1. Montrer que g définit une bijection de $]-\infty; -1[$ sur un intervalle J à préciser.

2. On note g^{-1} sa bijection réciproque.

a) Calculer $g(-2)$. Montrer que g^{-1} est dérivable en $ln3$.

b) Calculer $(g^{-1})'(ln3)$.

c) Représenter la courbe de g^{-1} dans le repère précédent.

Chapitre 4 : NOMBRES COMPLEXES SIMILITUDES DIRECTES

1.1. RESUME DU COURS

Dans ce chapitre $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé orienté du plan.

1.1.1. Nombres complexes

Dans cette partie a, b, a', b' sont des nombres réels et z , z' des nombres complexes.

Forme algébrique

- Tout nombre de la forme $a + ib$ où $i^2 = -1$ est appelé nombre complexe.
- L'écriture $z = a + ib$ est appelée forme algébrique du nombre complexe z.
- a est la partie réelle de z et est notée Re(z) ;
  b est la partie imaginaire de z et est notée Im(z).

- Tout nombre réel *a* est un nombre complexe.
- Tout nombre complexe de la forme *ib*, est appelé imaginaire pur.

Egalité de deux nombres complexes

Soit deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$z = z'$ ssi $a = a'$ et $b = b'$.

Calcul dans $\mathbb{C}$

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, les règles de calcul de l'addition et de la multiplication sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Les nombres complexes de la forme $a + ib$ avec $b \neq 0$ n'ont pas de signe et on ne peut pas dire que l'un est plus grand ou plus petit que l'autre.

Nombre complexe conjugué

- Le nombre complexe conjugué de $z = a + ib$, est $\bar{z} = a - ib$.
- **Propriétés** :
  - $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z} \,.\, \overline{z'}$; $\bar{\bar{z}} = z$.
  - $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$, $\overline{(z')^n} = (\overline{z'})^n$ où $z' \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$.
  - Si z est un réel alors $\bar{z} = z$.
  - Si z est un imaginaire pur alors $\bar{z} = -z$.
  - Si $z = a + ib$ alors $z + \bar{z} = 2a$, $z - \bar{z} = 2ib$ et $z\bar{z} = a^2 + b^2$.
- **Remarque :** Pour déterminer la forme algébrique d'un quotient, on multiplie le numérateur et le dénominateur du quotient par le nombre complexe conjugué du dénominateur.

Affixe d'un point ou d'un vecteur

- A tout point $A(a\ ;\ b)$, on peut associer le nombre Complexe $z_A = a + ib$ et réciproquement.

z_A est appelé affixe de A et A est appelé point image de z_A ; on note $A(z_A)$ et on lit A d'affixe z_A .

- A tout vecteur $\vec{w}\ (a\ ;\ b)$, on peut associer le nombre complexe $z_A = a + ib$ et réciproquement.

z_A est appelé affixe de $\vec{w}$ et $\vec{w}$ est appelé vecteur image de z_A ; on note $\vec{w}\ (z_A)$ et on lit $\vec{w}$ d'affixe z_A.

- Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

- Si $G(z_G)$ est le barycentre de $(A\ ;\ a)$, $(B\ ;\ b)$ *et* $(C\ ;\ c)$ alors $z_G = \frac{1}{a+b+c}\ (az_A+bz_B+cz_C)$ où z_A, z_B *et* z_C sont les affixes respectives des points A, B et C.

- Si $I(z_I)$ est le milieu de [AB], alors $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$ où z_A *et* z_B sont les affixes respectives des points A et B.

<u>Module d'un nombre complexe</u>

- **Définition** : Soit $z = a + ib$ l'affixe d'un point M dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$;

le module de z est $|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- **Propriétés** :

• $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$; $|zz'| = |z|.|z'|$; $|\bar{z}| = |z|$.

• $|z| = 0$ ssi $z = 0$.

• $|z| \geq 0$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

• $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $|(z')^n| = |z'|^n$ où $z' \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}^*$.

• Si z est un réel alors le module de z est la valeur absolue de z.

• Si z_A et z_B sont les affixes respectives des points A et B,

alors $| z_B - z_A |$ = AB.
On s'appuie sur cette égalité pour interpréter graphiquement le module d'un nombre complexe.

Argument d'un nombre complexe non nul

- **Définition** : soit z un nombre complexe non nul et M(z) son point image dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$. On appelle argument de z, une mesure en radians de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

On note $\arg z = (\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

- **Propriétés** : Soit z et z' des nombres complexes non nuls et n un entier naturel non nul.
  - $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$; $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg z - \arg z'$.
  - $\arg(\frac{1}{z}) = - \arg z$; $\arg\bar{z} = - \arg z$; $\arg z^n = n.\arg z$.

- **Autres propriétés** :

Soit z_A, z_B, z_C les affixes respectives des points A, B, C dans le repère $(O, \vec{u},\vec{v})$.
Si $z_A \neq z_B$ et $z_A \neq z_C$ alors :

- $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u} ; \overrightarrow{AB})$.
- $\arg (\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$.

On s'appuie sur l'une de ces égalités pour interpréter graphiquement l'argument d'un nombre complexe non nul.

- Si $z = a + ib$ et $z \neq 0$, alors on peut déterminer θ un argument de z à partir des égalités $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

- Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme $z = r(cos\theta + isin\theta)$, où r est le module de z et θ un de ses arguments.

Cette écriture est appelée forme trigonométrique de z.

- Pour obtenir la forme trigonométrique d'un complexe $z = a + ib$, on calcule son module et on détermine θ un de ses arguments ; ainsi $z = |z|(cos\theta + isin\theta)$.

Attention

- $z = r(cos\theta + isin\theta)$ n'est une forme trigonométrique de z que si $r > 0$.
- $z = r(cos\theta - isin\theta)$ ou $z = r(sin\theta + icos\theta)$ ne sont pas des formes trigonométriques de z.

Remarque : on peut aussi déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul $z = a + ib$ en procédant comme suit :

$z = \sqrt{a^2 + b^2}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i.\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}) = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\theta + \sin\theta)$,

θ étant un réel qui vérifie $\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$.

- **Formule de Moivre** : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall\theta \in \mathbb{R}$,
  $(cos\theta + isin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

- La forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul est $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg z$.

En posant $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, on obtient $z = re^{i\theta}$.

Donc tout nombre complexe non nul peut s'écrire sous la forme

z = r.$e^{i\theta}$ où r = | z | et θ = argz ;
cette écriture est appelée forme exponentielle du complexe z.

- Propriétés : $e^{i\theta}.\, e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;
  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.
- **Formules d'Euler** : $\forall\theta \in \mathbb{R}$,
  $cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

<u>Linéarisation – Opération inverse de la linéarisation</u>

- Pour linéariser $cos^k x$ ou $sin^k x$, k∈ ℕ*-{1}, on utilise les formules d'Euler et la formule du binôme de Newton.
- Pour écrire *coskx* ou *sinkx*, (k∈ ℕ*-{1}) en fonction des puissances de cosx et sinx, on utilise la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton.

<u>Réel et imaginaire pur</u>

Soit Z un nombre complexe

- **Propriété 1**
  - Z est un réel ssi Im(Z) = 0.
  - Z est un imaginaire pur ssi Re(Z) = 0.
- **Propriété 2**
  - Z est un réel ssi $\bar{Z}$ = Z.
  - Z est un imaginaire pur ssi $\bar{Z}$ = - Z.
- **Propriété 3**
  - Z est un réel ssi (Z = 0) ou (Z ≠0 et argZ = 0 (π)).
  - Z est un imaginaire pur ssi (Z = 0) ou (Z ≠0 et argZ = $\frac{\pi}{2}$ (π)).
- **Propriété 4**
  - Z est un réel strictement positif ssi argZ = 0 (2π).

∗ Z est un réel strictement négatif ssi argZ = π (2π).

∗ $Z = bi,\ b > 0$ ssi argZ = $\frac{\pi}{2}$ (2π).

∗ $Z = bi,\ b < 0$ ssi argZ = - $\frac{\pi}{2}$ (2π).

Remarque : Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

- l'axe des abscisses $(O, \vec{u})$ est l'axe des réels.
- l'axe des ordonnées $(O, \vec{v})$ est l'axe des imaginaires purs.

Ensemble de points

Soit A et B deux points distincts et r un réel positif. L'ensemble des points M tels que :

- MA = MB est la médiatrice du segment [AB].
- MA = r est le cercle de centre A et de rayon r.
- $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = 0$ (π) est la droite (AB) privée de A et B.
- $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = 0$ (2π) est la droite (AB) privée de [AB].
- $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = \pi$ (2π) est le segment [AB] privé de A et B.
- $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}$ (π) est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.
- $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}$ (2π) est l'un des demi-cercles de diamètre [AB] privé des points A et B.
- $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2}$ (2π) est l'un des demi-cercles de diamètre [AB] privé des points A et B.

Remarques : Soit a, b des nombres réel et r un réel positif.

- L'équation du cercle de centre I(a ; b) et de rayon r est : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
- $x^2 + ax = (x + \frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2$; $x^2 - ax = (x - \frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2$.

Ces deux égalités nous permettront dans les exercices d'obtenir la forme ci-dessus de l'équation d'un cercle, afin d'indiquer son centre et son rayon.

Racines n-ièmes

- **Définition** : Soit c un complexe non nul et $n \in \mathbb{N}^*$-{1} ;

On appelle racine n-ième de c, tout complexe z tel que z^n = c

- **Théorème** : Soit θ un réel et r un réel strictement positif.

Les racines n-iemes du nombre complexe r$e^{i\theta}$ sont les nombres complexes $z_k = \sqrt[n]{r}.e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$ où k ∈{0 ; 1 ; … ; n-1}.

- **En particulier :** Les racines n-ièmes de 1 (1 = 1.$e^{i.0}$), appelées racines n-ièmes de l'unité sont les nombres complexes z_k = $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où k ∈{0 ; 1 ; … ; n-1}.

- **Propriétés**
    - La somme des n racines n-ièmes d'un complexe est nulle
    - Si $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ sont les points images respectifs des racines n-ièmes $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ d'un nombre complexe dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, alors ces points sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

- **Racine carrée d'un nombre complexe de la forme *a + ib***

Pour trouver les racines carrées d'un nombre complexe de la forme $a + ib$, on détermine les complexes $z = x + iy$ tels que $z^2 = a + ib$; ce qui revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}.$$

Remarque

Ces racines carrées sont au nombre de deux et l'une est l'opposée de l'autre.

Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ (*où a, b, et c* sont des nombres complexes avec $a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant.

- Si $\Delta = 0$, alors (E) a une solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

- Si $\Delta \neq 0$, (E) a alors deux solutions distinctes

$\frac{-b-\delta}{2a}$ et $\frac{-b+\delta}{2a}$, où δ est un nombre complexe dont le carré est égal à Δ, c'est-à-dire une racine carrée de Δ.

Remarque :

Soit k un réel strictement positif, α *et* β des nombres réels.

- Si Δ = k alors $\Delta = (\sqrt{k})^2$; on choisit $\delta = \sqrt{k}$.
- Si Δ = - k alors $\Delta = i^2.k = (i\sqrt{k})^2$; on choisit $\delta = i\sqrt{k}$.
- Si $\Delta = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$ on détermine alors δ une racine

carrée de Δ en résolvant le système ci-dessus.

- Dans le cas Δ = k (respectivement Δ = - k) on pouvait

choisir la racine carrée opposée $\delta = -\sqrt{k}$ (respectivement $\delta = -i\sqrt{k}$).

1.1.2. Similitudes directes

Soit *z, z', a, b,* ω des nombres complexes, *k* et θ des nombres réels, *M(z), M'(z'),* $\Omega(\omega)$ des points du plan et $\vec{w}(b)$ un vecteur.

Expression complexe

- **d'une translation t = $t_{\vec{w}(b)}$.**

M' = t(M) ssi $z' = z + b$.

- **d'une homothétie h = h[$\Omega(\omega)$; k] , k $\neq$ 0.**

M' = h(M) ssi $z' - \omega = k(z - \omega)$.

- **d'une rotation r = r[$\Omega(\omega)$; θ].**

M' = r(M) ssi $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

- **d'une similitude directe s = s[$\Omega(\omega)$; θ; k], k** > 0.

M' = s(M) ssi $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$.

Remarques : Soit k le rapport de l'homothétie.

- Si k > 0, alors s = roh = hor = s[$\Omega(\omega)$; $\theta; k$] .
- Si k < 0, alors s = roh = hor = s[$\Omega(\omega)$; $\theta + \pi; -k$] .
- De manière générale, une similitude directe est une translation ou une homothétie ou une rotation ou la composée d'une homothétie avec une rotation.
- Le centre Ω d'une similitude directe, son angle θ et son rapport k sont appelés éléments caractéristiques de la similitude.

Expression réduite d'une similitude directe

- Toute application *f* du plan dans le plan, qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que *z' = az + b où* $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est une similitude directe.

- Si $a = 1$ alors f est la translation de vecteur $\vec{w}(b)$.
- Si $a \in \mathbb{R}$-{1} alors *f* est l'homothétie de centre $\Omega(\omega = \frac{b}{1-a})$ et de rapport *a*.
- Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et si $|a| = 1$ alors *f* est la rotation de centre $\Omega(\omega = \frac{b}{1-a})$ et d'angle arg*a*.

- Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et si $|a| \neq 1$ alors f est la similitude

directe de centre $\Omega(\omega = \frac{b}{1-a})$, d'angle arga et de rapport |a|.

<u>Remarque</u> : Le centre Ω d'affixe ω de la similitude ou de la rotation ou de l'hométhétie est le point invariant de f ;
c'est-à-dire le point d'affixe z vérifiant $z' = z$.

<u>Propriété caractéristique d'une similitude directe</u>

Soit la similitude directe s de rapport k $(k > 0)$, d'angle θ et A, B, C trois points du plan.
Si $s(A) = A$ et si $s(B) = C$, alors s est la similitude de centre A, de rapport $k = \frac{AC}{AB}$ et d'angle $\theta = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

<u>Détermination d'une similitude directe</u>

Pour déterminer la similitude directe s telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$, où A, B, A' et B' sont des points, on peut procéder de cette manière :

Soit $s : z' = az + b$; $\begin{cases} s(A) = A' \\ s(B) = B' \end{cases}$ ssi $\begin{cases} az_A + b = z_{A'} \\ az_B + b = z_{B'} \end{cases}$.

La résolution du système d'inconnue a *et* b donne l'expression de la similitude s.

<u>Autres propriétés</u>

Soit A, B, Ω des points et la simitude s = s[$\Omega(\omega)$; $\theta; k$], (k> 0)

- L'image d'une droite (d) par s est une droite (d') .

Si (d) est la droite (AB), alors son image (d') est la droite (A'B') où A' = s(A) et B' = s(B).

- L'image d'un cercle (C) par s est un cercle (C').

Si (C) est le cercle de centre I et de rayon r, alors son image (C') est le cercle de centre I' et de rayon kr, où I'= s(I) et k le rapport de s.

1.2. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{1}{2-i\sqrt{3}}$ et $z_2 = \frac{i-3}{-1-2i}$.
2. Z_1 = (z+2)(2z- i) et $Z_2 = \frac{z+1-i}{z-2}$

(on posera $z = x + iy$ *où* $x, y \in \mathbb{R}$).

Exercice 2

Ecrire sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1) z = 1- $i\sqrt{3}$; 2) z = - 1 - i ; 3) z = - $\sqrt{6}$ + i$\sqrt{2}$

4) z = - sin2θ + 2i$cos^2\theta$, $\theta \in]0; \pi]$.

5) z = 1+ cos x + isin x, $x \in]\pi; 2\pi[$.

Exercice 3

On considère les points *A, B, C* de coordonnées respectives (1; -3), (4 ; 5) et (-3 ; 2).

1. Quels sont les affixes des points *A, B et C* et des vecteurs