➢ L'image d'un cercle (C) par s est un cercle (C').

Si (C) est le cercle de centre I et de rayon r, alors son image (C') est le cercle de centre I' et de rayon kr, où I'= s(I) et k le rapport de s.

1.2. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{1}{2-i\sqrt{3}}$ et $z_2 = \frac{i-3}{-1-2i}$.
2. Z_1 = (z+2)(2z- i) et $Z_2 = \frac{z+1-i}{z-2}$

(on posera $z = x + iy$ *où* $x, y \in \mathbb{R}$).

Exercice 2

Ecrire sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1) z = 1- $i\sqrt{3}$; 2) z = - 1 - i ; 3) z = - $\sqrt{6}$ + i$\sqrt{2}$

4) z = - sin2θ + 2i$cos^2\theta$, $\theta \in]0;\ \pi]$.

5) z = 1+ cos x + isin x, $x \in]\pi; 2\ \pi[$.

Exercice 3

On considère les points *A, B, C* de coordonnées respectives (1; -3), (4 ; 5) et (-3 ; 2).

1. Quels sont les affixes des points *A, B et C* et des vecteurs

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2. Déterminer l'affixe de I le milieu du segment *[AB]* et celui de *G* le barycentre de *(A ; 1), (B ; 2) et (C ; 3).*

3. On définit les points *D et E* par $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $3\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$; déterminer l'affixe des points *D et E.*

4. Démontrer que les points *A, D et E* sont alignés.

Exercice 4

On donne les nombres complexes $a = 5\sqrt{2}\,(1 + i)$ et $b = -5(1+ i\sqrt{3})$.

1. Déterminer le module et un argument de *a, b* et $\frac{b}{a}$.

2. Soit Z le nombre complexe tel que *a*Z = *b* ; écrire Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{13\pi}{12}$ et $\sin\frac{13\pi}{12}$.

Exercice 5

On considère le complexe $z = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

1. Calculer z^2.

2. Déterminer le module et un argument de z^2. En déduire le module et un argument de z.

3. Déterminer les entiers n tels que z^n soit un imaginaire pur.

Exercice 6

Dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, soit les points A(1+ i), B(-3- i) et C(2i)

1. Placer les points A, B, C et déterminer la nature du triangle ABC.

2. Déterminer le point D tel que ADBC soit un parallélogramme.

3. Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan tels que

a) $|z - 2i| = 3$. b) $|z - 1 - i| = |z + 3 + i|$. c) $|\bar{z} - 1 + i| = 1$.

d) $|iz + 2| = 3$.

Exercice 7

A tout complexe $z \neq 2i$, on associe le complexe $Z = \frac{z+1}{z-2i}$.

Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que

1. Z soit un réel.
2. Z soit un imaginaire pur.
3. Z soit un réel strictement positif.
4. Z soit un imaginaire pur dont la partie imaginaire est négative.
5. $|Z| = 1$.

Exercice 8

1. Exprimer $sin5x$ en fonction de sinx.
2. Linéariser $cos^3 x sin^2 x$.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes

1) $\frac{iz}{z+i} = 1 + 2i$. 2) $z^2 + z - 6 = 0$. 3) $4z^2 + 4z + 1 = 0$.

4) $z^2 + z + 1 = 0$. 5) $z^2 = 3 - 4i$. 6) $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$.

Exercice 10 **(Bac 2007)**

Dans $\mathbb{C}$ on considère l'équation

(E) : $z^3 - (3+2i)z^2 + (1+4i)z + 1 - 2i = 0$.

1. a) Vérifier que (E) admet une solution réelle.

b) Achever la résolution de l'équation (E).

2. Dans le plan complexe on désigne par A, B, C les points d'affixes respectifs $z_A = 1$; $z_B = i$; $z_C = 2 + i$.

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D, image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

d) Montrer que A, B, C *et* D sont sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

<u>Exercice 11</u> **(Bac 2005)**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 1$.

2. a) Développer $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$.

b) Soit l'équation (E) : $z^3 = 4\sqrt{2}$ (-1 - i). En posant u = $\frac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$, déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E).

3. En déduire les valeurs exactes de cos $\frac{5\pi}{12}$ et sin $\frac{5\pi}{12}$.

<u>Exercice 12</u>

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^7 - 1 = 0$.

2. Soit $u = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, calculer $1 + u + u^2 + \ldots + u^6$.

3. En déduire que $1 + 2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7} = 0$.

<u>Exercice 13</u>

Soit f l'application du plan complexe qui à tout point M(z), associe le point M'(z') défini par z' = (1+ i)z - 1.

1. Montrer que f est une similitude directe dont on précisera ses éléments caractéristiques.

2. Soit la droite (d) : $x - y + 2 = 0$ et (C) le cercle de centre $I(1-i)$ et de rayon 2. Déterminer (d') et (C') les images respectives de (d) et (C) par la similitude f.

<u>Exercice 14</u>

Soit $A(-1)$, $B(-2+i)$, $C(i)$ et $D(1-2i)$ des points du plan,

1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s tel que $s(A) = B$ et $s(C) = D$.

2. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s' qui laisse invariant A et transforme B en C.

3. Déterminer l'expression analytique de la similitude s'' de centre C, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport 2.