Chapitre1: LIMITE-CONTINUITE-DERIVATION

1.1. RESUME DU COURS

Dans ce chapitre, on désigne par l'infini « ∞ », + ∞ ou - ∞ et par C_f la courbe de f dans un repère ortho normal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Limite d'un polynôme ou d'une fonction rationnelle

- A l'infini, la limite d'un polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.
- A l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du rapport du monôme de plus haut degré du numérateur sur celui du dénominateur.

Formes indéterminées

Dans un calcul de limite, si on obtient « $+\infty - \infty$ » ou « $0.\infty$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ », alors on a une forme indéterminée.

Pour lever l'indétermination, on fait une transformation d'écriture.

Formes indéfinies

Dans un calcul de limite d'un quotient, si on obtient « $\frac{a}{0}$ » , avec $a \neq 0$, alors on a une forme indéfinie.

Dans ce cas la limite est égale à l'infini ; pour déterminer dans quel cas on a $+\infty$ ou $-\infty$, on étudie le signe du dénominateur et on calcule les limites à gauche et à droite.

Théorèmes de comparaison

Soit f, g, u, v des fonctions, L, L' des nombres réels et a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Au voisinage de a :

- Si $f(x) \leq g(x)$, f tend vers L et g tend vers L', alors $L \leq L'$.
- Si $f(x) \geq u(x)$ et si u tend vers $+\infty$, alors f tend vers $+\infty$.
- Si $f(x) \leq v(x)$ et si v tend vers $-\infty$, alors f tend $-\infty$.
- Si $|f(x) - L| \leq u(x)$ et si u tend vers 0, alors f tend vers L.
- Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, u tend vers L et v tend vers L, alors f tend vers L.

<u>Remarque</u> **:** Les suites numériques étant des fonctions particulières, ces théorèmes restent valables dans le cas des suites.

<u>Limite et nombre dérivé</u>

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = "\frac{0}{0}"$, si f et g sont dérivables en x_0 et si $g'(x_0) \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.
- En particulier si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} = "\frac{0}{0}"$ et si f est dérivable en x_0, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

<u>Limite et composée de fonctions</u>

Chacune des lettres a, b, c désigne un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$. Pour calculer $\lim\limits_{x \to a} g[f(x)]$, on procède ainsi :

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g[f(x)] = c$.

Asymptotes

Soit x_0, a, b des nombres réels, f et g des fonctions, C_f la courbe de f et C_g celle de g.

- Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ alors la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote à C_f, parallèle à l'axe des ordonnées.
- Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ alors la droite d'équation $y = a$ est une asymptote à C_f, parallèle à l'axe des abscisses à l'infini.
- $y = ax + b$ est une asymptote oblique à C_f à l'infini ssi $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.
- C_g d'équation $y = g(x)$ est une asymptote à C_f d'équation $y = f(x)$ à l'infini ssi $\lim_{x \to \infty} [f(x) - g(x)] = 0$.

Branches infinies

Soit a et b des nombres réels

- Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ et si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses à $+\infty$.
- Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ et si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées à $+\infty$.
- Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ $(a \neq 0)$ et si

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = \infty$, alors C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation

$y = ax$ à $+\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ $(a \neq 0)$ et si

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$, alors C_f admet la droite d'équation

$y = ax + b$ comme asymptote à $+\infty$.

Remarque : On a les mêmes conclusions quand x tend vers $-\infty$.

<u>Continuité en un point</u>

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 appartenant à I.

- **Définition**

f est continue en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- **Théorème**

f est continue en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

<u>Dérivabilité en un point</u>

Soit a, b et c des nombres réels, f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I.

- **Définition**

f est dérivable en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$; a est appelé nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.

Dans ce cas C_f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de coefficient directeur a.

- **Théorème 1 :** f est dérivable à gauche en x_0 ssi

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b$; b est appelé nombre dérivé de f à gauche en x_0 et est noté $f_g'(x_0)$.

Dans ce cas C_f admet à gauche au point d'abscisse x_0 une demi-tangente de coefficient directeur b.

Théorème 2 : f est dérivable à droite en x_0 ssi

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c$; c est appelé nombre dérivé de f à droite en x_0 et est noté $f_d'(x_0)$.

Dans ce cas C_f admet à droite au point d'abscisse x_0 une demi-tangente de coefficient directeur c

- **Théorème 3 :** Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et si $f_g'(x_0) = f_d'(x_0)$ alors f est dérivable en x_0.

Dans ce cas C_f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de coefficient directeur $f_g'(x_0)$ ou $f_d'(x_0)$

- **Théorème 4 :** Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et si $f_g'(x_0) \neq f_d'(x_0)$ alors f n'est pas dérivable en x_0.

Dans ce cas C_f admet au point d'abscisse x_0 deux demi-tangentes de coefficients directeurs $f_g'(x_0)$ et $f_d'(x_0)$ qui forment un point anguleux.

- **Théorème 5 :** Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ ou

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0.

Dans ce cas C_f admet au point d'abscisse x_0 une demi-tangente d'équation $x = x_0$, parallèle à l'axe des ordonnées.

<u>Equation de la tangente</u>

- La tangente à la courbe de f en x_0 ou au point $(x_0 ; f(x_0))$ a pour équation $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

<u>Remarques</u>

- $f'(x_0)$ le nombre dérivé de f en x_0 est le coefficient directeur de la tangente.
- Si $f'(x_0) = 0$ alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
- Pour obtenir l'équation de la demi-tangente en x_0, on remplace $f'(x_0)$ dans l'équation ci-dessus par $f_g'(x_0)$ ou $f_d'(x_0)$.

Théorèmes généraux sur la continuité et la dérivabilité

- Les fonctions polynômes, sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles et tangente sont continues et dérivables sur leur ensemble de définition.

- La fonction $\sqrt{u}$ est continue si $u \geq 0$ et est dérivable si $u > 0$ (u étant une fonction).
- La somme ou le produit de fonctions continues (respectivement dérivables) sur un intervalle I, est continue (respectivement dérivable) sur I.
- Si f et g sont 2 fonctions continues (respectivement dérivables) sur un intervalle I et si $g(x) \neq 0$ sur I, alors le quotient $\frac{f}{g}$ est continue (respectivement dérivable) sur I.
- La composée de deux fonctions continues sur leur ensemble de définition est continue sur son ensemble de définition.
- Si f est dérivable sur un intervalle I et si g est dérivable sur un intervalle contenant $f(I)$, alors gof est dérivable sur I.

Remarques :

Pour étudier la continuité (respectivement la dérivabilité) d'une fonction définie par intervalles (par exemple

$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in]-\infty; a] \\ g(x) \text{ si } x \in [a; +\infty[\end{cases}$) on applique les théorèmes généraux de la continuité (respectivement de la dérivabilité), sur les intervalles ouverts $]-\infty\,; a[$ et $]a; +\infty[$; ensuite au point a, on applique le théorème de la continuité (respectivement les théorèmes de la dérivabilité) en un point.

<u>Prolongement par continuité</u>

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 et D_f l'ensemble de définition de f.

Si $x_0 \notin D_f$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ (L étant un nombre réel) alors f admet un prolongement par continuité en x_0 et ce prolongement est définie par la fonction g, $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in D_f \\ L \text{ si } x = x_0 \end{cases}$.

<u>Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone</u>

Soit a et b des nombres réels ou + ∞ ou - ∞. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors le tableau suivant donne *f(I)*, l'image de I par f.

I	***f(I)***	
	f est strictement croissante	f est strictement décroissante
[a ; b]	$[f(a)\,;f(b)]$	$[f(b)\,;f(a)]$
[a ; b[	$[f(a)\,;\lim\limits_{x \to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x \to b} f(x)\,;f(a)]$

]a ; b]	$]\lim_{x\to a} f(x)\ ; f(b)]$	$[f(b)\ ; \lim_{x\to a} f(x)[$
]a ; b[	$]\lim_{x\to a} f(x)\ ; \lim_{x\to b} f(x)[$	$]\lim_{x\to b} f(x)\ ; \lim_{x\to a} f(x)[$

Conséquence du Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et si $f(a)f(b) \leq 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α appartenant à $[a\ ;\ b]$.

Bijection

- **Théorème 1:** Si f est continue et strictement croissante (ou strictement décroissante) sur un intervalle I, alors f est une bijection de I vers $f(I)$.
- **Théorème 2 :**

f est une bijection d'un intervalle I vers $f(I)$ ssi $\forall\ y \in f(I),\ \exists\ !\ x \in I,\ y = f(x)$.

- **Théorème 3 :** Si f est continue et strictement croissante (ou strictement décroissante) sur un intervalle I, alors f est une bijection de I vers $f(I)$; de plus si un nombre λ (en particulier 0) appartient à $f(I)$ alors l'équation $f(x) = \lambda$ (en particulier $f(x) = 0$) admet une unique solution $\alpha \in I$.
- **Théorème 4 :** Si f est continue et strictement croissante (ou strictement décroissante) sur $[a\ ;\ b]$ et si $f(a)f(b) \leq 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $[a\ ;\ b]$.
- **Théorème 5 :** Si f est une bijection sur I, alors elle admet une bijection réciproque f^{-1}, définie sur $f(\ I\ )$, continue sur $f(\ I\ )$ et qui varie dans le même sens que f.
- **Théorème 6 :** Si f est une bijection
  - $y = f(x)$ ssi $x = f^{-1}(y)$.

- $(fof^{-1})(y) = y$ et $(f^{-1}of)(x) = x$.
- Dans un repère orthonormal C_f et $C_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Fonctions dérivées

Soit *u, v et f* des fonctions dérivables, *k, a et b* des constantes, $r \in \mathbb{Q}$-{0 ; 1}.

f(x)	K	x	x^r	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$sinx$	$cosx$	$tanx$
f'(x)	0	1	rx^{r-1}	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$cosx$	$-sinx$	$\frac{1}{cos^2x}$

Fonction	u + v	ku	uv	$\frac{k}{v}$	$\frac{u}{v}$	u^r
Dérivée	u' + v'	ku'	u'v+v'u	$\frac{-k}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$ru'u^{r-1}$

$\frac{1}{u^r}$	$\sqrt{u}$	$sinu$	$cosu$	$tanu$	vou
$\frac{-ru'}{u^{r+1}}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u'cosu$	$-u'sinu$	$\frac{u'}{cos^2 x}$	u'(v'ou)

Dérivée de la réciproque d'une bijection

- **Théorème :** Soit *f* une bijection d'un intervalle I vers *f(I)*. Si *f* est dérivable et de dérivée non nulle sur I alors f^{-1} est dérivable sur *f(I)* et $[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]} = \frac{1}{f'(x)}$.

(car $f^{-1}(y) = x$).

- Remarques :

- Pour montrer que f^{-1} est dérivable sur un intervalle J, on détermine l'intervalle I tel que J = $f(I)$, puis on montre que f est dérivable sur I et de dérivée non nulle sur I.
- Pour montrer que f^{-1} est dérivable en un point y_0, on

détermine le réel x_0 tel que $y_0 = f(x_0)$, puis on montre que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$.

Dans ce cas $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x0)}$.

*

Inégalité des accroissements finis

- **Théorème :** Soit f une fonction dérivable sur un

intervalle I. S'il existe un nombre réel k tel que $|f'(x)| \leq k$ sur I, alors pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I,

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$.

1.2. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice1

Soit les fonctions f, g, h, i et j définies par

$f(x) = -3x^3+2x+1$; $g(x) = \frac{x-1}{2-x}$; $h(x) = \frac{2x^2-x-6}{x-1}$;

$i(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$; $j(x) = x - 2\sqrt{x-1}$.

1. Pour chacune de ces fonctions, déterminer l'ensemble de définition, les limites aux bornes de l'ensemble de définition et en déduire les éventuelles asymptotes.
2. Montrer que la droite (d) d'équation $y = 2x+1$ est une asymptote oblique à C_h la courbe de h.
3. Etudier les branches infinies de C_i à $-\infty$ et de C_j à $+\infty$.

Exercice 2

Déterminer la limite de f en a dans les cas suivants