- $\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} lnx = 0$.

➢ Soit n un entier naturel non nul ; $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

➢ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{lnx} = +\infty$.

Remarque : Pour les quotients dont on a calculés la limite à + ∞, la limite de leurs inverses à + ∞ est égale à 0 ;

en particulier $\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x} = 0$.

2.5. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Résoudre :

1) $ln(2x\text{-}5) + ln(1+ x) = 2ln2$. 2) $2lnx + 3 = 0$.

3) $(lnx)^3$ - lnx^3 = - 2. 4) $lnx - ln(2\text{-}x) \geq 0$. 5) $ln(\frac{x+1}{x-1}) \leq 0$.

6) $(lnx)^2$ - $2lnx$ - 3> 0. 7) $e^2 e^{-x} - e^{x^2-4} = 0$.

8) $e^x - 2e^{-x} = -1$. 9) $(e^{x-1})^4 \geq e^{x^2}$.

10) $\begin{cases} 2lnx - 3lny = 5 \\ lnx + 2lny = -1 \end{cases}$. 11) $\begin{cases} e^x . e^y - e^5 = 0 \\ lnx + lny = ln6 \end{cases}$.

Exercice 2

Déterminer D_f l'ensemble de définition de f, les limites aux bornes de D_f, la dérivée $f'(x)$ et le tableau de variation de f.

1) $f(x) = xlnx - x$. 2) $f(x) = ln(\frac{1+x}{1-x})$. 3) $f(x) = \frac{lnx+1}{lnx-1}$.

4) $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. 5) $f(x) = -2x+1 + ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$. 6) $f(x) = x + e^{-x}$.

7) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.   8) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.   9) $f(x) = x - ln(1 + e^x)$.

Exercice 3

Soit la fonction f, $f(x) = ln(cosx)$ et C_f sa courbe.

1. Etudier les variations de f sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ et dresser son tableau de variation.

2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $cosx + \sqrt{3}sinx = 0$.

b) Soit la fonction g, $g(x) = ln(cosx + \sqrt{3}sinx)$; montrer que C_g la courbe de g peut se déduire de C_f par une transformation simple à préciser.

Exercice 4

A. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2 lnx$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0. Définir ce prolongement.

B. On considère la fonction g définie par

$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2 lnx \; si \; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

1. Etudier la dérivabilité de g sur $[0 ; +\infty[$.

2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3. a) Montrer que la restriction h de la fonction g à l'intervalle $[1 ; +\infty[$ admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Sur quel ensemble h^{-1} est – elle dérivable ?

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $h^{-1}(x) = e$.

d) Construire la courbe de g et celle de h^{-1} (on représentera les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et la demi-tangente en 0).

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\, e^{-x}$ et (C) sa courbe dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que (C) coupe la droite $\Delta : y = x$ en un unique point d'abscisse α appartenant à $[1 ; \frac{3}{2}]$.
3. Tracer (C).
4. a) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

b) Déterminer l'image de l'intervalle $]0 ; \alpha]$ par f^{-1}.

5. Déduire du tracé de (C) la courbe de la fonction g définie par $g(x) = |2x+1|e^{-x}$.