1) Sens de variations

1 - 1) Interpréter une courbe

Vocabulaire :

Géométrique	**Algébrique**
la courbe $\mathcal{C}_f$ **monte** quand on la parcourt de gauche à droite	la fonction f est **strictement croissante** sur l'intervalle correspondant
la courbe $\mathcal{C}_f$ **descend** quand on la parcourt de gauche à droite	la fonction f est **strictement décroissante** sur l'intervalle correspondant
la courbe $\mathcal{C}_f$ **est parallèle à l'axe des abscisses**	la fonction f est **constante** sur l'intervalle correspondant

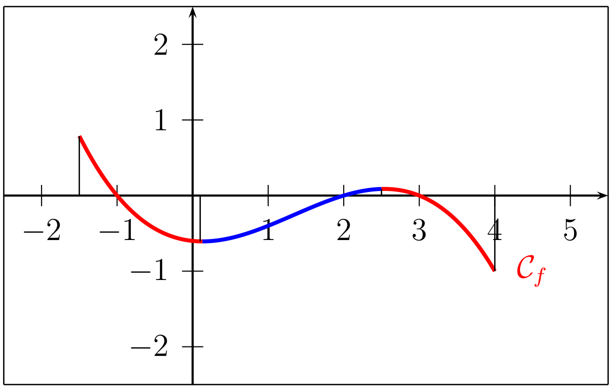
Une fonction est **monotone** sur un intervalle I lorsqu'elle ne change pas de sens de variation sur I.

Décrire le sens de variation

Pour décrire le sens de variation par une phrase, on donne son sens de variation sur chaque intervalle de $\mathcal{D}_f$.

Remarques :
– C'est la fonction f qui est croissante/décroissante, pas la courbe $\mathcal{C}_f$, ni le nombre $f(x)$.
– Dire que f est (dé)croissante ne veut rien dire. Il faut toujours préciser **SUR** un intervalle.

Exemple :

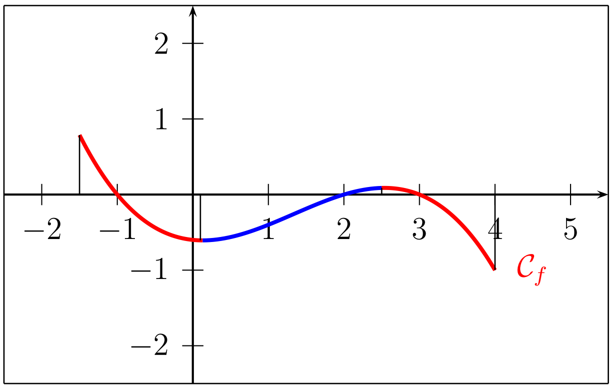


A l'aide de cette représentation graphique, on peut dire que :
– la fonction f est décroissante sur $[-1,5\ ;\ 0,1]$ et sur $[2,5\ ;\ 4]$
– la fonction f est croissante sur $[0,1\ ;\ 2,5]$

1 - 2) Tableau de variations

On peut décrire le sens de variation d'une fonction dans un tableau :
- Une ligne « x » qui correspond à l'ensemble de définition.
- Une ligne « $f(x)$ » qui décrit par une flèche le sens de variation.
  - vers le haut : strictement croissant ;
  - horizontale : constante ;
  - vers le bas : strictement décroissante.

Exemple :



Représentation graphique de la fonction f

x	$-1,5$		0,1		2,5		4
$f(x)$	0,8				0,1		
		↘		↗		↘	
			-0,6				-1

Tableau de variations de la fonction f

2) Extremum d'une fonction

2 - 1) Définir et modéliser

f est une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 1 : **majorant** $M \in \mathbb{R}$ est un **majorant** de f sur I lorsque, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant M$	**Définition 2** : **minorant** $m \in \mathbb{R}$ est un **minorant** de f sur I lorsque, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant m$
Définition 3 : **maximum** $M \in \mathbb{R}$ est un **maximum** de f sur I lorsque – M est un majorant – il existe $x \in I$ tel que $f(x) = M$	**Définition 4** : **minimum** $m \in \mathbb{R}$ est un **minimum** de f sur I lorsque – m est un minorant – il existe $x \in I$ tel que $f(x) = m$

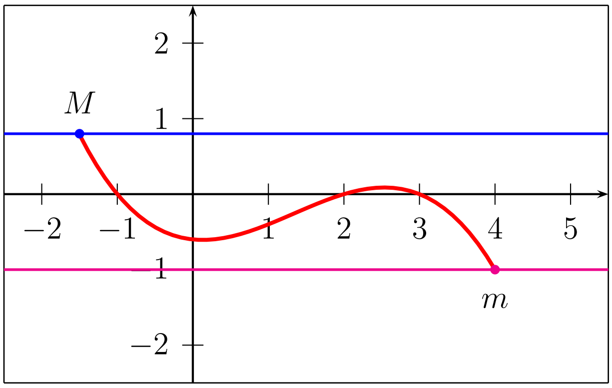
Exemple :

A l'aide de la représentation graphique ci-contre :

* 3 est un majorant de f ; 10 également.
* -1 est un minorant de f ; -25 également.

Par rapport aux extremum :

* le maximum de f sur $\mathcal{D}_f$ est 0,8, atteint en -1,5 ; il est représenté par le point $M(-1,5;0,8)$
* le minimum de f sur $\mathcal{D}_f$ est -1, atteint en 4 ; il est représenté par le point $m(4;-1)$



2 - 2) Utiliser

Méthode 1 : On repère facilement les extremums dans un tableau de variation (pas de justification nécessaire).

Exemple :

A l'aide du tableau de variations ci-contre :

* 3 est un majorant de f ; 10 également.
* -1 est un minorant de f ; -25 également.

Par rapport aux extremum :

* le maximum de f sur $\mathcal{D}_f$ est 0,8, atteint en -1,5
* le minimum de f sur $\mathcal{D}_f$ est -1, atteint en 4

x	$-1,5$		0,1		2,5		4
$f(x)$	0,8	↘	-0,6	↗	0,1	↘	-1

Tableau de variations de la fonction f

3) Fonctions affines

3 - 1) Définition

Définition 5 : fonction affine

Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.

Représentation graphique :

La représentation graphique de la fonction affine $f(x) = ax + b$ est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ qui vérifient : $y = f(x)$.

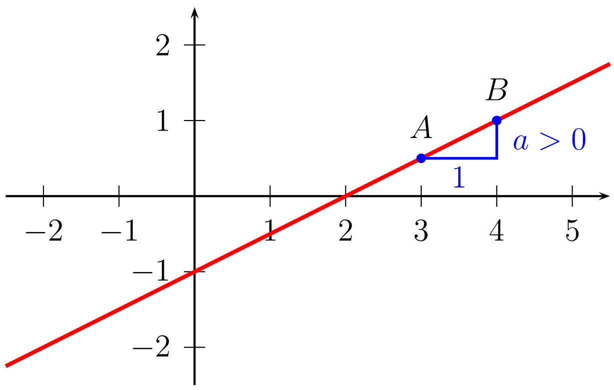
C'est la droite (d) d'équation $y = ax + b$

- Comme $f(0) = b$, le point de coordonnées $(0\ ;\ b)$ appartient à la droite (d) ; c'est pour cela qu'on nomme b **l'ordonnée à l'origine**.
- Si deux points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ sont sur la droite (d), alors on a la relation : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$; la valeur de a donne la direction de la droite (d) ; c'est pour cela qu'on nomme a **coefficient directeur**.

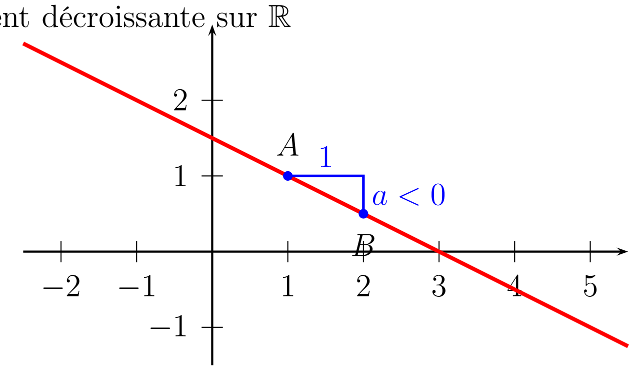
3 - 2) Sens de variation et signe d'une fonction affine

Propriété 1 : soit f la fonction affine $x \mapsto ax + b$ (avec a et b deux nombres réels)

Si a >0, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$



Si a <0, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$



Signe d'une fonction affine

Exemples :

Fonction affine de coefficient directeur positif :

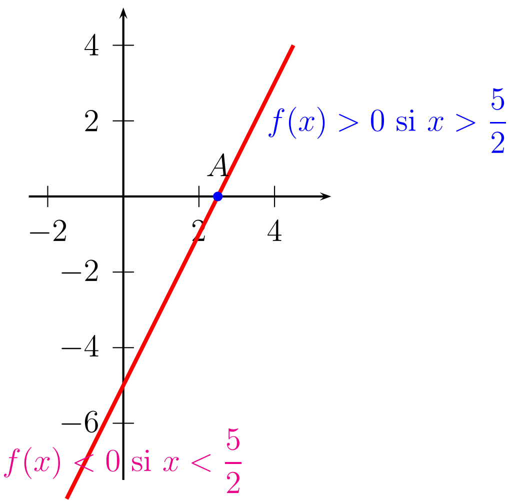
$f(x) = 2x - 5$

$a = 2 > 0$, la fonction f est strictement croissante.

Comme $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$, on en déduit que :

* $f(x) < 0$ si $x < \frac{5}{2}$

* $f(x) > 0$ si $x > \frac{5}{2}$



Fonction affine de coefficient directeur négatif :

$f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

$a = -\frac{1}{3} < 0$, la fonction f est strictement décroissante.

Comme $f(3) = 0$, on en déduit que :

* $f(x) > 0$ si $x < 3$

* $f(x) < 0$ si $x > 3$