- Pour montrer que f^{-1} est dérivable sur un intervalle J, on détermine l'intervalle I tel que J = $f(I)$, puis on montre que f est dérivable sur I et de dérivée non nulle sur I.
- Pour montrer que f^{-1} est dérivable en un point y_0, on

détermine le réel x_0 tel que $y_0 = f(x_0)$, puis on montre que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$.

Dans ce cas $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x0)}$.

*

Inégalité des accroissements finis

➢ **Théorème :** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. S'il existe un nombre réel k tel que $|f'(x)| \leq$ k sur I, alors pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I,

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$.

1.2. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice1

Soit les fonctions *f, g, h, i et j* définies par

$f(x) = -3x^3+2x+1$; $g(x) = \frac{x-1}{2-x}$; $h(x) = \frac{2x^2-x-6}{x-1}$;

$i(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$; $j(x) = x - 2\sqrt{x-1}$.

1. Pour chacune de ces fonctions, déterminer l'ensemble de définition, les limites aux bornes de l'ensemble de définition et en déduire les éventuelles asymptotes.
2. Montrer que la droite (d) d'équation y = $2x+1$ est une asymptote oblique à C_h la courbe de h.
3. Etudier les branches infinies de C_i à $-\infty$ et de C_j à $+\infty$.

Exercice 2

Déterminer la limite de f en a dans les cas suivants

1) $f(x) = \frac{x^3-3x-2}{2x^2-x-6}$, $a = 2$; 2) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$, $a = -1$;

3) $f(x) = \frac{sinx}{x}$, $a = 0$; 4) $f(x) = \frac{x+sinx+sin3x}{x(x^2-1)}$, $a = 0$;

5) $f(x) = \frac{x}{2+cos2x}$, $a = +\infty$.

Exercice 3

Soit les fonctions f et g définies par

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & si\ x \leq -2 \\ \sqrt{7-x} & si\ -2 < x \leq 1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & si\ x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = \frac{x}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ g(x) = \frac{-1+cos2x}{2x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

1. a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f aux points -2 et 1.

b) Interpréter graphiquement le résultat de l'étude de la dérivabilité de f en -2.

2. Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur son ensemble de définition.

Exercice 4

Soit la fonction f, $f(x) = \frac{1-cosx}{x}$. Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 ; définir ce prolongement.

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de dérivabilité, la fonction dérivée et le signe de la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1) $f(x) = x^3+x^2-5x+3$; 2) $g(x) = \frac{2x^2-x-1}{x^2+x+1}$; 3) $h(x) = (\frac{-2x+1}{x-1})^3$;

4) $i(x) = x\text{-}1+ \frac{4}{x+1}$; 5) $j(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+1}}$;

6) $k(x) = (1+cos2x)sin^2 x$;   7) $l(x) = \sqrt{|x^2-1|}$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 8$.

1. Déterminer l'image par f des intervalles [-3 ; -2],]-1 ;0] et [1 ; +∞[.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α ; donner un encadrement de α à 10^{-1} prés.
3. En déduire le signe de $f(x)$.

Exercice 7

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$

1. Etudier les variations de f ; soit g la restriction de f sur]-∞ ; 3].
2. Montrer que g est une bijection de]-∞ ; 3] vers un intervalle J à déterminer.
3. En déduire que g admet une bijection réciproque g^{-1} ; préciser son ensemble de définition et son tableau de variation.
4. Calculer $g(0)$; montrer que g^{-1} est dérivable au point $\frac{1}{3}$ et calculer $(g^{-1})'(\frac{1}{3})$.
5. Résoudre l'équation $g^{-1}(x) = 1$.
6. Déterminer l'expression explicite de g^{-1}.