1) Modéliser par une fonction

Deux grandeurs peuvent varier tout en étant liées. Ce lien peut s'exprimer par un tableau de données, une formule ou un graphique.

Dans certains cas, on peut modéliser ce lien par une fonction.

Définition 1 : fonction numérique à une variable

Définir une fonction f sur un ensemble de nombres $\mathcal{D}$, c'est associer à tout nombre x de $\mathcal{D}$ un unique nombre, que l'on note $f(x)$.

NOTATIONS ET VOCABULAIRE :

- $\mathcal{D}$ est **l'ensemble de définition** de f : toutes les valeurs que peut prendre la variable x.
- On peut noter l'association ainsi : $\boxed{f\ :\ x \mapsto f(x)}$ ou $\boxed{f(x) = \dots}$
- f est **le nom** donné à la fonction
- $\mapsto$ représente l'association entre x et $f(x)$ (c'est la fonction)
- $f(x)$ est **l'image** de x (c'est un nombre)
- x est **un antécédent** de $f(x)$ (c'est un nombre)

REMARQUES :

- On peut nommer la variable et la fonction comme on le souhaite : $truc\ :\ a \mapsto truc(a)$
- Les parenthèses n'ont pas le même rôle que dans un calcul.

EXEMPLES :

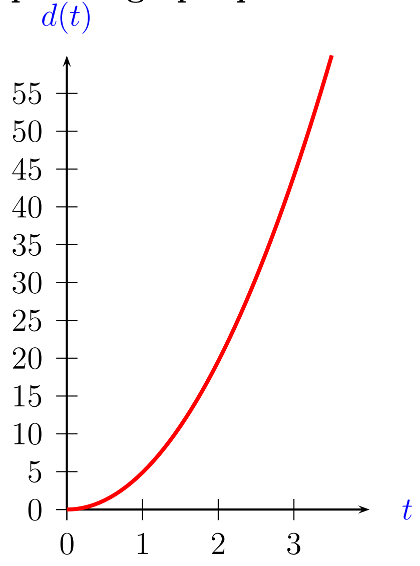
Un objet est lâché sans vitesse initiale. On peut donner la distance entre cet objet en chute libre et sa position initiale, en fonction de la durée de sa chute. A chaque valeur du temps, on associe une distance. Cette même situation va être décrite de trois manières différentes, pour illustrer trois manières de représenter une fonction.

Une fonction peut être donnée par un tableau de valeurs :

temps (en secondes)	0	1	2	3
distance (en mètres)	0	4,9	19,6	44,1

La **variable** est dans ce cas le temps.
La ligne où est donné le temps est la ligne des **antécédents**.
La ligne où est donnée la distance est la ligne des **images**.

Une fonction peut être donnée par un graphique :



Une fonction peut être donnée par une expression :

La **variable** est la durée (le temps), noté t ; on a ici : $t \geqslant 0$

On définit alors la fonction distance, notée d sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $\boxed{d : t \mapsto 4,9 \times t^2}$

On peut retrouver par exemple le fait que l'image de 1 par la fonction d est égale à 4,9 (ce qui se note $d(1) = 4,9$).

2) Ensemble de définition

2 - 1) Définition

Définition 2 : ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction est **l'ensemble des nombres** pour lesquels **on peut déterminer l'image** par la fonction.

REMARQUE : Pour une fonction f, on a l'habitude de noter l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

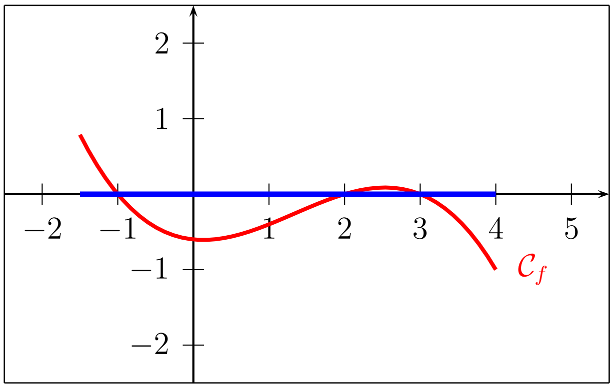
2 - 2) Méthodes

Méthode 1 : l'ensemble de définition peut dépendre de la situation qui est à traiter.
Si on reprend l'exemple de la fonction décrivant la chute d'un objet en fonction du temps à partir duquel on l'a lâché, la variable t est positive. On a alors : $\mathcal{D}_d = [0\ ;\ +\infty[$.

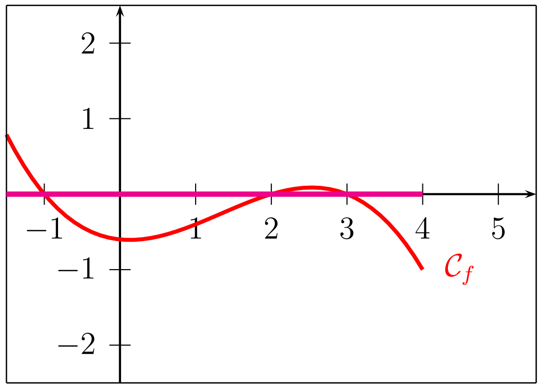
Méthode 2 : Pour déterminer graphiquement l'ensemble de définition, on repère les « bouts » de la courbe : leurs abscisses correspondent aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

Convention : Lorsque la courbe touche le cadre, on considère qu'elle se poursuit sans limite. La borne de $\mathcal{D}_f$ est $+\infty$ ou $-\infty$, sauf indication contraire.

Exemples :



$\mathcal{D}_f$: $[-1,5\,;4]$



$\mathcal{D}_f$: $]-\infty\,;4]$

Méthode 3 : (fonction homographiques)
Pour déterminer algébriquement l'ensemble de définition d'une fonction homographique, on retire de $\mathbb{R}$ les valeurs qui annulent le dénominateur (valeurs interdites).

3) Courbe représentative

Dans ce paragraphe, on considère une fonction f définie sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

3 - 1) notion de courbe représentative d'une fonction

Définition 3 : courbe représentative

Dans un repère, la courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points du plan tels que :

1. L'abscisse appartient à $\mathcal{D}_f$.
2. L'ordonnée est l'image de l'abscisse par f.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans la suite de ce chapitre.

3 - 2) Utiliser

Propriété 1 : appartenance d'un point à une courbe

Avec une fonction f, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative :

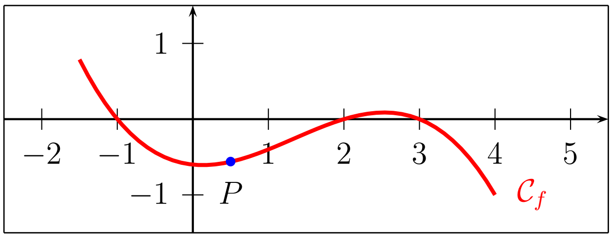
$$M(x_M;y_M) \in \mathcal{C}_f$$

équivaut à

$$x_M \in \mathcal{D}_f \text{ et } y_M = f(x_M)$$

PREUVE : découle directement de la définition

EXEMPLE : A l'aide de la représentation graphique ci-dessous, on lit que 0,5 a pour image -0,6 ; on donc peut écrire que $P(0,5\ ;\ -0,6) \in \mathcal{C}_f$



Méthode 4 : pour montrer qu'un point $M(x_M ; y_M)$ n'appartient pas à $\mathcal{C}_f$, il suffit :
- Soit de vérifier que $x_M \notin \mathcal{D}_f$
- Soit de vérifier que $f(x_M) \neq y_M$

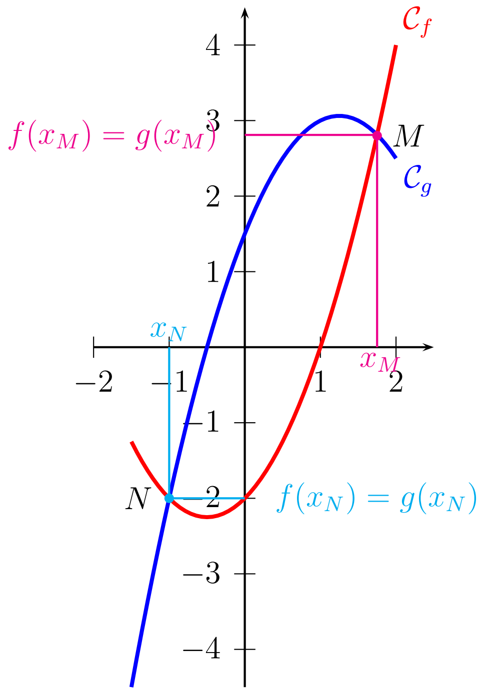
Propriété 2 : intersection de deux courbes

$M(x_M ; y_M)$ appartient à **l'intersection** des courbes représentative de deux fonctions f et g (définies sur un domaine $\mathcal{D}$)

équivaut à

x_M est solution de **l'équation** $f(x) = g(x)$ sur $\mathcal{D}$

EXEMPLE :



AUTRE FORMUALTION : les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

PREUVE :

$\Rightarrow$
Si $M(x_M; y_M)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ et à $\mathcal{C}_g$, alors $y_M = f(x_M)$ et $y_M = g(x_M)$; donc x_M est solution de $f(x) = g(x)$.

$\Leftarrow$
Si x_M est solution de $f(x) = g(x)$ sur $\mathcal{D}$, alors : $x_M \in \mathcal{D}$, $M(x_M; y_M) \in \mathcal{C}_f$ et $M(x_M; y_M) \in \mathcal{C}_g$ aussi. M est bien à l'intersection des deux courbes.

4) Image, antécédent(s)

4 - 1) A partir d'un tableau de valeurs

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	-0,6	-0,4	0	0	-1

Méthode 5 : utilisation du tableau
– l'image de 1 est -0,4 ; elle se lit sur la deuxième ligne du tableau ;
– des antécédents de 0 sont -1, 2 et 3 ; ils se lisent sur la première ligne du tableau.

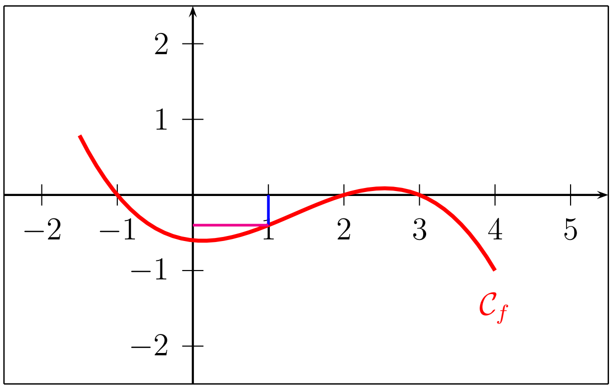
4 - 2) A partir d'une courbe représentative

Méthode 6 : pour lire l'image d'un nombre a

1. on trace un segment vertical qui part du point de coordonnées $(a\,;0)$ et qui se termine lorsque l'on coupe $\mathcal{C}_f$;
2. on lit la valeur de $f(a)$ sur l'axe des ordonnées.

Exemple :

A l'aide de la représentation graphique ci-contre :
* A la précision de lecture graphique près,1 a pour image -0,4.
* A la précision de lecture graphique près,3 a pour image 0.



Méthode 7 : pour lire les antécédents d'un nombre k

1. on peut tracer la droite d'équation $y = k$;
2. on repère les points d'intersection avec $\mathcal{C}_f$;
3. on lit les abscisses de ces points d'intersection.

Remarque : Cela revient à résoudre graphiquement $f(x) = k$.

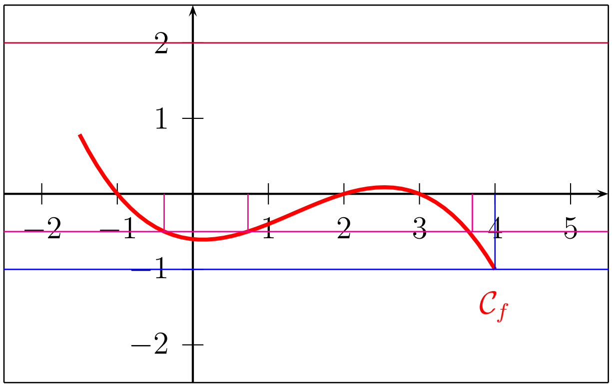
Exemple :

A l'aide de la représentation graphique ci-contre :

* A la précision de lecture graphique près, -1 a pour antécédent 4.

* A la précision de lecture graphique près, $-0,5$ a pour antécédents : -0,38, 0,73 et 3,7

* 2 ne semble pas avoir d'antécédent par cette fonction sur $[-1,5\,;4]$



4 - 3) A partir d'une expression

La fonction présentée précédemment à pour expression : $f(x) = -0,1(x+1)(x-2)(x-3)$

Méthode 8 : on **calcule** l'image d'un nombre

0 a pour image -0,6 : $f(0) = -0,1(0+1)(0-2)(0-3) = -0,1 \times 1 \times (-2) \times (-3) = -0,6$

1 a pour image -0,4 : $f(1) = -0,1(1+1)(1-2)(1-3) = -0,1 \times 2 \times (-1) \times (-2) = -0,4$

2 a pour image 0 : $f(2) = -0,1(2+1)(2-2)(2-3) = -0,1 \times 3 \times 0 \times (-1) = 0$

Méthode 9 : on **résout une équation** pour chercher des antécédents d'un nombre

Recherche d'antécédents de 0 :
On résout : $f(x) = 0$
Cela donne : $-0,1(x+1)(x-2)(x-3) = 0$; cette équation produit a pour solutions -1, 2 et 3.

Recherche d'antécédents de 1
On résout : $f(x) = 1$

Cela donne : $-0,1(x+1)(x-2)(x-3) = 1$; on ne sait pas résoudre de manière exacte cette équation ... d'où l'intérêt d'avoir d'autres méthodes.