発的に破れることで真空は二重に縮退するから $X \approx 2$ が成り立つ。この X は HOTRG のアルゴリズムの中で容易に計算できる量なので、有限サイズスケリングを行う際に転移点を推定する上で役に立つ。

最後に、HOTRG の計算コストと高次元への拡張について言及しておこう。2次元系での HOTRG では4階のテンソル $T^{(n)}$ を計算機上で扱う必要があり、式 (3.2.7) (図 3.2.3) のように工夫することで、4階よりも高い階数のテンソルは計算機上で作らなくて済むため、使用するメモリは $O(D_{\text{cut}}^4)$ でスケールする。また、HOTRG の計算過程で最も時間を要するのは式 (3.2.21) (図 3.2.4) の縮約を行う箇所である。図 3.2.4 を見ると、この縮約によって3本の内線と4本の外線を持ったネットワークが現れることから、HOTRG の計算時間は $O(D_{\text{cut}}^7)$ でスケールすることが分かる。3次元系での HOTRG では、

$$T_{xx'yy'zz'} := \sum_{\sigma_i} W(x, \sigma_i) W(x', \sigma_i) W(y, \sigma_i) W(y', \sigma_i) W(z, \sigma_i) W(z', \sigma_i) \quad (3.2.35)$$

を初期テンソルとして、常に6階のテンソルを扱うためメモリのコストは $O(D_{\text{cut}}^6)$ となる。粗視化に際しては、例えば z 軸方向に粗視化を行う場合、

$$\mathcal{T}_{x_1 \otimes x_2 x'_1 \otimes x'_2 y_1 \otimes y_2 y'_1 \otimes y'_2 z z'}^{(n)} := \sum_{\alpha} T_{x_1 x'_1 y_1 y'_1 z \alpha}^{(n)} T_{x_2 x'_2 y_2 y'_2 \alpha z'}^{(n)} \quad (3.2.36)$$

を考えて、 x 軸方向のブロックスピン変換 $U^{(n+1)}$ と y 軸方向のブロックスピン変換 $V^{(n+1)}$ を決定し、それぞれの軸方向のボンド自由度を打ち切りながら粗視化を進める (図 3.2.8)。 $U^{(n+1)}$ および $V^{(n+1)}$ の決定方法は2次元の HOTRG のときと同様である。このような粗視化を x, y, z 軸についてそれぞれ n 回ずつ行えば、

$$Z \approx \text{Tr} \left[T^{(3n)} \right] \quad (3.2.37)$$

によって立方体上の分配関数を計算することができる。図 3.2.8 の縮約の実行に最も時間がかかり、計算時間は $O(D_{\text{cut}}^{11})$ でスケールする。4次元系での HOTRG では、メモリのコストは $O(D_{\text{cut}}^8)$ 、計算時間は $O(D_{\text{cut}}^{15})$ でスケールする。4次元の場合は3種類のブロックスピン変換を決定する必要がある (図 3.2.9)。4次元の超立方体上の分配関数は、各軸方向に交互に繰り込みを行うことで、

$$Z \approx \text{Tr} \left[T^{(4n)} \right] \quad (3.2.38)$$

として得ることができる。

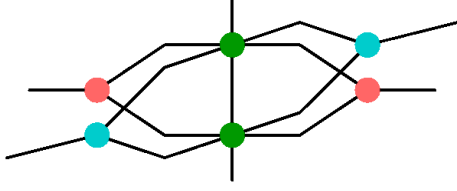


図 3.2.8 3次元系における HOTRG での粗視化．各粗視化のステップごとに 2 種類のブロックスピン変換（赤色，青色のテンソル）を決定する．

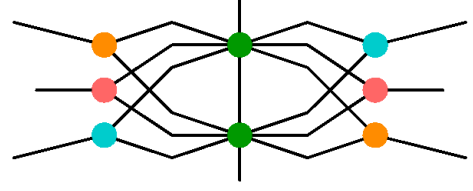


図 3.2.9 4次元系における HOTRG での粗視化．各粗視化のステップごとに 3 種類のブロックスピン変換（赤色，青色，橙色のテンソル）を決定する．

3.3 不純物テンソル法

テンソルネットワーク法では，系統的なテンソルの粗視化によって分配関数を評価することができる．そのため，得られた分配関数に対して温度，あるいは外部磁場に関する数値微分を実行すれば，内部エネルギーや比熱，磁化や磁化率を得ることができる．一方で，数値微分を行わずにテンソルネットワーク法の枠内で各種の熱力学量を計算する方法論として，不純物テンソル法（impure-tensor method）の有用性も研究されている^{*16}．

不純物テンソル法の基本的な考え方は非常にシンプルである．例えば， d 次元の Ising 模型の内部エネルギーを計算するには，ハミルトニアンの期待値，

$$\langle H \rangle := - \frac{\sum_{\{\sigma\}} \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \exp \left[\beta \sum_{\langle kl \rangle} \sigma_k \sigma_l \right]}{\sum_{\{\sigma\}} \exp \left[\beta \sum_{\langle kl \rangle} \sigma_k \sigma_l \right]} \quad (3.3.1)$$

を計算すればよい．ここで，分母の分配関数は通常のテンソルネットワーク法で計算ができる．問題は分子の計算だが，不純物テンソル法では，分子に対してもテンソルネットワーク表示を構成し，分配関数の計算のときと同様に逐次テンソルの粗視化を実行していくのである．いま，格子点上の特定の近接サイト対 $\langle ij \rangle$ に注目して，

$$\langle H_{ij} \rangle := - \frac{\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i \sigma_j \exp \left[\beta \sum_{\langle kl \rangle} \sigma_k \sigma_l \right]}{\sum_{\{\sigma\}} \exp \left[\beta \sum_{\langle kl \rangle} \sigma_k \sigma_l \right]} \quad (3.3.2)$$

を考える．分配関数のテンソルネットワーク表示を作ったときと同様に，転送行列に対する特異値分解を行って，階数 $2d$ のテンソルを定義する．このとき， i サイトおよび j サイト以外のサイト上では，

$$T_{x_1 x'_1 \dots x_d x'_d} := \sum_{\sigma_k} W(x_1, \sigma_k) W(x'_1, \sigma_k) \dots W(x_d, \sigma_k) W(x'_d, \sigma_k) \quad (3.3.3)$$

^{*16} 「不純物テンソル法（impure-tensor method）」というネーミングから，不純物問題（近藤問題）における Wilson の実空間数値繰り込み群を連想するかもしれないが，方法論としての類似性は少ない．以下で見るように，実際の不純物テンソル法は転送行列法を使った期待値の計算手法に類するものである（付録 D 参照）．なお，Wilson の数値繰り込み群による近藤問題の解析については Wilson 自身によるレビュー [42] がある．また，Wilson の数値繰り込み群以降の実空間繰り込み群手法の発展の経緯については [43] を参照されたい．

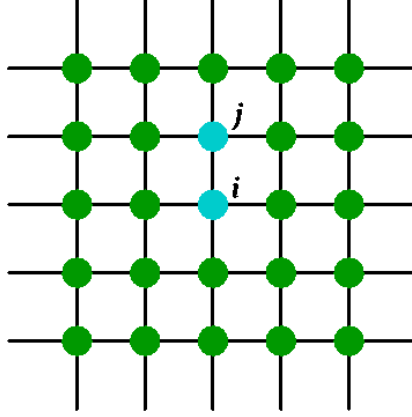


図 3.3.1 $\langle H_{ij} \rangle$ の分子に対するテンソルネットワーク表示. i サイトおよび j サイト上では不純物テンソル S (青色) が定義され, その他のサイト上では T (緑色) が定義される. なお, 周期境界条件を課しているので, 左右および上下のテンソルの脚は互いに縮約されているものとする.

のテンソルを定義すればよく, $i(j)$ サイト上では,

$$S_{x_1 x'_1 \dots x_d x'_d} := \sum_{\sigma_{i(j)}} \sigma_{i(j)} W(x_1, \sigma_{i(j)}) W(x'_1, \sigma_{i(j)}) \dots W(x_d, \sigma_{i(j)}) W(x'_d, \sigma_{i(j)}) \quad (3.3.4)$$

のテンソルを定義する. この $S_{x_1 x'_1 \dots x_d x'_d}$ を不純物テンソルと呼ぶ. すると, 式 (3.3.2) の分子は, 図 3.3.1 のようなネットワークで表示することができる. いま, 周期境界条件を課すことにすると, 系の並進対称性から,

$$\langle H \rangle = \sum_{\langle ij \rangle} \langle H_{ij} \rangle = dN \langle H_{ij} \rangle \quad (3.3.5)$$

となる. ただし, N はサイトの総数である. したがって, 単位サイトあたりの内部エネルギー E は,

$$E := \frac{1}{N} \langle H \rangle = d \langle H_{ij} \rangle \quad (3.3.6)$$

で与えられる. すなわち, 内部エネルギー密度を求めるためには, 特定の近接サイト対 $\langle ij \rangle$ での相互作用の統計平均 $\langle H_{ij} \rangle$ さえ求めてしまえばよいのである.

実際に HOTRG で $\langle H_{ij} \rangle$ を計算するには, 分母の分配関数を計算すると同時に, 図 3.3.1 のネットワークに対しても HOTRG による粗視化を実行しなければならない. 一般の次元の場合でも同様なので, ここでは 2 次元の場合を例として扱う. 分母の分配関数は, 通常の HOTRG で計算を行う. 一方, 分子側のネットワークに対しては, まず, 1 回目の繰り込みでは,

$$S_{x_1 \otimes x'_1 x_2 \otimes x'_2 y y'}^{(0)} := \sum_{\alpha} S_{x_1 x'_1 y \alpha}^{(0)} S_{x_2 x'_2 \alpha y'}^{(0)} \quad (3.3.7)$$

を定義して, ブロックスピン変換 $U^{(0)}$ により,

$$S_{x x' y y'}^{(1)} := \sum_{x_1 \otimes x'_1, x_2 \otimes x'_2} U_{x_1 \otimes x'_1 x}^{(1)} S_{x_1 \otimes x'_1 x_2 \otimes x'_2 y y'}^{(0)} U_{x_2 \otimes x'_2 x'}^{(1)} \quad (3.3.8)$$

を構成する．一方, $n \geq 1$ では,

$$\mathcal{S}_{x_1 \otimes x'_1 x_2 \otimes x'_2 y y'}^{(n)} := \sum_{\alpha} \mathcal{S}_{x_1 x'_1 y \alpha}^{(n)} T_{x_2 x'_2 \alpha y'}^{(n)} \quad (3.3.9)$$

を定義する．続くブロックスピン変換は 1 回目と同様で,

$$\mathcal{S}_{x x' y y'}^{(n+1)} := \sum_{x_1 \otimes x'_1, x_2 \otimes x'_2} U_{x_1 \otimes x'_1 x}^{(n+1)} \mathcal{S}_{x_1 \otimes x'_1 x_2 \otimes x'_2 y y'}^{(n)} U_{x_2 \otimes x'_2 x'}^{(n+1)} \quad (3.3.10)$$

とすればよい．問題はブロックスピン変換 $U^{(n+1)}$ の決め方であるが^{*}, 実用上, 分母の分配関数を計算する際に HOTRG で選定される $U^{(n+1)}$, すなわち,

$$\mathcal{T}_{x_1 \otimes x'_1 x_2 \otimes x'_2 y y'}^{(n)} := \sum_{\alpha} T_{x_1 x'_1 y \alpha}^{(n)} T_{x_2 x'_2 \alpha y'}^{(n)} \quad (3.3.11)$$

の高次特異値分解から得られるユニタリ行列をそのまま使いまわすことが多い．もちろん, 分配関数の計算とは独立に, 真面目に $\mathcal{S}^{(n)}$ に対する高次特異値分解を実行して, 2 種類のユニタリ行列を求め, HOTRG の方法論に従って $U^{(n+1)}$ を新たに決定していてもよいが, 必要な計算コストは大きくなる．また, $\mathcal{S}^{(n)}$ に対する高次特異値分解から $U^{(n+1)}$ を決めなおして内部エネルギー E を計算しても, $\mathcal{T}^{(n)}$ の高次特異値分解から決まる $U^{(n+1)}$ を使いまわした場合の結果と比べ, コストの割に計算精度が向上しないと考えられている．

分母の分配関数の計算に用いられるブロックスピン変換 $U^{(n+1)}$ を使いまわして分子のネットワークを粗視化する際の注意点としては, 全サイト数 $N = 2^n$ の系の内部エネルギー E を,

$$\langle H_{ij} \rangle \approx \frac{\text{Tr} [\mathcal{S}^{(n)}]}{\text{Tr} [\mathcal{T}^{(n)}]} \quad (3.3.12)$$

から与えるよりも,

$$\langle H_{ij} \rangle \approx \frac{\text{Tr} [\mathcal{S}^{(n-1)}]}{\text{Tr} [\mathcal{T}^{(n)}]} \quad (3.3.13)$$

を使って計算した方が繰り込み回数を増やしていったときの内部エネルギー密度 E の収束がよくなるということが挙げられる．これは $U^{(n+1)}$ が $\mathcal{S}^{(n)}$ の高次特異値分解から決定されたものではないため, 当然と言えば当然である．ただし, 式 (3.3.12) と式 (3.3.13) のいずれにしても, 本来は $\mathcal{T}^{(n)}$ の粗視化に最適なブロックスピン変換 $U^{(n+1)}$ を使って n 回目までの計算を行っているため, 分子そのものに厳格な物理的意味があるとは考えにくく, 実際, 繰り込み回数を増やしても分配関数の計算のときほどの収束性は認められないことが多い^{*17}．式 (3.3.13) を用いて計算した 2 次元 Ising 模型の内部エネルギー密度 E を図 3.3.2 に示す．

以上が不純物テンソル法に基づく Ising 模型の内部エネルギー密度の計算手順である．他の熱力学量についても, 式 (3.3.1) のように統計平均の表式から出発して, 分子に対するテンソルネットワーク表示が構成

^{*17} 不純物テンソル法で計算される物理量は, 繰り込み回数を増やしたからといって, 倍精度の範囲で繰り込み回数に依らなくなる, というような強い収束性を示さないことがほとんどである．ある桁数以降で振動的な挙動が認められる場合が多い．

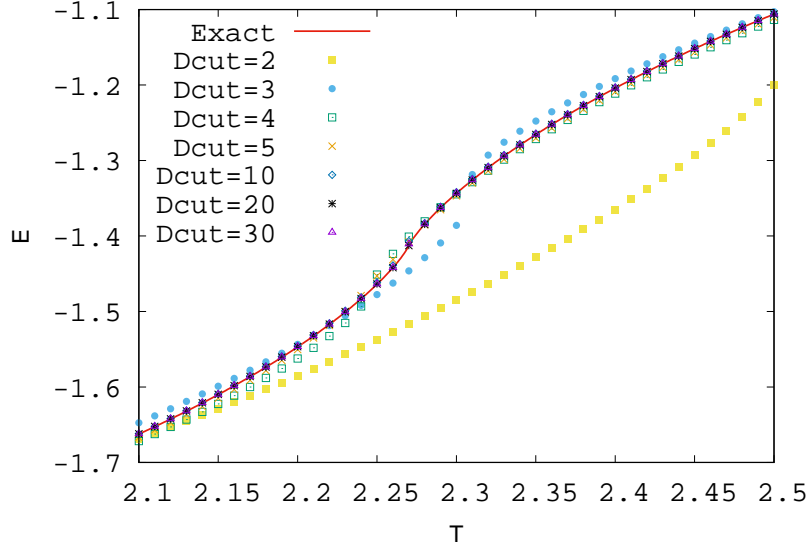


図 3.3.2 D_{cut} を上げていったときの厳密解への近づき方. 赤い実線が厳密解であり, すでに $D_{\text{cut}} = 10$ でかなり厳密解に近い結果を再現していることが分かる. ここでは x 軸方向と y 軸方向にそれぞれ 30 回ずつ HOTRG による繰り込みを行った.

できれば不純物テンソル法で計算することができる. 例えば,

$$\langle \sigma \rangle := \frac{\sum_{\{\sigma\}} \sum_i \sigma_i \exp \left[\beta \sum_{\langle kl \rangle} \sigma_k \sigma_l + \beta h \sum_i \sigma_i \right]}{\sum_{\{\sigma\}} \exp \left[\beta \sum_{\langle kl \rangle} \sigma_k \sigma_l + \beta h \sum_i \sigma_i \right]} \quad (3.3.14)$$

から磁化 m が得られる. この場合も,

$$\langle \sigma_i \rangle := \frac{\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i \exp \left[\beta \sum_{\langle kl \rangle} \sigma_k \sigma_l + \beta h \sum_i \sigma_i \right]}{\sum_{\{\sigma\}} \exp \left[\beta \sum_{\langle kl \rangle} \sigma_k \sigma_l + \beta h \sum_i \sigma_i \right]} \quad (3.3.15)$$

を考えれば, 周期境界条件と系の並進対称性から

$$m := \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \langle \sigma \rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \langle \sigma_i \rangle \quad (3.3.16)$$

となるため, 特定の i サイト上だけでスピン変数の期待値を計算すれば, 即座に系の磁化が分かる. また, 内部エネルギーのときとは異なり, $n \geq 0$ で, 式 (3.3.9) を使ってよい.

内部エネルギーや磁化のように, 分配関数 (の対数) をパラメタの 1 階微分で得られるような熱力学量については, 比較的容易に不純物テンソル法で計算することができる. 一方で, 比熱や磁化率のように, 2 階微分から求まるような物理量に関しては, 不純物テンソル法でも実用上の困難が伴う. 例えば, Ising 模型

の比熱は式 (3.3.6) を温度で微分して,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta^2 d} C &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \langle H_{ij} \rangle \\
&= \frac{\sum_{\{\sigma\}} \sum_{\langle kl \rangle} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l \exp \left[\beta \sum_{\langle mn \rangle} \sigma_m \sigma_n \right]}{\sum_{\{\sigma\}} \exp \left[\beta \sum_{\langle mn \rangle} \sigma_m \sigma_n \right]} \\
&\quad - \frac{\left(\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i \sigma_j \exp \left[\beta \sum_{\langle mn \rangle} \sigma_m \sigma_n \right] \right) \left(\sum_{\{\sigma\}} \sum_{\langle kl \rangle} \sigma_k \sigma_l \exp \left[\beta \sum_{\langle mn \rangle} \sigma_m \sigma_n \right] \right)}{\left(\sum_{\{\sigma\}} \exp \left[\beta \sum_{\langle mn \rangle} \sigma_m \sigma_n \right] \right)^2} \\
&= \sum_{\langle kl \rangle} (\langle H_{ij} H_{kl} \rangle - \langle H_{ij} \rangle \langle H_{kl} \rangle) \tag{3.3.17}
\end{aligned}$$

となる. 式 (3.3.17) から分かるように, 近接サイト対 $\langle ij \rangle$ は固定されているが, $\langle kl \rangle$ の方は全近接サイト対に関する足し上げが必要である. つまり, $\langle H_{ij} H_{kl} \rangle$ を計算するためには, $\langle ij \rangle$ を固定した上で $\langle kl \rangle$ を格子上的あらゆる近接サイト対に配置して, その配置ごとのネットワーク表示を構成し, すべてのネットワークに対する粗視化を実行してから, それらの足し上げを行う必要がある.

このように, 不純物テンソル法で素朴に一般の高次モーメントの計算を行おうとすると, 複数の不純物テンソルの配置の仕方の総数だけ異なるテンソルネットワークを考えなければならない. そのため, 高次のモーメントになればなるほど, 不純物テンソルの配置の仕方が増大し, 取り扱いが困難になってしまう. そこで, 例えば $S^{(n)}$ のアップデートの仕方を変更することで, 埋め込み方に応じたネットワークを個別に粗視化する手間を回避するアルゴリズムなども提案されている [44].

4 4次元 Ising 模型の比熱の解析

以下で議論する熱力学量は，特に断りがない限り単位体積当たりのものである．すなわち，一辺 N の超立方格子上での熱力学関数 \mathcal{O} を，

$$\mathcal{O} := \frac{1}{N^4} \mathcal{O} \quad (4.0.1)$$

の密度で議論する．まず，物理量の D_{cut} に関する収束性を確認するために 40 回の HOTRG による繰り込みで得られた $\ln Z$ を図 4.0.1 に示す．本研究では $D_{\text{cut}} \in [2, 12]$ の範囲で通常の HOTRG による分配関数の評価を実施した．

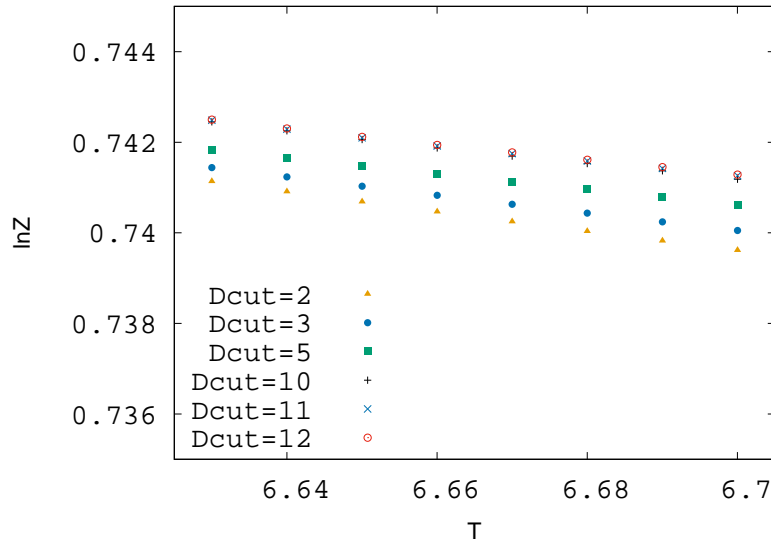


図 4.0.1 HOTRG で求めた単位体積あたりの $\ln Z(T, D_{\text{cut}}, N = 1024)$. $D_{\text{cut}} \geq 11$ の結果はよく一致しており， D_{cut} 依存性がかなり小さくなっていると考えられる．

$D_{\text{cut}} \geq 11$ の値は図示した温度領域ではよく一致しているように見えるが，例えば，

$$\ln Z(T = 6.66, D_{\text{cut}} = 11, N = 1024) = 0.74191799369909806, \quad (4.0.2)$$

$$\ln Z(T = 6.66, D_{\text{cut}} = 12, N = 1024) = 0.74194115216307699 \quad (4.0.3)$$

などとなっており，倍精度実数の範囲での収束には至っていない．以下では $D_{\text{cut}} = 12$ の場合に着目する．式 (3.2.34) で定義したテンソルの最大固有値の縮退度の測定により， $D_{\text{cut}} = 12$ では $[6.65, 6.66]$ の間に転移点が存在することが分かった (図 4.0.2)．

そこで， X から推定される転移点の存在範囲の近傍で $\ln Z$ を計算し，

$$E(T, D_{\text{cut}}, N) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(T, D_{\text{cut}}, N) \quad (4.0.4)$$

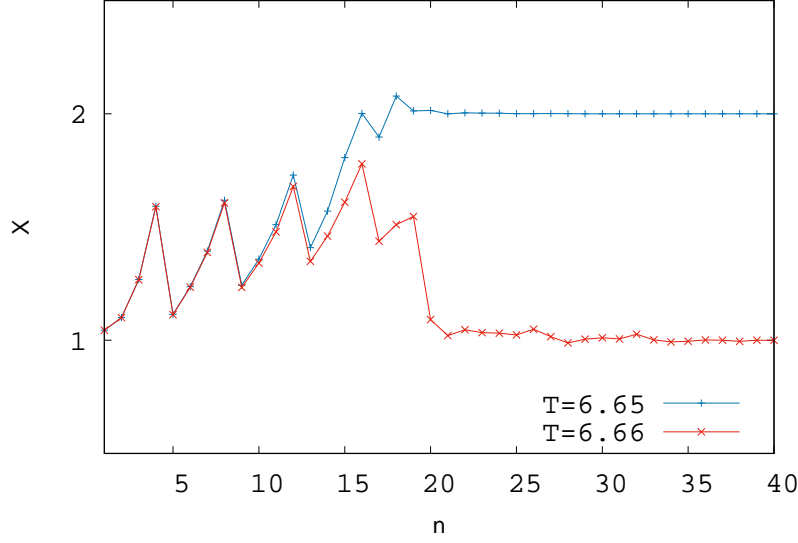


図 4.0.2 テンソルの最大固有値の縮退度を測定し、 $D_{\text{cut}} = 12$ では $[6.65, 6.66]$ の間に転移点が存在すると推定できる． n は HOTRG による繰り込みの回数なので、 $N^4 = 2^n$ の関係にある．

で与えられる内部エネルギーを 2 次精度の中心差分から求めた．一辺 N の超立方体での内部エネルギーを $N \in [32, 1024]$ の範囲で求めた結果が図 4.0.3 である．いずれの体積の場合でも

$$E(T = 6.68, D_{\text{cut}} = 12, N) > E(T = 6.69, D_{\text{cut}} = 12, N) \quad (4.0.5)$$

となっているが、これは $D_{\text{cut}} = 12$ の数値微分では転移点近傍の内部エネルギーの挙動を捉え切れていないことを示唆している．低温側から図 4.0.3 の結果を見ていくとあたかも $T \approx 6.67$ に転移点があるように思えるが、これは縮退度 X から推定される転移点の存在範囲には入っていない．つまり、縮退度 X による推定が正しいとするならば図 4.0.3 における $T \geq 6.67$ の結果を積極的に信頼することは難しい．実際、2 次元 Ising 模型で確認したように、HOTRG では非臨界領域に比べて臨界領域での誤差が大きくなることも以上の考察を裏付ける．また、別の解釈としては、温度の刻み幅に起因した数値微分時の誤差が影響している可能性も考えられる．計算コストの関係上、 $D_{\text{cut}} = 11$ の場合に刻み幅をより細かくして数値微分の精度が向上するか検討したが、刻み幅を小さくし過ぎるとかえって誤差が増大してしまい、そのため数値微分によって内部エネルギーを精度よく得るためには $D_{\text{cut}} > 12$ の HOTRG を実施する必要があると思われる．

比熱の温度依存性および体積依存性を調べるために、

$$C(T, D_{\text{cut}}, N) = \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z(T, D_{\text{cut}}, N) \quad (4.0.6)$$

を直接数値微分で評価するとさらに大きな誤差が生じてしまう．そこで、作業仮設として比熱のピークの値を $C_{\text{max}}(D_{\text{cut}}, N)$ とし、転移点近傍では、

$$C(T, D_{\text{cut}}, N) \approx C_{\text{max}}(D_{\text{cut}}, N) + R(T - T_c(N))^2 \quad (4.0.7)$$

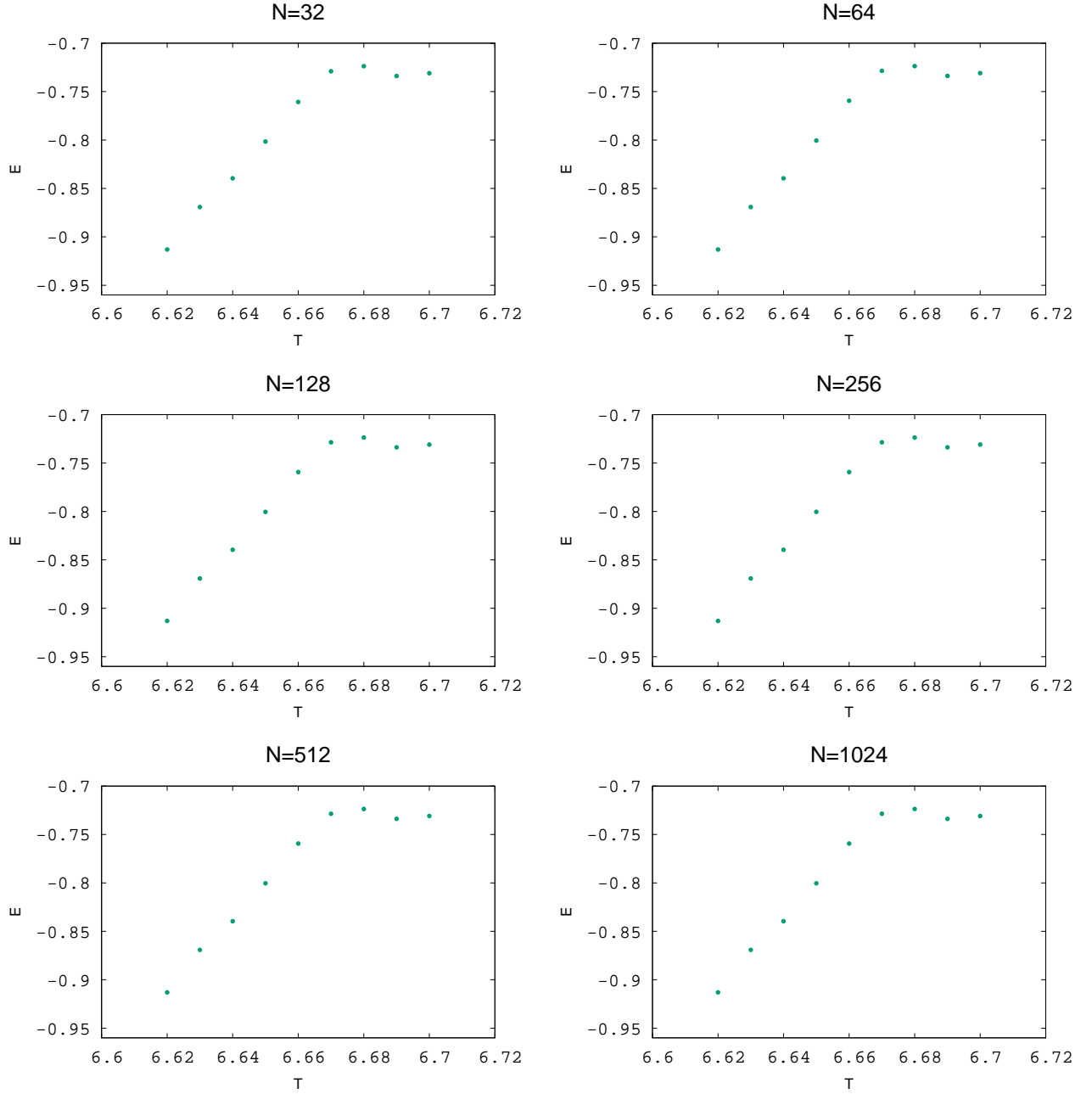


図 4.0.3 体積 N^4 ($N \in [32, 1024]$) の超立方格子における内部エネルギー密度. 図 4.0.2 で示した縮退度 X による転移点の推定を信じると, $T \in [6.67, 6.68]$ のデータを積極的に信頼することは難しい.

がよい近似であるとして, 内部エネルギーを

$$E(T, D_{\text{cut}}, N) \approx P + C_{\text{max}}(D_{\text{cut}}, N)T + \frac{R}{3} (T - T_c(D_{\text{cut}}, N))^3 \quad (4.0.8)$$

の関数形でフィットすることで $C_{\text{max}}(D_{\text{cut}}, N)$ および $T_c(D_{\text{cut}}, N)$ を推定することにした [17].

ただし, 式 (4.0.8) によるフィットはあくまでも十分転移点近傍でないと機能しないため, フィットの範囲には十分注意する必要がある. また, 図 4.0.2 より $n \geq 20$ では縮退度 X による相の区別が有効である

ため、 $N \in [32, 1024]$ では X から推定される転移点の存在領域を信頼し、 $T_c(D_{\text{cut}} = 12, N) \in [6.65, 6.66]$ となるようなフィットを探索した。図 4.0.4 は図 4.0.3 の内部エネルギーのプロットで $T \in [6.62, 6.67]$ の 5 点を式 (4.0.8) でフィットして得られた各種フィッティングパラメタの結果である。いずれの結果もすでに $N \geq 256$ で熱力学極限に達したが、あくまでも $D_{\text{cut}} = 12$ における無限体積極限であることに注意しなければならない。 $T_c(D_{\text{cut}} = 12, N)$ に関しては縮退度 X から推定した転移点の存在領域にフィットのエラーバーも含めて収まっている (図 4.0.5)。

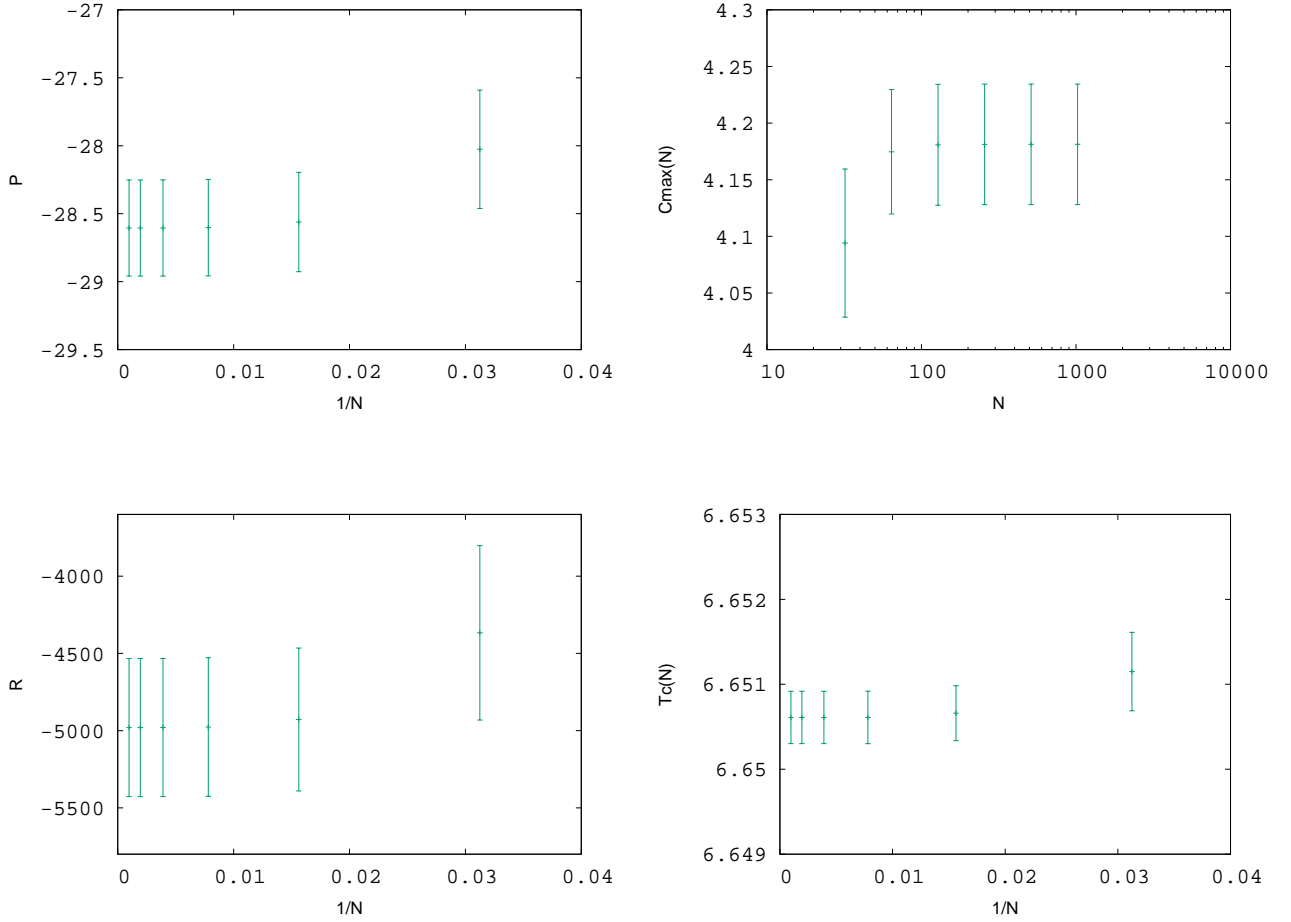


図 4.0.4 各種フィッティングパラメタの結果。

以上のフィッティングにより $N \rightarrow \infty$ での転移点として、

$$T_c(D_{\text{cut}} = 12, N \rightarrow \infty) = 6.65061 \pm 1.25 \times 10^{-6} \quad (4.0.9)$$

を得た。[31] の結果は $\beta_c = 0.1496947 \pm 5 \times 10^{-7}$ であり、図 4.0.5 の $N \rightarrow \infty$ における紫の点がそれである。今回の $D_{\text{cut}} = 12$ の HOTRG による結果と比較するとモンテカルロ法の結果は転移点を高温側に見積もっていることになるが、[31] のシミュレーション体積は $N \in [4, 80]$ であり、今回の HOTRG での解析と比べて非常に小さい体積である。そのため、有限体積効果に起因してやや高温側に転移点が推定されているのではないかと考えられる。

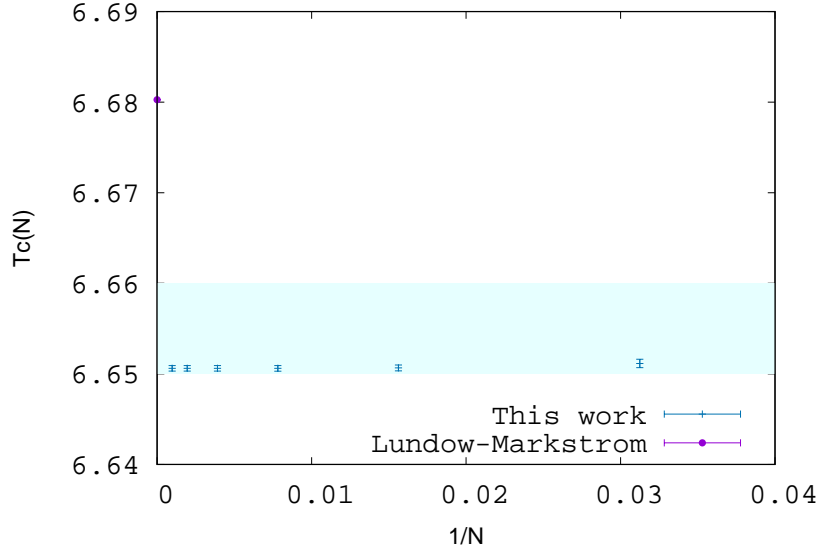


図 4.0.5 式 (4.0.8) による内部エネルギーのフィットから推定した $T_c(D_{\text{cut}} = 12, N)$. シアンの背景が縮退度 X から推定された転移点の存在領域. フィットによるエラーバーもこの領域内に含まれている. なお、紫は有限サイズスケールリングから推定された $N \rightarrow \infty$ におけるモンテカルロ法の結果 [31] である.

一方、図 4.0.4 のいずれの結果も体積依存性が非常に小さいため、今回の解析から各種の臨界指数を推定することは難しい. 式 (2.4.18) の摂動繰り込み群で求めた比熱の対臨界指数についての対数依存性が存在するならば、 $C_{\text{max}}(N) \sim \log^{1/3} N$ の体積依存性を示すはずであるが、図 4.0.4 からはそのような傾向は見ることができない. 今回の HOTRG の解析結果において体積依存性が非常に弱いということは、有限サイズスケールリングの議論から、システムサイズ N の相関長 ξ_N が

$$\xi_N(t, D_{\text{cut}} = 12) \ll N \quad (4.0.10)$$

であることを意味している. この結果に対する解釈としてはいくつかの可能性がある. 1 つは今回の解析では $|t| \ll 1$ よりも広い温度領域を見ているというものである. 事実、今回の結果は $T \in [6.62, 6.67]$ の 5 点分のみの内部エネルギーから得られたものであり、この温度範囲による解析の妥当性を検証するためには温度に関する解像度をさらに細かくしてみる必要がある. ただし、既に言及したように、解像度を高くしてデータの精度が向上する保証はなく、それよりはより大きなボンド次元での HOTRG を行う方が本質的に重要だと考えられる. 図 4.0.1 では自由エネルギーの D_{cut} 依存性を確認し、 $D_{\text{cut}} = 11$ と $D_{\text{cut}} = 12$ では 4 桁目までの収束が実現していたが、数値微分で得られた内部エネルギーのレベルでは収束性が弱まっている (図 4.0.6). すなわち、数値微分から十分な精度の内部エネルギーを議論するためにはより大きなボンド次元で HOTRG による繰り込みを行う必要がある. この場合、現実的な計算コスト内で高い精度の有限サイズスケールリングを実現するためには $\xi_N(t, D_{\text{cut}})$ が D_{cut} を上げることでそれなりに早く増大しなければならないが、内部エネルギーレベルで D_{cut} に関する収束が見えれば $|t| \ll 1$ の温度領域上では $\xi_N(t, D_{\text{cut}}) \gg N$ となることが期待される.

このように、HOTRG で求めた自由エネルギーに対する数値微分から臨界指数を求めるためには $D_{\text{cut}} > 12$ のボンド次元の下、そのボンド次元で適切な解像度を選択する必要がある、その試行錯誤の過程も加味すると計算コストに見合った結果を積極的に期待することが難しい。そこで、前章で導入した不純物テンソル法が数値微分の困難を解決する方策となり得る。不純物テンソル法ならばある温度における内部エネルギーを直接計算できるため、設定したボンド次元に対する適切な解像度の選択という数値微分上の困難が不在である。また、前章で導入した不純物テンソル法の計算コストは通常 HOTRG のおよそ 2 倍であるが、数値微分では内部エネルギーを 1 点得るために最低でも 2 点で HOTRG を実行する必要があるため、計算コストも十分に現実的である。実際に、数値微分と不純物テンソル法の計算結果の安定性を比較するために、 $D_{\text{cut}} = 7$ の 3 次元 Ising 模型の内部エネルギーを求めた結果が図 4.0.7 である。2 次精度の数値微分と比較しても不純物テンソル法の計算結果の安定性が伺える。また、 D_{cut} に関する収束性も 3 次元 Ising 模型で検証し、高次元系への有効性が確認された (図 4.0.8)。

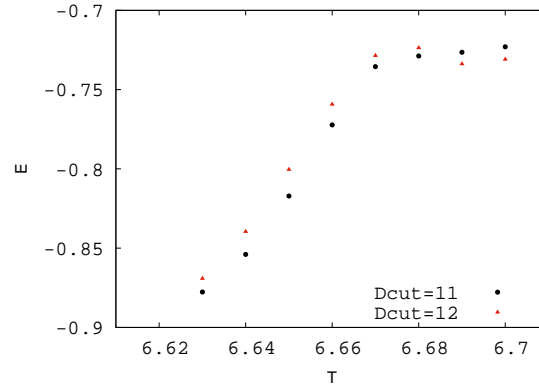


図 4.0.6 数値微分で得られた内部エネルギーの D_{cut} 依存性。自由エネルギーレベルではよく収束していてもその 1 階微分に関しては収束性が弱くなる。

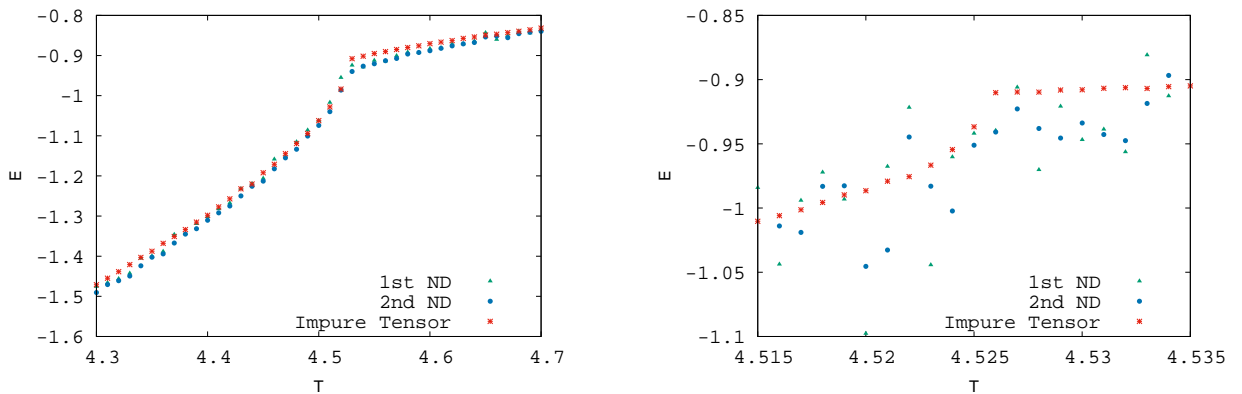


図 4.0.7 1 次および 2 次精度の差分と不純物テンソル法の比較。左図は $\Delta T = 0.01$ の場合。この解像度では 1 次精度の差分でもよい結果が得られている。一方、右図は $\Delta T = 0.001$ の場合。この解像度では 2 次精度の差分でも計算結果が不安定だが不純物テンソル法の結果はかなり安定的であることが分かる。

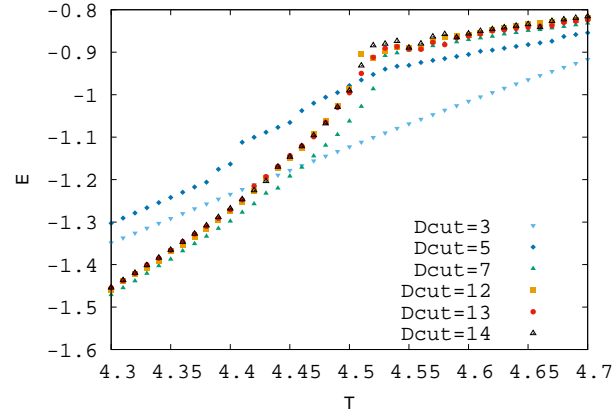


図 4.0.8 $N = 2^{13}$ サイズにおける不純物テンソル法で求めた 3 次元 Ising 模型の内部エネルギー．転移点より少し高温側では $D_{\text{cut}} \geq 12$ の不純物テンソル法による計算がやや不安定化しているものの全体的に滑らかなカーブが描けている．

最後に、本論文の発表段階では $D_{\text{cut}} = 10$ までの不純物テンソル法による 4 次元 Ising 模型の内部エネルギーの計算が完了したので、途中経過ではあるがその結果を掲載しておく（図 4.0.9）．

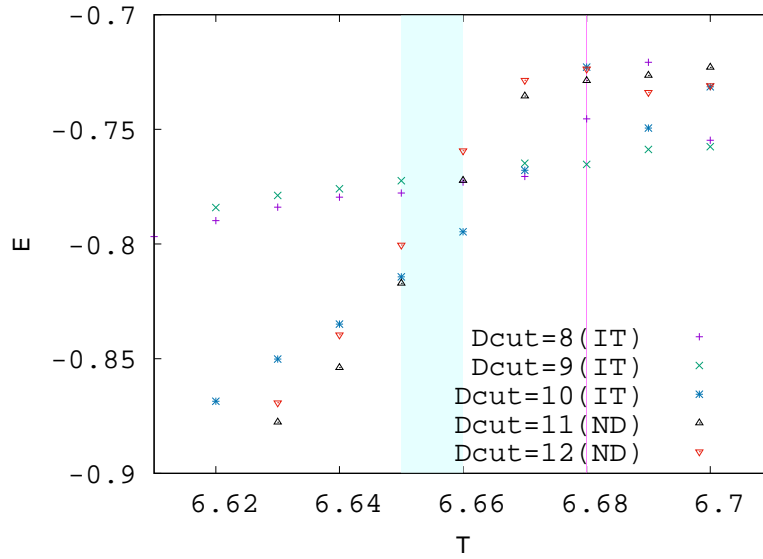


図 4.0.9 $D_{\text{cut}} \leq 10$ が不純物テンソル法で得られた内部エネルギー． $D_{\text{cut}} \geq 11$ は図 4.0.6 の数値微分による結果である．いずれも $N = 1024$ の場合である．シアン背景が $D_{\text{cut}} = 12$ の X から推定される転移点の存在領域であり、紫のラインがモンテカルロ法による転移点である．

5 結論と今後の展望

本研究では、テンソルネットワーク法的一种である HOTRG を 4 次元 Ising 模型に応用した。内部エネルギーから転移点と比熱のピークを調べ、局所テンソルの最大固有値の縮退度から推定される転移点と無矛盾な結果を得ることができた。また、転移点に関してはモンテカルロ法による計算結果 [31] と比較できる値が得られた。一方で、比熱の対数依存性は本研究では確認されなかったが、これは比熱の議論をする上で十分な精度のデータが $D_{\text{cut}} = 12$ の数値微分からは得られなかったと考えるべきである。事実、4 次元の HOTRG で有限サイズスケリングを実現するためには今回の $D_{\text{cut}} = 12$ の数値微分では不十分であった。HOTRG では容易に大きな体積の計算が実現できるため、有限体積効果を見るためには相関長 $\xi_N(D_{\text{cut}})$ が十分に大きな領域での議論が不可欠であるが、有限のボンド次元に起因して相関長が $\xi_N(D_{\text{cut}} \ll \infty) \ll \xi_N(D_{\text{cut}} \rightarrow \infty)$ で抑えられる可能性を十分に考慮しなければならない。この点については、内部エネルギーに対するフィッティングから比熱に関する情報を引き出す上では、少なくとも内部エネルギーのボンド次元に関する収束を確認することが必須であると考えられる。なお、本論文で議論した $D_{\text{cut}} \geq 11$ の 4 次元での HOTRG による計算結果はすべて並列計算によって得られたものであり、少なくとも現段階で 4 次元系に対するテンソルネットワーク法として HOTRG から意味のある結果を得るためには並列化による大規模計算が不可欠である。

一方で、不純物テンソル法を用いれば同じボンド次元であっても数値微分よりもよい精度で内部エネルギーを決定できる可能性が高い。これは不純物テンソル法には数値微分における適切な解像度の選択という問題が伴わないからである。現在、不純物テンソル法の並列計算コードを開発しており、まもなく $D_{\text{cut}} = 12$ の計算がスタートできる見込みである。そこで、まずは $D_{\text{cut}} = 12$ の不純物テンソル法で求めた内部エネルギーに対して、本論文で行ったのと同様の解析を実施し、改めて転移点と比熱のピーク値に対する有限サイズスケリングの議論が可能であるかを調べる必要がある。その次の段階としては、 $D_{\text{cut}} = 13, 14$ の不純物テンソル法の計算を行い、内部エネルギーのボンド次元に関する収束性を調べる事が挙げられる。本研究で得られた結果から推察するに、内部エネルギーの D_{cut} に関する収束はもう間もなく見られるのではないかと思われる。

テンソルネットワーク法の高次元系への適用としては、最も簡単な Ising 模型がその第一段階である。Ising 模型のような離散自由度を持つモデルに対する適用が達成されれば、その次のステップとしては連続自由度を持つ模型への応用が考えられる。連続自由度を持つ模型に対するテンソルネットワーク表示の構成においては、Boltzmann の重みを適切な直交関数で展開する必要があるが、例えば ϕ^4 理論に対するテンソルネットワーク表示の構成とその実証計算は 2 次元系で既に行われている [7, 8]。そこで、これらの実証計算が 4 次元 ϕ^4 理論へ拡張できるかどうかは次の重要な課題として挙げられる。各種物理量の評価においても、本研究で導入した不純物テンソル法を連続自由度を持つ場の理論へ拡張する必要がある。

謝辞

本研究を進めるにあたって、指導教官の藏増嘉伸教授から数多くの助言を頂きました。厚く御礼申し上げます。また、HOTRG のコーディングに関する質問やバグのチェックなどに対応して下さった共同研究者の吉村友佑研究員に深く感謝致します。本研究の $D_{\text{cut}} \geq 11$ の HOTRG による計算には、同じく共同研究者である山下巧研究員が開発された並列計算コードを使用させて頂きました。また、金沢大学素粒子・宇宙・理論物理研究室 D1 の大羽秀明さんとは HOTRG による解析を進める上で有益な議論をさせて頂きました。本研究室 D3 の鈴木遊さんには、私が M1 のときの自主ゼミを指導して下さい、発表スライドの作成にあたっても数多くのアドバイスを頂きました。なお、本研究における数値計算には、筑波大学計算科学研究センターの大規模メニーコア実験システム COMA および最先端共同 HPC 施設が運用する Oakforest-PACS システムを利用させて頂きました。

最後に、修士課程の 2 年間に渡ってご指導して下さいった本研究室のスタッフの皆様、先輩方、一緒にゼミを行ってきた同期や後輩の皆様へ深謝致します。そして、経済的にも精神的にも日々支えてくれている家族に感謝します。

付録 A 格子上の ϕ^4 理論と Ising 模型

A.1 数学的な対応

d 次元の格子上的 $O(N)$ ϕ^4 理論の作用に対して、結合定数と場の成分数 N だけに依存した定数項を付与することで、 $O(N)$ ϕ^4 理論の結合定数を無限大とする極限から d 次元の Ising 模型を数学的に構成することができる。鍵となるのは、正規分布関数の分散をゼロとする極限が δ 関数を与えるということである。 d 次元の格子上の $O(N)$ ϕ^4 理論の Boltzmann の重みは、

$$\exp \left[- \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^d |\phi(\mathbf{n} + \hat{\mu}) - \phi(\mathbf{n})|^2 \right] F[\phi^2] \quad (\text{A.1.1})$$

と書ける。ただし、 $|\cdot|$ は \mathbb{R}^N のノルムであり、 $F[\phi^2]$ は、

$$f(\phi^2) := \exp \left[-\frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda \phi^4 + c(\lambda, N) \right] \quad (\text{A.1.2})$$

を用いて、

$$F[\phi^2] := \prod_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f(\phi(\mathbf{n})^2) \quad (\text{A.1.3})$$

で定義される汎関数である。ここに、 m^2 および λ はともに無次元化されたパラメタとする。 $c(\lambda, N)$ は結合定数 λ とスカラー場 ϕ の成分数 N に依存するが、場 ϕ には依存していないため定数項であり、式 (A.1.1) の Boltzmann の重みで計算される物理量の期待値は $c(\lambda, N)$ のとり方には依らない。いま、

$$e^{c(g, N)} = \sqrt{\frac{\lambda}{4\pi}} \exp \left[-\frac{1}{4} \lambda N^2 \right] \quad (\text{A.1.4})$$

となるような定数 $c(\lambda, N)$ を選ぶことにする。指数関数の前にかかっている因子は、Gauss 積分、

$$\int dx \exp \left[-\frac{\lambda}{4} (x - a)^2 \right] \quad (\text{A.1.5})$$

の逆数であり、以下で見るように、 $\lambda \rightarrow \infty$ の極限を取るために必要な係数になる。ここで、

$$m^2 = -\lambda N \quad (\text{A.1.6})$$

の場合を考えると、

$$f(\phi^2) = \sqrt{\frac{\lambda}{4\pi}} \exp \left[-\frac{\lambda}{4} (\phi^2 - N)^2 \right] \quad (\text{A.1.7})$$

となる。この条件下で $\lambda \rightarrow \infty$ の極限を考えれば、

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\phi^2) = \delta(\phi^2 - N) \quad (\text{A.1.8})$$

のような δ 関数が得られる。結合定数を無限大とする極限によって、スカラー場 ϕ のノルムに関する制限が課されたことになる。すなわち、汎関数 $F[\phi^2]$ は各格子点上の場合 $\phi(\mathbf{n})$ に対して、

$$F[\phi^2] = \prod_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \delta(\phi(\mathbf{n})^2 - N) \quad (\text{A.1.9})$$

の制限を与え、 $N = 1$ の場合が Ising 模型となる。実際、式 (A.1.1) は、

$$\prod_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \exp \left[\sum_{\mu=1}^d \phi(\mathbf{n} + \hat{\mu}) \phi(\mathbf{n}) \right] \delta(\phi(\mathbf{n})^2 - 1) \quad (\text{A.1.10})$$

となって、 $\phi(\mathbf{n})$ を Ising 変数 $\sigma_{\mathbf{n}} = \pm 1$ と同一視できるため、Ising 模型の Boltzmann の重みに他ならない。ただし、余分な定数項は無視した。

A.2 有効作用としての対応

d 次元 Ising 模型の有効作用として d 次元 ϕ^4 理論を導くには、Ising 模型の分配関数に対して Hubbard-Stratonovich 変換から連続自由度を導入する。外部磁場の印加された Ising 模型の分配関数は、

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H_{\text{Ising}}} := \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[\beta J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta h \sum_i \sigma_i \right] \quad (\text{A.2.1})$$

である。いま、全サイト数を N とし周期境界条件を課することにする。 $N \times N$ 行列として、

$$\hat{J} := \begin{bmatrix} 0 & \beta J & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta J \\ \beta J & 0 & \beta J & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta J & 0 & \beta J & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta J & 0 & \beta J & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta J & 0 & \beta J \\ \beta J & \cdots & 0 & 0 & 0 & \beta J & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2.2})$$

また N 成分列ベクトルとして、

$$\mathbf{h} := [\beta h \quad \beta h \quad \cdots \quad \beta h]^T, \quad (\text{A.2.3})$$

$$\boldsymbol{\sigma} := [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \cdots \quad \sigma_N]^T \quad (\text{A.2.4})$$

を定義すると、式 (A.2.1) の分配関数は、

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \hat{J} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma} \right] \quad (\text{A.2.5})$$

と書ける。ここで、Hubbard-Stratonovich 変換、

$$\exp \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \hat{J} \boldsymbol{\sigma} \right] = \frac{1}{\sqrt{\det \hat{J}}} \left(\prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \hat{J}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \boldsymbol{\sigma} \right] \quad (\text{A.2.6})$$

により,

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\det \hat{J}}} \left(\prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \hat{J}^{-1} \mathbf{x} \right] \sum_{\{\sigma\}} \exp [(\mathbf{h} + \mathbf{x})^T \boldsymbol{\sigma}] \quad (\text{A.2.7})$$

となるが, スピン変数に関する和は容易に実行でき,

$$\sum_{\{\sigma\}} \exp [(\mathbf{h} + \mathbf{x})^T \boldsymbol{\sigma}] = \prod_{i=1}^N \sum_{\sigma_i} e^{(\beta h + x_i) \sigma_i} = \exp \left[\sum_{i=1}^N \ln [2 \cosh(\beta h + x_i)] \right] \quad (\text{A.2.8})$$

ゆえ,

$$\int [dx] := \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi}}, \quad (\text{A.2.9})$$

$$S[\mathbf{x}] := \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \hat{J}^{-1} \mathbf{x} - \sum_{i=1}^N \ln [2 \cosh(\beta h + x_i)] \quad (\text{A.2.10})$$

とおくと,

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\det \hat{J}}} \int [dx] e^{-S[\mathbf{x}]} \quad (\text{A.2.11})$$

と表すことができる. Hubbard-Stratonovich 変換で導入された連続変数 \mathbf{x} の物理的な意味を考えよう. そのために, $S[\mathbf{x}]$ による Boltzmann の重みでとった x_i の期待値,

$$\langle x_i \rangle_S := \frac{\int [dx] x_i e^{-S[\mathbf{x}]}}{\int [dx] e^{-S[\mathbf{x}]}} \quad (\text{A.2.12})$$

に着目する. 式 (A.2.8) による書き換え前の表式を用いると,

$$\begin{aligned} \langle x_i \rangle_S &= \frac{1}{\int [dx] e^{-S[\mathbf{x}]}} \lim_{\boldsymbol{\alpha} \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int [dx] \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \hat{J}^{-1} \mathbf{x} \right] \sum_{\{\sigma\}} \exp [\mathbf{x}^T (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma}] \\ &= \frac{1}{\int [dx] e^{-S[\mathbf{x}]}} \lim_{\boldsymbol{\alpha} \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \sum_{\{\sigma\}} e^{\mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma}} \int [dx] \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \hat{J}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.2.13})$$

であり, \mathbf{x} に関する N 重 Gauss 積分を実行すれば,

$$\begin{aligned} \langle x_i \rangle_S &= \frac{\sqrt{\det \hat{J}}}{\int [dx] e^{-S[\mathbf{x}]}} \lim_{\boldsymbol{\alpha} \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[\frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha})^T \hat{J} (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma} \right] \\ &= \frac{\sum_{\{\sigma\}} \left(\hat{J} \boldsymbol{\sigma} \right)_i e^{-\beta H_{\text{Ising}}}}{\sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H_{\text{Ising}}}} \\ &= \left\langle \left(\hat{J} \boldsymbol{\sigma} \right)_i \right\rangle \\ &= \beta J \langle \sigma_{i-1} \rangle + \beta J \langle \sigma_{i+1} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.2.14})$$

すなわち,

$$\langle \mathbf{x} \rangle_S = \hat{J} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (\text{A.2.15})$$

である。ただし、 $\langle \cdot \rangle$ は H_{Ising} による統計平均である。

$$\boldsymbol{\phi} := \hat{J}^{-1} \mathbf{x} \quad (\text{A.2.16})$$

を定義すると,

$$\langle \phi_i \rangle_S = \left(\hat{J}^{-1} \langle \mathbf{x} \rangle_S \right)_i = \langle \sigma_i \rangle \quad (\text{A.2.17})$$

が従うため、Hubburd-Stratonovich 変換で導入した連続自由度 \mathbf{x} は式 (A.2.16) を通して磁化と結びついていることが分かった。 $\boldsymbol{\phi}$ は,

$$S[\mathbf{x} = \hat{J}\boldsymbol{\phi}] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\phi}^T \hat{J} \boldsymbol{\phi} - \sum_{i=1}^N \ln \left[2 \cosh \left(\beta h + (\hat{J}\boldsymbol{\phi})_i \right) \right] =: S[\boldsymbol{\phi}] \quad (\text{A.2.18})$$

の作用で記述されるスカラー場と見なすことができ、 $N \rightarrow \infty$ の極限で

$$Z = \sqrt{\det \hat{J}} \int [\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}] e^{-S[\boldsymbol{\phi}]} \quad (\text{A.2.19})$$

は経路積分となる。なお、以上の議論は $\langle x_i \rangle_S$, すなわちスカラー場の 1 点関数からの考察であるが、例えば 2 点関数を考えると,

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle_S = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \left(\hat{J}^{-1} \right)_{ij} \quad (\text{A.2.20})$$

となって、2 つの統計平均の間にイコールの関係を見出せなくなるが、 $|i - j| \gg 1$ のときは

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle_S \approx \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \quad (\text{A.2.21})$$

であるから、長距離の相関を議論する上では H_{Ising} の代わりに有効作用 $S[\boldsymbol{\phi}]$ を使ってよい。 $S[\boldsymbol{\phi}]$ から ϕ^4 理論を導くために、式 (A.2.18) の第 2 項を展開しよう。 $\hat{J} := \hat{J}/\beta$ と再定義すれば,

$$\begin{aligned} S[\boldsymbol{\phi}] = & -N \ln 2 + \frac{\beta}{2} \sum_{ij} J_{ij} \phi_i \phi_j \\ & - \frac{\beta^2}{2} \sum_i \left[h + \sum_j J_{ij} \phi_j \right]^2 + \frac{\beta^4}{12} \sum_i \left[h + \sum_j J_{ij} \phi_j \right]^4 + \text{O}(\phi_i^6) \end{aligned} \quad (\text{A.2.22})$$

である。運動量空間上に移って考える。いま、格子間隔を a とおき、 $\mathbf{n}_i \in a\mathbb{Z}^d$ として

$$\phi_i =: \phi(\mathbf{n}_i) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_i} \quad (\text{A.2.23})$$

と展開する。また、交換相互作用についても,

$$J_{ij} =: J(\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_j) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} J_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_j)} \quad (\text{A.2.24})$$

と展開する。ただし、

$$0 \leq k_i \leq \frac{2\pi}{a} \quad (i \in \{1, 2, \dots, d\}) \quad (\text{A.2.25})$$

である。

$$\frac{1}{N} \sum_i e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{n}_i} = \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \quad (\text{A.2.26})$$

および、 $\phi_i \in \mathbb{R}$ より $\phi_{\mathbf{k}}^* = \phi_{-\mathbf{k}}$ 、 \hat{J} が対称行列であることより $J_{-\mathbf{k}} = J_{\mathbf{k}}$ であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} S[\phi] = & -N \ln 2 + \frac{\beta}{2} \sum_{\mathbf{k}} J_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} \phi_{-\mathbf{k}} \\ & - \frac{\beta^2}{2} \sum_{\mathbf{k}} J_{\mathbf{k}} J_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} \phi_{-\mathbf{k}} - \beta^2 h \sqrt{N} J_{\mathbf{k}=0} \phi_{\mathbf{k}=0} \\ & + \frac{\beta^4}{12N} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, 0} J_{\mathbf{k}_1} J_{\mathbf{k}_2} J_{\mathbf{k}_3} J_{\mathbf{k}_4} \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_3} \phi_{\mathbf{k}_4} \\ & + O(\phi_i^6) + O(h^2) + O(h\phi_i^3) \end{aligned} \quad (\text{A.2.27})$$

である。ここで \hat{J} の形に注意すれば、

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{k}} &= \sum_{i,j} J(\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_j) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_j)} \\ &= 2dJ - \mathbf{k}^2 a^2 J + O(\mathbf{k}^4) \\ &= T_c \left(1 - \frac{\mathbf{k}^2 a^2}{2d} \right) + O(\mathbf{k}^4) \end{aligned} \quad (\text{A.2.28})$$

と展開できる。ただし、最後の行における T_c は式 (2.1.9) で求めた Ising 模型の平均場理論における転移点である。長距離モードに着目すると、

$$\begin{aligned} S[\phi] \approx & -N \ln 2 - \beta^2 h \sqrt{N} J_{\mathbf{k}=0} \phi_{\mathbf{k}=0} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{T_c}{T} \right)^2 \left[\frac{T - T_c}{T_c} + \frac{\mathbf{k}^2 a^2}{2d} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \right] \phi_{\mathbf{k}} \phi_{-\mathbf{k}} \\ & + \frac{(\beta J_{\mathbf{k}=0})^4}{12N} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, 0} \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_3} \phi_{\mathbf{k}_4} \end{aligned} \quad (\text{A.2.29})$$

と近似でき、さらに $|(T - T_c)/T_c| \ll 1$ を仮定して、

$$\begin{aligned} S[\phi] \approx & -N \ln 2 - \beta h \sqrt{N} \phi_{\mathbf{k}=0} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{T - T_c}{T_c} + \frac{\mathbf{k}^2 a^2}{2d} \right] \phi_{\mathbf{k}} \phi_{-\mathbf{k}} \\ & + \frac{1}{12N} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, 0} \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_3} \phi_{\mathbf{k}_4} \end{aligned} \quad (\text{A.2.30})$$

と近似する．ここで，格子間隔一定の下で無限体積極限 $V := Na^d \rightarrow \infty$ を考えると $\Lambda \ll a^{-1}$ の運動量カットオフを伴って，

$$\frac{1}{Na^d} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int_0^\Lambda \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \quad (\text{A.2.31})$$

と置き換わり，

$$\phi(\mathbf{k}) := a^{(d+2)/2} \sqrt{\frac{N}{2d}} \phi_{\mathbf{k}}, \quad (\text{A.2.32})$$

$$f_0 := -a^{-d} \ln 2, \quad (\text{A.2.33})$$

$$r_0 := \frac{2d}{a^2} \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (\text{A.2.34})$$

$$u_0 := 2(2d)^2 a^{d-4}, \quad (\text{A.2.35})$$

$$h_0 := \sqrt{2d} a^{-(d+2)/2} \beta h J \quad (\text{A.2.36})$$

などとおくことで，

$$\begin{aligned} S[\phi] = & V f_0 - h_0 \phi(\mathbf{k} = 0) + \frac{1}{2} \int_0^\Lambda \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (\mathbf{k}^2 + r_0) \phi(\mathbf{k}) \phi(-\mathbf{k}) \\ & + \frac{u_0}{4!} \left(\prod_{i=1}^4 \int_0^\Lambda \frac{d^d k_i}{(2\pi)^d} \right) (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \phi(\mathbf{k}_1) \phi(\mathbf{k}_2) \phi(\mathbf{k}_3) \phi(\mathbf{k}_4) \end{aligned} \quad (\text{A.2.37})$$

を得る．最後に式 (A.2.19) の因子 $\sqrt{\det \hat{J}}$ を考慮して，

$$S_\Lambda[\phi] := S[\phi] - V f_0 - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{J} \quad (\text{A.2.38})$$

で余分な定数シフトを消すと，運動量カットオフを伴う ϕ^4 理論の作用として $S_\Lambda[\phi]$ を得る．

付録 B 繰り込み群とスケーリング理論

本論文で議論したテンソルネットワーク法の枠内で機能する数値繰り込み群の方法は、行列の特異値分解に基づいた粗視化手法となっており、スケール変換を伴う通常の繰り込み群とはかなり趣が異なっている。後者のタイプの繰り込み群、すなわち Wilson 流の繰り込み群のアイデアは、高エネルギーの揺らぎを逐次消去して粗視化を進めることで、低エネルギーにおける系の振る舞いを明らかにすることである [21]。平均場理論では、揺らぎの効果を無視してしまうことで臨界現象の解析を容易なレベルに落とし、臨界現象における熱力学量の定性的な振る舞いを引き出すことに専念していた。一方、Wilson 流の繰り込み群では揺らぎの効果をとり込みながら系統的に系を解析することができるため、平均場理論では捉えることのできない臨界現象の性質を議論することができる。その筆頭が臨界指数の次元に関する依存性であり、スケーリングの議論を介して臨界指数の間に成り立つ関係式を導くことができる。

また、Wilson の繰り込み群は相転移現象の解析だけでなく、連続空間上の場の理論を構成する手法としても重要である。このような繰り込み群による構成論的場の理論は、従来の摂動論によった場の理論からは決して見えてこない視点を与えてくれるが、その著しい例は繰り込み可能性 (renormalizability) に対する意義付けだろう。伝統的な摂動論による場の理論では、繰り込み可能性は理論を構築する上での指導原理であり、繰り込み可能性を持った理論でなければ観測量に対する予言を行うことができない。しかし、Wilson の繰り込み群によって格子理論から連続理論を構成するという立場を取れば、我々が観測を行うスケールに到達するまで繰り込み群変換を施した結果、スケール変換に対して有意な相互作用のみが低エネルギーでは生き残り、それ以外の項は自動的に抑制されることになる。この有意な相互作用こそ摂動論における繰り込み可能な相互作用であり、したがって、繰り込み可能性は Wilson の繰り込み群から導かれる帰結ということになる。さらに、格子理論から連続理論を構成するためには連続極限の存在が不可欠であるが、本論文ですでに議論したように、例えば ϕ^4 理論には自明な連続極限しか存在しないと考えられており、そのため有限の相互作用を記述するためには真に格子間隔をゼロに取ることはできない。すなわち、正則化のために理論に導入したパラメタを真に取り去ることはできないのである。このような自明性の問題も従来の摂動論からは捉えられず、Wilson の繰り込み群を通して初めて与えられるものである。

B.1 繰り込み群変換

まずはスケール変換を 1 回施した場合に物理量がどのように変換されるか考えよう。スケールパラメタ $b(>1)$ の下でのスケール変換とは、距離 r を

$$r' = b^{-1}r \quad (\text{B.1.1})$$

の r' に写す操作を意味する。このようなスケール変換の下では、例えば運動量 k は、

$$k' = bk \quad (\text{B.1.2})$$

と変換される。また、 d 次元の系の体積 N は、

$$N' = b^{-d}N \quad (\text{B.1.3})$$

に変換される。このようなスケール変換は以下で導入する繰り込み群変換の下で格子間隔を一定に保つために必要な操作であり、このとき体積 N はその系に含まれる自由度の総数と同定してよい。一般に、物理量 \mathcal{O} が式 (B.1.1) スケール変換に対して、

$$\mathcal{O}' = b^x \mathcal{O} \quad (\text{B.1.4})$$

と変換されるとき、指数 x を \mathcal{O} のスケーリング次元とよぶ。例えば、距離、運動量、自由度の総数のスケーリング次元はそれぞれ $-1, 1, -d$ である。いま、理論のハミルトニアンを H とし、

$$H' = \mathcal{R} \circ H \quad (\text{B.1.5})$$

なる変換 \mathcal{R} として分配関数の関数形を不変に保つ、すなわち、

$$Z(N', H') = Z(N, H) \quad (\text{B.1.6})$$

を満たすものを考える。ここに、 N' は式 (B.1.3) のスケール変換後の自由度の総数である。以上の要請を満たす変換 \mathcal{R} のことを繰り込み群変換と呼ぶ。繰り込み群変換 \mathcal{R} は一般にはとても複雑な非線型変換である。繰り込み群変換によって 1 自由度あたりの自由エネルギー βf は、

$$\beta f(H') = -\frac{1}{N'} \ln Z(N', H') = -b^d \frac{1}{N} \ln Z(N, H) = b^d \beta f(H) \quad (\text{B.1.7})$$

で変換され、 βf はスケーリング次元 d を持つ。もし、ハミルトニアン H に含まれるパラメタを臨界点直上に選べば、長波長の揺らぎによって、粗視化を進めても系の振る舞いはほとんど変わらないように見えるだろう。つまり、臨界点直上の H に対して繰り込み群変換を繰り返せば、

$$H^* = \mathcal{R} \circ H^* \quad (\text{B.1.8})$$

で定義されるハミルトニアン H^* に到達するはずである。この H^* を繰り込み群変換の固定点とよぶ。臨界点直上のハミルトニアンで記述される系は粗視化を繰り返してもほとんど変わらないように見えるが、固定点 H^* は定義により真にスケール不変な理論ということになる。したがって、臨界点上のハミルトニアンと固定点直上のハミルトニアンは異なる理論を与えているが、両者は繰り込み群変換によって、

$$H^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\mathcal{R} \circ \cdots \circ \mathcal{R}}_n \circ H. \quad (\text{B.1.9})$$

と関係づいていることになる。すなわち、臨界点上のハミルトニアンを繰り込んでいけば固定点に到達するのである。

さて、任意のハミルトニアン H に対する繰り込み群変換を考えることは、 H が含んでいるパラメタに対する繰り込み群変換を考えることと同等である。いま、 H が含むパラメタの組を $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots)^T$ と書くと、式 (B.1.5) の記法を流用して、

$$\mathbf{c}' = \mathcal{R} \circ \mathbf{c} \quad (\text{B.1.10})$$

がパラメタに対する繰り込み群変換である。あらゆるパラメタの組 \mathbf{c} 全体がなす集合は理論空間と呼ばれる。臨界現象の解析を目的にする場合、理論空間全体にわたる \mathbf{c} の挙動を知る必要はない。重要なのは固

定点 \mathbf{c}^* 近傍での繰り込み群変換に対する \mathbf{c} の軌道である．そこで，固定点周りのみに着目して，繰り込み群変換 (B.1.10) を線型化しよう．パラメタを

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^* + \delta\mathbf{c}, \quad \mathbf{c}' = \mathbf{c}^* + \delta\mathbf{c}' \quad (\text{B.1.11})$$

のように固定点からのずれ $\delta\mathbf{c}$ で記述する．1 回の繰り込み群変換 $\mathcal{R} \circ \mathbf{c}$ 自体は特異性を伴わないことに注意して， $\mathcal{R} \circ \mathbf{c}$ を固定点周りで展開し $\delta\mathbf{c}$ の 1 次までとれば，

$$\delta\mathbf{c}' = \hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b)\delta\mathbf{c} \quad (\text{B.1.12})$$

が従う．ここで，一般に $\hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b)$ は無限次元の行列であるが，直後で議論するように各種スケーリング場の振る舞いを考慮することで有限次元の行列へ落とし込むことができる．こうして取り組むべき問題は線型変換 $\hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b)$ についての固有値問題に帰着された^{*18}．この $\hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b)$ の固有値 $\lambda_i(b)$ は，

$$\lambda_i(b) = b^{y_i} \quad (\text{B.1.13})$$

と書くことができる．なぜなら，系に対して $b = b_1 b_2$ で定義される繰り込み群変換を 1 回施した結果と， $b = b_1$ で定義される繰り込み群変換を 1 回行った後に $b = b_2$ で与えられる繰り込み群変換を 1 回行った結果は， $\hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b)$ の線型性から同一となることを考えると，固有値 $\lambda_i(b)$ は，

$$\lambda_i(b_1 b_2) = \lambda_i(b_1) \lambda_i(b_2) \quad (\text{B.1.14})$$

を満たすべきだからある． $\hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b)$ の固有ベクトルの組を $\{\mathbf{e}_i\}$ とし， $\delta\mathbf{c}$ を固有ベクトルで展開する：

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^* + \sum_i g_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{c}' = \mathbf{c}^* + \sum_i g'_i \mathbf{e}_i. \quad (\text{B.1.15})$$

展開係数 g'_i と g_i の間の関係は，

$$\sum_i g'_i \mathbf{e}_i = \sum_i \lambda_i(b) g_i \mathbf{e}_i, \quad (\text{B.1.16})$$

すなわち，

$$g'_i = b^{y_i} g_i \quad (\text{B.1.17})$$

である．展開係数の組 $\{g_i\}$ はスケーリング場と呼ばれ，理論空間における固定点近傍でのパラメタ \mathbf{c} を特徴づける量である．以下では， $y_i > 0$ ならば対応するスケーリング場は「有意である (relevant)」と呼ぶことにする．同様に， $y_i < 0$ ならば「有意でない (irrelevant)」， $y_i = 0$ ならば「中立である (marginal)」と呼ぶことにする．変換則 (B.1.17) から，有意なスケーリング場は繰り込み群変換を実行するたびに増幅される．反対に有意でないスケーリング場は変換に伴って減衰する． g_i の調節が系のマクロな性質に決定的

^{*18} しかし，繰り込み群変換が線型化されたとはいえ，この固有値問題を厳密に解くことはほとんどの場合不可能であり，適切な近似を導入せざるを得ない．実空間繰り込み群で精度よく系を解析するためには，どれだけ本質的に重要な寄与を取り込んだ近似を導入するかが常にボトルネックであり，近似をして得られた答えを見てもない限りその近似の妥当性が分からない，という場合がほとんどである．このような事情を踏まえると，テンソルネットワーク上で運用される繰り込み群は，密度行列の大きな特異値こそマクロな物理での本質的な寄与を担っていることを喝破しており，実空間繰り込み群のボトルネックを解消し得る手法と捉えることができる．

な影響を与えるのであり、繰り込み群変換を考える際の基本的な方針としては、有意なパラメタにさえ着目すればよいことになる。これによって、線型化された繰り込み群変換 $\hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b)$ を有限サイズの行列で表すことが許されるのである。

なお、実際に式 (B.1.12) の固有値問題に取り組む上で、行列 $\hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b)$ が対称行列で与えられるとは限らない。任意の対称行列 \hat{A} に対して、その固有値 λ_i に属する固有ベクトル \mathbf{u}_i は、

$$\hat{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i \quad (\text{B.1.18})$$

を満たし、 $\hat{A}^T = \hat{A}$ より、ただちに

$$\mathbf{u}_i^T \hat{A} = \lambda_i \mathbf{u}_i^T \quad (\text{B.1.19})$$

が従うから、対称行列の右固有ベクトルと左固有ベクトルは必ず一致する。一方、対称行列でなければ一般に右固有ベクトルと左固有ベクトルとは異なるので、これらを区別して議論する必要がある。以下ではブラケット記法を用いることにし、 $\hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b)$ の左固有ベクトルを $\langle \mathbf{l}_i |$ 、右固有ベクトルを $|\mathbf{r}_i\rangle$ と書くことにする。式 (B.1.12) の固有値問題は、

$$\hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b) |\mathbf{r}_i\rangle = \lambda_i(b) |\mathbf{r}_i\rangle, \quad (\text{B.1.20})$$

および

$$\langle \mathbf{l}_i | \hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b) = \lambda_i(b) \langle \mathbf{l}_i | \quad (\text{B.1.21})$$

の 2 つの固有値問題として与えられる。このとき、Euclid 空間の標準的な直交基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ を用いて、

$$\sum_{i,j} |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{l}_i | \hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b) |\mathbf{r}_j\rangle \langle \mathbf{e}_j| = \sum_{i,j} |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{l}_i | (\lambda_j(b) |\mathbf{r}_j\rangle \langle \mathbf{e}_j|), \quad (\text{B.1.22})$$

$$\sum_{i,j} |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{l}_i | \hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b) |\mathbf{r}_j\rangle \langle \mathbf{e}_j| = \sum_{i,j} (\lambda_i(b) |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{l}_i|) |\mathbf{r}_j\rangle \langle \mathbf{e}_j| \quad (\text{B.1.23})$$

の 2 つの関係式が従うため、固有値 λ の添え字は等しくなっていなければならないことが分かる。そこで、

$$\langle \mathbf{l}_i | \mathbf{r}_j\rangle = \delta_{ij} \quad (\text{B.1.24})$$

の規格化条件を課せば、上式で考えた 2 つの行列の間には、

$$\sum_{i,j} |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{l}_i | \mathbf{r}_j\rangle \langle \mathbf{e}_j| = \sum_i |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}_i| = \mathbb{1} \quad (\text{B.1.25})$$

が従う。ゆえに、

$$\sum_{i,j} |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{l}_i | \hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b) |\mathbf{r}_j\rangle \langle \mathbf{e}_j| = \sum_i \lambda_i(b) |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}_i| \quad (\text{B.1.26})$$

の関係式が得られる。これによって、例えば式 (B.1.12) で $\delta\mathbf{c}$ と $\delta\mathbf{c}'$ を $\hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b)$ の左固有ベクトルで展開し、それぞれの展開係数を $\{g'\}$ および $\{g_i\}$ とおき、両辺に対して右から $\sum_i |\mathbf{r}_i\rangle \langle \mathbf{e}_i|$ をかけると、

$$\sum_{i,j} g'_i \langle \mathbf{l}_i | \mathbf{r}_j\rangle \langle \mathbf{e}_j| = \sum_{i,j} \lambda_i(b) g_i \langle \mathbf{l}_i | \mathbf{r}_j\rangle \langle \mathbf{e}_j| \quad (\text{B.1.27})$$

より、展開係数 $\{g_i\}$ がスケーリング場であることが分かる。すなわち、 $\delta \mathbf{c}$ が列ベクトルであることに注意すると、

$$g_i = \langle \delta \mathbf{c} | \mathbf{r}_i \rangle \quad (\text{B.1.28})$$

としてスケーリング場が得られるのである。同様に、 $\delta \mathbf{c}$ と $\delta \mathbf{c}'$ を $\hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b)$ の右固有ベクトルで展開してもよく、

$$g_i = \langle \mathbf{l}_i | \delta \mathbf{c} \rangle \quad (\text{B.1.29})$$

としてもスケーリング場を得ることができる。以上の議論から、式 (B.1.12) の固有値問題への実際的なアプローチとしては、 $\hat{R}_{\mathbf{c}^*}(b)$ の右固有ベクトルないし左固有ベクトルのいずれかを求め、注目する固定点周りのパラメタ $\delta \mathbf{c}$ との内積によってスケーリング場を構成すればよい。

B.2 自由エネルギーのスケーリング仮説

例えば、スピン系で臨界現象を実現させるには、温度 T と磁場 h を $T = T_c$ と $h = 0$ に調整しなければならない。通常の臨界現象では、 T と h の 2 つのパラメタが有意であると考えられる。対臨界温度 $t := (T - T_c)/T_c$ に対応するスケーリング場を g_t とし、磁場 h に対応するスケーリング場を g_h とする。またそれぞれのスケーリング次元を y_t , y_h とおく。以下では、 g_t と g_h のみを有意なスケーリング場とし、それ以外のすべてのスケーリング場は有意でないと仮定しよう。このような仮定はスケーリング仮説と呼ばれる。

具体的なスケーリング則の議論に入る前に、理論空間中でのパラメタの繰り込み群変換に対する流れを考察しておく。簡単のため $h = 0$ の場合を考える。この場合、臨界点での系の性質は g_t のみに委ねられているから、固定点 \mathbf{c}^* に吸い込まれる理論空間内の方向は $g_t = 01$ しかない。固定点に吸い込まれるパラメタの集合は臨界部分空間、あるいは臨界面と呼ばれる。いまの場合、臨界面は理論空間における余次元が 1 の部分集合である。臨界点は臨界面上に存在するが、一般に固定点とは一致しない。 $g_t \neq 0$ の場合、繰り込み群変換でパラメタは急速に臨界面から遠ざかる。また、 g_i ($i \neq t, h$) はすべて固定点に近づく方向を与える。

まずは自由エネルギーのスケーリング則を導こう。式 (B.1.7) から、繰り込み群変換の前後で 1 自由度あたりの自由エネルギー $f := \beta f$ は、

$$f(g_t, g_h, g_3, \dots) = b^{-d} f(g'_t, g'_h, g'_3, \dots) \quad (\text{B.2.1})$$

で結びつく^{*19}。スケーリング場は特異性を持たない繰り込み群変換 R によって決定されるので、すべての g_i は t と h に関する解析関数である。したがって、固定点の近傍では展開の 1 次までをとって、 g_t は t に

^{*19} 本当は特異性を持たない関数 $w(g_t, g_h, g_3, \dots)$ を加えて、

$$f(g_t, g_h, g_3, \dots) = b^{-d} f(g'_t, g'_h, g'_3, \dots) + w(g_t, g_h, g_3, \dots)$$

とすべきである。もちろん自由エネルギーの値を議論する場合には $w(g_t, g_h, g_3, \dots)$ を加味しなければならないが、以下では自由エネルギーから臨界指数を決定することを考えるので、特異性がある部分にだけ注目して議論する。

比例し, g_h は h に比例する関数と見なせばよい. また, g_3 以下は有意でないので無視していいから, n 回の繰り込み群変換を行った場合, 自由エネルギーは,

$$f(t, h) = b^{-nd} f(b^{ny_t} t, b^{ny_h} h) \quad (\text{B.2.2})$$

で結びつく. ここで, スケールパラメタ b と繰り込み群変換の回数 n を適切に選ぶことで, 右辺の第 1 引数を 1 に取ることができる^{*20}. つまり,

$$b^n = t^{-1/y_t} \quad (\text{B.2.3})$$

になるような繰り込み群変換を定義するのである. すると, 式 (B.2.2) から,

$$f(t, h) = t^{d/y_t} f(1, ht^{-y_h/y_t}) =: t^{d/y_t} F_{\pm}(ht^{-y_h/y_t}) \quad (\text{B.2.4})$$

が従う. これが自由エネルギーに対するスケーリング則である. 元々自由エネルギーは t と h の 2 変数関数であったが, 繰り込み群変換を上手く定義することで実質的に 1 変数関数に帰着したのである. この実質的 1 変数関数 $F_{\pm}(x)$ をスケーリング関数とよぶ^{*21}. なお, 式 (B.2.4) を指してスケーリング仮説と呼ぶことも多々ある. スケーリング則 (B.2.4) を用いると, スケーリング場のスケーリング次元と臨界指数の間の関係式を得ることができる. まず, 比熱 C の特異性は,

$$C(t, h=0) \sim \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t, h=0) \sim t^{d/y_t-2} \quad (\text{B.2.5})$$

となり, 臨界指数 α として,

$$\alpha = 2 - \frac{d}{y_t} \quad (\text{B.2.6})$$

が従う. 臨界指数 α は g_t のスケーリング次元と系がおかれた次元にのみ依存することが分かる. 自発磁化 m の特異性は,

$$m(t, h \rightarrow 0) \sim \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial h} f(t, h) \sim t^{(d-y_h)/y_t} \quad (\text{B.2.7})$$

となるので, 臨界指数 β は,

$$\beta = \frac{d - y_h}{y_t} \quad (\text{B.2.8})$$

である. 同様にして磁化率 χ の特異性は,

$$\chi(t, h \rightarrow 0) \sim \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial h^2} f(t, h) \sim t^{(d-2y_h)/y_t} \quad (\text{B.2.9})$$

であり, 臨界指数 γ は,

$$\gamma = \frac{2y_h - d}{y_t} \quad (\text{B.2.10})$$

^{*20} $t < 0$ の場合には $b^{ny_t}|t| = 1$ とする.

^{*21} F_{\pm} の \pm は t の正負に応じて $b^{ny_t}t = \pm 1$ と取ることを反映している.

と分かる。臨界指数 δ を知るには磁化の磁場依存性を見なければならないので、自由エネルギー (B.2.2) の第 1 引数ではなく第 2 引数を 1 とするような繰り込み群変換を考えればいい。この場合、 $b^n = h^{-1/y_h}$ であり、スケーリング則は、

$$f(t, h) = h^{d/y_h} f(th^{-y_t/y_h}, 1) =: h^{d/y_h} \tilde{F}_{\pm}(th^{-y_t/y_h}) \quad (\text{B.2.11})$$

となる。このスケーリング則を使えば、磁化 m の h に関する特異性は、

$$m(t=0, h) \sim \frac{\partial}{\partial h} f(t=0, h) \sim h^{d/y_h-1} \quad (\text{B.2.12})$$

となって、臨界指数 δ は、

$$\delta = \frac{d - y_h}{y_h} \quad (\text{B.2.13})$$

と求まる。こうして臨界指数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が y_t と y_h によって表示できることが分かった。繰り込み群変換を固定点周りで線型化して固有値のベキ y_t と y_h さえ求めることができれば、4 つの臨界指数が決定されてしまうのである。しかも、これら 4 つの臨界指数は独立ではなく、例えば、

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad (\text{B.2.14})$$

$$\gamma = \beta(\delta - 1) \quad (\text{B.2.15})$$

のような関係式で結びつけることができる。この関係式をスケーリング関係式という。スケーリング関係式は自由エネルギーによって導かれる臨界指数の性質であり、系がおかれた次元 d には依存しない。

ここまでの議論で要となっていたのは、 $b^n = t^{-1/y_t}$ 、 $b^n = h^{-1/y_h}$ の 2 つである。これらの関係式は、臨界点 $(t, h) = (0, 0)$ 近傍での物理量の特異性に注目することと繰り込み群変換の回数 n を稼いで粗視化を推し進めていくことが等価であることを示している。なお、スケーリング関数 $F_{\pm}(x)$ の $x \approx 0$ での振る舞いや $x \rightarrow \infty$ での振る舞いも決定することができる。例えば、 $h = 0$ のときには自由エネルギーは臨界指数 α を使って、

$$f(t, h=0) \sim t^{2-\alpha} \quad (\text{B.2.16})$$

となっているはずだから、

$$t^{d/y_t} F_{\pm}(0) \sim t^{2-\alpha} \quad (\text{B.2.17})$$

であり、 $x \approx 0$ では $F_{\pm}(x)$ は 0 でない定数だと考えられる。一方、 $t \rightarrow 0$ の極限では $f(t, h)$ は h のみの関数として振る舞うから、式 (B.2.4) より、

$$f(t \rightarrow 0, h) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{d/y_t} F_{\pm}(ht^{-y_h/y_t}) \quad (\text{B.2.18})$$

が h に関して有限になるためには、スケーリング関数が、

$$F_{\pm}(ht^{-y_h/y_t}) \approx (ht^{-y_h/y_t})^{d/y_h} = h^{d/y_h} t^{-d/y_t} \quad (\text{B.2.19})$$

のように振る舞うしかない。これは、 $x \rightarrow \infty$ の極限で、

$$F_{\pm}(x) \approx x^{d/y_h} \quad (\text{B.2.20})$$

と振る舞うことを意味する。実際、この漸近形を式 (B.2.18) に代入して h についての微分を行うと、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial h} f(t, h) \approx \frac{\partial}{\partial h} h^{d/y_h} = h^{(d-y_h)/y_h} \quad (\text{B.2.21})$$

となって、臨界指数 δ の表式 (B.2.13) を再現する。

B.3 相関関数のスケーリング則

今度は臨界指数 ν と η の y_t および y_h 依存性を調べるために相関関数がみたすスケーリング則を導く。臨界指数 ν と η は場の理論においてもなじみ深い指数であり、相関関数のスケーリング則は繰り込まれた摂動論における Callan-Symanzik 方程式などに相当する非常に重要な関係式である。

自由エネルギーのスケーリング則を導いたときと同様に、 $h = 0$ とし、 g_t は t に比例するとする。相関関数を距離 $r(= |\mathbf{r}|)$ と温度 t の関数として $G(r, t)$ と表記する。 $G(r, t)$ はスピン変数を $\sigma_{\mathbf{r}}$ として、

$$G(r, t) = \langle \sigma_0 \sigma_{\mathbf{r}} \rangle - \langle \sigma_0 \rangle \langle \sigma_{\mathbf{r}} \rangle \quad (\text{B.3.1})$$

で定義される。いま、 $\sigma_{\mathbf{r}}$ が持つスケーリング次元を、

$$\sigma_{\mathbf{r}} = \zeta_b \sigma'_{\mathbf{r}'} \quad (\text{B.3.2})$$

とおく。ただし、 \mathbf{r} と \mathbf{r}' はスケール変換前後の同じ座標を与える位置ベクトルとする。すると相関関数は、スケール変換の前後で、

$$G(r, t) = \zeta_b^2 G(b^{-1}r, b^{y_t}t) \quad (\text{B.3.3})$$

と結びつく。式 (B.2.2) より、自由エネルギーは繰り込み群変換 1 回で、

$$f(t, h) = b^{-d} f(b^{y_t}t, b^{y_h}h) \quad (\text{B.3.4})$$

とスケールされるから、 h で微分することで自発磁化について、

$$m(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial h} f(t, h) = b^{-d+y_h} m(b^{y_t}t) \quad (\text{B.3.5})$$

のスケーリング則を得る。自発磁化のスケーリング次元は $d - y_h$ である。スピン変数の統計平均が自発磁化ゆえ、式 (B.3.2) と比較して、

$$\zeta_b = b^{-d+y_h} \quad (\text{B.3.6})$$

が結論される。ゆえに、式 (B.3.3) から相関関数に対するスケーリングは、

$$G(r, t) = b^{-2d+2y_h} G(b^{-1}r, b^{y_t}t) \quad (\text{B.3.7})$$

となる．すなわち， n 回の繰り込み群変換では，

$$G(r, t) = b^{-2nd+2ny_h} G(b^{-n}r, b^{ny_t}t) \quad (\text{B.3.8})$$

である．ここで， $t \neq 0$ として， $b^{ny_t}t = 1$ となるような繰り込み群変換を用いれば，

$$G(r, t) = t^{2(d-y_h)/y_t} G(rt^{1/y_t}, 1) =: F_{\pm}(rt^{1/y_t}) \quad (\text{B.3.9})$$

として相関関数についてのスケーリング則が導かれる． $t \neq 0$ の場合，相関関数の距離依存性は $e^{-r/\xi} = \exp[-art^{\nu}]$ である (a は定数)．したがって，

$$\nu = \frac{1}{y_t} \quad (\text{B.3.10})$$

が結論される．一方，臨界指数 η を知るには $t = 0$ の場合を考えないといけない．それには，式 (B.3.7) の段階で $t = 0$ とおき，さらに $b \sim r$ とすることで，

$$G(r) \sim r^{-2d+2y_h} \quad (\text{B.3.11})$$

が従うので， $G(r, 0) \sim r^{-d+2-\eta}$ と比較することで，

$$\eta = d - 2y_h + 2 \quad (\text{B.3.12})$$

が得られる．以上から， y_t と y_h を消去することで臨界指数 α ， β ， γ ， δ と臨界指数 ν ， η の間の関係式として，

$$\alpha = 2 - d\nu, \quad (\text{B.3.13})$$

$$\beta = \frac{\nu}{2}(d - 2 + \eta), \quad (\text{B.3.14})$$

$$\gamma = \nu(2 - \eta), \quad (\text{B.3.15})$$

$$\delta = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta} \quad (\text{B.3.16})$$

などが従う．これらの関係式のことをハイパー・スケーリングとよぶ．ハイパー・スケーリングはスケーリング関係式 (B.2.14)，(B.2.15) と違い，場合によっては成立しないことがある．例えば，平均場近似で求めた Ising 模型の臨界指数は，式 (B.3.15) 以外のハイパー・スケーリングを破っていることが確認できる．実はハイパー・スケーリングが破れるのは，中立なスケーリング場が自由エネルギーのスケーリング則と相関関数のスケーリング則とに異なる影響を与えることに起因している．

B.4 スケーリング次元

相関関数は臨界点直上で距離についてのべき関数で記述される．このような振る舞いはスピン変数の相関に限定されない．例えば，局所的な内部エネルギーの相関関数を考えてみる．強磁性 Ising 模型のハミルトニアンは $J > 0$ として，

$$H = -J \sum_{\mathbf{x}, \hat{\mu}} \sigma(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{x} + \hat{\mu}) \quad (\text{B.4.1})$$

であるから，点 \mathbf{x} 上の局所エネルギー $E(\mathbf{x})$ は，

$$E(\mathbf{x}) = -J \sigma(\mathbf{x}) \sum_{\hat{\mu}} \sigma(\mathbf{x} + \hat{\mu}) \quad (\text{B.4.2})$$

で与えられると考えるのが自然である．ただし， $\hat{\mu}$ は最近接格子点へのびる単位方向ベクトルである． $E(\mathbf{x})$ の熱平均は，スピン自由度の総数を N とすれば，

$$\begin{aligned} \langle E(\mathbf{x}) \rangle &= \frac{1}{NZ} \sum_{\mathbf{x}, \hat{\mu}} \sum_{\sigma(\mathbf{x}) = \pm 1} (-J \sigma(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{x} + \hat{\mu})) e^{-\beta H} \\ &= -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} f \end{aligned} \quad (\text{B.4.3})$$

となつて， $E(\mathbf{x})$ の熱平均は，1 自由度あたりの自由エネルギー f の温度微分で与えられることが分かる^{*22}．すると，自由エネルギーについてのスケーリング則から，1 回の繰り込み群変換の下で $\langle E(\mathbf{x}) \rangle =: \langle E \rangle(t)$ は，

$$\langle E \rangle(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t) = b^{-d} \frac{\partial}{\partial t} f(b^{y_t} t) = b^{-d+y_t} \langle E \rangle(b^{y_t} t) \quad (\text{B.4.4})$$

となつて，局所エネルギーのスケーリング次元は $x_t := d - y_t$ であることが分かる．したがって，スピン変数の相関関数 (B.3.11) を得たときと全く同様にして，局所エネルギーの相関関数の漸近形として，

$$\langle E(0)E(\mathbf{r}) \rangle - \langle E(0) \rangle \langle E(\mathbf{r}) \rangle \sim r^{-2x_t} \quad (\text{B.4.5})$$

が導かれる．

このような議論は局所エネルギーに限らず，一般の演算子 \mathcal{A}_i へ拡張することができる． \mathcal{A}_i に対応するスケーリング場を g_i とし， g_i のスケーリング次元を y_i とすると， \mathcal{A}_i 自身のスケーリング次元は $x_i = d - y_i$ になる．実際， g_i 依存性を露わに書いた自由エネルギーのスケーリング則，

$$f(t, h, g_i) = b^{-d} f(b^{y_t} t, b^{y_h} h, b^{y_i} g_i) \quad (\text{B.4.6})$$

を g_i で微分すると，

$$\frac{\partial}{\partial g_i} f(t, h, g_i) = b^{-d} \frac{\partial}{\partial g_i} f(b^{y_t} t, b^{y_h} h, b^{y_i} g_i) = b^{-d+y_i} \frac{\partial}{\partial g_i} f(b^{y_t} t, b^{y_h} h, b^{y_i} g_i) \quad (\text{B.4.7})$$

^{*22} $f := \beta f$ と定義したことに注意．

となるが、左辺は熱平均 $\langle \mathcal{A}_i \rangle$ に他ならない。すなわち、 $\langle \mathcal{A}_i \rangle$ に対するスケーリング則として、

$$\langle \mathcal{A}_i \rangle(t, h, g_i) = b^{-d+y_i} \langle \mathcal{A}_i \rangle(b^{y_t} t, b^{y_h} h, b^{y_i} g_i) \quad (\text{B.4.8})$$

が得られる。また、臨界点直上での \mathcal{A}_i の相関関数の漸近形は、

$$\langle \mathcal{A}_i(0) \mathcal{A}_j(\mathbf{r}) \rangle - \langle \mathcal{A}_i(0) \rangle \langle \mathcal{A}_j(\mathbf{r}) \rangle \sim r^{-x_i-x_j} \quad (\text{B.4.9})$$

となる。以上の議論は g_i および g_j が有意であるか否かによらずに従う。

さらに、スケーリング次元 x_i を用いれば、次元解析から臨界指数の間のスケーリング関係式を導くことができる。いま、臨界点近傍における物理量の特異性は相関長 $\xi \sim t^{-\nu}$ に起因することを仮定する。相関長が発散することで系の持つ典型的なスケールがなくなり、臨界現象が起こるというのは物理的にも妥当な仮定である。1 自由度あたりの自由エネルギー f を考えてみる。 f において最も強い特異性が、

$$f \sim \xi^{-\zeta} \quad (\text{B.4.10})$$

で与えられるとする。相関長は長さの次元を持つので、 ξ のスケーリング次元は -1 であり、

$$f \sim \xi^{-\zeta} = b^{-\zeta} \xi'^{-\zeta} \sim b^{-\zeta} f' \quad (\text{B.4.11})$$

となるが、 f のスケーリング次元は d ゆえ $\zeta = d$ であり、 f における一番強い特異性は、

$$f \sim \xi^{-d} \sim t^{d\nu} \quad (\text{B.4.12})$$

で与えられることが分かる。自由エネルギーの最も強い特異性は相関長を通してみれば系の置かれた次元によって決定されるのである。この関係から例えば、

$$C(t) \sim \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) \sim t^{d\nu-2} \quad (\text{B.4.13})$$

から、 $\alpha = 2 - d\nu$ のハイパー・スケーリングが即座に結論される。

B.5 有限サイズスケーリング

これまで展開してきたスケーリング理論により、臨界現象が実現するためには有意な変数、あるいは有意なスケーリング場を適切に調整することが重要であることが分かった。有意な変数はその値をわずかに変えただけで全く異なる臨界現象を生む可能性があり、特に有意な変数が複数存在する状況では有意な変数の間での競合過程であるクロスオーバーに細心の注意を払う必要がある。その一方で、クロスオーバーを逆手にとって実際の臨界現象の解析に応用することもできる。そのような方法論として確立しているものの 1 つが有限サイズスケーリングである。

有限サイズスケーリングは特に数値計算による相転移現象の解析において重要である。本来、臨界現象は無限体積極限下でのみ実現するものであり、計算機上で扱うことができる有限体積系では物理量の特異性は生じ得ない。つまり、システムサイズ L の系を見ている限り、比熱や磁化率はすべて有界な関数になる。

臨界現象は $L \rightarrow \infty$ でのみ実現するから、この意味でシステムサイズ L も有意な変数である*23。そこで、自由エネルギーに対するスケーリング仮説に L を含めて、

$$f(t, h, L^{-1}) = b^{-d} f(b^{y_t} t, b^{y_h} h, bL^{-1}) \quad (\text{B.5.1})$$

と拡張しよう。ここで引数を L ではなく L^{-1} としたのは L が長さの次元を持っているため L^{-1} のスケーリング次元が 1 となるからである。例えば、このスケーリング仮説を使って磁化率を計算すると、

$$\chi(t, 0, L^{-1}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial h^2} f(t, h, L^{-1}) = b^{2y_h - d} f''(b^{y_t} t, 0, bL^{-1}) \quad (\text{B.5.2})$$

となり、第 3 引数を 1 とするようなスケールパラメタを選べば、

$$\chi(t, 0, L^{-1}) = L^{2y_h - d} \Psi_{\pm}(tL^{y_t}) \quad (\text{B.5.3})$$

となる。ここで、付録 B.3 の結果を用いれば、

$$\chi(t, 0, L^{-1}) = L^{2-\eta} \Psi_{\pm}(tL^{1/\nu}) \quad (\text{B.5.4})$$

である。上式から、 $L^{\eta-2}\chi$ は引数を $tL^{1/\nu}$ とするスケーリング関数 Ψ_{\pm} で記述できることが分かる。すなわち、いくつかのシステムサイズ下で磁化率を測定し、 η と ν を適切に推定すれば $L^{\eta-2}\chi$ は $tL^{1/\nu}$ の関数として L に依らないプロットを与えるはずである。逆に言うと、 $L^{\eta-2}\chi$ の $tL^{1/\nu}$ 依存性が L に依らなくなるような η と ν を見つければそれが正しい臨界指数である。なお、転移点を推定するには磁化率のピークの位置を見ることになるが、そのピークの位置ではスケーリング関数 Ψ_{\pm} の値が最大になる。いま、 $\Psi_{\pm}(x)$ が $x = c$ で最大値を取ったとする。これは対臨界温度が

$$t = cL^{-1/\nu} \quad (\text{B.5.5})$$

で磁化率が最大となることを意味し、無限体積系での転移点は $t = 0$ であるから有限体積効果として転移点の場所がずれることを示している。

クロスオーバーの観点からは、有意な変数 t と L^{-1} の間で競合過程が生じるはずであるが、スケーリング関数の振る舞いから相関長 ξ とシステムサイズ L の競合として理解することができる。いま、 x が十分に大きければ、

$$\Psi_{\pm}(x) \approx x^{(\eta-2)\nu} \quad (\text{B.5.6})$$

と漸近的に振る舞うと仮定しよう。すると式 (B.5.4) より、 $tL^{1/\nu} \gg 1$ では

$$\chi(t, 0, L^{-1}) \sim t^{(\eta-2)\nu} = t^{-\gamma} \quad (\text{B.5.7})$$

がハイパー・スケーリングから結論されることになる。この結果は $L \rightarrow \infty$ における磁化率の特異性に他ならない。すなわち、 $tL^{1/\nu} \gg 1$ という条件は $L \rightarrow \infty$ と本質的には等価であることを意味する。 $\xi \sim t^{-\nu}$ であったから、

$$tL^{1/\nu} \gg 1 \Leftrightarrow \xi \ll L \quad (\text{B.5.8})$$

*23 テンソルネットワーク法におけるボンド次元 D_{cut} も $D_{\text{cut}} \rightarrow \infty$ の極限が無限体積系に定義された本来の理論の臨界現象を記述するという意味で有意な変数と捉えることができる。しかし、有限サイズスケーリングに相当するような「有限ボンド次元スケーリング」はまだよく分かっていない。

であり，システムサイズが相関長よりも十分に大きければその系は本質的に無限体積系と同定することができるという結果になっている．すなわち，

$$|L^{-1}t^{-\nu}| \approx 1 \quad (\text{B.5.9})$$

が有限体積系と無限体積系のクロスオーバー領域である．

付録 C $d = 4 - \epsilon$ の ϕ^4 理論

1 ループ近似から得られた繰り込み群方程式 (2.3.37) および (2.3.38) を $d = 4 - \epsilon < 4$ で考察しよう.

$$r_l := \frac{r_l}{\Lambda^2}, \quad u_l := \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \frac{u_l}{\Lambda^{4-d}} \quad (\text{C.0.1})$$

で理論のパラメタを再定義すると, 繰り込み群方程式 (2.3.37) および (2.3.38) は,

$$\frac{\partial r_l}{\partial l} = 2r_l + \frac{1}{2} \frac{u_l}{1+r_l}, \quad (\text{C.0.2})$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial l} = \epsilon u_l - \frac{3}{2} \frac{u_l^2}{(1+r_l)^2} \quad (\text{C.0.3})$$

となる. 固定点 (r^*, u^*) は,

$$0 = \frac{\partial r^*}{\partial l} = 2r^* + \frac{1}{2} \frac{u^*}{1+r^*}, \quad (\text{C.0.4})$$

$$0 = \frac{\partial u^*}{\partial l} = \epsilon u^* - \frac{3}{2} \frac{(u^*)^2}{(1+r^*)^2} \quad (\text{C.0.5})$$

の解で与えられる. 明らかに $(r^*, u^*) = (0, 0)$ は解であり, Gauss 固定点が存在する. 加えて,

$$r^* = -\frac{1}{6}\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (\text{C.0.6})$$

$$u^* = \frac{2}{3}\epsilon + O(\epsilon^2) \quad (\text{C.0.7})$$

なる非自明な固定点も存在する. この固定点が Wilson-Fisher 固定点と呼ばれるものである. いま, 付録 B.1 の手続きに従って, Wilson-Fisher 固定点周りで繰り込み群方程式 (C.0.2) および (C.0.3) を線型化しよう. $r_l = r^* + \delta r_l$ などとして, ϵ の 1 次の範囲で固定点からのずれに関する線型方程式を求めれば,

$$\frac{\partial \delta r_l}{\partial l} = \left(2 - \frac{\epsilon}{3}\right) \delta r_l + \left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12}\right) \delta u_l, \quad (\text{C.0.8})$$

$$\frac{\partial \delta u_l}{\partial l} = -\epsilon \delta u_l \quad (\text{C.0.9})$$

を得る. すなわち, $\delta \mathbf{c} := {}^t(\delta r_l, \delta u_l)$ とおけば,

$$\frac{\partial}{\partial l} \delta \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{\epsilon}{3} & \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix} \delta \mathbf{c} \quad (\text{C.0.10})$$

の固有値問題に落とし込まれた．スケーリング場を決定するためには右辺の行列の右固有ベクトルあるいは左固有ベクトルを求めればよいが，ここでは両方とも求めてみよう．まず，左固有ベクトルから考えると，

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 - \frac{\epsilon}{3} & \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix} = -\epsilon \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.0.11})$$

より，

$$\langle l_1 | := \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.0.12})$$

は固有値 $-\epsilon$ に属する固有ベクトルであり，対応するスケーリング場は

$$\langle l_1 | \delta \mathbf{c} \rangle = \delta u_l \quad (\text{C.0.13})$$

である． $\epsilon > 0$ であるからこのスケーリング場は有意ではない．もう 1 つの左固有ベクトルを求めるために，

$$\begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 - \frac{\epsilon}{3} & \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix} = y_2 \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \quad (\text{C.0.14})$$

の方程式を仮定すると，1 列目よりただちに

$$y_2 = 2 - \frac{\epsilon}{3} \quad (\text{C.0.15})$$

を得る． ϵ の 1 次の範囲で x を求めれば，

$$\langle l_2 | := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{24} \end{bmatrix} \quad (\text{C.0.16})$$

であり，対応するスケーリング場は

$$\langle l_2 | \delta \mathbf{c} \rangle = \delta r_l + \left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{24} \right) \delta u_l \quad (\text{C.0.17})$$

となる．このスケーリング場で $\epsilon \rightarrow 0$ としたものが式 (2.4.8) で導入した t_l に他ならない．同様に右固有ベクトルについても考えると，

$$\begin{bmatrix} 2 - \frac{\epsilon}{3} & \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{24} \\ 1 \end{bmatrix} = -\epsilon \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{24} \\ 1 \end{bmatrix} =: -\epsilon |\mathbf{r}_1\rangle, \quad (\text{C.0.18})$$

$$\begin{bmatrix} 2 - \frac{\epsilon}{3} & \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(2 - \frac{\epsilon}{3} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =: \left(2 - \frac{\epsilon}{3} \right) |\mathbf{r}_2\rangle \quad (\text{C.0.19})$$

となり，それぞれ対応するスケーリング場は

$$\langle \delta \mathbf{c} | \mathbf{r}_1 \rangle = - \left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{24} \right) \delta r_l + \delta u_l, \quad (\text{C.0.20})$$

$$\langle \delta \mathbf{c} | \mathbf{r}_2 \rangle = \delta r_l \quad (\text{C.0.21})$$

である。実際、

$$\langle l_i | r_j \rangle = \delta_{ij} \quad (\text{C.0.22})$$

の直交関係が成り立っている。また、 $\langle l_i |$ と $|r_i\rangle$ は同じ固有値に属し、各者に対応したスケーリング場は同じスケーリング次元を持っている。 $d = 4 - \epsilon$ では有意なスケーリング場は 1 つしか存在しない。これによって、付録 B.3 での議論から、相関長の臨界指数 ν は

$$\nu = \frac{1}{2 - \frac{\epsilon}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + O(\epsilon^2) \quad (\text{C.0.23})$$

であることが直ちに結論される。なお、 ϵ の高次まで含んだ各種臨界指数の結果については [21] の 8 章を、これらの計算の詳細に関しては [45] などを参照されたい。また、 ϵ に関する展開は収束半径が 0 の漸近展開であることが知られている。そのため、適切な次数までであれば $\epsilon = 1$ とすることで 3 次元系の臨界指数を見積もることができる。実際に [21] の臨界指数と近似計算や数値計算などで得られた 3 次元系の臨界指数を比較してみると面白いだろう。

このように、 $d < 4$ では Gauss 固定点からの摂動として Wilson-Fisher 固定点が存在する。理論空間上での繰り込み群の流れの概略を図 C.0.1 に示しておく。

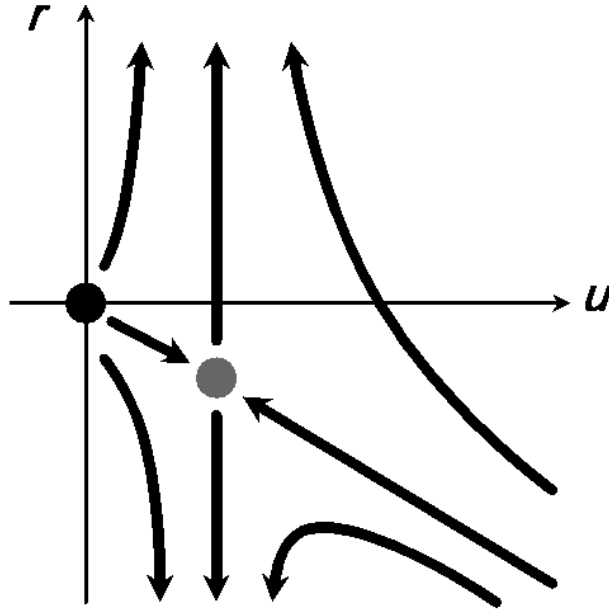


図 C.0.1 $4 - \epsilon$ 次元 ϕ^4 理論における繰り込み群変換の流れの概略。繰り込み群変換によって臨界部分空間上の理論はすべて Wilson-Fisher 固定点に吸い込まれる。一方、Wilson-Fisher 固定点から湧き出す流れの上では繰り込み群変換で写される高エネルギー側の理論が必ず存在することになる。

Wilson-Fisher 固定点では $u^* \geq 0$ であるため、有限の相互作用項を持ったスカラー場の理論として ϕ^4 理論の連続極限を取ることができる。実際、Wilson-Fisher 固定点から湧き出す流れの上では、繰り込み群

変換 \mathcal{R} で結びつく

$$H' = \mathcal{R} \circ H \quad (\text{C.0.24})$$

なる高エネルギー側の理論 H が必ず存在するが, これは n 回の繰り込み群変換で得られる理論を $H^{(n)}$ と書けば,

$$H^{(0)} = \underbrace{\mathcal{R} \circ \cdots \circ \mathcal{R}}_n \circ H^{(-n)}. \quad (\text{C.0.25})$$

を満たすような理論 $H^{(-n)}$ がいつでも見出せることを意味する. 実は任意の n に対して $H^{(-n)}$ が存在すれば, 相互作用を持った連続極限を構成することができる [46]. なお, $n \rightarrow \infty$ で $H^{(-n)} \rightarrow H^*$ となる. このとき, H^* はスケール不変性を持った場の理論を記述する.

付録 D 転送行列法による厳密解の導出

1次元および2次元の Ising 模型はともに厳密に解くことができる模型である。このような可解模型は、それ自体が数理物理学の分野における研究対象の1つとなっている一方で、例えば繰り込み群による近似計算の精度を検証する上でも大変重要な存在である。1次元および2次元 Ising 模型の厳密解を導出する方法は複数知られているが、ここでは転送行列法 (transfer matrix method) を扱うことにする。転送行列法は現在のテンソルネットワーク法、特にテンソルネットワークに対する繰り込み手法を理解する上で欠かせない概念である。

D.1 1次元 Ising 模型の厳密解

外部磁場 h との相互作用込みの 1次元 Ising 模型のハミルトニアンとして、

$$H = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} - h \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (\text{D.1.1})$$

を考える。ただし、

$$\sigma_{N+1} = \sigma_1 \quad (\text{D.1.2})$$

の周期境界条件を与える。分配関数は、

$$\begin{aligned} Z(\beta, N, h) &= \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} e^{-\beta H} \\ &= \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N = \pm 1} \exp[\beta \{J(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \cdots + \sigma_N \sigma_1) + h(\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_N)\}] \\ &= \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N = \pm 1} \exp\left[\beta \left\{J\sigma_1 \sigma_2 + \frac{h}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\right\}\right] \cdots \exp\left[\beta \left\{J\sigma_N \sigma_1 + \frac{h}{2}(\sigma_N + \sigma_1)\right\}\right] \end{aligned} \quad (\text{D.1.3})$$

のように与えられる。ここで、

$$T(\sigma_i \sigma_{i+1}) := \exp\left[\beta \left\{J\sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{h}{2}(\sigma_i + \sigma_{i+1})\right\}\right] \quad (\text{D.1.4})$$

を定義すると、分配関数は、

$$Z(\beta, N, h) = \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N = \pm 1} T(\sigma_1 \sigma_2) T(\sigma_2 \sigma_3) \cdots T(\sigma_N \sigma_1) \quad (\text{D.1.5})$$

と書くことができる。いま、 $\sigma_i = \pm 1$ であることに依拠して、 $T(\sigma_i \sigma_{i+1})$ を次のような 2×2 行列 \hat{T} の行列要素と見なす：

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \begin{bmatrix} T(1, 1) & T(1, -1) \\ T(-1, 1) & T(-1, -1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\beta(J+h)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-h)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{D.1.6})$$

この \hat{T} を転送行列と呼ぶ。 $T(\sigma_i \sigma_{i+1})$ には、 σ_i と σ_{i+1} の間の相互作用を付与する働きがあるので、転送行列を掛け加えることは 1 次元系の長さを格子間隔だけ伸ばす操作に対応している。転送行列によって、 N サイト系の分配関数は、

$$Z(\beta, N, h) = \text{Tr} [\hat{T}^N] \quad (\text{D.1.7})$$

と表現される。いまの場合、 \hat{T} は対称行列であるから直交行列で対角化できる。そのような直交行列を \hat{O} とおけば、

$$\hat{O}^{-1} \hat{T} \hat{O} = \begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix} \quad (\text{D.1.8})$$

となる。ただし、

$$\lambda_+ = e^{\beta J} \cosh \beta h + \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \beta h + e^{-2\beta J}}, \quad (\text{D.1.9})$$

$$\lambda_- = e^{\beta J} \cosh \beta h - \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \beta h + e^{-2\beta J}} \quad (\text{D.1.10})$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} Z(\beta, N, h) &= \text{Tr} [\hat{T}^N] \\ &= \text{Tr} [\hat{T} \hat{O} \hat{O}^{-1} \hat{T} \hat{O} \hat{O}^{-1} \dots \hat{O} \hat{O}^{-1} \hat{T} \hat{O} \hat{O}^{-1}] \\ &= \text{Tr} [\hat{O}^{-1} \hat{T} \hat{O} \hat{O}^{-1} \hat{T} \hat{O} \hat{O}^{-1} \dots \hat{O} \hat{O}^{-1} \hat{T} \hat{O}] \\ &= \lambda_+^N + \lambda_-^N \end{aligned} \quad (\text{D.1.11})$$

となり、 $\lambda_+ > \lambda_- > 0$ であるから、 $N \rightarrow \infty$ では、

$$Z(\beta, N, h) \rightarrow \lambda_+^N \quad (\text{D.1.12})$$

が結論される。つまり、転送行列の最大固有値が熱力学極限での分配関数を与えるのである。外部磁場がない場合、1 スピン当たりの自由エネルギー f は、

$$\begin{aligned} -\beta f &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z(\beta, N, h) \\ &= \ln \left[e^{\beta J} \cosh \beta h + \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \beta h + e^{-2\beta J}} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.1.13})$$

となる。自由エネルギー密度が求まったので、パラメタに関する微分を行うことで各種の熱力学量を求めることができる。

相関関数も転送行列法から求めることができる。簡単のため外部磁場がない場合を考えることにする。例えば、 σ_1 と σ_5 の間の相関関数は、

$$\langle \sigma_1 \sigma_5 \rangle := \frac{1}{Z(\beta, N)} \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} \sigma_1 \sigma_5 e^{-\beta H} \quad (\text{D.1.14})$$

で定義される。式 (D.1.5) の転送行列による表示を用いれば、

$$\langle \sigma_1 \sigma_5 \rangle Z(\beta, N) = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \sigma_1 T(\sigma_1 \sigma_2) T(\sigma_2 \sigma_3) \cdots T(\sigma_4 \sigma_5) \sigma_5 T(\sigma_5 \sigma_6) \cdots T(\sigma_N \sigma_1) \quad (\text{D.1.15})$$

と書ける。\$B = 0\$ の場合、転送行列 \$\hat{T}\$ の固有値は、

$$\lambda_+ = 2 \cosh \beta J, \quad \lambda_- = 2 \sinh \beta J \quad (\text{D.1.16})$$

であり、固有値 \$\lambda_{\pm}\$ に対応する固有ベクトル \$|\pm\rangle\$ は、

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.1.17})$$

である。いま、\$T(\sigma_4 \sigma_5) \sigma_5\$ を

$$\hat{S} := \begin{bmatrix} e^{\beta J} & -e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & -e^{\beta J} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1.18})$$

の行列要素と見なせば、\$\sigma_1 T(\sigma_1 \sigma_2)\$ は \$\hat{S}^T\$ の行列要素であり、基底 \$\{|\pm\rangle\}\$ の下で式 (D.1.15) のトレースを書き下せば、

$$\langle \sigma_1 \sigma_5 \rangle Z(\beta, N) = \left\langle + \left| \hat{S}^T \hat{T}^2 \hat{S} \hat{T}^{N-4} \right| + \right\rangle + \left\langle - \left| \hat{S}^T \hat{T}^2 \hat{S} \hat{T}^{N-4} \right| - \right\rangle \quad (\text{D.1.19})$$

となる。

$$\hat{S} |\pm\rangle = \lambda_{\mp} |\mp\rangle \quad (\text{D.1.20})$$

に注意すれば、

$$\langle \sigma_1 \sigma_5 \rangle Z(\beta, N) = \lambda_+^{N-4} \lambda_-^4 + \lambda_-^{N-4} \lambda_+^4 \quad (\text{D.1.21})$$

とただちに求まる。したがって、熱力学極限では、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \sigma_1 \sigma_5 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda_+^{N-4} \lambda_-^4 + \lambda_-^{N-4} \lambda_+^4}{\lambda_+^N + \lambda_-^N} = \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^4 \quad (\text{D.1.22})$$

が結論される。ここまでの議論はただちに一般化できて、\$\sigma_i\$ と \$\sigma_{i+r}\$ の間の相関関数は、

$$\langle \sigma_i \sigma_{i+r} \rangle = \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^r = \exp \left[-r \ln \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right] \quad (\text{D.1.23})$$

で与えられる。ゆえに、相関長 \$\xi\$ は、

$$\xi = \frac{1}{\ln(\lambda_+/\lambda_-)} \quad (\text{D.1.24})$$

となる。転送行列の最大固有値と第2固有値によって相関長が与えられるのである。実は、2次元以上でもこの事実が成り立つことが知られており、式 (D.1.24) の表式から明らかなように、転送行列の最大固有値

と第 2 固有値が縮退していると相関長は発散することになる．なお，1 次元の場合，式 (D.1.24) の相関長 $\xi(\beta)$ は，

$$\xi(\beta) = -\frac{1}{\ln \tanh \beta J} \quad (\text{D.1.25})$$

となっており， $\beta \in [0, \infty)$ で $\xi(\beta)$ は有限で，

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \xi(\beta) = \infty \quad (\text{D.1.26})$$

である．したがって，1 次元 Ising 模型には有限温度相転移がないことを結論し，臨界指数を定義することはできない．

D.2 2次元 Ising 模型の厳密解

外部磁場のない 2 次元 Ising 模型は厳密に解くことができる^{*24}．いま，周期境界条件が課された L 行 M 列の 2 次元格子上的 Ising 模型を考えることにすると，転送行列は同一行内および同一列内のスピン自由度を付加する部分から構成される．そこで，ある行から隣接した行への転送行列，あるいはある列から隣接した列への転送行列の 2 種類を考えることができるが，ここでは後者を考えることにしよう．すなわち，考えるべき転送行列 \hat{V} は

$$Z = \text{Tr} [\hat{V}^M] \quad (\text{D.2.1})$$

を満たすような行列である．隣接した列の間におけるスピン自由度の付与は式 (D.1.6) で $h = 0$ としたものと同じ行列で記述でき， $K := \beta J$ とおくと

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{bmatrix} = e^K (\mathbb{1} + e^{-2K} \hat{\sigma}^x) =: g(K) e^{K^* \hat{\sigma}^x} \quad (\text{D.2.2})$$

で与えられる．ただし， K^* は

$$e^{-2K} = \tanh K^* \quad (\text{D.2.3})$$

によって定義されるものとし，

$$g(K) := \sqrt{2 \sinh 2K} \quad (\text{D.2.4})$$

とおいた．この表式がある列内の j 番目のサイトごとに従うから，

$$\hat{V}_1 := \hat{T}^L = g(K)^L \exp \left[K^* \sum_{j=1}^L \hat{\sigma}_j^x \right] \quad (\text{D.2.5})$$

^{*24} 外部磁場が印加された場合の厳密解は見つかっていない．

が隣接した列の間でスピン自由度を増やす転送行列となる。一方、同一列内で行方向のスピン自由度を増やすためには、

$$\hat{V}_2 := \exp \left[K \sum_{j=1}^L \hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z \right] \quad (\text{D.2.6})$$

の転送行列を使えばよいから、

$$\hat{V} = \hat{V}_2 \hat{V}_1 \quad (\text{D.2.7})$$

が 2 次元 Ising 模型の転送行列である^{*25}。以下では、

$$\hat{\psi}_1(j) := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \hat{\sigma}_k^x \right) \hat{\sigma}_j^y, \quad (\text{D.2.8})$$

$$\hat{\psi}_2(j) := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \hat{\sigma}_k^x \right) \hat{\sigma}_j^z \quad (\text{D.2.9})$$

の Majorana 場を導入して議論する [47, 48]^{*26}。実際、Pauli 行列の交換関係から、

$$\{\hat{\psi}_i(m), \hat{\psi}_j(n)\} = \delta_{ij} \delta_{mn} \quad (\text{D.2.10})$$

の反交換関係を満たすことが分かる。Majorana 場によって、

$$\hat{V}_1 = g(K)^L \exp \left[-2iK^* \sum_{j=1}^L \hat{\psi}_1(j) \hat{\psi}_2(j) \right], \quad (\text{D.2.11})$$

$$\hat{V}_2 = \exp \left[2iK \sum_{j=1}^L \hat{\psi}_1(j) \hat{\psi}_2(j+1) \right] \quad (\text{D.2.12})$$

と表せる^{*27}。次に、運動量空間における転送行列の表式を求めよう。系の並進対称性および $\hat{\psi}_i^\dagger = \hat{\psi}_i$ の Hermite 性によって、

$$\hat{\psi}_i(n) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_q \left[\hat{C}_i(q) e^{iqn} + \hat{C}_i^\dagger(q) e^{-iqn} \right] \quad (\text{D.2.13})$$

^{*25} 転送行列 \hat{V} が 2 種類の転送行列の積で記述できるのは古典スピン系を考えているからである。行列積で書けることを除けば、 \hat{V} は横磁場 Ising 模型の転送行列と等価になっている。

^{*26} この他の解法としては Jordan-Wigner 変換によるものが有名である。Jordan-Wigner 変換は横磁場 Ising 模型などの量子スピン系における厳密解の構成でよく用いられる手法である [49]。なお、Jordan-Wigner 変換による 2 次元 Ising 模型の議論については [50] などを参照されたい。

^{*27} 周期境界条件に関する議論については [33] を参照されたい。

と平面波展開できる．ただし，展開係数は

$$\{\hat{C}_i(p), \hat{C}_j^\dagger(q)\} = \delta_{ij}\delta_{pq}, \quad \{\hat{C}_i(p), \hat{C}_j(q)\} = 0, \quad \{\hat{C}_i^\dagger(p), \hat{C}_j^\dagger(q)\} = 0 \quad (\text{D.2.14})$$

の反交換関係を満たすものとする．

$$\delta_{pq} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L e^{i(p-q)j} \quad (\text{D.2.15})$$

および式 (D.2.13) における和の範囲に注意すれば,

$$\hat{V}_1 = g(K)^L \exp \left[-2iK^* \sum_q \left(\hat{C}_1(q) \hat{C}_2^\dagger(q) + \hat{C}_1^\dagger(q) \hat{C}_2(q) \right) \right], \quad (\text{D.2.16})$$

$$\hat{V}_2 = \exp \left[2iK \sum_q \left(\hat{C}_1(q) \hat{C}_2^\dagger(q) e^{-iq} + \hat{C}_1^\dagger(q) \hat{C}_2(q) e^{iq} \right) \right] \quad (\text{D.2.17})$$

が得られる．すなわち,

$$\hat{V}_1(q) := \exp \left[-2iK^* \left(\hat{C}_1(q) \hat{C}_2^\dagger(q) + \hat{C}_1^\dagger(q) \hat{C}_2(q) \right) \right], \quad (\text{D.2.18})$$

$$\hat{V}_2(q) := \exp \left[2iK \left(\hat{C}_1(q) \hat{C}_2^\dagger(q) e^{-iq} + \hat{C}_1^\dagger(q) \hat{C}_2(q) e^{iq} \right) \right], \quad (\text{D.2.19})$$

$$\hat{V}(q) := \hat{V}_1(q) \hat{V}_2(q) \quad (\text{D.2.20})$$

とおけば，異なるモードに属する演算子どうしは可換であるため，

$$\hat{V} = g(K)^L \prod_q \hat{V}(q) \quad (\text{D.2.21})$$

となり，転送行列は各モードごとの転送行列の積として与えられることになる．こうして，問題は $\hat{V}(q)$ の固有値を求めることに集約された．この問題に取り組むために，まずは $\hat{V}(q)$ が作用する 4 次元 Fock 空間の基底として，数演算子

$$\hat{N}_i := \hat{C}_i^\dagger(q) \hat{C}_i(q) \quad (\text{D.2.22})$$

の固有状態 $|n_1 n_2\rangle$ を考えよう． $\hat{\psi}_i$ はフェルミオン場なので n_i は 0 か 1 のいずれかの値を取る．いま， $\text{Span}\{|00\rangle, |11\rangle\}$ の 2 次元部分空間に着目しよう．最初に， $|00\rangle$ を考えると，

$$\hat{C}_{1(2)}(q) \hat{C}_{2(1)}^\dagger(q) |00\rangle = 0 \quad (\text{D.2.23})$$

であるから，

$$\hat{V}(q) |00\rangle = |00\rangle \quad (\text{D.2.24})$$

となって, $|00\rangle$ は $\hat{V}(q)$ の固有値 1 に属する固有ベクトルになっていることが分かる. 次に, $|11\rangle$ を考えると,

$$\hat{C}_{1(2)}(q)\hat{C}_{2(1)}^\dagger(q)|11\rangle = \hat{C}_1(q)\hat{C}_2^\dagger(q)\hat{C}_1^\dagger(q)\hat{C}_2^\dagger(q)|00\rangle = 0 \quad (\text{D.2.25})$$

であるから, やはり

$$\hat{V}(q)|11\rangle = |11\rangle \quad (\text{D.2.26})$$

となる. つまり, $\text{Span}\{|00\rangle, |11\rangle\}$ は $\hat{V}(q)$ の縮退した固有値 1 に属する固有空間になっている. 続いて, $\text{Span}\{|10\rangle, |01\rangle\}$ の部分空間に注目しよう. いま, $|+\rangle := |10\rangle$ および $|-\rangle := |01\rangle$ とおくと,

$$-\hat{C}_1(q)\hat{C}_2^\dagger(q)|+\rangle = |-\rangle, \quad (\text{D.2.27})$$

$$-\hat{C}_1(q)\hat{C}_2^\dagger(q)|-\rangle = 0, \quad (\text{D.2.28})$$

$$-\hat{C}_2(q)\hat{C}_1^\dagger(q)|+\rangle = 0, \quad (\text{D.2.29})$$

$$-\hat{C}_2(q)\hat{C}_1^\dagger(q)|-\rangle = |+\rangle \quad (\text{D.2.30})$$

などとなる. そこで, 新しい Pauli 行列の組 $\{\hat{\tau}^i\}$ ($i = x, y, z$) を導入すれば,

$$-\hat{C}_2(q)\hat{C}_1^\dagger(q) = \hat{\tau}^+ := \frac{1}{2}(\hat{\tau}^x + i\hat{\tau}^y), \quad (\text{D.2.31})$$

$$-\hat{C}_1(q)\hat{C}_2^\dagger(q) = \hat{\tau}^- := \frac{1}{2}(\hat{\tau}^x - i\hat{\tau}^y) \quad (\text{D.2.32})$$

と見なすことができる. そこで, $\hat{V}(q)$ の $\text{Span}\{|\pm\rangle\}$ への制限を $\tilde{V}(q)$ とおけば,

$$\tilde{V}_1(q) := \exp[-2iK^*(-\hat{\tau}^- + \hat{\tau}^+)] = e^{2K^*\hat{\tau}^y}, \quad (\text{D.2.33})$$

$$\tilde{V}_2(q) := \exp[2iK(-\hat{\tau}^- e^{-iq} + \hat{\tau}^+ e^{iq})] = \exp[-2K(\sin q\hat{\tau}^x + \cos q\hat{\tau}^y)] \quad (\text{D.2.34})$$

を用いて,

$$\tilde{V}(q) := \tilde{V}_1(q)\tilde{V}_2(q) \quad (\text{D.2.35})$$

と表せる. ただし, $\tilde{V}(q)$ の固有値を求めるには, 対称化された

$$\tilde{V}(q) = \tilde{V}_2(q)^{1/2}\tilde{V}_1(q)\tilde{V}_2(q)^{1/2} \quad (\text{D.2.36})$$

の方が都合がよいので, $\tilde{V}_i(q)$ ($i = 1, 2$) を次のように変換しておこう. まず, 内部空間上で z 軸まわりに角度 $-q$ だけ回転して,

$$\tilde{V}_1(q) \mapsto \tilde{V}_1'(q) = \exp[2K^*(-\sin q\hat{\tau}^x + \cos q\hat{\tau}^y)], \quad (\text{D.2.37})$$

$$\tilde{V}_2(q) \mapsto \tilde{V}_2'(q) = e^{-2K\hat{\tau}^y} \quad (\text{D.2.38})$$

とし, さらに x 軸まわりに $-\pi/2$ だけ回転させて,

$$\tilde{V}_1'(q) \mapsto \tilde{V}_1''(q) = \exp[2K^*(-\sin q\hat{\tau}^x + \cos q\hat{\tau}^z)], \quad (\text{D.2.39})$$

$$\tilde{V}_2'(q) \mapsto \tilde{V}_2''(q) = e^{-2K\hat{\tau}^z} \quad (\text{D.2.40})$$

へ変換し, この基底で見た転送行列について議論することにする. $\tilde{V}_i''(q)$ を改めて $\tilde{V}_i(q)$ と定義すれば, それぞれの行列表示は,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [2K^*(-\sin q\hat{\tau}^x + \cos q\hat{\tau}^z)]^n \\ &= \sum_{n:\text{偶数}} \frac{(2K^*)^n}{n!} \mathbb{1} + \sum_{n:\text{奇数}} \frac{(2K^*)^n}{n!} (-\sin q\hat{\tau}^x + \cos q\hat{\tau}^z) \\ &= \cosh 2K^* \mathbb{1} + \sinh 2K^* (-\sin q\hat{\tau}^x + \cos q\hat{\tau}^z) \\ &= \begin{bmatrix} \cosh 2K^* + \sinh 2K^* \cos q & -\sinh 2K^* \sin q \\ -\sinh 2K^* \sin q & \cosh 2K^* - \sinh 2K^* \cos q \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{D.2.41})$$

$$\tilde{V}_2(q)^{1/2} = \begin{bmatrix} e^{-K} & 0 \\ 0 & e^K \end{bmatrix} \quad (\text{D.2.42})$$

となる. よって, $\text{Span}\{|\pm\rangle\}$ 上に制限された転送行列 $\tilde{V}(q)$ の表式として,

$$\tilde{V}(q) = \begin{bmatrix} e^{-2K} (\cosh 2K^* + \sinh 2K^* \cos q) & -\sinh 2K^* \sin q \\ -\sinh 2K^* \sin q & e^{2K} (\cosh 2K^* - \sinh 2K^* \cos q) \end{bmatrix} \quad (\text{D.2.43})$$

を得る. この転送行列は,

$$e^{-2J(q)} := \frac{\sinh 2K^* \sin q}{\cosh 2K^* + \sinh 2K^* \cos q}, \quad (\text{D.2.44})$$

$$h(q) := \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\cosh 2K^* + \sinh 2K^* \cos q}{\cosh 2K^* - \sinh 2K^* \cos q} \right] - 2K, \quad (\text{D.2.45})$$

$$f_0(q) := \frac{1}{2} \ln [1 + \sinh^2 2K^* \sin^2 q] \quad (\text{D.2.46})$$

とおくことにより,

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp \left[\sum_{i=1} [J(q) (\sigma_i \sigma_{i+1} - 1) + h(q) \sigma_i + f_0(q)] \right] \quad (\text{D.2.47})$$

の 1 次元 Ising 模型と等価であることが分かる. 実際,

$$T(\sigma_i \sigma_{i+1}) := \exp \left[J(q) (\sigma_i \sigma_{i+1} - 1) + \frac{h(q)}{2} (\sigma_i + \sigma_{i+1}) + f_0(q) \right] \quad (\text{D.2.48})$$

は式 (D.2.43) の転送行列 $\hat{V}(q)$ を再現する。つまり、各モードごとの転送行列 $\hat{V}(q)$ を特定の Fock 部分空間上で見ると外部磁場が印加された 1 次元 Ising 模型と等価に見えるのである。ここまでの議論はそのような意味で適切な部分空間を探索していたことになる。式 (D.2.43) の転送行列 $\hat{V}(q)$ の固有値を λ とおくと、 λ は

$$\lambda^2 - 2(\cosh 2K^* \cosh 2K - \sinh 2K^* \sinh 2K \cos q) \lambda + 1 = 0 \quad (\text{D.2.49})$$

の解として与えられる。2 次方程式の解と係数の関係から、重複込みの 2 つの解は互いに逆数の関係になっていることが分かる。そこで、これら 2 つの解を $\epsilon(q, K) > 0$ として $e^{\pm\epsilon(q, K)}$ とおくと、式 (D.2.3) の K^* の定義に注意すれば、

$$\begin{aligned} e^{\epsilon(q, K)} + e^{-\epsilon(q, K)} &= 2(\cosh 2K^* \cosh 2K - \sinh 2K^* \sinh 2K \cos q) \\ &= 2(\cosh 2K^* \cosh 2K - \cos q) \end{aligned} \quad (\text{D.2.50})$$

が従う。以上で転送行列 $\hat{V}(q)$ の全ての固有値が求められた。式 (D.2.1) および式 (D.2.21) から分配関数は、

$$\begin{aligned} Z &= g(K)^{LM} \prod_q \text{Tr} [\hat{V}(q)^M] \\ &= g(K)^{LM} \prod_q \left[2 + e^{M\epsilon(q, K)} + e^{-M\epsilon(q, K)} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.2.51})$$

である。 $M \rightarrow \infty$ の極限を考えれば、分配関数に寄与するのは転送行列の最大固有値 $e^{\epsilon(q, K)}$ のみであり、単位体積あたりの自由エネルギー f は、

$$\begin{aligned} -\beta f &= \lim_{L, M \rightarrow \infty} \frac{1}{LM} \ln \left[g(K)^{LM} \prod_q e^{M\epsilon(q, K)} \right] \\ &= \ln \sqrt{2 \sinh 2K} + \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_q \epsilon(q, K) \\ &= \frac{1}{2} \ln (2 \sinh 2K) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \epsilon(q, K) \end{aligned} \quad (\text{D.2.52})$$

となる。ただし、 $L \rightarrow \infty$ の極限で

$$\frac{1}{L} \sum_q \epsilon(q, K) \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \epsilon(q, K) \quad (\text{D.2.53})$$

となることを用いた。ここで、

$$\epsilon = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx \ln (2 \cosh \epsilon - 2 \cos x) \quad (\text{D.2.54})$$

の積分表示を使えば、式 (D.2.50) より、

$$\begin{aligned}
 -\beta f &= \frac{1}{2} \ln(2 \sinh 2K) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{dx}{\pi} \ln 2 (\cosh 2K^* \cosh 2K - \cos q - \cos x) \\
 &= \ln 2 + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} \ln [\sinh 2K (\cosh 2K^* \cosh 2K - \cos q - \cos x)] \\
 &= \ln 2 + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \ln [\cosh^2 2K - \sinh 2K (\cos k_1 + \cos k_2)]
 \end{aligned} \tag{D.2.55}$$

の表式を得る。ただし、最後の行では K^* の定義式 (D.2.3) を用いた上で積分変数を取り換えた。これが 2 次元 Ising 模型の厳密解である。他の表式として、

$$s := \frac{2 \sinh 2K}{\cosh^2 2K} \tag{D.2.56}$$

のパラメタを導入して、

$$-\beta f = \ln(2 \cosh 2K) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \ln \left[1 - \frac{s}{2} (\cos k_1 + \cos k_2) \right] \tag{D.2.57}$$

を用いることも多い。このとき、パラメタ s の T 依存性は図 D.2.1 のようになっている。

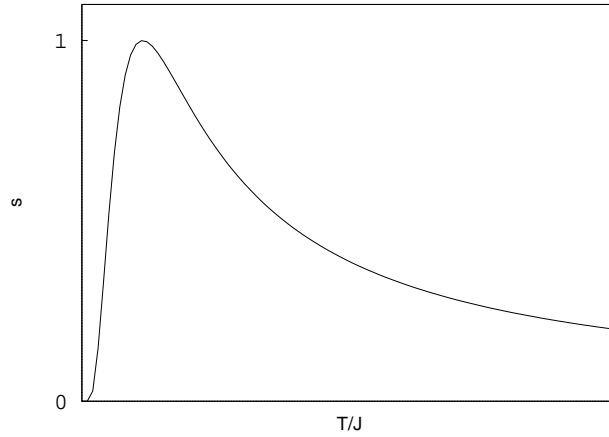


図 D.2.1 式 (D.2.56) の温度依存性。 $T = 0$ では $s = 0$ であり、温度を上げていくとしばらく単調増加して最大値 $s = 1$ に到達する。その後は単調減少し、 $T \rightarrow \infty$ で $s \rightarrow 0$ となる。

2 次転移があることを見るために比熱の特異性について見ておく。式 (D.2.57) を β で微分して内部エネルギーを求めればよいが、計算の見通しをよくするために式 (D.2.57) 中の積分をあらかじめ次のように変形しておこう。まず、

$$\theta_1 := \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \theta_2 := \frac{k_1 - k_2}{2} \tag{D.2.58}$$

とおくことにより、

$$I := \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \ln \left[1 - \frac{s}{2} (\cos k_1 + \cos k_2) \right] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 \theta}{(2\pi)^2} \ln [1 - s \cos \theta_1 \cos \theta_2] \tag{D.2.59}$$

となる。ここで、積分公式、

$$\int_0^\pi dx \ln[a + b \cos x] = \pi \ln \left[\frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 - b^2} \right) \right] \quad (\text{D.2.60})$$

を用いる^{*28}。これによって式 (D.2.59) の θ_2 に関する積分を実行すると、

$$I = \int_0^\pi \frac{d\theta}{2\pi} \ln \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - s^2 \cos^2 \theta} \right) \right] \quad (\text{D.2.61})$$

の 1 変数積分に帰着される。この表式下で自由エネルギーの逆温度微分から内部エネルギー密度 E を計算すると、

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial}{\partial \beta} \beta f \\ &= -2J \tanh 2K - \frac{1}{4\pi s^2} \frac{\partial s^2}{\partial \beta} \left[\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - s^2 \cos^2 \theta}} - \pi \right] \\ &= -2J \tanh 2K - \frac{1}{4\pi s^2} \frac{\partial s^2}{\partial \beta} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2 \omega}} - \pi \right] \\ &= -2J \tanh 2K - \frac{1}{4\pi s^2} \frac{\partial s^2}{\partial \beta} [2K(s) - \pi] \end{aligned} \quad (\text{D.2.62})$$

となる。ただし、 $K(k)$ は

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (\text{D.2.63})$$

で与えられる第 1 種完全楕円積分である。また、

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} \frac{\partial s^2}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \ln s^2 \\ &= 4J (\coth 2K - 2 \tanh 2K) \\ &= 4J \coth 2K (1 - 2 \tanh^2 2K) \end{aligned} \quad (\text{D.2.64})$$

であるから、

$$\begin{aligned} E &= -2J \tanh 2K - J \coth 2K (1 - 2 \tanh^2 2K) \left[\frac{2}{\pi} K(s) - 1 \right] \\ &= -J \coth 2K \left[1 - (1 - 2 \tanh^2 2K) \frac{2}{\pi} K(s) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.2.65})$$

となる。これを T に関する関数として描いたものが図 D.2.2 である。第 1 種完全楕円積分 $K(s)$ は $s = 1$ において発散するが、このとき式 (D.2.56) より、

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2 \sinh 2K}{\cosh^2 2K} \Leftrightarrow (\sinh 2K - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sinh 2K = 1 \end{aligned} \quad (\text{D.2.66})$$

^{*28} 式 (D.2.54) で用いた積分表示は式 (D.2.60) の特別な場合になっている。

となって,

$$1 - 2 \tanh^2 2K = 1 - \frac{2 \sinh^2 2K}{1 + \sinh^2 2K} = 0 \quad (\text{D.2.67})$$

であるから $K(s)$ 由来の発散が打ち消され, 内部エネルギーには特異性は生じないことが分かる.

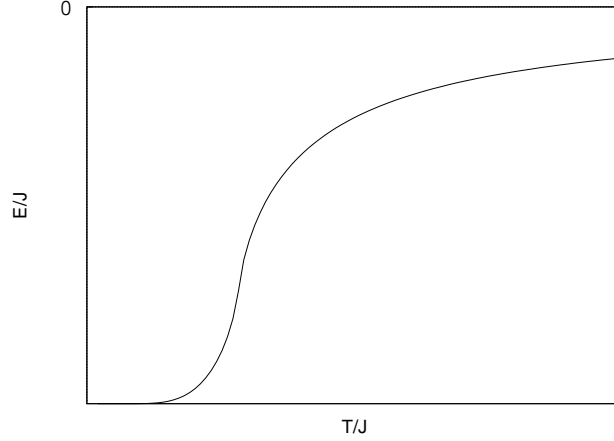


図 D.2.2 2次元 Ising 模型の内部エネルギーの厳密解. $s = 1$ における発散は打ち消されており, 特異性は存在しない.

単位体積当たりの比熱 C は,

$$C = -\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} E \quad (\text{D.2.68})$$

から求められるが, 第 1 種完全楕円積分に対する微分を行う必要がある. 微分の公式は,

$$\frac{d}{dk} K(k) = \frac{1}{k(1-k^2)} E(k) - \frac{1}{k} K(k) \quad (\text{D.2.69})$$

である. ただし, $E(k)$ は第 2 種完全楕円積分であり,

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} d\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \quad (\text{D.2.70})$$

で定義される. これによって,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} K(s) &= \frac{\partial \ln s}{\partial \beta} \left[\frac{E(s)}{1-s^2} - K(s) \right] \\ &= 2J \coth 2K (1 - 2 \tanh^2 2K) \left[\frac{\cosh^2 2K}{\cosh^2 2K - 4 \tanh^2 2K} E(s) - K(s) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.2.71})$$

が従うから,

$$\begin{aligned}
\frac{C}{\beta^2} &= \frac{4J^2}{\pi} \coth^2 2K \left[-\frac{1}{\cosh^2 2K} \left\{ \frac{\pi}{2} - (1 - 2 \tanh^2 2K) K(s) \right\} + \frac{4 \tanh^2 2K}{\cosh^2 2K} K(s) \right. \\
&\quad \left. - (1 - 2 \tanh^2 2K)^2 \left\{ \frac{\cosh^2 2K}{\cosh^2 2K - 4 \tanh^2 2K} E(s) - K(s) \right\} \right] \\
&= \frac{4J^2}{\pi} \coth^2 2K \left[\left\{ 4 \tanh^2 2K (1 - \tanh^2 2K) + (1 - 2 \tanh^2 2K)^2 \right\} K(s) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\cosh 2K - 2 \tanh 2K \sinh 2K)^2}{\cosh^2 2K - 4 \tanh^2 2K} E(s) - \frac{1}{\cosh^2 2K} \left\{ \frac{\pi}{2} - (1 - 2 \tanh^2 2K) K(s) \right\} \right] \\
&= \frac{4J^2}{\pi} \coth^2 2K \left[K(s) - E(s) - \frac{1}{\cosh^2 2K} \left\{ \frac{\pi}{2} - (1 - 2 \tanh^2 2K) K(s) \right\} \right] \quad (D.2.72)
\end{aligned}$$

が結論される.

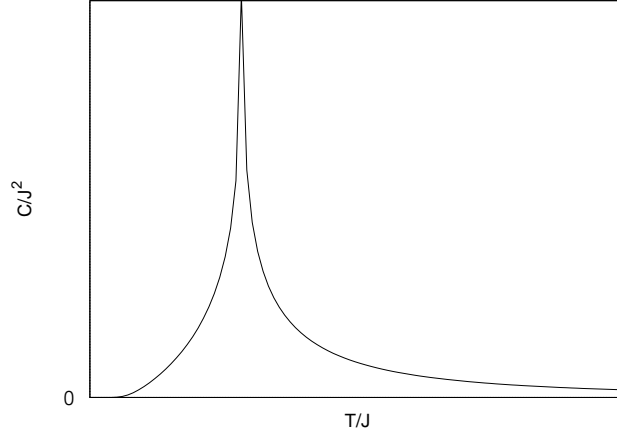


図 D.2.3 2次元 Ising 模型の比熱の厳密解. $T = T_c$ における発散は第 1 種完全楕円積分に由来した対数発散になっている.

今度は内部エネルギーのときと違って, $s = 1$ における $K(s)$ の発散が残る. すなわち, $s = 1$ において比熱は発散しており, 式 (D.2.66) から,

$$\sinh(2\beta_c J) = 1 \Leftrightarrow \beta_c J = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \quad (D.2.73)$$

が転移点となっている. およそ $T_c/J \approx 2.269$ である. なお, 第 2 種完全楕円積分 $E(s)$ は $0 \leq s \leq 1$ の範囲では発散はない. そこで, 比熱の発散の程度を見るために, ϵ を微小量として $s = 1 - \epsilon$, すなわち転移点近傍における $K(s)$ を考えてみよう. このとき,

$$\begin{aligned}
K(1 - \epsilon) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + 2\epsilon \sin^2 \theta}} \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2 - \delta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + 2\epsilon \sin^2 \theta}} \quad (D.2.74)
\end{aligned}$$

であるから, $x := \pi/2 - \theta$ で積分を書き換えて x が微小な領域に着目することで,

$$\begin{aligned} K(1 - \epsilon) &\sim \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2\epsilon}} \\ &\sim \int \frac{dx}{x + \epsilon} \end{aligned} \quad (\text{D.2.75})$$

と評価できるので, 比熱の発散は対数発散であることが分かり, 比熱の臨界指数は,

$$\alpha = 0 \quad (\text{D.2.76})$$

である. 比熱の温度依存性を図示したものが図 D.2.3 である.

以上が自由エネルギー, 内部エネルギー, および比熱の厳密解である. 比熱の臨界指数を求めたが, この他の臨界指数も厳密に求められている. 例えば, 磁化の厳密解は [47, 51] など導出されており,

$$\beta = \frac{1}{8} \quad (\text{D.2.77})$$

である. 残りの臨界指数は付録 B.2 および付録 B.3 で導出したスケーリング, ハイパー・スケーリングの関係式から決定できる. その結果をまとめると下表のようになる:

臨界指数	2次元 Ising 模型
α	0
β	1/8
γ	7/4
δ	15
ν	1
η	1/4

付録 E 高次特異値分解

HOTRG によるテンソルの圧縮は、数学的にはテンソルに対する高次特異値分解 (Higher-Order Singular Value Decomposition, 以下 HOSVD) を行っていることと等価である。HOSVD は行列の特異値分解をテンソルの場合に拡張した操作となっており、Tucker 分解と呼ばれることもある。ここでは、HOTRG のために必要な HOSVD の知識のみをまとめる。HOSVD のより詳しい解説については [52] を参照されたい。

E.1 行列の特異値分解

はじめに、行列の特異値分解について簡単に復習しておく。任意の $m \times n$ の複素数値行列 \hat{A} は、

$$\hat{A} = \hat{U} \hat{\Sigma} \hat{V}^\dagger \quad (\text{E.1.1})$$

の行列積に分解することができる。ただし、 \hat{U} は $m \times m$ の、 \hat{V} は $n \times n$ のユニタリ行列であり、 $\hat{\Sigma}$ はその ij 成分が $\sigma_i \delta_{ij}$ であるような $m \times n$ の非負行列である。式 (E.1.1) を行列 \hat{A} の特異値分解 (Singular Value Decomposition) といい、 σ_i を行列 \hat{A} の特異値と呼ぶ。特異値分解は $\hat{A}^\dagger \hat{A}$ および $\hat{A} \hat{A}^\dagger$ の固有値分解から理解することができ、 $m > n$ の場合を考えれば十分である。 $\hat{A}^\dagger \hat{A}$ は $n \times n$ の Hermite 行列であるから、ユニタリ対角化できる。簡単のため、 $\text{rank}(\hat{A}^\dagger \hat{A}) = n$ を仮定しておく。 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ として $\hat{A}^\dagger \hat{A}$ の固有値 λ_i に属する規格化済みの固有ベクトルを $|v_i\rangle$ と書くと、

$$\langle v_i | \hat{A}^\dagger \hat{A} | v_i \rangle = \lambda_i \quad (\text{E.1.2})$$

が従うが、左辺は $\hat{A} |v_i\rangle$ のノルムであるので $\lambda_i \geq 0$ である。また、

$$\hat{A} \hat{A}^\dagger \hat{A} |v_i\rangle = \lambda_i \hat{A} |v_i\rangle \quad (\text{E.1.3})$$

であるから、 $\hat{A} |v_i\rangle$ は $\hat{A} \hat{A}^\dagger$ の固有値 λ_i に属する固有ベクトルになっていることも分かる。そこで、

$$|u_i\rangle := \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \hat{A} |v_i\rangle \quad (\text{E.1.4})$$

とおく。ただし、いまは $m > n$ を仮定しているのでこれだけでは $\hat{A} \hat{A}^\dagger$ の全ての固有ベクトルは決まらない。そこで、 $r \in \{n+1, \dots, m\}$ として $m-n$ 個のベクトル $|u_r\rangle$ を Gram-Schmidt の直交化法で $|u_i\rangle$ と直交するように構成する。こうして、

$$\hat{U} := [|u_1\rangle \quad |u_2\rangle \quad \cdots \quad |u_m\rangle], \quad (\text{E.1.5})$$

$$\hat{V} := [|v_1\rangle \quad |v_2\rangle \quad \cdots \quad |v_n\rangle] \quad (\text{E.1.6})$$

のユニタリ行列を定義できる。すると、

$$\begin{aligned}
 \hat{V}^\dagger \hat{A}^\dagger \hat{U} &= \begin{bmatrix} \langle v_1 | \hat{A}^\dagger \\ \langle v_2 | \hat{A}^\dagger \\ \vdots \\ \langle v_n | \hat{A}^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |u_1\rangle & |u_2\rangle & \cdots & |u_m\rangle \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} \langle u_1 | u_1 \rangle & \sqrt{\lambda_1} \langle u_1 | u_2 \rangle & \cdots & \sqrt{\lambda_1} \langle u_1 | u_m \rangle \\ \sqrt{\lambda_2} \langle u_2 | u_1 \rangle & \sqrt{\lambda_2} \langle u_2 | u_2 \rangle & \cdots & \sqrt{\lambda_2} \langle u_2 | u_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\lambda_n} \langle u_n | u_1 \rangle & \sqrt{\lambda_n} \langle u_n | u_2 \rangle & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \langle u_n | u_m \rangle \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
 &=: \hat{\Sigma}^\dagger
 \end{aligned} \tag{E.1.7}$$

となって、式 (E.1.1) の特異値分解の表式が得られる。

$$\sigma_i := \sqrt{\lambda_i} \geq 0 \tag{E.1.8}$$

が \hat{A} の特異値であり、応用上、

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0 \tag{E.1.9}$$

になるように並べ換えておくことが多い。 $|u_i\rangle$ ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$) は左特異ベクトル、 $|v_j\rangle$ ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$) は右特異ベクトルと呼ばれ、ユニタリ行列 \hat{U} と \hat{V} でのこれらの特異ベクトルの並びも式 (E.1.9) の順序に対応させるものとする。式 (E.1.4) の定義より、左特異ベクトルと右特異ベクトルとは

$$\hat{A} |v_i\rangle = \sigma_i |u_i\rangle, \tag{E.1.10}$$

$$\hat{A}^\dagger |u_i\rangle = \sigma_i |v_i\rangle \tag{E.1.11}$$

の関係で結びついている。ここまで $\text{rank}(\hat{A}^\dagger \hat{A}) = n$ を仮定していたが、 $\text{rank}(\hat{A}^\dagger \hat{A}) = r \leq n$ の場合には、 $|v_i\rangle$ ($i \in \{r+1, \dots, n\}$) も Gram-Schmidt 法で構成する必要があり、行列 $\hat{\Sigma}$ は

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{E.1.12}$$

で与えられることになる。また、 $m = n$ で \hat{A} が Hermite 行列の場合、 \hat{A} の特異値と固有値および特異ベクトルと固有ベクトルとは一致する。

なお、 \hat{A} の特異値の中で縮退があった場合、特異値分解は一意的ではなくなる。実際、例えば $\sigma_1 = \sigma_2 =: \sigma$ だったとすると、

$$\hat{A}|v_1\rangle = \sigma|u_1\rangle, \quad (\text{E.1.13})$$

$$\hat{A}|v_2\rangle = \sigma|u_2\rangle \quad (\text{E.1.14})$$

であるから、任意の複素数 α, β に対して、

$$\hat{A}(\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle) = \sigma(\alpha|u_1\rangle + \beta|u_2\rangle) \quad (\text{E.1.15})$$

となって、縮退した特異値に対応する特異ベクトルは縮退した線型空間内で自由に選ぶことができる。実は、この縮退した空間内で特異ベクトルの選択に自由度が生じてしまうと、HOTRG におけるブロックスピン変換が一意的ではなくなり、信頼できる結果を得ることが難しくなってしまう。そのため、縮退した特異値に属する特異ベクトルをすべて含むようにボンド次元を選択しなければならない。

E.2 テンソルに対する特異値分解

以下で $\mathcal{A} \in K^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$ と書いたら、 \mathcal{A} は K 上に値を取る N 階のテンソルを意味し、 \mathcal{A} の各要素 $a_{i_1 i_2 \cdots i_N}$ が持つ脚は $i_k \in \{1, 2, \dots, I_k\}$ の範囲を走るものとする。例えば、 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$ は全部で $I_1 I_2 \cdots I_N$ 個の複素数の値を取る N 階のテンソルである。また、 I_k をテンソル \mathcal{A} の第 k 次元と呼ぶことにする。いま、 N 階のテンソル \mathcal{A} に対して、 $\hat{A}_{(n)} \in \text{Mat}_{I_n \times (I_{n+1} I_{n+2} \cdots I_N I_1 I_2 \cdots I_{n-1})}(K)$ 、つまり K 上の I_n 行 $I_{n+1} I_{n+2} \cdots I_N I_1 I_2 \cdots I_{n-1}$ 列の行列 $\hat{A}_{(n)}$ を次で定義する。すなわち、 $\hat{A}_{(n)}$ は行として i_n 番目に、列として

$$(i_{n+1} - 1)I_{n+2}I_{n+3} \cdots I_N I_1 I_2 \cdots I_{n-1} + (i_{n+2} - 1)I_{n+3}I_{n+4} \cdots I_N I_1 I_2 \cdots I_{n-1} + \cdots \\ + (i_N - 1)I_1 I_2 \cdots I_{n-1} + (i_1 - 1)I_2 \cdots I_{n-1} + \cdots + (i_{n-2} - 1)I_{n-1} + i_{n-1}$$

番目に \mathcal{A} の要素 $a_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n i_{n+1} \cdots i_N}$ を持つ $I_n \times (I_{n+1} I_{n+2} \cdots I_N I_1 I_2 \cdots I_{n-1})$ 行列として定義するのである。一見煩雑に見えるが、 $\hat{A}_{(n)}$ の列番号に関しては I_k 進法 ($k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{n\}$) を組み合わせたものになっている点に着目すれば自然な定義になっていることが分かるだろう。

例題として、次のような要素からなる 3 階のテンソル $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 3 \times 2}$ を考えよう：

$$a_{i_1 i_2 i_3} = i_2 \delta_{i_1 i_3}. \quad (\text{E.2.1})$$

このとき、 $\hat{A}_{(1)} \in \text{Mat}_{2 \times 6}(\mathbb{R})$ 、 $\hat{A}_{(2)} \in \text{Mat}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ 、 $\hat{A}_{(3)} \in \text{Mat}_{2 \times 6}(\mathbb{R})$ はそれぞれ、

$$\hat{A}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.2.2})$$

$$\hat{A}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.2.3})$$

$$\hat{A}_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2.4})$$

などとなる．この例から明らかなように，テンソル \mathcal{A} に対する各行列表示が持つ階数は一意的には定まらない．実際， $\text{rank}(\hat{A}_{(1)}) = \text{rank}(\hat{A}_{(3)}) = 2$ だが $\text{rank}(\hat{A}_{(2)}) = 1$ となっている．このことはテンソルに対して行列の階数に相当するものを数学的に上手く定義するのが難しいことを示唆している．行列の特異値分解をテンソルへと拡張する上でこの困難は看過できないが，以下では行列 $\hat{A}_{(k)}$ ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) のそれぞれに対する特異値分解から HOSVD を構成する立場を取ることにし，この問題にはこれ以上立ち入らないことにする．

テンソルに対していくつかの基本的な演算を定義しておく． $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ に対して，

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle := \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_N} a_{i_1 i_2 \dots i_N} b_{i_1 i_2 \dots i_N}^* \quad (\text{E.2.5})$$

を \mathcal{A} と \mathcal{B} のスカラー積と呼ぶ．また，

$$\|\mathcal{A}\| := \sqrt{\langle \mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle} \quad (\text{E.2.6})$$

を \mathcal{A} の Frobenius ノルムと呼ぶ．次に， $\hat{U} \in \text{Mat}_{J_n \times I_N}(\mathbb{C})$ に対して，

$$(\mathcal{A} \times_n \hat{U})_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_N} := \sum_{i_n} a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n i_{n+1} \dots i_N} U_{j_n i_n} \quad (\text{E.2.7})$$

の縮約演算記号を定義する． \times_n によってテンソルのどの次元との縮約かを明示している．最後に任意の $m \times n$ 行列 $\hat{F} = (f_{ij})$ と $p \times q$ 行列 G に対する Kronecker 積 \otimes を

$$\hat{F} \otimes \hat{G} := \begin{bmatrix} f_{11}\hat{G} & f_{12}\hat{G} & \dots & f_{1n}\hat{G} \\ f_{21}\hat{G} & f_{22}\hat{G} & \dots & f_{2n}\hat{G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}\hat{G} & f_{m2}\hat{G} & \dots & f_{mn}\hat{G} \end{bmatrix} \quad (\text{E.2.8})$$

と定義する．Kronecker 積 $\hat{F} \otimes \hat{G}$ は $mp \times nq$ 行列になる．

以上の準備の下，任意の $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ は

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} \times_1 \hat{U}^{(1)} \times_2 \hat{U}^{(2)} \dots \times_N \hat{U}^{(N)} \quad (\text{E.2.9})$$

と分解することができる．この分解を HOSVD と呼ぶ．ただし， $\hat{U}^{(k)} \in \text{Mat}_{I_k \times I_k}(\mathbb{C})$ ($k \in \{1, 2, \dots, N\}$) のユニタリ行列であり， $\mathcal{S} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ は次の 2 つの性質を満たす．まず， $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, I_k\}$ として \mathcal{S} の第 k 次元を $i_k = \alpha, \beta$ に固定してできる $N-1$ 階のテンソル $\mathcal{S}_{i_k=\alpha}, \mathcal{S}_{i_k=\beta} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{k-1} \times I_{k+1} \times \dots \times I_N}$ に対して， $\alpha \neq \beta$ ならば，

$$\langle \mathcal{S}_{i_k=\alpha}, \mathcal{S}_{i_k=\beta} \rangle = 0 \quad (\text{E.2.10})$$

が任意の $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ で成り立つ。また、同じく任意の $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ に対して、

$$\|\mathcal{S}_{i_k=1}\| \geq \|\mathcal{S}_{i_k=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{S}_{i_k=I_k}\| \geq 0 \quad (\text{E.2.11})$$

の順序化が可能である。HOSVD は行列の特異値分解を含んでいる。実際、式 (E.1.1) は、

$$\hat{A} = \hat{\Sigma} \times_1 \hat{U} \times_2 \hat{V}^\dagger \quad (\text{E.2.12})$$

と書くことができ、行列 Σ が式 (E.1.12) で与えられることが第一の性質であり、式 (E.1.9) の特異値の並べ替えが第二の性質である。一方、 $\hat{\Sigma}$ の要素は全て 0 以上の実数であったのに対し、HOSVD で $\hat{\Sigma}$ に相当する \mathcal{S} の要素は複素数に値を取る。HOSVD はテンソル \mathcal{A} の行列表示 $\hat{A}_{(k)}$ ($k \in \{1, 2, \dots, N\}$) に対する特異値分解から理解することができる。まず、 $\hat{A}_{(k)}$ に対する特異値分解によって、

$$\hat{A}_{(k)} = \hat{U}^{(k)} \hat{\Sigma}^{(k)} \hat{V}^{(k)\dagger} \quad (\text{E.2.13})$$

を得る。ただし、簡単のため $\text{rank}(\hat{A}_{(k)}) = I_k$ を仮定して、

$$\hat{\Sigma}^{(k)} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{(k)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{(k)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{I_k}^{(k)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2.14})$$

とし、 $\hat{U}^{(k)}$ は $I_k \times I_k$ 、 $\hat{V}^{(k)}$ は $I_{k+1}I_{k+2} \dots I_N I_1 \dots I_{k-1} \times I_{k+1}I_{k+2} \dots I_N I_1 \dots I_{k-1}$ のユニタリ行列である。このようにして求められる N 個のユニタリ行列 $\{\hat{U}^{(k)}\}$ を使って、

$$\mathcal{S} := \mathcal{A} \times_1 \hat{U}^{(1)\dagger} \times_2 \hat{U}^{(2)\dagger} \dots \times_N \hat{U}^{(N)\dagger} \quad (\text{E.2.15})$$

を考えよう。実は、この \mathcal{S} が式 (E.2.9) の \mathcal{S} になっているのである。まず、再度このテンソルに対する行列表示を作ることにより、

$$\hat{A}_{(k)} = \hat{U}^{(k)} \hat{S}_{(k)} \left(\hat{U}^{(k+1)} \otimes \hat{U}^{(k+2)} \otimes \dots \otimes \hat{U}^{(N)} \otimes \hat{U}^{(1)} \otimes \dots \otimes \hat{U}^{(k-1)} \right)^\dagger \quad (\text{E.2.16})$$

を得る。ここで、式 (E.2.13) と (E.2.16) を比較することで、

$$\hat{S}_{(k)} = \hat{\Sigma}^{(k)} \hat{V}^{(k)\dagger} \left(\hat{U}^{(k+1)} \otimes \hat{U}^{(k+2)} \otimes \dots \otimes \hat{U}^{(N)} \otimes \hat{U}^{(1)} \otimes \dots \otimes \hat{U}^{(k-1)} \right) \quad (\text{E.2.17})$$

であるが、

$$\left(\hat{S}_{(k)} \hat{S}_{(k)}^\dagger \right)_{\alpha\beta} = \langle \mathcal{S}_{i_k=\alpha}, \mathcal{S}_{i_k=\beta} \rangle \quad (\text{E.2.18})$$

が従うため、式 (E.2.17) より $\alpha \neq \beta$ ならば、

$$\langle \mathcal{S}_{i_k=\alpha}, \mathcal{S}_{i_k=\beta} \rangle = 0 \quad (\text{E.2.19})$$

が成り立つ。同様に、

$$\left(\hat{S}_{(k)} \hat{S}_{(k)}^\dagger \right)_{\alpha\alpha} = \|\mathcal{S}_{i_k=\alpha}\|^2 \quad (\text{E.2.20})$$

だから、やはり式 (E.2.17) から

$$\|\mathcal{S}_{i_k=1}\| = \sigma_1^{(k)} \geq \|\mathcal{S}_{i_k=2}\| = \sigma_2^{(k)} \geq \cdots \geq \|\mathcal{S}_{i_k=I_k}\| = \sigma_{I_k}^{(k)} \quad (\text{E.2.21})$$

が成立する．以上から式 (E.2.15) で定義した \mathcal{S} は式 (E.2.9) の \mathcal{S} が満たすべき 2 つの性質を満たしていることが確認できた．任意のテンソル \mathcal{A} の行列表示はいつでも作ることができ、特異値分解は任意の長方形列に対して実行できるため、HOSVD は任意のテンソルに対して行うことができるのである．なお、行列表示の作り方が異なれば当然その行列の特異値分解で得られる特異値自体も異なる．例えば、 $\sigma_1^{(k)}$ と $\sigma_1^{(k+1)}$ は一般には異なる値を取る．一方で、任意の $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ に対して、

$$\sum_{i_k=1}^{I_k} \left(\sigma_{i_k}^{(k)} \right)^2 = \sum_{i_k=1}^{I_k} \|\mathcal{S}_{i_k=\alpha}\|^2 = \|\mathcal{A}\|^2 \quad (\text{E.2.22})$$

が従うため、特異値分解から求まる特異値の総和は行列表示の作り方にはよらない量になっている．

付録 F テンソルネットワーク法の改良をめぐって

テンソルネットワーク法の計算コストはボンド次元の大きさによって決定される．すでに見たように，テンソルネットワークに対する粗視化手法においては，ボンド次元を大きくすればするほど近似の精度が向上していく．一方で，新しいアルゴリズムを付加することで同じボンド次元であっても計算精度が向上される場合もある．ただし，アルゴリズムを追加するとそれに起因して計算コストが増大してしまうため，どうしても計算精度と計算コストのトレードオフの構図が発生する．このトレードオフの関係は高次元のテンソルネットワーク法になるほど顕著になるものと思われる．

テンソルネットワークの粗視化手法に対して最も議論されている改良点の 1 つとしては，粗視化の過程において短距離相関の除去を徹底することが挙げられる．短距離相関の逐次除去は Wilson 流の繰り込み群ではお馴染みの考え方である．HOTRG による 2 次元 Ising 模型の実証計算から確認したように，テンソルネットワーク法は転移点近傍での計算がやや不得手であるのに対し，Wilson 流の繰り込み群は原理的に臨界点周りでの解析に向いた方法論である．そこで，Wilson 流の繰り込み群の利点をテンソルネットワーク法へも取り込めないかというモチベーションから短距離相関の逐次除去を実現しようという試みが存在する．このようなテンソルネットワーク法の改良として最も有名なものはテンソルネットワーク繰り込み (Tensor Network Renormalization, 以下 TNR) である [53, 54]．TNR は Levin と Nave が導入した TRG に対する改良になっている．TNR の基本的なアイデアは，テンソルに対するブロックスピン変換を実行に先立ってエンタングルメント解消と呼ばれる処置を行うというものである．これによって，小さなボンド次元にも関わらず，それよりも大きなボンド次元で実行した TRG よりも高い精度を実現することに成功した．ただし，TRG がそうであったのと同様に，TNR も 2 次元系でしか運用することができない．

テンソルネットワーク形式における短距離相関を議論する際によく用いられるのが Corner Double Line テンソル (以下 CDL テンソル) である．2 次元正方格子系における CDL テンソルとは，

$$T_{ijkl}^{\text{CDL}} := M_{i_1 k_2} M_{k_1 j_2} M_{j_1 l_2} M_{l_1 i_2} \quad (\text{F.0.1})$$

のような構造を持った局所テンソルのことである．ただし，右辺の M_{mn} は任意の行列要素であり，CDL テンソルの脚は $i := i_1 \otimes i_2$ などで与えられる．右辺が行列積にはなっていない点に注意が必要である．CDL テンソルのダイアグラム表示が図 F.0.1 である．

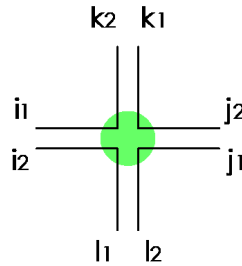


図 F.0.1 T_{ijkl}^{CDL} のダイアグラム表示．4 階のテンソルのように見えるが，実際には単に 2 階のテンソルの集まりである．

CDL テンソルによるネットワークとして,

$$Z := \text{Tr} \left[\prod T^{\text{CDL}} \right] \quad (\text{F.0.2})$$

を考えてみよう. ダイアグラムにすればすぐ分かるように, CDL テンソルが作るネットワークは無数のトレースの集まりになっている (図 F.0.2). すなわち, N 個の CDL テンソルからなるネットワーク (F.0.2) は,

$$\text{Tr} \left[\prod^N T^{\text{CDL}} \right] = N \text{Tr} [T^{\text{CDL}}] \quad (\text{F.0.3})$$

となっている. 実際, 1 個の CDL テンソルに対して,

$$\text{Tr} [T^{\text{CDL}}] = \sum_{i,k} T_{iikk}^{\text{CDL}} = \sum_{i_1, i_2, k_1, k_2} M_{i_1 k_2} M_{k_1 i_1} M_{i_2 k_1} M_{k_2 i_2} = \text{Tr} [M^4] \quad (\text{F.0.4})$$

となっていることから明らかである. テンソルネットワーク形式では, テンソルの縮約によって遠方のテンソルと結びつくことによって協力現象が生じるという描像になっていたことを思い出すと, CDL テンソルのネットワークは局所的な相互作用しか記述しないようなモデルになっており, この意味で CDL テンソルは短距離相関のみからなる模型と呼ばれることがある.

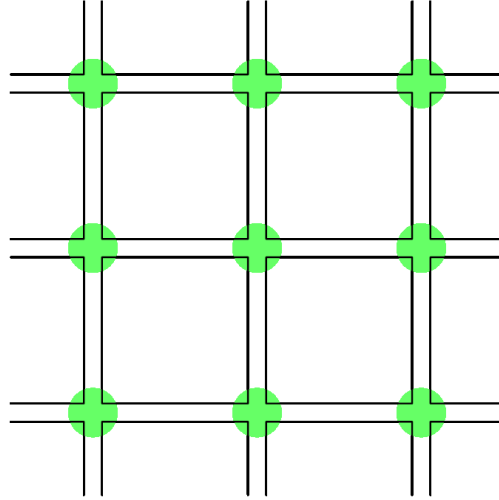


図 F.0.2 T^{CDL} の縮約からできるネットワーク. N 個の CDL テンソルのネットワークに対するトレースは N 個のトレースで与えられる.

短距離相関の逐次除去をテンソルネットワーク上で実現することは, 各粗視化のステップにおいて全ての $\text{Tr} [T^{\text{CDL}}]$ を評価し終わることを意味するが, 実際の TRG や HOTRG では 1 回粗視化を実行しても次に粗視化されるネットワーク上に元々の $\text{Tr} [T^{\text{CDL}}]$ が残ってしまう [55]. したがって, この意味で Wilson 流の繰り込み群の精神が反映されていないということになる. CDL テンソルを導入することでこのような主張に至ったわけであるが, TRG や HOTRG にはそもそもエネルギーによる自由度の識別というプロセ

スが不在なので当然の結果とも言えるだろう。TRG や HOTRG が見ているのはエネルギーではなく密度行列の特異値であり、これらはエンタングルメント・エントロピーを与える量に他ならない*29。

CDL テンソルの意味での短距離相関は、実際に物理的に興味がある模型をテンソルネットワーク形式に書き換えた際にも生じていると考えられている。また、高次元系での短距離相関はさらに複雑な構造を持って発生していると考えられている [55]。しかし、短距離相関の除去によるテンソルネットワーク法の改良を本格的に議論するためには、CDL テンソルの描像とは独立にテンソルネットワークにおける短距離相関の定式化を行った上で、その定量的な評価の方法論を確立することが不可欠だろう。そして、現実問題として、そのような改良による計算コストと、素朴にボンド次元を上げた場合の計算コストの比較に耐えるものでなければならない。

*29 エンタングルメント・エントロピーを持ち出すと今度はどの部分系の間でこれらの量を見ているのかに答えないといけない。しかし、HOTRG のアルゴリズムにはそもそも部分系という概念が介在していないのでこの質問に答えるのはそう簡単なことではないと考えられるが、このような観点から HOTRG のアルゴリズムを議論した論文として [56] を挙げておく。

参考文献

- [1] R. J. Baxter, “Dimers on a Rectangular Lattice,” *Journal of Mathematical Physics* **9** (Apr., 1968) 650–654.
- [2] S. R. White, “Density matrix formulation for quantum renormalization groups,” *Phys. Rev. Lett.* **69** (Nov, 1992) 2863–2866. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.69.2863>.
- [3] R. Ors, “Tensor networks for complex quantum systems,” [arXiv:1812.04011](https://arxiv.org/abs/1812.04011) [`cond-mat.str-el`].
- [4] M. Levin and C. P. Nave, “Tensor renormalization group approach to two-dimensional classical lattice models,” *Phys. Rev. Lett.* **99** (Sep, 2007) 120601. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.120601>.
- [5] Z.-C. Gu, F. Verstraete, and X.-G. Wen, “Grassmann tensor network states and its renormalization for strongly correlated fermionic and bosonic states,” [arXiv:1004.2563](https://arxiv.org/abs/1004.2563) [`cond-mat.str-el`].
- [6] Z.-C. Gu, “Efficient simulation of Grassmann tensor product states,” *Phys. Rev.* **B88** no. 11, (2013) 115139, [arXiv:1109.4470](https://arxiv.org/abs/1109.4470) [`cond-mat.str-el`].
- [7] Y. Shimizu, “Tensor renormalization group approach to a lattice boson model,” *Mod. Phys. Lett.* **A27** (2012) 1250035.
- [8] D. Kadoh, Y. Kuramashi, Y. Nakamura, R. Sakai, S. Takeda, and Y. Yoshimura, “Tensor network analysis of critical coupling in two dimensional ϕ^4 theory,” [arXiv:1811.12376](https://arxiv.org/abs/1811.12376) [`hep-lat`].
- [9] H. Kawauchi and S. Takeda, “Phase structure analysis of $CP(N-1)$ model using Tensor renormalization group,” *PoS LATTICE2016* (2016) 322, [arXiv:1611.00921](https://arxiv.org/abs/1611.00921) [`hep-lat`].
- [10] Y. Shimizu and Y. Kuramashi, “Grassmann tensor renormalization group approach to one-flavor lattice Schwinger model,” *Phys. Rev.* **D90** no. 1, (2014) 014508, [arXiv:1403.0642](https://arxiv.org/abs/1403.0642) [`hep-lat`].
- [11] Y. Shimizu and Y. Kuramashi, “Critical behavior of the lattice Schwinger model with a topological term at $\theta = \pi$ using the Grassmann tensor renormalization group,” *Phys. Rev.* **D90** no. 7, (2014) 074503, [arXiv:1408.0897](https://arxiv.org/abs/1408.0897) [`hep-lat`].
- [12] Y. Shimizu and Y. Kuramashi, “Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition in lattice Schwinger model with one flavor of Wilson fermion,” *Phys. Rev.* **D97** no. 3, (2018) 034502, [arXiv:1712.07808](https://arxiv.org/abs/1712.07808) [`hep-lat`].
- [13] S. Takeda and Y. Yoshimura, “Grassmann tensor renormalization group for the one-flavor lattice grossneveu model with finite chemical potential,” *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2015** no. 4, (2015) 043B01. <http://dx.doi.org/10.1093/ptep/ptv022>.
- [14] D. Kadoh, Y. Kuramashi, Y. Nakamura, R. Sakai, S. Takeda, and Y. Yoshimura, “Tensor network formulation for two-dimensional lattice $\mathcal{N} = 1$ Wess-Zumino model,” *JHEP* **03** (2018)

- 141, [arXiv:1801.04183 \[hep-lat\]](#).
- [15] Z. Y. Xie, J. Chen, M. P. Qin, J. W. Zhu, L. P. Yang, and T. Xiang, “Coarse-graining renormalization by higher-order singular value decomposition,” *Phys. Rev. B* **86** (Jul, 2012) 045139. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.86.045139>.
 - [16] W. Shun, X. Zhi-Yuan, C. Jing, B. Normand, and X. Tao, “Phase transitions of ferromagnetic potts models on the simple cubic lattice,” *Chinese Physics Letters* **31** no. 7, (2014) 070503. <http://stacks.iop.org/0256-307X/31/i=7/a=070503>.
 - [17] Y. Kuramashi and Y. Yoshimura, “Three-dimensional finite temperature Z_2 gauge theory with tensor network scheme,” [arXiv:1808.08025 \[hep-lat\]](#).
 - [18] R. Sakai, S. Takeda, and Y. Yoshimura, “Higher-order tensor renormalization group for relativistic fermion systems,” *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2017** no. 6, (2017) 063B07. <http://dx.doi.org/10.1093/ptep/ptx080>.
 - [19] Y. Yoshimura, Y. Kuramashi, Y. Nakamura, S. Takeda, and R. Sakai, “Calculation of fermionic Green functions with Grassmann higher-order tensor renormalization group,” *Phys. Rev.* **D97** no. 5, (2018) 054511, [arXiv:1711.08121 \[hep-lat\]](#).
 - [20] R. Kenna, “Finite size scaling for $O(N)$ ϕ^4 -theory at the upper critical dimension,” *Nuclear Physics B* **691** no. 3, (2004) 292 – 304. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321304003323>.
 - [21] K. G. Wilson and J. Kogut, “The renormalization group and the ε expansion,” *Physics Reports* **12** no. 2, (1974) 75 – 199. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157374900234>.
 - [22] C. de Carvalho, S. Caracciolo, and J. Frhlich, “Polymers and $g|\phi|^4$ theory in four dimensions,” *Nuclear Physics B* **215** no. 2, (1983) 209 – 248. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321383902134>.
 - [23] M. Aizenman and R. Graham, “On the renormalized coupling constant and the susceptibility in ϕ_4^4 field theory and the ising model in four dimensions,” *Nuclear Physics B* **225** no. 2, (1983) 261 – 288. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321383900536>.
 - [24] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 2002. <https://books.google.co.jp/books?id=N8DBpTzBCJYC>.
 - [25] F. J. Wegner and E. K. Riedel, “Logarithmic corrections to the molecular-field behavior of critical and tricritical systems,” *Phys. Rev. B* **7** (Jan, 1973) 248–256. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.7.248>.
 - [26] H. W. J. Blöte and R. H. Swendsen, “Critical behavior of the four-dimensional ising model,” *Phys. Rev. B* **22** (Nov, 1980) 4481–4483. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.22.4481>.
 - [27] J. Rudnick, H. Guo, and D. Jasnow, “Finite-size scaling and the renormalization group,”

- Journal of Statistical Physics* **41** no. 3, (Nov, 1985) 353–373.
<https://doi.org/10.1007/BF01009013>.
- [28] E. Sanchez-Velasco, “A finite-size scaling study of the 4d ising model,” *Journal of Physics A: Mathematical and General* **20** no. 14, (1987) 5033.
<http://stacks.iop.org/0305-4470/20/i=14/a=041>.
- [29] R. Kenna and C. Lang, “Finite size scaling and the zeroes of the partition function in the Φ_4^4 model,” *Physics Letters B* **264** no. 3, (1991) 396 – 400.
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939190367Y>.
- [30] E. Bittner, W. Janke, and H. Markum, “Ising spins coupled to a four-dimensional discrete regge skeleton,” *Phys. Rev. D* **66** (Jul, 2002) 024008.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.66.024008>.
- [31] P. H. Lundow and K. Markström, “Critical behavior of the ising model on the four-dimensional cubic lattice,” *Phys. Rev. E* **80** (Sep, 2009) 031104.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.80.031104>.
- [32] M. Lüscher and P. Weisz, “Scaling laws and triviality bounds in the lattice ϕ^4 theory: (i). one-component model in the symmetric phase,” *Nuclear Physics B* **290** (1987) 25 – 60.
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321387901775>.
- [33] 西森秀稔, 相転移・臨界現象の統計物理学. 新物理学シリーズ. 培風館, 2005.
<https://books.google.co.jp/books?id=8S9NAAAACAAJ>.
- [34] P. Kopietz, L. Bartosch, and F. Schütz, *Introduction to the Functional Renormalization Group*. Springer, 2010. <https://books.google.co.jp/books?id=cGa5Q9BeMNUC>.
- [35] A. Koci and J. Kogut, “Compositeness, triviality and bounds on critical exponents for fermions and magnets,” *Nuclear Physics B* **422** no. 3, (1994) 593 – 604.
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321394904472>.
- [36] P. M. Stevenson, “Comparison of conventional RG theory with lattice data for the 4-D Ising model,” *Nucl. Phys.* **B729** (2005) 542–557, [arXiv:hep-lat/0507038](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0507038) [hep-lat].
- [37] P. Cea, M. Consoli, and L. Cosmai, “Large logarithmic rescaling of the scalar condensate: A Subtlety with substantial phenomenological implications,” [arXiv:hep-lat/0501013](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0501013) [hep-lat].
- [38] C. Domb, M. Green, and J. Lebowitz, *Phase transitions and critical phenomena*, vol. 6 of *Phase Transitions and Critical Phenomena*. Academic Press, 1976.
<https://books.google.co.jp/books?id=7YIpAQAAMAAJ>.
- [39] H. H. Zhao, Z. Y. Xie, Q. N. Chen, Z. C. Wei, J. W. Cai, and T. Xiang, “Renormalization of tensor-network states,” *Phys. Rev. B* **81** (May, 2010) 174411.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.81.174411>.
- [40] 松枝宏明, 量子系のエンタングルメントと幾何学: ホログラフィー原理に基づく異分野横断の数理. 森北出版, 2016. <https://books.google.co.jp/books?id=0o4PkAEACAAJ>.

- [41] Z.-C. Gu and X.-G. Wen, “Tensor-entanglement-filtering renormalization approach and symmetry-protected topological order,” *Phys. Rev. B* **80** (Oct, 2009) 155131.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.80.155131>.
- [42] K. G. Wilson, “The renormalization group: Critical phenomena and the kondo problem,” *Rev. Mod. Phys.* **47** (Oct, 1975) 773–840.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.47.773>.
- [43] 奥西巧一, “Wilson の数値くりこみ群とエネルギースケールの選択性 (量子科学における双対性とスケール),” *数理解析研究所講究録* **1705** (Aug, 2010) 203–211.
<https://ci.nii.ac.jp/naid/110007690140/>.
- [44] S. Morita and N. Kawashima, “Calculation of higher-order moments by higher-order tensor renormalization group,” *arXiv:1806.10275 [cond-mat.stat-mech]*.
- [45] D. Amit and V. Martin-Mayor, *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena: Graphs to Computers Third Edition*. World Scientific, 2005.
<https://books.google.co.jp/books?id=VEI8DQAAQBAJ>.
- [46] 江沢洋・渡辺敬二・鈴木増雄・田崎晴明, *くりこみ群の方法*. 現代物理学叢書. 岩波書店, 2000.
<https://books.google.co.jp/books?id=GItcAAAACAAJ>.
- [47] T. D. Schultz, D. C. Mattis, and E. H. Lieb, “Two-dimensional ising model as a soluble problem of many fermions,” *Rev. Mod. Phys.* **36** (Jul, 1964) 856–871.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.36.856>.
- [48] R. Shankar and G. Murthy, “Nearest-neighbor frustrated random-bond model in $d=2$: Some exact results,” *Phys. Rev. B* **36** (Jul, 1987) 536–545.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.36.536>.
- [49] E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, “Two soluble models of an antiferromagnetic chain,” *Annals of Physics* **16** no. 3, (1961) 407 – 466.
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491661901154>.
- [50] J. B. Kogut, “An introduction to lattice gauge theory and spin systems,” *Rev. Mod. Phys.* **51** (Oct, 1979) 659–713. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.51.659>.
- [51] C. N. Yang, “The spontaneous magnetization of a two-dimensional ising model,” *Phys. Rev.* **85** (Mar, 1952) 808–816. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.85.808>.
- [52] L. D. Lathauwer, B. D. Moor, and J. Vandewalle, “A multilinear singular value decomposition,” *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **21** no. 4, (Mar., 2000) 1253–1278.
<https://doi.org/10.1137/S0895479896305696>.
- [53] G. Evenbly and G. Vidal, “Tensor network renormalization,” *Phys. Rev. Lett.* **115** (Oct, 2015) 180405. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.180405>.
- [54] G. Evenbly, “Algorithms for tensor network renormalization,” *Phys. Rev. B* **95** (Jan, 2017) 045117. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.95.045117>.
- [55] M. Hauru, C. Delcamp, and S. Mizera, “Renormalization of tensor networks using

- graph-independent local truncations,” *Phys. Rev. B* **97** (Jan, 2018) 045111.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.97.045111>.
- [56] H. Ueda, K. Okunishi, and T. Nishino, “Doubling of entanglement spectrum in tensor renormalization group,” *Phys. Rev. B* **89** (Feb, 2014) 075116.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.89.075116>.