Chapitre 6 : PRIMITIVES – CALCUL INTEGRAL EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice1

Primitive *F* de *f* dans les cas suivants ?

1) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + x - 1$; $F(x) = \frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$.

2) $f(x) = \sin x\cos^3 x$; *f* ressemble à la forme $u'u^n$ où $u(x) = \cos x$. Or $u'(x) = -\sin x$ donc $f(x) = -(-\sin x\cos^3 x)$, d'où $F(x) = -\frac{1}{4}\cos^4 x$.

3) $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$; $f(x)$ est de la forme $\sin(ax+b)$, *donc* $F(t) = \frac{-1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$.

4) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{x^3} = x^{\frac{1}{2}} - 2\frac{1}{x^3}$; on a la forme x^r *et* $\frac{1}{x^n}$, donc $F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} - 2(\frac{-1}{2x^2}) = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + \frac{1}{x^2}$.

5. $f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x-2}$; *f* ressemble à la forme $\frac{u'}{u}$ où $u(x) = x^2 + x - 2$. Or $u'(x) = 2x + 1$ donc $f(x) = 2(\frac{2x+1}{x^2+x-2})$, d'où $F(x) = 2\ln|x^2 + x - 2|$.

6. $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{4}{(x+1)^2} = 2 + 3(\frac{1}{x-1}) - 4[\frac{1}{(x+1)^2}]$; $\frac{1}{x-1}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ et $\frac{1}{(x+1)^2}$ est de la forme $\frac{u'}{u^n}$, donc $F(x) = 2x + 3\ln|x-1| + \frac{4}{x+1}$.

7. $f(x) = \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x}(\ln x)$; on a la forme $u'u^r$ donc $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

8. $f(x) = e^{-3x+1}$; on a la forme e^{ax+b} donc $F(x) = \frac{1}{-3}e^{-3x+1} = \frac{-1}{3}e^{-3x+1}$.

9. $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}$; f ressemble à la forme $u'e^u$ où $u(x) = \frac{1}{x}$.

Or $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f(x) = -\left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right)$ d'où $F(x) = -e^{\frac{1}{x}}$.

10. $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{xlnx}} = \frac{\frac{1}{x}}{lnx}$; on a la forme $\frac{u'}{u}$, donc

$F(x) = ln|lnx|$.

<u>Exercice 2</u>

1. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}}$; f ressemble à la forme $\frac{u'}{u^n}$ où $u(x) = x^2 + 1$.

Or $u'(x) = 2x$ donc $f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right]$, d'où l'ensemble des

Primitives de f est $F_k(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(2-1)(x^2+1)^{2-1}}\right) + \text{k} = \frac{-1}{2(x^2+1)} + \text{k}$.

Or $F_k(1) = 0$ donc $\frac{-1}{2(1^2+1)} + \text{k} = 0$; d'où $\text{k} = \frac{1}{4}$ et

$F(x) = \frac{-1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{4}$.

2. $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+8}}}$

a) $g(x)$ existe ssi $4x + 8 > 0$, donc $D_g =]-2\,;+\infty[$. g est le quotient de fonctions continues sur $]-2\,;+\infty[$; $\sqrt{4x+8} \neq 0$ sur cet intervalle, donc g est continue sur $]-2\,;+\infty[$ et par conséquent elle admet des primitives sur cet intervalle.

b) g ressemble à la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ où $u(x) = 4x+1$. Or $u'(x) = 4$, donc

$f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{\sqrt{4x+8}}\right)$ d'où l'ensemble des primitives de f est

$F_k(x) = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{4x+8}\right) + \text{k} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4x+8}\right) + \text{k}$.

De plus $F_k(2) = 4$ donc $\frac{1}{2}\left(\sqrt{4(2)+8}\right) + \text{k} = 4$; d'où $\text{k} = 2$ et

$\text{F}(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4x+8}\right) + 2$.

3. $\boldsymbol{h(x) = \frac{1}{x}}$

a) h étant une fonction rationnelle, h est continue sur son ensemble de définition D_h = $]-\infty; 0[U]0; +\infty[$. Par conséquent h admet des primitives sur $]-\infty; 0[$ ou sur $]0; +\infty[$. (mais pas sur D_h qui n'est pas un intervalle).

b) Soit H_k l'ensemble des primitives de h ; on a $H_k(x) = ln|x| + k$ *où* k est un nombre réel.

- Si I = $]-\infty; 0[$, alors $H_k(x) = ln(-x) + k$
- Si I = $]0; +\infty[$, alors $H_k(x) = lnx + k$

<u>Exercice 3</u>

Calcul d'intégrales ?

Soit f la fonction à intégrer ; déterminons F, une primitive de f en procédant de la même manière que les exercices précédents.

1) I = $\boldsymbol{\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt}$; Soit $f(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, déterminons F.

$f(t) = \frac{1}{2}(\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}})$, donc $F(t) = \sqrt{1+t^2}$; d'où

I = $F(1) - F(0) = \sqrt{2} - 1$.

2) I = $\boldsymbol{\int_2^1 3xe^{x^2-1}\, dx}$; Soit $f(x) = 3xe^{x^2-1} = \frac{3}{2}(2xe^{x^2-1})$, donc $F(x) = \frac{3}{2}(e^{x^2-1})$; d'où I = $F(1) - F(2) = \frac{3}{2}(1 - e^3)$.

3) I = $\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx sin^2 x\, dx}$; Soit $f(x) = cosx\, sin^2 x$; on a

$F(x) = \frac{1}{3} sin^3 x$ d'où I = $F(\frac{\pi}{2}) - F(0) = \frac{1}{3}$.

4) I = $\boldsymbol{\int_{\frac{\pi}{4}}^0 tanu\, du}$; Soit $f(u) = tanu = \frac{sinu}{cosu}$; on a $f(u) = -\frac{-sinu}{cosu}$,

d'où $F(u) = -ln|cosu|$ et I = $F(0) - F(\frac{\pi}{4}) = ln(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

5) I = $\boldsymbol{\int_{-1}^2 |1 - x|\, dx}$; Soit $f(x) = |1 - x| = \begin{cases} 1 - x \text{ si } x \leq 1 \\ x - 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

En utilisant la relation de Chasles on a

I = $\int_{-1}^{1} |1 - x|\, dx + \int_{1}^{2} |1 - x|\, dx$

$= \int_{-1}^{1} (1 - x)\, dx + \int_{1}^{2} (x - 1)\, dx$

$= [x - \frac{1}{2}x^2]_{-1}^{1} + [\frac{1}{2}x^2 - x]_1^2 = \frac{5}{2}$.

Exercice 4

Calcul à l'aide d'intégration(s) par parties ?

1. a) I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{x cosx\, dx}$; Soit $u(x) = x$ et $v'(x) = cosx$.

on a $u'(x) = 1$ et $v(x) = sinx$, d'où

I = $[u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$ - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)dx$

$= [xsinx]_0^{\frac{\pi}{2}}$ - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\, dx = [xsinx]_0^{\frac{\pi}{2}}$ - $[-cosx]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{2}$ - 1.

b) I = $\int_1^3 \boldsymbol{\frac{lnx}{x^2} dx}$; Soit $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ et $v(x) = lnx$.

On a u(x) $= \frac{-1}{x}$ et v'(x) $= \frac{1}{x}$, donc

I = $[u(x)v(x)]_1^3$ - $\int_1^3 u(x)v'(x)dx$.

D'où I = $[\frac{-1}{x} lnx]_1^3$ - $\int_1^3 \frac{-1}{x^2} dx = [\frac{-1}{x} lnx]_1^3 - [\frac{1}{x}]_1^3$

$= \frac{2 - ln3}{3}$.

c) I = $\int_0^1 \boldsymbol{x^2 e^{2x} dx}$; Soit $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^{2x}$.

On a $u'(x) = 2x$ et v(x) $= \frac{1}{2} e^{2x}$;

d'où I = $[\frac{1}{2}x^2 e^{2x}]_0^1$ - $\int_0^1 xe^{2x}\, dx$.

Soit J = $\int_0^1 xe^{2x}\, dx$; posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{2x}$.

On a $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$, d'où

J = $[\frac{1}{2}xe^{2x}]_0^1$ - $\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\, dx = [\frac{1}{2}xe^{2x}]_0^1$ - $\frac{1}{2}$ $[\frac{1}{2}e^{2x}]_0^1$;

il en résulte que I = $\frac{1}{2}$ ($[x^2e^{2x} - xe^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x}]_0^1$) = $\frac{e^2-1}{4}$.

d) I = $\int_0^{\pi} e^x sinx$dx ; Soit *u(x)* = $sinx$ et *v'(x)* = e^x.

On a *u'(x)* = $cosx$ et $v(x) = e^x$, d'où

I = $[e^x sinx]_0^{\pi}$ - $\int_0^{\pi} e^x cosx\, dx$;

Soit J = $\int_0^{\pi} e^x cosx\, dx$; posons *u(x)* = $cosx$ et *v'(x)* = e^x.

On a *u'(x)* = - $sinx$ et $v(x) = e^x$, d'où

J = $[e^x cosx]_0^{\pi}$ - $\int_0^{\pi} - e^x sinx\, dx$ = $[e^x cosx]_0^{\pi}$ + I.

Il en résulte que I = $[e^x sinx]_0^{\pi}$ - $[e^x cosx]_0^{\pi}$ – I ;

d'où I = $\frac{[e^x(sinx - cosx)]_0^{\pi}}{2} = \frac{e^{\pi}+1}{2}$.

2. Primitives de *f* dans les cas suivants:

a) *f(x)* = lnx sur [1 ; + ∞[.

f est continue sur]0 ; +∞[, en particulier sur [1 ; + ∞[et donc *f* admet des primitives *F*, définies sur [1 ; + ∞[par

F(x) = $\int_a^x f(t)dt$, a ∈ [1 ; + ∞[.

Calculons *F(x)* = $\int_a^x lnt dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

Soit *u(t)* = *lnt* et *v'(t)* = 1, on a

u'(t) = $\frac{1}{t}$ et $v(t) = t$, d'où *F(x)* = $[tlnt]_a^x$ - $\int_a^x 1\, dt$ = $[tlnt]_a^x$ - $[t]_a^x$

.Donc *F(x)* = *xlnx –x + alna – a* = *xlnx - x + k* où k est une constante.

b) *f(x)* = *(x+1)* e^{-x} sur ℝ.

f étant le produit de fonctions continues sur ℝ, *f* est continue sur ℝ et admet par conséquent des primitives *F*, définies sur ℝ par

F(x) = $\int_a^x (t+1)e^{-t}\, dt$, a ϵ ℝ .

Calculons *F(x)* à l'aide d'une intégration par parties ;

soit *u(t)* = *t* + 1 et *v'(t)* = e^{-t} . On a *u'(t)* = 1 et $v(t)$ = - e^{-t} ;

donc *F(x)* = $[-(t+1)e^{-t}]_a^x + \int_a^x e^{-t}\, dt$

$= [-(t+1)e^{-t}]_a^x - [e^{-t}]_a^x = e^{-x}$ *(- x- 2)* + k où k est une constante.

Exercice 5

f(x) = cosx

1. Aire du domaine D ?

La fonction cosinus étant positive sur $[0\,;\,\frac{\pi}{2}]$ et négative sur $[\frac{\pi}{2};\,\frac{3\pi}{4}]$, l'aire de ce domaine est

$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\,dx + (-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} cosx\,dx$).

D'où $\mathcal{A} = [sinx]_0^{\frac{\pi}{2}}$ - $[sinx]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$.

En cm^2, $\mathcal{A} = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$ x 2 x 3 cm^2 = 12 - $3\sqrt{2}\,cm^2$.

2. Encadrement de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx$?

g(x) $= \frac{1}{cosx}$

On a $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$; la fonction cosinus étant décroissante sur $[0\,;\,\frac{\pi}{4}]$, on a $\cos\frac{\pi}{4} \leq cosx \leq cos0$ ssi $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq cosx \leq 1$

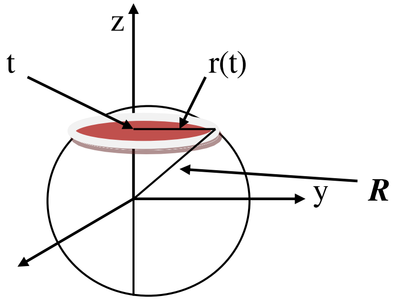
ssi $1 \leq \frac{1}{cosx} \leq \frac{2}{\sqrt{2}}$, d'où $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1.\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cosx} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}dx$.

Il en résulte que $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cosx} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$;

d'où $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 6

1. Volume V d'une boule de rayon R ?



Prenons comme origine du repère le centre O de la boule ; le plan d'équation z = t (t ∈ [-R ; R]) coupe la boule suivant un disque (D). Soit r(t) son rayon ; l'aire de (D) est S(t) = $\pi[r(t)]^2$.

D'après Pythagore, on a $r^2(t) + t^2 = R^2$, d'où

S(t) = $\pi(R^2 - t^2)$ et V = $\int_{-R}^{R} S(t)dt = \pi[R^2 t - \frac{t^3}{3}]_{-R}^{R}$

$$= \frac{4\pi R^3}{3} .$$

2. (C) : $y = \sqrt{x}$ où $1 \leq x \leq 4$. Volume de la figure obtenue en faisant tourner (C) autour de l'axe (x'x)?

Soit V ce volume ;

V = $\int_1^4 \pi(\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^4 x dx$

$= \pi[\frac{x^2}{2}]_1^4 = \frac{15\pi}{2}$.

<u>Exercice 7</u>

Résolvons :

1. a) **2y'- 3y = 0** ; Les solutions de cette équation sont les fonctions $f_k(x)$ = k $e^{\frac{3}{2}x}$.

b) y' = $\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{y}$ ssi y'+ $\frac{1}{3}y$ = 0 ; d'où les solutions de cette équation sont les fonctions f_k définies par $f_k(x)$ = k $e^{\frac{-1}{3}x}$.

c) y''+ y'- 6y = 0 (1) ;

Résolvons l'équation caractéristique de (1), r^2 + r – 6 = 0 :

r_1 = 2 est une racine évidente ; 2r_2 = $\frac{-6}{1}$ ssi r_2 = - 3.

L'équation caractéristique admettant 2 racines distinctes, les solutions de l'équation différentielle (1) sont les fonctions $f_{\alpha;\beta}$, définies par $f_{\alpha;\beta}$ $(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-3x}$ où α et β sont des réels.

2. a) y'+ 2y = 0, y(-1) = 2 ?

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f_k, définies par $f_k(x)$ = k e^{-2x} ;

or $f_k(-1)$ = 2 donc k $e^{-2(-1)}$ = 2 ssi k = 2e^{-2} ;

d'où la solution vérifiant la condition posée est la fonction f définie par f(x) = 2e^{-2}. e^{-2x} = 2e^{-2x-2}.

b) y''+ 4y'+ 4y = 0 (1) , y(0) = 1 et y'(0) = 1 ?

Résolvons l'équation caractéristique de (1), r^2 + 4r + 4 = 0 :

$\Delta = (4)^2$- 4(4)(1) = 0, donc r_0 = -2 .

L'équation caractéristique admettant une solution double, les solutions de l'équation différentielle (1) sont les fonctions $f_{\alpha;\beta}$, définies par $f_{\alpha;\beta}$ $(x) = (\alpha x + \beta)e^{-2x}$.

Déterminons f la solution vérifiant les conditions posées : or

$f'_{\alpha;\beta}(x) = \alpha e^{-2x} - 2(\alpha x + \beta)e^{-2x}$ et $\begin{cases} f_{\alpha;\beta}(0) = 1 \\ f'_{\alpha;\beta}(0) = 1 \end{cases}$

donc $\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha - 2\beta = 1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 3 \end{cases}$ d'où *f(x) = (3x+1)*e^{-2x}.

c) y''- 2y'+ 5y = 0 (1) , y(π) = 1 et y'(π) = 0 ?

Résolvons l'équation caractéristique de (1), r^{2}- 2r + 5 = 0 :

$\Delta' = (-1)^2$- (1)((5) = - 4 ; $\Delta' = 4i^2 = (2i)^2$ donc

z_1 = 1 – 2i et z_2 = 1- 2i .

L'équation caractéristique admettant 2 solutions complexes, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $f_{\alpha;\beta}$ définies par $f_{\alpha;\beta}(x) = e^x(\alpha cos2x + \beta sin2x)$.

Déterminons *f* la solution vérifiant les conditions posées :

Or $f'_{\alpha;\beta}(x) = e^x(2x + \beta sin2x) + e^x(-2\alpha sin2x + 2\beta cos2x)$ et

$\begin{cases} f_{\alpha;\beta}(\pi) = 1 \\ f'_{\alpha;\beta}(\pi) = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha e^{\pi} = 1 \\ \alpha e^{\pi} + 2\beta e^{\pi} = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \alpha = e^{-\pi} \\ \beta = \frac{-1}{2} e^{-\pi} \end{cases}$;

d'où *f(x)* = $e^{x-\pi}(cos2x - \frac{1}{2}sin2x)$.

Exercice 8

1. *f* ? solution de y''- 2y'+ y = 0 (1), *f(0)* = 1 et *f'(0)* = 3 .

Résolvons l'équation caractéristique de (1), r^2- 2r + 1 = 0 :

r^2- 2r + 1 = 0 ssi $(r-1)^2$ = 0 ssi r = 1.

L'équation caractéristique admettant une solution double, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $f_{\alpha;\beta}$ définies par

$f_{\alpha;\beta}(x) = (\alpha x + \beta)e^x$.

Déterminons *f* la solution vérifiant les conditions posées :

or *f'(x)* = $\alpha e^x + (\alpha x + \beta)e^x$ et $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 3 \end{cases}$

donc $\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$. D'où *f(x) = (2x + 1)* e^x.

2. Déterminons une primitive de f ?

f étant un produit de fonctions continues sur ℝ , *f* est continue sur ℝ et par conséquent, elle admet des primitives sur ℝ, F. Déterminons les.

f est une solution de (1) donc $f''(t) - 2f'(t) + f(t) = 0$

ssi $f(t) = 2f'(t) - f''(t)$;

d'où $\int_a^x f(t)dt = 2\int_a^x f'(t)\,dt - \int_a^x f''(t)\,dt$, a ∈ ℝ .

Il en résulte que $F(x) - F(a) = 2[f(x) - f(a)] - [f'(x) - f'(a)]$;

d'où $F(x) = 2f(x) - f'(x) + k$, k étant une constante. En remplaçant $f(x)$ et $f'(x)$ par leurs valeurs, on obtient pour k = 0, $F(x) = (2x - 1)e^x$.

3. Vérifions que F primitive de f ?

$F'(x) = 2e^x + (2x - 1)e^x = e^x(2 + 2x - 1)$

$= e^x(2x + 1) = f(x)$; donc F est bien une primitive de *f*.

<u>**Exercice 9**</u>

(E) : $y' + y = cosx$

1. *p* et *q* ?, h solution de (E)

h solution de (E) ssi $h'(x) + h(x) = cosx$

ssi $-psinx + qcosx + pcosx + qsinx = cosx$

ssi $(q + p)cosx + (q - p)sinx = cosx$; il en résulte :

$$\begin{cases} q + p = 1 \\ q - p = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} p = \frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

d'où $h(x) = \frac{1}{2}(cosx + sinx)$.

2. (E'): $y' + y = 0$?

Les solutions de (E') sont les fonctions f_k , définies par

$f_k(x) = \mathrm{k}e^{-x}$, k ∈ ℝ.

3. g solution de (E) ssi $g - h$ solution de (E') ?

$g - h$ solution de (E') ssi $[g(x) - h(x)]' + [g(x) - h(x)] = 0$

ssi $g'(x) + g(x) = h'(x) + h(x)$

ssi $g'(x) + g(x) = cosx$ (car h solution de (E))

ssi g solution de (E).

4. Solutions de (E) ?

Soit g_k une fonction telle que $g_k(x)$ - $h(x) = f_k(x)$.

f_k étant solution de (E') donc $g_k - h$ est solution de (E'), d'où g_k est solution de (E) d'après la question précédente ;

Or $g_k(x)$ - $h(x) = f_k(x)$, donc $g_k(x) = f_k(x) + h(x)$.

Il en résulte que les solutions de (E) sont les fonctions g_k définies par $g_k(x) = \mathrm{k}e^{-x} + \frac{1}{2}(cosx + sinx)$.

5. Détermination de f ?

La courbe de la solution de (E) passe par A(0 ; 1) ssi $g_k(0) = 1$

ssi $\mathrm{k}e^{0} + \frac{1}{2}(cos0 + sin0) = 1$ ssi $\mathrm{k} = \frac{1}{2}$.

d'où $f(x) = \frac{1}{2}\, e^{-x} + \frac{1}{2}(cosx + sinx)$.