2.2. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3-3x^2+4$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormal.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2. a) Montrer que f admet sur $[2 ; +\infty[$ une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b) f^{-1} est-elle dérivable en 0 ?

3. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[2 ; +\infty[$.

4. Déterminer les points d'intersection de C_f avec les axes de coordonnées.

5. Déterminer l'équation de (T) la tangente à C_f en $x_0 = 1$.

6. Tracer C_f, la tangente (T) et $C_{f^{-1}}$.

7. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$ où m est un paramètre réel.

Exercice 2

Soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ et C_f sa courbe.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{1-x}$.

2. Déterminer (d) l'asymptote oblique à C_f et étudier sa position par rapport à C_f.

3. Etudier les variations de f et tracer sa courbe.

4. Montrer que le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie de C_f.

5. Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2}{1+x}$; Tracer C_g la courbe de g à partir de C_f.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur [-2 ; 2] par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et en 2 ; interpréter graphiquement les résultats.

2. Etudier la parité de f et les variations de f sur [0 ; 2].

3. Tracer C_f la courbe de f et les tangentes à C_f en 0 et en 2, dans un repère orthonormal d'unité 2cm.

Exercice 4

Soit la fonction f, $f(x) = \cos 4x + 2\sin 2x$ et C_f sa courbe

1. a) Justifier que l'étude de f peut être restreinte à l'intervalle [0 ; π].

b) Montrer que $f'(x) = 4(1-2\sin 2x)\cos 2x$.

2. Résoudre sur [0 ; π] l'équation $f'(x) = 0$ et en déduire le tableau de variation de f.

3. Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie de C_f.

4. Construire C_f sur $[-\pi ; \pi]$.

2.3. EXERCICES D'ENTRAINEMENT

Exercice 5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x-3}$ et C_f sa courbe.

1. Etudier les variations de f.
2. Déterminer les coordonnées de I, le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
3. Montrer que le point I est centre de symétrie de C_f.
4. Tracer C_f.
5. Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre et le signe des solutions de l'équation
$mx^2 + 2(m-1)x - (3m+2) = 0$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(x) = |x+2| + \frac{2}{x+1}$ et C_f sa courbe.