Chapitre 7 : DENOMBREMENT- PROBABILITE

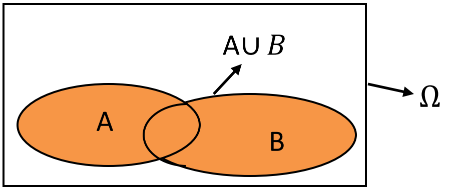
7.1. RESUME DU COURS

7.1.1. DENOMBREMENT

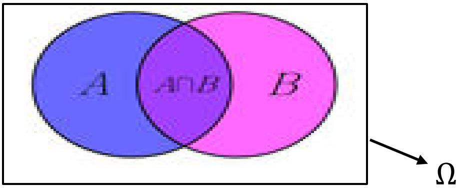
Réunion – intersection – complémentaire

Soit A et B deux parties d'un ensemble Ω.

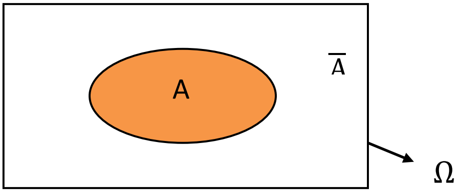
- La réunion de A et B, notée $A \cup B$ est la partie de Ω constituée des éléments qui sont dans A ou dans B.



- L'intersection de A et B, notée $A \cap B$ est la partie de Ω constituée des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.



- Le complémentaire de A dans Ω, notée $\bar{A}$ est la partie de Ω constituée des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.



Propriétés des cardinaux

Soit A et B des parties d'un ensemble fini Ω.

- card$A\cup B$ = cardA + cardB - card $A\cap B$.
- cardA = card Ω - card$\bar{A}$.

Les p-listes

- **Définition :** Une p-liste ou p-uplet d'un ensemble fini Ω est une suite ordonnée de p éléments de Ω, chaque élément pouvant être répété.
- **Exemple :** Soit Ω = {a, b, c}. les 2-listes de Ω sont (a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b) et (c, c).
- **Théorème :** Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p.

Les arrangements

Soit Ω un ensemble fini ayant n éléments.

- **Définition :** Un arrangement de p éléments de Ω ($p \leq n$) ou un p-arrangement est une p-liste d'éléments de Ω, distincts deux à deux.
- **Exemple :** Soit Ω = {a, b, c}. les arrangements de 2 éléments de Ω sont (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a) et (c, b).
- **Théorème :** Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments ($p \leq n$) est noté A_n^p ;

A_n^p = n(n-1) x…x(n- p+1).

Les permutations

Soit Ω un ensemble fini ayant n éléments.

- **Définition :** Une permutation de Ω est un arrangement des n éléments de Ω.

- **Exemple :** Soit $\Omega = \{a, b, c\}$. Les permutations de Ω sont : (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b) et (c, b, a).
- **Théorème :** Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est noté n!;

n! = n(n-1) x…x2x1.

Par convention : 0! = 1.

Les combinaisons

Soit Ω un ensemble fini ayant n éléments.

- **Définition :** Une combinaison de p éléments de Ω $(p \leq n)$ est une partie de Ω ayant p éléments.
- **Exemple :** Soit $\Omega = \{a, b, c\}$. les combinaisons de 2 éléments de Ω sont $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{b, c\}$
- **Théorème :** Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments $(p \leq n)$ est noté C_n^p ; $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$.

Propriétés des A_n^p et des C_n^p

- $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$; $A_n^0 = 1$; $A_n^1 = n$; $A_n^n = n!$.
- $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$; $C_n^0 = 1$; $C_n^1 = n \; (n \geq 1)$;

  $C_n^n = 1$; $C_n^p = C_n^{n-p}$.

Remarque : L'écriture de A_n^p comporte p facteurs ; pour calculer A_n^p, on écrit n, puis les facteurs suivants en retranchant chaque fois 1, jusqu'à ce qu'on l'on ait écrit p facteurs.

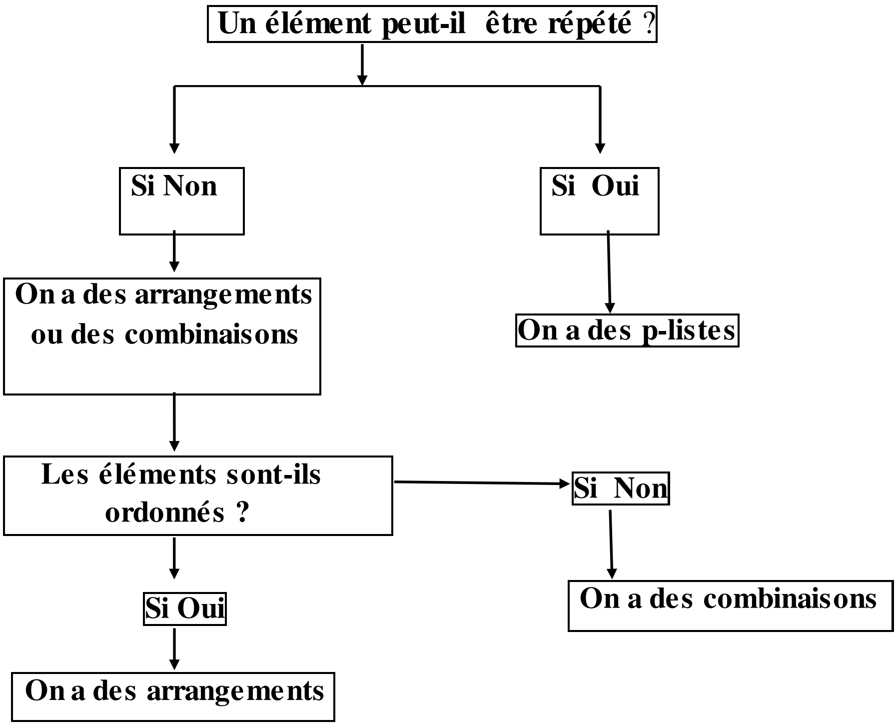
Différence entre une p-liste, un arrangement et une combinaison

Dans un exercice de dénombrement

- Si un élément peut être répété, alors on a des p-listes.
- Sinon on a des arrangements ou des combinaisons

- Si l'ordre des éléments est pris en compte, alors on a des arrangements.
- Sinon on a des combinaisons.

Autrement : En traitant un exercice de dénombrement, pour savoir si on a des p-listes, des arrangements ou des combinaisons, on peut se poser ces questions ?



<u>Les Tirages</u>

- Si le tirage est successif avec remise, on a des p-listes.
- Si le tirage est successif sans remise, on a des arrangements.
- Si le tirage est simultané, on a des combinaisons.

Vocabulaire

- « Au moins » correspond à l'inégalité « $\geq$ » ; sa négation est « moins de » et correspond à l'inégalité « $<$ ».
- « Au plus » correspond à l'inégalité « $\leq$ » ; sa négation est « plus de » et correspond à l'inégalité « $>$ ».
- Si A = « Au moins une boule noire (par exemple) » alors $\overline{A}$ = « moins d'une boule noire » = « pas de boule noire ».

Principe multiplicatif – principe additif

- Si une expérience A résulte de deux actions indépendantes et successives B puis C, alors on a multiplication. C'est-à-dire cardA = cardB x cardC.
- Si une expérience A résulte de deux actions disjointes B ou C, alors on a une addition. C'est-à-dire cardA = cardB + cardC.

Formule du binôme de Newton

Soit a, b des réels et n un entier naturel non nul ;
$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^{n-p} b^p$.

7.1.2. PROBABILITES SIMPLES

Vocabulaire

- Une expérience aléatoire est une épreuve dont l'issue ne peut être déterminée avant sa réalisation.
- L'ensemble de toutes les éventualités ou possibilités d'une expérience aléatoire est appelé univers et est en général noté Ω.
- Toute partie de l'univers Ω est appelé événement.

- Un événement élémentaire est un événement ayant un élément.
- Deux événements A et B sont disjoints ou incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- Les événements A et $\bar{A}$ sont disjoints et $A \cup \bar{A} = \Omega$.

<u>Définition</u>

p est une probabilité sur Ω signifie que :

- $p(\Omega) = 1$, $p(\emptyset) = 0$
- pour tout événement A de Ω, $0 \leq p(A) \leq 1$.
- si $A = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ où les e_i sont des événements élémentaires, alors $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(\{e_i\})$

<u>Propriétés</u>

Soit A et B deux événements de Ω

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Si A et B sont disjoints alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- $p(A) = 1 - p(\bar{A})$.

<u>Equiprobabilité</u>

- **Définition :** Dans une expérience aléatoire, si tous les événements élémentaires e_i ont la même probabilité alors il y a équiprobabilité.
- **Théorème :** Dans le cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$.

<u>Cas de non équiprobabilité</u>

Dans ce cas les événements élémentaires e_i n'ont pas la même probabilité.

Ces probabilités p_i = p(e_i) seront données de manière explicite ou à travers une ou plusieurs relations qui permettront de les calculer.

Pour ce calcul, on exprime chaque probabilité p_i en fonction de p_1 (par exemple) et on utilise l'égalité $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ pour déterminer p_1.

Ensuite on en déduit toutes les probabilités p_i qui permettront de calculer la probabilité d'événements quelconques.

7.1.3. PROBABILITES CONDITIONNELLES

Définition

Soit A et B deux événements tels que p(A) $\neq 0$. La probabilité de B sachant que A est réalisé est p(B/A) = $\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$.

p(B/A) est aussi notée $p_A(B)$.

Propriété

Soit A et B deux événements tels que p(A) $\neq 0$ et p(B) $\neq 0$.

p(A$\cap B$) = p(A)p(B/A) = p(B)p(A/B).

Evénements indépendants

- **Définition :** Les événements A et B sont indépendants si p(B/A) = p(B) ou p(A/B) = p(A).
- **Théorème :** Deux événements A et B sont indépendants ssi p(A$\cap B$) = p(A)p(B).

Attention

Il ne faut pas confondre événements disjoints et événements indépendants.

Formule des probabilités totales

Soit A et B deux événements de Ω.

A = A∩ Ω = A∩(B∪ $\bar{B}$) = (A∩B)∪(A∩ $\bar{B}$).

- **Théorème 1:**

p(A) = p(A∩B) + p(A∩ $\bar{B}$) = p(B)p(A/B) + p($\bar{B}$)p(A/$\bar{B}$).

- **Théorème 2 :** De manière générale si

Ω = $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ et si les A_i sont disjoints deux à deux alors

p(A) = $p(A \cap A_1) + p(A \cap A_2) + \ldots + p(A \cap A_n)$

= p(A_1)p(A/A_1) + p(A_2)p(A/A_2) + … + p(A_n)p(A/A_n) .

7.1.4. VARIABLES ALEATOIRES

Définition

Une variable aléatoire est une application notée X en général, qui à tout résultat d'une expérience aléatoire, associe un nombre réel.

Exemple

- On lance trois fois de suite une pièce de monnaie.

L'application X qui à tout résultat obtenu, on associe le nombre de fois que « pile » apparait est une variable aléatoire.

- Cette variable aléatoire prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 et 3 ;

on les appelle valeurs prises par la variable aléatoire X.

- (X = 2) par exemple désigne l'événement

« pile est sortie 2 fois lors des trois lancers ».

Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire et x_1, x_2, ..., x_n les différentes valeurs prises par X. On appelle loi de probabilité l'application qui à x_i, $1 \leq i \leq n$, on associe p_i = p[(X= x_i)] la probabilité de l'événement (X= x_i).

Cette loi est présentée dans un tableau de la manière suivante :

x_i	x_1	x_2	- - - -	x_n
p_i	p_1	p_2	- - - - -	p_n

Remarque : $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Espérance mathématique – variance – écart-type

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et p_i = p[(X= x_i)], $1 \leq i \leq n$.

- L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le réel $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.
- La variance de la variable aléatoire X est le réel positif $V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - [E(x)]^2$.
- L'écart-type de la variable aléatoire X est le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarques :

- Lorsque les valeurs prises par X sont des gains d'un jeu de hasard, alors E(X) traduit l'espérance de gain moyen par partie lorsqu'on joue.
- Un jeu équitable est un jeu où l'espérance de gain est nulle.
- Un jeu où l'espérance de gain est positive avantage le joueur, contrairement à un jeu ou l'espérance de gain est négative.

Fonction de répartition

- Soit x un réel, l'événement $(X \leq x)$ est la réunion des événements (X= x_i) pour les valeurs x_i, $x_i \leq x$.
- La fonction de répartition de la variable aléatoire X est la

fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = p(X \leq x)$.

F est une fonction en escalier qu'on définit de la manière suivante :

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ étant les valeurs prises par X dans l'ordre croissant,

- si $x \in]-\infty; x_1[$ alors $F(x) = 0$.
- si $x \in [x_1 ; x_2[$ alors $F(x) = p_1$.
- si $x \in [x_2 ; x_3[$ alors $F(x) = p_1 + p_2$.
- ……………………………………
- si $x \in [x_n : +\infty[$ alors $F(x) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Loi binomiale

- **Définition 1:** Une épreuve de Bernouilli est une expérience aléatoire ayant exactement deux issues, l'une appelée en général « succès » et l'autre « échec ».
- **Définition 2:** On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p si X est la variable aléatoire définie par le nombre de succès obtenus en répétant n fois et de manière indépendante une épreuve de Bernouilli ; p désigne la probabilité d'un succès.
- **Théorème 1 :** Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p alors la probabilité d'obtenir exactement k succès $(0 \leq k \leq n)$ est $p[(X = k)] = C_n^k . p^k . (1-p)^{n-k}$.

- **Théorème 2 :** Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p alors l'espérance mathématique de X est $E(X) = n.p$ et sa variance est $V(X) = n.p(1-p)$.