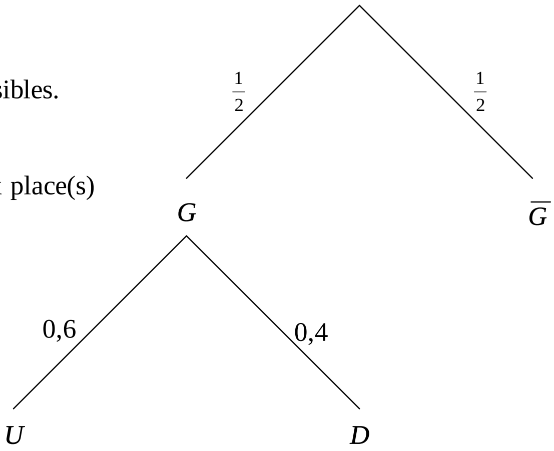
Exercice 1 *Variables aléatoires et arbres*



1. a) L'arbre ci-contre décrit les différentes situations possibles.

   Soit la tablette est gagnante, soit elle ne l'est pas.

   Si elle est gagnante, elle contient soit une, soit deux place(s) de cinéma.

   On a immédiatement :

   $P(G) = \frac{1}{2}$

   $P_G(U) = 0,6$

   $P_G(D) = 0,4$

   b) L'événement "gagner exactement une place de cinéma" est $G \cap U$.

   D'après les formules de cours (ou à l'aide de l'arbre), on a :

   $$P(G \cap U) = P(U \cap G) = P_G(U)\, P(G) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$$

   c) Calculons la probabilité de gagner respectivement 0, 1 et 2 place(s) de cinéma.

   $P(X = 0) = P(\overline{G}) = 0,5$

   $P(X = 1) = P(G \cap U) = 0,3$

   $P(X = 2) = P(G \cap D) = P_G(D)\, P(G) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$

   On résume la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

X	0	1	2	Total
Probabilités	0,5	0,3	0,2	1

   L'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X est donnée par la formule :

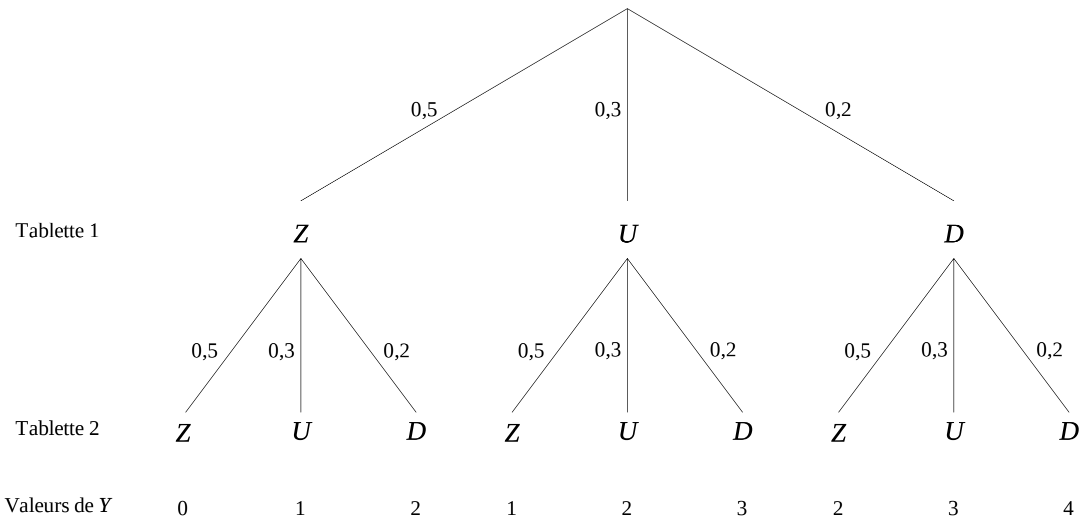
   $$E(X) = \sum_i p_i x_i = 0,5 \times 0 + 0,3 \times 1 + 0,2 \times 2 = 0,7$$

2. Notons Y la variable aléatoire correspondant au nombre de tablettes gagnées par ce client.

   Les différentes valeurs possibles de Y sont : 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4.

   L'arbre ci-dessous illustre toutes les situations possibles :

   (On a noté Z l'événement "la tablette rapporte zéro place de cinéma". En fait, $Z = \overline{G}$)



a) Probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma : $P(Y = 0) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$ (Chemin *Z-Z* sur l'arbre)

b) L'événement "il gagne au moins une place de cinéma" est le contraire de l'événement "il ne gagne aucune place de cinéma" : $P(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

c) Probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma :

$$P(Y = 2) = 0{,}5 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}29$$

(Chemins *D-Z* ou *U-U* ou *Z-D*)

Exercice 2 *Détermination de la composition d'une urne pour obtenir une espérance de gain souhaitée*

1. Comme chaque boule a autant de chance d'être tirée, on est dans une situation d'**équiprobabilité**. La probabilité p d'un événement peut donc se calculer à l'aide de la formule :

$$p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

On a ainsi :

$$P(J) = \frac{3}{10} \qquad P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \qquad P(R) = \frac{1}{10} \qquad P(V) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

2. a. On a : $$P(X = 2) = P(V) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Comme les événements J et B sont incompatibles, on a :

$$P(J \cup B) = P(J) + P(B)$$

D'où : $$P(X = 3) = P(J \cup B) = P(J) + P(B) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 10) = P(R) = \frac{1}{10}$$

b. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous

Valeurs de X	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = 10$
probabilités	$p_1 = \frac{4}{10}$	$p_2 = \frac{5}{10}$	$p_3 = \frac{1}{10}$

L'espérance mathématique de X est donnée par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i = \frac{4}{10} \times 2 + \frac{5}{10} \times 3 + \frac{1}{10} \times 10 = \frac{33}{10} = 3{,}3$$

La variance de X est donnée par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i^2 - (E(X))^2$$

$$V(X) = \frac{4}{10} \times 2^2 + \frac{5}{10} \times 3^2 + \frac{1}{10} \times 10^2 - 3{,}3^2 = 16{,}1 - 10{,}89 = 5{,}21$$

Et enfin, l'écart-type de X est donné par :$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$$\sigma(X) = \sqrt{5{,}21} \simeq 2{,}28$$

3. Notons Y la nouvelle variable aléatoire correspondant au gain moyen dans cette situation.

La loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

Valeurs de Y	$y_1 = 2$	$y_2 = 3$	$y_3 = m$	$y_4 = 10$
probabilités	$p_1 = \frac{4}{10}$	$p_2 = \frac{3}{10}$	$p_3 = \frac{2}{10}$	$p_4 = \frac{1}{10}$

On souhaite avoir : $E(Y) = 4,5$

C'est à dire : $\frac{4}{10} \times 2 + \frac{3}{10} \times 3 + \frac{2}{10} \times m + \frac{1}{10} \times 10 = 4,5$

$$27 + 2m = 45$$

$$m = 9$$

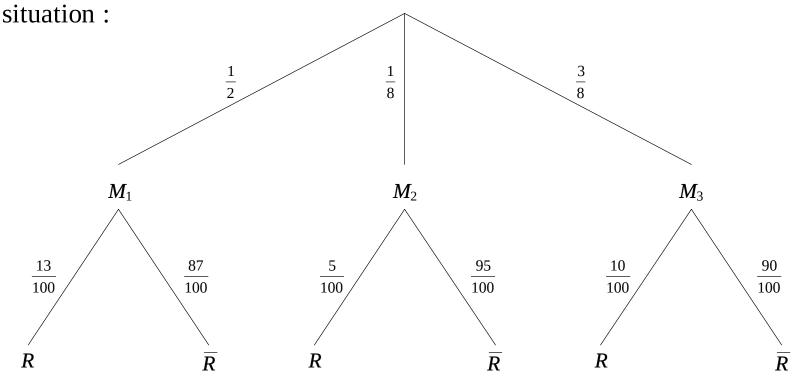
Il faut donc que la boule bleue rapporte 9 € pour que le gain moyen espéré soit de 4,5 €.

Exercice 3 *Problème de déconditionnement*

Notons :

R l'événement "l'appareil choisi est rouge" et M_i = "l'appareil choisi provient de la marque M_i", $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Arbre illustrant la situation :



1) La probabilité que l'appareil vienne de M_3 est $P(M_3) = \frac{3}{8}$. (On a de même $P(M_1) = \frac{1}{2}$ et $P(M_2) = \frac{1}{8}$)

2) La probabilité que l'appareil soit rouge sachant qu'il vienne de M_2 est :

$$P_{M_2}(R) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

On a de même : $P_{M_1}(R) = \frac{13}{100}$ et $P_{M_3}(R) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

3) Comme les événements M_1, M_2 et M_3 constituent une partition de l'univers, on a, d'après le théorème des probabilités totales :

$$P\left(\overline{R}\right) = P_{M_1}\left(\overline{R}\right)p(M_1) + P_{M_2}\left(\overline{R}\right) P(M_2) + P_{M_3}\left(\overline{R}\right)P(M_3) = \frac{87}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{95}{100} \times \frac{1}{8} + \frac{90}{100} \times \frac{3}{8} = \frac{713}{800}$$

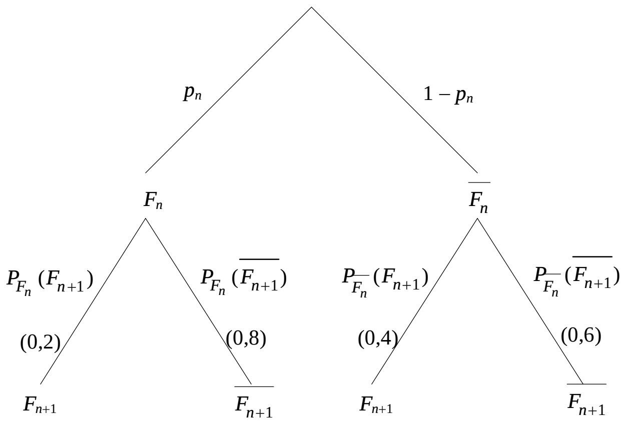
4) Il s'agit de calculer $P_R(M_1)$:

$$P_R(M_1) = \frac{P(M_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P_{M_1}(R)P(M_1)}{1 - P(\overline{R})} = \frac{13/100 \times 1/2}{87/800} = \frac{52}{87}$$

Exercice 4 *Probabilités conditionnelles et suite arithmético-géométrique*

Notons F_n l'événement "l'individu fume le $n^{\text{ème}}$ jour".

Illustrons, à l'aide d'un arbre la situation entre le $n^{\text{ème}}$ jour et le $(n + 1)^{\text{ème}}$ jour :



D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $\Omega = F_n \cup \overline{F_n}$, on a :

$$p_{n+1} = P(F_{n+1}) = P(F_{n+1} \cap F_n) + P(F_{n+1} \cap \overline{F_n}\,) = P_{F_n}(F_{n+1})P(F_n) + P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})P(\overline{F_n})$$

$$p_{n+1} = P_{F_n}(F_{n+1})\,p_n + P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})(1 - p_n) = 0{,}2p_n + 0{,}4(1 - p_n)$$

$$p_{n+1} = -0{,}2p_n + 0{,}4$$

Soit ω le réel tel que : $\quad \omega = -0{,}2\omega + 0{,}4$

En soustrayant membre à membre : $\quad p_{n+1} - \omega = -0{,}2(p_n - \omega)$

La suite $(p_n - \omega)$ est donc géométrique de raison $q = -0{,}2$, d'où :

$$p_n - \omega = (-0{,}2)^n p_0$$

On ne connaît pas p_0 mais cela ne nous empêche pas d'étudier la limite. On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} (-0{,}2)^n = 0$$

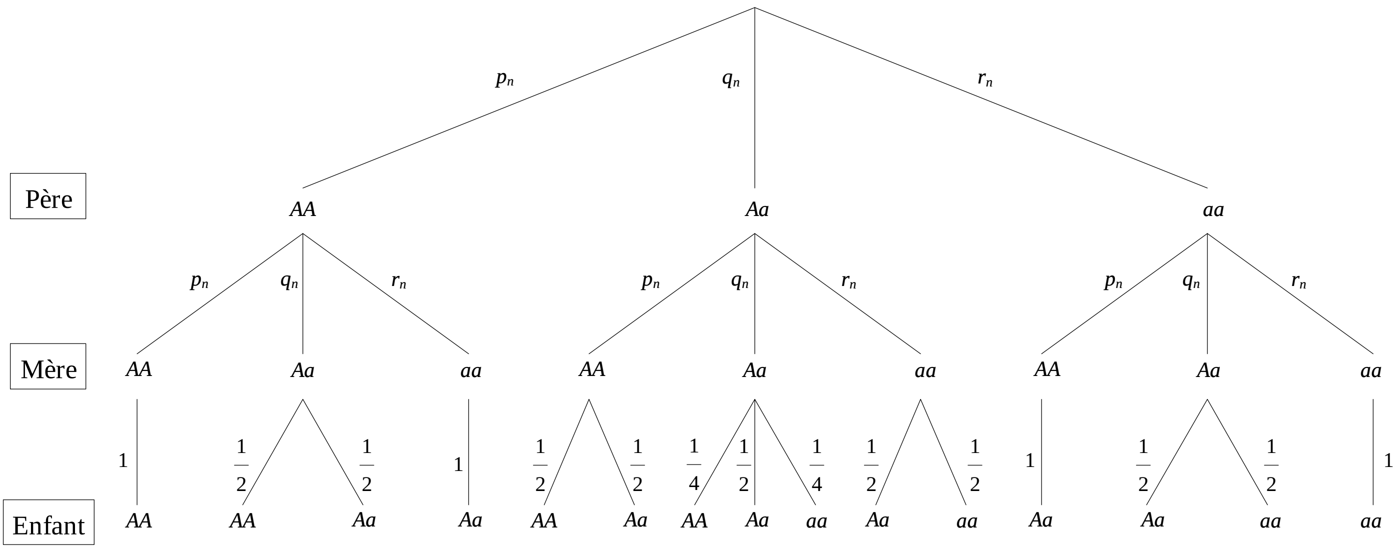
(Limite d'une suite géométrique de raison $q = 0{,}2 \in\,]-1, 1[$)

D'où : $$\lim_{n\to+\infty} p_n = \omega = \frac{1}{3}$$

Conclusion : avec ces données, à long terme, notre individu tendra à fumer un jour sur trois. Impossible de s'arrêter complètement tant que les conditions C_1 et C_2 sont appliquées. Notons que cette limite est indépendante de la probabilité initiale p_0. Autrement dit, que notre individu soit un grand ou un petit fumeur, au bout du compte, il fumera en moyenne un jour sur trois.

Exercice 5 *Loi de l'équilibre génétique lors de l'appariements au hasard - Loi de Hardy-Weinberg*

1.



2. D'après les règles de calculs sur les arbres, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1} = p_n^2 + \frac{1}{2}p_nq_n + \frac{1}{2}p_nq_n + \frac{1}{4}q_n^2 = p_n^2 + p_nq_n + \left(\frac{q_n}{2}\right)^2 = \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2$$

De même :

$$r_{n+1} = \left(\frac{q_n}{2} + r_n\right)^2$$

Et puisque $p_{n+1} + q_{n+1} + r_{n+1} = 1$:

$$q_{n+1} = 1 - \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 - \left(\frac{q_n}{2} + r_n\right)^2$$

3. a) D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1} - r_{n+1} = \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 - \left(\frac{q_n}{2} + r_n\right)^2 = (p_n - r_n)(p_n + q_n + r_n) = p_n - r_n$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n - r_n = p_0 - r_0 = \alpha$$

Ceci peut se démontrer proprement par récurrence.

b) On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1} = \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 = \left(p_n - r_n + \frac{2r_n + q_n}{2}\right)^2$$

$$p_n + \frac{q_n}{2} = p_n - r_n + \frac{2r_n + q_n}{2}$$

Et comme $p_n - r_n = \alpha$ et $2r_n + q_n = 1 - p_n + r_n = 1 - \alpha$, on obtient :

$$p_n + \frac{q_n}{2} = \alpha + \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1+\alpha}{2}$$

D'où : $$p_{n+1} = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$$

De même :

$$\frac{q_n}{2}+r_n=\frac{q_n+2p_n}{2}+r_n-p_n=\frac{1+p_n-r_n}{2}+r_n-p_n=\frac{1+\alpha}{2}-\alpha=\frac{1-\alpha}{2}$$

D'où : $$r_{n+1}=\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$$

Et enfin : $$q_{n+1}=1-\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2=\frac{1-\alpha^2}{2}$$

On a prouvé que les suites (p_n), (q_n) et (r_n) sont constantes à partir du rang $n = 1$.

Exercice 6 *Variables aléatoires et dénombrement*

1. Pour calculer la probabilité de A, on utilise la formule :

$$P(A)=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Première méthode : (simple et naturelle)

Calcul du nombre de cas possibles :

Le premier élève a **10** choix de parfums.

Le second élève a **10** choix de parfums.

Le troisième élève a **10** choix de parfums.

Au total, nous obtenons : $10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000$ cas possibles.

Calcul du nombre de cas favorables :

Le premier élève a **10** choix de parfums.

Le second élève a **9** choix de parfums. (Car on souhaite qu'il ait un parfum différent du premier)

Le troisième élève a **8** choix de parfums. (Car on souhaite qu'il ait un parfum différent des deux premiers)

Au total, nous obtenons : $10 \times 9 \times 8 = 720$ cas favorables.

Bilan : $$P(A)=\frac{720}{1000}=\frac{18}{25}=0{,}72$$

Deuxième méthode : (utilisant des notions de dénombrement)

Notons E l'ensemble $\{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ e\ ;\ f\ ;\ g\ ;\ h\ ;\ i\ ;\ j\}$ où chaque lettre désigne un parfum.

À chaque choix de parfum des trois élèves, on peut associer une **liste**. Par exemple, la liste ***gag*** signifie que le premier élève a choisi le parfum g, le second le parfum a et le troisième le parfum g.

Le nombre de cas possibles est égal au nombre de 3-listes de l'ensemble E. Il y en a $10^3 = 1000$.

Le nombre de cas favorables est égal au nombre de 3-listes d'éléments distincts de l'ensemble E, c'est-à-dire au nombre de 3-arrangements de E. Il y en a $A_{10}^3 = 720$.

On retrouve : $$P(A)=\frac{720}{1000}=\frac{18}{25}=0{,}72$$

2. Les différentes valeurs possibles de X sont 1 ou 2 ou 3.

On sait déjà, d'après la question 1 que : $P(X=3)=P(A)=\dfrac{18}{25}$

Calcul de $P(X = 1)$:

Nombre de cas favorables : $10 \times 1 \times 1$. (Le premier élève a 10 choix, les deux suivants sont contraints de prendre le même parfum).

D'où : $$P(X=1)=\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}$$

Par ailleurs, les événements "$X = 1$", "$X = 2$" et "$X = 3$" forment une partition de l'univers. On a donc :

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$$

D'où : $$P(X=2)=1-P(X=1)-P(X=3)=1-\frac{1}{100}-\frac{18}{25}=\frac{27}{100}$$

Remarque : on peut aussi calculer $P(X = 2)$ directement :

nombre de cas favorables : nombre de 3-listes de E qui contiennent 2 lettres distinctes (et donc une lettre répétée deux fois) :

choix de la lettre répétée : 10 choix. (Exemple *g*)

choix de l'autre lettre (distincte de la lettre répétée) : 9 choix (Exemple *a*)

choix de la position de la lettre non répétée : 3 choix (*agg* ou *gag* ou *gga*)

Au total : $10 \times 9 \times 3 = 270$ cas favorables.

On retrouve bien : $$P(X=2)=\frac{270}{1000}=\frac{27}{100}$$

On résume maintenant la loi de probabilité de X sous forme de tableau :

X	1	2	3	Total
Probabilités	0,01	0,27	0,72	1

Calcul de l'espérance mathématique de X :

$$E(X)=\sum_i p_i x_i = 0{,}01\times 1+0{,}27\times 2+0{,}72\times 3=2{,}71$$

En moyenne, le nombre de parfums distincts choisis par les trois élèves est 2,71.

Exercice 7 *Sur la double partition d'une population. Différents cas de figure*

Premier cas : on connaît $P(A)$, $P(B)$ et une probabilité conditionnelle

Supposons connue $P_A(B)$ (Méthode analogue si c'est une autre probabilité conditionnelle qui est donnée)

On peut alors calculer :

$$P(A\cap B)=P_A(B)P(A)$$

D'où : $$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad (1)$$

En utilisant la formule des probabilité totales, on a :

Avec la partition $\Omega = A \cup \overline{A}$: $$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap \overline{A})$$

C'est-à-dire : $$P(B)=P_A(B)P(A)+P_{\overline{A}}(B)(1-P(A))$$

D'où : $$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(B)-P_A(B)P(A)}{1-P(A)} \qquad (2)$$

Et avec la partition $\Omega = B \cup \overline{B}$: $$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})$$

$$P(A)=P_B(A)P(B)+P_{\overline{B}}(A)(1-P(B))$$

D'où : $$P_{\overline{B}}(A)=\frac{P(A)-P_B(A)P(B)}{1-P(B)} \qquad (3)$$

On a bien retrouvé les 3 probabilités restantes.

Deuxième cas : on connaît $P(A)$ mais pas $P(B)$ (ou le contraire) et deux probabilités conditionnelles

Supposons connues : $P(A)$, $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$

Par la formule des probabilités totales appliquée à la partition $\Omega = A \cup \overline{A}$, on a :

$$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)\,(1 - P(A))$$

On est ramené au premier cas.

Supposons connues : $P(A)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$

On calcule alors : $P(A \cap B) = P_A(B)P(A)$

D'où : $$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P_B(A)}$$

On est ramené au premier cas.

Si ce sont d'autres probabilités conditionnelles qui sont connues, on raisonne de manière analogue.

Troisième cas : on connaît trois probabilités conditionnelles

Supposons, par exemple, connues : $P_A(B)$, $P_{\overline{A}}(B)$ et $P_B(A)$

D'une part : $P(A \cap B) = P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B)$

D'autre part : $P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)\,(1 - P(A))$

D'où : $$P_A(B)P(A) = P_B(A)[P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)\,(1 - P(A))]$$

$$P(A)[P_A(B) - P_B(A)P_A(B) + P_{\overline{A}}(B)] = P_B(A)\,P_{\overline{A}}(B)$$

$$P(A) = \frac{P_B(A)P_{\overline{A}}(B)}{P_A(B) - P_B(A)P_A(B) + P_{\overline{A}}(B)}$$

On est ramené au deuxième cas.

Exercice 8 *Loi hypergéométrique, loi de Bernoulli, loi binomiale*

1. Le nombre de façons de choisir 5 cartes parmi 12 est : $\binom{12}{5}$

   Le nombre de façons de choisir k rois ($k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$) parmi 4 est : $\binom{4}{k}$

   Le nombre de façons de choisir $5 - k$ autres cartes (non rois) parmi les 8 restantes est : $\binom{8}{5-k}$

   On a donc : $$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{8}{5-k}}{\binom{12}{5}}$$ pour tout $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

   À l'aide de la calculatrice, on obtient :

X	0	1	2	3	4	Total
Probabilités	$\frac{7}{99}$	$\frac{35}{99}$	$\frac{42}{99}$	$\frac{14}{99}$	$\frac{1}{99}$	1

   Calcul de l'espérance mathématique de X :

$$E(X) = \sum_i p_i x_i = \frac{165}{99} = \frac{5}{3}$$

   En moyenne, le nombre de rois obtenus, par cette méthode de tirage, est $\frac{5}{3}$ ($\simeq$ 1,67).

2. Soit $\mathscr{E}$ l'expérience : "on tire, au hasard et avec remise, **une** carte de l'enveloppe et on regarde si c'est un roi"

   Cette expérience aléatoire possède **deux issues** : obtenir un roi (Succès) ou non (Echec).

   C'est donc une **épreuve de Bernoulli** de paramètre $p = P(\text{Succès}) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

   On **répète, de manière indépendante**, $n = 5$ fois cette épreuve de Bernoulli.

   La variable aléatoire Y (nombre de rois obtenus) représente le **nombre de succès** obtenus ($0 \leqslant Y \leqslant 5$)

   On peut donc affirmer que la variable aléatoire Y est **binomiale** de paramètre $n = 5$ et $p = \dfrac{1}{3}$:

$$Y \hookrightarrow B\left(5\,;\,\frac{1}{3}\right)$$

   Dans ce cas, on sait alors que :

$$P(Y = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{5-k} \quad \text{pour tout } k \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\}$$

   À l'aide de la calculatrice, on obtient (à 10^{-3} près) :

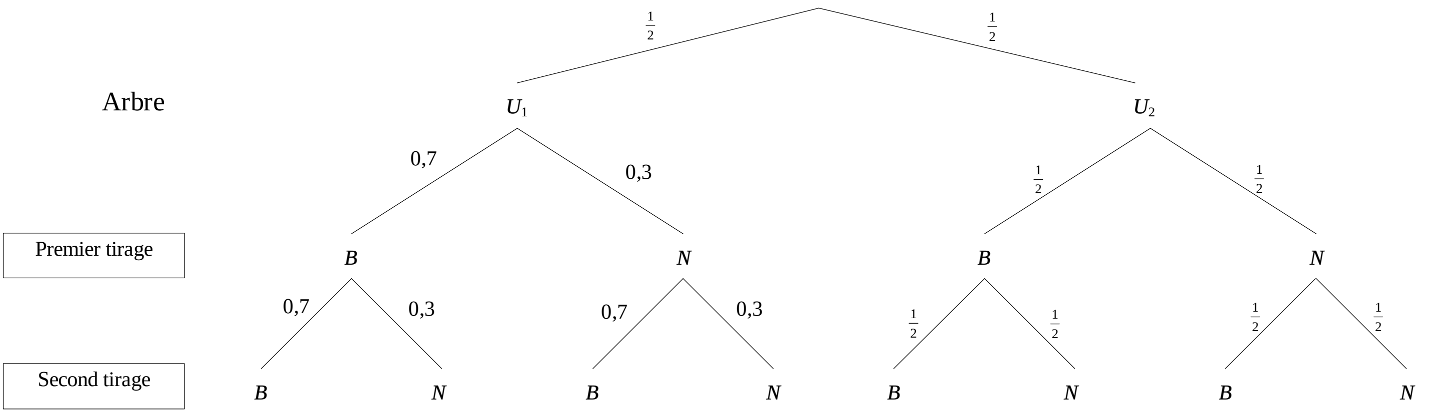
Y	0	1	2	3	4	5	Total
Probabilités	0,132	0,329	0,329	0,165	0,041	0,004	1

   Espérance mathématique de Y : $\qquad E(Y) = np = 5 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$

   En moyenne, le nombre de rois obtenus, par cette méthode de tirage, est $\dfrac{5}{3}$ ($\simeq 1{,}67$).

Exercice 9 *Notion d'indépendance - Utilisation d'un arbre.*

Arbre



Comparons $p(B_1)p(B_2)$ et $P(B_1 \cap B_2)$:

L'événement B_1 correspond au chemin $U_1\,B$ ou au chemin $U_2\,B$

$p(B_1) = 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}35 + 0{,}25 = 0{,}6$

L'événement B_2 correspond aux chemins U_1BB ; U_1NB ; U_2BB ; U_2NB

$p(B_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}6$

Donc $p(B_1)p(B_2) = 0{,}36$.

L'événement $B_1 \cap B_2$ correspond aux chemins : U_1BB ; U_2BB

$p(B_1 \cap B_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}37$.

Comme $p(B_1)p(B_2) \neq p(B_1 \cap B_2)$, on déduit : **$B_1$ et B_2 ne sont pas indépendants.**

Remarque : ce résultat peut paraître surprenant. Il est dû à la composition différente entre boules blanches et noires dans les deux urnes et qu'on ne sait pas, a priori, dans quelle urne seront effectués les tirages.

Exercice 10 *Dénombrement - Loi binomiale*

Partie *A*

Il y a donc 10 câbles du type C_1 et 40 câbles du type C_2 dans la livraison.

Notons qu'il y a $\binom{50}{4}$ façons de choisir 4 câbles parmi 50.

1) Nombre de façons de choisir 4 câbles de type C_1 : $\binom{10}{4}$

D'où :
$$P(E) = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{50}{4}} = \frac{3}{3290} \simeq 0{,}00091 \text{ à } 10^{-5} \text{ près}$$

2) Nombre de façons de choisir 1 câble du type C_1 : 10

Nombre de façons de choisir 3 câbles du type C_2 : $\binom{40}{3}$

D'où :
$$P(F) = \frac{10 \times \binom{40}{3}}{\binom{50}{4}} = \frac{988}{2303} \simeq 0{,}429 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

3) On a : $\overline{G}$ = "aucun câble n'est du type C_1" = "les 4 câbles sont du type C_2"

Nombre de façons de choisir 4 câbles du type C_2 : $\binom{40}{4}$

D'où :
$$P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - \frac{\binom{40}{4}}{\binom{50}{4}} = \frac{13891}{23030} \simeq 0{,}603 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Partie *B*

Comme le tirage se fait avec remise, les n réalisations de l'expérience $\mathscr{E}$ se font de manière identiques et indépendantes. On a ainsi un schéma de Bernoulli. La probabilité d'obtenir un câble du type C_1 étant égale à 0,2 on peut affirmer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 0{,}2$.

On a donc pour tout entier k compris entre 0 et n :
$$P(X = k) = \binom{n}{k} 0{,}2^k \times 0{,}8^{n-k}$$

1) $n = 4$.

a) Probabilité d'obtenir 2 câbles du type C_1 :
$$P(X = 2) = \binom{4}{2} 0{,}2^2 \times 0{,}8^2 = 0{,}1536$$

b) Probabilité d'obtenir au moins un câble de type C_1 :
$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^4 = 0{,}5904$$

c) L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale est donnée par :
$$E(X) = np = 4 \times 0{,}2 = 0{,}8$$

En moyenne, on obtient 0,8 câble du type C_1.

2) Dans cette question n est inconnu.

a) On a : $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^n$

b) On cherche n tel que : $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}9$

$$1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}9$$

$$0{,}8^n \leqslant 0{,}1$$

Par croissance du logarithme : $n \ln 0{,}8 \leqslant \ln 0{,}1$

Et comme $\ln 0{,}8 < 0$: $n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8}$

La calculatrice donne : $\dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \simeq 10{,}32$ à 10^{-2} près

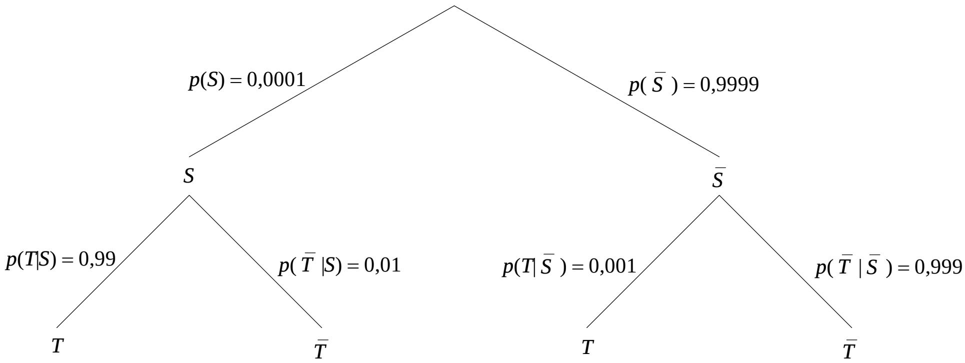
Et comme n est un entier : $n \geqslant 11$

On doit répéter l'expérience $\mathscr{E}$ au moins 11 fois pour être sûr à 90% d'obtenir au moins un câble C_1.

Exercice 11 *Test de séropositivité*

Notons S l'événement "l'individu est séropositif" et T "le test est positif"

Illustrons la situation à l'aide d'un arbre :



$$p(S|T) = \frac{p(S \cap T)}{p(T)} = \frac{p(T \mid S)\,p(S)}{p(T)} = \frac{p(T \mid S)\,p(S)}{p(T \mid S)\,p(S) + p(T \mid \bar{S})\,p(\bar{S})} = \frac{1}{1 + \dfrac{p(T \mid \bar{S})\,p(\bar{S})}{p(T \mid S)\,p(S)}} \simeq 0{,}090 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Conclusion : même si le test est positif, on a environ 9 chances sur 100 de ne pas être malade !

Voir l'exercice n°13 sur la pertinence d'un test de dépistage

Exercice 12 *Comparaison de l'efficacité de deux vaccins.*

On a :

$$\lambda = \frac{P_{\overline{V}}(M)}{P_V(M)} = \frac{P(M \cap \overline{V})P(V)}{P(M \cap V)P(\overline{V})} = \frac{P_M(\overline{V})P(M)P(V)}{P_M(V)P(M)P(\overline{V})} = \frac{P_M(\overline{V})P(V)}{P_M(V)P(\overline{V})} = \frac{(1-P_M(V))P(V)}{P_M(V)(1-P(V))}$$

<u>Vaccin *A*</u> :

$$\lambda_A = \frac{(1-0,008)\times 0,25}{0,008\times(1-0,25)} \simeq 41,33 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

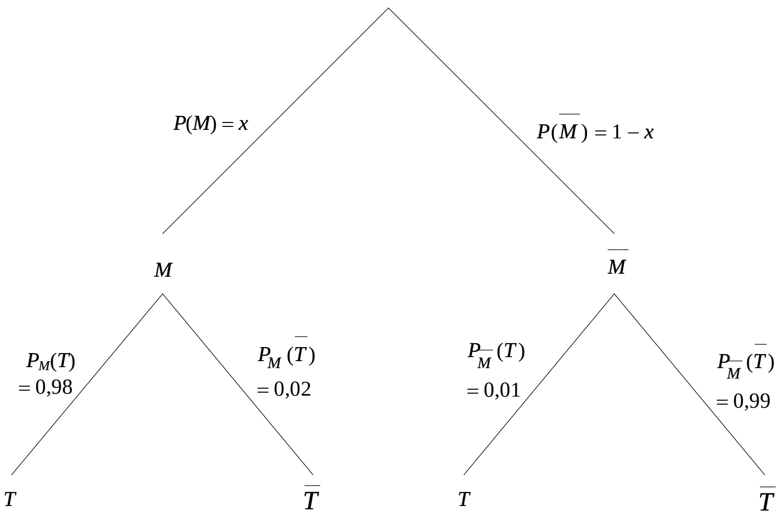
<u>Vaccin *B*</u> :

$$\lambda_B = \frac{(1-0,006)\times 0,2}{0,006\times(1-0,2)} = 41,42 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Les deux vaccins ont quasiment la même efficacité...

L'effectif de la population étudiée est bien trop faible pour tirer des conclusion plus précises.

Exercice 13 *Pertinence d'un test de dépistage*



1. Notons Ω la population.

   On a :
   $$f(x) = P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

   Et d'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $\Omega = M \cup \overline{M}$:
   $$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M})$$

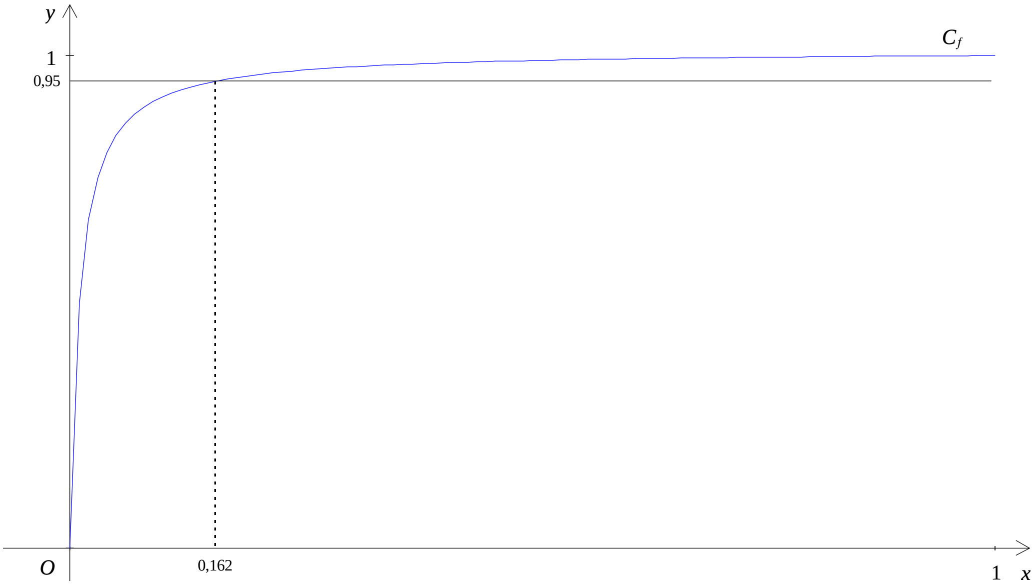
   D'où :
   $$f(x) = \frac{P(M \cap T)}{P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M})}$$

   $$f(x) = \frac{P_M(T)x}{P_M(T)x + P_{\overline{M}}(T)(1-x)} = \frac{P_M(T)x}{\left(P_M(T) - P_{\overline{M}}(T)\right)x + P_{\overline{M}}(T)}$$

   Application numérique avec $P_M(T) = 0,98$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$

$$f(x) = \frac{0{,}98x}{0{,}97x+0{,}01} = \frac{98x}{97x+1}$$

Représentation graphique de la fonction f :



2. On a : $$f(0{,}05) = \frac{98\times 0{,}05}{97\times 0{,}05+1} \simeq 0{,}8376 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

Le test n'est pas fiable si 5% de la population est malade...

On résout l'inéquation : $$f(x) \geqslant 0{,}95$$

$$\frac{98x}{97x+1} \geqslant 0{,}95$$

Et comme $97x + 1 > 0$ (car $0 \leqslant x \leqslant 1$) :

$$98x \geqslant 0{,}95 \times 97x + 0{,}95$$

$$5{,}85x \geqslant 0{,}95$$

$$x \geqslant \frac{19}{117}$$

Or, $\frac{19}{117} \simeq 0{,}16239$ à 10^{-5} près. On en déduit :

le test est fiable si au moins 17% de la population est malade (au pourcent près)

Exercice 14 *Estimation de la composition d'une urne.*

1. Considérons l'expérience aléatoire $\mathscr{E}$ consistant à choisir un jeton blanc ou un jeton noir.

   Cette expérience comporte **deux** issues, il s'agit d'une expérience de **Bernoulli**.

   Notons S l'événement "obtenir un jeton blanc". Par équirépartition, la probabilité p de S est :

$$p = \frac{1}{2}$$

   On répète $n = 10$ fois cette expérience (on fait un schéma de Bernoulli). Le nombre X de réalisation de S suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$.

   On a donc, pour tout $k \in [\![0, 10]\!]$:

$$P(X = k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \binom{10}{k} \times \frac{1}{2^{10}}$$

   L'espérance d'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p est donnée par :

$$E(X) = np$$

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

   En moyenne, l'urne contient 5 jetons blanc (et donc 5 jetons noirs) ce qui ne devrait surprendre personne.

2. Notons A l'événement : "l'urne contient 4 jetons blancs et 6 jetons noirs".

   D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $\Omega = \coprod_{k=0}^{n}(X = k)$, on a :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{10} P_{(X=k)}(A)P(X = k)$$

   Il est clair que $P_{(X=0)}(A) = 0$. (Si l'urne ne contient aucun jeton blanc, l'événement A ne peut pas se réaliser)

   Supposons que l'urne contienne k jetons blancs ($1 \leqslant k \leqslant n$) et $n - k$ jetons noirs. Notons Y le nombre de jetons blancs obtenus lors du tirage successif et avec remise de 10 jetons. La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $q = \frac{k}{10}$ et $n = 10$. D'où :

$$P(Y = 4) = \binom{10}{4}\left(\frac{k}{10}\right)^4\left(\frac{10-k}{10}\right)^6$$

   D'où : $$P_{(X=k)}(A) = \frac{1}{2^{10}}\binom{10}{4}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{k}{10}\right)^4\left(\frac{10-k}{10}\right)^6\binom{10}{k} \simeq 0{,}15675 \text{ à } 10^{-5} \text{ près}$$