

Chapitre 9

Angles orientés

1/ Définitions

Une unité de longueur est choisie.

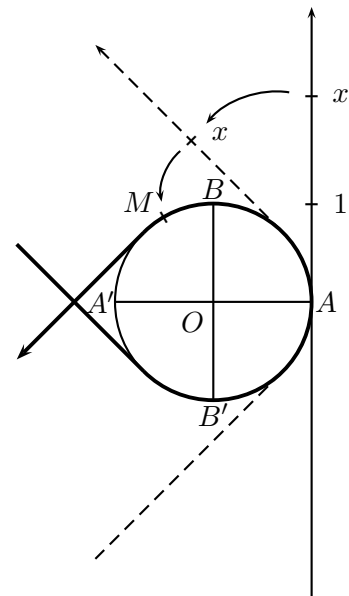
a) Cercle trigonométrique, mesures d'un arc

Définition

On appelle cercle trigonométrique un cercle de rayon 1, muni d'une origine et orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ce sens est appelé sens direct ou sens trigonométrique.

Soit \mathcal{C} un cercle trigonométrique de centre O et d'origine A . À tout réel x , on peut associer un unique point M du cercle en « enroulant » la droite des réels autour du cercle.

On dit que x est une mesure de l'arc orienté \widehat{AM} .



Remarque : Un point correspond à une infinité de réels.

Exemple : Le point A est associé aux réels $0, 2\pi, 4\pi, -2\pi, \dots$. Le point B est associé aux réels $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \dots$. Le point A' est associé aux réels $\pi, 3\pi, -\pi, \dots$

b) Mesures d'un angle orienté de vecteurs

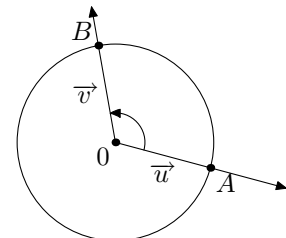
Étant donnés deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} et un cercle trigonométrique \mathcal{C} de centre O , on appelle A le point d'intersection de \mathcal{C} et de la droite (O, \vec{u}) et B le point d'intersection de \mathcal{C} et de la droite (O, \vec{v}) .

Définition

On appelle mesure de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) toute mesure de l'arc orienté \widehat{AB} .

Si x est une de ces mesures, toute autre mesure s'écrit $y = x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On note (de façon abusive) : $(\vec{u}, \vec{v}) = x + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Définition

On appelle mesure principale de (\vec{u}, \vec{v}) , l'unique mesure appartenant à $] -\pi; \pi]$.

Exemple : Déterminer la mesure principale d'un angle dont une mesure est $\frac{126\pi}{5}$

$$\frac{126\pi}{5} = \frac{12 \times 10\pi + 6\pi}{5} = 12 \times 2\pi + \frac{6\pi}{5} = 12 \times 2\pi + 2\pi - \frac{4\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5} + 13 \times 2\pi$$

La mesure principale de cet angle est donc $\frac{-4\pi}{5}$.

2/ Propriétés

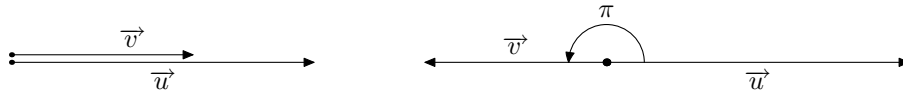
a) Angles et colinéarité

Propriété

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = 0 + 2k\pi$.

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de sens contraires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi + 2k\pi$.

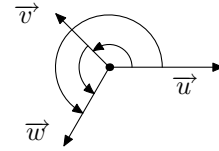


b) Relation de Chasles

Propriété

Pour tous vecteurs non nuls \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) + 2k\pi$$



Exemple : Dans la figure suivante, démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) + 2k\pi \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi = \pi + 2k\pi \end{aligned}$$

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont donc colinéaires.

Conclusion : (AB) et (CD) sont parallèles.

Conséquences :

Propriété

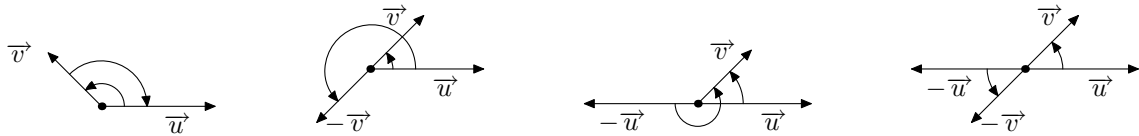
Pour tous vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} :

$$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi \quad (1)$$

$$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi \quad (2)$$

$$(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi \quad (3)$$

$$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi \quad (4)$$



Démonstration

(1) : $(\vec{v}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{v}) + 2k\pi = 2k\pi$ ainsi $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$

(2) : $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v}) + 2k\pi = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$

(3) se démontre comme (2).

(4) : $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$ d'après (2)

$$= (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + \pi + 2k\pi \text{ d'après (3)}$$

ainsi $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$

Chapitre 10

Trigonométrie

1/ Lignes trigonométriques

a) Cosinus et sinus

Rappels

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct (c'est-à-dire tel que $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$), \mathcal{C} le cercle trigonométrique de centre O .

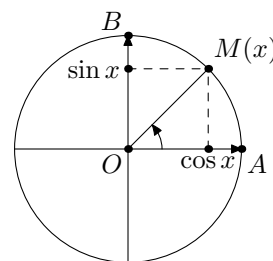
A et B sont les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$.

Définition

Pour tout réel x , il existe un unique point M de \mathcal{C} tel que x soit une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

$\cos x$ est l'abscisse de M dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$\sin x$ est l'ordonnée de M dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



Propriétés immédiates

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Cosinus et sinus d'un angle orienté de vecteurs

Soit (\vec{u}, \vec{v}) un angle orienté et x une de ses mesures. Les autres mesures de (\vec{u}, \vec{v}) sont donc de la forme $x + 2k\pi$. Or $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$. On a donc la définition suivante :

Définition

Le cosinus (resp. le sinus) d'un angle orienté de vecteurs est le cosinus (resp. le sinus) d'une quelconque de ses mesures.

b) Angles associés

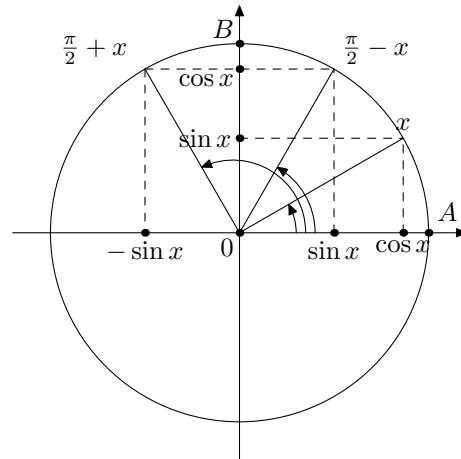
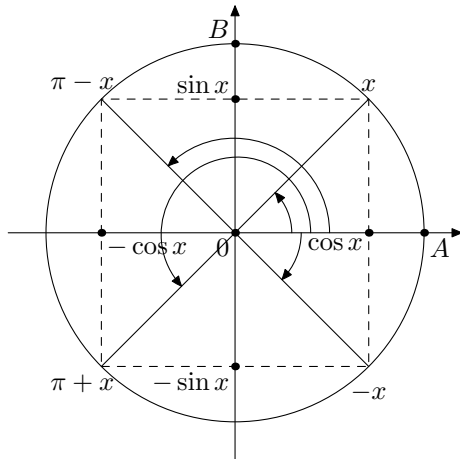
L'utilisation de symétries dans le cercle trigonométrique permet d'établir :

Propriété

Pour tout réel x ,

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(x + \pi) = -\cos x \\ \sin(x + \pi) = -\sin x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases}$$



c) Valeurs particulières

À l'aide de considérations géométriques, on peut obtenir les valeurs suivantes :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

d) Formules d'addition

Propriété

Quels que soient les nombres réels a et b ,

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (1) \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \quad (3)$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (2) \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad (4)$$

Démonstration

(1) : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal, \mathcal{C} le cercle trigonométrique de centre O et A et B les points de \mathcal{C} tels que $(\vec{i}, \vec{OA}) = a$ et $(\vec{i}, \vec{OB}) = b$.

Calculons de deux façons différentes le produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$

$$- \vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos(\vec{OA}, \vec{OB})$$

$$\text{Or } (\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{OB}) + 2k\pi = -a + b + 2k\pi \text{ et } OA = OB = 1$$

$$\text{Ainsi } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1 \times 1 \times \cos(b - a) = \cos(a - b)$$

– Les coordonnées de \overrightarrow{OA} sont $\begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$ et les coordonnées de \overrightarrow{OB} sont $\begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$

On a donc : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Conclusion : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

(2) : $\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

(3) : $\sin(a - b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

(4) : $\sin(a + b) = \sin(a - (-b)) = \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

e) Formules de duplication

Propriété

Quel que soit le réel x ,

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \quad (5)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad (6)$$

Démonstration

(5) : Quel que soit le réel x ,

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

En utilisant les relations $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, on obtient successivement :

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1 \quad \text{puis} \quad \cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$$

(6) : Quel que soit le réel x ,

$$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$$

2/ Résolution d'équations

Propriété

Quels que soient les réels a et b ,

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k \times 2\pi \\ a = -b + k \times 2\pi \end{cases} \quad \text{et} \quad \sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k \times 2\pi \\ a = \pi - b + k \times 2\pi \end{cases}$$

Exemple : Résoudre dans $] -\pi ; \pi[$ l'équation $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k \times 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

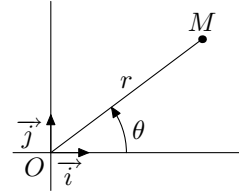
Sur l'intervalle $] -\pi ; \pi[$, on a $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2}; -\frac{5\pi}{6}\right\}$

3/ Repérage polaire

a) Coordonnées polaires d'un point

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct. Si M est un point distinct du point O alors M peut-être repéré par l'angle $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ et la longueur $r = OM$.

Réciproquement, la donnée d'un couple $(r; \theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ détermine un seul point M tel que $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ et $r = OM$.



Définition

Pour tout point M distinct de O , un couple $(r; \theta)$ tel que $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ et $r = OM$ est appelé couple de coordonnées polaires de M dans le repère polaire (O, \vec{i}) .

b) Lien entre coordonnées cartésiennes et polaires

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct.

Propriété

Si M est un point ayant pour coordonnées cartésiennes $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et pour coordonnées polaires $(r; \theta)$ alors :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ; \quad x = r \cos \theta ; \quad y = r \sin \theta$$

Démonstration

Notons \mathcal{C} le cercle trigonométrique de centre O . La demi-droite $[OM)$ coupe \mathcal{C} en N . On a donc $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{ON}$.

$N \in \mathcal{C}$ donc ses coordonnées cartésiennes sont $(\cos \theta; \sin \theta)$. Celles de M sont donc $(r \cos \theta; r \sin \theta)$.

Par unicité des coordonnées, $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

De plus $OM^2 = x^2 + y^2$ et $OM = r$ donc $r^2 = x^2 + y^2$.