Chapitre 6 : PRIMITIVES – CALCUL INTEGRAL EQUATIONS DIFFERENTIELLES

6.1. RESUME DU COURS

6.1.1. PRIMITIVES

Définition :

Une fonction *F* est une primitive d'une fonction *f* sur un intervalle I si *F* est dérivable sur I et $F'(x) = f(x), \forall x \in$ I.

Théorème :

Toute fonction continue sur un intervalle I, y admet une infinité de primitives.

Propriétés :

- Si *f* est une fonction qui admet *F* comme primitive sur un intervalle *I*, alors
  - toutes les primitives de f sont de la forme F + k où k est un nombre réel.
  - pour tout couple $(x_0; y_0)$ où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, f admet une primitive et une seule F_0 qui prend la valeur y_0 en x_0.
- Si *u* est une fonction dérivable sur un intervalle I et si *v* est une fonction dérivable sur un intervalle contenant *u(I)*, alors la fonction $u'(v'ou)$ admet sur I la fonction vou comme primitive.

Primitives de fonctions usuelles :

Soit f et u des fonctions, F une primitive de f, k, a et b des nombres réels ($a \neq 0$), $n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$ et $r \in \mathbb{Q}^*-\{-1\}$.

$f(x)$	0	k	x^r	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$F(x)$	k	kx	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$2\sqrt{x}$	$\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$

$\frac{1}{x}$	e^x	e^{ax+b}	$\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$	$\frac{a}{\cos^2(ax+b)}$
$\ln\lvert x\rvert$	e^x	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)$	$\tan(ax+b)$

Opérations sur les primitives

Soit f, g et u des fonctions, F et G des primitives respectives de f et g, k un nombre réel, $n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$ et $r \in \mathbb{Q}^*-\{-1\}$.

Fonction	$f+g$	kf	$u'u^r$	$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$	$u'\cos u$	$u'\sin u$
Primitive	$F+G$	kF	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	$2\sqrt{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	e^u	$\sin u$	$-\cos u$

6.1.2. CALCUL INTEGRAL

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I. On appelle intégrale de f, de a à b le nombre réel

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

Remarques :

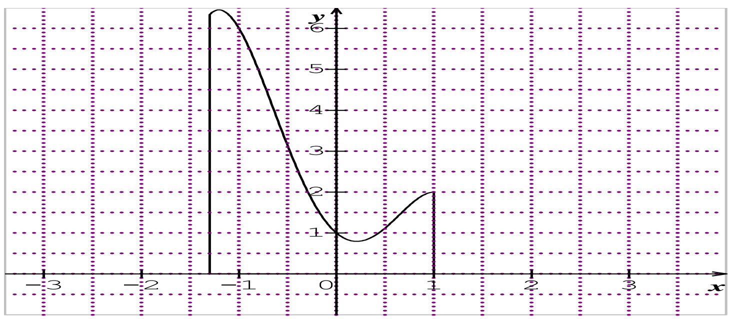
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots$
- $\int_a^b f(x)dx$ existe si f est continue sur $[a\,;\,b]$ ou $[b\,;\,a]$.

Interprétation graphique d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$, $(a < b)$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$.

- Si f est positive sur [a ; b] alors $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire du domaine limité par C_f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

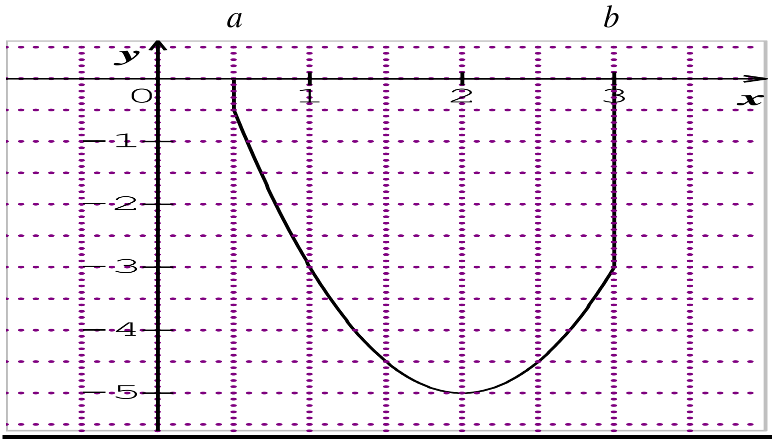
Ce domaine est aussi défini par l'ensemble des points $\{M(x\,;\,y),\ a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$.



a b

- Si f est négative sur [a ; b] alors $-\int_a^b f(x)dx$ est l'aire du domaine limité par C_f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Ce domaine est aussi défini par l'ensemble des points $\{M(x\,;\,y),\ a \leq x \leq b \text{ et } f(x) \leq y \leq 0\}$.



Remarque :

L'aire $\mathcal{A} = |\int_a^b f(x)dx|$ est exprimée en unité d'aire.

- Si (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) est un repère orthogonal d'unités m et n centimètres alors $\mathcal{A} = |\int_a^b f(x)dx|$.(m.n) cm^2.
- Si (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) est un repère orthonormé d'unité m centimètres alors $\mathcal{A} = |\int_a^b f(x)dx|$.(m.m) cm^2.

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a, b, c des éléments de I et α une constante..

- $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$.
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. (relation de Chasles)
- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.

Aire du domaine compris entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,;\,b]$, C_f et C_g leurs courbes respectives.
Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a\,;\,b]$, alors l'aire du domaine compris entre C_f, C_g, les droites $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$.
Ce domaine est aussi défini par l'ensemble des points
$\{M(x\,;\,y),\ a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

Inégalités et intégrales

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b des éléments de I tels que $a < b$.

- Si $f(x) \geq 0$ sur $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Remarque :
$I = \int_a^b f(x)dx$, implique que $a \leq x \leq b$;
donc pour encadrer I on peut commencer par $a \leq x \leq b$, encadrer ensuite $f(x)$, puis l'intégrale I en utilisant la deuxième propriété de la rubrique « Inégalités et intégrales ».

Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b des éléments de I tels que $a < b$.
S'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f(x) \leq M$ sur I,
alors $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.

Fonction intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I. La fonction φ définie sur I par $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est appelée fonction intégrale de f.
Cette fonction φ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

<u>Intégration par parties</u>
Soit u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I et a, b des éléments de I.
$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$

<u>Calcul de volume</u>

- Soit $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un repère orthogonal de l'espace d'axes (Ox), (Oy) et (Oz).

Si S(t) est l'aire de la section d'un solide par le plan d'équation $z = t$ alors le volume de la partie du solide limité par les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ $(a \leq t \leq b)$ est $V = \int_a^b S(t)dt$ en unité de volume.

- Si on fait tourner autour de l'axe des abscisses la portion de C_f (la courbe de f) dont les abscisses des points sont comprises entre a et b $(a < b)$, alors le volume décrit par C_f est $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$.

6.1.3. <u>EQUATIONS DIFFERENTIELLES</u>

<u>Définition</u>
Une équation différentielle est une équation faisant intervenir comme inconnue une fonction f et ses dérivées. L'inconnue f est en général notée y.
<u>Equations différentielles du premier ordre</u>

Soit a, b des nombres réels tels que $a \neq 0$.
Les solutions de l'équation différentielle $ay' + by = 0$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{\frac{-b}{a}x}$, où k est une constante.

Equations différentielles du second ordre

Soit a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$ et $ay'' + by' + cy = 0$ *(1)* une équation différentielle d'ordre 2.
Si son équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet
- deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de (1) sont les fonctions $f_{\alpha,\beta}$ définies sur $\mathbb{R}$ par
$f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ où α et β sont des nombres réels.
- une racine double r_0, alors les solutions de (1) sont les fonctions $f_{\alpha,\beta}$ définies sur $\mathbb{R}$ par
$f_{\alpha,\beta}(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$ où α et β sont des nombres réels.
- deux racines complexes conjugués $u + iv$ et $u - iv$, alors les solutions de (1) sont les fonctions $f_{\alpha,\beta}$ définies sur $\mathbb{R}$ par
$f_{\alpha,\beta}(x) = e^{ux}(\alpha cosvx + \beta sinvx)$ où α et β sont des nombres réels.

6.2. EXERCICES D'APPLICATION