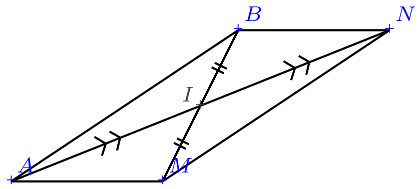
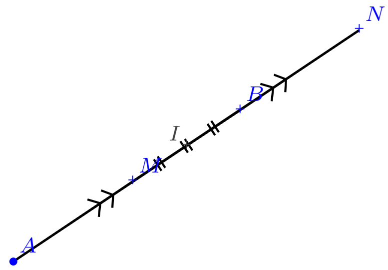
1) Vecteurs

1 - 1) Vecteur et translation

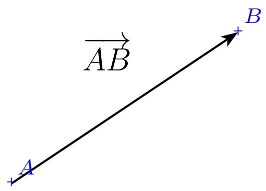
Définition 1 : La **translation** qui transforme A en B transforme tout point M du plan en un unique point N tel que $ABNM$ **est un parallélogramme**.



REMARQUES :
- **Autre formulation** : N est l'image de M par cette translation si et seulement si $[AN]$ et $[BM]$ ont le même milieu.
- Si $M \in (AB)$, alors le parallélogramme est aplati.



Définition 2 : La **translation** qui transforme un point A en un point B est appelée translation de **vecteur** $\overrightarrow{AB}$.



VOCABULAIRE : B est **l'image** de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

NOTATIONS : on note et on représente un vecteur avec une **flèche**.

Ne pas confondre AB, $[AB]$, (AB) et $\overrightarrow{AB}$.

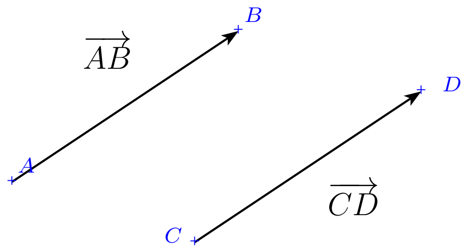
Pour bien comprendre : un vecteur (ici $\overrightarrow{AB}$), est complètement défini par :
- une **direction** : celle de la droite (AB) ;
- un **sens** : ici de A vers B ;
- une **longueur** (que l'on appelle la **norme** du vecteur) : AB.

NOTATION IMPORTANTE : la **norme** d'un vecteur se note $||\overrightarrow{AB}||$

On a donc : $||\overrightarrow{AB}|| = AB = BA = ||\overrightarrow{BA}||$

1 - 2) Égalité de deux vecteurs

Définition 3 : Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** lorsque la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme C **en** D.



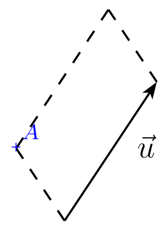
NOTATION : on note alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

VOCABULAIRE : Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la même que translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$, bien que les points A, B, C, D soient différents.

On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux **représentants d'un même vecteur**. On nomme souvent les vecteurs par une lettre qui ne dépend pas du représentant : par exemple, $\vec{u}$.

Lorsque l'on représente un vecteur $\overrightarrow{AB}$,
- A est **l'origine** du représentant ;
- B est **l'extrémité** du représentant

Méthode 1 : pour construire un représentant d'un vecteur connu, il faut construire un parallélogramme avec l'origine (ou l'extrémité) voulue.

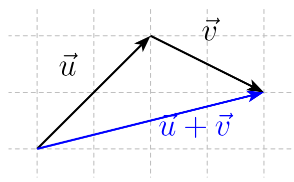


1 - 3) Opérations sur les vecteurs

Propriété 1 : en enchaînant la translation de vecteur $\vec{u}$ et la translation de vecteur $\vec{v}$, on obtient une nouvelle translation.

Cette propriété permet de définir la **somme** de deux vecteurs :

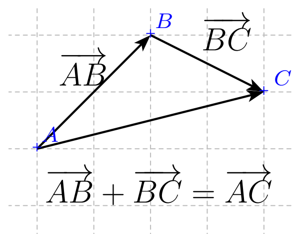
Définition 4 : Le vecteur associé à l'enchaînement de la translation de vecteur $\vec{u}$ et de la translation de vecteur $\vec{v}$, est appelé **somme de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$** et est noté $\vec{u} + \vec{v}$.



REMARQUES :
- L'ordre n'a pas d'importance ; autrement dit : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- On peut enchaîner trois translations ou plus et obtenir par exemple $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

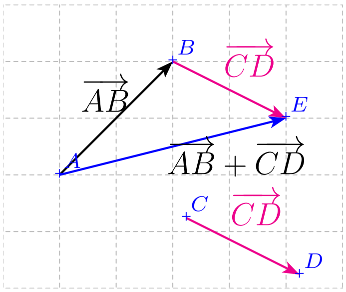
Propriété 2 : relation de Chasles

Pour tous points du plan A, B, C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



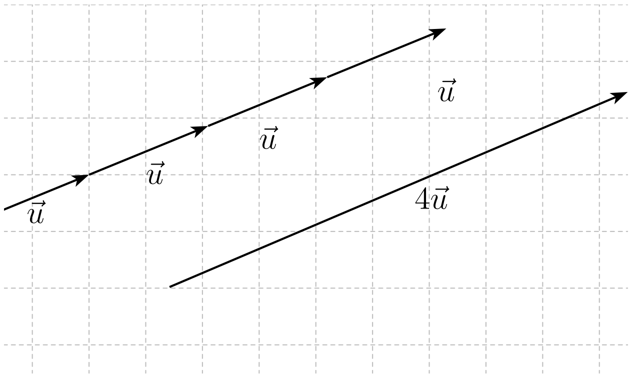
Cette relation permet de donner une méthode pour additionner deux vecteurs quelconques :

Méthode 2 : pour additionner deux vecteurs :
– prendre un représentant du second vecteur qui a pour origine l'extrémité du premier vecteur ;
– le vecteur somme a pour origine l'origine du premier vecteur et pour extrémité l'extrémité du second vecteur.



Si on ajoute successivement n fois le vecteur $\vec{u}$ en utilisant la méthode précédente, on définit une **multiplication** (par un nombre entier naturel pour le moment) :

Méthode 3 : pour multiplier un vecteur par n (entier naturel) :
– on utilise la méthode de la somme n fois de suite ;
– en résumé : $n \times \vec{u} = \underbrace{\vec{u}+\vec{u}+\ldots+\vec{u}}_{n \text{ fois}}$



Définition 5 : on appelle vecteur nul le vecteur associé à la translation qui transforme tout point en lui même.

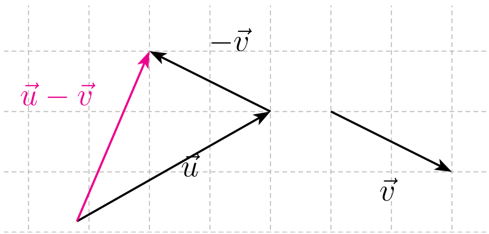
Notation : le vecteur nul se note $\vec{0}$

Remarque : pour tout point A, $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Définition 6 : le vecteur **opposé au vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, vecteur associé à la translation qui transforme B en A.

Notation : $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

Méthode 4 : pour soustraire deux vecteurs :
– faire la somme du premier vecteur et de l'opposé du second vecteur ;
– en résumé : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(\vec{-v})$



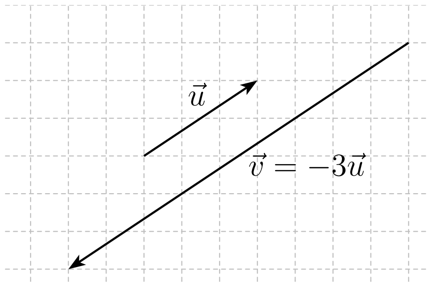
Cela permet de compléter $n \times \vec{u}$ dans le cas où n est négatif :
il suffit d'écrire $n \times \vec{u} = (-n) \times (-\vec{u})$ et d'appliquer la méthode vue pour le produit d'un nombre entier positif par un vecteur.

On généralise ces résultats pour un nombre k réel : $k \times \vec{u}$ est :
* la « répétition » k fois du vecteur $\vec{u}$ si $k > 0$;
* la « répétition » $-k$ fois du vecteur $-\vec{u}$ si $k < 0$;

1 - 4) Colinéarité

Définition 7 : Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k \times \vec{v}$.

Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

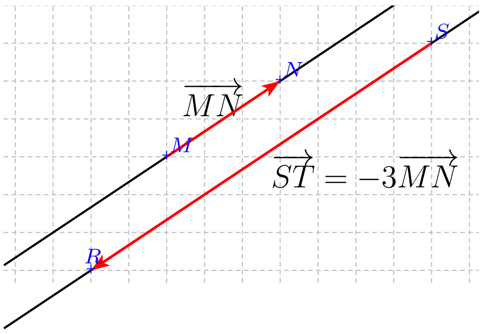


Méthode 5 : **pour montrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires**, on peut chercher le réel k tel $\vec{u} = k \times \vec{v}$.

1 - 5) Parallélisme et alignement

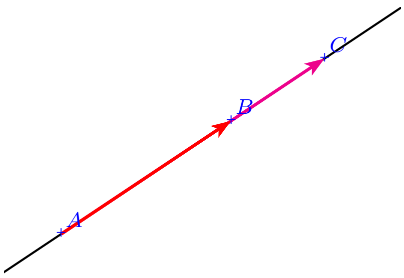
Propriété 3 : soient A, B, C et D quatre points du plan.

(AB) et (CD) sont **parallèles**
$$\Longleftrightarrow$$
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**



Propriété 4 : soient A,B et C trois points du plan.

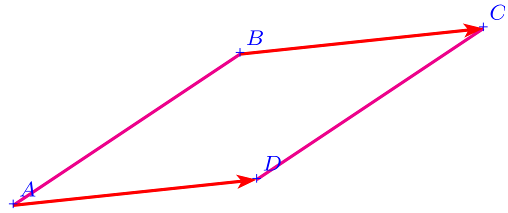
A, B et C sont **alignés**
$$\Longleftrightarrow$$
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**



1 - 6) Vecteurs et parallélogramme

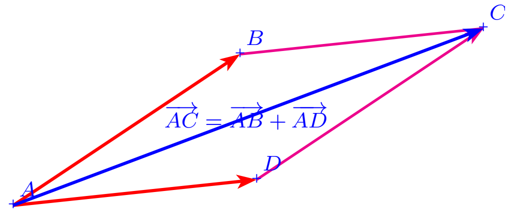
Propriété 5 :

$ABCD$ est un parallélogramme
$$\iff$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$



Propriété 6 : identité du parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme
$$\iff$$
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$



Preuve : d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\Longrightarrow$
Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$; on a donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\Longleftarrow$
Si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, on a alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ce qui donne $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

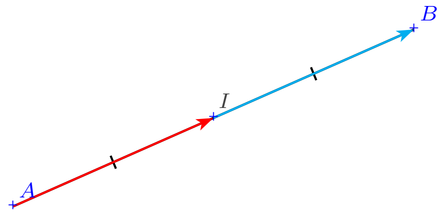
1 - 7) Vecteur et milieu

Propriété 7 :

I est le milieu du segment $[AB]$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$



PREUVE :

$\Longrightarrow$

Si I est le milieu de $[AB]$, alors les diagonales du quadrilatère aplati $AIBI$ se coupent en leur milieu car I est le milieu de $[AB]$ et évidemment de $[II]$. $AIBI$ est donc un parallélogramme, c'est à dire $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

$\Longleftarrow$

Si Si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, alors $AIBI$ est un parallélogramme par définition des vecteurs, et donc ses diagonales se coupent en leurs milieux. Les diagonales de $AIBI$ sont $[AB]$ et $[II]$. Puisque le milieu de $[II]$ est évidemment I, I est bien le milieu de $[AB]$.

2) Repère du plan

2 - 1) Notation

On définit un repère du plan par **trois points non alignés** (O, I, J). Par convention :
- (OI) est l'axe des abscisses ;
- (OJ) est l'axe des ordonnées.

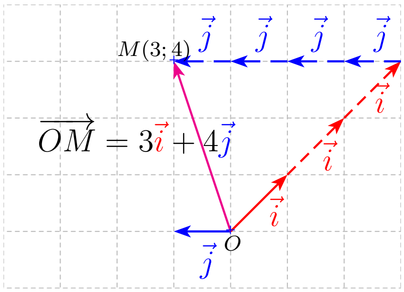
Notation vectorielle : Soit un repère(O, I, J). En définissant $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, on peut noter ce repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- I est l'image de O par la translation de vecteur $\vec{i}$;
- J est l'image de O par la translation de vecteur $\vec{j}$.

Différents types de repères :
- lorsque (OI) et (OJ) sont **perpendiculaires**, on dit que le repère est **orthogonal** ;
- Lorsque $OI = OJ$, on dit que le repère est **normé** ;
- Lorsque le repère est à la fois orthogonal et normé, il est **orthonormal** (on dit aussi **orthonormé**).

2 - 2) Coordonnées dans un repère

Coordonnées d'un point

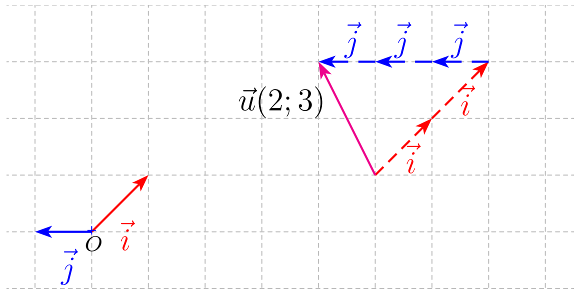
Définition 8 : Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, dire qu'un point M a pour coordonnées $(x_M;y_M)$, c'est dire que : $\overrightarrow{OM} = x_M \times \vec{i} + y_M \times \vec{j}$



AUTRE FORMULATION : $M(x_M;y_M)$ est l'image de O dans l'enchaînement de x_M fois la translation de vecteur $\vec{i}$, suivie de y_M fois la translation de vecteur $\vec{j}$.

Coordonnées d'un vecteur

Définition 9 : Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, dire qu'un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x;y)$, c'est dire que : $\vec{u} = x \times \vec{i} + y \times \vec{j}$



AUTRE FORMULATION : $\vec{u}$ est le vecteur issu de la translation de x fois la translation de vecteur $\vec{i}$, suivie de y fois la translation de vecteur $\vec{j}$.

NOTATION :
$\vec{u}(2;3)$ ou $\vec{u}\binom{2}{3}$ signifie que $\vec{u} = 2\vec{i}+3\vec{j}$

REMARQUE IMPORTANTE : dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on admet qu'il n'y a qu'une seule expression d'un vecteur en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$: les coordonnées d'un vecteur et d'un point sont donc **uniques** pour ce repère.

2 - 3) Exprimer des coordonnées dans un repère

Égalité de vecteurs

Propriété 8 : Dans un repère du plan, avec $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$,

$$\vec{u} = \vec{v} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

REMARQUE :
– Pour bien comprendre : $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si il y a autant de $\vec{i}$ dans $\vec{u}$ que dans $\vec{v}$ $(x = x')$, et autant de $\vec{j}$ dans $\vec{u}$ que dans $\vec{v}$ aussi $(y = y')$.

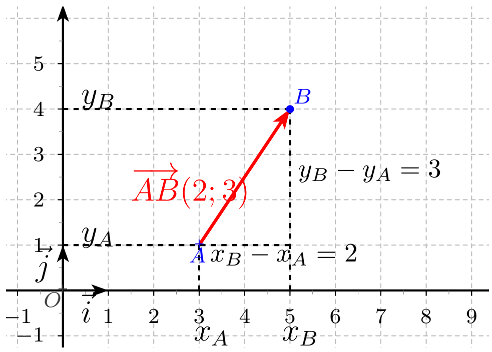
Méthode 6 : pour retranscrire une égalité vectorielle en coordonnées, la notation sous forme de système est efficace.

Coordonnées d'un vecteur donné par ses extrémités

Propriété 9 : Dans un repère du plan, avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$(x_B - x_A; y_B - yA)$$

On note $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - yA)$ ou $\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$



PREUVE : par le relation de Chasles,
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Or (par définition des coordonnées),$\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$ et $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$

Donc, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j}) = x_B\vec{i} - x_A\vec{i} + y_B\vec{j} - y_A\vec{j} = (x_B - x_A)\vec{i} - (y_B - y_A)\vec{j}$

Coordonnées du vecteur opposé, coordonnées de la somme de deux vecteurs

Propriété 10 : Dans un repère du plan, avec $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ du plan, les coordonnées de :

* $-\vec{u}$ sont $(-x; -y)$;
* $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x'; y + y')$.

PREUVE :
* $-\vec{u} = -(x\vec{i} + y\vec{j}) = -x\vec{i} - y\vec{j}$;
* $\vec{u} + \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$.

Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Propriété 11 : Dans un repère du plan, avec $\vec{u}(x; y)$ et $k \in \mathbb{R}$, les coordonnées du vecteur $k \times \vec{u}$ sont $(k \times x; k \times y)$

On note $k\vec{u}(kx; ky)$ ou encore $k\vec{u}\binom{kx}{ky}$

PREUVE :

$k\vec{u} = k \times (x\vec{i} + y\vec{j}) = kx \times \vec{i} + ky \times \vec{j}$

Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété 12 : Dans un repère du plan, avec $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan,

$$I(x_I;y_I) \textbf{ milieu du segment } [AB] \iff \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$$

Preuve :

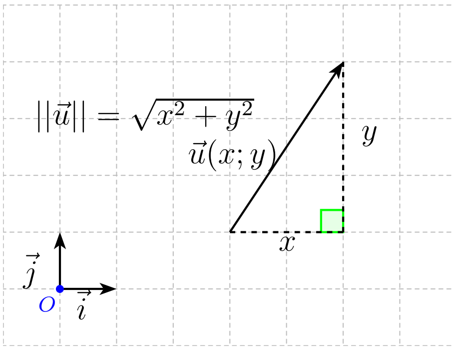
$$\begin{aligned} I \text{ milieu de } [AB] &\iff \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &\iff \begin{cases} x_I - x_A = \frac{1}{2}(x_B - x_A) \\ y_I - y_A = \frac{1}{2}(y_B - y_A) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_I = x_A + \frac{x_B-x_A}{2} \\ y_I = y_A + \frac{y_B-y_A}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_I = \frac{2x_A+x_B-x_A}{2} \\ y_I = \frac{2y_A+y_B-y_A}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_I = \frac{x_A+x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A+y_B}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

2 - 4) Distance en repère orthonormé

Propriété 13 : **norme d'un vecteur $\vec{u}(x;y)$**

Dans un repère **orthonormal** du plan,

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$$



Preuve : Puisque le repère est orthonormal, on peut construire un triangle rectangle de côtés mesurant x et y entre l'origine et l'extrémité des représentants de $\vec{u}$.

Puisqu'il est normé, ajouter les carrés des distances en abscisses et ordonnées a un sens (même unité de mesure).

On peut donc appliquer le théorème de Pythagore et obtenir le résultat.

Propriété 14 : distance entre deux points

Dans un repère **orthonormal** du plan, avec $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points,

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Preuve : $AB = ||\overrightarrow{AB}||$; il suffit de remarquer que $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$ et appliquer la propriété précédente.

Remarque : comme $AB \geqslant 0$,
$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \iff AB^2 = (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$

2 - 5) Colinéarité : expression dans un repère

Propriété 15 : Dans un repère du plan, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\Longleftrightarrow$ les coordonnées de $\vec{u}$ et celles de $\vec{v}$ sont **proportionnelles**

Cette propriété permet de mettre en place la méthode suivante :

Méthode 7 : **pour démontrer la colinéarité de deux vecteurs**

pour montrer que deux vecteurs sont ou ne sont pas colinéaires, on peut utiliser **les méthodes de proportionnalité**, comme tester l'égalité des produits en croix :

$$\vec{u}(x;y) \text{ et } \vec{v}(x';y') \text{ sont colinéaires} \Longleftrightarrow xy' = x'y \Longleftrightarrow xy' - x'y = 0$$