1) Inéquation

1 - 1) Méthode

On complète ici le travail fait au chapitre 2 :
– résolution graphique d'inéquations ;
– résolution d'inéquations du premier degré.

Méthode 1 : pour résoudre une inéquation du type $f(x) \leqslant g(x)$, on résout l'inéquation équivalente suivante : $f(x) - g(x) \leqslant 0$.

Cela revient à étudier le signe de l'expression $f(x) - g(x)$.

1 - 2) Étude du signe d'une expression factorisée

Propriété 1 : Pour connaître le signe d'une expression **factorisée**, on étudie le signe de chaque facteur et on utilise la « règle des signes » :
* $+$ par $+$ donne $+$
* $-$ par $+$ donne $-$
* $-$ par $-$ donne $+$

Méthode 2 : pour connaître le signe d'une expression :

1. on la met sous forme **factorisée** ;
2. on étudie le signe de chaque facteur ;
3. on utilise la « règle des signes ».

Il est commode de présenter ce travail sous la forme d'un **tableau de signes**.

Exemple détaillé :

On cherche à résoudre l'inéquation $(x+2)(7+3x) > 4x^2 + 8x$

1. On met en place une étude de signe équivalente :

   $(x+2)(7+3x) > 4x^2 + 8x \Leftrightarrow (x+2)(7+3x) - (4x^2+8x) > 0$

2. On cherche à factoriser l'expression :

$$\begin{aligned}(x+2)(7+3x) - (4x^2+8x) &= (x+2)(7+3x) - 4x(x+2)\\ &= (x+2)[7+3x-4x]\\ &= (x+2)(7-x)\end{aligned}$$

3. On utilise la règle des signes, présenté dans un tableau de signes par commodité :

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
signe$(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe$(7-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe$(x+2)(7-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : l'inéquation $(x+2)(7+3x) > 4x^2 + 8x$ a pour solution : $\boxed{\mathcal{S} =]-2\ ;\ 7[}$

1 - 3) Étude du signe d'un quotient

Le principe est le même qu'au paragraphe précédent (parce que la « règle des signes » s'applique aussi bien pour un quotient que pour un produit). Il faut cependant faire attention aux éventuelles valeurs interdites.

Exemple détaillé :

On cherche à résoudre l'inéquation $\dfrac{3x+2}{5-x} \leqslant 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		5		$+\infty$
signe$(3x+2)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
signe$(5-x)$		$+$		$+$	‖	$-$	
signe$\dfrac{3x+2}{5-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Conclusion : l'inéquation $\dfrac{3x+2}{5-x} \leqslant 0$ a pour solution : $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\dfrac{2}{3}\right] \cap]5\,;\,+\infty[}$

2) Sens de variation d'une fonction

Définition 1 : sens de variation d'une fonction

f est **strictement croissante** sur I lorsque :

pour tous réels a et b dans I, **si** $a < b$ **alors** $f(a) < f(b)$

f est **strictement décroissante** sur I lorsque :

pour tous réels a et b dans I, **si** $a < b$ **alors** $f(a) > f(b)$

f est **constante** sur I lorsque :

pour tous réels a et b dans I, $f(a) = f(b)$

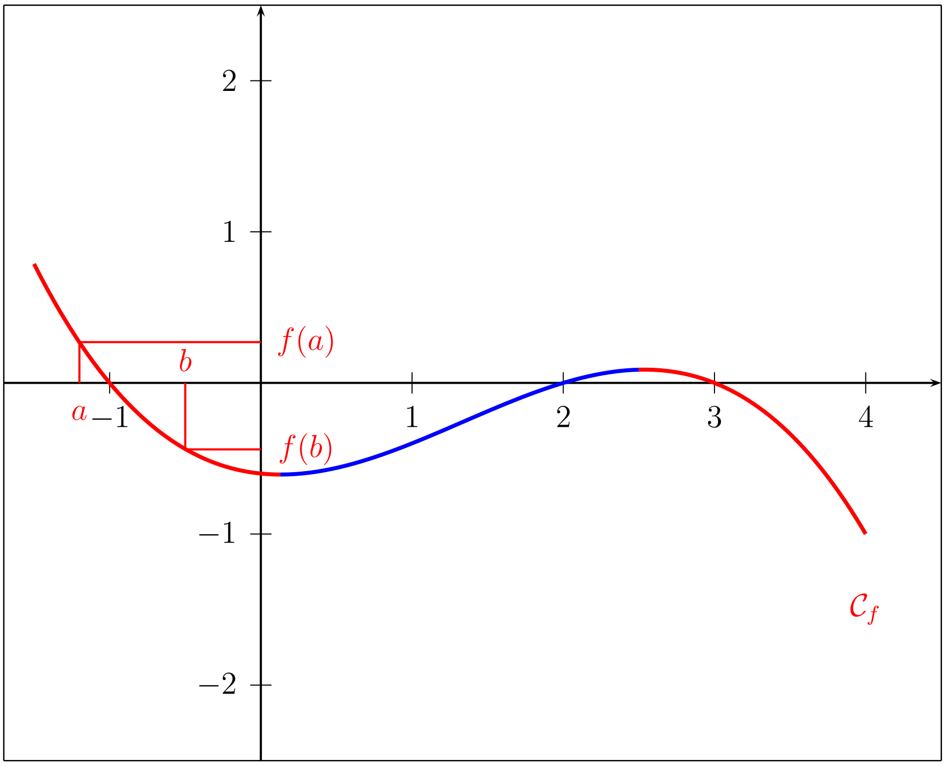
Méthode 3 : ordonner des nombres

Avec I un intervalle, f une fonction définie sur I, a et b deux réels de I :
- Si f est strictement croissante sur I et $a < b$, alors $f(a) < f(b)$
- Si f est strictement décroissante sur I et $a < b$, alors $f(a) > f(b)$

Autre formulation :

- avec une fonction strictement croissante, on dit que l'ordre est « conservé » ;
- avec une fonction strictement décroissante, on dit que l'ordre est « inversé ».

Exemple :



Représentation graphique de la fonction f

- Pour tous nombres a et b tels que :
  $-1,5 < a < b < 0,1$, alors : $f(a) > f(b)$ (l'ordre est inversé)
- Pour tous nombres c et d tels que :
  $0,1 < c < d < 2,5$, alors : $f(c) < f(d)$ (l'ordre est conservé)