計算物理学 II 第 1 回レポート課題 解答例

名前
学籍番号
所属

2025 年 11 月 18 日

1

略.

2

図 1 は式 (2.1) で与えられる関数 $f(x)$ を表している.

$$f(x) = \exp\left[\left(x\sin(\alpha x)\right)^2\right]. \tag{2.1}$$

3

図 2 は茨城県の人口の推移を表している. 図 2 は国勢調査 [1] のデータに基づく.

4

(A) $q > 0$ の時,

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{-tq} = \left[-\frac{1}{q}\mathrm{e}^{-tq}\right]_0^\infty = \frac{1}{q} \tag{4.1}$$

となる.

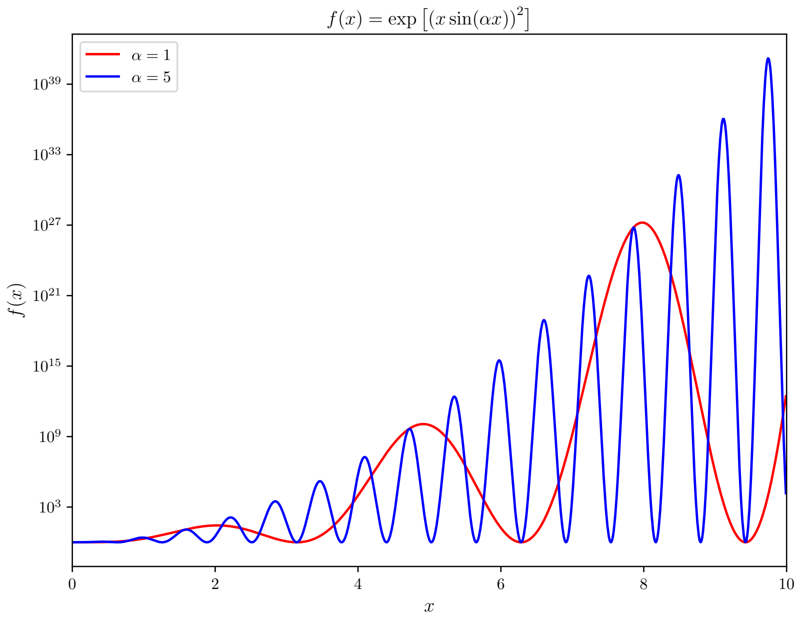

図 1　課題 2 の関数のプロット

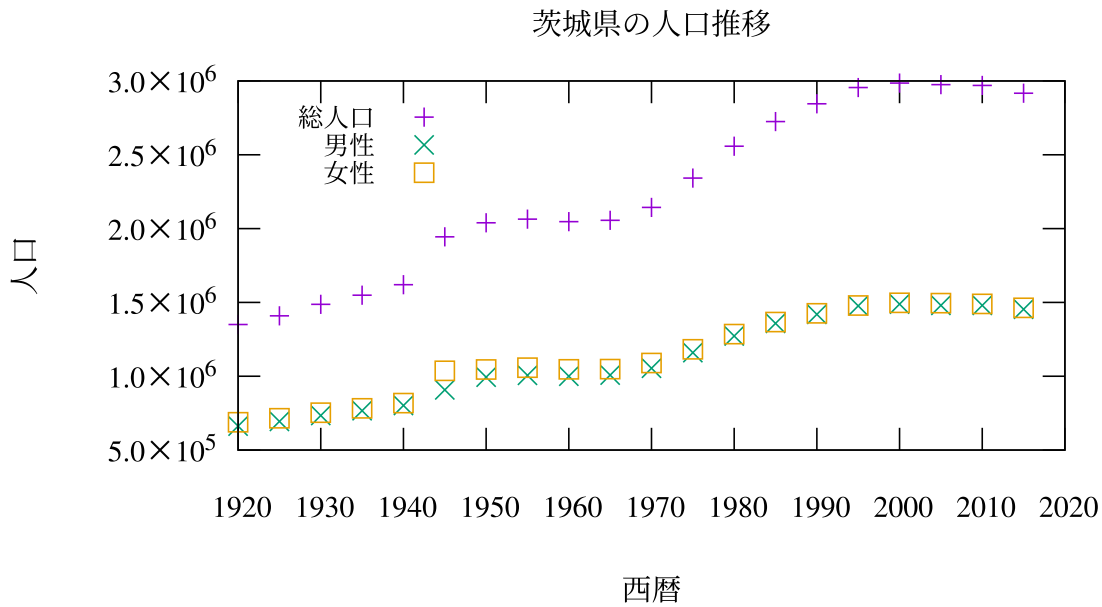

図 2　課題 3 のプロット

(B) 被積分関数になっている指数関数の肩を平方完成すれば良い.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_i \ \mathrm{e}^{-tk_i^2+\mathrm{i}k_i r_i} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_i \ \exp\left[-t\left\{\left(k_i - \frac{\mathrm{i}r_i}{2t}\right)^2 + \frac{r_i^2}{4t^2}\right\}\right] \\
&= \exp\left[-\frac{r_i^2}{4t}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_i \ \exp\left[-t\left(k_i - \frac{\mathrm{i}r_i}{2t}\right)^2\right] \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left[-\frac{r_i^2}{4t}\right]. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

なお, 最後の等式は Gauss 積分による.

(C)

$$
\begin{aligned}
g(\boldsymbol{r}) &= \left(\prod_{i=1}^{d} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_i\right) \int_0^{\infty} \mathrm{d}t \ \mathrm{e}^{-t\left(|\boldsymbol{k}|^2+a^2\right)+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{d}t \ \mathrm{e}^{-a^2 t} \prod_{i=1}^{d} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_i \ \mathrm{e}^{-tk_i^2+\mathrm{i}k_i r_i} \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{d}t \ \mathrm{e}^{-a^2 t} \prod_{i=1}^{d} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left[-\frac{r_i^2}{4t}\right] \\
&= \pi^{d/2} \int_0^{\infty} \mathrm{d}t \ t^{-d/2} \exp\left[-a^2 t - \frac{|\boldsymbol{r}|^2}{4t}\right]. \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

ここで, $t = s/a^2$ と変数変換すると,

$$
\begin{aligned}
g(\boldsymbol{r}) &= \pi^{d/2} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{a^2} \ \left(\frac{s}{a^2}\right)^{-d/2} \exp\left[-s - \frac{(a|\boldsymbol{r}|)^2}{s}\right] \\
&= \pi^{d/2} a^{d-2} \int_0^{\infty} \mathrm{d}s \ s^{-d/2} \exp\left[-s - \frac{(a|\boldsymbol{r}|)^2}{s}\right] \\
&= \pi^{d/2} a^{d-2} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a|\boldsymbol{r}|}{2}\right)^{d/2-1}}{\frac{1}{2}\left(\frac{a|\boldsymbol{r}|}{2}\right)^{d/2-1}} \int_0^{\infty} \mathrm{d}s \ s^{-(d/2-1)-1} \exp\left[-s - \frac{(a|\boldsymbol{r}|)^2}{s}\right] \\
&= \pi^{d/2} a^{d-2} \frac{K_{d/2-1}(a|\boldsymbol{r}|)}{\frac{1}{2}\left(\frac{a|\boldsymbol{r}|}{2}\right)^{d/2-1}} \\
&= 2\pi^{d/2} a^{d-2} \left(\frac{2}{a|\boldsymbol{r}|}\right)^{d/2-1} K_{d/2-1}(a|\boldsymbol{r}|). \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

(D) $|\boldsymbol{r}|$ が十分大きい場合, $K_{d/2-1}(a|\boldsymbol{r}|)$ は,

$$K_{d/2-1}(a|\boldsymbol{r}|) \sim \frac{\mathrm{e}^{-a|\boldsymbol{r}|}}{\sqrt{a|\boldsymbol{r}|}} \tag{4.5}$$

と振る舞うので,

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{r}) &= 2\pi^{d/2} a^{d-2} \left(\frac{2}{a|\boldsymbol{r}|}\right)^{d/2-1} K_{d/2-1}(a|\boldsymbol{r}|) \\ &\sim 2\pi^{d/2} a^{d-2} \left(\frac{2}{a|\boldsymbol{r}|}\right)^{d/2-1} \frac{\mathrm{e}^{-a|\boldsymbol{r}|}}{\sqrt{a|\boldsymbol{r}|}} \\ &= 2^{d/2}\pi^{d/2} a^{d-2} \frac{\mathrm{e}^{-a|\boldsymbol{r}|}}{\sqrt{a|\boldsymbol{r}|}^{d-1}} \end{aligned} \tag{4.6}$$

となり, $g(\boldsymbol{r})$ の $|\boldsymbol{r}|$ 依存性は,

$$g(\boldsymbol{r}) \sim \frac{\mathrm{e}^{-a|\boldsymbol{r}|}}{|\boldsymbol{r}|^{(d-1)/2}} \tag{4.7}$$

で与えられる.

参考文献

[1] 政府統計の総合窓口. 国勢調査「男女別人口-全国, 都道府県 (大正 9 年 ∼ 平成 27 年)」. `https://www.e-stat.go.jp/stat-search/files?page=1&layout=datalist&toukei=00200521&tstat=000001011777&cycle=0&tclass1=000001094741&stat_infid=000031524010&tclass2val=0`.