Chapitre2 :**GENERALITES SUR LES FONCTIONS**

<u>Exercice 1</u> : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

1. Variation de *f* et Tableau de variation ?

⁎ $D_f = \mathbb{R}$.

⁎ f étant une fonction polynôme, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f\,'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f\,'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f			4				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

⁎ $f(0) = 4$; $f(2) = 0$.

⁎ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$

⁎ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty.$

2.

a) *f* admet une bijection réciproque ?

f étant continue et strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$, donc f est une bijection de $[2\,;+\infty[$ vers $f([2\,;+\infty[,) = [0\,;+\infty[$;
par conséquent f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $[0\,;+\infty[$.

b) Dérivabilité de f^{-1} en 0 ?

$0 = f(2)$; f est dérivable en 2, mais $f\,'(2) = 0$ donc f^{-1} n'est pas dérivable en 0.

3. $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $[2 ; +\infty[$?

f est une bijection de $[2 ; +\infty[$ vers $[0 ; +\infty[$; de plus 1 appartient à $[0 ; +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α appartenant à $[2 ; +\infty[$.

4. Points d'intersection avec

- **l'axe des ordonnées ?**

$f(0) = 4$ donc on a le point A(0 ; 4)

- **l'axe des abscisses ?**

$f(x) = 0$ ssi $x^3-3x^2+4 = 0$; l'équation étant de degré 3, cherchons une racine évidente de $f(x)$.

$f(-1) = 0$ donc $f(x) = (x+1)g(x)$;

déterminons $g(x)$ avec la méthode de Horner :

	1	-3	0	4
(-1)		-1	4	-4
	1	-4	4	0

$f(x) = (x+1)(x^2-4x+4)$

$f(x) = 0$

$x = -1$ ou $x^2- 4x+4 = 0$

$x = -1$ ou $x = 2$;

donc on a les points B(-1 ; 0) et C(2 ;0).

5. Equation de la tangente en 1 ?

(T) : $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$; $x_0 = 1$ donc

(T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Or $f'(1) = -3$ et $f(1) = 2$ donc

(T) : $y = -3x + 5$.

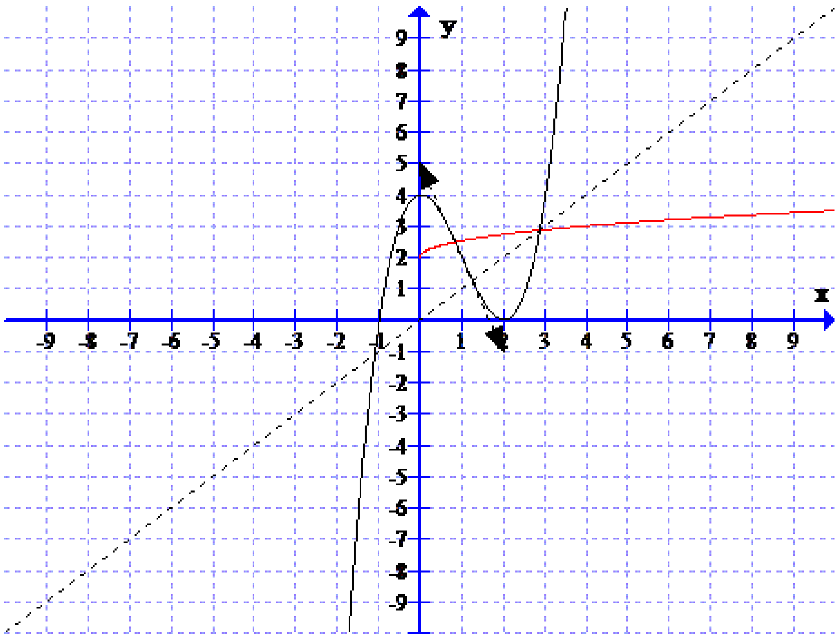
6. Tracé de C_f, de (T) et de $C_{f^{-1}}$?

Soit (d) : $y = x$

* (C) la courbe de la bijection passe par les points A(2 ; 0), son symétrique $C_{f^{-1}}$ passera par A'(0 ; 2).

* (C) admet en A une demi-tangente horizontale, son symétrique $C_{f^{-1}}$ admet en A' une demi- tangente verticale.

* f étant croissante sur [2 ; +∞[, f^{-1} est aussi décroissante sur $f([2\,;+\infty[) = [0\,;+\infty[$; d'où le tracé de $C_{f^{-1}}$.



<u>Légende</u> : — Tracé de C_f

— Tracé de $C_{f^{-1}}$

7. Résolution graphique de l'équation *f(x)* = m ?

-Si $m \in]-\infty;0[$, on a une solution.

-Si m = 0, on a deux solutions.

-Si m $\in$]0 ; 4[, on a trois solutions.
-Si m = 4, on a deux solutions.
-Si m $\in$]4 ; +∞[, on a une solution.

<u>Exercice 2</u> : $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ **.**

1. D_f et a, b, c tels que $f(x) = ax+b+\frac{c}{1-x}$?

- $f(x)$ existe ssi x-1$\neq$0 ; D_f =]- ∞ ; 1[$\cup$]1 ; +∞[.
- $f(x) = ax+b+\frac{c}{1-x} = \frac{(ax+b)(1-x)+c}{1-x}$

$$= \frac{-ax^2+(a-b)x+b+c}{x-1} = \frac{x^2}{1-x} ;$$

par identification $\begin{cases} -a = 1 \\ a-b = 0 \\ b+c = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

d'où $f(x) = -x-1+\frac{1}{1-x}$.

(on pouvait obtenir ce résultat par la division euclidienne).

2. Asymptote oblique et position par rapport à C_f ?

- **Montrons que $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(-x-1)] = 0$?**

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(-x-1)] = \lim\limits_{x\to\infty\infty}\frac{1}{1-x} = 0$;

d'où (d) : y = $-x$-1 est une asymptote oblique à C_f.

- **Etudions le signe de $h(x) = f(x)-(-x-1)$?**

$h(x) = \frac{1}{1-x}$.

$h(x) > 0$ ssi 1-$x > 0$ ssi $x < 1$. Donc

- Sur]-∞;1[, h(x) > 0 d'où C_f au dessus de (d).
- Sur] 1; +∞[, h(x) < 0 d'où C_f en dessous de (d).

3.

- **Variation de f ?**

* f étant une fonction rationnelle, f est continue et dérivable sur D_f et $f'(x) = \frac{2x(1-x)-(-1)(x^2)}{(1-x)^2} = \frac{-x(x-2)}{(1-x)^2}$.

* $f'(x)$ a le même signe que son numérateur.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x$
$= +\infty.$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty.$

* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$ « $\frac{1}{0}$ » ?

signe du dénominateur :

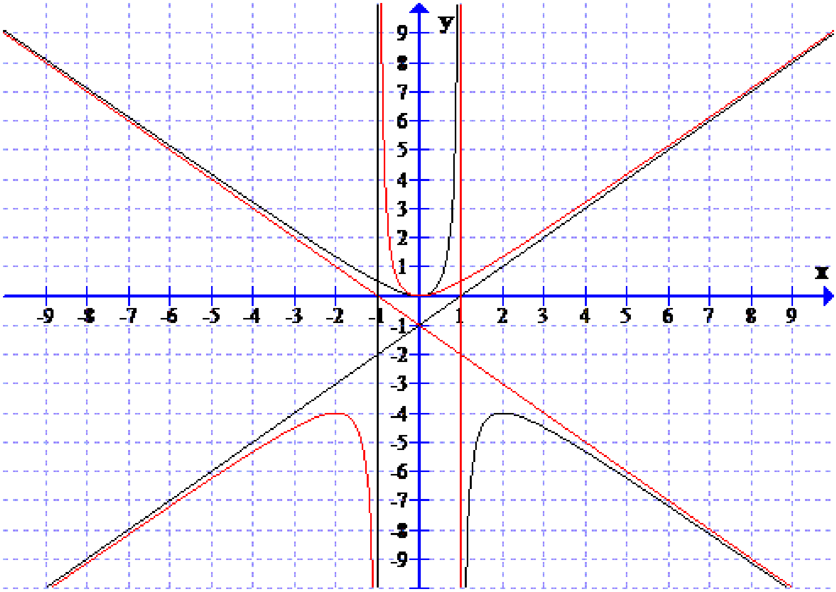
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$

* $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} (1-x) = 0^+$, par quotient $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

* $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} (1-x) = 0^-$ par quotient $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

d'où (Δ): $x = 1$ est une asymptote parallèle à l'axe $(y'y)$.

- Tracé de C_f ?



<u>Légende</u> : — Tracé de C_f

— Tracé de C_g

4. Point d'intersection des asymptotes centre de symétrie ?

Soit I ce point, ces coordonnées sont les solutions du système $\begin{cases} x = 1 \\ y = -x-1 \end{cases}$; d'où I(1 ; -2).

Montrons que $\forall x \in D_f$, $2a\text{-}x \in D_f$ et $f(2a\text{-}x) + f(x) = 2b$

C'est-à-dire $\forall x \in D_f$, $2\text{-}x \in D_f$ et $f(2\text{-}x) + f(x) = -4$?

- $x \in D_f$ ssi $x \neq 1$ ssi $-x \neq -1$ ssi $2\text{-}x \neq 1$ d'où $2a\text{-}x \in D_f$.
- $f(2\text{-}x) = \frac{(2-x)^2}{1-(2-x)} = \frac{4-4x+x^2}{-1+x}$

$= \frac{-4+4x-x^2}{1-x}$;

$f(2\text{-}x) + f(x) = \frac{-4+4x-x^2}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} = \frac{-4(1-x)}{1-x}$

$= -4$;

donc $f(2\text{-}x) + f(x) = -4$ d'où I est centre de symétrie de C_f.

5. Tracé de C_g ? $g(x) = \frac{x^2}{1+x}$;

$g(x) = \frac{(-x)^2}{1-(-x)} = f(-x)$;

d'où C_g est le symétrique de C_f par rapport à l'axe des ordonnées.

<u>Exercice 3</u> : $f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$; D = [-2 ; 2].

1.

- **Continuité de f en 0?**

* $f(0) = 0$.

* $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4-(4-x^2)}{x(2+\sqrt{4-x^2})}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{(2+\sqrt{4-x^2})} = 0.$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

- **Dérivabilité de f en 0 ?**

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4-(4-x^2)}{x^2(2+\sqrt{4-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(2+\sqrt{4-x^2})} = \frac{1}{4}.$$

$\frac{1}{4}$ étant fini, f est dérivable en 0 et C_f admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{4}$.

- **Continuité de f en 2?**

* $f(2) = \frac{2-\sqrt{4-4}}{2} = 1$.

* $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} = 1$.

$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ donc f est continue en 2.

- **Dérivabilité de *f* en 2 ?**

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{4-x^2}-x}{x(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x(x-2)} - \frac{-\sqrt{4-x^2}}{x(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{x(x-2)} - \frac{-(x-2)(x+2)}{x(x-2)\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{-1}{2} + (+\infty) = +\infty\ ;$$

donc *f* n'est pas dérivable en 2 et C_f admet au point d'abscisse 2 une demi-tangente verticale.

<u>Remarque</u> : *f* étant définie sur [-2 ; 2], c'est la continuité et la dérivabilité à gauche de 2 qu'on a étudiées.

2.

- **Parité de *f* ?**

- $\forall\, x \in D$, montrons que - $x \in D$?

$x \in D$ ssi $-2 \leq x \leq 2$ ssi $-2 \leq -x \leq 2$ ssi -$x \in D$.

- $f(-x) = \frac{2-\sqrt{4-(-x)^2}}{(-x)} = -\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$;

f(-x) = - *f(x)*, donc *f* est impaire.

Par conséquent on peut l'étudier sur D∩[0 ; +∞[= [0 ; 2] et compléter le tracé de C_f sur [-2 ; 0] par symétrie par rapport à l'origine du repère.

- **Variation de *f* sur[0 ; 2]**

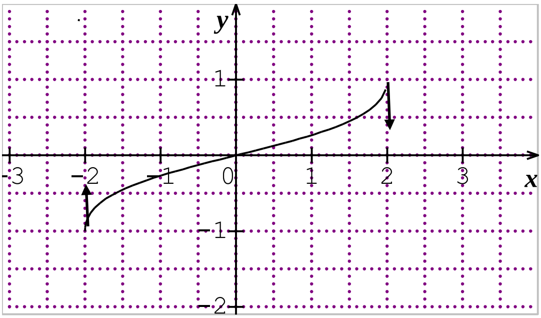
f est le quotient de fonctions continues et dérivables sur]0 ; 2[; la fonction $x\to x^2$ étant non nulle sur]0 ; 2[, *f* est continue et dérivable sur]0 ; 2[et

$$f\,'(x) = \frac{\frac{-(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}(x)-(1)(2-\sqrt{4-x^2}\,)}{x^2} = \frac{-2\sqrt{4-x^2}+4}{x^2\sqrt{4-x^2}}.$$

$f\,'(x) \geq 0$ ssi $-2\sqrt{4-x^2}+4 \geq 0$ ssi $\sqrt{4-x^2} \leq 2$ ssi $4 - x^2 \leq 4$ ssi $x^2 \geq 0$; toujours vrai.

x	0 2
$f\,'(x)$	+ |
f	0 ↗ 1

3. **Tracé de C_f sur [-2 ; 2]**



f étant impaire, la portion de courbe sur [-2 ; 0] est obtenue par symétrie par rapport à l'origine O du repère.

<u>Exercice 4</u> : ***f(x) = cos4x + 2sin2x***

1.

➢ **Domaine d'étude ?**

$D_f = \mathbb{R}$. Les fonctions $x \rightarrow cos4x$ et $x \rightarrow 2sin2x$ étant périodiques de périodes respectives $\frac{\pi}{2}$ *et* π , montrons que π (qui est un multiple de $\frac{\pi}{2}$) est la période de *f*.

$*$ $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x + \pi \in \mathbb{R}$.

$*$ $f(x+\pi) = cos4(x+\pi) + 2sin2(x+\pi)$

$= cos(4x+4\pi) + 2sin(2x+2\pi)$

$= cos4x + 2sin2x = f(x)$.

Donc f est périodique de période π et par conséquent on peut l'étudier sur De = $\mathbb{R} \cap [0 ; \pi] = [0 ; \pi]$.

- **Dérivée de *f* ?**

f étant une somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f\,'(x) = -4\sin 4x + 4\cos 2x = -4(2\sin 2x\cos 2x) + 4\cos 2x$

$\qquad = 4(\cos 2x)(1-2\sin 2x).$

2.

- **Solution de l'équation *f '(x)* = 0 ?**

$f\,'(x) = 0$ ssi $\cos 2x = 0$ ou $\sin 2x = \frac{1}{2}$

$\cos 2x = \cos\frac{\pi}{2}$ ou $\sin 2x = \sin\frac{\pi}{6}$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

ssi $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$S_{[0;\,\pi]} = \{ \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} ; \frac{\pi}{12} ; \frac{5\pi}{12} \}.$

- **Variation de *f* sur [0 ; π] ?**

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f\,'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
f	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3	↗	1

$= 1$; $f(\frac{\pi}{12}) = \frac{3}{2}$; $f(\frac{\pi}{4}) = 1$; $f(\frac{5\pi}{12}) = \frac{3}{2}$; $f(\frac{3\pi}{4}) = -3$;

$f(\pi) = 1.$

3. $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie ?

- $\forall x \in \mathbb{R}$, montrons que $2a - x \in \mathbb{R}$?

$2a - x = \frac{\pi}{2} - x$; $x \in \mathbb{R}$ donc $\frac{\pi}{2} - x \in \mathbb{R}$.

- $f(2a-x) = f(\frac{\pi}{2} - x) = cos4(\frac{\pi}{2} - x) + 2sin2(\frac{\pi}{2} - x)$

$$= cos(2\pi\text{-}4x) + 2sin(\pi\text{-}2x) = cos(\text{-}4x) + 2sin2x$$

$$= cos4x + 2sin2x = f(x)\ ;$$

donc la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie de C_f.

4. **Tracé de C_f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$?**