2. a) Exprimer en fonction de n la partie réelle x_n et la partie imaginaire y_n de U_n et calculer les limites des suites (x_n) et (y_n).
b) Soit A_n le point d'affixe U_n. Montrer que les points A_n sont alignés.

Chapitre 5 : SUITES NUMERIQUES

1.1. RESUME DU COURS

Soit (U_n) une suite numérique définie sur E, une partie de $\mathbb{N}$.

Suites monotones

- (U_n) est croissante ssi U_{n+1} - $U_n \geq 0$, $\forall n \in$ E.
- (U_n) est décroissante ssi U_{n+1} - $U_n \leq 0$, $\forall n \in$ E.
- (U_n) est constante ssi U_{n+1} - $U_n = 0$, $\forall n \in$ E.

Suites bornées

- (U_n) est majorée s'il existe un nombre réel M, $U_n \leq M$, $\forall n \in$ E.
- (U_n) est minorée s'il existe un nombre réel m, $U_n \geq m$, $\forall n \in$ E.
- (U_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Suites convergentes

- (U_n) est convergente si elle admet une limite réelle (quand n tend vers $+\infty$).
- (U_n) est divergente si elle n'est pas convergente.

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Soit (U_n) une suite définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est une fonction continue. Si (U_n) converge vers L ($L \in \mathbb{R}$), alors L est une solution de l'équation $f(x) = x$.

<u>Théorèmes de comparaison</u> (voir chapitre 1)

<u>Suites arithmétiques – suites géométriques</u>

- **Définition** :

- (U_n) est arithmétique ssi $U_{n+1} - U_n$ = constante ;

cette constante est la raison de la suite et elle est en général notée r.

- (U_n) est géométrique s'il existe une constante q telle que

$U_{n+1} = qU_n$. q est la raison de la suite.

- **Propriétés**

Soit (U_n) une suite de premier terme U_0 de raison r ou q selon que la suite est arithmétique ou géométrique.

	Suite arithmétique	**Suite géométrique**
Relation entre les termes	$U_n = U_0 + n.r$ $U_n = U_p + (n - p).r$	$U_n = U_0 \cdot q^n$ $U_n = U_p . q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs	$\frac{(nb\ de\ t)(1^{er}\ t + dern.t)}{2}$	$(1^{er} t)[\frac{1-q^{nb\ de\ t}}{1-q}]$, $q \neq 1$
Limite	-Si $r > 0$, $lim\, U_n = +\infty$ -Si $r < 0$, $lim\, U_n = -\infty$	- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_n q^n = 0$ - Si $q > 1$ alors $lim\ q^n = +\infty$ - Si $q = 1$ alors $lim\ q^n = 1$ - Si $q \leq -1$ alors $lim\ q^n$ n'existe pas

<u>Remarques</u> :

- « $1^{er}\ t$ » signifie premier terme et « dern.t » signifie dernier terme .

- « nb de t » signifie nombre de termes et

nb de t = indice du dern.t – indice du 1^{er} $t + 1$.

- a, b, c dans cet ordre sont en progression arithmétique

ssi a + c = 2b.

- a, b, c dans cet ordre sont en progression géométrique

ssi ac = b^2 .

Démonstration par récurrence

Pour montrer qu'une propriété (P_n) est vraie pour tout entier naturel n ≥ n_0 , on procède par étapes :

- On vérifie que la propriété est vraie au premier rang n_0.
- On suppose que la propriété est vraie à un rang p ≥ n_0.
- On montre que la propriété est vraie au rang p+1 (en utilisant le plus souvent la supposition appelée hypothèse de récurrence).