1) Somme, différence, produit, quotient, opposé, inverse (rappels)

1 - 1) quelques synonymes

Signe	Opération	Synonyme
$+$	Addition	*ajouter, sommer, ...*
$-$	Soustraction	*enlever, retirer, ...*
$\times$	Multiplication	*répéter plusieurs fois, ...*
$\div$	Division	*partager en parts égales, ...*

1 - 2) Somme et différence

Soustraire un nombre x équivaut à ajouter son opposé $-x$.

Autrement dit : $\ldots - x$ équivaut à $\ldots + (-x)$

EXEMPLE : $3 - 2 = 3 + (-2)$

REMARQUE : tous les nombres ayant un opposé, les mathématiciens considèrent souvent les différences comme des sommes.

1 - 3) Produit et quotient

Diviser par un nombre x équivaut à multiplier par son inverse $\dfrac{1}{x}$

Autrement dit : $\dfrac{\ldots}{x}$ équivaut à $\ldots \times \dfrac{1}{x}$

EXEMPLE : $\dfrac{6}{2} = 6 \times \dfrac{1}{2} = 6 \times 0,5$

QUESTION : cette proposition est-elle vraie ou fausse : « tous les nombres ont un inverse » ?

1 - 4) Déterminer la nature d'une expression

Les expressions algébriques comportent généralement (ou presque) les quatre opérations.

La **dernière opération** que l'on utilise, **en respectant les priorités de calcul**, pour évaluer l'expression donne son type : une somme (+), une différence (-), un produit ($\times$) ou un quotient ($\div$)

EXEMPLES : pour tout nombre x, $(x-1)(x+2)$ est *un produit.*

pour tout nombre x, $x^2 + x - 2$ est *une somme.*

1) (In)équation

Les méthodes qui permettent de résoudre des (in)équations s'appuient sur les propriétés vues au chapitre 1, rappelées ci-dessous :

Propriété 2 : En ajoutant ou en soustrayant le même nombre aux deux membres d'une égalité, on obtient une égalité équivalente.

Propriété 3 : En multipliant ou en divisant par le même nombre non nul les deux membres d'une égalité, on obtient une égalité équivalente.

Propriété 4 : En réduisant, en développant, en factorisant, ou en mettant au même dénominateur **un seul** ou **les deux membres d'une égalité**, **on obtient une égalité équivalente**.

1 - 1) Résoudre une équation

Une équation est une **égalité** entre deux membres ; un membre ou les deux membres de l'égalité contiennent dans leur expression une ou plusieurs inconnues qui sont notées avec des lettres (habituellement x, y, t ...)

Définition 1 : Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue (si elles existent) pour que l'égalité de départ soit vérifiée.

Exemple : on considère l'équation $3x + 2 = 14$; l'inconnue est le nombre représenté par la lettre x.
Le nombre 4 est solution puisque $3 \times 4 + 2 = 12 + 2 = 14$ et c'est dans ce cas la seule solution : on note : $\boxed{\mathcal{S} = \{2\}}$

Méthode 1 : pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue

Exemple détaillé : résolution de l'équation $7x + 3 = 2x - 5$

L'idée est d'isoler progressivement l'inconnue ; dans l'exemple qui suit, on va chercher à ne mettre que des nombres dans le membre de droite, et les inconnues dans le membre de gauche de l'égalité.

écriture	justification de l'équivalence	commentaire
$7x + 3 = 2x - 5$		
$\Leftrightarrow$	propriété 2	on « élimine » $+3$ en ajoutant son opposé : -3
$7x + 3 - 3 = 2x - 5 - 3$		
$\Leftrightarrow$	propriété 4	on réduit les écritures
$7x = 2x - 8$		
$\Leftrightarrow$	propriété 2	on « élimine » $2x$ en ajoutant son opposé : $-2x$
$7x - 2x = 2x - 8 - 2x$		
$\Leftrightarrow$	propriété 2	on réduit les écritures
$5x = -8$		
$\Leftrightarrow$	propriété 3	on divise par 5
$\dfrac{5x}{5} = \dfrac{-8}{5}$		
$\Leftrightarrow$	propriété 2	on réduit les écritures
$x = -\dfrac{8}{5}$		

Conclusion : cette équation a une seule solution $-\dfrac{8}{5} = -1,6$; $\boxed{\mathcal{S} = \{-1,6\}}$

Méthode 2 : pour résoudre une équation à une inconnue, on cherche à se ramener au cas précédent en utilisant une **équation produit** en faisant des transformations algébriques (essentiellement des factorisations).

Exemple détaillé : résolution de l'équation $(x + 1)(x + 3) - 2(x + 1) = 0$

On factorise l'expression $(x + 1)(x + 3) - 2(x + 1)$ qui possède un facteur commun :

$$\begin{aligned}(x+1)(x+7) - 2(x+1) &= (x+1)\left[(x+7) - 2\right] \\ &= (x+1)\left[x + 7 - 2\right] \\ &= (x+1)(x+5)\end{aligned}$$

L'équation précédente est donc équivalente (d'après la propriété 4) à $(x + 1)(x + 5) = 0$

D'après la règle du « produit nul », cette équation produit est équivalente à :
$x + 1 = 0$ ou $x + 5 = 0$

Cela donne au final deux solutions (obtenues en résolvant les deux équations du premier degré à une inconnue $x + 1 = 0$ et $x + 5 = 0$) : $\boxed{\mathcal{S} = \{-5\ ;\ -1\}}$

1 - 2) Résoudre une inéquation

Une inéquation est une **inégalité** entre deux membres ; un membre ou les deux membres de l'égalité contiennent dans leur expression une ou plusieurs inconnues ; l'inégalité peut être stricte ($<$ ou $>$) ou large ($\leqslant$ ou $\geqslant$).

Définition 2 : Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue (si elles existent) pour que l'inégalité de départ soit vérifiée.

Les solutions peuvent être :
- aucune ; on dit alors « ensemble vide » et on note $\mathcal{S} = \emptyset$; exemple : $x^2 < -2$
- n'importe quel nombre ; on note $\mathcal{S} = \mathbb{R}$; exemple : $x^2 \geqslant -5$
- un intervalle ou une réunion d'intervalles

Méthode 3 : résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue

Cette méthode utilise les mêmes principes que pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue ; s'ajoute la propriété suivante :

Propriété 5 : Une inégalité change de sens si on la multiplie ou la divise par un nombre *négatif*.

Exemple détaillé : résolution de l'équation $-\frac{1}{3}x - 2 \leqslant 7$

L'idée est d'isoler progressivement l'inconnue ; dans l'exemple qui suit, on va chercher à ne mettre que des nombres dans le membre de droite, et les inconnues dans le membre de gauche de l'égalité.

écriture	justification de l'équivalence	commentaire
$-\frac{1}{3}x - 2 \leqslant 7$		
$\Leftrightarrow$	propriété 2	on « élimine » -2 en ajoutant son opposé : 2
$-\frac{1}{3}x - 2 + 2 \leqslant 7 + 2$		
$\Leftrightarrow$	propriété 4	on réduit les écritures
$-\frac{1}{3}x \leqslant 9$		
$\Leftrightarrow$	propriétés 3 et 5	on multiplie par (-3)
$-\frac{1}{3}x \times (-3) \geqslant 9 \times (-3)$		
$\Leftrightarrow$	propriété 2	on réduit les écritures
$x \geqslant -27$		

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = [-27\,;\, +\infty[}$

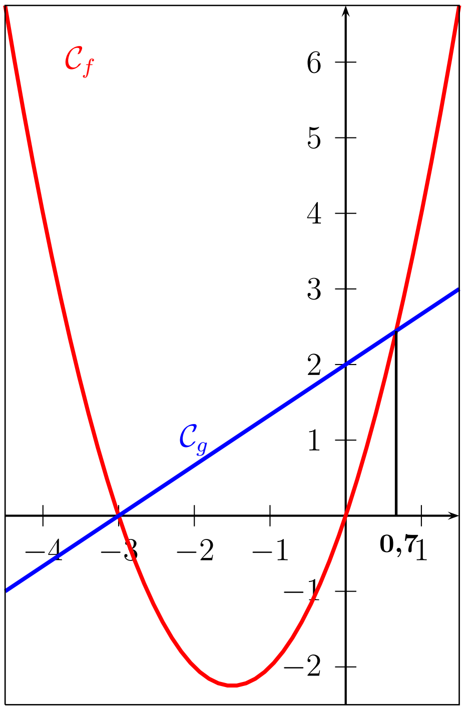
2) Résolutions graphiques

2 - 1) Équation

Cherchons à résoudre l'équation $x^2 + 3x = \dfrac{2}{3}x + 2$

Méthode 4 : pour résoudre graphiquement une équation, on trace dans un repère les représentations graphiques des fonctions correspondantes et on cherche le ou les points d'intersection.

Dans l'exemple précédent, on pose $f(x) = x^2 + 3x$ et $g(x) = \dfrac{2}{3}x + 2$ et on va tracer leurs représentations graphiques respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$:



On lit donc, aux erreurs de précision près, que les solutions sont -3 et 0,7.

Remarques :
- Rien ne dit qu'il n'y a pas que les solutions conjecturées graphiquement.
- On peut « valider » la conjecture graphique en remplaçant la ou les valeurs trouvées dans l'équation de départ.
- Si on est amené à résoudre algébriquement et graphiquement une équation, on s'assurera de la **cohérence** des résultats donnés par les deux méthodes.

2 - 2) Inéquation

Cherchons à résoudre l'inéquation $x^2 + 3x \geqslant \frac{2}{3}x + 2$

Méthode 5 : pour résoudre graphiquement une inéquation, on trace dans un repère les représentations graphiques des fonctions correspondantes et on cherche le ou les intervalles où la courbe représentant une fonction est **au-dessus** (ou en-dessous selon le sens de l'inégalité) de l'autre courbe.

En reprenant le tracé précédent, on cherche à savoir quand la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$: on conjecture que c'est le cas sur $]-\infty\ ;\ -3] \cup [0,7\ ;\ +\infty[$

Remarques :

– On ne sait pas grand chose de ce qui se passe en dehors de la fenêtre graphique ...

– On peut « tester » la conjecture graphique en remplaçant x par des valeurs numériques dans l'inéquation de départ.

– Si on est amené à résoudre algébriquement et graphiquement une inéquation, on s'assurera de la **cohérence** des résultats donnés par les deux méthodes.