# Chapitre 3 : FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

**Exercice 1** Soit S l'ensemble des solutions

**1)** $\boldsymbol{ln(2x-5)+ln(1+x)=2ln2}$

$*$ L'équation existe ssi $2x-5>0$ et $1+x>0$

D = $]\frac{5}{2}\,;+\infty[\cap]-1\,;+\infty[\,=\,]\frac{5}{2}\,;+\infty[$.

$*$ $ln(2x-5)+ln(1+x)=2ln2$ ssi $ln(2x-5)(1+x)=ln2^2$

ssi $(2x-5)(1+x)=4$ ssi $2x^2-3x-9=0$

$$\Delta = 81\ ;\ x_1=3 \text{ et } x_2=\frac{-3}{2}$$

d'où S = $\{3\,;\frac{-3}{2}\}\cap D=\{3\}$.

**2)** $\boldsymbol{2lnx+3=0}$

$*$ L'équation existe ssi $x>0$ ; D = $]0\,;+\infty[$.

$*$ $2lnx+3=0$ ssi $lnx=\frac{-3}{2}$ ssi $lnx=\frac{-3}{2}lne$ ssi $lnx=lne^{\frac{-3}{2}}$

ssi $x=e^{\frac{-3}{2}}$ ;

d'où S = $\{e^{\frac{-3}{2}}\}\cap D=\{e^{\frac{-3}{2}}\}$.

**3)** $\boldsymbol{(lnx)^3-lnx^3=-2}$

$*$ L'équation existe ssi $x>0$ et $x^3>0$ ssi $x>0$ ; D = $]0\,;+\infty[$.

$*$ $(lnx)^3-lnx^3=-2$ ssi $(lnx)^3-3lnx+2=0$ ;

en posant X = $lnx$, on obtient l'équation $X^3-3X+2=0$.

-2 étant une racine évidente, donc $X^3-3X+2=(X+2)\,Q(X)$ ;

déterminons Q(X) par la méthode de Horner :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | -3 | 2 |
| (-2) | | -2 | 4 | -2 |
| | 1 | -2 | 1 | 0 |

$Q(X)=X^2-2X+1=(X-1)^2$.

Donc $X^3-3X+2=0$

ssi X = - 2 ou X = 1 ;

or X = $lnx$ , donc

*lnx* = -2 ou *lnx* = 1 ssi *lnx* = $lne^{-2}$ *ou lnx* = lne

ssi $x = e^{-2}$ ou $x$ = e d'où S = {$e^{-2}$ ; e}∩D = { $e^{-2}$ ; e }.

**4) *lnx* – *ln(2- x)* ≥ 0**

∗ L'inéquation existe ssi $x > 0$ et 2- $x > 0$ ;

D = ]0 ; + ∞[∩]- ∞ ; 2[ = ]0 ; 2[.

∗ *lnx* – *ln(2- x)* ≥ 0 ssi *lnx* ≥ *ln(2- x)* ssi $x$ ≥ 2- $x$ ssi $x$ ≥ 1

d'où S = [1 ; + ∞[∩D = [1 ; 2[.

**5)** $\boldsymbol{ln}(\frac{x+1}{x-1}) \leq \mathbf{0}$

∗ L'inéquation existe ssi $\frac{x+1}{x-1} > 0$

| $X$ | -∞ | -1 | | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x+1}{x-1}$ | + | 0 | - | \|\| | + |

D = ]- ∞ ; -1[∪]1 ; + ∞[.

∗ $ln(\frac{x+1}{x-1}) \leq 0$ ssi $ln(\frac{x+1}{x-1}) \leq ln1$ ssi $\frac{x+1}{x-1} \leq 1$ ssi $\frac{x+1}{x-1} - 1 \leq 0$

ssi $\frac{2}{x-1} \leq 0$ ssi $x$ - 1< 0 ssi $x < 1$ ;

d'où S = ]- ∞ ; 1[∩D = ]- ∞ ; -1[.

**6)** $\boldsymbol{ln^2 x}$ **- 2*lnx* – 3**> 0

∗ L'inéquation existe ssi $x > 0$ ; D = ]0 ; + ∞[.

∗ $ln^2 x$ - 2*lnx* – 3> 0 ; en posant *lnx* = X, on obtient l'inéquation

$X^2$ – 2X – 3 > 0. $X_1$ = - 1 ;

Or $X_1 X_2 = \frac{c}{a}$, donc $X_2 = 3$

| X | -∞ | -1 | | 3 | + ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X^2$ – 2X – 3 | + | | - | | + |

$X^2$ – 2X – 3 > 0 ssi X ∈ ]- ∞ ; -1[∪]3 ; + ∞[

ssi X < - 1 ou X > 3 *ssi lnx* < - 1 ou *lnx* > 3

*lnx* < $lne^{-1}$ ou *lnx* > $lne^3$

$x < e^{-1}$ ou $x > e^3$ ;

d'où S = ( ]- ∞ ; $e^{-1}$[∪]$e^3$ ; + ∞[ )∩D = ]0; $e^{-1}$[∪]$e^3$ ; + ∞[.

**7)** $\boldsymbol{e^2 . e^{-x} - e^{x^2-4} = 0}$

$e^2 . e^{-x} - e^{x^2-4} = 0$ ssi $e^{2-x} = e^{x^2-4}$ ssi 2- x = $x^2 - 4$

ssi $x^2 + x - 6 = 0$ ; $x_1$ = 2, or 2$x_2$ = - 6 donc $x_2$ = -3

d'où S = {2 ; -3}.

**8)** $\boldsymbol{e^x - 2e^{-x}}$ **= -1**

$e^x - 2e^{-x}$ = -1 ssi $e^x$- $\frac{2}{e^x}$ + 1 = 0 ssi $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

ssi $(e^x)^2$ + $e^x$ - 2 = 0 ; en posant X = $e^x$, on obtient

$X^2$ + X – 2 = 0.

$X_1$= 1 ; 1$X_2$ = -2 ssi $X_2$ = -2 ; or X = $e^x$, donc

$e^x$ = 1 ou $e^x$ = -2

$e^x = e^O$ impossible

$x$ = 0

D'où S = {0}.

**9)** $(\boldsymbol{e^{x-1}})^4 \geq \boldsymbol{e^{x^2}}$

$(e^{x-1})^4 \geq e^{x^2}$ ssi $e^{4x-4} \geq e^{x^2}$ ssi 4$x$- 4 ≥ $x^2$

ssi - $x^2$ + 4$x$- 4 ≥ 0

Δ = 0, $x_0$ = 2 ;

S = {2}.

| $x$ | $-\infty$ 2 $+\infty$ |
|---|---|
| - $x^2$ + 4x- 4 | - 0 - |

**10)** $\begin{cases} \boldsymbol{2lnx - 3lny = 5} \\ \boldsymbol{lnx + 2lny = -1} \end{cases}$

* Le système existe ssi $x > 0$ et $y > 0$.

* En posant X = $lnx$ et Y = $lny$, on obtient $\begin{cases} 2X - 3Y = 5 \\ X + 2Y = -1 \end{cases}$ ;

Par la méthode d'addition, on trouve : X = 1 et Y = -1 ;

or X = $lnx$ et Y = $lny$ donc $lnx$ = 1 et $lny$ = -1

$lnx = lne$ et $lny = lne^{-1}$

$x$ = e et $y = e^{-1}$ ;

Or e > 0 et $e^{-1} > 0$ donc S = {(e ; $e^{-1}$)}.

**11)** $\begin{cases} \boldsymbol{e^x . e^y - e^5 = 0} \\ \boldsymbol{lnx + lny = ln2 + ln3} \end{cases}$

* Le système existe ssi $x > 0$ et $y > 0$.

* $\begin{cases} e^x . e^y - e^5 = 0 \\ lnx + lny = ln2 + ln3 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} e^{x+y} = e^5 \\ \ln(xy) = ln6 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

Si les nombres $x$ et $y$ existent alors ils sont solutions de l'équation $t^2 - 5t + 6 = 0$. Or $t_1 = 2$ donc $2t_2 = 6$ d'où $t_2 = 3$ ;
2 et 3 étant positifs donc S = {( 2 ; 3) ; ( 3 ; 2)}

## Exercice 2

**1) $f(x) = x\ln x - x$**

* $f(x)$ existe ssi $x > 0$ ; $D_f = ]0 ; +\infty[$.
* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, par somme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln x - 1) = ?$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x - 1 = +\infty$,
par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

* $f'(x) = (1)\ln x + x(\frac{1}{x}) - 1 = \ln x$.

$f'(x) \geq 0$ ssi $\ln x \geq 0$ ssi $\ln x \geq \ln 1$ ssi $x \geq 1$.

* Tableau de variation

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |
| $f$ | ‖ 0 | ↘ | -1 | ↗ | $+\infty$ |

**2) $f(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x})$**

| $X$ | $-\infty$ | | -1 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1+x}{1-x}$ | | - | 0 | + | ‖ | - | |

* $f(x)$ existe ssi $\frac{1+x}{1-x} > 0$.

$D_f = ]-1 ; 1[$.

* $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to -1^+} (\frac{1+x}{1-x}) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$,
donc $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

* $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to 1^-} (\frac{1+x}{1-x}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

$*$ $f'(x) = \frac{(\frac{1+x}{1-x})'}{(\frac{1+x}{1-x})} = \frac{(1)(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2} (\frac{1-x}{1+x})$

$= \frac{2}{(1-x)(1+x)}$ . $x \in D_f$ donc $\frac{1+x}{1-x} > 0$ ; or ce quotient a le même signe que le produit (1- $x$)(1+ $x$), donc (1- $x$)(1+ $x$) > 0, d'où $f'(x) > 0$.

$*$ Tableau de variation

| $x$ | -1 | | 1 |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | |
| $f$ | | -∞ ↗ +∞ | |

**3) $f(x) = \frac{lnx+1}{lnx-1}$**

$*$ $f(x)$ existe ssi $x > 0$ et $lnx - 1 \neq 0$ ssi $x > 0$ et $x \neq$ e ;

d'où $D_f = ]0 ; +\infty[ - \{e\} = ]0 ; e[\cup]e ; +\infty[$.

$*$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(lnx)(1+\frac{1}{lnx})}{(lnx)(1-\frac{1}{lnx})} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1+\frac{1}{lnx}}{1-\frac{1}{lnx}}$ ;

or $\lim\limits_{x \to 0} lnx = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{lnx} = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ par quotient.

$*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(lnx)(1+\frac{1}{lnx})}{(lnx)(1-\frac{1}{lnx})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{lnx}}{1-\frac{1}{lnx}}$ ;

or $\lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{lnx} = 0$, d'où

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ par quotient.

$*$ $\lim\limits_{x \to e} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to e} lnx + 1 = 2$ ; $\lim\limits_{x \to e} lnx - 1 = 0$

Signe du dénominateur

$lnx - 1 \geq 0$ ssi $x \geq$ e

| $x$ | 0 | e | +∞ |
|---|---|---|---|
| $lnx$-1 | - | 0 | + |

* $\lim\limits_{x \to e^-} lnx + 1 = 2$ et $\lim\limits_{x \to e^-} lnx - 1 = 0^-$,
par quotient $\lim\limits_{x \to e^-} f(x)$ = -∞.

* $\lim\limits_{x \to e^+} lnx + 1 = 2$ et $\lim\limits_{x \to e^+} lnx - 1 = 0^+$,
par quotient $\lim\limits_{x \to e^-} f(x)$ = +∞.

* $f\,'(x) = \frac{\frac{1}{x}(lnx-1)-\frac{1}{x}(lnx+1)}{(lnx-1)^2} = \frac{-2}{x(lnx-1)^2}$ . Or $x > 0$, donc $f\,'(x) < 0$.
* Tableau de variation

| $x$ | 0 | | e | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f\,'(x)$ | ‖ | - | ‖ | - | |
| $f$ | ‖ | 1 ↘ - ∞ | ‖ | +∞ ↘ 1 | |

**4)** $\boldsymbol{f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}}$

* *f(x)* existe ssi 1- $e^x \neq 0$ ssi $x \neq 0$ ; D$_f$ = ]-∞ ; 0[∪]0 ; + ∞[ .
* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ = ?

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ par quotient.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x(\frac{1}{e^x}+1)}{e^x(\frac{1}{e^x}-1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{1}{e^x}-1}$ ;

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ = -1 par quotient.

* $\lim\limits_{x \to 0} 1 + e^x = 2$ et $\lim\limits_{x \to 0} 1 - e^x = 0$ ;

Signe du dénominateur :

$1 - e^x \geq 0$ ssi $e^x \leq 1$ ssi $x \leq 0$

| $x$ | -∞ | 0 | +∞ |
|---|---|---|---|
| $1 - e^x$ | + | 0 | - |

* $\lim\limits_{x \to 0^-} 1 + e^x = 2$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} 1 - e^x = 0^+$ ,
par quotient $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$= +∞.

$* \lim\limits_{x \to 0^+} 1 + e^x = 2$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - e^x = 0^-$

par quotient $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

$* f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)-(-e^x)(1+e^x)}{(1-e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$ ; $f'(x) > 0$.

$*$ Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | || | + |
| $f$ | $1 \nearrow +\infty$ | || | $-\infty \nearrow -1$ |

**5) $f(x) = -2x+1+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$**

$* f(x)$ existe ssi $\left|\frac{x+1}{x}\right| > 0$ ssi $\frac{x+1}{x} \neq 0$ ssi $x \neq -1$ et $x \neq 0$ ;

d'où $D_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 0\} = ]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

$* \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x} = 1$ ; $\lim\limits_{x \to 1} |x| = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| = 0$ ; de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x+1 = +\infty$ , par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

$* \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 1} |x| = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| = 0$ ; de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x+1 = -\infty$ par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

$* \lim\limits_{x \to -1} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to -1} \left|\frac{x+1}{x}\right| = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, donc

$\lim\limits_{x\to-1} ln|\frac{x+1}{x}|$ = - ∞ ; de plus $\lim\limits_{x\to-1} -2x+1$ = 3

d'où $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ = - ∞ par somme.

* $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ = ?

$\lim\limits_{x\to0} |\frac{x+1}{x}|$ = +∞ et $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx$ = + ∞, donc

$\lim\limits_{x\to0} ln|\frac{x+1}{x}|$ = +∞ ; de plus $\lim\limits_{x\to0} -2x+1$ = 1

d'où $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ = + ∞ par somme.

* *f '(x)* = - 2 + $\frac{\frac{(1)(x)-(1)(x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}$ = -2 + $\frac{-1}{x(x+1)}$ ;

*f '(x)* = $\frac{-2x^2-2x-1}{x(x+1)}$ .

* Signe de *f '(x)*

N = $-2x^2-2x-1$ ;

Δ' = $(-1)^2$ - (-2)(-1) = -1

Δ'< 0, N est du signe de a = -2

| *x* | -∞ -1 | | 0 +∞ |
|---|---|---|---|
| $-2x^2-2x-1$ | - | - | - |
| *x(x+1)* | + 0 | - 0 | + |
| *f '(x)* | - ‖ | + ‖ | - |

* Tableau de variation

| *x* | -∞ | -1 | | 0 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| *f '(x)* | - | ‖ | + | ‖ | - |
| *f* | +∞ ↘ -∞ | ‖ | -∞ ↗ +∞ | ‖ | +∞ ↘ -∞ |

**6) *f(x)* = $\boldsymbol{x+e^{-x}}$**

* *f(x)* existe ∀ $x$ ∈ ℝ ; $D_f$ = ℝ = ]-∞ ; +∞[.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ = ?

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}$ = 0 ; par somme

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ .

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}(\frac{x}{e^{-x}}+1)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}(xe^{x}+1)$ ;

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$, donc par produit

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ .

* $f'(x) = 1- e^{-x}$ . $f'(x) \geq 0$ ssi $e^{-x} \leq 1$ ssi $-x \leq 0$ ssi $x \geq 0$.

* Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$      $0$      $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$   $0$   $+$ |
| $f$ | $+\infty \searrow 1 \nearrow +\infty$ |

**7) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$**

* $f(x)$ existe ssi $x \neq 0$ et $x^2 \neq 0$ ssi $x \neq 0$ ;

$D_f = ]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ .

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} e^{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ ;

de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ par produit.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} e^{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ ;

de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par produit.

* $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

de plus $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ par produit.

* $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{X \to -\infty} X^2 e^X = 0$ ( avec $X = \frac{1}{x}$ ) .

* $f'(x) = \frac{-2x}{x^4} e^{\frac{1}{x}} + \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} (\frac{1}{x^2}) = \frac{-2x-1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$ ;

$f'(x) \geq 0$ ssi $-2x-1 \geq 0$ ssi $x \leq \frac{-1}{2}$ .

* Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | \|\| | - | |
| $f$ | 0 | ↗ | $4e^{-2}$ | ↘ | 0 \|\| $+\infty$ | ↘ | 0 |

**8) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$**

* $f(x)$ existe ssi $e^x + e^{-x} \neq 0$, toujours vrai (car on a une somme de termes strictement positifs); $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty\,; +\infty[$.

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ ;

or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} + 1 = 1$, donc

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ par quotient.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{x}(1-e^{-2x})}{e^{x}(1+e^{-2x})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ ;

or $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - e^{-2x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-2x} = 1$, donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ par quotient.

* $f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$ .

$f'(x) > 0$.

* Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | |
| $f$ | -1 | ↗ | 1 |

**9) $f(x) = x - \ln(1 + e^x)$**

* $f(x)$ existe ssi $1 + e^x > 0$ ; toujours vrai, $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty ; +\infty[$.

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + e^x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} lnx = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 + e^x) = 0$.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ par somme.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln[e^x(\frac{1}{e^x} + 1)]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x - [\ln e^x + ln(e^{-x} + 1)]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x - [x + ln(e^{-x} + 1)]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} -\ln(e^{-x} + 1) = 0$.

* $f'(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}$ ; $f'(x) > 0$.

* Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$      $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f$ | $-\infty \nearrow 0$ |

**<u>Exercice 3</u>**

$f(x) = \ln(\cos x)$

**1. Variations de $f$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ?**

* $f(x)$ existe ssi $cosx > 0$ ; toujours vrai sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$,donc le domaine d'étude $D_e = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

* $f'(x) = \frac{-sinx}{cosx}$. Or $cosx > 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ donc $f'(x)$ est du signe de $-sinx$.

Or $sinx < 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}; 0[$ et $sinx > 0$ sur $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ (on peut montrer ces résultats ou les déduire à partir du cercle trigonométrique) il en résulte le tableau suivant :

* Tableau de variation

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $+\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| |
| $f$ | \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| |

* $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} cosx = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} lnx = -\infty$,

donc $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$.

* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} cosx = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} lnx = -\infty$,

donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$.

**2. a) $\boldsymbol{cosx + \sqrt{3}sinx = 0}$ ?**

$cosx + \sqrt{3}sinx = 0$

$\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}\, cos(x - \varphi) = 0$ où $\begin{cases} cos\varphi = \frac{1}{2} \\ sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ c'est-à-dire $\varphi = \frac{\pi}{3}$

$2cos(x - \frac{\pi}{3}) = 0$ ssi $cos(x - \frac{\pi}{3}) = 0$ ssi $cos(x - \frac{\pi}{3}) = cos(\frac{\pi}{2})$

ssi $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ;

L'ensemble des solutions $S = \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

**b)** $g(x) = \ln(\cos x + \sqrt{3}\sin x)$ **, $C_g$?**

$g(x) = \ln(\cos x + \sqrt{3}\sin x) = \ln[2\cos(x - \frac{\pi}{3})]$

$= \ln 2 + \ln[\cos(x - \frac{\pi}{3})] = f(x - \frac{\pi}{3}) + \ln 2;$

d'où $C_g$ est l'image de $C_f$ par la translation de vecteur $\frac{\pi}{3}\vec{i} + (\ln 2)\vec{j}$.

## <u>Exercice 4</u>

**A.** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2\ln x$

**1. $D_f$ et limites aux bornes ?**

* $f(x)$ existe ssi $x > 0$ ; d'où $D_f = ]0\ ;+\infty[$

* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x = 0$, par somme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2(\frac{1}{2} - \ln x) = ?$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{2} - \ln x = -\infty$,

par produit $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

**2. prolongement par continuité de $f$ en 0 ?**

$0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ ; 0 étant fini, $f$ peut être prolongée par continuité en 0.

Ce prolongement est la fonction $k$ définie par

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x^2\ln x \ si\ x > 0 \\ 0 \ si\ x = 0 \end{cases}.$$

**B.** $\begin{cases} \boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2 \ln x \text{ si } x > 0} \\ \boldsymbol{g(0) = 0} \end{cases}$

**1. Dérivabilité de g sur [0; + ∞[ ?**

∗ Sur ]0; + ∞[ , *g* étant la somme de fonctions dérivables sur ]0; + ∞[, *g* est dérivable sur ]0; + ∞[.

∗ Dérivabilité de g en 0 ?

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}x - x\ln x = ?$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$,

par somme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$ ;

d'où *g* est dérivable en 0 et g'(0) = 0.

**2. Variations de *g* ?**

∗ $D_g = [0; +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

∗ $g'(x) = x - [2x\ln x + \frac{1}{x}(x^2)] = -2x\ln x$.

Or $x \geq 0$, donc $g'(x) \geq 0$ ssi $-2\ln x \geq 0$ ssi $\ln x \leq 0$ ssi $x \leq 1$.

∗ Tableau de variation

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | 0 | + | 0 | - | |
| $g$ | 0 | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | $-\infty$ |

**3. *h = g* /[1 ; +∞[**

**a) *h* admet une bijection réciproque ?**

*h* étant continue (car dérivable) et strictement décroissante sur [1 ; +∞[, *h* est une bijection de [1 ; +∞[ vers ]- ∞ ; $\frac{1}{2}$ ] et par conséquent elle admet une bijection réciproque $h^{-1}$ définie ]- ∞ ; $\frac{1}{2}$ ].

**b) Dérivabilité de $h^{-1}$ ?**

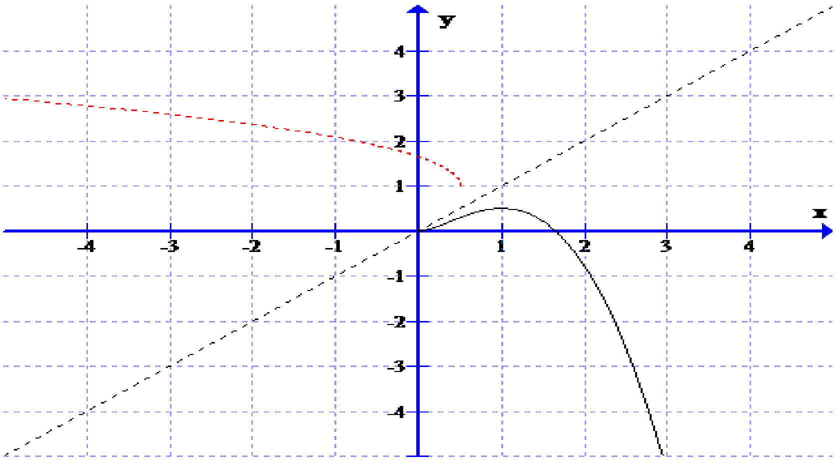
*h* étant dérivable et de dérivée non nulle sur ]1 ; +∞[, $h^{-1}$ est dérivable *sur h( ]1 ; +∞[ )* = ]- ∞ ; $\frac{1}{2}$ [.

**c) Résolution de l'équation $h^{-1}(x)$ = e ?**

$h^{-1}(x)$ = e ssi $x = h(e) = \frac{-e^2}{2}$ ;

d'où l'ensemble des solutions S = { $\frac{-e^2}{2}$ }.

**d) Tracé de la courbe de g et celle de $h^{-1}$ ?**




Légende : — Tracé de $C_g$ ;

— Tracé de $C_{h^{-1}}$

**Exercice 5**

***f(x)* = (2*x*+1) $e^{-x}$**

**1. Variation de *f* ?**

* *f(x)* existe sur ℝ ; $D_f$ = ℝ = ]- ∞ ; +∞[.
* *f '(x)* = $2e^{-x}$ - (2*x*+1) $e^{-x}$ = $e^{-x}$ (1- 2*x*).

*f '(x)* ≥ 0 ssi 1- 2*x* ≥ 0 ssi $x \le \frac{1}{2}$.

* Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$      $\frac{1}{2}$      $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$    $0$    $-$ |
| $f$ | $-\infty \nearrow 2e^{\frac{-1}{2}} \searrow 0$ |

$*\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$,

par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$*\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{-x} + e^{-x} = ?$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc par somme

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

**2. (C) coupe ($\Delta$) : y = $x$ en un unique point ?**

(C) coupe ($\Delta$) : y = $x$ en un unique point d'abscisse $\alpha$ sur $[1\,;\frac{3}{2}]$ ssi l'équation *f(x)* = $x$ admet $\alpha$ comme une unique solution sur $[1\,;\frac{3}{2}]$.

ssi l'équation *f(x)* – $x$ = 0 admet $\alpha$ comme une unique solution sur $[1\,;\frac{3}{2}]$.

Soit *g(x)* = *f(x)* – $x$ ;

*g* étant la somme de fonctions continues et dérivables sur $[1\,;\frac{3}{2}]$, g est continue et dérivable sur $[1\,;\frac{3}{2}]$.

*g'(x)* = *f '(x)* – 1 ; or *f '(x)* $<0$ sur $[1\,;\frac{3}{2}]$,

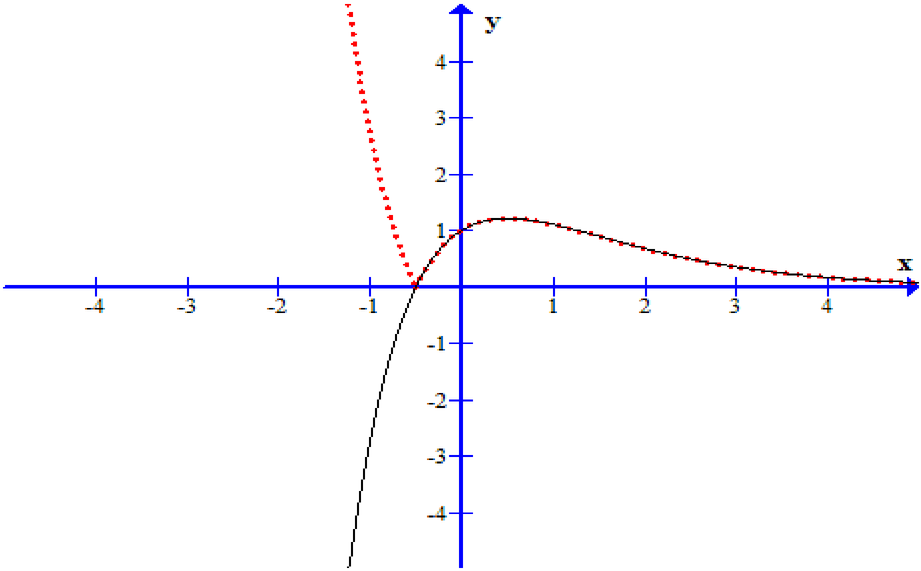
donc *g'(x)* $<0$ sur $[1\,;\frac{3}{2}]$.

$g(1) = 3e^{-1} - 1 \cong 0{,}1$; $g(\frac{3}{2}) = 4e^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \cong -0{,}6$.

g est continue et strictement décroissante sur $[1\,;\frac{3}{2}]$; de plus

$g(1)g(\frac{3}{2}) < 0$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[1 ; \frac{3}{2}]$. Par conséquent (C) coupe (Δ) en un unique point d'abscisse $\alpha$ appartenant à $[1 ; \frac{3}{2}]$.

**3. Tracé de (C) ?**




<u>Légende</u> : — Tracé de $C_f$
— Tracé de $C_g$

**4. a) *f* admet une bijection réciproque sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$ ?**

*f* étant continue et strictement décroissante sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$, *f* est une bijection de $]\frac{1}{2} ; +\infty[$ sur $f(]\frac{1}{2} ; +\infty[) = ]0 ; 2e^{\frac{-1}{2}}[$ ;

par conséquent elle admet une bijection réciproque $f^{-1}$ définie sur $]0 ; 2e^{\frac{-1}{2}}[$.

**b) Image de ]0 ; $\alpha$] par $f^{-1}$ ?**

$f^{-1}$ est continue et strictement décroissante ( car elle varie dans le même sens que f) ;

d'où $f^{-1}(]0 ; \alpha]) = [f^{-1}(\alpha) ; \lim_{x \to 0} f^{-1}(x)[$ ;

Or g($\alpha$) = 0 donc on a $f(\alpha) = \alpha$ d'où $\alpha = f^{-1}(\alpha)$ .

D'autre part $f(]\frac{1}{2} ; +\infty[) = ]0 ; 2e^{\frac{-1}{2}}[$

ssi $f^{-1}(]0 ; 2e^{\frac{-1}{2}}[) = ]\frac{1}{2} ; +\infty[$

ssi $]f^{-1}(2e^{\frac{-1}{2}}) ; \lim_{x \to 0} f^{-1}(x)[ = ]\frac{1}{2} ; +\infty[$ ;

d'où $\lim_{x \to 0} f^{-1}(x) = +\infty$ et par conséquent

$f^{-1}(]0 ; \alpha]) = [\alpha ; +\infty[$

**5. Tracé de la courbe de g ?**

$g(x) = |2x+1|e^{-x} = |2x+1||e^{-x}|$

$= |(2x+1)\, e^{-x}| = |f(x)|$ ; d'où $g(x) = \begin{cases} f(x) \ si \ f(x) \geq 0 \\ -f(x) \ si \ f(x) \leq 0 \end{cases}$.

Par conséquent :

- Si $f(x) \geq 0$ (c'est-à-dire $C_f$ au dessus de l'axe $(x'x)$ ) alors $C_g$ et $C_f$ sont confondues.
- Si $f(x) \leq 0$ (c'est-à-dire $C_f$ au dessus de l'axe $(x'x)$ ) alors $C_g$ est le symétrique de $C_f$ par rapport à l'axe $(x'x)$.

# Chapitre 4 : NOMBRES COMPLEXES SIMILITUDES DIRECTES