Chapitre 11

Suites numériques

1/ Généralités

a) Définition

Définition

Une suite est une fonction définie sur $\mathbb{N}$. Une suite numérique est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.
L'image de n par une suite u se note u_n et est appelé terme de rang n de la suite. Une suite u est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : On peut aussi définir une suite à partir d'un certain rang.

Exemple :

1/ u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n+2}$. $\quad u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = \dfrac{1}{3}$, $u_2 = \dfrac{1}{4}$, ...

2/ v définie pour tout $n \geqslant 3$ par $v_n = \dfrac{1}{n-2}$ $\quad v_3 = 1$, $v_4 = \dfrac{1}{2}$, $v_5 = \dfrac{1}{3}$, ...

b) Comment générer une suite

Selon le contexte les termes d'une suite peuvent être définis de différentes façons.

Explicitement en fonction du rang

– Toute fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ (ou sur un intervalle de la forme $[a\ ;\ +\infty[$) permet de définir une suite.

Exemple : Calculer les premiers termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 5n - 1$.
$u_0 = 2\times 0^2 - 5\times 0 - 1 = -1$; $u_1 = 2\times 1^2 - 5\times 1 - 1 = -4$;
$u_2 = 2\times 2^2 - 5\times 2 - 1 = -3$; $u_3 = 2\times 3^2 - 5\times 3 - 1 = 2$;
$u_4 = 2\times 4^2 - 5\times 4 - 1 = 11$

– Les propriétés des nombres entiers permettent aussi de définir explicitement des suites qui ne peuvent pas être obtenues simplement par une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple : Calculer les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $u_n = (-1)^n$ et v_n est le nombre de diviseurs de n.

$u_0 = 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = 1$; $u_3 = -1$; ...

$v_1 = 1$; $v_2 = 2$; $v_3 = 2$; $v_4 = 3$; $v_5 = 2$; $v_6 = 4$ ...

Par récurrence

Une suite peut aussi être définie par son premier terme (ou ses premiers termes) et par une relation permettant de calculer chaque terme en fonction du précédent (ou des précédents).

Exemple : Calculer les premiers termes des suites ci-dessous définies sur $\mathbb{N}$.

u est définie par $\begin{cases} u_0 = -6 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n - 1 \quad \textit{pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$

$u_1 = -\frac{1}{2}u_0 - 1 = -\frac{1}{2} \times (-6) - 1 = 2$; $u_2 = -\frac{1}{2}u_1 - 1 = -\frac{1}{2} \times 2 - 1 = -2$

$u_3 = -\frac{1}{2}u_2 - 1 = -\frac{1}{2} \times (-2) - 1 = 0$; $u_4 = -\frac{1}{2}u_3 - 1 = -\frac{1}{2} \times 0 - 1 = -1$

v est définie par $\begin{cases} v_0 = 1 \; ; \; v_1 = 1 \\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \quad \textit{pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$

$v_2 = v_1 + v_0 = 1 + 1 = 2$; $v_3 = v_2 + v_1 = 2 + 1 = 3$;
$v_4 = v_3 + v_2 = 3 + 2 = 5$; $v_5 = v_4 + v_3 = 5 + 3 = 8$;
$v_6 = v_5 + v_4 = 8 + 5 = 13$

w est définie par $\quad w_0 = 3 \quad$ *et* $\begin{cases} w_{n+1} = \dfrac{w_n}{2} & \textit{si } w_n \textit{ est pair} \\ w_{n+1} = 3w_n + 1 & \textit{si } w_n \textit{ est impair} \end{cases}$

$w_1 = 3 \times w_0 + 1 = 3 \times 3 + 1 = 10$; $w_2 = \frac{w_1}{2} = \frac{10}{2} = 5$; $w_3 = 3 \times w_2 + 1 = 3 \times 5 + 1 = 16$;
$w_4 = \frac{w_3}{2} = \frac{16}{2} = 8$; $w_5 = \frac{w_4}{2} = \frac{8}{2} = 4$; $w_6 = \frac{w_5}{2} = \frac{4}{2} = 2$

2/ Sens de variation

a) Définition

Une suite étant une fonction, les définitions restent les mêmes :

u est croissante (strict. croissante) si $n < p \Longrightarrow u_n \leqslant u_p$ $(n < p \Longrightarrow u_n < u_p)$
u est décroissante (strict. décroissante) si $n < p \Longrightarrow u_n \geqslant u_p$ $(n < p \Longrightarrow u_n > u_p)$

Cependant, les propriétés des nombres entiers permettent d'établir les résultats suivants :

Propriété

u est croissante si et seulement si pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1}$
u est décroissante si et seulement si pour tout entier n, $u_n \geqslant u_{n+1}$

Remarques :
- Ne pas mélanger u_{n+1} et $u_n + 1$
- Dans la pratique, pour déterminer le sens de variation d'une suite, on s'intéresse au signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
- Dans le cas où tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut aussi comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exemple : Déterminer le sens de variation des suites suivantes :
- *u est définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $u_n = 3n + (-1)^n$.

  Étudions la différence $u_{n+1} - u_n$:
  $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + (-1)^{n+1} - 3n - (-1)^n = 3 - 2 \times (-1)^n > 0$
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
- *v est définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = -v_n^2 + v_n \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

  Étudions la différence $v_{n+1} - v_n$:
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = -v_n^2 + v_n - v_n = -v_n^2 < 0$
  La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

– *w est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $w_n = \dfrac{2^n}{n}$.*

Les termes de la suite sont strictement positifs, on étudie donc le quotient $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} \times \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2n}{n+1}$

Pour tout $n \geqslant 1$, $2n \geqslant n+1$ donc $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} \geqslant 1$.

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

b) Propriété

Propriété

Soit f une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
Si f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ alors u est croissante.
Si f est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ alors u est décroissante.

La démonstration de cette propriété est immédiate en utilisant la définition.

Exemple : Déterminer le sens de variation de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (n+3)^2$.

La fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (x+3)^2$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ (polynôme du second degré...) donc la suite u est croissante.

3/ Limites

a) Suites convergentes

Définition

Une suite u converge vers un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit alors que u est convergente et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

On peut formuler la définition comme suit :
- u converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.
- u converge vers ℓ si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un entier n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \in I$.

Propriété

Si une suite converge alors sa limite est unique.

Démonstration

Soit u une suite convergente. Supposons qu'elle admette deux limites distinctes ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$.

Soit d un réel positif inférieur à $\dfrac{\ell'-\ell}{2}$.

On pose $I =]\ell - d\ ;\ \ell + d[$ et $I' =]\ell' - d\ ;\ \ell' + d[$.

On a $d < \dfrac{\ell'-\ell}{2}$ donc $2d < \ell' - \ell$ soit $d + d < \ell' - \ell$.

On en déduit que $\ell + d < \ell' - d$

Ainsi, I et I' sont deux intervalles disjoints et ils contiennent respectivement ℓ et ℓ'.

Si u converge vers ℓ, l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un rang n_0.

Si u converge vers ℓ', l'intervalle I' contient tous les termes de la suite à partir d'un rang n_1.
Ainsi pour tout n supérieur à n_0 et n_1, u_n doit appartenir à la fois à I et I' ce qui est impossible car ces intervalles sont disjoints.
Conclusion : u ne peut pas admettre deux limites distinctes. La limite d'une suite est unique.

b) Suites divergentes

Une suite divergente est une suite qui n'est pas convergente.

Suites de limite infinie

Définition

Une suite u a pour limite $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A\ ;\ +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit alors que u diverge vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
On définit de la même façon une suite qui diverge vers $-\infty$

Suites qui n'ont pas de limite

Une suite n'est pas nécessairement convergente ou divergente vers l'infini. Il existe des suites qui n'ont pas de limite. Elles sont aussi appelées suites divergentes.

Exemples : u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$. *v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n\sin(n)$.*

c) Propriétés

Propriété

Soit f une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Conséquence : Toutes les propriétés vues sur les limites de fonctions s'appliquent aux suites définies par $u_n = f(n)$.

Exemple : Déterminer la limite de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{-2n^2+n}{3n^2+1}$.

Pour tout $n > 0$, $u_n = \dfrac{-2n^2+n}{3n^2+1} = \dfrac{n^2\left(-2+\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{-2+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{1}{n^2}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} -2+\dfrac{1}{n} = -2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{1}{n^2} = 3\end{array}\right\}\ \text{donc } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{2}{3}$$

Théorème des gendarmes

Propriété

On considère trois suites u, v et w et un réel ℓ.

Si $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \quad \text{à partir d'un certain rang}\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Démonstration

Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.
u converge vers ℓ donc I contient tous ses termes à partir d'un certain rang n_0.
w converge vers ℓ donc I contient tous ses termes à partir d'un certain rang n_1.
À partir d'un certain rang n_2, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Ainsi, pour tout n supérieur à la fois à n_0, n_1 et n_2, tous les termes de v appartiennent à I.
Conclusion : v converge vers ℓ.

Exemple : Déterminer la limite de la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \quad & -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \\ & -\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n} \\ & 2-\frac{1}{n} \leqslant 2+\frac{(-1)^n}{n} \leqslant 2+\frac{1}{n} \\ & 2-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 2+\frac{1}{n}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{1}{n} = 2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{1}{n} = 2\end{array}\right\} \text{donc, d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

4/ Suites arithmétiques

a) Définition

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et r un réel.
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemples :
La suite des nombres impairs est une suite arithmétique de raison 2.
Les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 4$ et $v_n = n^2 + 2$ sont-elles arithmétiques ?

- Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 4 - (3n-4) = 3n + 3 - 4 - 3n + 4 = 3$.
  La suite u est donc arithmétique de raison 3.
- $v_0 = 2$, $v_1 = 3$, $v_2 = 6$ ainsi $v_1 = v_0 + 1$ et $v_2 = v_1 + 3$
  La suite v n'est donc pas arithmétique.

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
Si $r > 0$ alors u est strictement croissante.
Si $r = 0$ alors u est constante.
Si $r < 0$ alors u est strictement décroissante.

Démonstration immédiate (Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = r$...)

b) Expression de u_n en fonction de n

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
Pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

En particulier, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Démonstration

On suppose $n > p$. On a :

$u_n - u_{n-1} = r\,;\quad u_{n-1} - u_{n-2} = r\,;\quad \dots\quad u_{p+2} - u_{p+1} = r\,;\quad u_{p+1} - u_p = r$

En additionnant toutes ces égalités, on obtient :

$$u_n - u_p = (n-p)r$$

soit

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

c) Somme de termes consécutifs

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
Pour tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Remarque : On a aussi $u_1 + u_2 \cdots + u_{n-1} + u_n = n \times \dfrac{u_1 + u_n}{2}$

Démonstration

Posons $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

On a ainsi $2S = (u_0+u_n)+(u_1+u_{n-1})+(u_2+u_{n-2})+\cdots+(u_{n-1}+u_1)+(u_n+u_0)$

Or, pour tout $k \leqslant n$, $u_k + u_{n-k} = u_0 + kr + u_0 + (n-k)r = u_0 + u_0 + nr = u_0 + u_n$.

On a donc : $2S = (n+1) \times (u_0 + u_n)$

Donc $S = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$

Exemple : Déterminer la somme des n premiers nombres impairs.

La suite des nombres impairs est la suite arithmétique de raison 2 telle que $u_1 = 1$

$$u_1 + u_2 \cdots + u_{n-1} + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2} = n \times \frac{u_1 + u_1 + (n-1)r}{2} = n \times \frac{2 + 2n - 2}{2} = n^2$$

5/ Suites géométriques

a) Définition

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et q un réel.
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison q si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Remarque : Si $q \neq 0$ et $u_0 \neq 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

Exemple :
La suite des puissances de 2 est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
Les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -4 \times 3^n$ et $v_n = n^2 + 1$ sont-elles géométriques ?

Pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-4 \times 3^{n+1}}{-4 \times 3^n} = 3$.
La suite u est donc géométrique de raison 3.
$v_0 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 5$ ainsi $v_1 = 2 \times v_0$ et $v_2 = 2,5 \times v_1$
La suite v n'est donc pas géométrique.

b) Expression de u_n en fonction de n

Propriété

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.
Pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

En particulier, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Démonstration

On suppose $n > p$. On a :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = q\,; \qquad \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} = q\,; \qquad \ldots \qquad \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} = q\,; \qquad \frac{u_{p+1}}{u_p} = q$$

En multipliant toutes ces égalités, on obtient :
$\dfrac{u_n}{u_p} = q^{n-p}$ soit $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Propriété

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$.

Si $q > 1$ alors $\begin{cases} \text{si } u_0 > 0, u \text{ est strictement croissante.} \\ \text{si } u_0 < 0, u \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$

Si $q = 1$ alors u est constante.

Si $0 < q < 1$ alors $\begin{cases} \text{si } u_0 > 0, u \text{ est strictement décroissante.} \\ \text{si } u_0 < 0, u \text{ est strictement croissante.} \end{cases}$

Si $q < 0$ alors u n'est pas monotone.

Démonstration

Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times q^n(q-1)$
Le signe de $u_{n+1} - u_n$ s'obtient donc en fonction du signe de u_0, du signe de q^n et du signe de $q - 1$.

c) Somme de termes consécutifs

Propriété

Soit q un réel différent de 1.
Pour tout entier naturel n :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
Pour tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration

Posons $S = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n$. On a alors $qS = q+q^2+q^3+\cdots+q^n+q^{n+1}$

Ainsi, $S - qS = 1 - q^{n+1}$

D'où : $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple : Déterminer la somme des n premières puissances de 2 ($1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$)).

La suite des puissances de 2 est la suite géométrique de raison 2 et telle que $u_0 = 1$

Ainsi, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times \dfrac{1-q^n}{1-q} = 1 \times \dfrac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$

d) Limites

Propriété

Soit q un réel.

Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.

Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Si $q \leqslant -1$ alors q^n n'a pas de limite.

Remarque : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors $u_n = u_0 q^n$. Le théorème précédent permet donc de trouver la limite d'une suite géométrique.

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$

Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

On a $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Or $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = 2$