<u>Exercice 1</u> :

1. Ensemble de définition, limites aux bornes et asymptotes ?

- ***f(x) = -3x³+2x+1*** ;

  f étant un polynôme, $D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$.

  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -3x^3 = +\infty$.
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 = -\infty$.

- **$g(x) = \frac{x-1}{2-x}$** ;

$g(x)$ existe ssi $2-x \neq 0$ ssi $x \neq 2$; $D_g = \mathbb{R}-\{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 +\infty[$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{-x} = -1$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{-x} = -1$.

D'où la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote parallèle à l'axe $(x'x)$.

- $\lim\limits_{x \to 2} g(x) =$ « $\frac{1}{0}$ » ; on obtient une forme indéfinie :

signe du dénominateur :

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$2-x$	+ 0 -

$\lim\limits_{x \to 2} x - 1 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} (2 - x) = 0^+$,

par quotient $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 2} x - 1 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} (2 - x) = 0^-$,

par quotient $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = -\infty$.

D'où la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote parallèle à l'axe $(y'y)$.

➤ $h(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x-1}$;

$h(x)$ existe ssi $x-1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$; $D_h = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty ; 1[\cup]1 + \infty[$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x$

  $= -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x$

  $= +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to 1} h(x) =$ « $\frac{-5}{0}$ » ;

Signe du dénominateur :

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	- 0 +

$\lim\limits_{x \to 1} 2x^2-x-6 = -5$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} x - 1 = 0^-$,

par quotient $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1} 2x^2 -x-6 = -5$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} x - 1 = 0^+$,

par quotient $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -\infty$.

D'où la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale.

➤ $i(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2x$;

$i(x)$ existe ssi $x^2 + 1 \geq 0$; toujours vrai, $D_i = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x = +\infty$,

par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} i(x) = +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$,

par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} i(x)$ est une forme indéterminée.

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x\to+\infty} i(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} - 2x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} |x|(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) - 2x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) - 2x \quad (\text{ car } x\to +\infty,\ |x| = x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 2)\ ;$$

or $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 2 = -1$,

par produit $\lim_{x\to+\infty} i(x) = -\infty$.

- ***j(x) = x - 2$\sqrt{x-1}$*** ;

j(x) existe ssi $x - 1 \geq 0$ ssi $x \geq 1$; $D_j = [1\ ;+\infty[$.

- $\lim_{x\to1} j(x) = 1 - 2\sqrt{1-1} = 1$.
- Par somme $\lim_{x\to+\infty} j(x)$ est une forme indéterminée. Levons

l'indétermination :

$$\lim_{x\to+\infty} j(x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}.\sqrt{1-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 2\sqrt{1-\frac{1}{x}})\ ;$$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - 2\sqrt{1-\frac{1}{x}}) = +\infty$,

par produit $\lim_{x\to+\infty} j(x) = +\infty$.

2. (d) : *y = 2x*+1 asymptote oblique à C_h ?

- Montrons que $\lim_{x\to\pm\infty} [h(x) - (2x+1)] = 0$?

$$\lim_{x\to\pm\infty}[\,h(x) - (2x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty}[\frac{2x^2-x-6}{x-1} - (2x+1)]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{-5}{x-1}) = 0\ ;$$

donc (d) : $y = 2x+1$ est une asymptote oblique à C_h.

3. Branches infinies ?

- Branches infinies de C_i à $-\infty$?
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} i(x) = +\infty$;
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x}{x}$
    $= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x\,(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2\,)}{x}$
    $= \lim\limits_{x\to-\infty} -(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2) = -3$;
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}[\,i(x)-(-3x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+x = ?$

En factorisant pour lever l'indétermination, on obtient une forme indéterminée de la forme « 0.∞ ». On doit donc utiliser une autre transformation d'écriture, celle qui consiste à multiplier par l'expression conjuguée ; ainsi on a

$$\lim_{x\to-\infty}[\,i(x)-(-3x)] = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{1(\sqrt{x^2+1}-x)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$= 0$;

donc la droite d'équation $y = 3x$ est une asymptote oblique à Ci à $-\infty$.

- Branches infinies de C_j à $+\infty$?
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} j(x) = +\infty$;

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - 2\sqrt{x-1}}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{2\sqrt{x}\,(\sqrt{1-\frac{1}{x}}\ )}{\sqrt{x}^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{2\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} = 1$$

- $\lim_{x\to+\infty} [j(x) - 1(x)] = \lim_{x\to+\infty} x - 2\sqrt{x-1} - x$

$$= \lim_{x\to+\infty} -2\sqrt{x-1} = -\infty\ ;$$

donc C_j admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$.

Exercice 2 :

Pour les fonctions des questions 1 à 4, en remplaçant x par a, on obtient la forme indéterminée “ $\frac{0}{0}$ ”; ce qui explique la transformation d'écriture pour lever l'indétermination

1. ***f(x) =*** $\frac{x^3-3x-2}{2x^2-x-6}$;

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x+1)^2}{2(x-2)(x+\frac{3}{2})}$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(x+1)^2}{2x+3} = \frac{9}{7}\ .$$

(on a factorisé le numérateur par la méthode de Horner)

2. ***f(x) =*** $\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$ **;**

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} = \frac{1}{4}\ .$$

(on a multiplié par l'expression conjuguée)

3. ***f(x)*** **=** $\frac{sinx}{x}$ **;**

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ où $g(x) = sinx$;

Or g étant dérivable en 0 et $g'(x) = cosx$, donc

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = g'(0) = 1.$

NB : $\lim\limits_{u\to 0}\frac{sinu}{u} = 1$ est un théorème à retenir et à appliquer dans les calculs de limite.

4. ***f(x)*** = $\frac{x+sinx+sin3x}{x}$;

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 + \frac{sinx}{x} + 3\,\frac{sin3x}{3x}$

$= 1+ 1+3(1) = 5.$

5. ***f(x)*** **=** $\frac{x}{2+cos2x}$ **:**

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$? En remplaçant x par $+\infty$, on obtient dans le calcul « $cos(+\infty)$ » qui n'a pas de sens, d'où l'utilisation des théorèmes de comparaison :

on a $-1 \le cos2x \le 1$ ssi $1 \le 2+cos2x \le 3$ ssi $\frac{1}{3} \le \frac{1}{2+cos2x} \le 1$ ssi $\frac{x}{3} \le \frac{x}{2+cos2x} \le x$ (car $x\to +\infty \Rightarrow x> 0$). Il résulte de cette dernière double inégalité que $f(x) \ge \frac{x}{3}$; or $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{3} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$

Exercice3 :

1. ***f(x)*** **=** $\begin{cases} \boldsymbol{x^2+x+1 \quad si\; x \le -2} \\ \boldsymbol{\sqrt{7-x} \quad si -2 < x \le 1} \\ \boldsymbol{\frac{x^2-1}{x+1} \quad si\; x > 1} \end{cases}$

a)

- **Continuité de** ***f*** **en – 2?**

- $f(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 3.$
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (x^2 + x + 1) = 3.$
- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \sqrt{7-x} = 3.$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$, donc f est continue en -2.

➢ **Continuité de f en 1 ?**

- $f(1) = \sqrt{7-1} = \sqrt{6}$.
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{7-x} = \sqrt{6}$.
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x+1} = 0.$

$f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, donc f n'est pas continue en 1.

➢ **Dérivabilité de f en – 2 ?**

$$* \lim_{x\to -2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+x-2}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x+2}$$
$$= \lim_{x\to -2^-} x - 1 = -3.$$

$$* \lim_{x\to -2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{\sqrt{7-x}-3}{x+2}$$
$$= \lim_{x\to -2^+} \frac{(\sqrt{7-x}-3)(\sqrt{7-x}+3)}{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}$$
$$= \lim_{x\to -2^+} \frac{-(x+2)}{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)} = \frac{-1}{6}.$$

$f'_g(-2) \neq f'_d(-2)$ donc f n'est pas dérivable en – 2.

➢ **Dérivabilité de f en 1 ?**

f n'étant pas continue en 1, f n'est pas dérivable en 1.

b) Interprétation graphique ?

La courbe de f admet au point d'abscisse – 2, deux demi-tangentes de coefficients directeurs – 3 et $-\frac{1}{6}$.

2. $$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x}{x-1} \ si\ x \in]-\infty; 0] \\ g(x) = \dfrac{-1+\cos 2x}{2x} \ si\ x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

- **Continuité et dérivabilité de *g* sur D*g* ?**

  - Sur $]-\infty; 0]$, $g(x)$ existe ssi $x-1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$;

toujours vrai sur $]-\infty; 0]$; donc $D_1 =]-\infty; 0]$.

Sur $]0\,;+\infty[$, $g(x)$ existe ssi $x \neq 0$ toujours vrai sur $]0\,;+\infty[$; donc $D_2 =]0\,;+\infty[$.

D'où $Dg = D_1 \cup D_2 =]-\infty\,;+\infty[$.

  - Sur $]-\infty; 0[$, g étant une fonction rationnelle, *g* est continue et dérivable sur son ensemble de définition, en particulier sur $]-\infty; 0[$.
  - Sur $]0\,;+\infty[$, *g* est un quotient de fonctions continues et dérivables sur $]0\,;+\infty[$; la fonction $x \to 2x$ étant non nulle sur $]0\,;+\infty[$, donc *g* est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
  - Continuité de *g* en 0 ?

* $g(0) = \frac{0}{0-1} = 0$.

* $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{x-1} = 0$.

* $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1+\cos 2x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{-2\sin^2 x}{2x}$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x}(-\sin x)\,;$$

Or $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0+} (-\sin x) = 0$, par produit $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$ donc *g* est continue en 0.

  - Dérivabilité de g en 0 ?

* $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\frac{x}{x-1}-0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{x(x-1)}$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x-1} = -1.$$

* $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{-1+\cos 2x}{2x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{-2\sin^2 x}{2x^2}$

$$= \lim_{x \to 0^+} -\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = -1.$$

$f'_g(0) = f'_d(0)$ donc f est dérivable en 0.

Exercice 4 :

- $f(x) = \frac{1-cosx}{x}$ **; f prolongeable par continuité en 0 ?**
  - $f(x)$ existe ssi $x \neq 0$; $D_f = \mathbb{R}-\{0\}$. Donc f est définie au voisinage de 0 et $0 \notin D_f$
  - $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{2(sin\frac{x}{2})^2}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{2}{2}sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}(\sin\frac{x}{2})$:

or $\lim_{x\to0} \frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$ et $\lim_{x\to0} sin\frac{x}{2} = 0$, donc par produit

$\lim_{x\to0} f(x) = 0.$

0 étant un réel fini, f est prolongeable par continuité en 0.

- ce prolongement est la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-cosx}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$$

Exercice 5 :

Ensemble de dérivabilité, dérivée et signe de la dérivée des fonctions suivantes ?

1. $f(x) = x^3+x^2-5x+3$;

∗ f étant un polynôme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$f'(x) = 3x^2+2x-5 = 3(x-1)(x+\frac{5}{3})$.

∗Signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$ $\quad -\frac{5}{3} \quad$ 1 $\quad +\infty$
$f'(x)$	+ 0 - 0 +

2. $\boldsymbol{g(x) = \frac{2x^2-x-1}{x^2+x+1}}$ **;**

⁎ $g(x)$ existe ssi $x^2+x+1 \neq 0$; $\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3$; $\Delta < 0$ donc $D_g = \mathbb{R}-\phi = \mathbb{R}$.

⁎ g étant une fonction rationnelle, g est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = \frac{(4x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(2x^2-x-1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{3x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}.$$

⁎Signe de $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $\boldsymbol{h(x) = \left(\frac{-2x+1}{x-1}\right)^3}$ **;**

⁎ $h(x)$ existe ssi $x-1\neq 0$; $D_h = \mathbb{R}-\{1\}$.

⁎ h étant la composée d'une fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et de la fonction cube dérivable sur $\mathbb{R}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et

$$h'(x) = 3\left[\frac{-2(x-1)-(1)(-2x+1)}{(x-1)^2}\right]\left(\frac{-2x+1}{x-1}\right)^2 = \frac{3}{(x-1)^2}\left(\frac{-2x+1}{x-1}\right)^2.$$

⁎ $h'(x) \geq 0$ sur D_h.

4. $\boldsymbol{i(x) = x-1+\frac{4}{x+1}}$ **;**

⁎ $i(x)$ existe ssi $x+1\neq 0$; $D_i = \mathbb{R}-\{-1\}$.

⁎ i étant la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}-\{-1\}$, i est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ et $i'(x) = 1 + \frac{-4(1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}$;

$$i'(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}.$$

⁎ Signe de $i'(x)$:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$i'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

5. $\boldsymbol{j(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+1}}}$ **;**

$*$ $j(x)$ existe ssi $x^2+2x+1 \geq 0$ et $\sqrt{x^2+2x+1} \neq 0$
ssi $x^2+2x+1 > 0$ ssi $(x+1)^2 > 0$ ssi $x+1 \neq 0$; $D_j = \mathbb{R}-\{-1\}$.

$*$ j est le quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}-\{-1\}$, la fonction $x \rightarrow \sqrt{x^2+2x+1}$ étant non nulle sur $\mathbb{R}-\{-1\}$, j est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ et

$$j'(x) = \frac{(1)\left(\sqrt{x^2+2x+1}\right)-\left(\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+1}}\right)(x)}{(\sqrt{x^2+2x+1})^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2+2x+1})^2-x(x+1)}{(\sqrt{x^2+2x+1})^3} = \frac{x+1}{(\sqrt{x^2+2x+1})^3}.$$

Signe de $j'(x)$:

x	$-\infty$ -1 $+\infty$		
$j'(x)$	-	||	+

<u>Remarques</u> :

- $j(x) = \frac{x}{\sqrt{(x+1)^2}} = \frac{x}{|x+1|}$; mais pour calculer sa dérivée on écrit $j(x)$ sans le symbole de valeur absolue
- Le carré, la valeur absolue et la racine carrée d'une fonction u étant positifs ou nuls, donc $u^2 > 0$ (ou $|u| > 0$ ou $\sqrt{|u|} > 0$) ssi $u \neq 0$.

6. $\boldsymbol{k(x) = (1+\cos 2x)\sin^2 x}$ **;**

$*$ $k(x)$ existe pour tout reel x; $D_k = \mathbb{R}$.

$*$ k étant le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = (-2\sin 2x)(\sin^2 x) + (2\cos x\sin x)(1+\cos 2x)$

$k'(x) = (-2\sin 2x)(\sin^2 x) + (\sin 2x)(2\cos^2 x)$

$= (2\sin 2x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 2\sin 2x\cos 2x = \sin 4x.$

D_k est un domaine d'étude de k, déterminons une restriction de D_k ; pour cela étudions la périodicité et la parité de k.