3. Sachant que f est un polynôme de degré 3 et que la courbe de f passe par le point A(0 ; 1), déterminer $f(x)$.
4. Montrer que le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de C_f.

Chapitre 3 : FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN ET EXPONENTIELLES

2.4. RESUME DU COURS

2.4.1. Fonction logarithme népérien

Domaine de définition et dérivée

- Soit u une fonction ; $lnu(x)$ existe ssi $u(x)$ existe et $u(x) > 0$.
- Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \rightarrow ln[u(x)]$ est dérivable sur I et $[lnu(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Remarque : $[ln|u(x)|]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Propriétés Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{Q}^*$.

- $lnab = lna + lnb$; $ln\frac{1}{a} = - lna$; $ln\frac{a}{b} = lna - lnb$.
- $ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}lna$; $ln\ a^r = r\ lna$; $ln1 = 0$; $lne = 1$.

- $lna = lnb$ *ssi* $a = b$;
- $lna < lnb$ *ssi* $a < b$; $lna > lnb$ *ssi* $a > b$.
- $lnx < 0$ *ssi* $0 < x < 1$; $lnx > 0$ *ssi* $x > 1$.

Limites

- $\lim\limits_{x \to 0} lnx = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} xlnx = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty$; ; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0.$

Fonction logarithme décimal

- La fonction logarithme décimal est la fonction notée *log* et définie sur $]0, +\infty[$ par : $logx = \frac{lnx}{ln10}$.

2.4.2. Fonctions exponentielles

Domaine de définition et dérivée

- Soit u une fonction ; $e^{u(x)}$ existe ssi u(x) existe.
- Si u est dérivable sur un intervalle I, alors e^{u} est dérivable sur I et $[e^{u(x)}]' = u'(x)\, e^{u(x)}$.

Propriétés Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}^*$

- $e^{a+b} = e^{a}.e^{b}$; $e^{-a} = \frac{1}{e^{a}}$; $e^{a-b} = \frac{e^{a}}{e^{b}}$; $(e^{a})^{r} = e^{ar}$; $e^{0} = 1$; $e^{1} = $ e.
- $e^{a} = e^{b}$ ssi a = b.
- $e^{a} < e^{b}$ ssi a < b ; $e^{a} > e^{b}$ ssi a > b.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x} > 0.$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ lne^{x} = x$; $\forall x > 0,\ e^{lnx} = x$.

- $\forall a > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x \ln a}$.
- $y = e^x$ ssi $x = \ln y$.

Limites

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Racine n.ieme Soit x, y $\in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$-$\{1\}$.

- $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$; $(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{1-\frac{1}{n}}$.
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$ ssi $x = y$.
- $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$ ssi $x < y$; $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$ ssi $x > y$.
- $y = \sqrt[n]{x}$ ssi $x = y^n$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Fonctions puissances

On appelle fonction puissance, toute fonction f_α définie sur]0 ; +∞[par $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Croissance comparée

- Soit α un nombre rationnel strictement positif
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln x} = +\infty$.

- $\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} \ln x = 0$.

➢ Soit n un entier naturel non nul ; $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

➢ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$.

<u>Remarque</u> : Pour les quotients dont on a calculés la limite à $+\infty$, la limite de leurs inverses à $+\infty$ est égale à 0 ;
en particulier $\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x} = 0$.

2.5. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Résoudre :

1) $\ln(2x-5) + \ln(1+x) = 2\ln 2$. 2) $2\ln x + 3 = 0$.

3) $(\ln x)^3 - \ln x^3 = -2$. 4) $\ln x - \ln(2-x) \geq 0$. 5) $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \leq 0$.

6) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 > 0$. 7) $e^2 e^{-x} - e^{x^2-4} = 0$.

8) $e^x - 2e^{-x} = -1$. 9) $(e^{x-1})^4 \geq e^{x^2}$.

10) $\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = 5 \\ \ln x + 2\ln y = -1 \end{cases}$. 11) $\begin{cases} e^x . e^y - e^5 = 0 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases}$.

Exercice 2

Déterminer D_f l'ensemble de définition de f, les limites aux bornes de D_f, la dérivée $f'(x)$ et le tableau de variation de f.

1) $f(x) = x\ln x - x$. 2) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. 3) $f(x) = \frac{\ln x+1}{\ln x-1}$.

4) $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. 5) $f(x) = -2x+1 + \ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$. 6) $f(x) = x + e^{-x}$.