Chapitre 1

Généralités sur les fonctions

1/ Opérations sur les fonctions

a) Égalité de deux fonctions

Définition

Soient u et v deux fonctions. On dit que u et v sont égales et on note $u = v$ si :
– u et v ont le même ensemble de définition D.
– Pour tout $x \in D$, $u(x) = v(x)$.

Exemple : Les fonctions u et v sont-elles égales ?

1/ u et v sont définies par $u(x) = 3 - \dfrac{2}{x+1}$ et $v(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$

2/ u et v sont définies par $u(x) = x$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{x}$

1/ u et v ont le même ensemble de définition : $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$,

$$u(x) = 3 - \frac{2}{x+1} = \frac{3(x+1)-2}{x+1} = \frac{3x+1}{x+1} = v(x)$$

donc $u = v$.

2/ u est définie sur $\mathbb{R}$ et v est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc $u \neq v$.

b) Opérations sur les fonctions

Définition

Soients u et v deux fonctions définies sur D et λ un réel.
– On définit les fonctions $u + v$, uv, λu, $u + \lambda$ de la façon suivante :

$$(u+v)(x) = u(x) + v(x) \qquad (uv)(x) = u(x) \times v(x)$$
$$(\lambda u)(x) = \lambda \times u(x) \qquad (u+\lambda)(x) = u(x) + \lambda$$

– Si, pour tout $x \in D$, $v(x) \neq 0$ alors on peut définir la fonction $\dfrac{u}{v}$ par :

$$\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Exemple : Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$ et $v(x) = x + 3$. Déterminer $u + v$, uv, $2u$, $u + 2$ et $\dfrac{u}{v}$.

- Pour tout réel x, $(u + v)(x) = x^2 + x + 3$; $(uv)(x) = x^2(x + 3) = x^3 + 3x^2$; $(2u)(x) = 2x^2$ et $(u + 2)(x) = x^2 + 2$
- Pour tout réel $x \neq -3$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)(x) = \dfrac{x^2}{x+3}$

c) Composition de fonctions

Définition

Soit u une fonction définie sur D_u et v une fonction définie sur D_v et telle que pour tout $x \in D_v$, $v(x) \in D_u$.
On appelle fonction composée de v par u la fonction notée $u \circ v$ et définie sur D_v par :
Pour tout $x \in D_v$, $u \circ v(x) = u(v(x))$

$$\begin{tikzcd} D_v \arrow[r] & D_u \arrow[r] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, mapsto, "v"] \arrow[rr, bend right, "u\circ v"'] & v(x) \arrow[r, mapsto, "u"] & u(v(x)) \end{tikzcd}$$

Remarque : Il faut faire attention à l'ordre des fonctions. $u \circ v$ et $v \circ u$ sont en général des fonctions différentes. Il se peut qu'elles aient des ensembles de définition différents voire que l'une existe mais pas l'autre.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - 1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 3$. Définir $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles égales ?

- $g \circ f$ est définie sur $[0; +\infty[$ par $g \circ f(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x} - 1)^2 + 3 = x - 2\sqrt{x} + 4$
- $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 3} - 1$
- $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble de définition. On peut ausi remarquer que $g \circ f(0) \neq f \circ g(0)$

2/ Sens de variation

a) Sens de variation de la fonction $u + \lambda$

Propriété

Soit u une fonction défine sur un intervalle I et λ un réel.
Si u est monotone sur I alors u et $u + \lambda$ ont même sens de variation sur I.

Démonstration

Cas où u est croissante
Soient a et b deux réels de I.

$$\begin{aligned} a \leqslant b &\Longrightarrow u(a) \leqslant u(b) \text{ car } u \text{ est croissante sur } I. \\ &\Longrightarrow u(a) + \lambda \leqslant u(b) + \lambda \end{aligned}$$

La fonction $u + \lambda$ est croissante sur I.

b) Sens de variation de la fonction λu

Propriété

Soit u une fonction défine et monotone sur un intervalle I et λ un réel.
– Si $\lambda > 0$ alors les fonctions u et λu ont même sens de variation sur I.
– Si $\lambda < 0$ alors les fonctions u et λu ont des sens de variation contraires sur I.

Démonstration

Cas où u est croissante
Soient a et b deux réels de I. Si $a \leqslant b$ alors $u(a) \leqslant u(b)$ car u est croissante sur I.
– Si $\lambda > 0$ alors $\lambda u(a) \leqslant \lambda u(b)$ donc λu est croissante sur I.
– Si $\lambda < 0$ alors $\lambda u(a) \geqslant \lambda u(b)$ donc λu est décroissante sur I.

c) Sens de variation de la fonction $u \circ v$

Propriété

Soit u une fonction définie et monotone sur un intervalle J. Soit v une fonction définie et monotone sur un intervalle I et telle que pour tout $x \in I$, $v(x) \in J$.
– Si u et v ont même sens de variation alors $u \circ v$ est croissante sur I.
– Si u et v ont des sens de variation contraires alors $u \circ v$ est décroissante sur I.

Démonstration

Cas où u est croissante

Soient a et b deux réels de I. Si $a \leqslant b$ alors $v(a) \in J$, $v(b) \in J$ et $v(a) \leqslant v(b)$ car v est croissante sur I.

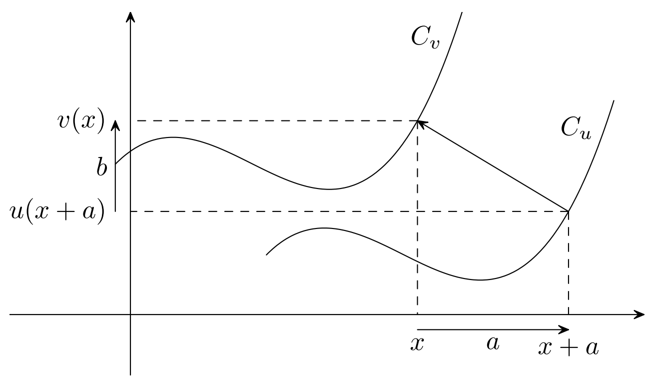
- Si u est croissante sur J alors $u(v(a)) \leqslant u(v(b))$ donc $u \circ v(a) \leqslant u \circ v(b)$ donc $u \circ v$ est croissante sur I.
- Si u est décroissante sur J alors $u(v(a)) \geqslant u(v(b))$ donc $u \circ v(a) \geqslant u \circ v(b)$ donc $u \circ v$ est décroissante sur I.

3/ Représentations graphiques

a) Représentation graphique d'une fonction $x \mapsto u(x+a)+b$

Propriété

Soit u une fonction et v la fonction définie par $v(x) = u(x+a)+b$.
Dans un repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on appelle $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ les courbes représentatives des fonctions u et v.
$\mathscr{C}_v$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $-a\,\overrightarrow{\imath} + b\,\overrightarrow{\jmath}$, autrement dit le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$.



Démonstration

Soient $M(x;y)$ et $M'(x-a;y+b)$.

$$M' \in \mathscr{C}_v \Leftrightarrow y+b = v(x-a) \Leftrightarrow y+b = u(x-a+a)+b \Leftrightarrow y = u(x) \Leftrightarrow M \in \mathscr{C}_v$$

b) Représentation graphique d'une fonction λu

Propriété

Soit u une fonction et v la fonction λu Dans un repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on appelle $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ les courbes représentatives des fonctions u et v. Si M est le point de $\mathscr{C}_u$ d'abscisse x alors on obtient le point d'abscisse x de $\mathscr{C}_v$ en multipliant l'ordonnée de M par λ.