1) Principaux ensembles de nombres

1 - 1) Les ensembles

Notation	Liste	Description
$\mathbb{R}$	tous les nombres que vous connaissez	nombres **réels**
$\mathbb{N}$	$\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \dots\}$	nombres **entiers naturels**
$\mathbb{Z}$	$\{\dots\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \dots\}$	nombres **entiers relatifs**

On définit aussi les sous-ensembles suivants :
- $\mathbb{R}^*$: tous les nombres réels sauf 0 ;
- $\mathbb{R}^+$: tous les nombres réels positifs ;
- $\mathbb{R}^-$: tous les nombres réels négatifs.

1 - 2) Appartenance et inclusion

Certains nombres **appartiennent** à un ensemble donné ; on note cette appartenance avec le symbole $\in$

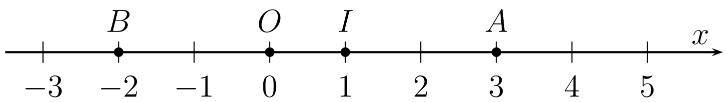
Par exemple, $-5 \in \mathbb{Z}$.

Certains ensembles sont **inclus** dans d'autres ensembles ; on note cette inclusion avec le symbole $\subset$

Par exemple, si un nombre est entier naturel, alors il est entier relatif ; cela se note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

2) L'axe des réels

On peut représenter les nombres réels sur une droite graduée :
- On définit un repère (O, I) : O est l'origine (abscisse 0), I définit l'unité (abscisse 1).



- Chaque point est repéré par son **abscisse**. Ici : $A(3)$ et $B(-2)$.
- L'axe des réels n'a pas de borne : il est infini à gauche et à droite.
- On note ∞ la notion d'infini : $-\infty$ est l'infini à gauche, et $+\infty$ est l'infini à droite.

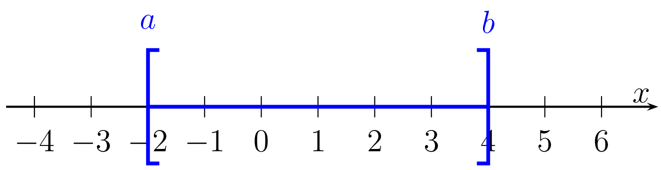
3) Intervalles de $\mathbb{R}$

a et b sont deux nombres, avec $a < b$

Exemples :

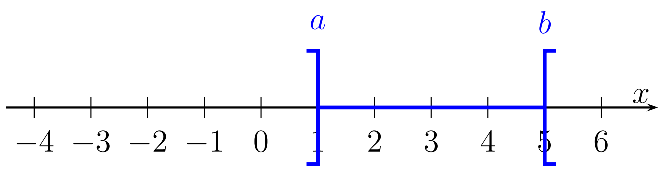
« x appartient à l'intervalle fermé $[a\ ;\ b]$ »

– signifie $a \leqslant x \leqslant b$
– se note $x \in [a\ ;\ b]$



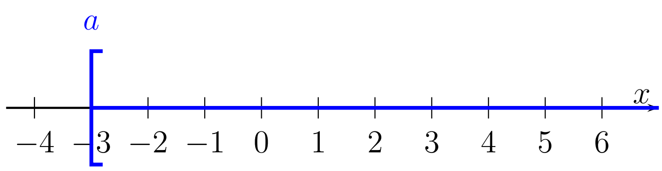
« x appartient à l'intervalle ouvert $]a\ ;\ b[$ »

– signifie $a < x < b$
– se note $x \in]a\ ;\ b[$



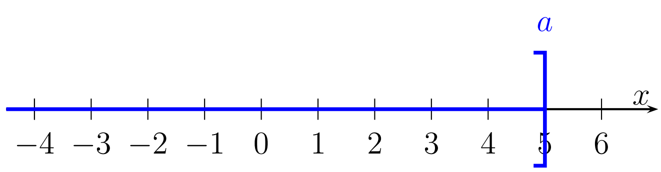
« x appartient à l'intervalle $[a\ ;\ +\infty[$ »

– signifie $a \leqslant x$
– se note $x \in]a\ ;\ +\infty[$



« x appartient à l'intervalle $]-\infty\ ;\ a]$ »

– signifie $x \leqslant a$
– se note $x \in]-\infty\ ;\ a]$



Remarque et vocabulaire :

– $\in$ signifie « appartient » et $\notin$ signifie « n'appartient pas » ;

– a et b sont les bornes de l'intervalle ;

– Lorsque la borne **appartient** à l'intervalle, elle est dite « fermée » : le crochet est orienté vers la borne ;

– Lorsque la borne **n'appartient pas** à l'intervalle, elle est dite « ouverte » : le crochet « tourne le dos » à la borne.

exemples : avec $I = [-2\ ;\ 6[$, on sait que $2 \in I$ et $6 \notin I$

avec $J =]0\ ;\ 7[$, on sait que $0 \notin J$ et $7 \notin J$

– L'infini n'étant pas un nombre, cette borne est toujours ouverte.

– Il y a une infinité de nombres dans un intervalle $[a\ ;\ b]$ (avec $a < b$).

4) Union d'ensembles

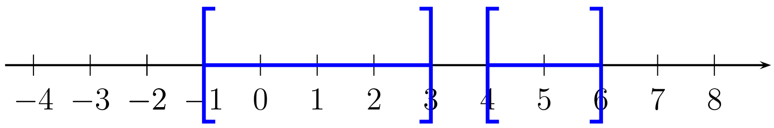
Avec A et B deux ensembles de nombres.

$x \in A \cup B$
* se dit « x appartient à A union B »
* signifie $x \in A$ ou $x \in B$ (x appartient à A, à B, ou aux deux)

Application :

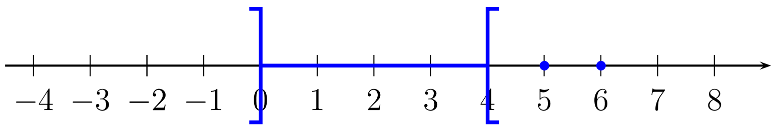
* $\boxed{x \in [-1\ ;\ 3] \cup [4\ ;\ 6]}$ signifie que x est soit un nombre compris entre -1 et 3, soit un nombre compris entre 4 et 6.

On peut schématiser de la manière suivante :



* $\boxed{x \in]0\ ;\ 4[\cup \{5\ ;\ 6\}}$ signifie que x est soit un nombre compris (strictement) entre 0 et 4, soit un nombre égal à 5, soit un nombre égal à 6.

On peut schématiser de la manière suivante :



Ou inclusif, ou exclusif

« Entrée ou dessert » sur un menu signifie l'un ou l'autre, pas les deux pour le prix indiqué : le « ou » est exclusif.

« Pour Noël, j'aimerais avoir un PC ou un voyage aux USA » : le « ou » est inclusif : on souhaiterait évidemment avoir les deux.

> En mathématiques, le **ou** est **inclusif** (l'un, l'autre ou les deux)

Dans le langage, « Et » et « Ou » peuvent piéger...

« Les personnes ayant droit à des réductions à la SNCF sont celles de moins de 25 ans et celles de plus de 65 ans. »
On comprend :
« Une personne a une réduction si elle a moins de 25 ans ou plus de 65 ans (elle ne peut pas avoir les deux à la fois). »

En mathématiques :
« les solutions sont les nombres compris entre -2 et 0 (inclus) et entre 4 et 5 (inclus) »
On peut dire aussi :
« L'ensemble des solutions est $[-2\ ;\ 0] \cup [\ 4;\ 5]$: x est solution équivaut à dire qu'il appartient à $[-2\ ;\ 0]$ ou à $[4\ ;\ 5]$.

5) Intersection d'ensembles

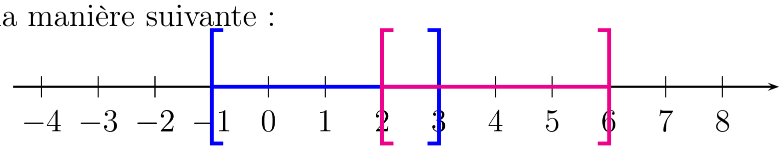
Avec A et B deux ensembles de nombres.

> $x \in A \cap B$
> * se dit « x appartient à A inter B »
> * signifie $x \in A$ et $x \in B$ (x appartient à la fois à A et à B)

APPLICATION :

* $\boxed{x \in [-1\ ;\ 3] \cap [2\ ;\ 6]}$ signifie que x est à la fois un nombre compris entre -1 et 3, et compris entre 2 et 6 : il est donc compris entre 2 et 3. En fait, $[-1\ ;\ 3] \cap [2\ ;\ 6] = [2\ ;\ 3]$

  On peut schématiser de la manière suivante :



* $\boxed{x \in]0\ ;\ 4[\cap \{2\ ;\ 6\}}$ signifie que x est à la fois un nombre compris (strictement) entre 0 et 4, et soit égal à 2, soit égal à 6 : il est égal à 2. En fait, $]0\ ;\ 4[\cap \{2\ ;\ 6\} = \{2\}$

  On peut schématiser de la manière suivante :