

Chapitre 13

Transformations du plan et de l'espace

Dans tout le chapitre, on se place dans le plan ou dans l'espace.

1/ Généralités

a) Transformations

Définition

On appelle transformation du plan (ou de l'espace) toute application bijective du plan (ou de l'espace). Autrement dit :

- une transformation associe à tout point M un point M' appelé image de M .
- tout point N est l'image d'un et d'un seul point appelé antécédent de N .

Définition

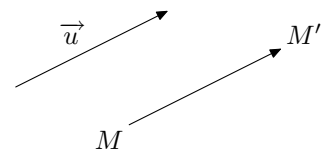
Soit f une transformation. Un point invariant de f est un point M tel que $f(M) = M$.

b) Translations

Définition

Définition

Étant donné un vecteur \vec{u} , on appelle translation de vecteur \vec{u} la transformation, notée $t_{\vec{u}}$ qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



Remarques :

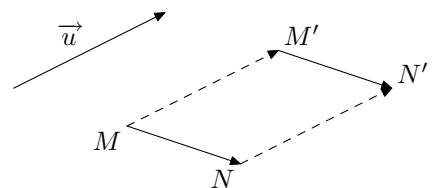
- $t_{\vec{0}}$ est l'identité. Tous les points sont invariants (confondus avec leur image).
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $t_{\vec{u}}$ n'a pas de point invariant.

Propriété

Propriété

Si M' et N' sont les images respectives de deux points M et N par une translation alors :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}.$$



Démonstration

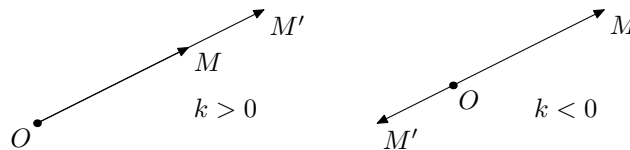
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$ donc $MNN'M'$ est un parallélogramme.
Ainsi $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

c) Homothéties

Définition

Définition

Étant donné un point O et un réel k non nul, on appelle homothétie de centre O et de rapport k la transformation, notée $h(O, k)$ qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.



Remarques :

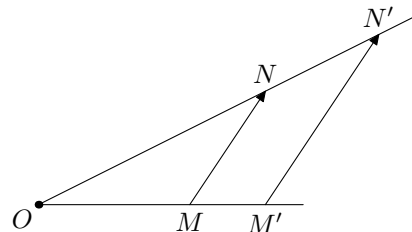
- Une homothétie de rapport 1 est l'identité.
- L'homothétie de centre O est de rapport -1 est la symétrie de centre O .
- Si $k \neq 1$, le seul point invariant de $h(O, k)$ est O .
- Le centre d'une homothétie, un point et son image sont alignés.
- La transformation réciproque de $h(O, k)$ est $h\left(O, \frac{1}{k}\right)$

Propriété fondamentale

Propriété

Si M' et N' sont les images respectives de deux points M et N par une homothétie de rapport k alors :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}.$$



Démonstration

Soit O le centre de l'homothétie, on a alors :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{MO} + k\overrightarrow{ON} = k(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}) = k\overrightarrow{MN}$$

2/ Propriétés

Dans ce paragraphe, f désigne une translation ou une homothétie du plan ou de l'espace.

a) Propriétés de conservation

Conservation du barycentre

Propriété

On considère trois points A , B et G et leurs images A' , B' et G' par f .

Si $G = \text{Bar} \{(A, a); (B, b)\}$ alors $G' = \text{Bar} \{(A', a); (B', b)\}$.

Remarque : La propriété précédente s'étend au cas du barycentre de n points en utilisant l'associativité du barycentre.

Démonstration

Soit k le rapport de f . On pose $k = 1$ si f est une translation.

Si $G = \text{Bar} \{(A, a); (B, b)\}$ alors $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

On a de plus $\overrightarrow{G'A'} = k\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{G'B'} = k\overrightarrow{GB}$.

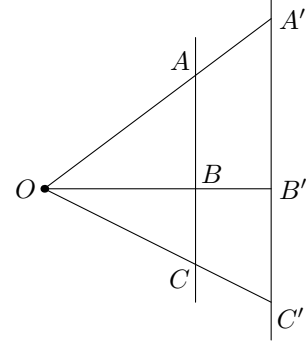
Ainsi, $a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} = ak\overrightarrow{GA} + bk\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. $G' = \text{Bar} \{(A', a); (B', b)\}$.

Conséquences :

Propriété

Lorsque trois points sont alignés, leurs images par f sont aussi trois points alignés.

Lorsque quatre points sont coplanaires, leurs images par f sont aussi quatre points coplanaires.

**Démonstration**

On utilise la propriété précédente et le fait que si trois points sont alignés alors l'un est le barycentre des deux autres et que si quatre points sont coplanaires alors l'un est le barycentre des trois autres.

Propriété

Si deux points A et B ont pour images A' et B' par f alors l'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$.

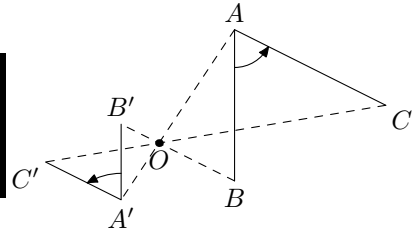
Démonstration

On utilise la propriété précédente et le fait que le milieu d'un segment est l'isobarycentre des extrémités du segment.

Conservation des angles orientés**Propriété**

On considère trois points A, B et C et leurs images A', B' et C' par f .

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + k \times 2\pi$$

**Démonstration**

Si f est une homothétie, on appelle k son rapport; si f est une translation, on pose $k = 1$.

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) &= (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C'}) + k \times 2\pi \\ &= (k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, k\overrightarrow{AC}) + k \times 2\pi \end{aligned}$$

Si $k > 0$ alors $(k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = 0 + k \times 2\pi$ et $(\overrightarrow{AC}, k\overrightarrow{AC}) = 0 + k \times 2\pi$.

Si $k < 0$ alors $(k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = \pi + k \times 2\pi$ et $(\overrightarrow{AC}, k\overrightarrow{AC}) = \pi + k \times 2\pi$.

On a alors : $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + k \times 2\pi$

Conséquences :

Propriété

Si quatre points A, B, C et D ont pour images A', B', C' et D' par f et si $(AB) \parallel (CD)$ alors $(A'B') \parallel (C'D')$.

b) Effet sur les longueurs, les aires et les volumes

Propriété

Une translation conserve les longueurs, les aires et les volumes.

Par une homothétie de rapport k , les longueurs sont multipliées par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

Démonstration

Cas des longueurs.

Si f est une homothétie, on appelle k son rapport; si f est une translation, on pose $k = 1$.

Quels que soient les points A et B et leurs images A' et B' , $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. On a donc :

$$A'B' = \|\overrightarrow{A'B'}\| = \|k\overrightarrow{AB}\| = |k| \|\overrightarrow{AB}\| = |k|AB$$

3/ Images des figures usuelles

Dans ce paragraphe, f désigne une translation ou une homothétie de rapport k du plan ou de l'espace. On posera $k = 1$ si f est une translation.

a) Image d'une droite, d'un plan

Propriété

L'image d'une droite d par f est une droite d' parallèle à d .

L'image d'un plan P par f est un plan P' parallèle à P .

Démonstration

Cas d'une droite d .

Soient A et B deux points de d et leurs images A' et B' .

$$M \in d \Leftrightarrow \text{Il existe } a \text{ et } b \text{ tels que } M = \text{Bar} \{(A, a); (B, b)\}$$

$$\Leftrightarrow \text{Il existe } a \text{ et } b \text{ tels que } M' = \text{Bar} \{(A', a); (B', b)\}$$

$$\Leftrightarrow M' \in (A'B')$$

L'image de d est donc une droite d' .

De plus $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ donc $(A'B') \parallel (AB)$.

b) Image d'un segment

Propriété

On considère deux points A et B et leurs images A' et B' par f .

L'image du segment $[AB]$ par f est le segment $[A'B']$.

Démonstration

$$M \in [AB] \Leftrightarrow \text{Il existe } a > 0 \text{ et } b > 0 \text{ tels que } M = \text{Bar} \{(A, a); (B, b)\}$$

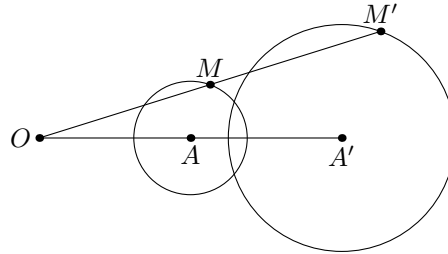
$$\Leftrightarrow \text{Il existe } a > 0 \text{ et } b > 0 \text{ tels que } M' = \text{Bar} \{(A', a); (B', b)\}$$

$$\Leftrightarrow M' \in [A'B']$$

c) Image d'un cercle

Propriété

Soit \mathcal{C} un cercle de centre A et de rayon R et soit A' l'image de A par f . L'image de \mathcal{C} par f est le cercle \mathcal{C}' de centre A' et de rayon $|k|R$.

*Démonstration*

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow AM = R \Leftrightarrow A'M' = |k|R \Leftrightarrow M'$ appartient au cercle de centre A' et de rayon $|k|R$.