Exercice 1

Déterminer une primitive de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = 3x^4-2x^2+ x-1$. 2) $f(x) = sinx cos^3 x$.

3) $f(t) = sin(\omega t + \varphi)$. 4) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{x^3}$. 5) $f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x-2}$.

6) $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{4}{(x+1)^2}$. 7) $f(x) = \frac{lnx}{x}$. 8) $f(x) = e^{-3x+1}$.

9) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$. 10) $f(x) = \frac{1}{xlnx}$.

Exercice 2

1. Soit $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.

2. Soit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+8}}$.

a) Sur quel intervalle g admet-elle des primitives ?

b) Déterminer la primitive de g qui prend la valeur 4 en 2.

3. Soit $h(x) = \frac{1}{x}$.

a) Déterminer un intervalle I sur lequel h admet des primitives.

b) Préciser dans ce cas l'ensemble des primitives de h sur I.

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$. 2) $\int_2^1 3xe^{x^2-1} dx$. 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx sin^2 x \, dx$.

4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^0 tanu \, du$. 5) $\int_{-1}^2 |1-x| \, dx$.

Exercice 4

1. Calculer à l'aide d'une (ou d'une double) intégration par parties les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \, dx$. b) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x^2} dx$.

c) $\int_0^1 x^2 e^{2x} \, dx$. d) $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$.

2. Déterminer les primitives de f dans les cas suivants :

a) $f(x) = \ln x$ sur $[1 \,; +\infty[$. b) $f(x) = (x+1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos x$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal d'unités 2 et 3 cm.

1. Calculer en cm^2, l'aire du domaine D limité par C_f , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{3\pi}{4}$.

2. Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Montrer que $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 6

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

1. Déterminer le volume d'une boule de rayon R.

2. Soit la courbe (C) d'équation $y = \sqrt{x}$ où $1 \leq x \leq 4$.

Calculer le volume de la figure obtenue en faisant tourner (C) autour de l'axe des abscisses $(O, \vec{i})$.

Exercice 7

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) 2y'-3y = 0. b) y'= $\frac{-1}{3}y$. c) y''+ y'- 6y = 0.

2. Résoudre les équations différentielles vérifiant les conditions posées :

a) y'+ 2y = 0 ; y(-1) = 2 .

b) y''+ 4y'+ 4y = 0 ; y(0) = 1 et y'(0) = 1.

c) y''- 2y'+ 5y = 0 ; y(π) = 1 et y'(π) = 0.

Exercice 8

1. Déterminer f la solution de l'équation différentielle y''- 2y'+ y = 0 , vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.

2. En déduire F une primitive de f.

3. Vérifier que la fonction F trouvée est une primitive de f.

Exercice 9

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = cosx$

1. Déterminer les réels p et q tels que $h(x) = pcosx + qsinx$ soit solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.

3. Montrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de (E').

4. En déduire les solutions de (E).

5. Déterminer f la solution de (E) dont la courbe passe par A(0 ; 1).

6.3. EXERCICES D'ENTRAINEMENT