1-Logique propositionnelle

Intelligence Artificielle

Enseignant : Dr. Ahmed MAALEL

maalel.ahmed@gmail.com

Avant de commencer..

***Les propositions ce sont des assertifs* : utilisés pour donner ou exprimer une affirmation sur le monde (information, observation, témoignage, etc.), par exemple, « *il fait beau dehors* ».**

Ce qui exclut d'autres catégories d'énoncés :

- Les directifs : expriment des directives : « je te demande de travailler »;
- Les promissifs : expriment des promesses, vœux, etc. : « je te promets de venir demain » ;
- Les déclaratifs : accomplissent une action par leur seule énonciation : « je déclare la séance ouverte »;
- Les expressifs : expriment un état mental (excuse, remerciement, félicitation, hommage, etc. : « félicitation ! »;
- Les questions : « Est-ce que Ali aime la marche ? ».

La logique des propositions est un langage formel

– S’intéresse à la représentation des énoncés assertifs (les propositions) qui peuvent être soit vrais ou faux, ainsi qu’aux relations entre ces énoncés;

– Utilise comme éléments de base des propositions élémentaires (appelées aussi atomes);

– Est définit au moyen de :

- ❖Un alphabet : ensemble de symboles,
- ❖Une syntaxe : ensemble d’expressions possibles du langage (appelées formules bien formées),
- ❖ Une sémantique : les significations des expressions du langage.

L'alphabet de la logique des propositions

Il est constitué de :

- Un ensemble dénombrable de variables propositionnelles (propositions élémentaires) appelées formules atomiques
- Connecteurs : des opérateurs qui permettent de lier des propositions entre elles :
  - Conjonction $\wedge$: $(P \wedge Q)$
  - Disjonction $\vee$: $(P \vee Q)$
  - Implication $\rightarrow$: $P \rightarrow Q$
  - Équivalence $\leftrightarrow$: $P \leftrightarrow Q$
  - Négation $\neg$: $(\neg P)$ ou (Non P)

Exemples d'expressions en logique des propositions

P : Ali a 20 ans

- Q : Ali prend l'avion
- R : Ali est le frère de Sami
- S : L'eau est claire
- T : Ali est malade
- $P \wedge R$: Ali a 20 ans et est le frère de Sami
- $Q \rightarrow T$: Si Ali prend l'avion, alors il est malade

Les formules (ou formules bien formées) sont données par les règles suivantes

1) Si P est une formule atomique alors P est une formule,
2) Si P est une formule alors $(\neg P)$ est une formule
3) Si P et Q sont des formules alors $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \leftrightarrow Q$ sont des formules
4) Rien n'est une formule de la logique propositionnelle qui n'est pas obtenu par les règles 1), 2) et 3) dans un nombre fini d'étapes.

Notation : les lettres majuscules sont utilisées pour désigner les formules.

Ordre de priorité des connecteurs

Ordre de priorité décroissante des connecteurs : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

– Ces priorités permettent de lever les ambiguïtés en cas d'omission des parenthèses

– Dans le cas où deux connecteurs ont la même priorité, et en l'absence de parenthèses, l'associativité se fait de gauche à droite :

Exemple :

la formule $P \rightarrow Q \leftrightarrow \neg R$ doit se lire : $((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))$

Équivalences logiques

- $\neg(\neg P) \equiv P$
- $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
- $P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$ — Contraposition
- $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$ — De Morgan
- $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$ — De Morgan
- $(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P)$ — Commutativité
- $(P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$ — Commutativité
- $((P \wedge Q) \wedge R) \equiv (P \wedge (Q \wedge R))$ — Associativité
- $((P \vee Q) \vee R) \equiv (P \vee (Q \vee R))$ — Associativité
- $(P \vee (Q \wedge R)) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ — Distributivité
- $(P \wedge (Q \vee R)) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ — Distributivité

Arbre de construction (ou arbre syntaxique)

- Les nœuds de l'arbre sont des formules. La racine de l'arbre correspond à la formule de départ. Les feuilles de l'arbre correspondent aux formules atomiques qui composent la formule de départ.

- Tout nœud non terminal a un ou deux successeurs.

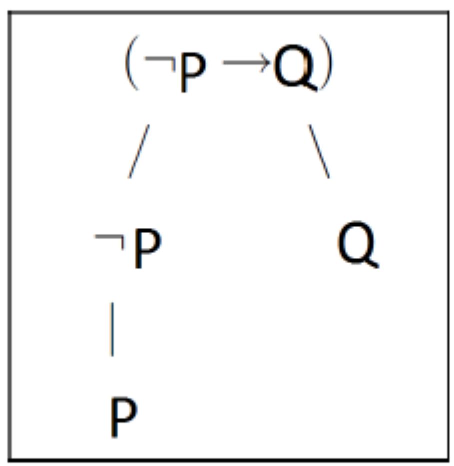
- Si le nœud a un seul successeur, il s'agit de l'application de la règle 2) tandis que si le nœud a deux successeurs, il s'agit de l'application de la règle 3).

Arbre de construction (ou arbre syntaxique)

L'arbre syntaxique peut être vu comme la trace de vérification qu'une suite de symboles (une expression) est une formule bien formé.

Exemple : la formule bien formée $(\neg P \rightarrow Q)$ peut être décomposée de la manière suivante :

(2)



(3, →)

Littéral et clause

- Un **littéral** est une variable propositionnelle (littéral positif) ou la négation d'une variable propositionnelle (littéral négatif).

  Exemples :

  P est un littéral positif

  ¬P est un littéral négatif
- Une **clause** est une disjonction de littéraux.

<u>Cas particulier :</u> un littéral isolé est une clause

<u>Exemples :</u> $P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n$ et ¬P sont des clauses

Théorie des modèles (c-à-d sémantique)

Interprétation d'une formule : consiste à lui attribuer une valeur logique 1 (pour vrai) et 0 (pour faux).

- Pour pouvoir interpréter une formule , il est nécessaire d'avoir une interprétation de chaque formule atomique qui la compose.
- Table de vérité : chaque ligne correspond à une combinaison possible de valeurs de vérité pour les formules atomiques qui compose la formule à interpréter.
- Une formule composée de n atomes propositionnels admet 2^n interprétations

Théorie des modèles (suite)

– **Modèle d'une formule** : une interprétation I est un modèle d'une formule φ (ou I satisfait φ) ssi I(φ)=1 (noté $\vDash_{\mathrm{I}} \varphi$).

  Il peut exister zéro, un ou plusieurs modèles pour une formule donnée.

– **Modèle d'un ensemble de formules** : un modèle d'un ensemble de formules F={φ_1, φ_2, …, φ_n} est une interprétation qui rend vraie chaque formule φ_1, φ_2, …, φ_n de F.

Théorie des modèles (suite)

- **Formule insatisfiable** (ou inconsistante, ou anti-tautologie) : est une formule fausse dans toute interprétation.

- **Formule satisfiable** : (ou consistante) : est une formule vraie dans au moins une interprétation.

Théorie des modèles (c-à-d sémantique)

- **Ensemble de formules insatisfiables** : un ensemble de formules $F=\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ est insatisfiable (ou inconsistant), ssi il n'existe aucune interprétation I telle que chaque formule φ_i de F soit satisfiable par I.

- **Ensemble de formules satisfiables** : un ensemble de formules $F=\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ est satisfiable (ou consistant), s'il existe au moins un modèle de F.

Théorie des modèles

- **Formule invalide** : est une formule fausse dans au moins une interprétation.
- **Formule valide** (ou tautologie) : est une formule vraie dans toute interprétation. On la note $\models \varphi$.

  Les tautologies sont des vérités universelles qui ne dépendent pas de l'état du monde.
- **Conséquence valide** : soient deux formules P et Q, nous disons que P est la conséquence valide de Q (notée par $P \models Q$) , si tout modèle de P est un modèle de Q.

Règles d'inférence

- $P \rightarrow Q, P \models Q$ — Modus Ponens
- $P \rightarrow Q, \neg Q \models \neg P$ — Modus Tollens
- $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \models P \rightarrow R$ — Transitivité
- $P \wedge Q \models P$ — Simplification
- $P \wedge Q \models Q$ — Simplification
- $P, Q \models P \wedge Q$ — Conjonction

Raisonnement

Exemple

- P : il pleut
- Q : je prends mon parapluie
- Hypothèses :

  P

  $P \rightarrow Q$
- Inférence (Modus Ponens) :

  Q

Exercice

On considère les propositions suivantes :

1. Si Pierre est rentré chez lui, alors Jean est allé au cinéma.
2. Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui.
3. Si Jean est allé au cinéma, alors Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui.
4. Marie n'est pas à la bibliothèque et Jean est allé au cinéma.
5. Pierre est rentré chez lui.

Question :

Formaliser ces propositions en logique des propositions. On notera A, B, C, D, E les cinq formules obtenues (en suivant l'ordre de l'énoncé)

Correction exercice 1

Notons M la proposition (ou variable propositionnelle) Marie est à la bibliothèque, J la proposition Jean est allé au cinéma, P la proposition Pierre est rentré chez lui..

- A est la formule $P \Rightarrow J$.
- B est la formule $M \vee P$.
- C est la formule $J \Rightarrow (M \vee P)$.
- D est la formule $\neg M \wedge J$.
- E est P.

Agents fondés sur la logique propositionnelle

- Se composent d'une base de connaissances et d'un mécanisme d'inférence
- Connaissances sur le monde : prendre de bonnes décisions, formulées dans une LP et stockés dans la base de connaissances
- Étant donnée l'historique des percepts et les règles d'inférence, un agent peut déduire l'état du monde
  - Décrire un modèle logique complet des actions et des effets
  - Les règles d'inférence utilisées peuvent servir à trouver des preuves

Limites

La logique des propositions s’adapte mal aux environnements de taille illimité

Il lui manque la puissance pour traiter le temps, l’espace et les schémas des relations entre objets

La logique propositionnelle ne peut pas traiter les valeurs particulières et les valeurs universelles

- Si un homme est malade, il ne sort pas

  Jean est un homme malade

  Jean ne sort pas

  La règle $P \rightarrow \neg Q$, R $\neg Q'$
- Chacun est fidèle à quelqu'un : $\forall X \; \exists Y$ FIDELE(X, Y)

Logique de prédicats.. ?