2) Sans résoudre l'équation, montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution α appartenant à [1 ; 2].

3) Montrer que $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ sur [1 ; 2].

4) En déduire que $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$, $\forall x \in [1; 2]$.

Chapitre2 :GENERALITES SUR LES FONCTIONS

2.1. RESUME DU COURS

Dans ce chapitre f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, D_f est son ensemble de définition et C_f sa courbe dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Ensemble de définition

- L'ensemble de définition de toute fonction polynôme ($x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ où a_0, a_1, …,a_n sont des réels et n un entier naturel non nul) est $\mathbb{R}$.
- Une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est définie si son dénominateur est différent de zéro.
- Une somme de fonctions ou un produit de fonctions est défini si chaque fonction qui constitue la somme ou le produit est définie.
- Un quotient de fonctions est défini si le numérateur et le dénominateur sont définis et si le dénominateur est différent de zéro.

- u étant une fonction donnée, la fonction

x→ $\sqrt{u(x)}$ est définie si *u(x)* existe et *u(x)*≥ 0.

Parité d'une fonction

- *f* est paire ssi $\forall x \in D_f$, - $x \in D_f$ et *f(- x) = f(x).*
- *f* est impaire ssi $\forall x \in D_f$, - $x \in D_f$ et *f(- x) = - f(x).*

Remarque : Si f est paire (respectivement impaire), l'axe des ordonnées du repère est axe de symétrie (respectivement l'origine du repère est centre de symétrie) de C_f. Dans ces deux cas on peut restreindre l'étude de *f* à $D_f \cap [0;\ +\infty[$.

Périodicité d'une fonction

- *f* est périodique s'il existe un réel T non nul tel que

$\forall x \in D_f,\ x + T \in D_f$ et *f(x+T) = f(x)* .

Le plus petit réel T strictement positif vérifiant l'égalité ci-dessus est la période de *f*.

Remarques :

- Si T est la période de *f*, alors pour tout entier k, kT est une période de *f*.
- Si *f* est périodique de période T (> 0) alors on peut restreindre l'étude de f à $D_f \cap$I où I est un intervalle de longueur T (la longueur de l'intervalle [a ; b] est b – a).
- Si f est périodique et paire ou périodique et impaire alors on peut restreindre l'étude de f à $D_f \cap I \cap [0;\ +\infty[$ où I est un intervalle de longueur T (la période) et de la forme [-a ; a].
- Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$; la période de la fonction

x→ sin(ax+b) ou *x→ cos(ax+b)* est $\frac{2\pi}{|a|}$ et celle de la fonction *x→ tan(ax+b)* est $\frac{\pi}{|a|}$.

Centre et axe de symétrie

- Le point I$(a\ ;\ b)$ est centre de symétrie de C_f ssi

$\forall x \in D_f$, $2a-x \in D_f$ et $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

- La droite (d) : $x = a$ est axe de symétrie de C_f ssi

$\forall x \in D_f$, $2a-x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$.

Dans ce cas on peut restreindre l'étude de f à $D_f \cap [a; +\infty[$.

<u>Intersection de courbes</u>

Soit C_f la courbe de f d'équation $y = f(x)$ et C_g la courbe de g d'équation $y = g(x)$.

- Pour déterminer l'intersection de C_f et C_g, on résout l'équation $f(x) = g(x)$.
- Pour déterminer l'intersection de C_f avec la droite (d) : $y = ax+b$, on résout l'équation $f(x) = ax+b$.
- Pour déterminer l'intersection de C_f avec l'axe des abscisses d'équation $y = 0$, on résout l'équation $f(x) = 0$.
- Le point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ est le point $(0\ ;\ f(0))$, dans le cas où $0 \in D_f$.

<u>Position relative de deux courbes</u>

Soit $C_f : y = f(x)$ la courbe de f et la droite (d) : $y = ax+b$.

Pour déterminer la position de C_f par rapport (d) , on étudie le signe de $h(x) = f(x) - (ax+b)$.

- Si $h(x) > 0$ sur I, alors C_f est au dessus de (d) sur I.
- Si $h(x) < 0$ sur I, alors C_f est en dessous de (d) sur I.

<u>Remarque</u> : on applique les mêmes résultats dans le cas de la position de C_f par rapport à C_g: $y = g(x)$, en remplaçant $ax+b$ par $g(x)$ et (d) par C_g .

<u>Résolution graphique de l'équation $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$</u>

Le nombre de solutions de cette équation est égal au nombre de points d'intersection de la courbe de *f* avec la droite d'équation y = m (droite parallèle à l'axe des abscisses, qu'on fera coulisser du bas vers le haut pour déterminer le nombre de points d'intersection suivant les valeurs du paramètre réel m).

Fonctions associées

Soit a et b des réels, f et g des fonctions, C_f et C_g leurs courbes respectives dans un repère orthogonal $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$.

- Si $g(x) = f(x-a) + b$, alors C_g est l'image de C_f par la translation de vecteur $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.
- Si $g(x) = -f(x)$ alors C_g est le symétrique de C_f par rapport à l'axe des abscisses.
- Si $g(x) = f(-x)$ alors C_g est le symétrique de C_f par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si $g(x) = -f(-x)$ alors C_g est le symétrique de C_f par rapport à O l'origine du repère.
- Si $g(x) = |f(x)|$ alors

$$\begin{cases} C_g \text{ et } C_f \text{ sont confondues si } C_f \text{ est au dessus de l'axe}(x'x) \\ C_g \text{ est le symétrique de } C_f/(Ox) \text{ si } C_f \text{ est en dessous de } (x'x) \end{cases}$$

Extrémums – Point d'inflexion

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0.

f admet un extrémum relatif en x_0 ssi la dérivée de f s'annule en x_0 en changeant de signe. Cet extrémum $f(x_0)$ est un maximum ou un minimum.

Dans ce cas, C_f admet au point $(x_0\ ;\ f(x_0))$ une tangente parallèle à $(x'x)$.

- Si f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle

ouvert contenant x_0 et si la dérivée seconde de f s'annule en x_0 en changeant de signe, alors le point $(x_0\ ;\ f(x_0))$ est un point d'inflexion de C_f.

Dans ce cas, C_f traverse sa tangente en ce point.

Représentation graphique d'une fonction

Pour représenter la courbe d'une fonction, on peut procéder comme suit :

- Représenter les points particuliers de la courbe.

(points figurant sur le tableau de variation, points d'intersection avec les axes, …).

- Représenter les droites particulières de la courbe

(Asymptotes, tangentes, …).

- Tracer la courbe en s'appuyant sur les variations de f sur

chaque intervalle du tableau de variation.

Remarques

- Si f admet un extrémum en $x_{0.}$, alors la courbe admet au point $(x_{0.},$ $f(x_{0.})$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

- Si les points particuliers et les droites particulières ne sont pas suffisants pour tracer la courbe, on peut dresser un tableau de valeurs permettant de représenter quelques points de la courbe.

Représentation graphique d'une bijection réciproque f^{-1}

- Si f est une bijection sur un intervalle I et si (C) est sa courbe sur cet intervalle, alors (C) et C_f sont confondues dans le cas où $I = D_f$; sinon (C) est la portion de C_f représentée sur I.
- Soit f une bijection sur un intervalle I et (C) sa courbe sur cet intervalle dans un repère orthonormal.

Pour représenter $C_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1}, qui est le symétrique de (C) par rapport à (d) : $y = x$, on peut procéder comme suit :

- Tracer la droite (d) : $y = x$.
- Représenter les symétriques par rapport à (d) des points particuliers de (C) .
- Représenter les symétriques par rapport à (d) des droites particulières de (C) (asymptotes, tangentes, …)
- Tracer $C_{f^{-1}}$ en reliant les symétriques des points particuliers de (C), en utilisant le fait que le symétrique d'une droite particulière de (C) est une droite particulière de $C_{f^{-1}}$ et en tenant compte du fait que f^{-1} varie dans le même sens que f.

<u>Remarques</u> : Soit la droite (d) : $y = x$ dans un repère orthonormal.

∗ Le symétrique par rapport à (d)

- d'un point $A(a\ ;\ b)$ est le point $A'(b\ ;\ a)$.
- d'une droite $(\Delta) : x = a$ est la droite $(\Delta') : y = a$.

∗ Pour représenter (Δ') le symétrique par rapport à (d) d'une droite (Δ): $y = ax + b$, on peut représenter les symétriques de deux points quelconques de cette droite par rapport à (d). (Δ') est la droite passant par ces deux symétriques.