Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе № 1 "Интерполяция табличных функций" дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/30003 Никоноров А. К.
Преподаватель Музалевский А.В.

13 февраля 2025 г.

1. Формулировка задачи

Интерполирование табличной функции представляет собой ключевую задачу численных методов, позволяющую вычислять значения функции в промежуточных точках и заменять сложные зависимости полиномиальными приближениями для упрощения интегрирования, дифференцирования и других математических операций, при этом обеспечивая достаточную близость интерполяционного полинома к исходной функции.

2. Описание метода

Даны $(x_i, y_i), i = 0, .., n$ $x^h = \{x_i\}_{i=0}^n$ - сетка, а $y^h = \{y_i\}_{i=0}^n$ - сеточная функция. Пусть табличная функция, заданная парой элементов - (x^h, y^h). Нужно построить функцию $\phi(x)$ в форме интерполяционного полинома Эрмита на некотором отрезке $[a, b]$, используя Чебышевсукю и равномерную сетку. Данная функция должна удовлетворять критерию близости:

$$\phi(x) \approx (x^h, y^h)$$

2.1 Полином Эрмита

Даны некоторая сетка $\{x_i\}_{i=0}^n$ и сеточная функция $\{y_i\}_{i=0}^n$. Формула полинома Эрмита:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \Big(y_j \varphi_j(x) + y_j' \psi_j(x) \Big)$$

$$\varphi_j(x) = \prod_{k=0 k \neq j}^{n} \frac{(x - x_k)^2}{(x_j - x_k)^2}$$

$$\psi_j(x) = (x - x_j)\varphi_j(x)$$

2.2 Условия применимости

Наличие узлов интерполяции и производных в них

3 Тестовый пример с расчетами для задачи малой размерности

Заданы узлы $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, значения функции $y_0 = 1$, $y_1 = 0$ и значения производных $y_0' = 2$, $y_1' = -1$.

Формула для интерполяционного полинома Эрмита имеет вид:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \Big(y_j \varphi_j(x) + y_j' \psi_j(x) \Big),$$

где

$$\varphi_j(x) = \prod_{k=0 k \neq j}^{n} \frac{(x - x_k)^2}{(x_j - x_k)^2}, \quad \psi_j(x) = \varphi_j(x) \cdot (x - x_j).$$

$$\varphi_0(x) = \prod_{k=0 k \neq 0}^{1} \frac{(x - x_k)^2}{(x_0 - x_k)^2} = \frac{(x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^2} = \frac{(x - 1)^2}{(0 - 1)^2} = (x - 1)^2.$$

$$\psi_0(x) = \varphi_0(x) \cdot (x - x_0) = (x - 1)^2 \cdot x = x(x - 1)^2.$$

$$\varphi_1(x) = \prod_{k=0 k\neq 1}^{1} \frac{(x-x_k)^2}{(x_1-x_k)^2} = \frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2} = \frac{x^2}{(1-0)^2} = x^2.$$

$$\psi_1(x) = \varphi_1(x) \cdot (x - x_1) = x^2 \cdot (x-1) = x^2(x-1).$$

$$H_3(x) = (x-1)^2 + 2x(x-1)^2 - x^2(x-1).$$

$$H_3(x) = x^3 - 2x^2 + 1.$$

4 Результаты

Для функций $y = x^2 - \sin(10x)$ и $y = 100|x|$ был построен интерполяционный полином, а также зависимость максимальной ошибки интерполяции от размера сетки.

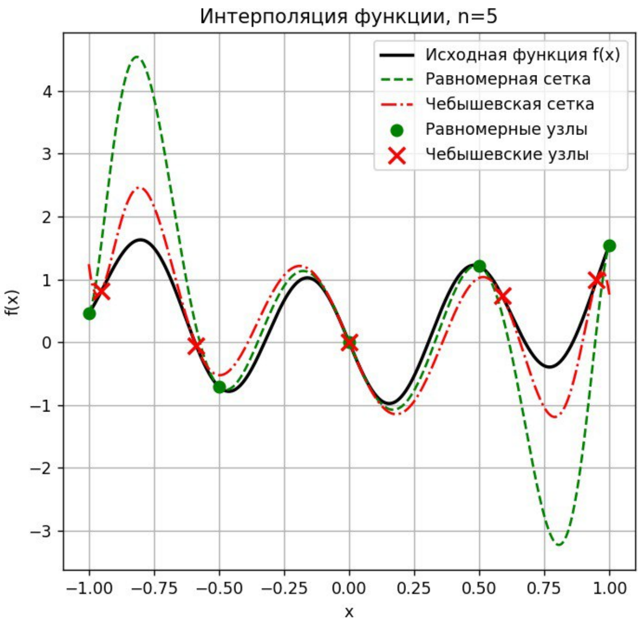

Рис. 1: Интерполяционный полином для $y = x^2 - \sin(10x)$

На данных графиках изображены полиномы Эрмита для двух функций при размере сетки n = 5. Видно, что полином меньше отклоняется от функции на гладких участках, однако в точке разрыва и на концах отрезка оюа полинома дают большую погрешность.

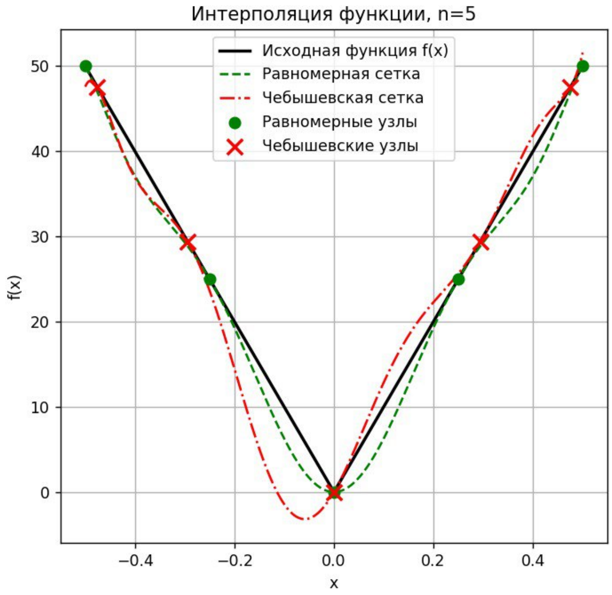

Рис. 2: Интерполяционный полином для $y = 100|x|$

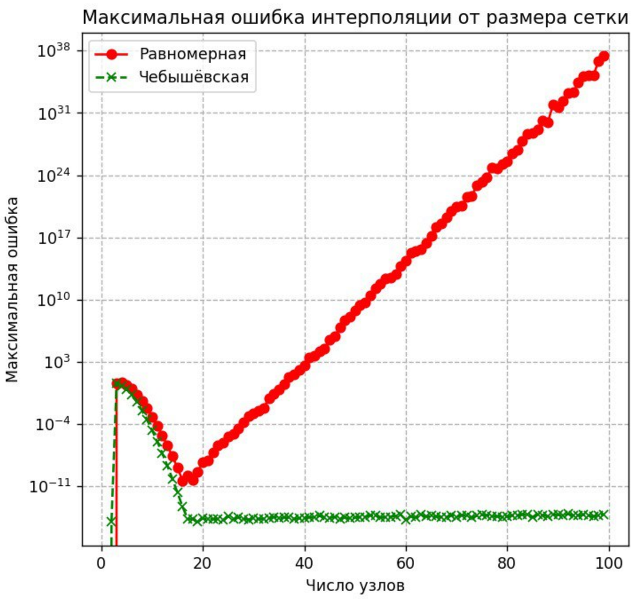

Рис. 3: Зависимость ошибки интерполяции от размера сетки для $y = x^2 - \sin(10x)$

Видно, что для функции $y = x^2 - \sin(10x)$ при малом числе узлов ошибка интерполяции не велика для двух сеток. При количестве узлов, большем 20, ошибка для равномерной сетки начинает возрастать. В случае $y = 100|x|$ видно, что при малых размерах сетки, полином строится с небольшой погрешностью. С ростом числа узлов ошибка для равномерной сетки значительно увеличивается, а для Чебышевской уменьшается.

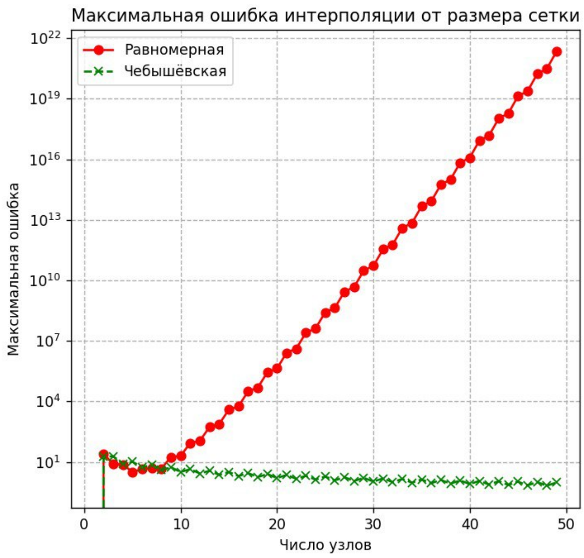

Рис. 4: Зависимость ошибки интерполяции от размера сетки для $y = 100|x|$

5 Выводы

1. Гладкость функции влияет на точность полинома Эрмита: на участках, где функция гладкая, погрешность минимальна, в местах разрыва погрешность значительно больше.
2. Увеличение количества узлов сетки способствует увеличению отклонения максимальной ошибки.
3. На основании вышеприведенного можно сделать вывод, что для увеличения точности при построении полинома стоит пользоваться Чебышёвской сеткой