

Exercice 1 *Variables aléatoires et arbres*

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablettes, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40% exactement deux places de cinéma.

On note $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

1. Un client achète une tablette de chocolat. On considère les événements suivants :

G = "le client achète une tablette gagnante"

U = "le client gagne exactement une place de cinéma"

D = "le client gagne exactement deux places de cinéma"

- Donner $P(G)$, $P_G(U)$ et $P_G(D)$
- Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.
- Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client.

Déterminer la loi de probabilité de X .

Calculer l'espérance mathématique de X .

2. Un autre client achète deux jours de suite une tablette de chocolat.

- Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.
- Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.
- Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale à 0,29.

Exercice 2 *Détermination de la composition d'une urne pour obtenir une espérance de gain souhaitée*

On considère une urne contenant trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et quatre boules vertes. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire, au hasard, une boule de l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

J = "tirer une boule jaune"

B = "tirer une boule bleue"

R = "tirer une boule rouge"

V = "tirer une boule verte"

2. En fonction de la couleur tirée, on se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante : si la boule tirée est :

- rouge, on gagne 10 €
- verte, on gagne 2 €
- jaune ou bleue, on gagne 3 €

Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage le gain réalisé.

- Déduire de la question 1) : $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 10)$.
 - Calculer l'espérance mathématique de X , sa variance puis son écart-type. (On arrondira l'écart-type à 10^{-2})
3. Maintenant, on gagne toujours 10 € si la boule tirée est rouge, 2 € si elle est verte mais on gagne 3 € si elle est jaune et m € si elle est bleue ; m désignant un réel positif.

Calculer m pour que le gain moyen espéré soit de 4,5 €

Exercice 3 *Problème de déconditionnement*

Un grossiste en appareils ménagers est approvisionné par trois marques, notées respectivement M_1 , M_2 et M_3 .

La moitié des appareils de son stock provient de M_1 , un huitième de M_2 , et trois huitièmes de M_3 .

Ce grossiste sait que dans son stock, 13% des appareils de la marque M_1 sont rouge, que 5% des appareils de la marque M_2 sont rouges et que 10% des appareils de la marque M_3 le sont aussi.

On choisit au hasard un appareil emballé dans le stock de ce grossiste : (on donnera les résultats sous forme de fractions)

1. Quelle est la probabilité qu'il vienne de M_3 ?
2. Quelle est la probabilité qu'il soit rouge sachant qu'il vienne de M_2 ?
3. Quelle est la probabilité que l'appareil choisi ne soit pas de couleur rouge ?
4. Après examen, on s'aperçoit que l'appareil choisi est rouge.

Quelle est la probabilité qu'il soit de la marque M_1 ?

Exercice 4 *Probabilités conditionnelles et suite arithmético-géométrique*

Un fumeur essaye de réduire sa consommation. On admet qu'il fonctionne toujours suivant les conditions :

- C_1 : S'il reste un jour sans fumer, alors il fume le lendemain avec une probabilité de 0,4.
- C_2 : Par contre, s'il cède et fume un jour, alors la probabilité qu'il fume le lendemain est de 0,2.

On note p_n la probabilité qu'il fume le $n^{\text{ème}}$ jour.

Déterminer la limite de p_n . Conclusion ?

Exercice 5 *Loi de l'équilibre génétique lors de l'appariements au hasard - Loi de Hardy-Weinberg*

Certains gènes peuvent avoir deux états : A (allèle dominant) ou a (allèle récessif).

Les couples de gènes sur des paires de chromosomes n'ayant pas forcément les mêmes allèles, un individu donné peut avoir l'un des trois génotypes suivants :

$$AA \text{ ou } Aa \text{ ou } aa$$

Lors d'un appariement entre deux individus, l'enfant récupère un allèle de chacun de ses deux parents.

Exemples :

- si un parent a le génotype AA et l'autre Aa , l'enfant sera du type AA ou Aa avec des probabilités égales à $\frac{1}{2}$.
- si un parent a le génotype Aa et l'autre Aa , l'enfant sera du type AA ou Aa ou aa avec des probabilités égales à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ respectivement.

On note p_n , q_n et r_n les proportions des génotypes AA , Aa , aa de la génération n .

1. À l'aide d'un arbre ou d'un tableau à deux entrées, faire apparaître tous les cas possibles d'appariements et les génotypes de l'enfant qui en découlent.
2. En déduire les proportions p_{n+1} , r_{n+1} puis q_{n+1} en fonction de p_n , q_n et r_n .
3. On note $\alpha = p_0 - r_0$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n - r_n = \alpha$

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de p_{n+1} , r_{n+1} puis q_{n+1} en fonction du seul paramètre α .

En déduire que pour $n \geq 1$, les suites (p_n) , (q_n) et (r_n) sont **constantes**.

Ce résultat est connu sous le nom de "loi de l'équilibre génétique de Hardy-Weinberg". Ainsi, quelles que soient les proportions initiales des trois génotypes, la répartition est stabilisée dès la génération suivante.

Exercice 6 Variables aléatoires et dénombrement

Un marchand de glaces propose dix parfums au choix pour des glaces en cornet. Trois élèves choisissent, au hasard et indépendamment l'un de l'autre, un des parfums proposés.

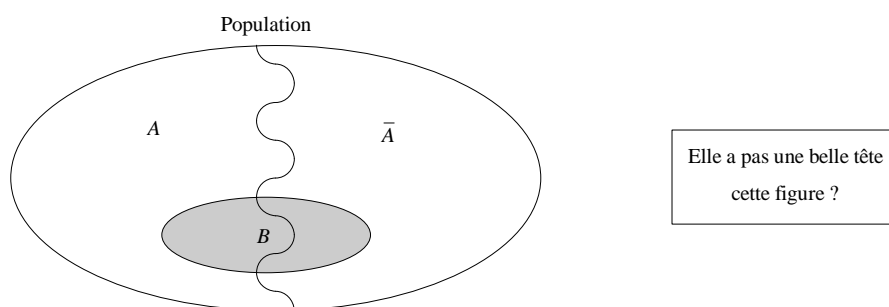
1. Calculer la probabilité de l'événement A : "les trois élèves choisissent des parfums deux à deux distincts"
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parfums choisis par les trois élèves.

Déterminer la loi de probabilité de X . Calculer son espérance mathématique. Interpréter.

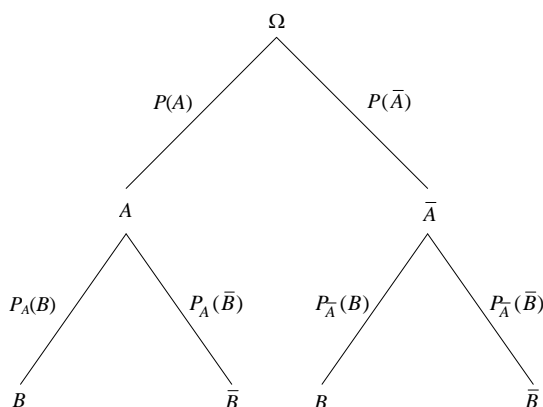
Exercice 7 Sur la double partition d'une population. Différents cas de figure

On considère une population Ω . Sur chaque individu de cette population, on étudie deux caractères A et B .

On peut schématiser cette situation à l'aide du diagramme suivant :



Autre représentation possible à l'aide d'un arbre :



Beaucoup de situations, en probabilités, se modélisent par une double partition.

Démontrer que la connaissance de 3 probabilités parmi les suivantes permet de déterminer toutes les autres :

$$P(A), P(B), P_A(B), P_{\bar{A}}(B), P_B(A), P_{\bar{B}}(A)$$

Exercice 8 Loi hypergéométrique, loi de Bernoulli, loi binomiale

1. Une grande enveloppe contient les douze "figures" d'un jeu de carte : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. On tire, simultanément et au hasard, cinq cartes de l'enveloppe. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de rois obtenus.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

2. Dans la même enveloppe contenant les mêmes douze cartes, on effectue successivement cinq fois le tirage d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe. Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de rois obtenus au cours des cinq tirages.

Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

Exercice 9 *Notion d'indépendance - Utilisation d'un arbre.*

Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches.

Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches.

On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie.

On note :

B_1 l'événement "obtenir une boule blanche au premier tirage"

B_2 l'événement "obtenir une boule blanche au second tirage"

Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 10 *Dénombrement - Loi binomiale*

Un fournisseur livre deux catégories de câbles C_1 et C_2 .

Dans chaque livraison figurent 20% de câbles C_1 et 80% de câbles C_2 .

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, aucun calcul approché n'est demandé.

On prélève, au hasard, 4 câbles dans une livraison de 50 câbles.

- 1) Préciser la probabilité de l'événement $E = \text{"les 4 câbles sont du type } C_1\text{"}$
- 2) Préciser la probabilité de l'événement $F = \text{"1 câble est du type } C_1 \text{ et 3 câbles sont du type } C_2\text{"}$
- 3) Préciser la probabilité de l'événement $G = \text{"au moins un câble est du type } C_1\text{"}$

Partie B

Dans cette partie, on prélève un câble dans une livraison, on note son type et on le remet dans le lot. On réalise n fois cette expérience \mathcal{E} et on note X le nombre de câbles C_1 obtenus.

- 1) On suppose que $n = 4$. Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.
 - a) Calculer la probabilité d'obtenir 2 câbles du type C_1 .
 - b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un câble de type C_1 .
 - c) Calculer l'espérance $E(X)$.
- 2) Dans cette question n est inconnu.
 - a) Exprimer $P(X \geq 1)$ en fonction de n .
 - b) Combien de fois faut-il réaliser l'expérience \mathcal{E} pour être sûr à 90% d'obtenir au moins un câble C_1 ?

Exercice 11 *Test de séropositivité*

Un individu est tiré au hasard d'une population dans laquelle une personne sur 10000 est séropositive.

On lui fait passer un test de dépistage de séropositivité.

Sachant que le test est positif, **quelle est la probabilité que la personne soit effectivement séropositive ?**

Données :

- Si on est séropositif, alors le test est positif avec une probabilité de 0,99.
- Si on n'est pas séropositif, alors le test est positif avec une probabilité de 0,001.

Exercice 12 *Comparaison de l'efficacité de deux vaccins.*

Deux laboratoires pharmaceutiques proposent chacun leur vaccin contre une maladie.

On dispose des données suivantes :

- Un quart de la population a utilisé le vaccin A. Un cinquième le vaccin B.
- Lors d'une épidémie, on constate que sur 1000 malades, 8 ont utilisé le vaccin A et 6 le vaccin B.

On choisit un individu au hasard dans la population et on note :

$$M = \text{"l'individu est malade"} \quad \text{et} \quad V = \text{"l'individu est vacciné"}$$

On appelle "indicateur d'efficacité" d'un vaccin le réel :

$$\lambda = \frac{P_{\bar{V}}(M)}{P_V(M)} = \frac{\text{probabilité qu'un individu non vacciné soit malade}}{\text{probabilité qu'un individu vacciné soit malade}}$$

Plus l'indicateur λ est grand, plus la vaccin est efficace.

Calculer λ pour chacun des deux vaccins. Que peut-on en déduire ?

Exercice 13 *Pertinence d'un test de dépistage*

Dans une population donnée, la proportion d'individus atteint d'une certaine maladie est x .

On dispose d'un test de dépistage de cette maladie et on voudrait étudier sa fiabilité.

On dispose des données suivantes :

- on effectue le test de dépistage à 100 personnes considérées comme malades : 98 ont un test positif.
- on effectue le test de dépistage à 100 personnes considérées comme saines : 1 seule a un test positif.

On choisit au hasard un individu de cette population et on le soumet au test.

On note :

$$M = \text{"l'individu est malade"}$$

$$T = \text{"l'individu a un test positif"}$$

On note $f(x)$ la probabilité qu'un personne ayant un test positif soit malade.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x . Tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit malade est supérieure à 0,95.

Le test est-il fiable si la proportion x d'individus atteints de la maladie est de 0,05 (5%) ?

À partir de quelle proportion x le test est-il fiable ?

Exercice 14 *Estimation de la composition d'une urne.*

1. On remplit une urne avec des jetons blancs et des jetons noirs. À chaque étape, il y a autant de chance de rajouter dans l'urne un jeton noir qu'un blanc. On s'arrête lorsque l'urne contient 10 jetons.

On note X le nombre de jetons blancs dans l'urne.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance $E(X)$.

2. Une urne a été remplie suivant le protocole précédent mais on ignore sa composition en jetons blancs et en jetons noirs. On tire successivement et avec remise, dix jetons de cette urne. On obtient 4 fois un jeton blanc et 6 fois un jeton noir. Calculer la probabilité que l'urne contienne 4 jetons blancs et 6 jetons noirs.