

Chapitre 3

Dérivation des fonctions

1/ Généralités

a) Limite en 0

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 et $L \in \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers 0 si on peut rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut pour x suffisamment proche de zéro. On note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0} xx^2 = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} xx + 1 = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} x\sqrt{x} + x - 2 = -2...$

Déterminer la limite en 0 de $\frac{x^2 - 2x}{3x}$.

Pour tout $x \neq 0$, $\frac{x^2 - 2x}{3x} = \frac{x - 2}{3}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{3x} = -\frac{2}{3}$.

b) Nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$.
On appelle taux de variation de f entre a et h le réel $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
On dit que f est dérivable en a si, lorsque h tend vers 0, le taux de variation de f entre a et h tend vers un réel L autrement dit si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$.
Ce réel L est appelé nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

Exemple : Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en 2 et calculer $f'(2)$.

Démontrer que la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Pour tout $h \neq 0$, $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$

Ainsi $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 4$.

f est donc dérivable en 2 et $f'(2) = 4$.

Pour tout $h \neq 0$, $\frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$.

Or, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ n'a pas de limite finie lorsque h tend vers 0 donc g n'est pas dérivable en 0.

c) Interprétation graphique

Propriété

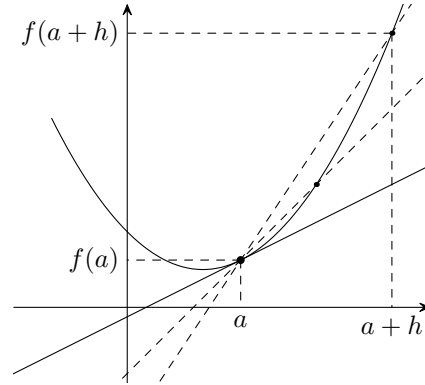
Soit f une fonction définie sur I et C_f sa représentation graphique dans un repère. Soit $a \in I$.

Si f est dérivable en a alors $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point $A(a; f(a))$. L'équation de cette tangente est alors : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Illustration : Soit $A(a; f(a)) \in C_f$.

Soit $h \neq 0$ et $M(a + h; f(a + h)) \in C_f$.

Le quotient $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ représente le coefficient directeur de la droite (AM) . Lorsque h tend vers 0, M se rapproche de A et la droite (AM) tend à se confondre avec la tangente à C_f en A .



Démonstration

Soit T la tangente à la courbe au point A . Son coefficient directeur est $f'(a)$ donc l'équation réduite de T est de la forme $y = f'(a)x + b$.

$A \in T$ donc $f(a) = f'(a)a + b$ donc $b = f(a) - af'(a)$.

L'équation de T est donc $y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$ soit $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

d) Approximation affine

Propriété

Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $a \in I$.

– Il existe une fonction φ telle que pour tout réel h avec $a + h \in I$:

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} h\varphi(h) = 0$$

– La fonction $h \mapsto f(a) + hf'(a)$ est une approximation affine de f pour h proche de 0.

Démonstration

Pour $h \neq 0$, on pose $\varphi(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a)$.

f est dérivable en a donc lorsque h tend vers 0, $\varphi(h)$ tend vers $f'(a) - f'(a) = 0$.

De plus, $h\varphi(h) = f(a + h) - f(a) - hf'(a)$ soit $f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h)$

2/ Calculs de dérivées

a) Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

– Si, pour tout x de I , f est dérivable en x , on dit que f est dérivable sur I .

– La fonction définie sur I par $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f . Cette fonction est notée f' .

b) Dérivées usuelles

Fonctions constantes

Propriété

Si f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = k$
 alors f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x : $f'(x) = 0$.

Démonstration

Pour tout réel a et $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{k - k}{h} = 0$$

f est donc dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Fonctions affines

Propriété

Si f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = mx + p$
 alors f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x : $f'(x) = m$.

Démonstration

Pour tout réel a et $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{m(a+h) + p - ma - p}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

f est donc dérivable en a et $f'(a) = m$.

Fonction carré

Propriété

Si f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2$
 alors f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x : $f'(x) = 2x$.

Démonstration

Pour tout réel a et $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

De plus, $2a + h$ tend vers $2a$ lorsque h tend vers 0. f est donc dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

Fonctions puissances

Propriété

Soit n un entier tel que $n \geq 1$.

Si f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^n$
 alors f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x : $f'(x) = nx^{n-1}$.

Résultat admis.

Fonction inverse

Propriété

Si f est la fonction définie sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$
 alors f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \neq 0$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Démonstration

Pour tout réel $a \neq 0$ et $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{a - (a+h)}{ha(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

Or $\frac{-1}{a(a+h)}$ tend vers $-\frac{1}{a^2}$ lorsque h tend vers 0.

f est donc dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

Fonction racine carrée

Propriété

Si f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$
 alors f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration

Pour tout réel $a > 0$ et $h \neq 0$ tel que $a+h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \end{aligned}$$

Or, lorsque h tend vers 0, $\frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$ tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$

f est donc dérivable en a et $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

Fonctions trigonométriques

Propriété

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur \mathbb{R} et pour tout réel x :

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Résultat admis.

c) Opérations sur les fonctions et dérivées

u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel.

Propriété

La fonction $u+v$ est dérivable sur I et

$$(u+v)' = u' + v'.$$

La fonction λu est dérivable sur I et

$$(\lambda u)' = \lambda u'.$$

Démonstration

Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$:

$$\begin{aligned} \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} &= \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \end{aligned}$$

dont la limite est $u'(a) + v'(a)$ lorsque h tend vers 0.

$$\frac{(\lambda u)(a+h) - (\lambda u)(a)}{h} = \frac{\lambda u(a+h) - \lambda u(a)}{h} = \lambda \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

dont la limite est $\lambda u'(a)$ lorsque h tend vers 0.

Exemple : Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{3x} - 5\sqrt{x} + 2$

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ car elle est la somme de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$

et, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 3 \times 2x + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ainsi :

$$f'(x) = 6x - \frac{1}{3x^2} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

Propriété

La fonction uv est dérivable sur I et

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

La fonction u^2 est dérivable sur I et

$$(u^2)' = 2uu'.$$

Démonstration

Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$:

$$\begin{aligned} \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \underbrace{\frac{u(a+h) - u(a)}{h}}_{\text{tend vers } u'(a)} \times v(a+h) + \underbrace{\frac{v(a+h) - v(a)}{h}}_{\text{tend vers } v'(a)} \times u(a) \end{aligned}$$

dont la limite est $u'(a)v(a) + v'(a)u(a)$ lorsque h tend vers 0.

Ainsi uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.

Exemple : Calculer la dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 + 1)(x^5 + 2)$

$f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = x^5 + 2$.

f est donc dérivable sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et

$$f'(x) = 2x(x^5 + 2) + 5x^4(x^2 + 1)$$

Propriété

Si v ne s'annule pas sur I

La fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Démonstration

Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$:

$$\frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{\frac{v(a) - v(a+h)}{v(a)v(a+h)}}{h} = -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a)v(a+h)}$$

dont la limite est $-v'(a) \times \frac{1}{(v(a))^2}$ lorsque h tend vers 0.

Ainsi $\frac{1}{v}$ est dérivable et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

De plus

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]2 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{2x-4}$ et de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{3x+5}{2x^2+1}$

Pour tout $x \in]2 ; +\infty[$, $f(x) = \lambda \times \frac{1}{u(x)}$ avec $\lambda = 3$ et $u(x) = 2x - 4$.

f est donc dérivable sur $]2 ; +\infty[$ et $f(x) = 3 \times \left(-\frac{2}{(2x-4)^2}\right) = \frac{-6}{(2x-4)^2}$.

Pour tout réel x , $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 3x + 5$ et $v(x) = 2x^2 + 1$.

g est donc dérivable sur \mathbb{R} et

$$g(x) = \frac{3(2x^2+1) - 4x(3x+5)}{(2x^2+1)^2} = \frac{-6x^2 - 20x + 3}{(2x^2+1)^2}$$

Propriété

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout x de I , $u(x) \in J$.

La fonction $f \circ u$ est dérivable et, pour tout réel x de I :

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

Exemple : Calculer la dérivée de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Pour tout réel x , $g(x) = f \circ u(x)$ avec $u(x) = 2x + \frac{\pi}{3}$ et $f(x) = \cos(x)$.

g est donc dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

3/ Applications de la dérivation

a) Dérivée et variations

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$.
- f est constante sur I si et seulement si pour tout x de I , $f'(x) = 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$.

Propriété admise.

Remarques : On utilise souvent les résultats suivants.

- Si, pour tout x de I , $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I .
- Si, pour tout x de I , $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I .

Exemple : Étudier les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + 2x$.

f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} .

b) Extremum local

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

On dit que $f(x_0)$ est un maximum local (respectivement minimum local) de f si l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geq f(x_0)$).

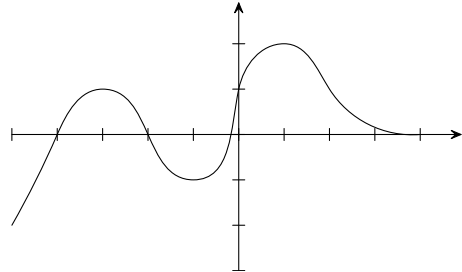
Exemple : Une fonction est représentée ci-contre.

Son minimum est -2

Son maximum est 2 .

-1 et -2 sont des minimums locaux

1 et 2 sont des maximums locaux.

**Propriété**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

Si $f(x_0)$ est un extremum local de f alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque : La réciproque de cette propriété est fausse.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

Si f' s'annule en changeant de signe en x_0 alors $f(x_0)$ est un extremum local de f .