5.2. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Soit les suites (U_n) et (V_n) définies par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n+1} \end{cases}$ et $V_n = \frac{1}{U_n}$.

1. Calculer U_1, U_2, V_0 et V_1.
2. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on indiquera sa raison et son premier terme.
3. Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.
4. Exprimer en fonction de n, $S_n = V_0+V_1+\ldots+V_n$.
5. Etudier la convergence des suites (V_n), (U_n) et (S_n).

Exercice 2

Soit les suites U et V définies par $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 2 \end{cases}$ et

$V_n = U_n + 3$.

1. Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme.
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Déterminer en fonction de n, $S_n = V_1+V_2+\ldots+V_n$ et $S'_n = U_1+U_2+\ldots+U_n$.
4. Calculer la limite de V_n, U_n, S_n et S'_n.

Exercice 3

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \sqrt{3U_n - 2}$.

1. Montrer par récurrence que U est minorée par 2.

2. Etudier la monotonie de la suite U.

3. En déduire que U converge vers un nombre réel dont on déterminera sa valeur.

Exercice 4 **(Bac 2004)**

Soit la suite géométrique U de premier terme $U_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$ et V la suite arithmétique de premier terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout n, on note z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n.

1. a) Exprimer U_n et V_n en fonction de n.

b) En déduire z_n.

2. Démontrer que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ i et de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.

3. Pour tout n, on pose $Z_n = z_0 z_1 \dots z_n$. Exprimer en fonction de n, un argument de Z_n.