Exercice 1

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n+1} \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{U_n}$$

1. Calcul de U_1, U_2, V_0 et V_1 ?

$U_1 = \frac{U_0}{U_0+1} = \frac{1}{2}$. $U_2 = \frac{U_1}{U_1+1} = \frac{1}{3}$. $V_0 = \frac{1}{U_0} = 1$. $V_1 = \frac{1}{U_1} = 2$.

2. (V_n) suite arithmétique ?

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{U_n+1}{U_n} - \frac{1}{U_n}$; donc $V_{n+1} - V_n = \frac{U_n}{U_n} = 1$.

1 étant une constante, (V_n) est une suite arithmétique de raison r = 1 et de premier terme $V_0 = 1$.

3. V_n et U_n en fonction de n ?

(V_n) étant une suite arithmétique de raison r = 1 et de premier terme $V_0 = 1$, on a $V_n = V_0 + nr = 1 + n$.

Or $V_n = \frac{1}{U_n}$, donc $U_n = \frac{1}{V_n} = \frac{1}{1+n}$.

4. S_n en fonction de n ?

$S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n = (n + 1)\left(\frac{V_0+V_n}{2}\right)$;

d'où $S_n = (n + 1)\left(\frac{1+1+n}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

5. Convergence des suites (V_n), (U_n) et (S_n) ?

* $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} 1 + n = +\infty$;

donc (V_n) est divergente.

* $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$; donc (U_n) est convergente.
* $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} = +\infty$;

donc (V_n) est divergente.

Exercice 2

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 2 \end{cases} \text{ et } V_n = U_n + 3$$

1. *V* suite géométrique ?

$V_{n+1} = U_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}U_n + 1$

$= \frac{U_n + 3}{3} = \frac{V_n}{3}$.

d'où $V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$ et par conséquent la suite *V* est une suite géométrique de raison q = $\frac{1}{3}$ et de premier terme $V_1 = U_1 + 3 = 5$.

2. U_n en fonction de n ?

Pour déterminer U_n en fonction de n, on commence par déterminer V_n en fonction de n.

(V_n) étant une suite géométrique de raison q = $\frac{1}{3}$ et de premier terme $V_1 = 5$, on a $V_n = V_1 q^{n-1} = 5(\frac{1}{3})^{n-1}$.

Or $V_n = U_n + 3$, donc $U_n = V_n - 3 = 5(\frac{1}{3})^{n-1} - 3$.

3. S_n et S'_n en fonction de n ?

$* \ S_n = V_1 + \ldots + V_n = V_1(\frac{1-q^n}{1-q})$

$= 5[\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}] = \frac{15}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]$.

$* \ S'_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = V_1 - 3 + V_2 - 3 + \ldots + V_n - 3$

$= S_n - 3n = \frac{15}{2}[1-(\frac{1}{3})^n] - 3n$.

4. Limite de V_n, U_n, S_n et S'_n ?

$* \ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 5(\frac{1}{3})^{n-1} = 0$.

(car $-1 < \frac{1}{3} < 1$, donc $\lim(\frac{1}{3})^{n-1} = 0$)

$* \ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n - 3 = -3$ (car $\lim V_n = 0$)

* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim \frac{15}{2} [1 - (\frac{1}{3})^n] = \frac{15}{2}$.
* $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n - 3n = -\infty$

Exercice 3

$U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \sqrt{3U_n - 2}$

1. Montrons par récurrence que $U_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$?

* Vérifions que l'inégalité est vraie au premier rang ; c'est à dire $U_0 \geq 2$?

$U_0 = 4$, donc $U_0 \geq 2$.

* Supposons que l'inégalité est vraie à un rang p, supérieur au premier rang ; c'est-à-dire $U_p \geq 2$.

* Montrons que l'inégalité est vraie au rang p+1, c'est-à-dire $U_{p+1} \geq 2$?

On a $U_p \geq 2$ ssi $3U_p \geq 6$ ssi $3U_p - 2 \geq 4$ ssi $\sqrt{3U_p - 2} \geq 2$ d'où $U_{p+1} \geq 2$.

L'inégalité étant vraie au rang p+1, donc elle est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$. D'où $U_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Monotonie de U ?

$U_{n+1} - U_n = \sqrt{3U_n - 2} - U_n = \frac{3U_n - 2 - {U_n}^2}{\sqrt{3U_n - 2} + U_n}$;

$U_{n+1} - U_n$ a le même signe que $-{U_n}^2 + 3U_n - 2$.

Posons $U_n = X$ et cherchons le signe de $-X^2 + 3X - 2$.

$X_1 = 1$; $1X_2 = \frac{-2}{-1}$ ssi $X_2 = 2$.

x	-∞	1	2	+∞
$-X^2 + 3X - 2$	-	+	-	

$U_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$ donc $X \geq 2$; or $-X^2 + 3X - 2 \leq 0$ sur $[2 ; +\infty[$, donc $-{U_n}^2 + 3U_n - 2 \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$;

d'où $U_{n+1} - U_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ et par conséquent la suite U est décroissante.

3. En déduire que U converge vers L ?

La suite U étant décroissante et minorée, donc elle converge vers L. Déterminons L ?

* $U_{n+1} = f(U_n)$ où $f(x) = \sqrt{3x-2}$.

f étant la composée de fonctions continues sur leurs ensemble de définition, donc f est continue sur son ensemble de définition $[\frac{2}{3} ; +\infty[$.

* Résolvons l'équation $f(x) = x$;

f(x) = x ssi $\sqrt{3x-2} = x$ ssi $\begin{cases} x \geq 0 \\ 3x - 2 = x^2 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$

S = {1 ; 2}.

L étant une solution de l'équation $f(x) = x$ et f étant continue en L, donc L = 1 où L = 2.

Or $U_n \geq 2$, donc $\lim U_n \geq 2$ d'où L = 2.

Exercice 4

U suite géométrique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

V suite arithmétique de premier terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $r = \frac{\pi}{2}$.

$|z_n| = U_n$ et $\arg z_n = V_n$.

1. a) U_n et V_n en fonction de n ?

$U_n = U_0 q^n = 4(\frac{1}{2})^n$. $V_n = V_0 + nr = \frac{\pi}{4} + (\frac{\pi}{2})n$.

b) z_n en fonction de n ?

$z_n = U_n e^{iV_n}$. Donc $z_n = 4(\frac{1}{2})^n e^{i[\frac{\pi}{4} + (\frac{\pi}{2})n]}$.

2. (z_n) suite géométrique?

$$z_{n+1} = U_{n+1} e^{iV_{n+1}} = \frac{1}{2} U_n . e^{i(V_n + \frac{\pi}{2})}$$

$$= \frac{1}{2} e^{i(\frac{\pi}{2})} . U_n e^{iV_n} = \frac{1}{2} i\, z_n .$$

D'où (z_n) est une suite géométrique de raison q $= \frac{1}{2}$ et de premier terme $z_0 = U_0 e^{iV_0} = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

$= 4(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$.

3. $\boldsymbol{Z_n = z_0 z_1 \dots z_n}$; arg $\boldsymbol{Z_n}$ en function de n?

arg Z_n = arg$(\boldsymbol{z_0 z_1 \dots z_n})$ = arg z_0 + arg z_1 + …+ arg z_n

$= V_0 + V_1 + \dots + V_n$ = (n+1)$(\frac{V_0 + V_n}{2})$

$= \frac{\pi}{4}(n+1)^2$.