Lineare Algebra I

Herbstsemester 2011

Inhaltsverzeichnis

0.1 Vorwort

Das Skript entstand als Mitschrift vom Kurs "Lineare Algebra 1" an der Universität Bern, doziert von Prof. Dr. George Metcalfe. Es erhebt weder einen Anspruch auf Vollständigkeit noch auf Erklärung bestimmter Abschnitte oder seiner Struktur.

Es ist deshalb auch eher als Hilfsmittel für den Kurs "Lineare Algebra 1" zu verstehen, und nicht primär zur Selbstschulung geeignet. Abschnitte von Beweisen, die mit *Aufgabe* beschriftet sind, wurden nicht in der Vorlesung gelöst und sind dementsprechend nicht verfügbar, sondern eher in Übungen zu erarbeiten.

0.1.1 Mitarbeit

Folgende Personen waren bei der Erstellung und Formung des Skriptes aktiv:

- Adrianus Kleemans, Mitschrift des Kurses
- Oliver Stapleton, korrekturlesen und eine ganze Menge an Korrekturen
- Nicole Bettschen, Bereitstellung ihres Skripts zum Abgleich
- Urs Zysset, Liste an Korrekturen
- Amaru Hashimi, Levyn Buerki und Lukas Etter, diverse Korrekturen

0.1.2 Lizenz

0.1.3 Organisatorisches

Empfohlene Bücher:

- Gerd Fischer: Lineare Algebra. Vieweg Studium, Wiesbaden 2005.
- Max Koecher: Lineare Algebra und analytische Geometrie. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1997.
- Michael Artin: Algebra. Birkhäuser, Basel 1998.

0.1.4 Themen

Lineare Algebra befasst sich mit linearen Gleichungen wie

$$x + 2y = 4 \tag{1}$$
$$x - y = 2 \tag{2}$$

Wichtige Konzepte: Matrizen, Determinanten, Vektorräume, Unterräume, Homomorphismen, lineare Abbildungen.

Kapitel 1

Reelle lineare Gleichungssysteme

Notation

Symbol	Bedeutung
$a \in A$	'a ist ein Element der Menge A'
$a \notin A$	'a nicht in A'
$\Phi := ...$	ϕ ist definiert als ...
$\{a : P(a)\}$	'Die Menge aller Objekte mit der Eigenschaft P'
$\{a \in A : P(a)\}$	'Die Menge aller Objekte in A mit der Eigenschaft P'
$\{\}$ oder $\emptyset$	'leere Menge'
$\Leftrightarrow$	'genau dann wenn'

1.1 Der reelle n-dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$

1.1.1 (n = 1)

Die 'Zahlengerade' $\mathbb{R}$ ist die Menge von reellen zahlen (in Analysis I). Sie umfasst folgende Teilmengen:

- natürliche Zahlen ($\mathbb{N}$)
- ganze Zahlen ($\mathbb{Z}$)
- rationale Zahlen (($\mathbb{Q}$))
- irrationale Zahlen

1.1.2 (n = 2)

Die 'Ebene' $\mathbb{R}^2$ besteht aus allen geordneten Paaren von reellen Zahlen, d.h.

$$\mathbb{R}^2 := \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \tag{1.1}$$

Nebenbemerkung Betrachten Sie die 'Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten'

$$\mathbb{R} := \{x : x \notin x\} \tag{1.2}$$

Dann gilt:

$$\mathbb{R} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbb{R} \notin \mathbb{R} \tag{1.3}$$

Ein Paradox! **Lösung:** Sei vorsichtig! (ZF oder ZFC Mengenlehre verwenden.)

Lineare Gleichungen Eine lineare Gleichung in $\mathbb{R}^2$:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \tag{1.4}$$

x_1, x_2: Variablen - $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ entspricht der Menge (von Punkten oder Lösungen).

$$L := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b\} \tag{1.5}$$

Falls $a_1 = a_2 = 0$, haben wir $L = \mathbb{R}^2$ für $b = 0$ und $L = \emptyset$ für $b \neq 0$. Andernfalls entspricht die lineare Gleichung einer Geraden in $\mathbb{R}^2$.

Drei Beispiele

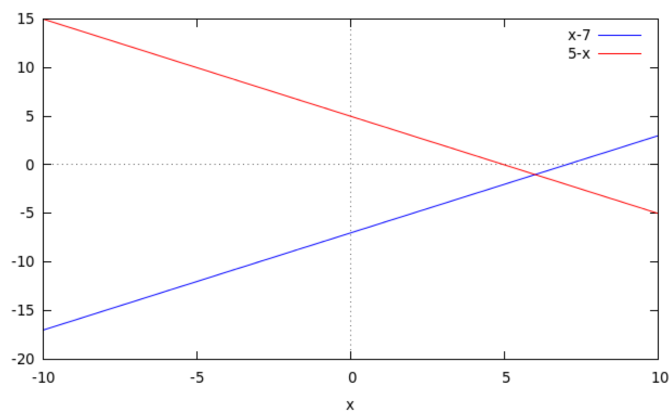

Abbildung 1.1: Aufgabe (i)

(i)

$$x - y = 7 \quad (1) \tag{1.6}$$

$$x + y = 5 \quad (2) \tag{1.7}$$

Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 12 \quad (3) = (1) + (2) \\ x &= 6 \quad (4) = (3) : (2) \\ y &= -1 \quad (5) = (2) - (4) \end{aligned}\right\} \text{Das System hat } \textbf{genau eine Lösung}. \tag{1.8}$$

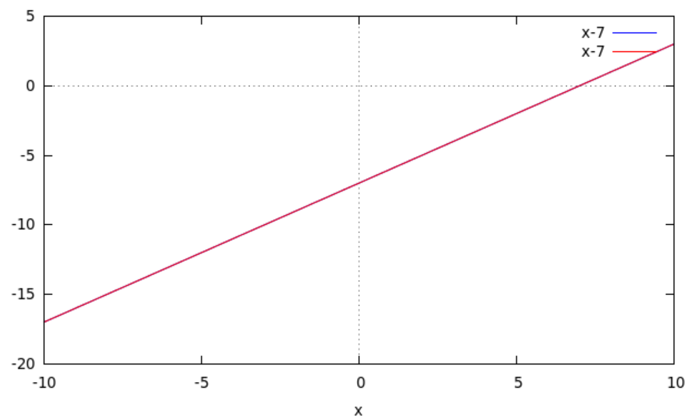

Abbildung 1.2: Aufgabe (ii)

(ii)

$$x - y = 7 \quad ① \tag{1.9}$$
$$2x - 2y = 14 \quad ② \tag{1.10}$$

$(0, 7)$ ist eine Lösung, auch $(8, 1)$ und $(-2, -9)$. Das System hat **unendlich viele Lösungen:**

$$L = \{\lambda, \lambda - 7 : \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{1.11}$$

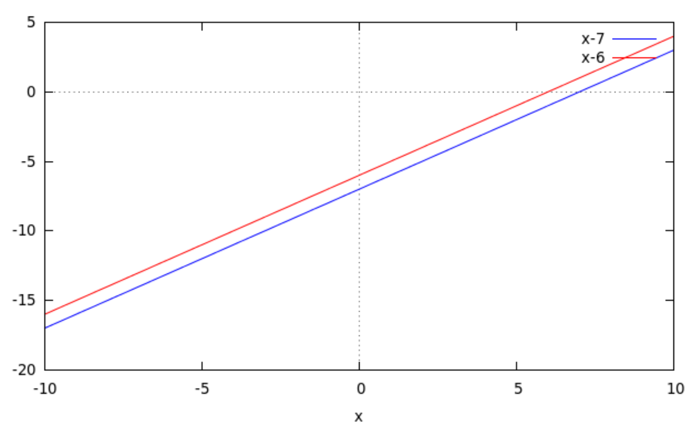

Abbildung 1.3: Aufgabe (iii)

(iii)

$$x - y = 7 \quad ① \tag{1.12}$$
$$2x - 2y = 12 \quad ② \tag{1.13}$$

2 parallele Linien, das System hat **keine Lösung**.

1.1.3 (n = 3)

Der 'Raum' $\mathbb{R}^3$ besteht aus allen geordneten Tripeln von reellen Zahlen

$$\mathbb{R}^3 := \{(a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \tag{1.14}$$

Eine lineare Gleichung in $\mathbb{R}^3$

$$a_1 x_a + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \tag{1.15}$$

x_1, x_2, x_3: Variablen - $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$ entspricht der Menge

$$L := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0\} \tag{1.16}$$

Falls $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, ist $L = \mathbb{R}^2$ für $b = 0$ und $L = \emptyset$ für $b \neq 0$. Andernfalls entspricht die lineare Gleichung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$.

Beispiel Betrachten wir für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$x_1 + x_3 = 0 \quad ① \tag{1.17}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad ② \tag{1.18}$$

$$2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \mu \quad ③ \tag{1.19}$$

Daraus wird:

$$x_2 = 1 \quad ④ = ② - ① \tag{1.20}$$

$$-x_2 + (\lambda - 2)x_3 = \mu \quad ⑤ = ② - 2 \cdot ① \tag{1.21}$$

$$(\lambda - 2)x_3 = 1 + \mu \quad ⑥ = ④ + ⑤ \tag{1.22}$$

Falls $\lambda = 2$, haben wir keine Lösung für $\lambda \neq -1$ und **unendlich viele** für $\lambda = -1$.

$$L = \{(\alpha, 1, -\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} \tag{1.23}$$

Andernfalls ($\lambda \neq 2$) haben wir **genau eine Lösung**:

$$x_1 = \frac{1 + \mu}{2 - \lambda} \tag{1.24}$$

$$x_2 = 1 \tag{1.25}$$

$$x_3 = \frac{1 + \mu}{\lambda - 2} \tag{1.26}$$

1.1.4 (n beliebig)

Wir betrachten geordnete n-Tupel von reellen Zahlen

$$a = (a_1, ..., a_n) : a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} \tag{1.27}$$

'geordnet' bedeutet $(a_1, ..., a_n) = (a'_1, ..., a'_n) \Rightarrow a_1 = a'_1, ..., a_n = a'_n$. Die Menge aller geordneten n-Tupel von reellen Zahlen

$$\mathbb{R}^n := \{(a_1, ..., a_n) : a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}\} \tag{1.28}$$

heisst der **reelle Standardraum der Dimension n**.

Bemerkung Wir können mit n-Tupeln rechnen:

$$(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) := (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n) \tag{1.29}$$

$$\lambda \cdot (a_1, ..., a_n) := (\lambda a_1, ..., \lambda a_n), \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.30}$$

$\mathbb{R}^n$ mit den Operationen **Addition und Multiplikation** mit einer Zahl λ ist ein wichtiges Beispiel eines Vektorraums.

Lineare Gleichungen Seien $a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{R}$ und $x_1, ..., x_n$ Variablen. Dann heisst

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1.31}$$

eine **lineare Gleichung** in den Variablen $x_1, ..., x_n$. Falls auch $b = 0$, heisst die Gleichung **homogen**.

Ein **lineares Gleichungssystem** besteht aus m linearen Gleichungen in n Variablen.

$$a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n = b_i \tag{1.32}$$

$$\vdots \tag{1.33}$$

$$a_{mi}x_i + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \tag{1.34}$$

Das System heisst homogen, falls $b_1 = \cdots = b_m = 0$.
Die **Lösungsmenge** des Systems besteht aus allen n-Tupeln $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, die alle Gleichungen erfüllen.
Wie charakterisiert man die **Lösung** eines solchen Sysems? Man kann ein lineares Gleichungssystem mit Hilfe von Matrizen darstellen:

$$Ax = b \tag{1.35}$$

wobei

$$A := \begin{pmatrix} a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

$$b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

1.2 Matrizen

Seien m, n positive natürliche Zahlen

$$(m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}) \tag{1.39}$$

Eine $m \times n$ **Matrix über** $\mathbb{R}$ mit m Zeilen und n Spalten besteht aus $m \cdot n$ reellen Zahlen $a_{ij}(r = 1 \cdots m, j = 1 \cdots n)$, geschrieben

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \pi & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.41}$$

Die Elemente a_{ij} nennt man **Komponenten** der Matrix $A = (a_{ij})$. Zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ sind **gleich**, geschrieben $A = B$, wenn A und B beide $m \times n$-Matrizen sind und $a_{ij} = b_{ij}$ für alle $i = 1 \cdots m, j = 1 \cdots n$ gilt.

1.2.1 Rechnen mit Matrizen

Wir können mit $m \times n$-Matrizen rechnen.
Seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \tag{1.42}$$

(d.h. $A + B$ ist definiert als $m \times n$-Matrix (c_ij) wobei $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ für $i = 1 \cdots m, j = 1 \cdots n$).

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij}) \tag{1.43}$$

Die Menge $Mat(m, n; \mathbb{R})$ aller $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$ mit **Addition** und **Multiplikation mit einer Zahl** ist noch ein wichtiges Beispiel eines Vektorraumes.

1.2.2 Umformung von Gleichungen zu Matrizen

Gleichungen $\to$ Matrizen

$$2x_1 + 3x_2 = 5 \tag{1.44}$$
$$x_1 - 2x_2 = 0 \tag{1.45}$$

wird zu

$$Ax = b \tag{1.46}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

Anmerkung Wir können $\mathbb{R}^n$ mit $Mat(n, 1; \mathbb{R})$ **identifizieren**, und die Elemente von $\mathbb{R}^n$ **Spaltenvektoren**. Analog heissen die Elemente von $Mat(1, n; \mathbb{R})$ **Zeilenvektoren**. Wir identifizieren auch eine 1×1-Matrix $(a)(a \in \mathbb{R})$ mit a.

Wir definieren nun auch

- die $m \times n$ **Nullmatrix** $0^{m \cdot n}$ (oder 0), deren Elemente alle 0 sind.
- das **Negative** von $A = (a_{ij}) : A := (-a_{ij})$.

Lemma 1.2.1 *Seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in Mat(m, n; \mathbb{R})$. Dann gilt:*

(i) $A + B = B + A$ *(kommutativ)*

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(assoziativ)*

(iii) $A + 0 = A = 0 + A$ *(neutrales Element)*

(iv) $A + (-A) = 0 = (-A) + A$ *(inverses Element)*

Beweis Wir betrachten nur (ii). $(i), (iii), (iv)$ sind sehr ähnlich.
Seien

$$L = (l_{ij}) := (A + B) + C \tag{1.48}$$
$$R = (r_{ij}) := A + (B + C) \tag{1.49}$$

Zu zeigen: $L = R$ für $i = 1...m$, $j = 1...n$

$$l_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} \text{ (Definition der Addition)} \tag{1.50}$$
$$= a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) \text{ (rechnen in } \mathbb{R}) \tag{1.51}$$
$$= r_{ij} \text{ (per definitionem)} \tag{1.52}$$

$\square$

1.2.3 Matrixmultiplikation

Wir könnten Matrixmultiplikation durch

$$A \cdot B := (a_{ij} \cdot b_{ij}) \tag{1.53}$$

definieren, *aber* es gibt eine (kompliziertere!) Definition, welche nützlicher ist.

Beispiel: Bevölkerungszahlen.
Manchester hat 500'000 Einwohner, Liverpool 300'000. Nehmen wir nun an, dass jedes Jahr 5% der Einwohner nach Liverpool umziehen, und 10% der Einwohner Liverpools nach Manchester[1].

Nach einem Jahr:

- Manchester: $(0.95 \cdot 500'000) + (0.1 \cdot 300'000) = 505'000$ Einwohner
- Liverpool: $(0.9 \cdot 300'000) + (0.05 \cdot 500'000) = 295'000$ Einwohner

Mit Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500'000 \\ 300'000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 505'000 \\ 295'000 \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

1.2.4 Komplexere Matrixmultiplikation

Zuerst betrachten wir

- einen Zeilenvektor $a = (a_i, ..., a_n)$
- einen Spaltenvektor $b = \begin{pmatrix} b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

und definieren

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + ... + a_n b_n \tag{1.55}$$

Beispiel

$$(1 \;\; 2 \;\; -1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1)(3) + (2)(-1) + (-1)(-2) = 3 - 2 + 2 = 3 \tag{1.56}$$

Seien nun

$$A \in Mat(\mathbf{m}, n, \mathbb{R}) \tag{1.57}$$

$$B \in Mat(n, \mathbf{p}; \mathbb{R}) \tag{1.58}$$

[1] Zur Vereinfachung rechnen wir ohne Geburten oder Todesfälle

Wir definieren $A \cdot B := C$ wobei $C = (c_{ij}) \in Mat(m, p; \mathbb{R})$ und

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \Rightarrow \text{(Zeilenvektor i von A)} \cdot \text{Spaltenvektor j von B} \tag{1.59}$$

Wir schreiben oft AB statt $A \cdot B$.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in Mat(2, 3; \mathbb{R}) \tag{1.60}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in Mat(3, 2; \mathbb{R}) \tag{1.61}$$

$$AB := C = c_{ij} \in Mat(2, 2; \mathbb{R}) \tag{1.62}$$

$$c_{11} := (121) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)(-1) + (2)(1) + (1)(1) = 2 \tag{1.63}$$

$$c_{12} := (121) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \tag{1.64}$$

$$c_{21} := (0 - 3 - 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 \tag{1.65}$$

$$c_{22} := (1 - 3 - 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \tag{1.66}$$

$$AB = C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \tag{1.67}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & .8 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \tag{1.68}$$

Anmerkung: $AB \neq BA$

1.2.5 Quadratische Matrizen

Matrizen in $Mat(n,n;\mathbb{R})$ heissen **quadratisch**. Besondere Beispiele sind die $x \times n$ **Einheitsmatrizen**:

$$E^{(n)} := (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{1.69}$$

wobei

$$d_{ij} := \begin{cases} 1 \text{ falls } i = j \\ 0 \text{ andernfalls} \end{cases} \tag{1.70}$$

Für eine quadratische Matrix $A \in Mat(n,n;\mathbb{R})$ wird auch die **Matrixpotenz** A^λ wie folgt induktiv definiert:

$$A^0 := E \tag{1.71}$$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A, k \in (\mathbb{N}) \tag{1.72}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.73}$$

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.74}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.75}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \tag{1.76}$$

Lemma 1.2.2 *(i) $(AB)C = A(BC)$: Assoziativität für*

$$A \in Mat(m,n;\mathbb{R}) \tag{1.77}$$

$$B \in Mat(n,p;\mathbb{R}) \tag{1.78}$$

$$C \in Mat(p,q;\mathbb{R}) \tag{1.79}$$

(ii) $A(B+C) = AB + AC$ für

$$A \in Mat(m,n;\mathbb{R}) \tag{1.80}$$

$$B, C \in Mat(n,p;\mathbb{R}) \tag{1.81}$$

(iii) $(A+B)C = AC + BC$ *für*

$$A, B \in Mat(m,n;\mathbb{R}) \tag{1.82}$$
$$C \in Mat(n,p;\mathbb{R}) \tag{1.83}$$

(iv) $AE^{(n)} = A$ *für* $A \in Mat(m,n;\mathbb{R})$
$E^{(m)}A = A$ *für* $A \in Mat(m,n;\mathbb{R})$

(v) $A^iA^j = A^{i+j}$ *für*

$$A \in Mat(m,n;\mathbb{R}), i, j \in \mathbb{N} \tag{1.84}$$

Beweis Wir beweisen (i) und (v)

(i) Seien

$$\left.\begin{array}{r} L = (l_{ij}) := (AB)C \\ R = (r_{ij}) := A(BC) \end{array}\right\} \in Mat(m,g;\mathbb{R}) \tag{1.85}$$
$$F = (f_{ij}) := AB \in Mat(m,p;\mathbb{R}) \tag{1.86}$$
$$G = (g_{ij}) := AB \in Mat(n,q;\mathbb{R}) \tag{1.87}$$

Zu zeigen: $L = R$, d.h. $FC = AG$.

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^{p} f_{ik}c_{kj} \text{ (per definitionem)} \tag{1.88}$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk} \right) \text{ (per def.)} \tag{1.89}$$
$$= \sum_{s=1}^{n} a_{is} \left(\sum_{s=1}^{n} b_{sk}c_{kj} \right) \text{ (rechnen in } \mathbb{R}) \tag{1.90}$$
$$= \sum_{a_{is}}^{g_{sj}} \text{ (per def.)} \tag{1.91}$$
$$= r_{ij} \text{ (per def.)} \tag{1.92}$$

□

(v) Wir zeigen mit Induktion über j, dass $A^iA^j = A^{i+j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

- **Induktionsanfang:** $j = 0$ (zeige, dass Annahme wahr ist)

$$A^iA^0 = A^iE \text{(per def.)} \tag{1.93}$$
$$= A^i \text{(mit iv)} \tag{1.94}$$
$$= A^{i+0} \tag{1.95}$$

- **Induktionsschritt** von j auf $j+1$. **Induktionsannahme:** $A^i A^j = A^{i+j}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
  Zu zeigen: $A^i A^{j+1} = A^{i+j+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A^i A^{j+1} &= A^i (A^j A) \text{ (per def.)} && (1.96) \\ &= (A^i A^j) A \text{ (mit i)} && (1.97) \\ &= A^{i+j} A \text{ (Induktionsannahme)} && (1.98) \\ &= A^{i+j+1} \text{ (per def.)} && (1.99) \end{aligned}$$

□

1.3 Das Gauss-Eliminationsverfahren

Ziel: Ein Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen.
Idee: Wir benutzen 'elementare Zeilenumformungen' um ein Gleichungssystem auf eine einfache 'Zeilenstufenform' mit denselben Lösungen zu bringen.

Wir betrachen lineare Gleichungssysteme in der Form:

$$Ax = b \tag{1.100}$$

wobei $A \in Mat(m, n; \mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^n$.

A heisst **Koeffizientenmatrix** und

$$(A, b) := \begin{pmatrix} a_{ii} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{mi} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{1.101}$$

erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems.

Wir betrachen auch die Lösungsmenge:

$$Loes(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} \tag{1.102}$$

Beobachten Sie nun, dass Systeme mit Koeffizienten wie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 35 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{1.103}$$

einfach zu lösen sind.

Beispiel

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \tag{1.104}$$

Das heisst:

$$x_1 + 2x_3 = 1 \tag{1.105}$$
$$x_2 - x_3 = 3 \tag{1.106}$$

Dann folgt:

$$x_2 = 3 + x_3 \tag{1.107}$$
$$x_1 = 1 - 2x_3 \tag{1.108}$$

Lösung:

$$Loes(A,b) = \{ \begin{pmatrix} 1-2\lambda \\ 3+\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{1.109}$$

Wir betrachten drei Darstellungen linearer Gleichungssysteme:

1. 'Gleichungsform'

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_i \tag{1.110}$$
$$\vdots \tag{1.111}$$
$$a_{m1}x_i + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \tag{1.112}$$

2. 'Matrixform'

$$Ax = b \tag{1.113}$$

wobei

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m,n,\mathbb{R}) \tag{1.114}$$

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.115}$$

$$b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{1.116}$$

3. 'Erweiterte-Koeffizientenmatrix-Form'

$$(A,b) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right) \tag{1.117}$$

Wir suchen die **Lösungsmenge**:

$$Loes(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} \tag{1.118}$$

$$A = (a_{ij}) \in Mat(m,n,\mathbb{R}) \tag{1.119}$$

heisst in **Zeilenstufenform**, wenn sie von der folgenden Form ist:

$$A = \begin{pmatrix} j_0 & j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ 0 & * & & & \\ 0 & 0 & * & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & x \end{pmatrix} \tag{1.120}$$

wobei $*$ 'ungleich Null' bedeutet.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.121}$$

Präziser formuliert: A ist in **Zeilenstufenform** falls:

(1) Es gibt $r \in \{0, 1, \cdots, m\}$, so dass in den Zeilen $1 \cdots r$ nicht nur Nullen stehen, und in den Zeilen $r+1, \cdots, m$ nur Nullen stehen.

(2) $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ wobei für $i = 1 \cdots r$ gilt: $j_i := min\{j : a_{ij} \neq 0\}$

Anmerkung: Durch eine Umordnung der Spalten von A[2] kann man immer annehmen:

$$j_1 = 1, \cdots, j_r = r \tag{1.122}$$

Beispiel

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \tag{1.123}$$

$$2x_3 - x_4 = 0 \tag{1.124}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \tag{1.125}$$

[2] d.h., eine andere Numerierung der Variablen des entsprechenden Gleichungssystems

können wir umformulieren als

$$y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 = 4 \tag{1.126}$$

$$2y_2 - y_4 = 0 \tag{1.127}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.128}$$

Das ergibt

$$y_1 = x_1, y_2 = x_3, y_3 = x_2, y_4 = x_4 \tag{1.129}$$

Betrachten Sie nun ein System:

$$(A,b) = \left.\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{rr} & b_r \\ & & & & b_{r+1} \\ & & & & \vdots \\ & & & & b_m \end{array}\right)\right\} m \tag{1.130}$$

Falls $b_i = 0$ für $i \in \{r+1, \cdots, m\}$, dann ist $Loes(A,b) = \emptyset$. Andernfalls

- $b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$
- $x_{r+1}, \cdots, x_n$ heissen **freie Variablen**
- $x_1, \cdots, x_r$ heissen **gebundene Variablen**

Man setzt

$$k := n - r \tag{1.131}$$

und wählt

$$\lambda_1, ..., \lambda_k \text{ als Parameter mit } x_{r+1} = \lambda_1, ..., x_n = \lambda_k \tag{1.132}$$

Zur Berechnung der $x_1, \cdots, x_r$ beginnt man mit

$$a_{rr}x_r + a_{r,r+1}\lambda_1 + \cdots + a_{rn}\lambda_k = b_r \tag{1.133}$$

und erhält

$$x_r = \frac{1}{a_{rr}}(b_r - a_{r,r+1}\lambda_1 - \cdots - a_{rn}\lambda_k) \tag{1.134}$$

Dann berechnet man ähnlicherweise $x_{r-1}, \cdots, x_1$.

Anmerkung Falls $n = r$ so $(k = 0)$, dann haben wir keinen Parameter und **genau eine Lösung**. Andernfalls erhalten wir unendlich viele Lösungen.

Beispiele

(i)

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{1.135}$$

$$Loes(A,b) = \emptyset \tag{1.136}$$

(ii)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.137}$$

$$Loes(A,b) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.138}$$

(iii)

$$(A,b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{1.139}$$

$$m = 5, n = 6, r = 4 \tag{1.140}$$

$\lambda_1 = x_5, \lambda_2 = x_6$. Weitere Umformungen:

- Schritt 1:

$$x_4 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{1.141}$$

$$\Rightarrow x_4 = \lambda_1 + \lambda_2 \tag{1.142}$$

- Schritt 2:

$$2x_3 + (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 - 3\lambda_2 = 4 \tag{1.143}$$

$$\Rightarrow x_3 = 2 - \lambda_1 + \lambda_2 \tag{1.144}$$

- Schritt 3:

$$-x_2 + (2 - \lambda_1 + 2\lambda_2) + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 3 \tag{1.145}$$

$$\Rightarrow x_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 - 1 \tag{1.146}$$

- Schritt 4:

$$3x_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_2 - 1) + (2 - \lambda_1 + \lambda_2) = 2 \tag{1.147}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} - \lambda_2 \tag{1.148}$$

Da die Lösung zwei Parameter beinhaltet, ist die Lösungsmenge unendlich. Spezfifizieren kann man sie wie folgt:

$$Loes(A,b) = \{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \tag{1.149}$$

1.3.1 Elementare Zeilenumformungen

Wir versuchen nun ein beliebiges System auf Zeilenstufenform zu bringen. Dazu benützen wir zwei Typen von **elementaren Zeilenumformungen** der erweiterten Koeffizientenmatrix:

Typ I Vertauschung zweier Zeilen

Typ II Addition der λ-fachen Zeile i mit Zeile j, wobei $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ und $i \neq j$

Beispiel

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 2 & -2 \end{array}\right) \tag{1.150}$$

$$I : Z_1 \Leftrightarrow Z_2 \tag{1.151}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 2 & -2 \end{array}\right) \tag{1.152}$$

$$II : Z_3 \to Z_3 + 2Z_1 \tag{1.153}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & -2 \end{array}\right) \tag{1.154}$$

$$II : Z_3 \to Z_3 - 2Z_2 \tag{1.155}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \tag{1.156}$$

$$= (\bar{A}, \bar{b}) \tag{1.157}$$

Entscheidend ist nun

$$Loes(A,b) \stackrel{?}{=} Loes(\bar{A}, \bar{b}) \tag{1.158}$$

Lemma 1.3.1 *Sei $(\bar{A}, \bar{b})$ durch endlich viele Zeilenumformungen entstanden. Dann gilt:*

$$Loes(A, b) = Loes(\bar{A}, \bar{b}) \tag{1.159}$$

Beweis Es genügt zu zeigen, dass die Lösungen bei **einer** elementaren Zeilenumformung unverändert bleibt.

Typ I Trivial (wir lösen dieselben Gleichungen)

Typ II $(\bar{A}, \bar{b})$ ist (A, b) ausser Zeile j.

$$(a_{j1} + \lambda a_{i1})x_1 + \cdots + (a_{jn} + \lambda a_{in})x_n = b_j + \lambda b_i \quad ① \tag{1.160}$$

Zu zeigen: $Loes(A, b) = Loes(\bar{A}, \bar{b})$. Oft einfach zu zeigen: Beides sind Teilmengen voneinander. Dies wird im folgenden bewiesen.

– $Loes(A, b) \subseteq Loes(\bar{A}, \bar{b})$ Sei $x \in Loes(A, b)$. Dann gilt:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad ② \tag{1.161}$$

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_1 = b_j \quad ③ \tag{1.162}$$

Also gilt für $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i \quad ④ \quad \text{mit } ② \tag{1.163}$$

und auch ① (mit ③ und ④). Deshalb $x \in Loes(\bar{A}, \bar{b})$

– $Loes(\bar{A}, \bar{b}) = Loes(A, b)$ Ähnlich (Übung). □

Lemma 1.3.2 ***(Korrektheitsbeweis)***
Sei (A, b) ein lineares Gleichungssystem mit $A \in Mat(m, n; \mathbb{R})$. Dann existiert $(\bar{A}, \bar{b})$, wobei

- *$(\bar{A}, \bar{b})$ entsteht aus (A, b) durch endlich viele elementare Zeilenumformungen.*
- *A ist in Zeilenstufenform.*

Beweis Induktion über m.

- **Induktionsanfang**: $m = 1$. Dann ist $(\bar{A}, \bar{b}) = (A, b)$.
- **Induktionsschritt**: von m auf $m + 1$. **Induktionsannahme:** Die Behauptung gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, A \in Mat(m, n; \mathbb{R}) undb \in \mathbb{R}^m$

- **Zu zeigen:** Die Behauptung gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, A \in Mat(m+1, n; \mathbb{R}) und b \in \mathbb{R}^m$.
  Falls $A = 0$, dann ist $(\bar{A}, \bar{b}) = (A, b)$. Andernfalls betrachten wir die kleinste Zahl $j \in \{1, ..., n\}$ mit $a_{ij} \neq 0$ für ein $i \in \{1, ..., m\}$.
  Dann entsteht durch 0 oder 1 Zeilenumformungen vom Typ I eine Matrix der Form:
  $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & \end{array}\right) \tag{1.164}$$
  Durch Umformungen vom Typ II macht man alle unterhalb von a_{ij} stehende Komponenten 0:
  $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{array}\right) \tag{1.165}$$
  Mit der Induktionsannahme (denn $A \in Mat(m, k, \mathbb{R})$) für ein $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ erhalten wir
  $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & 0 & b & & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & c & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \end{array}\right) \tag{1.166}$$

□

1.3.2 Zusammenfassung

Das **Gauss-Eliminationsverfahren** besteht aus zwei Schritten:

- Durch elementare Zeilenumformungen erhält man $(\bar{A}, \bar{b})$, wobei $\bar{A}$ in Zeilenstufenform ist und $Loes(A, b) = Loes(\bar{A}, \bar{b})$
- Man berechnet direkt $Loes(\bar{A}, \bar{b})$.

Beispiel Bestimmen Sie, für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ das folgende Gleichungssystem lösbar ist und geben Sie gegebenenfalls die Lösung an.

$$(A, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ -4 & 2 & -3 & 5 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 2\lambda \\ 6 & -2 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \tag{1.167}$$

Lösungsschritte: $Z_2 \to Z_2 + 2Z_1$, $Z_4 \to Z_4 - 3Z_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \tag{1.168}$$

Danach: $Z_2 \Leftrightarrow Z_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 2\lambda \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \tag{1.169}$$

$Z_4 \to Z_4 - Z_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 2\lambda \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1-2\lambda \end{array}\right) \tag{1.170}$$

$Z_4 \to Z_4 + Z_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 2\lambda \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{array}\right) = (\bar{A}, \bar{b}) \tag{1.171}$$

$$\text{mit } Loes(A,b) = Loes(\bar{A}, \bar{b}) \tag{1.172}$$

Falls $\lambda \neq 2$, dann ist

$$Loes(A,b) = \emptyset \tag{1.173}$$

Andernfalls, $\lambda = 2$ und wir setzen $\mu = x_4$. Wir erhalten:

1. $-x_3 - \mu = 3 \Rightarrow x_3 = -3 - \mu$
2. $x_2 - 2(-3-\mu) + 4\mu = 4$
   $\Rightarrow x_2 = -2 - 6\mu$
3. $2x_1 - (-2-6\mu) + (-3-\mu) - 3\mu = 0$
   $\Rightarrow 2x_1 = 1 - 2\mu$
   $\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} - \mu$

$$Loes(A,b) = \{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \mu \\ -2 - 6\mu \\ -3 - \mu \\ \mu \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \} \tag{1.174}$$

Was jetzt? Betrachten Sie eine homogene lineare Gleichung

$$2x + y = 0 \tag{1.175}$$

x und y 'müssen nicht' reelle Zahlen sein, z.B.

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1.176}$$

$$x = 2z^2 - z, y = -4z^2 + 2z \tag{1.177}$$

Wir fragen:

- Woher kommen x, y usw?
- Was bedeutet $+$?

Wir geben **abstrakte** Antworten.

Kapitel 2

Gruppen, Ringe, Körper

Mengen mit Verknüpfungen - sogenannte **algebraische Strukturen** - spielen eine wichtige Rolle in der Mathematik. Zum Beispiel:

- $\mathbb{N}$ mit $+, -, \cdot, 0, 1$
- $\mathbb{R}^n$ mit $+$
- $Mat(m, n)$ mit $+, 0^{m,n}$
- $Mat(n, n)$ mit $\cdot$
- $\mathbb{N}$ mit 'min' und 'max'
- $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$, die Potenzmenge von einer Menge A, mit $\cap$ und $\cup$.

Wir betrachen **Klassen** von Strukturen mit gewissen Eigenschaften. Insbesondere: Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume.

2.0.3 Mengen und Verknüpfungen

Seien $A_1, \cdots, A_n, B$ Mengen. Eine Abbildung

$$a : \{1, \cdots, n\} \to A_1, \cup \cdots \cup A_n \tag{2.1}$$

mit $a(i) \in A$; heisst ein **geordnetes n-Tupel**, geschrieben

$$(a_1, \cdots, a_n) \tag{2.2}$$

Die Menge aller geordneten n-Tupel von $A_1, \cdots, A_n$ heisst das **Direktprodukt**.

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \cdots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1 \cdots n\} \tag{2.3}$$

Falls $A_1 = \cdots = A_n = A$, schreiben wir

$$A^n = A \times \cdots \times A \tag{2.4}$$

Eine Abbildung

$$f : A_1 \times \cdots \times A_n \to B \tag{2.5}$$

geschrieben auch

$$(a_1, \cdots, a_n) \mapsto f(a_1, \cdots, a_n) \tag{2.6}$$

heisst eine **n-stellige Verknüpfung**.

2.1 Gruppen

Eine Menge G zusammen mit einer zweistelligen (oder **binären**) Verknüpfung

$$* : G \times G \to G \tag{2.7}$$
$$(a, b) \mapsto *(a, b) \tag{2.8}$$

heisst ein **Gruppoid**.

Anmerkung Wir schreiben 'G' für die Menge G und auch Gruppoid G mit $*$. Wir schreiben oft $a * b$ statt $*(a, b)$.

Ein Gruppoid G heisst:

- **assoziativ** falls $a * (b * c) = (a * b) * c$ für alle $a, b, c \in G$
- **kommutativ** falls $a * b = b * a$ für alle $a, b \in G$
- **idempotent** falls $a * a = a$ für alle $a \in G$

Ein assoziatives Gruppoid heisst eine **Halbgruppe** und eine idempotente kommutative Halbgruppe heisst **Halbverband**.

Beispiele

(i) $G = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ mit $a * b := a + b$ oder $a * b := a \cdot b$ ist eine kommutative Halbgruppe.

(ii) $G = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ mit $a * b := min(a, b)$ oder $a * b := max(a, b)$ ist ein Halbverband.

(iii) $G = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ mit dem arithmetischen Mittel: $a * b := \frac{a+b}{2}$ ist ein kommutatives idempotentes (nicht assoziatives) Gruppoid.

(iv) $G = P(A)$ (A eine Menge) mit $a * b := a \cup b$ oder $a * b := a \cap b$ ist ein Halbverband.

(iv) $G = \cup A^n$ (A eine Menge) mit $n \in \mathbb{N}$, die Menge aller endlichen Sequenzen $(a_1, \cdots, a_n)$ für $a_1, \cdots, a_n \in A$, mit $(a_1, \cdots, a_n) * (b_1, \cdots, b_m) = (a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m)$ (Konkatenation)ist eine Halbgruppe.

Eine Halbgruppe G heisst **Gruppe** falls:

(1) Es gibt ein **neutrales Element** $e \in G$, wobei $a * e = a = e * a$ für alle $a \in G$.

(2) Zu jedem Element $a \in G$ gibt es ein **inverses Element** $a \in G$, wobei $a * a' = e = a' * a$ für alle $a \in G$.

Eine kommutative Gruppe heisst abelsch.

Beispiele

(i) $G = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ mit $a * b := a + b$ ist eine Gruppe mit neutralem Element 0 und inversem Element $-a$ für a.

(ii) $G = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ oder $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $a * b := a \cdot b$ ist eine Gruppe mit neutralem Element 1 und inversem Element $\frac{1}{a}$ für a.

(iii) $G = Mat(m, n; \mathbb{R})$ mit $A * B := A + B$ ist eine Gruppe mit $0^{m,n}$ und $-A$.

(iv) $G = D_n$, die Isometriegruppe eines regelmässigen Polygons in der Ebene, hat $2n$ Elemente (n Drehungen und n Spiegelungen). Die Verknüpfung $*$ ist gegeben durch die Hintereinanderausführung von Symmetrietransformationen. z.B. in D_4 gibt es 4 Drehungen und 4 Spiegelungen.

Lemma 2.1.1 *Sei G eine Gruppe. Dann gilt*

(i) Das neutrale Element $e \in G$ ist ***eindeutig bestimmt****, d.h. e_1 und e_2 sind neutrale Elemente $\Rightarrow e_1 = e_2$*

(ii) Das inverse Element a' is für jedes $a \in G$ eindeutig bestimmt, d.h. b und c sind inverse Elemente für a.$\Rightarrow b = c$. Deshalb können wir a^{-1} statt a' schreiben.

Beweis

(i) Seien $e_1 \in G$ und $e_2 \in G$ neutrale Elemente. Dann gilt

$$e_1 e_2 = e_1 \tag{2.9}$$
$$\Rightarrow e_1 e_2 = e_2 \tag{2.10}$$

also $e_1 = e_2$.

(ii) Seien $b \in G$ und $c \in G$ inverse Elemente für $a \in G$. Dann gilt:

$$b = be \tag{2.11}$$
$$= b(ac) \tag{2.12}$$
$$= (ba)c \tag{2.13}$$
$$= ec \tag{2.14}$$
$$= c \tag{2.15}$$

Zur Erinnerung: Eine Menge G zusammen mit einer binären Verknüpfung $* : G^2 \to G$ heisst **Gruppe**, falls gilt:

- * ist **assoziativ**, d.h. $a * (b * c) = (a * b) * c$ füür alle $a, b, c \in G$.
- Es gibt ein (eindeutig definiertes) **neutrales Element** e mit $a * e = a = e * a$ für alle $a \in G$.
- Zu jedem $a \in G$ gibt es ein (eindeutig besimmtes) **inverses Element** $a' \in G$ mit $a * a' = e = a' * a$ (Wir schreiben a^{-1} statt a').

z.B. $\mathbb{Z}$ mit $+$, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit $\cdot$, $Mat(m, n; \mathbb{R}$ mit $+$, usw.

Wichtige Beispiele: Permutationsgruppen/Symmetrische Gruppen. Seien A, B, C, D Mengen. Dann bezeichnen wir mit Abb A, B die **Menge aller Abbildungen** $f : A \to B$ von A nach B.

Sind $f : A \to B \in$ Abb A, B und $g : B \to C \in$ Abb B, C, so heisst die Abbildung

$$g \circ f : A \to C, x \mapsto g(f(x)) \tag{2.16}$$

$$\text{d.h. } (g \circ f)(x) := g(f(x)) \tag{2.17}$$

die **Komposition** von f und g.

Für Abbildungen $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) \tag{2.18}$$

$$= h(g(f(x))) \qquad = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x) \Rightarrow (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{2.19}$$

Also ist Abb A, A mit Komposition eine **Halbgruppe**. Ist Abb A, A eine Gruppe?

Die identische Abbildung

$$id_{A \to A}, x \mapsto x \tag{2.20}$$

ist ein neutrales Element für Abb A, A. Aber für $f : A \to A$ gibt es $g : A \to A$ mit

$$f \circ g(id_A) = g \circ f \tag{2.21}$$

genau dann wenn f **bijektiv** ist (Aufgabe). Also ist Abb A, A im Allgemeinen keine Gruppe. Wir betrachen statt

$$S(A) := \{f \in \text{Abb } A, A : f \text{ bijektiv}\} \tag{2.22}$$

die symmetrische Gruppe der Menge A.

Falls $A = \{1 \cdot n\}$, schreibt man

$$S_n \text{ statt } S(A) \tag{2.23}$$

und nennt S_n **Permutationsgruppe**.

Beispiel $A = \{1, 2, 3\}$. $S(A) = S_3$ hat 6 Elemente:

$$\begin{bmatrix} 1 \longrightarrow 1 \\ 2 \longrightarrow 2 \\ 3 \longrightarrow 3 \\ () \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \longrightarrow 1 \\ 2 \longrightarrow 3 \\ 3 \longrightarrow 2 \\ (23) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \longrightarrow 2 \\ 2 \longrightarrow 1 \\ 3 \longrightarrow 3 \\ (12) \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \longrightarrow 2 \\ 2 \longrightarrow 3 \\ 3 \longrightarrow 1 \\ (123) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \longrightarrow 3 \\ 2 \longrightarrow 1 \\ 3 \longrightarrow 2 \\ (132) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \longrightarrow 3 \\ 2 \longrightarrow 2 \\ 3 \longrightarrow 1 \\ (13) \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Anmerkung S_n hat $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ Elemente.

$$(123)(12) = (13) \tag{2.26}$$

$$(12)(123) = (23) \tag{2.27}$$

Also ist S_3 nicht **abelsch**.

Lemma 2.1.2 *Sei G eine Gruppe und $a, b, c \in G$. Dann gilt:*

(i) $(a^{-1})^{-1} = a$

(ii) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

(iii) $ab = ac \Rightarrow b = c$

(iv) $ba = ca \Rightarrow b = c$

Beweis

(i) Bemerken Sie, dass

$$aa^{-1} = e = a^{-1}a \tag{2.28}$$

Also ist a das inverse Element für a^{-1} und nach Lemma 2.1.1 folgt

$$(a^{-1})^{-1} = a \tag{2.29}$$

(ii) Ähnlicherweise:

$$\begin{aligned} (b^{-1}a^{-1})(ab) &= b^{-1}(a^{-1}a)b && (2.30) \\ &= b^{-1}eb && (2.31) \\ &= b^{-1}b && (2.32) \\ &= e && (2.33) \end{aligned}$$

und $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$, so

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \tag{2.34}$$

(iii)

$$ab = ac \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \tag{2.35}$$
$$\Rightarrow (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c \tag{2.36}$$
$$\Rightarrow eb = ec \qquad \Rightarrow b = c \tag{2.37}$$

(iv) Analog. □

Es gibt eine nützliche äquivalente Charakterisierung von Gruppen. Betrachen Sie für ein Gruppoid G und $a \in G$ die Abbildungen:

$$\tau_a : G \to G, x \mapsto x * a \tag{2.38}$$
$$a^\tau : G \to G, x \mapsto a * x \tag{2.39}$$

Lemma 2.1.3 *Sei G eine nichtleere Halbgruppe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) G ist eine Gruppe.

(2) τ_a und a^τ sind bijektiv.

Beweis

(1) ⇒ (2) Sei G eine Gruppe und $a \in G$.

- τ_a ist injektiv, denn für $b, c \in G$

$$\tau_a(b) = \tau_a(c) \tag{2.40}$$
$$\Rightarrow ba = ca \tag{2.41}$$
$$\Rightarrow b = c \tag{2.42}$$

- τ_a ist surjektiv, denn für $b \in G$

$$\tau_a(ba^{-1}) = ba^{-1}a \tag{2.43}$$
$$= be \tag{2.44}$$
$$= b \tag{2.45}$$

a_τ ist sehr ähnlich.

(2) ⇒ (1) Seien τ_a und a_τ bijektiv für alle $a \in G \neq \emptyset$. Wir haben ein $a \in G$. Dann

$$e_1 a = a \tag{2.46}$$

für ein $e_1 \in G$ (τ_a ist surjektiv). Betrachen Sie nun $x \in G$. Dann $ab = x$ für ein $b \in G$ (a^τ ist surjektiv). Also folgt

$$\begin{aligned} e_1 x &= e_1(ab) && (2.47)\\ &= (e_1 a)b && (2.48)\\ &= ab && (2.49)\\ &= x && (2.50) \end{aligned}$$

Analog finden wir $e_2 \in G$ mit $xe_2 = x \forall x \in G$
Deshalb ist

$$e := e_1 = e_1 e_2 = e_2 \tag{2.51}$$

ein neutrales Element. Es gibt für jedes $a \in G$, $b, c \in G$ mit $ab = e = ca$ (τ_a, a^τ surjektiv) und

$$\begin{aligned} b &= eb && (2.52)\\ &= (ca)b && (2.53)\\ &= c(ab) && (2.54)\\ &= ce && (2.55)\\ &= c && (2.56) \end{aligned}$$

ist das inverse Element für a. □

Bemerkung Binäre Verknüpfungen auf einer **endlichen** Menge $\{a_1 \cdots a_n\}$ können durch eine **Verknüpfungstafel** dargestellt werden:

$$\begin{array}{c|ccccc} * & a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_n \\ \hline a_1 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_j & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_n & & & & & \end{array} \tag{2.57}$$

Nach Lemma 2.1.3 muss jede Zeile und Spalte der Tafel der Verknüpfung einer Gruppe eine **Permutation** von $a_1 \cdots a_n$ sein.

Beispiel Sei G_2 eine zwei Elemente enthaltende Gruppe. Es gibt nur eine Möglichkeit (bis auf *Isomorphie*).

$$\begin{array}{c|cc} * & e & a \\ \hline e & e & a \\ a & a & e \end{array} \tag{2.58}$$

G_2 ist abelsch. Auch für eine drei Elemente enthaltende Gruppe G_3 gibt es nur eine Möglichkeit.

$$\begin{array}{c|ccc} * & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ a & a & e & e \\ b & b & e & a \end{array} \tag{2.59}$$

G_3 ist abelsch.

2.2 Untergruppen und Gruppenhomomorphismen

Unteralgebren und Homomorphismen spielen eine entscheidende Rolle bei der Untersuchung (von Klassen) von Algebren wie Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume, usw.

Eine nichtleere Teilmenge H einer Gruppe G heisst **Untergruppe** wenn für alle $a, b \in H$:

(1) $ab \in H$

(2) $a^{-1} \in H$

Beobachten Sie, dass

$$H \neq \emptyset \Rightarrow a \in H \tag{2.60}$$
$$\Rightarrow a^{-1} \in G \tag{2.61}$$
$$\Rightarrow e = aa^{-1} \in H \tag{2.62}$$

Also ist H auch eine Gruppe.

Beispiel Betrachten Sie für $k \in \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen)

$$k\mathbb{Z} := \{mk : m \in \mathbb{Z}\} \tag{2.63}$$

Dann $0 = 0k \in k\mathbb{Z}$ so $k\mathbb{Z} \neq \emptyset$ und für $m, n, \in \mathbb{Z}$

- $mk + nk = (m+n)k \in k\mathbb{Z}$
- $-(mk) = -(m)k \in k\mathbb{Z}$

Deshalb ist $k\mathbb{Z}$ mit $+$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ mit $+$. Seien G und G' Gruppen mit Verknüpfungen $*$ und $*'$ und neutralen Elementen e und e'. Ein (Gruppen-)Homomorphismus ist eine Abbildung $f : G \to G'$ wobei für alle $a, b \in G$:

$$f(a * b) = f(a) *' f(b) \tag{2.64}$$

f heisst **Isomorphismus** und G und H heissen **isomorph**, falls f auch bijektiv ist.

Beobachten Sie, dass

$$\begin{aligned} e' *' f(e) &= f(e) && (2.65)\\ &= f(e * e) && (2.66)\\ &= f(e) *' f(e) && (2.67)\\ \Rightarrow e' &= f(e) && (2.68) \end{aligned}$$

für $a \in G$

$$\begin{aligned} f(a^{-1}) *' f(a) &= f(a * a^{-1}) && (2.69)\\ &= f(e) && (2.70)\\ &= e' && (2.71)\\ \Rightarrow f(a)^{-1} &= f(a^{-1}) && (2.72) \end{aligned}$$

Beispiel $f : \mathbb{Z} \to k\mathbb{Z}, x \mapsto kx$ für $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} f(a+b) &= k(a+b) && (2.73)\\ &= ka + kb = f(a) + f(b) && (2.74) \end{aligned}$$

Also ist f ein **Homomorphismus**.

Beispiel Seien $G = \mathbb{R}$ mit Addition und $G' = \mathbb{R}^*_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Dann ist

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+, x \mapsto e^x \tag{2.75}$$

ein Isomorphismus, denn f und für alle $a, b, \in \mathbb{R}$:

$$f(a+b) = e^{a+b} = e^a \cdot e^b = f(a) \cdot f(b) \tag{2.76}$$

Sei nun $f : G \to G'$ ein Homomorphismus.

$$\begin{aligned} \text{Bild } f &:= f(G) := \{f(x) : x \in G\} && (2.77)\\ \text{Kern } f &:= \{x \in G : f(x) = e'\} && (2.78) \end{aligned}$$

Beispiel Betrachten Sie die Gruppen $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ mit Addition und die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2, 0) \tag{2.79}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} &f((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)) && (2.80)\\ &\quad = f((a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)) && (2.81)\\ &\quad = (a_1 + b_1 + a_2 + b_2, 0) && (2.82)\\ &\quad = (a_1 + a_2, 0) + (b_1 + b_2, 0) && (2.83)\\ &\quad = f((a_1, a_2, a_3)) + f((b_1, b_2, b_3)) && (2.84) \end{aligned}$$

Deshalb ist f ein Homomorphismus.

$$\text{Bild } f = \{(x_1 + x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Kern } f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 + x_2, 0) = (0, 0)\} = \{(x_1 - x_1, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Lemma 2.2.1 *Sei $f : G \to G'$ ein Homomorphismus. Dann gilt:*

(i) Kern f ist eine Untergruppe von G

(ii) Bild f ist eine Untergruppe von G'

(iii) f ist injektiv genau dann, wenn Kern $f = \{e\}$

Beweis

(i) $f(e) = e' \Rightarrow$ Kern $f \neq \emptyset$
$ab \in$ Kern f

$$\Rightarrow f(a) = f(b) = e' \tag{2.85}$$
$$\Rightarrow f(ab) = f(a)f(b) \tag{2.86}$$
$$= e'e' \tag{2.87}$$
$$= e' \tag{2.88}$$
$$\Rightarrow a, b \in \text{ Kern } f \tag{2.89}$$

$a^{-1} \in$ Kern f

$$\Rightarrow f(a) = e' \tag{2.90}$$
$$\Rightarrow f(a^{-1}) = (f(a))^{-1} \tag{2.91}$$
$$= (e')^{-1} \tag{2.92}$$
$$= e' \tag{2.93}$$
$$\Rightarrow a \in \text{ Kern } f \tag{2.94}$$

Also ist Kern f eine Untergruppe von G.
(ii) und (iii) Aufgaben. □

2.2.1 Weitere wichtige Beispiele und zyklische Gruppen

Erinnern Sie sich daran, dass für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$k\mathbb{Z} := \{mk : m \in \mathbb{Z}\} \tag{2.95}$$

eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist. **Idee:** wir 'teilen' $\mathbb{Z}$ durch $k\mathbb{Z}$ und erhalten eine Gruppe mit k Elementen. Beobachten Sie, dass

$$\mathbb{Z} = (0 + k\mathbb{Z}) \cup (1 + k\mathbb{Z}) \cup \cdots \cup ((k-1) + k\mathbb{Z}) \tag{2.96}$$

wobei für $r = 1, ..., k-1$ $r + k\mathbb{Z} := \{r + mk : m \in \mathbb{Z}\}$ die **Restklassen modulo** k sind.

Beispiel $0 + 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$ ist die Menge der geraden Zahlen und $1 + 2\mathbb{Z}$ ist die Menge der ungeraden Zahlen. Bemerken Sie auch, dass

$$a, b \in r + k\mathbb{Z} \Leftrightarrow a = r + m_1 \cdot k \tag{2.97}$$
$$b = r + m_2 \cdot k \text{ mit } (m_1, m_2 \in \mathbb{Z}) \tag{2.98}$$

gilt genau dann wenn $a - b$ durch k teilbar ist.

Wir schreiben

$$a \equiv b \bmod k \tag{2.99}$$

und sagen 'a ist kongruent b modulo k' Wir schreiben auch für $a \in \mathbb{Z}$:

$$\bar{a} \text{ für } a + k\mathbb{Z} \tag{2.100}$$

und definieren

$$\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b} \tag{2.101}$$

Frage: Ist diese Addition wohl definiert? Also gilt $\bar{a_1} = \bar{a_2}, \bar{b_1} = \bar{b_2} \Rightarrow \overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}$? Antwort: Ja.

$$\bar{a_1} = \bar{a_2}, \bar{b_1} = \bar{b_2} \tag{2.102}$$
$$\Rightarrow a_1 - a_2 = m_1 k, b_1 - b_2 = m_2 k \tag{2.103}$$
$$\Rightarrow (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (m_1 + m_2)k \tag{2.104}$$
$$\Rightarrow \overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2} \tag{2.105}$$

Dann ist die Menge

$$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} := \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{k-1} \tag{2.106}$$

mit dieser Addition eine Grupe die **zyklische Gruppe der Ordnung k** mit neutralem Element $\bar{0}$ und $-\bar{a} = \overline{-a}$

Beispiel $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ hat die Verknüpfungstafel

$$\begin{array}{c|cccc} + & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \tag{2.107}$$

2.3 Ringe und Körper

Eine Menge R zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+ : R \times R \to R \tag{2.108}$$
$$\cdot : R \times R \to R \tag{2.109}$$

heisst **Ring**, falls

(1) R mit $+$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element oder **Null-Element** 0 und inverses Element $-a$ für a.

(2) Die **Multiplikation** ist assioziativ.

(3) Für alle $a, b, c \in R$ (Distributivgesetze):

$$a \cdot (b + c) = ab + ac \tag{2.110}$$
$$(a + b) \cdot c = ac + ab \tag{2.111}$$

R heisst **kommutativ**, falls $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in R$.
Ein Element $1 \in R$ heisst **Einselement**, falls

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \text{ für alle } a \in R \tag{2.112}$$

Bemerkung Sei R ein Ring. Dann gilt für alle $a \in R$:

$$0 + (0 \cdot a) = 0 \cdot a \tag{2.113}$$
$$= (0 + 0) \cdot a) \tag{2.114}$$
$$= (0 \cdot a) + (0 \cdot a) \tag{2.115}$$

Also nach Lemma 2.1.2: $0 = 0 \cdot a$. Analog ist $a \cdot 0 = 0$.

Beispiele

(i) $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ mit den üblichen $+$ und $\cdot$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement 1.

(ii) $2\mathbb{Z}$ mit $+$ und $\cdot$ ist auch ein Ring aber hat kein Einselement.

(iii) $Mat(n, n; \mathbb{R})$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit Matrix Addition und Multiplikation ist ein (für $n \geq 2$, nicht kommutativ) Ring mit Nullelement $0^{(n,n)}$ und Einselement $E^{(n)}$.

(iv) $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}(k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ mit[1]

$$\bar{a} + \bar{b} = a \bar{+} b \tag{2.116}$$
$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a \bar{\cdot} b \tag{2.117}$$

ist ein kommutativer Ring mit Nullelement $\bar{0}$ und Einselement $\bar{1}$.

[1]Frage: Ist $\cdot$ wohldefiniert? $\Rightarrow$ Aufgabe

Beispiel $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ hat Multiplikationstafel

$$\begin{array}{c|cccc} \cdot & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \tag{2.118}$$

Bemerkung Ein Ring heisst **nullteilerfrei**, falls für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0 \tag{2.119}$$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ mit $+$ und $\cdot$ sind nullteilerfrei, aber in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$$\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0} \text{ und } \bar{2} \neq \bar{0} \tag{2.120}$$

Lemma 2.3.1 *Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:*

$$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \textit{ ist nullteilerfrei} \Leftrightarrow k \textit{ ist eine Primzahl} \tag{2.121}$$

Beweis

$\Rightarrow$ (Kontraposition). Sei k keine Primzahl. Dann ist $k = a \cdot b$ mit $1 < a < k, 1 < b < k$. Dass heisst,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b} \tag{2.122}$$
$$= \bar{k} \tag{2.123}$$
$$= \bar{0} \tag{2.124}$$

aber $\bar{a} \neq \bar{0}$ und $\bar{b} \neq \bar{0}$ Also ist $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ ist nicht nullteilerfrei.

$\Leftarrow$ Sei k eine Primzahl und

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{0} \tag{2.125}$$

Dann ist

$$a \cdot b = mk \text{ für ein } m \in \mathbb{Z} \tag{2.126}$$

Also hat entweder a oder b ein Primfaktor k, d.h. $\bar{a} = \bar{0}$ oder $\bar{b} = \bar{0}$.

$\square$

Eine nichtleere Teilmenge S eines Rings R heisst **Unterring**, wenn für alle $a, b \in S$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & a + b \in S \\ (2) & -a \in S \end{array}\right\} \text{S mit + ist eine Untergruppe von R mit +} \tag{2.127}$$

$$(3)\ a \cdot b \in S \tag{2.128}$$

Beispiel $k\mathbb{Z}$ ist ein Unterring von $\mathbb{Z}$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Seien R mit $+_R$ und $\cdot_R$ und S mit $+_S$ und $\cdot_S$ Ringe. Ein **(Ring)Homomorphismus** ist eine Abbildung $f : R \to S$, wobei für alle $a, b \in R$

$$f(a +_R b) = f(a) +_S f(b) \tag{2.129}$$

$$f(a \cdot_R b) = f(a) \cdot_S f(b) \tag{2.130}$$

$$\tag{2.131}$$

Beispiel zu Ringen Sei $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist Abb $I, \mathbb{R}$ die Menge aller Abbildungen von I nach $\mathbb{R}$, mit

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \tag{2.132}$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \tag{2.133}$$

ein kommutativer Ring mit Nullelement 0 ($0(x) = 0$) und Einselement 1 ($1(x) = 1$).

Bemerkung In $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

- $\cdot$ ist assoziativ und kommutativ
- es gibt ein Einselement 1
- für jedes $a \neq 0$, gibt es ein multiplikatives Inverses $a^{-1} = \frac{1}{a}$ mit $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

Also sind $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ **Gruppe!abelsche Gruppen** und $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ heissen **Körper**.

Eine Menge K mit Verknüpfungen

$$+ : K \times K \to K \tag{2.134}$$

$$\cdot : K \times K \to K \tag{2.135}$$

heisst **Körper**, falls:

(1) K mit $+$ ist eine abelsche Gruppe.

(2) $K^* := K \setminus \{0\}$ mit $\cdot$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element / Einselement 1 und Inverse a^{-1} oder $\frac{1}{a}$ für $a \in K^*$. (Man schreibt oft ab^{-1})

(3) Für alle $a, b, c \in K$:

$$a(b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \tag{2.136}$$

$$(a + b)c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \tag{2.137}$$

Nämlich ist K ein kommutativer Ring mit Einselement, wobei $K^* := K \setminus \{0\}$ mit $\cdot$ eine abelsche Gruppe ist.

Einige Tatsachen über Körper

(1) $1 \neq 0$, denn $1 \in K^*$, $0 \notin K^*$

(2) K ist **nullteilerfrei**.

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0 \tag{2.138}$$

denn K^* ist eine Gruppe ($a \neq 0$ oder $b \neq 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0$)

(3) Es genügt zu zeigen, dass $-ab$ eine Inverse für ab ist. $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ denn

$$(a \cdot (-b)) + (a \cdot b) = a \cdot (-b + b) \tag{2.139}$$
$$= a \cdot 0 \tag{2.140}$$
$$= 0 \text{ (immer in einem Ring)} \tag{2.141}$$

(4) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ denn

$$(-a)(-b) = -((-a)b) \tag{2.142}$$
$$= -(-(ab)) \tag{2.143}$$
$$= a \cdot b \tag{2.144}$$

(5) $a \cdot b = a \cdot c, a \neq 0 \Rightarrow b = c$ Falls $a \cdot b = a \cdot c, a \neq 0$: entweder $b = 0 \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c = 0 \Rightarrow c = 0$ oder $b \neq 0 \Rightarrow a, b, c \in K^* \Rightarrow b = c$ nach Lemma 2.1.2.

Beispiele

(i) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ mit $+$ und $\cdot$

(ii) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ mit Verknüpfungen

$$(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b') \tag{2.145}$$
$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + a'b) \tag{2.146}$$

heisst **Körper der komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ hat

- Nullelement $(0, 0)$
- Einselement $(1, 0)$
- Inverse Elemente

$$-(a, b) = (-a, -b) \tag{2.147}$$
$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \tag{2.148}$$

Anmerkung Üblicherweise definiert man

$$i := (0,1) \text{ (mit } i \cdot i = (-1,0)) \tag{2.149}$$

Der Körper $K = \{0,1\}$ mit Verknüpfungstafeln:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \tag{2.150}$$

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \tag{2.151}$$

spielt eine Hauptrolle in Logik und **Spaltentheorie**.

Anmerkung $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ist $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ immer ein Körper? Nein, weil $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ ist nullteilerfrei gdw k ist eine Primzahl. ($\Rightarrow$ Lemma 2.3.1)
Ist $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ ein Körper, falls k prim ist? Ja...

Lemma 2.3.2 *Ein endlicher, nullteilerfreier, kommutativer Ring mit Einselement K ist ein Körper.*

Beweis Wir brauchen, dass $K^* := K \setminus \{0\}$ eine abelsche Gruppe ist. Es genügt nach Lemma 2.1.3 zu zeigen, dass für alle $a \in K^*$:

$$\tau : K^* \to K^*, x \mapsto a \cdot x \tag{2.152}$$

[2] bijektiv ist.

Seien $b, c \in K^*$ und

$$\tau(b) = a \cdot b = a \cdot c = \tau(c) \tag{2.153}$$

Dann gilt:

$$(a \cdot b) - (a \cdot c) = 0 \tag{2.154}$$
$$\Rightarrow a \cdot (b - c) = 0 \tag{2.155}$$
$$\Rightarrow b - c = 0 \text{ denn } a \neq 0 \text{ und K nullteilerfrei} \tag{2.156}$$
$$\Rightarrow b = c \tag{2.157}$$

Also ist τ **injektiv** und, denn K^* ist **endlich**, auch **surjektiv**. $\square$

[2] $\tau = \tau_a = a^\tau$, denn K^* ist kommutativ.

Korollar 2.3.3 *(VL: 2.3.3) Der Ring $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ ist ein Körper gdw k eine Primzahl ist.*

Beweis Nach Lemmata 2.3.1 und 2.3.2. $\square$

Kapitel 3

Vektorräume

Lineare Algebra befasst sich mit **Vektorräumen** und ihren **Homomorphismen** (lineare Abbildungen). Wir haen schon einige Beispiele "über $\mathbb{R}$" gesehen: Nämlich $\mathbb{R}^n$ und $Mat(m, n; \mathbb{R})$ mit Addition und Multiplikation mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wir können jedoch auch Vektorräume über andere Körper wie $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$,(k prim) usw. untersuchen.

3.1 Definitionen, Beispiele und elementare Eigenschaften

Im folgenden wird angenommen, dass K stets ein Körper mit Verknüpfungen $+_K$ und $\cdot_K$, Nullelement 0_K und Einselement 1_K ist.

Notation

- Die Elemente von K werden meist mit kleinen, griechischen Buchstaben ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ etc.) bezeichnet.
- $\alpha \in K$ hat eine additive Inverse $-\alpha$ und falls $\alpha \neq 0_K$, eine multiplikative Inverse α^{-1} oder $\frac{1}{\alpha}$.
- Wir schreiben oft

$$\alpha\beta \text{ statt } \alpha \cdot_K \beta \tag{3.1}$$
$$\alpha + \beta \text{ statt } \alpha +_K \beta \tag{3.2}$$
$$0, 1 \text{ statt } 0_K, 1_K \tag{3.3}$$
$$\alpha - \beta \text{ statt } \alpha +_K (-\beta) \tag{3.4}$$
$$\alpha/\beta \text{ statt } \alpha \cdot_K \beta^{-1} \tag{3.5}$$

Eine Menge V mit zwei Verknüpfungen[1]:

- (Addition) $+_V : V \times V \to V, (v, w) \mapsto v +_V w$

[1](Wir schreiben oft $v + w$ statt $v +_K w$ und $v \cdot w$ statt $v \cdot_v w$)

- (skalare Multiplikation) $\cdot_V : K \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot_V v$

- V mit $+_V$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element oder **Nullelement** 0_V und Inverse oder **Negative** $-v$ für $v \in V$

- Für $\alpha, \beta \in K$ und $v, w \in V$

$$(\alpha +_K \beta) \cdot_V v = (\alpha +_V v) +_V (\beta \cdot_V v) \tag{3.6}$$
$$\alpha \cdot_V (v +_V w) = (\alpha \cdot_V v) +_V (\alpha \cdot_V w) \tag{3.7}$$
$$(\alpha \cdot_K \beta) \cdot_V v = \alpha \cdot_V (\beta \cdot_V v) \tag{3.8}$$
$$a \cdot_V v = v \tag{3.9}$$

Die Elemente eines Vektorraumes werden meist mit kleinen lateinischen Buchstaben (a, b, c, u, v, w etc.) bezeichnet.

Zur Erinnerung: Sei K ein **Körper**[2] Eine Menge mit Verknüpfungen:

$$+ : V \times V \to V \tag{3.10}$$
$$\cdot : V \times V \to V \tag{3.11}$$

heisst **Vektorraum über K** oder **K-Vektrorraum**, falls

(1) V mit $+$ ist eine abelsche Gruppe

(2) Für $\alpha, \beta \in K$ und $v, w \in V$:

$$(\alpha +_K \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) +_V (\beta \cdot v) \tag{3.12}$$
$$\alpha(v + w) = (\alpha \cdot v) + (\alpha \cdot w) \tag{3.13}$$
$$(\alpha\beta) \cdot b = \alpha(\beta \cdot v) \tag{3.14}$$
$$1 \cdot v = v \tag{3.15}$$

Zum Beispiel $\mathbb{R}$ und $Mat(m, n; \mathbb{R})$ mit Addition und Multiplikation mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ sind **Vektorräume über** $\mathbb{R}$.

Anmerkung Der Vektorraum $V = \{0\}$ mit nur einem Element heisst **Nullraum**.

3.1.1 Das Standardbeispiel K^n

Die Menge aller Spaltenvektoren (für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$):

$$K^n = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} : a_1, ..., a_n \in K\} \tag{3.16}$$

[2] Hinweis: Sie können meist K als $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ betrachten.

mit Addition

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} +_K \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\alpha_1 +_K \beta_n\\ \vdots\\ \alpha_n +_K \beta_n\end{pmatrix} \tag{3.17}$$

und skalare Multiplikation

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\ \vdots\\ \lambda\alpha_n\end{pmatrix} \tag{3.18}$$

ist ein Vektorraum über K. z.B. $\mathbb{C}^n, \mathbb{Q}^n$,

Ähnlicherweise ist $Mat(m, n; K)$ die Menge aller $m \times n$ Matrizen mit Einträgen aus k, mit Verknüpfungen:

$$(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) := (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \tag{3.19}$$
$$\lambda(\alpha_{ij}) := (\lambda\alpha_{ij}), \lambda \in K \tag{3.20}$$

ein Vektorraum über K.

Lemma 3.1.1 *Sei V ein Vektorraum über K. Dann gilt für alle $\alpha \in K$ und $v \in V$:*

(i) $0 \cdot v = 0$

(ii) $\alpha \cdot 0 = 0$

(iii) $\alpha \cdot v = 0 \Rightarrow a = 0$ *oder* $v = 0$

(iv) $(-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$. *Insbesondere:* $(-1) \cdot v = 1 \cdot (-v) = -v$

Beweis

(i)

$$0 \cdot v = (0 \cdot v) + 0 \tag{3.21}$$
$$= 0 \cdot v + ((0 \cdot v) - (0 \cdot v)) \tag{3.22}$$
$$= ((0 \cdot v) + (0 \cdot v)) - (0 \cdot v) \tag{3.23}$$
$$= (0 \cdot 0) \cdot v - (0 \cdot v) \tag{3.24}$$
$$= 0 \cdot v - 0 \cdot v \tag{3.25}$$
$$= 0 \tag{3.26}$$

(ii) Aufgabe.

(iii) Sei $\alpha \cdot v = 0$ und $\alpha \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} v &= 1 \cdot v && (3.27)\\ &= (\alpha^{-1}) \cdot v \text{ denn } \alpha \neq 0 && (3.28)\\ &= \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot v) && (3.29)\\ &= \alpha^{-1} \cdot 0 && (3.30)\\ &= 0 \text{ nach (ii)} && (3.31) \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} ((-\alpha) \cdot v) + (\alpha \cdot v) &= (-\alpha + \alpha) \cdot v && (3.32)\\ &= 0 \cdot v && (3.33)\\ &= 0 \text{ nach (i)} && (3.34)\\ \Rightarrow (-\alpha) \cdot v &= -(\alpha \cdot v) && (3.35)\\ \alpha \cdot (-v) &= -(\alpha \cdot v) \text{ Aufgabe.} && (3.36) \end{aligned}$$

□

Beispiel: Vektorräume von Abbildungen Sei K ein Körper und M eine nichtleere Menge. Dann ist Abb M, K mit

$$\begin{aligned} (\phi + \chi)(x) &:= \phi(x) + \chi(x) && (3.37)\\ (\lambda\phi)(x) &:= \lambda\phi(x)(\lambda \in K) && (3.38) \end{aligned}$$

ein Vektorraum über K, mit Nullelement 0 $(0(x) := 0)$
und Negative $-\phi((-\phi)(x) := -\phi(x))$.

Anmerkung
Wir können K^n mit (Abb $\{1, 2, ..., n\}, K$) identifizieren. Wir können auch Abbildungen mit gewissen Eigenschaften überlegen, z.B.

- Sei I ein Intervall von $\mathbb{R}[a, b], (a, b], [a, b], (a, b)$ mit $a < b$.
  Dann ist $C(I) := \{\phi \in \text{Abb } I, \mathbb{R} : \phi \text{ ist stetig}\}$ mit Verknüpfungen wie oben definiert ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

- Ähnlicherweise ist die Menge Pol $\mathbb{R}$ aller Polynome

  $$\phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n \qquad (3.39)$$

  mit $n \in \mathbb{N}$ und koeffizienten $\alpha_0, ...\alpha_n \in \mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Beachten Sie, dass

  $$\text{Pol } \mathbb{R} \subseteq C(\mathbb{R}) \subseteq \text{Abb } \mathbb{R}, \mathbb{R} \qquad (3.40)$$

  Eigentlich sind Pol $\mathbb{R}$ und $C(\mathbb{R})$ **Unterräume** von Abb $\mathbb{R}, \mathbb{R}$.

3.2 Unterräume

Eine nichtleere Teilmenge W eines Vektorraums V über K heisst **Unterraum von** V, wenn für alle $v, w \in W$ und $\alpha \in K$:

(1) $v + w \in W$

(2) $\alpha \cdot v \in W$

Beobachten Sie, dass $v \in W \Rightarrow (-1) \cdot v = -v \in W$. Also ist W mit $+$ eine Untergruppe von V mit $+$. Da sich die anderen Regeln von V auf $W \subseteq V$ übertragen, ist W mit denselben Verknüpfungen auch ein Vektorraum über K.

Anmerkung In jedem Vektorraum V sind der Nullraum $\{0\}$ und V selbst Unterräume.

Beispiel: Teilmengen von $\mathbb{R}^2$.

$$W_1 = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\} \tag{3.41}$$

ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$, denn

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W \Rightarrow w \neq \emptyset \tag{3.42}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix} \in W_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} \in W_1 \tag{3.43}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda\alpha \end{pmatrix} \in W_1 \tag{3.44}$$

$W_2 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : 2\alpha + \beta = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_2 \Rightarrow W_2 \neq \emptyset \tag{3.45}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \in W_2 \Rightarrow \begin{matrix} 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 0 \end{matrix} \tag{3.46}$$

$$\Rightarrow 2(\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) = 0 \tag{3.47}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix} \in W_2 \tag{3.48}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in W_2 \Rightarrow 2\alpha + \beta = 0 \tag{3.49}$$

$$\Rightarrow 2\lambda\alpha + \lambda\beta = 0 \tag{3.50}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda\beta \end{pmatrix} \in W_2 \tag{3.51}$$

W_2 ist auch ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ aber nicht $W_3 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \geq 0\}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_3 \tag{3.52}$$

$$-1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_3 \tag{3.53}$$

oder

$$W_4 = \{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2\alpha + \beta = 1\} \tag{3.54}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_4 \tag{3.55}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin W_4 \tag{3.56}$$

Beispiel: Reelle Folgen In der Analysis betrachtet nan **Folgen von reellen Zahlen:**

$$a = (a_n | n \in \mathbb{N}), a_n \in \mathbb{R} \tag{3.57}$$

$$= a_0, a_1, a_2, ... \tag{3.58}$$

Man definiert zum Beispiel

$$F := \{a : \text{ a reelle Folge}\} \tag{3.59}$$

$$F_b := \{a \in F : \text{ a ist beschränkt}\} \tag{3.60}$$

$$F_k := \{a \in F : \text{ a ist konvergent}\} \tag{3.61}$$

Dann gilt: $F_K \subseteq F_b \subseteq F$. F mit Verknüpfungen

$$a + b := (a_n + b_n | n \in \mathbb{N}) \tag{3.62}$$

$$\alpha \cdot a := (\alpha a_n | n \in \mathbb{N})(\alpha \in \mathbb{R}) \tag{3.63}$$

ist ein Vekorraum über $\mathbb{R}$. F_b ist ein Unterraum von F und F_k ist ein Unterraum von F_b Betrachten Sie nun die Unterräume von $\mathbb{R}^3$.

$$W_1 = \{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} W_2 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \tag{3.64}$$

Der Durchschschnitt oder **Schnittmenge**

$$W_1 \cap W_2 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\} \tag{3.65}$$

ist auch ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Lemma 3.2.1 *Seien W_1, W_2 Unterräume von einem Vektorraum V über K. Dann ist der Durschnitt $W_1 \cap W_2$ ein* ***Unterraum*** *von V.*

Beweis

$$0 \in W_1, W_2 \Rightarrow 0 \in W_1 \cap W_2 \tag{3.66}$$
$$\Rightarrow W_1 \cap W_2 \neq \emptyset \tag{3.67}$$

Seien $v, w \in W_1 \cap W_2$ und $\alpha \in K$. Dann folge: $v, w \in W_1$ und $v, w \in W_2$.
Denn W_1, W_2 Unterräume sind

$$v + w \in W_1, v + w \in W_2 \Rightarrow v + w \in W_1 \cap W_2 \tag{3.68}$$
$$\alpha \cdot v \in W_1, \alpha \cdot v \in W_2 \Rightarrow \alpha \cdot v \in W_1 \cap W_2 \tag{3.69}$$

Also ist $W_1 \cap W_2$ ein Unterraum von V. □

Bemerkung Die **Vereinigung** $W_1 \cup W_2$ von Unterräumen W_1, W_2 von V ist im allgemeinen kein Unterraum[3]. Aber die Summe $W_1 + W_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in W_1, v_2 \in W_2\}$ is ein Unterraum von V. Sei V ein Vektorraum über K. Ein $v \in V$ heisst **Linearkombination** von $v_1, ..., v_n$, wenn es $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ gibt, so dass

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \tag{3.70}$$

Beispiel In $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

Sei nun A eine nichtleere Teilmenge von V. Man bezeichnet mit Span A die Menge aller Linearkombination von Elementen von A, d.h.

$$\text{Span } A := \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \alpha_1, ..., \alpha_n \in K, v_1, ..., v_n \in A\} \tag{3.72}$$

Wir definieren auch

$$\text{Span } \emptyset = \{0\} \tag{3.73}$$

3.2.1 Ergänzung Unterräume

Zur Erinnerung: Sei V ein Vektorraum über K und A eine nichtleere Teilmenge von V. Man bezeichnet mit Span A die Menge aller Linearkombinationen von Elementen von A, d.h.

$$\text{Span } A := \{\alpha_1, v_1 + ... + \alpha_n v_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a_1, ..., a_n \in K, v_1, ..., v_n \in A\} \tag{3.74}$$

Man setzt auch: Span $\emptyset := \{0\}$. **Notation**: Wir schreiben nun für $\lambda \in K, v \in V$: λv statt $\lambda \cdot v$.

[3] Warum? Aufgabe.

Beispiel in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Span}\{\emptyset\} = \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\} \tag{3.75}$$

$$\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\} = \{\alpha \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\} \tag{3.76}$$

$$= \{\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\0\end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\} \tag{3.77}$$

$$\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}\} = \{\alpha \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \tag{3.78}$$

$$= \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\} \tag{3.79}$$

$$= \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}\} \tag{3.80}$$

$$\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\} = \{\alpha \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \tag{3.81}$$

$$= \{\begin{pmatrix}\alpha - \beta\\\alpha + \beta\\0\end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \tag{3.82}$$

$$= \{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \tag{3.83}$$

denn für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\alpha+\beta}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{\beta-\alpha}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \tag{3.84}$$

$$= \text{Span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}\} \tag{3.85}$$

$$= \text{Span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\} \tag{3.86}$$

$$= \text{Span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\} = \mathbb{R}^3 \tag{3.87}$$

Lemma 3.2.2 *Sei V ein Vektorraum über K und $\emptyset \neq A \subseteq V$. Dann gilt:*

(a) Span A ist ein Unterraum von V

(b) Falls $A \subseteq W \subseteq V$ und W von V ein Unterraum ist, dann Span $A \subseteq W$. Dass heisst, Span A ist der kleinste Unterraum von V der A enthält. Man nennt Span A ***den von A erzeugten Unterraum von V****.*

Beweis

(a) Seien

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \in \text{Span } A \tag{3.88}$$
$$\beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m \in \text{Span } A \tag{3.89}$$
$$\tag{3.90}$$

Dann auch

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n + \beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m \in \text{Span } A \tag{3.91}$$
$$(\lambda\alpha_1)v_1 + ... + (\lambda\alpha_n)v_n \in \text{Span } A, \lambda \in K \tag{3.92}$$
$$\tag{3.93}$$

Also ist Span A ein Unterraum von V.

(b) folgt direkt aus (b). $\square$

Korollar 3.2.3 *Sei V ein Vektorraum über K und $0 \neq A \subseteq V$. Dann gilt*

(a) *Span $A = A$ genau dann wenn A ist ein Unterraum von V*

(b) *Span Span $A =$ Span A*

(c) *$A \subseteq B \subseteq V \Rightarrow$ Span $A \subseteq$ Span B*

Eine Teilmenge E eines Vektorraums V über K heisst ein **Erzeugendensystem von** V, falls

$$\text{Span } E = V \tag{3.94}$$

Anmerkung $V = \text{Span } V$ Also hat V mindestens ein Erzeugendensystem.

V heisst **endlich erzeugt**, wenn es ein endliches Erzeugungssystem von V gibt.

Beispiele

(i) Endliche Erzeugungssysteme von $\mathbb{R}^2$ sind

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}, \{\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\}, \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}01\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\} \tag{3.95}$$

(ii) Der Vektorraum Pol $\mathbb{R}$ der Polynome

$$\phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n \tag{3.96}$$

über $\mathbb{R}$ ist **nicht** endlich erzeugt[4].

(iii)

$$\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\} \tag{3.97}$$

ist ein Erzeugendensystem von $Mat(2,2;\mathbb{R})$ denn für alle $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \delta & \gamma\end{pmatrix} = (\alpha - \beta)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + (\beta - \gamma)\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \tag{3.98}$$

$$+(\gamma - \delta)\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \tag{3.99}$$

[4]für $\phi_1, ..., \phi_n \in$ Pol $\mathbb{R}$) gibt es immer $x^m \in$ Pol $\mathbb{R}$) mit $x^n \notin Span\{\phi_1, ...\phi_n\}$. Aber $\{1, x, x^2, x^3, x^4, ...\}$ ist ein undendliches Erzeugungsystem von Pol $\mathbb{R}$

3.3 Lineare Abhängigkeit

Betrachten Sie $Mat(2, 2; \mathbb{R}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{3.100}$$

Dann gilt

$$v_3 = 2v_1 + (-1)v_2 \tag{3.101}$$
$$2v_1 + (-1)v_2 + (-1)v_3 = 0 \tag{3.102}$$
$$Span\{v_1, v_2, v_3\} = Span\{v_1, v_2\} \tag{3.103}$$

Wir sagen, dass v_1, v_2, v_3 **linear abhängig** sind. Aber bemerken Sie, dass

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \tag{3.104}$$
$$\alpha v_1 + \beta v_3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \tag{3.105}$$
$$\alpha v_2 + \beta v_3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \tag{3.106}$$

v_1, v_2 sind **linear unabhängig** (auch v_1, v_3 und v_2, v_3).
Endlich viele Elemente $v_1, ..., v_n$ eines Vektorraums V üer K heissen **linear abhängig** (über K), wenn es $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ gibt, die nicht alle gleich Null sind und

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \tag{3.107}$$

$v_1, ...v_n$ heissen **linear unabhängig**, falls sie nicht linear abhängig sind, d.h.

$$\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \tag{3.108}$$

für $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ Eine nichtleere Teilmenge $A \subseteq V$ heisst **linear unabhängig**, falls je endlich viele verschiedene Elemente von A linear unabhängig sind. $\emptyset$ heisst auch linear unabhängig.

Anmerkungen

- $\{v\}$ (oder v) ist linear abhängig *genau dann wenn* $\alpha v = 0$ für ein $\alpha \in K$ (mit $\alpha \neq 0$) *genau dann wenn* $v = 0$.
- v, w sind linear abhängig *genau dann wenn* $\alpha v + \beta w = 0$ mit $\alpha, \beta \in K$ und entweder

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow v = (-\frac{\beta}{\alpha})w \tag{3.109}$$
$$\Rightarrow v \in Span\{w\} \tag{3.110}$$

oder

$$\beta \neq 0 \Rightarrow w = (-\frac{\alpha}{\beta})v \tag{3.111}$$
$$\Rightarrow w \in Span\{v\} \tag{3.112}$$

- w ist eine Linearkombination von $v_1, ..., v_n$

$$\Rightarrow w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \alpha_1, ..., \alpha_n \in K \tag{3.113}$$
$$\Rightarrow (-1)w + \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0 \tag{3.114}$$
$$\Rightarrow w_1 v_1 ..., w_n v_n \text{ sind linear abhängig} \tag{3.115}$$

Beispiele

(i) in $\mathbb{R}^3$:

$$\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\} \tag{3.116}$$

ist linear unabhängig

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{3.117}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha+\beta+\gamma\\ \alpha+\beta\\ \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{3.118}$$
$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \tag{3.119}$$

Aber

$$\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\} \tag{3.120}$$

ist linear abhängig.

$$(1) \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{3.121}$$

(ii) in Pol $\mathbb{R}$

- $\{2x - x^2\}$ ist linear unabhängig
- $\{2x - x^2, 4x - 2x^2\}$ ist linear abhängig
- $\{2x - x^2, 5x + x^3\}$ ist linear unabhängig
- $\{1, x, x^2\}$ ist linear unabhängig, denn $\alpha(1) + \beta(x) + \gamma(x^2) = 0$
  $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$
- $\{1, x, x^2, x^3, ...\}$ ist auch linear unabhängig

Lemma 3.3.1 ***(Abhängigkeitslemma)***
Sei V ein Vektorraum über K und $v_1, ..., v_n, w \in V$. Falls $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig sind und $v_1, ..., v_n, w$ linear abhängig sind, dann ist w eine Linearkombination von $v_1, ..., v_n$.

Falls $v_1, ..., v_n, w$ linear abhängig sind, dann gilt

$$\alpha_1, v_1, + \cdots + \beta w = 0 \tag{3.122}$$

für einige $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta \in K$ die nicht alle gleich Null sind.

Falls $\beta = 0$, dann

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \tag{3.123}$$

und $v_1, ..., v_n$ sind linear abhängig.

Andernfalls $B \neq 0$ und

$$w = (-\frac{\alpha}{\beta})v_1 + \cdots + (-\frac{\alpha_n}{\beta})v_n \tag{3.124}$$

dass heisst w ist eine lineare Kombination von $v_1, ..., v_n$ $\square$

Lemma 3.3.2 ***(Schrankenlemma)***
Falls ein Vektorraum V über K ein Erzeugendensystem von n Elementen hat, dann sind je $n+1$ Elemente von v linear abhängig.

Beweis Siehe zum Verständnis zuerst Lemma 3.3.3.
Falls $V = \{0\}$ ist 0 linear abhängig.
Andernfalls, seien

- $V \neq \{0\}$
- $\{v_1, ..., v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V
- $w_1, ..., w_{n+1} \in V$

Dann existieren $\alpha_{ij} \in K$ mit

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v_j (i = 1, ..., n+1) \tag{3.125}$$

$$(= \alpha_{i1} v_1 + \cdots + \alpha_{in} v_n) \tag{3.126}$$

Zu zeigen: es gibt $\beta_1, ..., \beta_{n+1} \in K$ die nicht alle Null sind mit

$$\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i w_i = 0 \tag{3.127}$$

Idee: Diese Gleichung entspricht einem homogenen Gleichungssystem von n Gleichungen in $n+1$ Variablen, welches nach Lemma 3.3.3 eine nicht-triviale Lösung haben muss.

Beobachten Sie, dass

$$\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i w_i = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v_j \right) \tag{3.128}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n} (\beta_i \alpha_{ij} v_j) \tag{3.129}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \alpha_{ij} v_j \right) \tag{3.130}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \alpha_{ij} \right) v_j \tag{3.131}$$

Also genügt es zu finden $\beta_1, ..., \beta_{n+1}$ die nicht alle Null sind mit

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_{ij} \beta_i = 0 (j = 1, ..., n) \tag{3.132}$$

Nämlich soll das Gleichungssystem

$$\alpha_{11}\beta_1 + \cdots + \alpha_{n+1,1}\beta_{n+1} = 0 \tag{3.133}$$

$$\vdots \tag{3.134}$$

$$\alpha_{1n}\beta_1 + \cdots + \alpha_{n+1,n}\beta_{n+1} = 0 \tag{3.135}$$

eine nicht-triviale Lösung haben, eine Konsequenz des Fundamentallemmas. □

3.3.1 Ergänzungen zur linearen Abhängigkeit

Zur Erinnerung: Sei V ein Vektorraum über K:

- $E \subseteq V$ heisst **Erzeugendensystemm**. von V, falls Span $E = V$ (wenn $E = \{v_1, ..., v_n\}$ ist V **endlich erzeugt**).

- $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V (n \geq 1)$ heisst **linear unabhängig**, falls für alle $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$:

  $$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n \in K \tag{3.136}$$

  andernfalls **linear abhängig** ($\emptyset$ heisst linear unabhängig und $E \subseteq V$ heisst linear unabhängig falls je $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq E$ linear unabhängig ist.)

Beispiel Betrachten Sie die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit

$$(\alpha_1 + \beta_1 i) + (\alpha_2 + \beta_2 i) := (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)i \tag{3.137}$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \tag{3.138}$$
$$\lambda \cdot (\alpha + \beta i) := \lambda\alpha + \lambda\beta i(\lambda \in \mathbb{R}) \tag{3.139}$$

$\{1, i\}$ ist ein **Erzeugendensystem** von $\mathbb{C}$, denn

$$\alpha + \beta i = \alpha(1) + \beta(i) \tag{3.140}$$

und auch **linear unabhängig**, denn

$$\alpha(1) + \beta(i) = 0 \tag{3.141}$$
$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0(\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \tag{3.142}$$

Aber in $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$ ist $\{1, i\}$ **linear abhängig**[5], denn

$$(1)(1) + (i)(i) = 0 \tag{3.143}$$

und 1 ist ein **Erzeugendensystem**[6].

Vorausblick Falls $B \subseteq V$ linear unabhängig ist und Erzeugendensystem von V ist, nennt man B eine **Basis** von V.

Beispiel

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \tag{3.144}$$

ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Falls V endlich erzeugt ist, dann haben je zwei Basen von V gleich viele Elemente. Diese Zahl nennt man die **Dimension** von V.

Beispiel $\mathbb{R}^n$ hat Dimension n, $Mat(m, n, \mathbb{R})$ $m \times n$ usw.

Falls V Dimension n hat und $\{v_1, ..., v_n \subseteq V\}$, dann

$$m < n \Rightarrow \{v_1, ..., v_n\} \text{ ist kein Erzeugendensystem von V} m > n \Rightarrow \{v_1, ..., v_m\} \text{ ist linear abhängig.} \tag{3.145}$$

[5]Wir brauchen eine komplexe Zahl.

[6]Ein schwieriges Beispiel; Nomalerweise sind Vektorräume über $\mathbb{R}$, nicht über den Körper $\mathbb{C}$

Beispiel Betrachten Sie $\mathbb{R}^3$ und

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.146}$$

$v_1, v_2, v_1, v_3, v_2, v_3$ sind linear unabhängig.

Doch was ist mit v_1, v_2, v_3? Dies ist linear unabhängig **gdw**

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.147}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.148}$$

genau dann wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.149}$$

hat die Lösungsmenge

$$\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \tag{3.150}$$

Mit dem Gauss-Eliminationsverfahren erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.151}$$

mit derselben Lösungsmenge. Also ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig.

Ist nun $\{v_1, v_2, v_3\}$ auch ein **Erzeugendensystem**? Betrachten Sie

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{3.152}$$

Gibt es $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}? \tag{3.153}$$

$$\tag{3.154}$$

Dass heisst, mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}? \tag{3.155}$$

Mit dem Gauss-Eliminationsverfahren erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \lambda_1 \\ 0 & 2 & 0 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & 0 & 2 & 2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2 \end{array}\right) \tag{3.156}$$

und können immer eine Lösung finden, z.B. für $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$ erhalten wir $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.157}$$

Also ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ ein **Erzeugendensystem** von $\mathbb{R}^3$.

Sei nun K ein beliebiger Körper. Dann heisst

$$\alpha_1 x_1 +_k \cdots +_k \alpha_n x_n = 0 (\alpha_1, ..., \alpha_n \in K) \tag{3.158}$$

eine **homogene** (lineare) Gleichung in (den Variablen) $x_1, ..., x_n$. Ein **homogenes Gleichungssystem** besteht aus m homogenen Gleichungen in $x_1, ..., x_n$, geschrieben:

$$\alpha_{11} x_i + \cdots + \alpha_{1n} x_n = 0 \tag{3.159}$$

$$\vdots \tag{3.160}$$

$$\alpha_{m1} x_i + \cdots + \alpha_{mn} x_n = 0 \tag{3.161}$$

oder mit Matrizen:

$$Ax = 0 \tag{3.162}$$

wobei $A = (a_{ij}) \in Mat(m, n; k)$. Beobachten Sie, dass

- die sogenannte **triviale Lösung**

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K \tag{3.163}$$

  immer eine Lösung ist.

- falls x und y Lösungen sind, dann sind $x + y$ und λx für alle $\lambda \in K$ auch Lösungen.

Also bilden alle Lösungen einen Unterraum von K^n.

Lemma 3.3.3 ***(Fundamentallemma)***
Jedes homogene Gleichungssystem von m Gleichungen in n Variablen besitzt im Fall $1 \leq m < n$ eine nicht-triviale (d.h. $\neq 0$) Lösung.

Beweis Durch Induktion nach n:

- **Induktionsanfang**: $n = 1, m = 1$. Dann hat

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 0 (\alpha, \beta \in K) \tag{3.164}$$

immer eine nichttriviale Lösung:

  - $\alpha \neq 0, \beta \neq 0 : x_1 = \beta, x_2 = -\alpha$
  - $\alpha = 0 : x_1 = 1, x_2 = 0$
  - $\beta = 0 : x_1 = 0, x_2 = 1$

- **Induktionsschritt**
  - **Induktionsannahme:** Die Behauptung gilt für n.
  - **Zu zeigen:** Die Behauptung gilt für $n + 1$.
    Wir betrachten:

$$\alpha_{11} x_1 + \cdots + \alpha_{in} x_n \tag{3.165}$$
$$\vdots \tag{3.166}$$
$$\alpha_{m1} x_1 + \cdots + \alpha_{mn} x_n \tag{3.167}$$
$$(1 \leq m < n) \tag{3.168}$$

und beobachten:

(1) Man darf $\alpha_{11} \neq 0$ annehmen. Falls $\alpha_{ij} = 0$ für alle $i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m\}$ ist jedes $x \in K^n$ eine Lösung. Andernfalls kann man nach Umnummerierung der Gleichungen und Variablen annehmen, dass $\alpha_{11} \neq 0$

(2) Man darf $\alpha_{21} = \cdots = \alpha_{mi} = 0$ annehmen. Man multipliziert die erste Gleichung der Reihe nach mit $\alpha_{21}, ..., \alpha_{mi}$ und subtrahiert das Ergebnis jeweils von dem α11-fachender 2-ten, ..., m-ten Gleichung. Man beachte, dass die Lösungsmenge sich nicht ändert.

Wir betrachten nun die letzten $m - 1$ Gleichungen mit Variablen $x_2, ..., x_n$. Denn $m - 1 < n - 1$, gibt es nach der Induktionsannahme eine nicht-triviale Lösung:

$$x_2 = \lambda_2, \cdots x_n = \lambda_n \tag{3.169}$$

Aber dann auch[7]:

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = 0 \tag{3.170}$$
$$\Rightarrow x_1 = \alpha_{11}^{-1}(-\alpha_{12}\lambda_2 - \cdots - \alpha_{1n}\lambda_n) \tag{3.171}$$

und erhalten eine nicht-triviale Lösung für das System. □

3.4 Basis und Dimension

Eine Teilmenge B eines Vektorraums $V \neq \{0\}$ über K heisst eine **Basis** von K, falls:

(1) B ist ein Erzeugendensystem von V

(2) B ist linear unabhängig.

Man definiert auch $\emptyset$ als Basis von $\{0\}$.

Beispiele

(1) Der Standardraum K^n über K hat eine Basis

$$\{e_1, ..., e_n\} \tag{3.172}$$

wobei

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.173}$$

denn

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \tag{3.174}$$

für alle $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ und alle $\alpha_1 1_1 + ... + \alpha_n e_n = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.175}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \tag{3.176}$$

Man nennt $\{e_1, ..., e_n\}$ die **kanonische Basis von** K^n.

[7] Ein Körper hat immer eine Inverse.

(2) Betrachten Sie

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \end{array} \right\} \tag{3.177}$$

einen Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Wir setzen

$$\lambda := x_3, \mu := x_4 \tag{3.178}$$

und erhalten

$$2x_2 - \mu = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\mu}{2} \tag{3.179}$$

$$x_1 - \frac{\mu}{2} + 2\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\mu}{2} - 2\lambda \tag{3.180}$$

Also

$$W = \{ \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} - 2\lambda \\ \frac{\mu}{2} \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \qquad = \{\lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \tag{3.181}$$

und eine Basis von W ist

$$\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \tag{3.182}$$

oder

$$\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \tag{3.183}$$

Beobachten Sie nun, dass in $\mathbb{R}^3$:

$$v = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.184}$$

$$= \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.185}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \tag{3.186}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3 \tag{3.187}$$

Lemma 3.4.1 ***(Eindeutigkeitslemma)***
Ist B eine basis des Vektorraums $V \neq \{0\}$ über K, dann lässt sich jedes Element von V ***eindeutig*** *als Linearkombination von endlich vielen Elementen aus B schreiben.*

Beweis Denn $V = \text{Span } B$, ist jedes $v \in V$eine Linearkombination von endlich vielen Elementen aus B. Falls[8]

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n && (3.188)\\ &= \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n && (3.189)\\ & b_1, ..., b_n \in B, \alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n \in K && (3.190) \end{aligned}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n) - (\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n) = 0 && (3.191)\\ &\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1)b_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)b_n = 0 && (3.192)\\ &\Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0 && (3.193)\\ &\qquad (b_1, ..., b_n \text{ sind linear unabhängig}) && (3.194)\\ &\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_n = \beta_n && (3.195) \end{aligned}$$

□

Fragen

- Hat **jeder** Verktorraum V eine Basis?
- Haben je zwei Basen von V gleich viele Elemente?
- Kann man jede linear unabhängige Teilmenge von V zu einer Basis erweitern?

Beispiel Seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Mat(2, 2; \mathbb{R} \tag{3.196}$$

Dann ist $\{A_1, A_2\}$ linear unabhängig. Man wählt:

$$A_3 \neq Span\{A_1, A_2\} \tag{3.197}$$

z.B.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.198}$$

[8] Wir können annehmen, dass $b_1, ..., b_n \in B$ in beide Linearkombinationen erscheinen, denn $\alpha i = 0$ oder $\beta i = 0$ möglich ist.

$\{A_1, A_2, A_3\}$ ist linear unabhängig und man wählt

$$A_4 \neq Span\{A_1, A_2, A_3\} \tag{3.199}$$

z.B.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \tag{3.200}$$

Dann ist $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ linear unabhängig und auch ein Erzeugendensystem von $Mat(2, 2; \mathbb{R})$, d.h. eine Basis.

Satz 3.4.2 ***(Basissatz für endlich erzeugte Vektorräume)***
Sei $V \neq \{0\}$ ein endlich erzeugter Vektorraum über K. Dann gilt:

(i) Falls $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq V$ linear unabhängig ist, dann ist entweder $\{a_1, ..., a_r\}$ eine Basis von V, oder es gibt $\{a_{r+1}, ..., a_n\} \subseteq V$, sodass $\{a_1, ..., a_r, a_{r+1}, ..., a_n\}$ eine Basis von V ist.

(ii) V hat eine endliche Basis.

(iii) Je zwei Basen von V haben gleich viele Elemente.

Beweis

(i) V hat ein Erzeugendensystem mit m Elementen. Wir beweisen (i) durch Induktion nach $m - r$ ($m \geq r$ nach Lemma 3.3.2).

- **Induktionsanfang**: $m - r = 0$, d.h. $m = r$. Sei $v \in V$ entweder $v \in \{a_1, ..., a_r\}$ Lemma 3.3.2 ist $\{a_1, ..., a_r, v\}$ linear abhängig. Also ist v nach Lemma 3.3.1 eine Linearkombination von $a_1, ..., a_r$. Deshalb ist $\{a_1, ..., a_r\}$ eine Basis von V.
- **Induktionsschritt**
  - **Induktionsannahme:** Die Behauptung (i) gilt für $m - r - 1$
  - **Zu zeigen:** die Behauptung (i) filt für $m - r$. ist $\{a_1, ..., a_r\}$ ein Erzeugendensystem, dann ist $\{a_1, ..., a_r\}$ eine Basis. Andernfalls gibt es

$$\frac{a_{r+1} \in V}{Span\{a_1, ..., a_r\}} \tag{3.201}$$

    wobei $\{a_1, ..., a_r, a_{r+1}\}$ linear unabhängig ist (Aufgabe)[9]. Nach der Induktionsannahme gibt es $\{a_{r+2}, ..., a_n\} \subseteq V$, so dass $\{a_1, ..., a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, ..., a_n\}$ eine Basis von V ist.

(ii) folgt direkt aus (i) ($\emptyset$ ist linear unabhängig).

[9]Erweitern wir um ein Element, das nicht im Span ist, wird die Kombination der Elemente linear unabhängig

(iii) Nach (ii) hat V eine endliche Basis $B = b_1, ..., b_n$. Sei C eine beliebige Basis von V. $\{b_1, b_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von V, und deshalb sind je $n+1$ Elemente von V nach Lemma 3.3.2 linear abhängig. Denn C linear unabhängig ist, hat C höchstens n Elemente. Vertauscht man hier B und C, so so folgt die Behauptung.

□

Sei nun V ein beliebiger Vektorraum über K.

- falls V eine Basis $\{b_1, ..., b_n\}$ hat, definiert man (nach Satz 3.4.2)

$$\dim V := n \tag{3.202}$$

  wobei $b_1, ..., b_n$ verschiedene Elemente sind.
  Insbesondere gilt dim $\{0\}) = 0$. V hat Dimension n und heisst endlich-dimensional.

- Falls V keine endliche Basis hat, definiert man

$$\dim V := \infty \tag{3.203}$$

Beispiel

- dim $K^n = n$
- dim $Mat(m, n; K) = m \times n$
- dim $\mathbb{C} = 2$[10], eine Basis für $\mathbb{C}$ ist $\{1, i\}$
- dim Pol $\mathbb{R} = \infty$ $(1, x, x^2, ...$ sind linear unabhängig)

Satz 3.4.3 ***(Dimensionssatz)*** *Für einen Vektorraum V über K tritt stets einer der folgenden (sich gegenseitig ausschliessenden) Fälle ein:*

(1) dim $V = 0$ und $V = \{0\}$

(2) V hat eine endliche Dimension $n > 0$ und es gilt

- *V hat n linear unabhängige Elemente.*
- *Je $n + 1$ Elemente aus V sind linear abhängig.*

(3) V hat Dimension ∞ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es n linear unabhängige Elemente.

Beweis Falls V eine Basis $\{b_1, ..., b_n\}$ hat, dann entweder $V = \{0\}$ und dim $V = 0$, oder $V \neq \{0\}$, dim $V = 1$, $\{b_1, ..., b_n\}$ ist linear unabhängig und nach Lemma 3.3.2 sind je $n + 1$ Elemente von V linear abhängig.

Andernfalls dim $V = \infty$ und durch Induktion nach n gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ n linear unabhängige Elemente (sind $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig, dann sind $v_1, ..., v_n, w$ linear unabhängig für jedes $w \in V \setminus Span\{v_1, ..., v_n\}$)

□

[10]Genauer: $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$

Beispiel Vektorräume von Abbildungen
Betrachten Sie für eine nichtleere Menge M den Vektorraum Abb M, K über K mit Verknüpfungen[11]

$$(\phi + \chi)(x) := \phi(x) + \chi(x) \tag{3.204}$$
$$(\lambda\phi)(x) := \lambda \cdot \phi(x)(\lambda \in K) \tag{3.205}$$

Für jedes $a \in M$ definieren wir $\delta_a \in$ Abb M, K durch

$$\delta_a := \begin{cases} 1 \text{ falls } m = a \\ 0 \text{ andernfalls} \end{cases} \tag{3.206}$$

Wenn für verschiedene Elemente $a_1, ..., a_n \in M$ und $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$:

$$\alpha_1\delta_{a_1} + \cdots + \alpha_n\delta_{a_n} = 0 \tag{3.207}$$

dann gilt für jedes $i \in \{1, ..., n\}$

$$(\alpha_1\delta a_1 + \cdots + \alpha_n\delta_{a_n})(a_i) = 0(a_i) \tag{3.208}$$
$$\Rightarrow \alpha_i = 0 \tag{3.209}$$

Also ist $B := \{\delta_a : a \in M\}$ linear unabhängig.

Falls $M = \{a_1, ..., a_n\}$, gilt für jedes $\phi \in$ Abb M, K

$$\phi = \phi(a_1)\delta_{a_1} + \cdots + \phi(a_n)\delta_{a_n} \tag{3.210}$$

Deshalb ist B in diesem Fall eine Basis von Abb M, K.

Falls M unendlich ist, ist B auch unendlich und

$$\dim \text{Abb } M, K = \infty \tag{3.211}$$

In diesem Fall ist B keine Basis von Abb M, K.

Beispiel

$$\phi(x) = 1 \text{ für alle } x \in M \tag{3.212}$$

B ist statt eine Basis von dem Unterraum

$$\text{Abb}[M, K] := \{\phi \in \text{Abb } M, K : \phi(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in M\} \tag{3.213}$$

(Aufgabe)

[11] Der Vektorraum aller Abbildungen von M nach K

Lemma 3.4.4 *Sei $V \neq \{0\}$ endlich erzeugter Vektorraum über K und $W \neq \{0\}$ ein Unterraum von V. Dann gilt:*

(i) W ist endlich erzeugt und dim $W \leq$ dim V

(ii) Aus dim W = dim V folgt $W = V$

Beweis

(i) Sei dim $V = n$. Dann sind je $n + 1$ Elemente aus $W \subseteq V$ linear abhängig (Lemma 3.3.2). Also ist W nach Satz 3.4.3 endlich erzeugt und dim $W \leq n =$ dim V

(ii) Sei dim $v =$ dim $W = n$. Für eine Basis $\{w_1, ..., w_n\}$ von W und $v \in V$ gilt entweder

1. $v \in \{w_1, ..., w_n\}$ oder
2. $\{w_1, ..., w_n, v\}$ ist linear abhängig.

Also ist v nach Lemma 3.3.1 eine Linearkombination von $w_1, ..., w_n$. Daraus folgt

$$V = Span\{w_1, ..., w_n\} = W \tag{3.214}$$

□

Beispiel Betrachten Sie

$$W = Span\{\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^3 \tag{3.215}$$

$$\dim W = 3 \tag{3.216}$$

$$\Rightarrow W = \mathbb{R}^3 \tag{3.217}$$

Beispiel: $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$
Betrachten Sie die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$:

- $\{1, \sqrt{2}\}$ ist linear unabhängig, denn $\sqrt{2}$ ist irrational ($\alpha(1) \neq \sqrt{2}$ für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$.
- $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ ist auch linear unabhängig (Aufgabe).
- Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen. Dann ist

$$\{\sqrt{p} : p \in P\} \tag{3.218}$$

linear unabhängig und deshalb hat $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ Dimension ∞. Der Beweis ist jedoch nicht leicht. Betrachten Sie stattdessen

$$log(\mathbb{P}) := \{log(p) : p \in \mathbb{P}\} \tag{3.219}$$

Falls für $p_1, ..., p_n \in \mathbb{P}$ und $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{Q}$

$$\alpha_1 log(p_1) + \cdots + \alpha_n log(p_n) = 0 \tag{3.220}$$

dann gibt es ein $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit

$$\beta\alpha_1 log(p_1) + \cdots + \beta\alpha_n log(p_n) = 0 \tag{3.221}$$
$$\beta\alpha_1, ..., \beta\alpha_n \in \mathbb{Z} \tag{3.222}$$

Daraus folgt

$$e^{\beta\alpha_1 log(p_1) + \cdots + \beta\alpha_n log(p_n)} = e^0 \tag{3.223}$$

Dass heisst

$$p_1^{\beta\alpha_1} \cdot ... \cdot p_n^{\beta\alpha_n} = 1 \tag{3.224}$$

und nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik:

> *Jedes $n \in \mathbb{N}$ lässt sich als Produkt von endlich vielen Primzahlen darstellen. Ordnet man diese Primzahlen der Grösse nach so ist diese Darstellung **eindeutig**.*

$$\beta\alpha_1 = \cdots = \beta\alpha_n = 0 \tag{3.225}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \tag{3.226}$$

Sei nun W eine beliebige nichtleere Teilmenge eines Vektorraums V über K. Man definiert den **Rang** von W durch

$$\text{Rang } W := \text{dim Span } W \tag{3.227}$$

Beispiel

$$W = \{x^2 - 1, x + 2, 2x^2 + x, x^5 - 1\} \subseteq \text{ Pol } \mathbb{R} \tag{3.228}$$
$$\text{Rang } W = d \text{ dim Span } W = 3 \tag{3.229}$$

($\{x^2 - 1, x + 2, x^5 - 1\}$ ist eine Basis von W, $2x^2 + x = 2(x^2 - 1) + (x + 2)$)

Beachten Sie, dass

$$\text{Rang } W = 0 \Leftrightarrow W = \{0\} \tag{3.230}$$
$$W \subseteq W' \subseteq V \Rightarrow \text{Rang } W \leq \text{ Rang } W' \tag{3.231}$$

Satz 3.4.5 *Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über K Für eine nichtleere teilmenge W von V sind äquivalent:*

(1) $r =$ Rang W

(2) W enthält r linear unabhängige Elemente, und je $r+1$ Elemente von W sind linear abhängig. In diesem Fall ist jede linear unabhängige Teilmenge von W mit r Elementen eine Basis von Span W.

Beweis

- (1) $\Rightarrow$ (2). nach Lemma 3.4.4 ist Span W endlich erzeugt und wir können linear unabhängige Elemente $a_1, ..., a_s \in W$ betrachten, wobei jede Teilmenge von W mit $s+1$ Elementen linear abhängig ist. Dann folgt

$$W \subseteq \text{Span}\{a_1, ..., a_s\} \tag{3.232}$$

nach Lemma 3.3.1 und deshalb

$$\text{Span } W = \text{Span}\{a_1, ..., a_s\} \Rightarrow \tag{3.233}$$
$$r = \dim \text{Span } W \tag{3.234}$$
$$= \dim \text{Span}\{a_1, ..., a_s\} \tag{3.235}$$
$$= s \tag{3.236}$$

- (2) $\Rightarrow$ (1) folgt direkt aus Lemma 3.3.1. □

Lemma 3.4.6 *Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über K. Dann für $W \subseteq V$ und $b \in V$ gilt*

$$b \in \textit{ Span } W \Leftrightarrow \textit{ Rang } W = \textit{ Rang } W \cup \{b\} \tag{3.237}$$

Beweis Aufgabe. □

Ein System von m Gleichungen in den Variablen $x_1, ..., x_n$ mit Koeffizienten α_{ij}, β_i aus $K(i = 1, ..., m, j = 1, ..., n)$, geschrieben

$$\alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \tag{3.238}$$
$$\vdots \tag{3.239}$$
$$\alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_1 \tag{3.240}$$

oder

$$x_1a_1 + \cdots + x_na_n = b \tag{3.241}$$

mit

$$a_j := \begin{pmatrix} \alpha_{ij} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} \in K^m, b := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \in K^m, \tag{3.242}$$

heisst **inhomogenes (lineares) Gleichungssystem**.

Beachten Sie, dass

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b \tag{3.243}$$

hat eine Lösung x

- **genau dann wenn** $b \in \mathrm{Span}\{a_1, ..., a_n\}$
- **genau dann wenn** $\mathrm{Rang}\{a_1, ..., a_n\} = \{a_1, ..., a_n, b\}$ nach Lemma 3.4.6.

Auch für $a_1, ..., a_n \in K^m$.

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b \tag{3.244}$$

hat eine Lösung für jedes $b \in K^m$

- **genau dann wenn** $K^m = \mathrm{Span}\{a_1, ..., a_n\}$
- **genau dann wenn** $\mathrm{Rang}\{a_1, ..., a_n\} = m$.

Zuletzt sei

$$c \in \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \in K^n \tag{3.245}$$

eine beliebige Lösung von

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b \tag{3.246}$$

mit $a_1, ..., a_n, b \in K^m$. Dann ist

$$d = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \in K^n \tag{3.247}$$

eine Lösung

- **genau dann wenn** $\delta_1 a_1 + \cdots + \delta_n a_n = b$
- **genau dann wenn** $\delta_1 a_1 + \cdots + \delta_n a_n = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_n a_n$
- **genau dann wenn** $(\delta_1 - \gamma_1) a_1 + \cdots + (\delta_n - \gamma_n) a_n = 0$
- **genau dann wenn** $d - c$ ist eine Lösung des homogenen Systems $x_1 a_1 + \cdots + x_a a_n = 0$
- **genau dann wenn** $d = c + e$ für eine Lösung von $x_1 a_1 + \cdots + x_a a_n = 0$

Beispiel Betrachten Sie das System über $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & -x_2 & & +x_4 & =-1 \\ -x_1 & -2x_2 & x_3 & -x_4 & =2 \\ & -2x_2 & -3x_3 & +x_4 & =-2 \end{array} \tag{3.248}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \tag{3.249}$$

Eine Lösung ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.250}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -0 \end{array}\right) \tag{3.251}$$

hat Lösungsmenge:

$$\{\lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{3.252}$$

Also hat das ursprüngliche System die Lösungsmenge

$$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{3.253}$$

Kapitel 4

Homomorphismen von Vektorräumen

4.1 Definition, Beispiele und elementare Eigenschaften

Seien V und W Vektorräume über **demselben** Körper K. Eine Abbildung

$$f : V \to W \tag{4.1}$$

heisse ein **Homomorphismus von** V **nach** W[1] falls:

(1) $f(x +_v y) = f(x) +_w f(y)$ für $x, y \in V$

(2) $f(\alpha \cdot_v x) = \alpha \cdot_w f(x)$ für $x \in V, \alpha \in K$

Durch Induktion nach n folgt:

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n) \text{ für } \alpha_1, ..., \alpha_n \in K, x_1, ..., x_n \in V \tag{4.2}$$

Denn f ist ein Gruppenhomomorphismus:

$$f(0_v) = 0_w \tag{4.3}$$

$$f(-x) = -f(x) \text{ für } x \in V \tag{4.4}$$

Beachten Sie auch, dass

$$f : V \to W \tag{4.5}$$

ein Homomorphismus ist **gdw** für $\alpha, \beta \in K, x, y \in V$:

$$f(\alpha x + \beta y) \alpha f(x) + \beta f(y) \tag{4.6}$$

[1]oder lineare Abbildung/Operator/Transformation

Beispiele

(i) Seien V, W Vektorräume über K. Dann ist die **Nullabbildung**

$$0_v^w : V \to W, v \mapsto 0 \tag{4.7}$$

und die identische Abbildung

$$\mathrm{Id}_v : V \to V, v \mapsto v \tag{4.8}$$

Homomorphismen, denn

$$\begin{aligned} 0_v^w(\alpha x + \beta y) &= 0 && (4.9)\\ &= \alpha 0 + \beta 0 && (4.10)\\ &= \alpha 0_v^w(x) + \beta 0_v^w(y) && (4.11) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Id_v(\alpha x + \beta y) &= \alpha x \beta y && (4.12)\\ &= \alpha\ \mathrm{Id}_v(x) + \beta\ \mathrm{Id}_v(y) && (4.13) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 && (4.14)\\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+y\\ y-z \end{pmatrix} && (4.15) \end{aligned}$$

ist ein Homomorphismus, denn

$$\begin{aligned} f(\alpha \begin{pmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2\\ y_2\\ z_2 \end{pmatrix}) & && (4.16)\\ &= f(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2\\ \alpha y_1 + \beta y_2\\ \alpha z_1 + \beta z_2 \end{pmatrix}) && (4.17)\\ &= \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2\\ \alpha y_1 + \beta y_2 - \alpha z_1 - \beta z_2 \end{pmatrix} && (4.18)\\ &= \alpha \begin{pmatrix} x_1 + y_1\\ y_1 - z_1 \end{pmatrix} + \beta\alpha \begin{pmatrix} x_2 + y_2\\ y_2 - z_2 \end{pmatrix} && (4.19)\\ &= \alpha f(\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1 \end{pmatrix}) + \beta f(\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1 \end{pmatrix}) && (4.20) \end{aligned}$$

Beobachten Sie, dass

$$f(f(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix})) = f(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

(iii) Differntiation

$$f: \text{ Pol } \mathbb{R} \to \text{ Pol } \mathbb{R} \tag{4.22}$$
$$\phi(x) \mapsto \phi'(x) \tag{4.23}$$

d.h.

$$f(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n) = alpha_1 + 2\alpha_2 x + \cdots + n\alpha_n x^{n-1} \tag{4.24}$$

ist ein Homomorphismus, denn

$$(\alpha\phi + \beta\chi)' = \alpha\phi' + \beta\chi' \tag{4.25}$$

(siehe dazu Analysis I).

Man nennt einen Homomorphismus $f : V \to W$ einen:

- **Isomorphismus**, wenn f bijektiv ist
- **Endomorphismus**, wenn $V = W$
- **Automorphismus**, wenn $V = W$ und f bijektiv ist.

V und W heissen **isomorph**, geschrieben $V \simeq W$, falls es einen Isomorphismus $f : V \to W$ gibt. Man merkt auch (Aufgabe):

- Sind U, V, W Vektorräume über K und sind $f : U \to V, g : V \to W$ Homomorphismen, so ist

$$g \circ f : V \to W \tag{4.26}$$
$$x \mapsto g(f(x)) \tag{4.27}$$

  ein Homomorphismus.

- Falls $f : V \to W$ ein Isomorphismus ist, so ist die Umekehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ ein Isomorphismus.

  Daraus folgt, dass für einen Vektorraum V

$$GL(V) :)\{f \in \text{ Abb}(V, V) : f \text{ ist ein Automorphismus}\} \tag{4.28}$$

  eine Gruppe ist.

Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ mit einer Basis

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \tag{4.29}$$

und $x^3 - 2, x^2 + x \in \text{Pol}\ \mathbb{R}$.
Dann ist

$$f : \mathbb{R}^2 \to \text{Pol}\ \mathbb{R} \tag{4.30}$$
$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \mapsto \alpha(x^3 - 2) + \beta(x^2 + x) \tag{4.31}$$

ein Homomorphismus mit

$$f(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}) = x^3 - 2 \tag{4.32}$$
$$f(\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}) = x^2 + x \tag{4.33}$$

Lemma 4.1.1 *Seien V, W Vektorräume über K.*

(i) Falls $f : V \to W, g : V \to W$ Homomorphismen sind und $\{b_1, ..., b_n\}$ ein Erzeugendensystem ist, dann gilt

$$f = g \Leftrightarrow f(b_i) = g(b_i) \text{ für } i = 1...n \tag{4.34}$$

(ii) Falls $\{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von V ist und $\{w_1, ..., w_n\} \subseteq W$, dann gibt es einen Homomorphismus

$$f : V \to W \tag{4.35}$$
$$\text{mit } f(b_i) = w_i \text{ für } i = 1...n \tag{4.36}$$

Beweis

(i) ($\Rightarrow$) Trivial.

($\Leftarrow$) Sei $v \in V$. Denn $\{b_1, ..., b_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von V, existieren $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ mit $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$. Dann folgt:

$$f(v) = f(\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n) \tag{4.37}$$
$$= \alpha_1 f(b_1) + \cdots + \alpha_n f(b_n) \text{ (f ist ein Homomorphismus)} \tag{4.38}$$
$$= \alpha_1 g(b_1) + \cdots + \alpha_n g(b_n) \text{ (Annahme)} \tag{4.39}$$
$$= g(\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n) = g(v) \text{(g ist ein Homomorphismus)} \tag{4.40}$$

(ii) Man definiert

$$f : V \to W \text{ durch} \tag{4.41}$$
$$f(x) := \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n \tag{4.42}$$

wobei

$$x = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \tag{4.43}$$

Nach Lemma 3.4.1 ist f **wohl definiert** und auch

$$\lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda(\alpha_1 w_1 \cdots + \alpha_n w_n) + \mu(\beta w_1 + \cdots + \beta_n w_n) \tag{4.44}$$

$$= (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)w_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)w_n \tag{4.45}$$

wobei

$$x = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \tag{4.46}$$

$$x = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n \tag{4.47}$$

Dann folgt:

$$\lambda x + \mu x = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)b_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)b_n \tag{4.48}$$

und

$$f(\lambda x + \mu y) = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)w_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)w_1 \square \tag{4.49}$$

4.2 Kern und Bild

Für Vektorräume V, W und einen Homomorphismus $f : V \to W$ definiert man:

$$\text{Kern } f := \{x \in V : f(x) = 0\} \tag{4.50}$$

$$\text{Bild } f := f(V) := \{f(x) : x \in V\} \tag{4.51}$$

$$\tag{4.52}$$

Beispiel Betrachten Sie den Homomorphismus

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

$$\text{Kern } f = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0, y - z = 0\} \tag{4.54}$$

$$= \{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\} \tag{4.55}$$

$$= \text{ Span}\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \text{ (ein Unterraum von } \mathbb{R}^3) \tag{4.56}$$

$$\text{Bild } f = \{\begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix} : x,y,z \in \mathbb{R}\} \tag{4.57}$$

$$= \{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} : x,y,z \in \mathbb{R}\} \;=\; \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\} = \mathbb{R}^2 \tag{4.58}$$

Beachten Sie, dass

$$\dim \text{Kern } f + \dim \text{Bild } f = \dim V \tag{4.59}$$

$$1 + 2 = 3 \tag{4.60}$$

Lemma 4.2.1 *Seien V, W Vektorräume über K und $f : V \to W$ ein Homomorphismus. Dann gilt:*

(i) Kern f ist ein Unterraum von V.

(ii) Bild f ist ein Unterraum von W.

(iii) f ist injektiv ***gdw*** *Kern $f = \{0\}$*

(iv) $f($ Span $E) =$ Span $f(E)$ für $E \subseteq V$

(v) Ist E Erzeugendensystem von V, so ist $f(E)$ ein Erzeugendensystem von Bild f.

(vi) Sind $a_1, ..., a_n$ linear abhängig, dann sind $f(a_1), ..., f(a_n)$ linear abhängig.

(vii) Sind $f(a_1), ..., f(a_n)$ linear unabhängig, dann sind $a_1, ..., a_n$ linear unabhängig.

(viii) Ist V endl. erzeugt, so ist auch Bild f endl. erzeugt und dim Bild $f \subseteq$ dim V.

Betachten Sie nun die Vektorräume

- $\mathbb{R}^4$ mit einer Basis $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$
- $Mat(2,2;\mathbb{R})$ mit einer Basis $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

Dann ist

$$f : \mathbb{R}^4 \to Mat(2,2;\mathbb{R}) \tag{4.61}$$

definiert durch

$$f(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \alpha_4 b_4) \tag{4.62}$$

$$= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 \tag{4.63}$$

ein Isomorphismus, d.h.

$$\mathbb{R}^4 \simeq Mat(2,2;\mathbb{R}) \tag{4.64}$$

Satz 4.2.2 *Sind V, W endlich-dimensionale Vektorräume über K, dann gilt*

$$dim\ V = \ dim\ W \Leftrightarrow V \simeq W \tag{4.65}$$

Beweis

($\Leftarrow$) Sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus. Wenn V, W endlich erzeugt sind, gilt nach Lemma 4.2.1 (viii)

$$\dim W = \ \dim \text{Bild } f \leq \ \dim V \tag{4.66}$$

Aber f^{-1}ist auch ein Isomorphismus und deshalb

$$\dim V \leq \ \dim W \tag{4.67}$$

($\Rightarrow$) Seien

- $\{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von V
- $\{b_1, ..., w_n\}$ eine Basis von W

Nach Lemma 4.1.1 (ii) gibt es einen Homomorphismus

$$f : V \to W \text{ mit } f(b_i) = w_i, i = 1...n \tag{4.68}$$

$$\tag{4.69}$$

Nach Lemma 4.2.1 (iv):

$$\begin{aligned} f(V) &= f(\text{Span}\{b_1, ..., b_n\}) & (4.70)\\ &= \text{Span}\{f(b_i), ..., f(b_n)\} & (4.71)\\ &= \text{Span}\{w_i, ..., w_n\} & (4.72)\\ & W \text{ ist } \textbf{surjektiv} & (4.73) \end{aligned}$$

Auch

$$\begin{aligned} & f(\alpha_1 b_1 + \cdots \alpha_n b_n) = 0 & (4.74)\\ & \textbf{gdw } \alpha_1 f(b_1) + \cdots + \alpha_n f(b_n) = 0 & (4.75)\\ & \textbf{gdw } \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n = 0 & (4.76)\\ & \textbf{gdw } \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 & (4.77) \end{aligned}$$

d.h. Kern $f = \{0\}$ und nach Lemma 4.2.1 (iii) ist f injektiv. Also ist f ein Isomorphismus. □

Beispiel (zu Satz 4.2.2)

$$Mat(m, n; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{m \cdot n} \tag{4.78}$$

$$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \text{ über } \mathbb{R} \tag{4.79}$$

Korollar 4.2.3

(i) *Ist V ein Vektorraum über K mit Dimension $n \in \mathbb{N}$, dann $V \simeq K^n$*

(ii) *ist $f : V \to W$ ein injektiver Homomorphismus, dann gilt*

$$\dim \mathit{Bild}\ f = \dim V (\mathit{denn}\ \mathit{Bild}\ f \simeq V). \tag{4.80}$$

(iii) *Ist V ein Vektorraum endlicher Dimension und W ist ein Unterraum von V mit $V \simeq W$, dann ist $V = W$ (nach Lemma 3.4.4 (ii)).*

Lemma 4.2.4 *Sei $f : V \to W$ ein injektiver Homomorphismus. Dann gilt*

$$x_1, ..., x_n \text{ sind linear unabhängig} \tag{4.81}$$
$$\Leftrightarrow f(x_1), ..., f(x_n) \text{ sind linear unabhängig} \tag{4.82}$$

Beweis

($\Leftarrow$) Nach Lemma 4.2.1 (vii)

($\Rightarrow$) Sei $x_1, ..., x_n$ lin. unabhängig. Dann gilt

$$\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n) = 0 \tag{4.83}$$
$$\Rightarrow f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = 0 \text{ (da } f \text{ ein Hom. ist)} \tag{4.84}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \text{ (da } f \text{ injektiv ist)} \tag{4.85}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \cdots + \alpha_n = 0 \text{ (Annahme)} \tag{4.86}$$

$\square$

Erinnern Sie sich daran, dass für einen Hom. $f : V \to W$ gilt:

$$\text{Kern } f := \{x \in V : f(x) = 0\} \tag{4.87}$$
$$\text{Bild } f(V) := \{f(x) : x \in V\} \tag{4.88}$$

Beispiel Betrachten Sie den Homomorphismus

$$f : Mat(2, 2; \mathbb{R}) \to \text{Pol } \mathbb{R} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto (\alpha + \beta)x + (\gamma + \delta)x^3 \tag{4.89}$$

Dann ist

$$\text{Kern } f := \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Mat(2,2;\mathbb{R}) : \alpha+\beta = 0, \gamma+\delta = 0\} \tag{4.90}$$

$$= \{\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ \gamma & -\gamma \end{pmatrix} : \alpha, \gamma \in \mathbb{R}\} \tag{4.91}$$

$$= \{\alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} : \alpha, \gamma \in \mathbb{R}\} \tag{4.92}$$

$$= Span\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\} \tag{4.93}$$

und

$$\text{Bild } f = \{(\alpha+\beta)x + (\gamma+\delta)x^3 : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} \tag{4.94}$$

$$= \text{Span}\{x, x^3\} \tag{4.95}$$

Beachten Sie, dass

$$\dim \text{Kern } f + \dim \text{Bild } f = \dim Mat(2,2;\mathbb{R}) \tag{4.96}$$

$$2 + 2 = 4 \tag{4.97}$$

Satz 4.2.5
Ist $f : V \to W$ ein Homomorphismus der Vektorräume, dann gilt:

$$dim\ Kern\ f + dim\ Bild\ f = dim\ V \tag{4.98}$$

Beweis

- Falls dim Kern $f = \infty$, dann ist dim $V = \infty$ (denn Kern f ist ein Unterraum von V) und die Gleichung gilt.
- Falls dim Bild $f = \infty$, dann ist nach Lemma 4.2.1 (viii) V nicht endlich erzeugt und dim $V = \infty$, d.h. die Gleichung gilt.

Ist Kern $f = \{0\}$, so folgt die Behauptung aus Korollar 4.2.3 (ii), denn f ist injektiv. Ähnlicherweise ist Bild $f = \{0\}$, dann folgt $f = 0$ und Kern $f = V$.
Also darf man annehmen, dass Kern $f \neq \{0\}$ und Bild $f \neq \{0\}$ **endlich dimensional** sind.

Sei nun

- dim Kern $f = n$
- $\{a_1, ..., a_n\}$ eine Basis von Kern f
- dim Bild $f = m$
- $\{f(b_1), ..., f(b_m)\}$ eine Basis von Bild f

Beachten Sie, dass

$$\{a_1, ..., a_n\} \cap \{b_1, ..., b_m\} = \emptyset \tag{4.99}$$
$$\text{denn } f(a_1) = 0 \text{ für } i = 1 \cdots n \tag{4.100}$$

Es genügt zu zeigen, dass

$$\{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m\} \tag{4.101}$$

eine Basis von V ist.

⇒Ist dies ein **Erzeugendensystem**?

Sei $v \in V$. Dann ist

$$f(v) \in \text{ Bild } f \tag{4.102}$$

und es gibt $\beta_1, ..., \beta_m \in K$ mit

$$f(v) = \beta_1 f(b_1) + ... + \beta_m f(b_m) \tag{4.103}$$

Also

$$0 = f(v) - \beta_1 f(b_1) - ... - \beta_m f(b_m) \tag{4.104}$$
$$0 = f(v - \beta_1 b_1 - ... - \beta_m b_m) \tag{4.105}$$

d.h.

$$\Rightarrow v - \beta_1 b_1 - ... - \beta_m b_m \in \text{ Kern } f \tag{4.106}$$

und es gibt $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ mit

$$v - \beta_1 b_1 - ... - \beta_m b_m = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n \tag{4.107}$$
$$v = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n + \beta_1 b_1 + ... \beta_m b_m \tag{4.108}$$

Lineare Abhängigkeit?

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 a_1 + ...\alpha_n a_n + \beta_1 b_1 + ...\beta_m b_m = 0 && (4.109)\\
&\Rightarrow f(\alpha_1 a_1 + ...\alpha_n a_n + \beta_1 b_1 + ... + \beta_m b_m = 0) = f(0) && (4.110)\\
&\Rightarrow \alpha_1 f(a_1) + ... + \alpha_n f(a_n) + \beta_1 f(b_1) + ... + \beta_m f(b_m) = 0 && (4.111)\\
&\Rightarrow \beta_1 f(b_1) + ... + \beta_m f(b_m) = 0 && (4.112)\\
&\Rightarrow \beta_1 = ... = \beta_m = 0 && (4.113)\\
&\Rightarrow \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n = 0 && (4.114)\\
&\Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0 && (4.115)
\end{aligned}
$$

□

Zu Satz 4.2.5: Man defniniert auch

$$\text{Rang } f := \text{ dim Bild } f \tag{4.116}$$

(Also: dim Kern f + Rang f = dim V).

Erinnern Sie sich daran, dass für eine **endliche** Menge A und eine Abbildung $\phi : A \to A$

$$\phi \text{ ist injektiv } \Leftrightarrow \phi \text{ ist surjektiv} \tag{4.117}$$

Wir haben etwas ähnliches für Homomorphismen.

Satz 4.2.6 ***(Äquivalenzsatz)***
Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über K mit dim W = dim V und $f : V \to W$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

$$f \textit{ ist injektiv } \Leftrightarrow f \textit{ ist surjektiv} \tag{4.118}$$

Beweis

(⇒) Sei f injektiv. Nach Korollar 4.2.3 (ii) gilt

$$
\begin{aligned}
\text{dim Bild } f = &\text{ dim } V && (4.119)\\
= &\text{ dim } W && (4.120)
\end{aligned}
$$

und nach Satz 4.2.2:

$$\text{Bild } f \simeq W \tag{4.121}$$

Bild f ist ein Unterraum von W. Also

$$\text{Bild } f = W \tag{4.122}$$

nach Korollar 4.2.3 (iii), d.h. f ist **surjektiv**.

($\Leftarrow$) Sei f surjektiv, d.h.

$$\text{Bild } f = W \tag{4.123}$$

Dann gilt nach Satz 4.2.5:

$$\dim \text{Kern } f = \dim V - \dim \text{Bild } f \tag{4.124}$$
$$= 0 \tag{4.125}$$

d.h. Kern $f = \{0\}$.
Deshalb nach Lemma 4.2.1 (iii) ist f injektiv. $\square$

Betrachten Sie nun ein homogenes lineares Gleichungssystem von m Gleichungen in den Variablen $x_1, ..., x_n$, gschrieben

$$\alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n = 0 \tag{4.126}$$
$$\vdots \tag{4.127}$$
$$\alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = 0 \tag{4.128}$$

oder als Gleichung

$$x_1a_1 + \cdots + x_na_n = 0 \tag{4.129}$$

wobei

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix} \in K \text{ für } i = 1...n \tag{4.130}$$

Wir können eine Abbildung definieren:

$$f : K^n \to K^m \tag{4.131}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1a_1 + \cdots + x_na_n \tag{4.132}$$

Beachten Sie, dass

$$f(\lambda x + \mu y) \tag{4.133}$$
$$= (\lambda x_1 + \mu y_1)a_1 + ... + (\lambda x_n + \mu y_n)a_n \tag{4.134}$$
$$= \lambda(x_1a_1 + ... + x_na_n) + \mu(y_1a_1 + ... + y_na_n) \tag{4.135}$$
$$= \lambda f(x) + \mu f(y) \tag{4.136}$$

Also ist f ein Homomorphismus und

- Kern f ist der Lösungsraum des Systems, ein Unterraum von K^n, nach Lemma 3.3.3
$$m < n \Rightarrow \text{ Kern } f \neq \{0\} \tag{4.137}$$
- Bild $f = \text{Span}\{a_1, ..., a_n\}$. Daraus folgt
$$\begin{aligned} \dim \text{Kern } f &= n - \dim \text{Span}\{a_1, ..., a_n\} && (4.138) \\ &= n - \text{Rang}\{a_1, ..., a_n\} && (4.139) \end{aligned}$$

  und nach Satz 3.4.5
- $\text{Rang}\{a_1, ..., a_n\}$
$$= max\{k \in \mathbb{N} : \text{ es gibt k linear unabhängige Elemente unter den } a_1, ..., a_n\} \tag{4.140}$$

Manchmal können wir die Lösungsmenge Kern f durch diese Gleichungen charakterisieren.

Beispiel Betrachten Sie das System über $\mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rrrrl} -x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ 2x_1 & & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & & = 0 \end{array} \tag{4.141}$$
$$\text{oder } x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 = 0 \tag{4.142}$$
$$\text{mit } a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.143}$$

Dann folgt

- $\{a_1, a_2, a_4\}$ ist linear unabhängig
- $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ist linear abhängig, denn $a_3 = a_1 + a_2 + a_4$

Also
$$\text{Rang}\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = 3 \tag{4.144}$$
und der Lösungsraum hat Dimension $4 - 3 = 1$. Wenn
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.145}$$
eine Lösung ist, ist der Lösungsraum
$$\text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \tag{4.146}$$

4.3 Dualräume, Direkte Summen und Komplemente

Sei V ein Vektorraum über Körper K und erinnern Sie sich daran, dass $K(= K^1)$ auch ein Vektorraum ist.

Ein Homomorphismus

$$f : V \to K \tag{4.147}$$

heisst **Linearform** (oder ein **lineares Funktional**).

Beispiele

(i) **Die Standardräume**
Für jedes $i \in \{1...n\}$ ist

$$f_i : K^n \to K, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i \tag{4.148}$$

eine Linearform.

Tatsächlich ist für alle $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$

$$f : K^n \to K, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n \tag{4.149}$$

d.h. $f = \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n$ eine Linearform.

(ii) **Polynome**
Sei $\mathrm{Pol}_n\mathbb{R}$ der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad $\leq n$, d.h.

$$\mathrm{Pol}_n\mathbb{R} = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n : \alpha_0 ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\} \tag{4.150}$$

Dann ist für jedes $\beta \in \mathbb{R}$

$$e_\beta : \mathrm{Pol}_n\mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{4.151}$$
$$\phi \mapsto \phi(\beta) \tag{4.152}$$

eine Linearform, denn

$$e_\beta(\lambda\phi + \mu\chi) = (\lambda\phi + \mu\chi)(\beta) \tag{4.153}$$
$$\phi, \chi \in \ \mathrm{Pol}_n\mathbb{R}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{4.154}$$
$$= \lambda\phi(\beta) + \mu\chi(\beta) \tag{4.155}$$
$$= \lambda e_\beta(\phi) + \mu e_\beta(\chi) \tag{4.156}$$

(iii) **Reelle Folgen**
Erinnerung: F_k ist die Menge aller konvergenten Folgen $a = (a_n | n \in \mathbb{N})$.
Die Abbildung

$$lim : F_k \to \mathbb{R} \tag{4.157}$$
$$a \mapsto \lim a := \lim_{n\to\infty} a_n \tag{4.158}$$

ist eine Linearform, denn

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n + \mu \lim_{n\to\infty} b_n \tag{4.159}$$

(Analysis I)

Die Menge aller Linearformen eines Vektorraums V über K bezeichnet man mit V^*.
Beobachten Sie, dass

$$V^* \subseteq \text{Abb}(V, K) \tag{4.160}$$

und für alle $f, g \in V^*$

$$(f+g)(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y) \tag{4.161}$$
$$\alpha, \beta \in K, x, y \in V \tag{4.162}$$
$$= \alpha f(x) + \beta f(y) + \alpha g(x) + \beta g(y) \qquad (f,\, g \text{ Hom.}) \tag{4.163}$$
$$= \alpha (f+g)(x) + \beta (f+g)(y) \tag{4.164}$$

d.h.

$$f + g \in V^* \tag{4.165}$$

Ähnlicherweise

$$\lambda f \in V^* \text{ für alle } \lambda \in K \tag{4.166}$$

Also ist V^* ein Unterraum von $\text{Abb}(V, K)$, der so genannte **Dual-Raum** zu V.

Frage: Wie beschreibt man V^*?
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $\{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis mit n Elementen.
Nach Lemma 4.1.1(ii) gibt es für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ genau eine Linearform.

$$f_i : V \to K \tag{4.167}$$
$$\text{mit } f_i(b_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \tag{4.168}$$

Satz 4.3.1
$\{f_1, ..., f_n\}$ *(wie oben definiert) ist eine Basis von* V^* *und*

$$dim\ V^* = \ dim\ V \tag{4.169}$$

Beweis Sei $f \in V^*$. Für jedes

$$v = \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n \in V \tag{4.170}$$
$$\alpha_1, ..., \alpha_n \in K \tag{4.171}$$

gilt

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n) && (4.172)\\ &= \alpha_1 f(b_1) + ... + \alpha_n f(b_n) && (4.173)\\ &= \alpha_1 f(b_1) f_1(b_1) + ... + \alpha_n f(b_n) f_n(b_n) && (4.174)\\ &= (f(b_1) f_1 + ... + f(b_n) f_n)(\alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n) && (4.175) \end{aligned}$$

Also

$$f = f(b_1) f_1 + ... + f(b_n) f_n \tag{4.176}$$

und $\{f_1, ..., f_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von V^*.

Auch

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_1 + ...\alpha_n f_n = 0 && (4.177)\\ \Rightarrow (\alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n)(b_i) = 0(b_i) && (4.178)\\ i = 1...n && (4.179)\\ \alpha_i = 0, i = 1...n && (4.180) \end{aligned}$$

Deshalb sind $f_1, ..., f_n$ linear unabhängig und $\{f_1, ..., f_n\}$ ist eine Basis von V^*. $\square$

Sei nun V ein Vektorraum über K mit Unterräumen $W_1, ..., W_n$.
Dann heisst

$$W_1 + ... + W_r := \{w_1 + ... + w_r : w_1 \in W_1, ..., w_r \in W_r\} \tag{4.181}$$

die **Summe** von $W_1, ..., W_r$.
Beachten Sie, dass

- $W_1 + ... + W_r$ ist ein Unterraum von V
- $W_1 + ... + W_r = \text{Span}\{W_1 \cup ... \cup W_r\}$

- dim $(W_1 + ... + W_r)$:

$$\dim (W_1 + ... + W_r) \leq \dim W_1 + ... + \dim W_r \tag{4.182}$$
$$(B_1, ..., B_r \text{ Basen von } W_1, ..., W_r) \tag{4.183}$$
$$\Rightarrow B_1 \cup ... \cup B_r \text{ ist ein Erzeugendensystem von } W_1 + ...W_r \tag{4.184}$$

Beispiel In R^3

$$W_1 = \text{Span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\} \tag{4.185}$$
$$W_2 = \text{Span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\} \tag{4.186}$$
$$W_1 + W_2 = \text{Span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\} \tag{4.187}$$
$$= \mathbb{R}^3 \tag{4.188}$$
$$\dim \mathbb{R}^3 \leq \dim W_1 + \dim W_2 \tag{4.189}$$
$$3 \leq 2 + 2 \tag{4.190}$$

Anmerkung $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$

Falls auch für

$$w_1 \in W_1, ..., w_r \in W_r \tag{4.191}$$
$$w_1 + ...w_r = 0 \Rightarrow w_1 = ... = w_r = 0 \tag{4.192}$$

dann heisst $W_1 + .. + W_r$ die **direkte Summe** von $w_1, ..., w_r$, geschrieben

$$W_1 \bigoplus ... \bigoplus W_r \tag{4.193}$$

Beispiel Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $\{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von V mit n Elementen.
Dann gilt

$$V = Kb_1 \bigoplus ... \bigoplus Kb_n \tag{4.194}$$
$$\text{mit } K_v := \text{Span } v \tag{4.195}$$

denn

$$v = \alpha_1 b_1 + .. + \alpha_n b_n \tag{4.196}$$
$$\alpha_1, ..., \alpha_n \in K \tag{4.197}$$
$$\Rightarrow v \in Kb_1 + ... + Kb_n \tag{4.198}$$
$$\Rightarrow V = Kb_1 + ... + Kb_n \tag{4.199}$$
$$\tag{4.200}$$

und auch

$$\alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n = 0 \tag{4.201}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 b_1 = ... = \alpha_n b_n = 0 \tag{4.202}$$

Satz 4.3.2 *Sei $W = W_1 + ... + W_r$ die Summe der Unterräume $W_1, ..., W_r$ von einem Vektorraum V über K. Dann sind äquivalent:*

(1) $W = W_1 \bigoplus ... \bigoplus W_r$

(2) Jedes $w \in W$ lässt sich eindeutig schreiben als $w = w_1 + ... + w_r$ mit $w_1 \in W_1, ..., w_r \in W_r$.

(3) $W_i \cap (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_r) = \{0\}$ *für* $i = 1...r$

Beweis

(2) ⇒ (3) Wir nehmen (2) an. Sei

$$w_i \in W_1 \cap (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_r) \tag{4.203}$$
$$\tag{4.204}$$

Zu zeigen: $w_i = 0$.
Dann gibt es

$$w_1 \in W_1, ..., w_{i-1} \in W_{i-1}, w_{i+1} \in W_{i+1}, ..., w_r \in W_r \tag{4.205}$$

mit

$$w_i = w_1 + w_{i-1} + w_{i+1} + ... + w_r \tag{4.206}$$

Aus (2): Jedes Element hat eine eindeutige Darstellung, dies gilt auch für $\{0\}$.
Also

$$w_i - w_1 - ... - w_{i-1} - w_{i+1} - ... - w_r = 0 \tag{4.207}$$

und nach (2)

$$w_i = ... = w_r = 0 \tag{4.208}$$

insbesondere $w_i = 0$ und (3) folgt.

(1) ⇒ (2), (3) ⇒ (1) Aufgaben □

Im Falle von zwei Unterräumen W_1, W_2 von V mit $W = W_1 + W_2$ erhalten wir

$$W = W_1 \bigoplus W_2 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\} \tag{4.209}$$

Sei nun

- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$
- $\{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von W_1
- $\{c_1, ..., c_m\}$ eine Basis von W_2

Dann ist nach Satz 4.3.2

$$\{b_1, ..., b_n, c_1, ..., c_m\} \tag{4.210}$$

eine Basis von $W_1 \bigoplus W_2$.
Deshalb

$$\dim W_1 \bigoplus W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 \tag{4.211}$$

Durch Induktion nach r folgt auch für $W = W_1 \bigoplus ... \bigoplus W_r$:

$$\dim W = \dim W_1 + ... + \dim W_r \tag{4.212}$$

Sei V ein Vektorraum über K mit Unterräumen W_1, W_2 wobei

$$V = W_1 \bigoplus W_2 \tag{4.213}$$

Dann heisst W_2 ein **Komplement** von W_1 in V.

Beispiel In $\mathbb{R}^3$

$$W_1 = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\} \tag{4.214}$$

Dann ist

$$\text{Span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \tag{4.215}$$

ein Komplement von W_1 in $\mathbb{R}^3$, aber auch

$$\text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \tag{4.216}$$

Beispiel In $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$: ist Span$\{1+i\}$ ein Komplement von Span$\{1-i\}$, auch z.B. Span$\{5i\}$, Span$\{2i-3\}$ usw.
Frage: Hat jeder Unterraum ein Komplement?

Sei V ein **endlich-dimensionaler** Vektorraum über K und W_1 ein Unterraum von V. Dann hat W_1 nach Lemma 3.4.4 eine Basis $\{v_1, ..., v_m\}$.
Nach Satz 3.4.2 gibt es

$$\{v_{m+1}, ..., v_n\} \tag{4.217}$$

so dass

$$\{v_1, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n\} \tag{4.218}$$

eine Basis von V ist.
Man setzt

$$W_2 = \text{Span}\{v_{m+1}, ..., v_n\} \tag{4.219}$$

und erhält (Beweis: Aufgabe)

$$V = W_1 \bigoplus W_2 \tag{4.220}$$

Anmerkung

$$W_1 = V \Rightarrow m = n \tag{4.221}$$
$$\Rightarrow W_2 = \text{Span } \emptyset \tag{4.222}$$
$$= \emptyset \tag{4.223}$$

Satz 4.3.3 *Ist V endlich-dimensional, so hat jeder Unterraum von V ein Komplement.*

Satz 4.3.4 ***Dimensionsformel für Summen***
Ist V ein endlich-dimensional Vektorraum über K und sind W_1, W_2 Unterräume von V, dann gilt:

$$dim\ (W_1 + W_2) = dim\ W_1 + dim\ W_2 - dim\ (W_1 \cap W_2) \tag{4.224}$$

Beweis Man setzt:

$$W := W_1 + W_2 \tag{4.225}$$
$$W' := W_1 \cap W_2 \tag{4.226}$$

Nach Satz 4.3.3 gibt es Komplemente W_1', W_2' mit

$$(\star)\, W_1 = W' \bigoplus W_1' \text{ und } W_2 = W' \bigoplus W_2' \tag{4.227}$$

Daraus folgt:

$$W = W_1 + W_2 \tag{4.228}$$
$$= (W' + W_1') + (W' + W_2') \tag{4.229}$$
$$= W' + W_1' + W_2' \tag{4.230}$$

Behauptung

$$W = W' \bigoplus W_1' \bigoplus W_2' \tag{4.231}$$
$$v + v_1 + v_2 = 0 (v \in W', v_i \in W_i') \tag{4.232}$$
$$\Rightarrow v_2 = -(v + v_i) \in W_1 \cap W_2' \tag{4.233}$$
$$\Rightarrow v_2 \in W' \cap W_2' = \{0\} \tag{4.234}$$
$$\Rightarrow v_2 = 0 \tag{4.235}$$
$$\tag{4.236}$$

Analog folgt $v_1 = 0$ und $v = 0$.
Also

$$\dim\ W = \dim\ W' + \dim\ W_1' + \dim\ W_2' \tag{4.237}$$
$$(\text{nach } \star) = \dim\ W' + (\dim\ W_1 - \dim\ W') + (\dim\ W_2 - \dim\ W') \tag{4.238}$$
$$= \dim\ W_1 + \dim\ W_2 - \dim\ W' \tag{4.239}$$

□

Korollar 4.3.5 ***Bild-Kern Zerlegung***
Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und ist $f : V \to V$ ein Homomorphismus, dann sind äquivalent:

(1) $V = \text{Bild } f \bigoplus \text{Kern } f$

(2) $\text{Bild } f \cap \text{Kern } f = \{0\}$

Beweis

- (1) $\Rightarrow$ (2) Direkt.
- (2) $\Rightarrow$ (1) Nach Satz 4.3.4:

$$\dim (\text{Bild } f + \text{ Kern } f) \tag{4.240}$$
$$= \dim \text{Bild } f + \dim \text{Kern } f - \dim (\text{Bild } f \cap \text{ Kern } f) \tag{4.241}$$
$$= \dim \text{Bild } f + \dim \text{Kern } f \tag{4.242}$$
$$= \dim V \text{ (nach Satz 4.2.5)} \tag{4.243}$$
$$\Rightarrow \text{ Bild } f + \text{Kern } f = V \text{ (nach Lemma 3.4.4)} \tag{4.244}$$

□

Beispiel

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha x + y \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \tag{4.245}$$
$$\text{Bild } f = \text{ Span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \tag{4.246}$$
$$\text{Kern } f = \text{ Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}\} \tag{4.247}$$
$$\text{Bild } f \bigoplus \text{ Kern } f = \mathbb{R}^2 \tag{4.248}$$
$$\text{Bild } f \cap \text{ Kern } f = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \tag{4.249}$$

Im Allgemeinen gilt $f = f \circ f$ für einen Homomorphismus $f : V \to V$, dann heisst f eine **Projektion** von V und

$$
\begin{aligned}
v \in \text{Bild } f \cap \text{ Kern } f & \quad (4.250)\\
\Rightarrow v = f(w) \text{ für ein } w \in V & \quad (4.251)\\
\Rightarrow 0 = f(v) & \quad (4.252)\\
= f(f(w)) & \quad (4.253)\\
= f(w) & \quad (4.254)\\
= v & \quad (4.255)\\
\Rightarrow \text{Bild } f \cap \text{ Kern } f = \{0\} & \quad (4.256)\\
\Rightarrow V = \text{ Bild } f \bigoplus \text{ Kern } f & \quad (4.257)
\end{aligned}
$$

Kapitel 5

Matrizen

Wir untersuchen nun Matrizen über einen beliebigen Körper K, welche legitime (und wichtige!) mathematische Objekte, Beispiele von Vektorräumen und auch ein entscheidendes Hilfsmittel zur Darstellung von Homomorphismen, Gleichungssystemen usw. sind.

Vorausblick Für $A \in \operatorname{Mat}(m, n; K)$ ist

$$h_A : K^n \to K^m, x \mapsto Ax \tag{5.1}$$

ein Homomorphismus, und umgekehrt ist $f : K^n \to K^m$ ein Homomorphismus, wenn es $A \in \operatorname{Mat}(m, n; K)$ mit $f = h_A$ gibt.

Beispiel

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 - x_3 \\ 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

5.1 Definition und elementare Eigenschaften

Eine $m \times n$ **Matrix** über einen Körper K

$$A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \tag{5.4}$$

bestteht aus $m \cdot n$ **Komponenten** (oder **Elementen**) aus K mit m **Zeilen** und n **Spalten**. Man sagt, dass α_{ij} an der Stelle (ij) steht und hat **Zeilenindex** i und **Spaltenindex** j.

Im Falle $m = n$ nennt man A eine **quadratische** und a_{ii} für $i = 1...n$ die **Diagonalelemente** von A.

Falls auch $\alpha_{ij} = 0$ für $i \neq j$ heisst A eine **Diagonalmatrix**.
Die Menge aller $m \times n$ Matrizen über K bezeichnet man mit

$$Mat(m, n; K) \tag{5.5}$$

$$\text{oder } K^{(m,n;K)} \tag{5.6}$$

und nennt Elemente von

$$K^n = Mat(n, 1; K) = K^{(n,1)} \tag{5.7}$$

Spaltenvektoren und Elemente von

$$K_n = Mat(1, n; K) = K^{(1,n)} \tag{5.8}$$

Zeilenvektoren.
Man schreibt auch

$$Mat(n; K) \text{ statt } Mat(n, n; K) \tag{5.9}$$

Bemerkungen

- $Mat(m, n; K)$ mit **Addition**

  $$(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \tag{5.10}$$

  und **skalarer Multiplikation**

  $$\lambda(\alpha_{ij}) := (\lambda \cdot_K \alpha_{ij}) \tag{5.11}$$

  ein Vektorraum über K.

- $Mat(m, n; K)$ hat **Nullelemente**

  $$0^{(m,n)} = 0 = (0_{ij}) \text{ (mit } O_{ij} = 0_K) \tag{5.12}$$

  und **inversem Element**

  $$-(\alpha_{ij}) = (-\alpha_{ij}) \tag{5.13}$$

- Man definiert für $k = 1...m, l = 1...n$

  $$E_{kl} := (e_{ij}) \tag{5.14}$$

  $$\text{mit } e_{ij} = \begin{cases} 1_K & i = k, j = l \\ 0_K & \text{andernfalls} \end{cases} \tag{5.15}$$

  Dann ist $\{E_{kl} : k = 1...m, l = 1...n\}$

eine Basis (die **kanonische Basis**) von $Mat(m,n;K)$ und $\dim Mat(m,n;K) = m \cdot n$.

Für $A = (\alpha_{ij}) \in Mat(m,n;K)$ definiert man

$$A^t := (\beta_{ij}) \in Mat(m,n;K) \tag{5.16}$$

$$\text{mit } \beta_{ij} := \alpha_{ij} \tag{5.17}$$

das **Transponierte von** A (oder **transponierte Matrix zu** A).

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

Man erhält die Rechenregeln:

$$(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t \tag{5.19}$$

$$(A^t)^t = A \text{ (Aufgabe)} \tag{5.20}$$

und einen Isomorphismus

$$f : Mat(m,n;K) \to Mat(n,m;K), A \mapsto A^t \tag{5.21}$$

Sei $Sym(n;K)$ die Menge aller so genannten **symmetrischen** Matrizen $A \in Mat(n;K)$ mit $A^t = A$.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

Dann ist $Sym(n;K)$ ein Unterraum von $Mat(n;K)$:

$$A^t = A, B^t = B \tag{5.23}$$

$$\Rightarrow (A+B)^t = A^t + B^t = A + B \tag{5.24}$$

$$\Rightarrow (\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A \tag{5.25}$$

Beispiel

$$Sym(2;K) = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in K\} \tag{5.26}$$

hat eine Basis

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} \tag{5.27}$$

und Dimension 3.
Im Allgemeinen setzt man

$$S_{kl} = (s_{ij})\text{mit} \begin{cases} 1 & i = k, j = l \text{ oder } i = l, j = k \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \tag{5.28}$$

$$(S_{kl} = S_{lk}) \tag{5.29}$$

Dann ist

$$\{S_{kl} : 1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq k\} \tag{5.30}$$

eine Basis von $Sym(n; K)$.
Also ist

$$\dim\, Sym(n; K) = 1 + 2 + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \tag{5.31}$$

5.2 Spaltenrang, Zeilenrang und elementare Umformungen

Für $A \in Mat(m, n; K)$ kann man schreiben

$$A = (a_1, ..., a_n) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{5.32}$$

mit **Spaltenvektoren**

$$a_j := \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

und **Zeilenvektoren**

$$b_i := (\alpha_{i1}, ..., \alpha_{in}) \in K^n (i = 1...m) \tag{5.34}$$

Man definiert:

$$\text{Spaltenrang } A := \dim \text{Span}\{a_1, ..., a_n\} \quad (= \text{ Rang}\{a_1, ..., a_n\}) \tag{5.35}$$

$$\text{Zeilenrangrang } A := \dim \text{Span}\{b_1, ..., b_m\} \quad (= \text{ Rang}\{b_1, ..., b_m\}) \tag{5.36}$$

Beobachten Sie, dass

$$\text{Zeilenrang } A = \text{Spaltenrang } A^t \tag{5.37}$$

$$\text{Spaltenrang } A = \text{Zeilenrang } A^t \tag{5.38}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in Mat(2,3,\mathbb{R}) \tag{5.39}$$

$$\text{Spaltenrang } A = \dim \text{Span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\} = 2 \tag{5.40}$$

$$\text{Zeilenrang } A = \dim \text{Span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\} \tag{5.41}$$

Kein Zufall!

Nach Satz 3.4.5 folgt direkt:

Satz 5.2.1 *Sei $A \in Mat(m,n;K)$. Dann sind äquivalent:*

(1) $r =$ Spaltenrang A

(2) Es gibt r linear unabhängige Spaltenvektoren von A und je $r+1$ Spaltenvektoren von A sind linear abhängig. In diesem Fall ist jede linear unabhängige Menge von Spaltenvektoren von A mit r Elementen eine Basis des Spans aller Spaltenvektoren von A.

Satz 5.2.2 *Für $A \in Mat(m,n;K)$ gilt: Spaltenrang A = Zeilenrang A.*

Beweis Sei

$$r := \text{ Spaltenrang } A \tag{5.42}$$
$$s := \text{ Zeilenrang } A \tag{5.43}$$

Bei Vertauschung von Spalten und von Zeilen von A ändern sich r und s nicht.
Deshalb nehmen wir an, dass

(1) Jeder Spaltenvektor ist eine Linearkombination der Spaltenvektoren $a_1, ..., a_r$ (nach Satz 5.2.1)

(2) Die Zeilenvektoren $b_1, ..., b_s$ sind linear unabhängig.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{a_1 \cdots a_r, a_{r+1} \cdots a_n} \left.\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \\ b_{s+1} \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right\} \tag{5.44}$$

$$\tag{5.45}$$

Behauptung: $r \leq s$
Gegenannahme: $s > r$

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$(\star)\sum_{i=1}^{s} a_{ij}x_i = 0, j = 1...r \tag{5.46}$$

von r Gleichungen in s Variablen $x_1, ..., x_s$.
Nach dem Fundamentallemma 3.3.3 gibt es eine nicht-triviale Lösung $x_1, ..., x_s$ wobei nicht alle x_i Null sind. **Zu zeigen:**

$$x_1b_1 + ... + x_sb_s = 0 \tag{5.47}$$

Auch nach (1) existieren $\lambda_{jk} \in K$ mit

$$a_j = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{jk}a_k, j = 1...n \tag{5.48}$$

insbesondere

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{jk}a_{ik} \text{ mit } i = 1...s, j = 1...n \tag{5.49}$$

Also folgt für $j = 1...n$

$$\sum_{i=1}^{s} x_i a_{ij} = \sum_{i=1}^{s} x_i \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_{jk}a_{ik})\right) \tag{5.50}$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_{jk} \left(\sum_{i=1}^{s} x_i a_{ik}\right) \tag{5.51}$$

$$= 0 \text{ (nach } \star) \tag{5.52}$$

Aber dann auch

$$x_1b_1 + ... + x_sb_s = 0 \tag{5.53}$$

denn $b_i = (a_{i1}, ..., a_{in})$ im Widerspruch zu (2).

Also $s \leq r$, und (denn die Behauptung gilt für alle Matrizen über K, insbesondere A^t)

$$r = \text{Spaltenrang } A \tag{5.54}$$

$$= \text{Zeilenrang } A^t \tag{5.55}$$

$$\leq \text{Spaltenrang } A^t \tag{5.56}$$

$$= \text{Zeilenrang } A \tag{5.57}$$

$$= s \tag{5.58}$$

Deshalb $r = s$. □

Deshalb kann man für $A \in Mat(m, n; K)$ definieren:

$$\begin{aligned} \text{Rang } A := & \text{ Spaltenrang } A && (5.59) \\ = & \text{ Zeilenrang } A && (5.60) \end{aligned}$$

es sollte beachtet wernde, dass

$$\text{Rang } A \leq min(m, n) \tag{5.61}$$

Frage: Wie berechnet man Rang A?

Wir beatrachen nun die **elementaren Zeilenumformungen** von $A \in Mat(m, n; K)$.

- **Typ I**: Vertauschung von zwei Zeilen
- **Typ II**: Addition der λ-fachen Zeile i zur Zeile j, wobei $i \neq j$ und $\lambda \in K$

Man definiert analog **Spaltenumformungen** und beobachtet, dass:

- Geht die Matrix B aus A durch elementare Zeilenumformungen hervor, dann geht B^t aus A^t durch die entsprechenden Spaltenumformungen hervor.
- Man beobachtet auch, dass für $v_1, ..., v_n \in K^m$

$$\begin{aligned} \text{Span}\{v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n\} &= \text{Span}\{v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n\} && (5.62) \\ \text{Span}\{v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n\} &= \text{Span}\{v_1, ..., v_i, ..., v_j + \lambda v_i, ..., v_n\} && (5.63) \\ (\text{mit } i \neq j, 0 \neq \lambda \in K) & && (5.64) \end{aligned}$$

Daraus folgt

Satz 5.2.3 ***Invarianz-Satz*** *Bei elementaren Spalten- und Zeilenumformungen ändert sich der Rang eine Matrix nicht.*

Beispiel Betrachten Sie

$$\text{Rang}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\} \tag{5.65}$$

Wir berechnen Rang A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \tag{5.66}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \tag{5.67}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \to \tag{5.68}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \tag{5.69}$$

$$\text{Rang } A = \text{ Rang } B = 3 \tag{5.70}$$

5.3 Matrix-Algebra

Ist $A = (\alpha_{ij}) \in K^{(m,n)}$ und $B = (\beta_{ij}) \in K^{(n,p)}$, dann definiert man

$$AB := (\gamma_{ij}) \in K^{(m,p)} \tag{5.71}$$

mit

$$\gamma_{ij} := \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj} \text{ (mit } i = 1...m, j = 1...p) \tag{5.72}$$

$$(= \alpha_{i1}\beta_{1j} + ... + \alpha_{in}\beta_{nj}) \tag{5.73}$$

Beispiel

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,3)} \tag{5.74}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,2)} \tag{5.75}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \tag{5.76}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.77}$$

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^{(2,2)} \tag{5.78}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^{(2,2)} \tag{5.79}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2(1)+1(2) & 2(0)+1(2) \\ 0(1)+1(2) & 0(0)+1(2) \end{pmatrix} \tag{5.80}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.81}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.82}$$

Lemma 5.3.1 *(i)* $(AB)C = A(BC)$, *mit* $A \in K^{(m,n)}, B = K^{(n,p)}, C \in K^{(p,q)}$

(ii) $A(B+C) = AB + AC$ *mit* $A \in K^{(m,n)}, B, C = K^{(n,p)}$

(iii) $(A+B)C = AC + BC$ *mit* $A, B \in K^{(m,n)}, C = K^{(n,p)}$

(iv) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$ *mit* $A \in K^{(m,n)}, B = K^{(n,p)}$

(v) $(AB)^t = B^t A^t$ *mit* $A \in K^{(m,n)}, B = K^{(n,p)}$

Beweis: Aufgabe. □

Sei nun $A \in K^{(m,n)}$. Man definiert

$$h_A : K^n \to K^m \tag{5.83}$$

durch

$$h_A(x) := Ax \text{ für } x \in K^n \tag{5.84}$$

Nach Lemma 5.3.1 gilt:

$$\begin{aligned} h_A(\lambda x + \mu y) &= A(\lambda x + \mu y), x, y \in K^n, \lambda, \mu \in K && (5.85)\\ &= \lambda Ax + \mu Ay && (5.86)\\ &= \lambda h_A(x) + \mu h_A(y) && (5.87) \end{aligned}$$

dass heisst, h_A ist ein Homomorphismus.

Satz 5.3.2 *Ist $f : K^n \to K^m$ ein Homomorphismus, dann gibt es $A \in K^{(m,n)}$ mit $f = h_A$*

Beweis Betrachten Sie die **kanonischen Basen**

$$\{e_1, ..., e_n\} \text{ von } K^n \tag{5.88}$$

$$\{e_1, ..., e_m\} \text{ von } K^m \tag{5.89}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \tag{5.90}$$

Denn $\{e'_1, ..., e'_m\}$ ist eine Basis von K^m, dann existieren $\alpha_{ij} \in K$ mit

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} e_j, j = 1...m \tag{5.91}$$

Man setzt

$$A = \alpha_{ij} \tag{5.92}$$

und beachte, dass

$$\text{für } j = 1...n \tag{5.93}$$

$$\begin{aligned} f(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} e_j && (5.94)\\ &= Ae_j && (5.95)\\ &= h_A(e_j) && (5.96) \end{aligned}$$

Denn $\{e_1, ..., e_n\}$ ist eine Basis von K^n ist und f und h_A Homomorphismen sind, gilt nach Lemma 4.1.1

$$f = h_A \tag{5.97}$$

□

Beispiel Betrachten Sie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \tag{5.98}$$

mit

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = (2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{5.99}$$

$$f(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{5.100}$$

Man setzt

$$A = \begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{pmatrix} \tag{5.101}$$

und beachtet, dass

$$\begin{aligned}
f(\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}) &= F(\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) && (5.102)\\
&= \alpha f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) + \beta f(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) && (5.103)\\
&= \alpha\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} && (5.104)\\
&= \begin{pmatrix}2\alpha & -\beta\\-3\alpha & +2\beta\end{pmatrix} && (5.105)\\
&= \begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = h_A(\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}) && (5.106)
\end{aligned}$$

Man definert auch:

$$\begin{aligned}
\text{Bild } A &:= \{Ax : x \in K^n\} = \text{Bild } h_A && (5.107)\\
\text{Kern } A &:= \{x \in K^n : Ax = 0\} = \text{Kern } h_A && (5.108)
\end{aligned}$$

und erhält (nach Satz 4.2.5)

$$\begin{aligned}
\dim \text{Kern } A + \text{ Rang } A &= n && (5.109)\\
\text{Kern } A &= \{0\} && (5.110)\\
\Leftrightarrow \text{Bild } A &= K^n && (5.111)\\
\Leftrightarrow \text{Rang } A &= n && (5.112)
\end{aligned}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat(3;K) \tag{5.113}$$

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.114}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+1 \end{pmatrix} = B \tag{5.115}$$

$$1 + 1 = 0 \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } B = 2 \tag{5.116}$$

$$\text{und dim Kern } A = 3 - 2 = 1 \tag{5.117}$$

$$1 + 1 = 0 \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } B = 3 \tag{5.118}$$

$$\text{und dim Kern } A = 3 - 3 = 0 \tag{5.119}$$

Der Vektorraum $Mat(n;K)$ zusammen mit Matrix-Multiplikation ist ein Beispiel einer **assoziativen K-Algebra**.
Im Allgemeinen ist ein Vektorraum V über K zusammen mit einer Abbildung

$$\cdot : V^2 \to V \text{ (Produkt/Multiplikation)} \tag{5.120}$$

$$\tag{5.121}$$

(wir schreiben of ab statt $a \cdot b$) **Algebra über K** (K-Algebra), geschrieben $\mathcal{A} = (V, \cdot)$, falls für alle $\alpha, \beta \in K$ und $x, y, z \in V$:

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha(xz) + \beta(yz) \tag{5.122}$$

$$x(\alpha y + \beta z) = \alpha(xy) + \beta(xz) \tag{5.123}$$

$\mathcal{A}$ heisst

- **assoziativ**, wenn für $x, y, z \in V$
$$(xy)z = x(yz) \tag{5.124}$$
- **kommutativ**, wenn für $x, y \in V$
$$xy = yx \tag{5.125}$$
- **unitär**, wenn es ein **Einselement** $e \in V$ gibt mit
$$\forall x \in V : ex = xe = x \tag{5.126}$$

$Mat(n; K)$ mit Matrixmultiplikation ist eine assoziative K-Algebra mit Einselement: $n \times n$ **Einheitsmatrix**

$$E^{(n)} := (d_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1+1 \end{pmatrix} \tag{5.127}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \tag{5.128}$$

Für $n \geq 2$ ist $Mat(n; K)$ **nicht** kommutativ.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.129}$$

$$\neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.130}$$

Weitere Beispiele

(i) K^n mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ \vdots \\ x_n y_n \end{pmatrix} \tag{5.131}$$

ist eine kommutative assoziative K-Algebra mit Einselement

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.132}$$

(ii) $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ mit

$$(\alpha_1 + \beta_1 i) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\beta_2)i \tag{5.133}$$

ist eine kommutative und assoziative $\mathbb{R}$-Algebra mit Einselement $1 + 0i$.

Bemerkungen

- In einer K-Algebra $\mathcal{A} = (V, \cdot)$ gelten die Rechenregeln für $\alpha \in K, x, y \in V$:

$$\text{(i) } \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \tag{5.134}$$
$$\text{(ii) } 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0, 0 \in V \qquad \text{(iii) } (-x)y = x(-y) = -(xy) \tag{5.135}$$
$$\text{(iv) } (-x)(-y) = xy \text{ (Aufgabe)} \tag{5.136}$$

- Wir können auch Unteralgebren und Homomorphismen von Algebren definieren.

Beachten Sie nun, dass $Mat(n; K)$ $(n \geq 2)$ mit Addition und Multiplikation ein **Ring** ist, aber kein **Körper**. Die Algebra ist nicht kommutativ und es gibt Elemente mit Inversen wie z.B.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat(2; \mathbb{R}) \tag{5.137}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.138}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.139}$$

aber auch Elemente wie z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in Mat(2, \mathbb{R}) \tag{5.140}$$

mit keiner Inverse.
$A \in Mat(n; K)$ heisst **invertierbar** (oder **nicht-singulär**), wenn es $B \in Mat(n; K)$ gibt mit

$$AB = BA = E (= E^{(n)}) \tag{5.141}$$

Man setzt

$$GL(n; K) := \{A \in Mat(n, K) : A \text{ invertierbar}\} \tag{5.142}$$

Das **eindeutig bestimmte** (Aufgabe) B für $A \in GL(n; K)$ mit $AB = BA = E$ nennt man A^{-1}, die **Inverse von A**.

Lemma 5.3.3
Sei $A, B \in GL(n; K)$. Dann gilt

a) $AB \in GL(n; K)$ mit $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

b) $A^{-1} \in GL(n;K)$ *mit* $(A^{-1})^{-1} = A$
c) $0 \neq \alpha \in K \Rightarrow \alpha A \in GL(n;K)$ *mit* $(\alpha A)^{-1} = (\frac{1}{\alpha})A^{-1}$
d) $A^t \in GL(n;K)$ *mit* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Beweis a), b) Aufgabe (vlg. mit Lemma 2.1.2).

(c)

$$(\alpha A)(\frac{1}{\alpha}A^{-1}), \alpha \neq 0 = \frac{1}{\alpha}\alpha(AA^{-1}) \tag{5.143}$$
$$= 1E \tag{5.144}$$
$$= E \tag{5.145}$$

und ähnlicherweise

$$(\frac{1}{\alpha}A^{-1})(\alpha A) = E \tag{5.146}$$
$$\Rightarrow (\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1} \tag{5.147}$$
$$\tag{5.148}$$

(d)

$$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t \text{ (Lemma 5.3.1)} \tag{5.149}$$
$$= E^t \tag{5.150}$$
$$= E \tag{5.151}$$
$$(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t \tag{5.152}$$
$$= E^t \tag{5.153}$$
$$= E \tag{5.154}$$
$$\Rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \tag{5.155}$$

□

Matrixmultiplikation ist assoziativ und $E^{(n)} \in GL(n;K)$ ist ein Einselement. Also ist $GL(n;K)$ ein **Gruppe**: die so genannte **allgemeine lineare Gruppe** (vom Grad n über K).

Fragen

a) Wie entscheidet man ob $A \in Mat(n;K)$ invertierbar ist?

b) Wie berechnet man die Inverse von einer invertbaren Matrix $A \in Mat(n;K)$?

Satz 5.3.4 ***(Äquivalenzsatz für Invertierbarkeit)***
Für $A \in Mat(n;K)$ sind äquivalent:

(i) $A \in GL(n;K)$, *d.h. A ist invertierbar.*

(ii) h_A *ist bijektiv.*

(iii) h_A *ist surjektiv.*

(iv) h_A *ist injekltiv.*

(v) *Die Spalten von A bilden eine Basis von K (d.h. die Spalten von A sind linear unabhängig).*

(vi) *Die Zeilen von A bilden eine Basis von* K^n

(vii) *Rang* $A = n$

(viii) *Es gibt* $B \in Mat(n;K)$ *mit* $AB = E$

(ix) *Es gibt* $B \in Mat(n;K)$ *mit* $BA = E$

Beweis

- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) Satz 4.2.6
- (v) $\Leftrightarrow$ (vi) $\Leftrightarrow$ (vii) Sätze 5.2.1 und 5.2.2
- (i) $\Rightarrow$ (viii), (i) $\Rightarrow$ (ix) Direkt.
- (i) $\Rightarrow$ (iv)

$$h_A(x) = h_A(y) \tag{5.156}$$
$$\Rightarrow Ax = Ay \tag{5.157}$$
$$\Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}Ay \text{ (nach (i)} \tag{5.158}$$
$$\Rightarrow Ex = Ey \tag{5.159}$$
$$\Rightarrow x = y \tag{5.160}$$

  d.h. h_A ist injektiv.

- (ii) $\Rightarrow$ (i) $h_A : K^n \to K^n$ bijektiv $\Leftrightarrow$ es gibt einen Homomorphismus

$$(h_A)^{-1} : K^n \to K^n \tag{5.161}$$
$$\text{mit } (h_A)^{-1}(h_A) \tag{5.162}$$
$$= (h_A)(h_A)^{-1} = \text{ id} \tag{5.163}$$

  Nach Satz 5.3.2 gibt es $B \in Mat(n;K)$ mit $h_B = (h_A)^{-1}$ und daraus folgt

$$AB = BA = E \tag{5.164}$$

- (ix) $\Rightarrow$ (iv) wie (i) $\Rightarrow$ (iv)
- (viii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $y \in K^n$. Man setzt

$$x := By \text{ (mit } AB = E \text{ nach (viii))} \tag{5.165}$$

und erhält

$$h_A(x) = Ax = ABy \tag{5.166}$$
$$= Ey = y \tag{5.167}$$

d.h. h_A ist **surjektiv**. □

Ein Sonderfall (n=2) Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma\delta & \end{pmatrix} \in Mat(2;K) \tag{5.168}$$

$$\tag{5.169}$$

Fall $\alpha = 0$.

$$A \to \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = B \tag{5.170}$$
$$\text{Rang } A = \text{ Rang } B \tag{5.171}$$
$$= \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 2 & \gamma \neq 0 \text{ und } \beta \neq 0 \\ 1 & \text{andernfalls} \end{cases} \tag{5.172}$$

Fall $\alpha \neq 0$.

$$A \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \end{pmatrix} = B \tag{5.173}$$
$$\text{Rang } A = \text{ Rang } B = \begin{cases} 1 & \alpha\delta - \beta\gamma = 0 \\ 2 & \text{andernfalls} \end{cases} \tag{5.174}$$

Man definiert

$$detA := \alpha\delta - \beta\gamma \tag{5.175}$$

und erhält

$$\text{Rang } A = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & \det\ A = 0, A \neq 0 \\ 2 & \det\ A \neq 0 \end{cases} \tag{5.176}$$

Nach Satz 5.3.4: A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ det $A \neq 0$

Beispiel Eine **Diagonalmatrix** $A \in Mat(n;K)$ ist invertierbar **gdw** $\alpha_{11}, ...\alpha_{nn}$ alle ungleich Null sind, und in diesem Fall:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\alpha_{nn}} \end{pmatrix} \tag{5.177}$$

Heute zeigen wir, dass wir durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen von Typ I-III für jedes $A \in K^{(m,n)}$ eine Matrix der From

$$BAC = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}\right\} m \tag{5.178}$$

$$\tag{5.179}$$

erhält, mit Rang $A =$ Rang $BAC = r$, wobei $B \in GL(m;K)$ und $C \in GL(n;K)$ **Produkte von elementaren Matrizen** sind.

Lemma 5.3.5 *Sei $A \in K^{(m,n)}$, $B \in K^{(n,p)}$. Dann gilt*

$$Rang\ AB \leq min(Rang\ A, Rang\ B) \tag{5.180}$$

Beweis Beachten Sie, dass

$$\text{Kern } B \leq \text{ Kern } AB \tag{5.181}$$

$$(Bx = 0 \Rightarrow ABx = 0) \tag{5.182}$$

und deshalb

$$\text{dim Kern } B \leq \text{ dim Kern } AB \tag{5.183}$$

Also

$$\text{dim Kern } B + \text{ Rang } B = p \tag{5.184}$$

$$\text{dim Kern } AB + \text{ Rang } Ab = p \tag{5.185}$$

$$\Rightarrow \text{Rang } AB \leq \text{Rang B} \tag{5.186}$$

Ähnlicherweise

$$\text{Bild } AB \leq \text{Bild } A \tag{5.187}$$

$$((AB)x = A(Bx)) \tag{5.188}$$

$$\Rightarrow \text{AB} \leq \text{Rang } A \tag{5.189}$$

□

Satz 5.3.6 *Sei $A \in K^{(m,n)}$, $B \in GL(m;K)$, $C \in GL(n;K)$.*

$$Rang\ A = RangBAC \tag{5.190}$$

Beweis Nach Lemma 5.3.5:

$$\begin{aligned} \text{Rang } A &\leq \text{Rang } BA &(5.191)\\ &\leq \text{Rang } BB^{-1}A &(5.192)\\ &= \text{Rang } A &(5.193)\\ \Rightarrow \text{Rang } A &= \text{Rang } BA &(5.194)\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \text{Rang } BA &\geq \text{Rang } BAC &(5.195)\\ &\geq \text{Rang } BACC^{-1} &(5.196)\\ &= \text{Rang } BA &(5.197)\\ \Rightarrow \text{Rang } A &= \text{Rang } BA = \text{Rang } BAC &(5.198)\end{aligned}$$

□

Man braucht oft eine nützliche Darstellung einer Matrix $A \in K^{(m,n)}$ mit vier 'Kästchen'

$$\begin{aligned} A_1 &\in K^{(p,q)} &(5.199)\\ A_2 &\in K^{(p,n-q)} &(5.200)\\ A_3 &\in K^{(m-p,q)} &(5.201)\\ A_4 &\in K^{(m-p,n-q)} &(5.202)\end{aligned}$$

für $1 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$.

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right) \tag{5.203}$$

oder für $p = q = 1$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & D \end{pmatrix} \tag{5.204}$$

mit

$$\begin{aligned} a &\in K &(5.205)\\ b &\in K^{(1,n-1)} &(5.206)\\ c &\in K^{(m-1,1)} &(5.207)\\ D &\in K^{(m-1,n-1)} &(5.208)\end{aligned}$$

Wir betrachten nun noch einmal die **elementaren Zeilenumformungen** (und analog definierte **elementare Spaltenumformungen**) von $A \in K^{(m,n)}$.

- **Typ I:** Vertauschung von zwei Zeilen
- **Typ II:** Addition der λ-fachen Zeile i zur Zeile j, wobei $i \neq j$ und $0 \neq \lambda \in K$
- **Typ III** (neu!): Multiplikation einer Zeile i mit $0 \neq \lambda \in K$

Beobachten Sie, dass

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & D \end{pmatrix} \in K^{(m,n)} \tag{5.209}$$

mit $\alpha \neq 0$ erhält man durch elementare Zeilenumformungen (Typ II)

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & D' \end{pmatrix} \tag{5.210}$$

mit Rang $A' =$ Rang A.
Mit Typ III:

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & D' \end{pmatrix} \tag{5.211}$$

Dann erhält man (durch elementare Spaltenumformungen):

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D'' \end{pmatrix} \tag{5.212}$$

mit Rang $S =$ Rang $A''' = 1 +$ Rang D''.
Durch eine Induktion nach m erhält man

Satz 5.3.7 $0 \neq A \in K^{(m,n)}$ *kann durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen in die Form*

$$\begin{pmatrix} E^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r = \text{ Rang } A \tag{5.213}$$

gebracht werden.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in Mat(3;\mathbb{R}) \tag{5.214}$$

$$I : Z_1 \leftrightarrow Z_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.215}$$

$$II : Z_3 \leftrightarrow Z_3 - Z_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.216}$$

$$III : Z_1 \leftrightarrow \frac{1}{2} Z_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.217}$$

$$II : S_3 \leftrightarrow S_3 + S_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.218}$$

$$II : Z_3 \leftrightarrow Z_3 - 2Z_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.219}$$

$$II : Z_2 \leftrightarrow -Z_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.220}$$

$$II : S_3 \leftrightarrow S_3 + S_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.221}$$

$$\text{Rang } A = 2 \tag{5.222}$$

Wir betrachten nun entsprechende **Elementarmatrizen**.
Man setzt für $1 \leq k, l \leq n$, $\lambda \in K$

$$E_{kl} := (e_{kl}) \in Mat(n;K) \tag{5.223}$$

$$\text{mit } e_{ij} := \begin{cases} 1 & i = k, j = l \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \tag{5.224}$$

und definiert

$$(I)_{kl} := E - E_{kk} - E_{ll} + E_{kl} + E_{lk}, (k \neq l) \tag{5.225}$$

Beispiel

$$n = 3, l = 2, k = 1 \tag{5.226}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.227}$$

Weiter definiert man

$$(II)^{\lambda}_{kl} := E + \lambda E_{kl} \tag{5.228}$$

$$(\lambda \neq 0, k \neq l) \tag{5.229}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \quad k \\ \leftarrow \quad l \\ \\ \end{array} \tag{5.230}$$

und weiter

$$(III)^{\lambda}_{k} := E + (\lambda - 1)E_{kk} \tag{5.231}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & 1 & 0 & \\ & & \lambda & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow k (\lambda \neq 0) \\ \\ \\ \end{array} \tag{5.232}$$

Bemerkung Ist $A \in K^{(m,n)}$, so entsteht

(i) $(I)_{kl}A$ aus A durch eine Vertauschung von Zeilen k und l.

(ii) $(II)^{\lambda}_{kl}A$ aus A durch Addition der λ-ten Zeile l zur Zeile k.

(iii) $(III)^{\lambda}_{k}A$ aus A' durch Multiplikation der k-ten Zeile mit λ. Ähnlicherweise entsprechende

$$A(I)_{kl}, A(II)^{\lambda}_{kl}, A(III)^{\lambda}_{k} \tag{5.233}$$

den elementaren Spaltenumformungen.

Also erhält man nach Satz 5.3.7

Satz 5.3.8 ***(Normalformsatz)***
Zu jeder $0 \neq A \in K^{(m,n)}$ gibt es Produkte $B \in K^{(m,n)}$ und $C \in K^{(m,n)}$ von elementaren Matrizen mit

$$BAC = \begin{pmatrix} E^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r = Rang\ A \tag{5.234}$$

Beispiel Betrachten Sie noch einmal

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in Mat(r; \mathbb{R}) \tag{5.235}$$

$$(I)_{1,2} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.236}$$

$$(II)_{3,1}^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.237}$$

$$(III)_1^{\frac{1}{2}} : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.238}$$

$$(II)_{1,3}^{1} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.239}$$

$$\tag{5.240}$$

Wir erhalten

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.241}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.242}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.243}$$

$$\text{und } BAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.244}$$

- **Typ I**

$$(I)_{kl} := E - E_{kk} - E_{ll} + E_{kl} + E_{lk} \tag{5.245}$$

"Vertauschung von Zeilen/Spalten k und l in E".

- **Typ II**

$$(II)^{\lambda}_{kl} := E + \lambda E_{kl} \tag{5.246}$$

'Addition der λ-fachen Zeile l zur Zeile k (oder der λ-fachen Spalte k zur Spalte l in E)".

- **Typ III**

$$(III)^{\lambda}_{k} := E + (\lambda - 1)E_{kk} \tag{5.247}$$

"Multiplikation Zeile/Spalte k mit λ in E".

Korollar 5.3.9 *Für $A \in Mat(n; K)$ sind äquivalent:*

(i) A ist invertierbar ($A \in GL(n; K)$)

(ii) A ist ein Produkt von Elementarmatrizen

Beweis

- **(ii) $\Rightarrow$ (i)** Elementarmatrizen sind invertierbar. Also nach Lemma 5.3.3 ist A invertierbar.

- **(i) $\Rightarrow$ (ii)**

$$\begin{aligned} &\text{A ist invertierbar} && (5.248)\\ \Rightarrow\ &\text{Rang } A = n \text{ (Satz 5.3.4)} && (5.249)\\ \Rightarrow\ &BAC = E \text{ mit } B, C \text{ invertierbar (Satz 5.3.8)} && (5.250)\\ \Rightarrow\ &A = B^{-1}C^{-1} \text{ ist invertierbar.} && (5.251) \end{aligned}$$

□

Korollar 5.3.10 *Sei $A \in GL(n; K)$. Dann gilt*

a) A kann allein durch elementare Zeilenumformungen in E überführt werden.

b) Wenn man die elementaren Zeilenumformungen, die A in E überführen, in derselben Reihenfolge an E ausführt, so erhält man A^{-1}.

Beweis

$$
\begin{aligned}
A \in GL(n;K) & & (5.252)\\
&\Rightarrow A^{-1} \in GL(n;K) & (5.253)\\
&\Rightarrow A^{-1} = B_1, ..., B_m \text{ für Elementarmatrizen (Korollar 5.3.9)} & (5.254)\\
&\Rightarrow B_1, ..., B_m A = E \text{ und a) folgt} & (5.255)\\
&\Rightarrow A^{-1} = B_1, ..., B_m E & (5.256)
\end{aligned}
$$

□

Beispiel Wie suchen A^{-1} mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.257}$$

Wir betrachten:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{5.258}$$

$$I : Z_1 \leftrightarrow Z_3 : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{5.259}$$

$$II : Z_2 \to Z_2 - 2Z_1 : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{5.260}$$

$$II : Z_3 \to Z_3 + Z_2 : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \tag{5.261}$$

$$III : Z_2 \to \frac{1}{2} Z_2 : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \tag{5.262}$$

$$II : Z_1 \to Z_1 - Z_2 : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \tag{5.263}$$

$$II : Z_1 \to Z_1 + Z_3 : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \tag{5.264}$$

Also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.265}$$

Prüfen!

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 12 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.266}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.267}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.268}$$

$$A = (B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6)^{-1} \tag{5.269}$$

$$= B_1^{-1} B_2^{-1} B_3^{-1} B_4^{-1} B_5^{-1} B_6^{-1} \tag{5.270}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.271}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.272}$$

Bemerkung Sei

$$A = (a_1, ..., a_n) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^{(m,n)} \tag{5.273}$$

Dann gilt

$$\text{Bild } A = \text{Span}\{a_1, ..., a_n\} \tag{5.274}$$

$$\text{Bild } A^t = \text{Span}\{b_1^t, ..., b_m^t\} \tag{5.275}$$

und für $B \in GL(m; K)$, $C \in GL(n; K)$

$$\text{Bild}(AC) = \text{Bild } A \tag{5.276}$$

$$((AC)x = A(Cx)) \tag{5.277}$$

$$Ax = (AC)(C^{-1}x) \tag{5.278}$$

$$\text{Bild } (BA)^t = \text{Bild}(A^t B^t) \tag{5.279}$$

$$= \text{Bild } A^t \tag{5.280}$$

D.h. bei elementaren Spaltenumformungen ändert sich der Span der Spalten nicht. Ähnlicherweise ändert sich der Span der Zeilen bei elementaren Zeilenumformungen nicht.

Beispiel Wir suchen eine Basis von

$$\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}\subseteq\mathbb{R}^5\} \tag{5.281}$$

Wir betrachten

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&2&1\\0&2&1&-1&0\\1&0&-1&3&3\\-1&-2&0&0&1\end{pmatrix} \tag{5.282}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&2&1\\0&2&1&-1&0\\0&0&0&1&2\\0&-2&-1&2&2\end{pmatrix} \tag{5.283}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&2&1\\0&2&1&-1&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&1&2\end{pmatrix} \tag{5.284}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&2&1\\0&2&1&-1&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B \tag{5.285}$$

$$\text{Bild } A\neq\text{Bild } B \tag{5.286}$$

$$\text{Bild } A^t=\text{Bild } B^t \tag{5.287}$$

und eine Basis ist

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\2\end{pmatrix}\} \tag{5.288}$$

Wir machen jetzt eine Zusammenfassung der Probleme und Ergebnisse für ein lineares Gleichungssystem

$$Ax=b, A\in K^{(m,n)}, b\in K^m \tag{5.289}$$

(1) Ist $Ax = b$ **lösbar**?

$$Ax = b \text{ ist lösbar} \Leftrightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } (A|b) \tag{5.290}$$

(2) Ist $Ax = b$ **universell lösbar**? D.h. ist $Ax = b$ für alle $b \in K^m$ lösbar?

$$Ax = b \text{ ist universell lösbar} \Leftrightarrow \text{Rang } A = K^m \tag{5.291}$$
$$\Leftrightarrow \text{Rang } A = m \tag{5.292}$$

(3) Was sind die Lösungen von $Ax = b$? Wie beschreibt man die **Lösungsmenge**?

$$\{x \in K^n : Ax = b\}? \tag{5.293}$$

- Kern $A = \{x \in K^n : Ax = 0\}$ ist die Lösungsmenge von $Ax = 0$: ein Unterraum von K^n der Dimension $n-$ Rang A.
- Falls $Aw = b$ für ein b $w \in K^n$, dann gilt

$$Ax = b \Leftrightarrow x = w + y \text{ mit } y \in \text{ Kern } A \tag{5.294}$$

(4) Ist $Ax = b$ **eindeutig lösbar**? D.h.

$$Ax = b\text{und } Ay = b \Rightarrow x = y \tag{5.295}$$
$$Ax = b\text{ist eindeutig lösbar } \Leftrightarrow \text{Kern } A = \{0\} \tag{5.296}$$
$$\Leftrightarrow \text{Rang } A = n \tag{5.297}$$

(5) Und im Sonderfall $m = n$? d.h. $A \in Mat(n; K)$

$$Ax = b \text{ ist universell lösbar} \tag{5.298}$$
$$\Leftrightarrow Ax = b\text{ist für ein } b \in K^m\text{eindeutig lösbar} \tag{5.299}$$
$$\Leftrightarrow \text{Kern } A = \{0\} \tag{5.300}$$
$$\Leftrightarrow \text{Rang } A = n \tag{5.301}$$
$$\Leftrightarrow A \text{ ist invertierbar} \tag{5.302}$$
$$\Leftrightarrow A \text{ ist ein Produkt von Elementarmatrizen} \tag{5.303}$$
$$\Leftrightarrow h_A \text{ ist bijektiv / surjektiv / injektiv} \tag{5.304}$$
$$\text{usw.} \tag{5.305}$$

5.4 Basiswechsel in Vektorräumen

Man kann Elemente aus einem Vektorraum und auch Homomorphismen zwischen (endlich-dimensionalen) Vektorräumen mit verschiedenen Basen (oder Koordinatensystemen) darstellen.
Der Übergang zwischen Basen heisst Basiswechsel.

Beachten Sie, das in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = (-7) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.306}$$

bezüglich der **Standardbasis**

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \tag{5.307}$$

und auch

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + (2) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.308}$$

bezüglich der Basis

$$\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \} \tag{5.309}$$

Wie berechnet man diesen 'Basiswechsel'? D.h. für

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.310}$$

wie findet man

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \tag{5.311}$$

mit

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} ? \tag{5.312}$$

Beobachten Sie, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + (1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.313}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (2) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + (3) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.314}$$

Also

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} && (5.315) \\
&= \alpha((1) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + (1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}) + \beta((2) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + (3) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}) && (5.316) \\
&= (\alpha + 2\beta) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + (\alpha + 3\beta) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} && (5.317)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ \alpha + 3\beta \end{pmatrix} \tag{5.318}$$

Beachten Sie auch, dass

$$\gamma \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (3\gamma - 2\delta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\gamma + \delta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.319}$$

und

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\gamma - 2\delta \\ -\gamma + \delta \end{pmatrix} \tag{5.320}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{5.321}$$

ist die **Übergangsmatrix** von der Basis

$$(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \tag{5.322}$$

zur Basis

$$(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}) \tag{5.323}$$

und

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.324}$$

ist die Übergangsmatrix von

$$(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}) \tag{5.325}$$

zu

$$(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \tag{5.326}$$

Merken Sie zuletzt, dass

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{5.327}$$

Fragen

(1) Gegeben seien zwei geordnete Basen des endlich-dimensionalen Vektorraums V:

$$\mathcal{A} = (a_1, ..., a_n) \tag{5.328}$$
$$\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n) \tag{5.329}$$

Wie berechnet man die **Koordinaten des Vektors**

$$v = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n \in V \tag{5.330}$$

bezüglich $\mathcal{B}$? D.h.

$$v = \beta_1 b_1 + ... + \beta_n b_n? \tag{5.331}$$

(und umgekehrt?)

(2) Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume, $\mathcal{A}$ eine Basis von V und $\mathcal{B}$ eine Basis von W. Wie berechnet man eine **Matrixdarstellung** des Homomorphismus

$$f : V \to W \tag{5.332}$$

bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und

$$\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n) \tag{5.333}$$

eine **geordnete Basis** von V, d.h. $(b_1, ..., b_n) \in V$ und $\{b_1, ..., b_n\}$ ist eine Basis von V mit n Elementen. Man definiert

$$q_B : V \to K^n \tag{5.334}$$

durch

$$q_B(x) := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{5.335}$$

mit

$$x = \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n \tag{5.336}$$

Da sich $x \in V$ eindeutig durch $\mathcal{B}$ ausdrücken lässt, ist q_B wohldefiniert und ein **Isomorphismus** von V in K^n.

Ziel
Seien $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n), \mathcal{C} = (c_1, ..., c_n)$ (geordnete) Basen von V.
Wir suchen "Übergangsmatrizen"

$$T_C^B \in GL(n; K) \text{ von } \mathcal{B} \text{ zu } \mathcal{C} \tag{5.337}$$
$$T_B^C \in GL(n; K) \text{ von } \mathcal{C} \text{ zu } \mathcal{B} \tag{5.338}$$

mit

$$q_B = h_{T_B^C} \circ q_C \tag{5.339}$$

d.h.

$$q_B(x) = T_B^C q_C(x) \tag{5.340}$$
$$q_C = h_{T_C^B} \circ q_B \tag{5.341}$$

d.h.

$$q_C(x) = T_C^B q_B(x) \tag{5.342}$$

Idee

$$T_C^B = (q_C(b_1), ..., q_C(b_n)) \tag{5.343}$$
$$T_B^C = (q_B(c_1), ..., q_B(c_n)) \tag{5.344}$$

Lemma 5.4.1 *Sei V ein Vektorraum über K. Sind $b_1, ..., b_n$ linear unabhängig in V und $A = (\alpha_{ij}) \in Mat(n; K)$. Dann gilt:*

$$A \textit{ ist invertierbar} \Leftrightarrow c_i := \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j (i = 1...n) \textit{ sind linear unabhängig} \tag{5.345}$$

Beweis Beachten Sie, dass

$$A \text{ ist invertierbar} \Leftrightarrow \text{Kern } A = \{0\} \tag{5.346}$$

und

$$(\star) \sum_{i=1}^{n} \beta_i c_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_i \right) b_j \tag{5.347}$$
$$(\beta_1, ..., \beta_n \in K) \tag{5.348}$$

(⇒)

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i c_i = 0 \tag{5.349}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \beta_i = 0, j = 1...n \tag{5.350}$$

Nach ($\star$) sind $b_1, ..., b_n$ linear unabhängig.

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.351}$$

$$\Rightarrow \beta_1 = ... = \beta_n = 0 \text{ } (A \text{ invertierbar}) \tag{5.352}$$

Also sind $c_1, ..., c_n$ linear unabhängig.

(⇐)

$$A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = 0 \tag{5.353}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_i = 0, j = 1...n \tag{5.354}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \beta_i c_i = 0 \text{ (nach } \star) \tag{5.355}$$

$$\Rightarrow \beta_1 = ... = \beta_n = 0 (c_1, ..., c_n \text{ sind linear unabhängig}) \tag{5.356}$$

Also Kern $A = \{0\}$ und A ist invertierbar.

□

Satz 5.4.2
Sei V ein Vektorraum über K mit Basis $(b_1, ..., b_n)$.
Dann sind äquivalent:

(1) $(c_1, ..., c_n)$ ist eine Basis von V.

(2) Es gibt

$$A = (a_{ij}) \in GL(n; K) \tag{5.357}$$

mit

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j, i = 1...n \tag{5.358}$$

A heisst die ***Übergangsmatrix*** *von der Basis* $(c_1, ..., c_n)$ *zur Basis* $(b_1, ..., b_n)$.

Beweis

- (1) $\Rightarrow$ (2). Da $\{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von V ist, existieren $\alpha_{ij} \in K$ mit

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} b_i, i = 1...n \tag{5.359}$$

  und nach Lemma 5.4.1

$$A = (a_{ij} \in GL(n; K))(c_1, ..., c_n \text{ sind linear unabhängig}) \tag{5.360}$$

- (2) $\Rightarrow$ (1)

$$A = (a_{ij}) \in GL(n; K) \tag{5.361}$$

$$\text{mit } c_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_i, i = 1...n \tag{5.362}$$

$$\Rightarrow c_1, ...c_n \text{ sind linear unabhängig (Lemma 5.4.1)} \tag{5.363}$$

$$\Rightarrow \{c_1, ..., c_n\} \text{ ist eine Basis } (\dim V = n) \tag{5.364}$$

□

Satz 5.4.3 *Sei* V *ein Vektorraum über* K *mit Basen*

$$\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n) \text{ und} \tag{5.365}$$

$$\mathcal{C} = (c_1, ..., c_n) \tag{5.366}$$

Für $A \in Mat(n; K)$ *sind dann äquivalent:*

(1) A *ist die Übergangsmatrix von* $\mathcal{C}$ *zu* $\mathcal{B}$.

(2) $q_B = h_A \circ q_C$

In diesem Fall ist A^{-1} *die Übergangsmatrix von* $\mathcal{B}$ *zu* $\mathcal{C}$.

Beweis

- (2) $\Rightarrow$ (1)
  Beachten Sie, dass

$$q_B(c_i) = (h_A \circ q_C)(c_i) \tag{5.367}$$
$$= Ae_i \tag{5.368}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix} \tag{5.369}$$

  d.h.

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j \tag{5.370}$$

  und die Behauptung folg direkt aus Satz 5.4.2.

- (1) $\Rightarrow$ (2)
  Sei $x \in V$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i c_i (c_1, ..., c_n \text{ ist eine Basis}) \tag{5.371}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j \right) \tag{5.372}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \delta_j b_j \text{ mit } \delta_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_{ji} \tag{5.373}$$
$$\left(q_B(x) = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}, q_C(x) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \right) \tag{5.374}$$

  Also

$$(h_A \circ q_C)(x) \tag{5.375}$$
$$= Aq_C(x) \tag{5.376}$$
$$= A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \tag{5.377}$$
$$= q_B(x) \tag{5.378}$$

  Beachten Sie zuletzt, dass

$$Aq_C(x) = q_B(x) \tag{5.379}$$
$$\Rightarrow q_C(x) = A^{-1} q_B(x) \tag{5.380}$$

d.h. A^{-1} ist die Übergangsmatrix von B zu C. □

Man schreibt oft:

$$T_B^C \tag{5.381}$$

für die Übergangsmatrix von C zu B.

Sei nun $V = K^n$ mit der **Standardbasis**

$$B = (e_1, ..., e_n) \tag{5.382}$$

Für eine beliebige Basis von K^n

$$C = (c_1, ..., c_n) \tag{5.383}$$

ist

$$T_B^C = (c_1, ..., c_n) \tag{5.384}$$

und

$$T_B^C = \left(T_B^C\right)^{-1} \tag{5.385}$$

Für eine zusätzliche Basis von K^n

$$D = (d_1, ..., d_n) : \tag{5.386}$$

Wie findet man

$$T_C^D \text{ und } T_D^C? \tag{5.387}$$

Wir haben schon

$$q_C(x) = T_C^B q_B(x) \tag{5.388}$$
$$q_B(x) = T_B^D q_D(x) \tag{5.389}$$

Also

$$q_C(x) = T_C^B T_B^D q_D(x) \tag{5.390}$$

und

$$T_C^D = T_C^B T_B^D \tag{5.391}$$
$$= (T_B^C)^{-1} T_B^D \tag{5.392}$$
$$T_D^C = T_B^D T_B^C \tag{5.393}$$
$$= (T_B^D)^{-1} T_B^C \tag{5.394}$$

Beispiel Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \tag{5.395}$$

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \tag{5.396}$$

$$D = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \tag{5.397}$$

Dann gilt

$$T_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \tag{5.398}$$

$$T_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \tag{5.399}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.400}$$

z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = q_B \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}^{-1} \tag{5.401}$$

$$q_C \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{5.402}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.403}$$

Wir haben auch

$$T_B^D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \tag{5.404}$$

$$T_D^B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.405}$$

Also

$$T_C^D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \tag{5.406}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -\frac{23}{2} \\ -2 & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \tag{5.407}$$

$$T_D^C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \tag{5.408}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{23}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix} \tag{5.409}$$

Seien nun V und W endlich-dimensionale Vektorräume, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V und $C = (c_1, ..., c_n)$ eine Basis von W.

Für einen Homomorphismus

$$f : V \to W \tag{5.410}$$

definiert man

$$\hat{f} : K^n \to K^m \tag{5.411}$$

durch

$$\hat{f} := q_C \circ f \circ q_B^{-1} \tag{5.412}$$

$$\begin{array}{ccccc} & V & \xrightarrow{f} & W & \\ q_B & \downarrow & & \downarrow & q_C \\ & K^n & \xrightarrow{\hat{f}} & K^m & \end{array} \tag{5.413}$$

Nach Satz 5.3.2 gibt es

$$M_C^B(f) \in Mat(m, n; K) \tag{5.414}$$

mit

$$h_{M_C^B}(f) = \hat{f} \tag{5.415}$$

Bemerkungen

(1) Für $M_C^B(f) = (\mu_{ij})$ gilt:

$$(q_C \circ f \circ q_B^{-1})(e_j) \text{ (wobei } j = 1...n) \tag{5.416}$$

$$= h_{M_C^B}(f)(e_j) \tag{5.417}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mu_{ij} e_j \tag{5.418}$$

Daraus folgt

$$f(q_B^{-1}(e_j)) = q_C^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_{ij} e_i\right) \tag{5.419}$$

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu_{ij} q_C^{-1}(e_i) \tag{5.420}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mu_{ij} c_i \tag{5.421}$$

und

$$M_C^B(f) = (q_C(f(b_1)), ..., q_C(f(b_n))) \tag{5.422}$$

(2) Die Abbildung

$$M_C^B : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Mat}(m, n; K) \tag{5.423}$$

ist ein Homomorphismus.

Anmerkung Für $V = W$

$$M_C^B(id) = (q_C(b_1), ..., q_C(b_n)) \tag{5.424}$$

$$= T_C^B \tag{5.425}$$

Betrachten Sie nun zusätzliche Basen

- $B' = (b'_1, ..., b'_n)$
- $C' = (c'_1, ..., c'_n)$

Vielleicht wissen wir schon $M_C^B(f)$ (z.B. B und C sind Standardbasen).

Wie berechnet man

$$M_{C'}^{B'}(f)? \tag{5.426}$$

Behauptung

$$M_{C'}^{B'}(f) = T_{C'}^C M_C^B(f) T_B^{B'} \tag{5.427}$$

Beweis Beachten Sie, dass

$$q_{B'} = h_{T_{B'}^B} \circ q_B \tag{5.428}$$

$$q_{C'} = h_{T_{C'}^C} \circ q_C \tag{5.429}$$

$$h_{M_C^B(f)} = q_C \circ f \circ q_B^{-1} \tag{5.430}$$

Daraus folgt:

$$h_{M_{C'}^{B'}(f)} \tag{5.431}$$

$$= q_{C'} \circ f \circ q_{B'}^{-1} \tag{5.432}$$

$$= h_{T_{C'}^C} \circ q_C \circ f \circ q_B^{-1} \circ (h_{T_{B'}^B}) \tag{5.433}$$

$$= h_{T_{C'}^C} h_{M_C^B}(f) \circ h_{T_B^{B'}} \tag{5.434}$$

$$\text{und } M_{C'}^{B'} = T_{C'}^C M_C^B(f) T_B^{B'} \tag{5.435}$$

□

Beispiele

(1) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$ Wir haben Standardbasen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \tag{5.436}$$

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \tag{5.437}$$

und auch

$$B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \tag{5.438}$$

$$\tag{5.439}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$,

$$C' = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \tag{5.440}$$

$$\tag{5.441}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \tag{5.442}$$

$$f \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta \\ \beta + \gamma \end{pmatrix} \tag{5.443}$$

Wir erhalten

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right) = M_C^B(f) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \tag{5.444}$$

mit

$$M_C^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.445}$$

$$T_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 7 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.446}$$

$$T_C^{C'} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.447}$$

$$T_{C'}^{C} = \left(T_C^{C'} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \tag{5.448}$$

$$\tag{5.449}$$

Also

$$M_{C'}^{B'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 7 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.450}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -17 & 1 & -31 \\ -13 & -1 & -13 \end{pmatrix} \tag{5.451}$$

(2)

$$V = Pol_2(\mathbb{R}) \tag{5.452}$$

$$W = Pol_3(\mathbb{R}) \tag{5.453}$$

$$\mathcal{A} = (1, x, x^2) \text{ (Basis von } V) \tag{5.454}$$

$$\mathcal{B} = (1, (1+x), (1+x)^2, (1+x)^3) \text{ (Basis von } W) \tag{5.455}$$

$$f : V \to W \tag{5.456}$$

$$\phi(x) \mapsto x\phi(x) \tag{5.457}$$

Was ist $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f)$?

Sei

$$\mathcal{C} = (1, x, x^2, x^3) \tag{5.458}$$

Wir erhalten

$$M_C^A(f) = (q_C(f(1)), q_C(f(x)), q_C(f(x^2))) \tag{5.459}$$

$$= (q_C(f(x)), q_C(f(x^2)), q_C(f(x^3))) \tag{5.460}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.461}$$

$$T_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.462}$$

$$T_B^C = \left(T_C^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.463}$$

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = E^{(3)} \tag{5.464}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = T_B^C M_C^A(f) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.465}$$

$$\tag{5.466}$$

Prüfen

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = (q_B(f(1)), q_B(f(x)), q_B(f(x^2))) \tag{5.467}$$

$$= (q_B(x), q_B(x^2), q_B(x^3)) \tag{5.468}$$

$$(-1)(1) + (1)(1+x) = x \tag{5.469}$$

$$(-1)(1) + (-2)(1+x) + 1(1+x)^2 = x^2 \tag{5.470}$$

$$(-1)(1) + (3)(1+x) + (-3)(1+x) + (1)(1+x)^3 = x^3 \tag{5.471}$$

5.5 Definition, Beispiele und elementare Eigenschaften

Eine Abbildung

$$\Delta : Mat(n; K) \to K \tag{5.472}$$

heisse eine **Determinantenfunktion**, falls

(1) $\Delta(B) = \Delta(A)$, wenn B aus A durch Addition einer Spalte zu einer anderen Spalte entsteht, d.h.

$$\Delta(A(II)_{kl}^1) = \Delta(A), k \neq l \tag{5.473}$$

(2) $\Delta(B) = \alpha \cdot \Delta(A)$, wenn B dadurch A entsteht, dass eine Spalte von A mit einem $\alpha \in K$ multipliziert wird, d.h.

$$\Delta(A(III)_k^{\alpha}) = \alpha \cdot \Delta(A) \tag{5.474}$$

($\alpha = 0$ ist **möglich**!)

Anmerkungen

(1) $\Delta(A) = 0$ für alle $A \in Mat(n; K)$ ist eine triviale Determinantenfunktion. Gibt es andere?

(2) Falls $A \in Mat(n; K)$ eine Nullspalte hat, dann nach vorherigem (2)

$$\Delta(A) = 0 \cdot \Delta(A) = 0 \tag{5.475}$$

Vorausblick Für jedes n gibt es eine eindeutig bestimmte Determinantenfunktion

$$det : Mat(n; K) \to K \tag{5.476}$$

mit $det\ E^{(n)} = 1$ und

- $det\ B = det\ A$, falls B aus A durch elementare Zeilenumformungen Typ II entsteht.
- $det\ B = -det\ A$, falls B aus A durch eine Vertauschung von Zeilen oder Spalten entsteht.
- Folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} det\, A \neq 0 &\Leftrightarrow A \text{ ist invertierbar} && (5.477)\\ &\Leftrightarrow \text{Rang } A = n && (5.478)\\ &\Leftrightarrow h_A \text{ ist bijektiv} && (5.479) \end{aligned}$$

- und

$$\begin{aligned} det(AB) &= (det\, A)(det\, B) && (5.480)\\ det(A^t) &= det\, A && (5.481)\\ det(\alpha A) &= \alpha^n det\, A && (5.482) \end{aligned}$$

- weiter

$$A^{-1} = \frac{1}{det\, A} A^{\#} (A^{\#} \text{ ist die } \textbf{adjungierte} \text{ Matrix zu } A) \tag{5.483}$$

Lemma 5.5.1 *Für jede Determinantenfunktion* $\Delta : Mat(n;K) \to K$ *gilt*

(i) *Rang* $A < n \Rightarrow \Delta(A) = 0$

(ii) $\Delta(E) = 0 \Rightarrow \Delta(A) = 0$ *für alle* $A \in Mat(n;K)$

Beweis Nach Satz 5.3.8 gibt es für $A \in Mat(n;K)$ invertierbare Elementarmatrizen B, C mit

$$BAC = \begin{pmatrix} E^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ Rang } A = r \tag{5.484}$$

(i) Falls $r = \text{Rang } A < n$, hat $AC = B^{-1}BAC$ eine Nullspalte und

$$\Delta(AC) = 0 \tag{5.485}$$

AC entsteht aus A durch elementare Spaltenumformungen Typ I-III und deshalb auch (Aufgabe) durch elementare Spaltenumformungen

$$(II)^1_{kl}(k \neq l) \tag{5.486}$$

$$\text{und } (III)^\alpha_k(0 \neq \alpha \in K) \tag{5.487}$$

Daraus folgt

$$0 = \Delta(AC) \tag{5.488}$$

$$= \lambda\Delta(A) \text{ (für ein } 0 \neq \lambda \in K) \tag{5.489}$$

$$\tag{5.490}$$

Also

$$\Delta(A) = 0 \tag{5.491}$$

(ii) Sei $\Delta(E) = 0$ und $A \in Mat(n;K)$. Falls Rang $A < n$, ist $\Delta(A) = 0$ nach (i). Andernfalls ist Rang $A = n$ und $BAC = E$. Also

$$A = EB^{-1}C^{-1} \tag{5.492}$$

und A entsteht aus E durch elementare Spaltenumformungen Typ $(II)^1_{k,l}(k \neq l)$ und $(III)^\alpha_k(0 \neq \alpha \in K)$. Daraus folgt

$$\Delta(A) = \lambda \cdot \Delta(E)(\lambda \in K) \tag{5.493}$$

$$= 0 \tag{5.494}$$

$\square$

Korollar 5.5.2

(i) *Sind* $\Delta_1 : mat(n;K) \to K$ *und* $\Delta_2 : Mat(n;K) \to K$ *Determinantenfunktion, dann gilt*

$$\Delta_1(E) \cdot \Delta_2(A) = \Delta_2(E) \cdot \Delta_1(A) \tag{5.495}$$

für alle $A \in Mat(n;K)$

(ii) *Ist* $\Delta : Mat(n;K) \to K$ *eine Determinantenfunktion mit* $\Delta(E) = 1$, *dann gilt:*

$$\Delta(AB) = \Delta(A) \cdot \Delta(B) \tag{5.496}$$

für alle $A, B \in Mat(n;K)$

Beweis

(i) Die Abbildung

$$\Delta(A) := \Delta_1(E) \cdot \Delta_2(A) - \Delta_2(E) \cdot \Delta_1(A) \tag{5.497}$$

ist eine Determinantenfunktion (Aufgabe) mit $\Delta(E) = 0$. Also gilt nach Lemma 5.5.1

$$\Delta(A) = 0 \tag{5.498}$$

und deshalb

$$\Delta_1(E)\Delta_2(A) = \Delta_2(E)\Delta_1(A) \tag{5.499}$$

(ii) Seien $A, B \in Mat(n;K)$. Die Abbildungen

$$\Delta_1(C) := \Delta(C) \tag{5.500}$$
$$\Delta_2(C) := \Delta(AC) \tag{5.501}$$

sind Determinantenfunktion (Aufgabe). Also gilt nach (i)

$$\Delta_1(E)\Delta_2(B) = \Delta_2(E)\Delta_1(B) \tag{5.502}$$
$$\Rightarrow 1\Delta(AB) = \Delta(AE)\Delta(B) \tag{5.503}$$
$$\Rightarrow \Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B) \tag{5.504}$$

□

Frage Existiert für jedes n eine Determinantenfunktion

$$\Delta : Mat(n;K) \to K \text{mit } \Delta(E^{(n)}) = 1? \tag{5.505}$$

Idee Durch Induktion nach n:

- $n = 1$ $det(\alpha) = \alpha$
- $n = 2$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \tag{5.506}$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{22} \tag{5.507}$$

$$(= \alpha_{11}det(\alpha_{22}) - \alpha_{12}det(\alpha_{22})) \tag{5.508}$$

- $n = 2$

$$det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\alpha_{23} & \\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\alpha_{33} & \end{pmatrix} = \alpha_{11} det \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \tag{5.509}$$

$$-\alpha_{12} det \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{pmatrix} + \alpha_{13} det \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix} \tag{5.510}$$

$$= (\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}) + (\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}) + (\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}) \tag{5.511}$$

$$-(\alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13}) - (\alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11}) - (\alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12}) \tag{5.512}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{matrix} \tag{5.513}$$

Eine Abbildung

$$\Delta : Mat(n; K) \to K \tag{5.514}$$

heisst **(Spalten-) multilinear**, fals Δ linear in jedem Spaltenvektor ist, d.h. für alle $a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n \in K$:

$$x \mapsto \Delta(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n) \tag{5.515}$$

ist ein Homomorphismus.

$$\Delta(a_1, ..., a_{i-1}, \alpha x + \beta y, a_{i+1}, ..., a_n) = \tag{5.516}$$

$$\alpha\Delta(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n) + \beta\Delta(a_1, ..., a_{i-1}, y, a_{i+1}, ..., a_n) \tag{5.517}$$

Satz 5.5.3 *Für jedes n gibt es eine multilineare Determinantenfunktion*

$$det : Mat(n;K) \to K \tag{5.518}$$

mit $detE = 1$.

Beweis Durch Induktion nach n

- **Induktionsanfang**: $n = 1$

$$det(\alpha) := \alpha \tag{5.519}$$

- **Induktionsschritt**
  Induktionsannahme: die Behauptung gilt für $n-1$. Sei

$$A = (\alpha_{ij}) \in Mat(n;K) \tag{5.520}$$
$$= (a_1 ... a_n) \tag{5.521}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \tag{5.522}$$
$$\text{mit } a_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ b_i \end{pmatrix} \in K^n \tag{5.523}$$

  und

$$B_k := (b_1, ..., b_k, ..., b_n) \tag{5.524}$$

  die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die aus $(b_1, ..., b_n)$ durch weglassen der k-ten Spalte entsteht.
  Nach Induktionsannahme sind $detB_k$ für $k = 1...n$ definiert und multilinear.

  Man setzt nun

$$detA := \sum_{k-1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{1k} det(B_k) \tag{5.525}$$

Da $detB_k$ für $k = 1...n$ multilinear sind, ist auch $detA$ multilinear (Aufgabe). Daraus folgt

$$det\left(A(III)_k^{\alpha}\right) = \alpha \cdot detA(\alpha \in K) \tag{5.526}$$

Zu zeigen:

$$det\left(A(II)_{kl}^{1}\right) = detA(k \neq l) \tag{5.527}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise betrachten wir den Fall $k = 1, l = 2$.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} + \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} + \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.528}$$

$$\begin{aligned}
& det(a_1 + a_2, a_2, ..., a_n) && (5.529)\\
& = (\alpha_{11} + \alpha_{12}) det(b_2, b_3, ..., b_n) && (5.530)\\
& - \alpha_{12} det(b_1 + b_2, b_3, ..., b_n) && (5.531)\\
& + \alpha_{13} det(b_1 + b_2, b_2, b_4, ..., b_n) && (5.532)\\
& + \cdots && (5.533)\\
& - \cdots && (5.534)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \alpha_{11} det(b_2, ..., b_n) && (5.535)\\
& + \alpha_{12} det(b_2, ..., b_n) && (5.536)\\
& - \alpha_{12} det(b_1, b_3, ..., b_n) && (5.537)\\
& - \alpha_{12} det(b_2, b_3, ..., b_n) && (5.538)\\
& + \alpha_{13} det(b_1, ..., b_2, b_4, ..., b_n) && (5.539)\\
& - \cdots && (5.540)\\
& = det(a_1, ..., a_n) && (5.541)
\end{aligned}$$

Man beachtet auch, dass

$$\begin{aligned}
detE^{(n)} = (-1)^n (1) detE^{(n-1)} && (5.542)\\
+0 + \cdots + 0 && (5.543)\\
= 1 && (5.544)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung Sei $\Delta : Mat(n; K) \to K$ eine Determinantenfunktion. Dann gilt nach Korollar 5.5.2 für alle $A \in Mat(n; K)$

$$\begin{aligned}
detE \cdot \Delta(A) = \Delta(E) \cdot detA && (5.545)\\
\Rightarrow \Delta(A) = \Delta(E) \cdot detA && (5.546)
\end{aligned}$$

Falls auch $\Delta(E) = 1$, ist

$$\Delta(A) = detA \tag{5.547}$$

D.h. $det\,A$ mit der Eigenschaft $det\,E = 1$ ist die eindeutig bestimmte Determinantenfunktion. Man nennt $det\,A$ die **Determinante** der Matrix A.

Die **Determinante** der Matrix $A \in Mat(n;K)$, $det\ A$ oder $|A|$, ist induktiv definiert durch

$$det(\alpha) := \alpha \tag{5.548}$$

$$det\,A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{lk} det\,B_k \tag{5.549}$$

wobei B_k die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A durch Weglassen der ersten Zeile und k-ten Spalte entsteht.

Frage: Wie berechnet man $det\,A$?

Bemerkung

$$det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & \alpha_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 \\ * & \cdots & * & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \alpha_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ * & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ * & \cdots & * & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.550}$$

$$= \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn} \tag{5.551}$$

Beispiel

$$det \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (-5)(1)(7)(2) = -70 \tag{5.552}$$

Lemma 5.5.4 *Sei $A, B \in Mat(n; K)$.*
Dann gilt:

(i) $det(AB) = (det\ A) \cdot (det\ B)$

(ii) $det(A^t) = det\ A$

(iii) $det(A(III)_k^\alpha) = det((III)_k^\alpha A) = \alpha\ det\ A, \alpha \in K$

(iv) $det(A(II)_{kl}^\lambda) = det((II)_{kl}^\lambda A) = det\ A, k \neq l, \lambda \in K$

(v) $det(A(I)_{kl}) = det((I)_{kl} A) = -det\ A$

(vi) $det(\alpha A) = \alpha^n \cdot det\ A$

Beweis

(i) Korollar 5.5.2 (ii).

(ii)

$$RangA < n \Rightarrow RangA^t < n \Rightarrow detA = det(A^t) = 0 \tag{5.553}$$
$$RangA = n \Rightarrow A = A_1, ..., A_m \tag{5.554}$$
$$\text{(für Elementar-Matrizen } A_1, ..., A_m \text{ (Korollar 5.3.9))} \tag{5.555}$$
$$detA = det(A_1, ..., A_m) = (detA_1)...(detA_m) \text{ nach (i)} \tag{5.556}$$
$$= (detA_1^t)...(detA_m^t) \text{ (Aufgabe)} \tag{5.557}$$
$$= det(A_m^t ... A_1^t) \text{ nach (i)} \tag{5.558}$$
$$= det((A_1, ..., A_m)^t) \tag{5.559}$$
$$= detA^t \tag{5.560}$$

(iii) , (iv) folgen direkt aus der Definition einer Determinantenfunktion und (ii).

(v) Seien

$$A = (a_1, ..., a_k, ..., a_l, ..., a_n) \tag{5.561}$$

Dann gilt nach (iii), (iv):

$$detA = det(a_1, ..., a_k + a_l, ..., a_l, ..., a_n) \tag{5.562}$$
$$= det(a_1, ..., a_k + a_l, ..., a_l - (a_k + a_l), ..., a_n) \tag{5.563}$$
$$= det(a_1, ..., a_k + a_l, ..., -a_k, ..., a_n) \tag{5.564}$$
$$= det(a_1, ..., a_l, ..., -a_k, ..., a_n) \tag{5.565}$$
$$= -det(a_1, ..., a_l, ..., -a_k, ..., a_n) \tag{5.566}$$

(vi) folgt direkt aus (iii).

□

Beispiele in $Mat(4;\mathbb{R})$

(i)

$$det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \tag{5.567}$$

$$= -det \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \tag{5.568}$$

$$= -(7)(3)(-7) = 147 \tag{5.569}$$

(ii)

$$det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \\ 7 & -3 & 9 & 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.570}$$

$$(Z_2 = -2 \cdot Z_1) \tag{5.571}$$

(iii)

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -9 \\ 3 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & 16 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.572}$$

$$= det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & -7 & -45 \end{pmatrix} \tag{5.573}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -45 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{pmatrix} \tag{5.574}$$

$$= -(-1)(-1)(-7)(-19) \tag{5.575}$$

$$= 133 \tag{5.576}$$

Bemerkung Betrachten Sie die **Kästchenmatrix**

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in Mat(n;K) \tag{5.577}$$

$$\text{mit } A \in Mat(r;K), B \in Mat(r, n-r;K), D \in Mat(n-r;K) \tag{5.578}$$

Nach Lemma 5.5.4 erhält man:

$$detA = \lambda \cdot det \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_r \end{pmatrix} \tag{5.579}$$

$$detD = \mu \cdot det \begin{pmatrix} \delta_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_r \end{pmatrix} \tag{5.580}$$

$$\text{für } \lambda, \mu \in K \tag{5.581}$$

Also auch

$$detM = \lambda\mu \cdot det \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \delta_1 & * \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_{n-r} \end{pmatrix} = (detA) \cdot (detD) \tag{5.582}$$

Ähnlicherweise

$$det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = (detA) \cdot (detD) \tag{5.583}$$

5.6 Inversen und Determinanten

Es gibt eine interessante Beziehung zwischen dem Inversen und der Determinanten einer Matrix. Für ein invertierbares $A \in Mat(n; K)$ gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} A^{\#} \tag{5.584}$$

wobei $A^{\#}$ die **adjungierte Matrix** zu A ist.

Satz 5.6.1 *Für $A \in Mat(n; K)$ sind äquivalent:*

(1) A ist invertierbar

(2) $detA \neq 0$

Ist dies der Fall , so gilt

$$det(A^{-1}) = (detA)^{-1} \tag{5.585}$$

Beweis

- (1) $\Rightarrow$ (2)

$$A \text{ ist invertierbar} \tag{5.586}$$
$$\Rightarrow A \cdot A^{-1} = E \tag{5.587}$$
$$\Rightarrow det(A \cdot A^{-1}) = detE \tag{5.588}$$
$$\Rightarrow (detA)(detA^{-1}) = 1 \tag{5.589}$$
$$\Rightarrow detA \neq 0 \tag{5.590}$$
$$det(A^{-1}) = (detA)^{-1} \tag{5.591}$$

- (2) $\Rightarrow$ (1)

$$detA \neq 0 \tag{5.592}$$
$$\Rightarrow RangA = n \text{ nach Lemma 5.5.1} \tag{5.593}$$
$$\Rightarrow A \text{ ist invertierbar} \tag{5.594}$$

□

Daraus folgt

$$a_1, ..., a_n \in K^n \text{ sind linear abhängig} \tag{5.595}$$
$$\Leftrightarrow a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0 \text{ ist nicht trivial lösbar} \tag{5.596}$$
$$\Leftrightarrow det(a_1, ..., a_n) = 0 \text{ usw...} \tag{5.597}$$

Sei nun

$$A = (a_{ij}) \in Mat(n; K) \tag{5.598}$$
$$= (a_1, ..., a_n), n \geq 2 \tag{5.599}$$

und $(e_1, ..., e_n)$ die Standardbasis von K^n.

Man setzt

$$a_{ij}^{\#} := det(a_1, ..., a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, ..., a_n) \text{ für } i, j = 1...n \tag{5.600}$$

die **Kofaktoren** von A.

Die Matrix

$$A^{\#} := (a_{ij}^{\#}) \in Mat(n; K) \tag{5.601}$$

heisst die **adjungierte Matrix** zu A (oder **Adjunkte** von A).

Sei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

Lemma 5.6.2 *Für $i, j = 1...n$ gilt*

$$\alpha_{ij}^{\#} = (-1)^{i+j} \, det \, A_{ij} \tag{5.602}$$

Beweis

$$a_{ij}^{\#} = det \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,i-1} & 0 & \alpha_{1,i+1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ \alpha_{j,1} & \cdots & \alpha_{j,i-1} & 1 & \alpha_{j,i+1} & \cdots & \alpha_{j,n} \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,i-1} & 0 & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \tag{5.603}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,i-1} & 0 & \alpha_{1,i+1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,i-1} & 0 & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \tag{5.604}$$

$$= (-1)^{i+j} det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} \tag{5.605}$$

$$= (-1)^{i+j} det(A_{ij}) \tag{5.606}$$

□

Wir zeigen nächste Woche:

$$A \text{ ist invertierbar} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot A^{\#} \tag{5.607}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \tag{5.608}$$

$$\alpha_{11}^{\#} = (-1)^{1+1} det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 12 \tag{5.609}$$

$$\alpha_{12} = - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -13 \tag{5.610}$$

$$\alpha_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7 \tag{5.611}$$

$$\alpha_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3 \tag{5.612}$$

$$\alpha_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 \tag{5.613}$$

$$\alpha_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \tag{5.614}$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -3 \tag{5.615}$$

$$\alpha_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \tag{5.616}$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \tag{5.617}$$

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.618}$$

$$detA = -det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \tag{5.619}$$

$$= -det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \tag{5.620}$$

$$= 5 + (-2) = 3 \tag{5.621}$$

$$A \cdot A^{\#} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -13 & 7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.622}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{5.623}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.624}$$

$$det(\alpha_{11})(n = 1) \tag{5.625}$$

$$det\, A := \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\alpha_{1k} det\, A_{1k}(n \geq 2) \tag{5.626}$$

$$\alpha_{ij}^{\#} := det(a_{11}, ..., a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, ..., a_n)(\textbf{Kofaktoren} \text{ von } A) \tag{5.627}$$

$$= (-1)^{i+j} det\, A_{ji}(\text{Lemma 5.6.2}) \tag{5.628}$$

$$A^{\#} := (\alpha_{ij}^{\#}) \tag{5.629}$$

Zu zeigen

$$\text{A invertierbar } \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{det\, A} A^{\#} \tag{5.630}$$

Idee wir zeigen

$$AA^{\#} = A^{\#}A = (det\, A) \cdot E \tag{5.631}$$

d.h. für $1 \leq i, j \leq n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{kj}^{\#} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}^{\#}\alpha_{kj} \tag{5.632}$$

$$= \delta_{ij} \cdot det\, A \tag{5.633}$$

$$\text{wobei } \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \tag{5.634}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat(3;\mathbb{R}) \tag{5.635}$$

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \tag{5.636}$$

$$= 3(2) + (-1)(1) = 7 \tag{5.637}$$

$$\alpha_{21}^{\#} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \tag{5.638}$$

$$\alpha_{22}^{\#} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \tag{5.639}$$

$$\alpha_{23}^{\#} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \tag{5.640}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{2k}^{\#}\alpha_{2k} = (-1)(0) + (3)(2) + (-1)(-1) \tag{5.641}$$

$$= 7 \tag{5.642}$$

$$= (det\, A)\delta_{22} \tag{5.643}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_{2k}^{\#}\alpha_{k1} = (-1)(3) + (3)(1) + (-1)(0) = 0 \tag{5.644}$$

$$= (det\, A)\delta_{21} \text{ usw.} \tag{5.645}$$

$$AA^{\#} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \tag{5.646}$$

Satz 5.6.3 *Für $A \in Mat(n;K)$ und $1 \leq i,j \leq n$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}^{\#}\alpha_{kj} = \delta_{ij} \cdot det\, A \tag{5.647}$$

Beweis

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}^{\#}\alpha_{kj} \tag{5.648}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (det(a_1, ..., a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, ..., a_n)\alpha_{kj}) \tag{5.649}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} det(a_1, ..., a_{i-1}, \alpha_{kj}, e_j, a_{i+1}, ..., a_n) \tag{5.650}$$

$$= det(a_1, ..., a_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}e_j, a_{i+1}, ..., a_n) \text{ (det ist multilinear)} \tag{5.651}$$

$$= det(a_1, ..., a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, ..., a_n) \tag{5.652}$$

$$= \begin{cases} det\, A & i = j \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \tag{5.653}$$

□

Anmerkung

$$\alpha_{ij}^{\#} = (-1)^{i+j} det\, A_{ij} \tag{5.654}$$

$$= (-1)^{j+i} det((A^t)_{ij}) \tag{5.655}$$

$$\Rightarrow (A^t)^{\#} = (A^{\#})^t \tag{5.656}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{kj}^{\#} = \delta_{ij} det\, A \tag{5.657}$$

Korollar 5.6.4 *Für $A \in Mat(n; K)$ gilt*

$$AA^{\#} = A^{\#}A = (det\, A)E \tag{5.658}$$

und falls A invertierbar ist

$$A^{-1} = \frac{1}{det\, A} \cdot A^{\#} \tag{5.659}$$

Bemerkungen

(1) Für A invertierbar:

$$AA^{\#} = (det\, A) \cdot E \tag{5.660}$$

$$\Rightarrow det(AA^{\#}) = det((det\, A)E) \tag{5.661}$$

$$\Rightarrow (det\, A)(det\, A^{\#}) = (det\, A)^n \tag{5.662}$$

$$\Rightarrow det\, A^{\#} = (det\, A)^{n-1} \tag{5.663}$$

(2) Für $A \in Mat(n;K)$ git:

$$det\,A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}^{\#} a_{ki} \tag{5.664}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \alpha_{ki} det\,A_{ki} \text{ (Satz 5.6.3 mit } i = j) \tag{5.665}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_{ik}^{\#} \tag{5.666}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \alpha_{ik} det\,A_{ik} \tag{5.667}$$

Beispiel

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3}(2) \begin{vmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{5.668}$$
$$= -2(-1)^{1+1}(-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{5.669}$$
$$= 8 \tag{5.670}$$

(3) Betrachten Sie ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b \tag{5.671}$$

mit invertierbarer Matrix

$$A \in Mat(n;K), b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in K^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \tag{5.672}$$

Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung

$$x = A^{-1}b \tag{5.673}$$

und nach Korollar 5.6.4

$$x = \frac{1}{det\,A} A^{\#} b \tag{5.674}$$

dass heisst

$$x_i = \frac{1}{det\,A} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_j \tag{5.675}$$

$$= \frac{1}{det\,A} \sum_{j=1}^{n} \beta_j det(a_1, ..., a_{i-1}, e_j, ..., a_n) \tag{5.676}$$

$$= \frac{1}{det\,A} det(a_1, ..., a_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} \beta_j, e_j, ..., a_n) \tag{5.677}$$

$$= \frac{1}{det\,A} det(a_1, ..., a_{i-1}, b, a_{i+1}, ..., a_n) \tag{5.678}$$

Cramersche Regel

$$Ax = b, A \text{ invertierbar} \Rightarrow x_i = \frac{1}{det\,A} det(a_1, ..., a_{i-1}, b, a_{i+1}, ..., a_n) \tag{5.679}$$

Beispiel

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \tag{5.680}$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \tag{5.681}$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \tag{5.682}$$

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-16) - 4(-26) + 6(11) = 6 \neq 0 \tag{5.683}$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18(-16) - 4(-72) + 6(4) = 24 \tag{5.684}$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 6 \\ 4 & 24 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2(-72) - 18(-26) + 6(56) = -12 \tag{5.685}$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \tag{5.686}$$

$$= 2(-4) - 4(-56) + 18(11) = 18 \tag{5.687}$$

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{24}{6} = 4 \tag{5.688}$$

$$x_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{-12}{6} = -2 \tag{5.689}$$

$$x_3 = \frac{d_3}{d} = \frac{18}{6} = 3 \tag{5.690}$$

5.7 Permutationen

Zur Erinnerung... Für eine nichtleere Menge M ist

$$S(\mathcal{M}) := \{f \in Abb(M,M) : f \text{ bijektiv}\} \tag{5.691}$$

mit Komposition

$$\circ : S(M)^2 \to S(M) \tag{5.692}$$

definiert durch

$$f \circ g : M \to M, m \mapsto f(g(m)) \tag{5.693}$$

eine **Gruppe**, die **symmetrische Gruppe** von M, mit neutralem Element id_M und Inversen Elementen f^{-1}.
Falls $M = \{1, ..., n\}$, schreibt man

$$S_n \text{ statt } S(M) \tag{5.694}$$

und nennt S_n **Permutationsgruppe** und die Elemente von S_n **Permutationen**.

Man schreibt Elemente von S_n in der Form

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \Pi(1) & \Pi(2) & \cdots & \Pi(n) \end{pmatrix} \tag{5.695}$$

mit

$$\Pi^{-1} = \begin{pmatrix} \Pi(1) & \Pi(2) & \cdots & \Pi(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \tag{5.696}$$

Beispiel S_3 hat 6 Elemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{5.697}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.698}$$

$$(\text{oder } (), (23), (12), (13), (123), (132)) \tag{5.699}$$

Sei nun

$$A = (\alpha_{ij}) = (a_1, ..., a_n) \in Mat(n; K) \tag{5.700}$$

mit

$$a_i = \sum_{j_i=1}^{n} \alpha_{j_i i} e_{ji} \in K^n (i = 1...n) \tag{5.701}$$

Dann gilt

$$det\,A = det\left(\sum_{j_1=1}^{n} \alpha_{j_1,1} e_{j_1}, ..., \sum_{j_n=1}^{n} \alpha_{j_n,n} e_{j_n}\right) \tag{5.702}$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} ... \sum_{j_n=n}^{n} (\alpha_{j_1,1}, ..., \alpha_{j_n,n}) det(e_{j1}, ..., e_{j_n}) \text{ (det ist multilinear)} \tag{5.703}$$

Auch

$$det(e_{j_1}, ...e_{j_n}) \neq 0 \Leftrightarrow \Pi : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}, i \mapsto j \tag{5.704}$$

ist eine Permutation, d.h.

$$\Pi \in S_n \tag{5.705}$$

Man setzt für $\Pi \in S_n$

$$\epsilon(\Pi) := det(e_{Pi(1)}...e_{Pi(n)})(= 1 \text{ oder } -1) \tag{5.706}$$

das **Signum** der Permutation Π und erhält

$$det\,A = \sum_{\Pi \in S_n} (\epsilon(\Pi) \alpha_{Pi(1),1} ... \alpha_{Pi(n),n}) \tag{5.707}$$

$$= \sum_{\Pi \in S_n} (\epsilon(\Pi) \alpha_{1,Pi(1)} ... \alpha_{n,Pi(n)}) \tag{5.708}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \tag{5.709}$$

$$S_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{5.710}$$

$$det\ = \epsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \alpha_{11}\alpha_{22} + \epsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \alpha_{12}\alpha_{21} \tag{5.711}$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \tag{5.712}$$

(**Leibniz-Formel**)

Für eine Permutation $\Pi \in S_n$ heisst

$$P_\Pi = (e_{\Pi(1)}, ..., e_{\Pi(n)}) = (\delta_{i,\Pi(j)}) \in Mat(n; K) \tag{5.713}$$

eine **Permutationsmatrix**.

man beobachtet, dass

- $det P_{Pi} = \epsilon(\Pi)$ (1 oder -1)
- $P_\Pi P_p = P_{\Pi \circ p} (\Pi, p \in S_n)$
- $P_\Pi e_i = e_{\Pi(i)} (i = 1...n)$
- $P_\Pi^t P^\Pi = E$

Die Menge aller Permutationsmatrizen in $Mat(n; K)$ ist deshalb eine (zur S_n isomorphe) Untergruppe $GL(n; K)$.

Satz 5.7.1 ***LR-Zerlegung***
Ist $A \in Mat(n; K)$ invertierbar, dann gibt es

- *eine Permutationsmatrix P*
- *eine untere Dreiecksmatrix L mit allen Diagonalelementen gleich 1*
- *eine obere Dreiecksmatrix U mit*

$$PA = LU \tag{5.714}$$

Beweis Aufgabe. □

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in Mat(3; \mathbb{R}) \tag{5.715}$$

mit elementaren Zeilenumformungen Typen I-II

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} Z_1 \leftrightarrow Z_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{5.716}$$

$$Z_2 \to Z_2 - 2Z_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{5.717}$$

$$Z_2 \leftrightarrow Z_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \tag{5.718}$$

$$\tag{5.719}$$

ergibt die Permutationsmatrizen

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ entspricht } I : Z_1 \leftrightarrow Z_3 \tag{5.720}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ entspricht } I : Z_2 \leftrightarrow Z_3 \tag{5.721}$$

$$\tag{5.722}$$

Sei

$$P = P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.723}$$

Dann

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \tag{5.724}$$

$$II : Z_3 \to Z_3 - 2Z_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = U \tag{5.725}$$

$$\tag{5.726}$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} PA = U \tag{5.727}$$

und

$$PA = LU \tag{5.728}$$

mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.729}$$

Betrachten Sie nun

$$Ax = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = b \tag{5.730}$$

Wir haben

$$LUx = PAx = P\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \tag{5.731}$$

Wir suchen zuerst $y \in \mathbb{R}^3$ mit

$$Ly = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \tag{5.732}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} \tag{5.733}$$

und dann $x \in \mathbb{R}^3$ mit

$$Ux = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} \tag{5.734}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 57 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix} \tag{5.735}$$

Anmerkung Man kann oft L und R schnell berechnen, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & g & h \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \tag{5.736}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & g & h \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \tag{5.737}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & g & h \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \tag{5.738}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \tag{5.739}$$

Sei nun $A \in Mat(m, n; K)$ und $1 \leq s \leq min(m, n)$.
Falls B aus A durch Weglassen von $m - s$ Zeilen und $n - s$ Spalten entsteht, heisst $B \in Mat(s; K)$ eine $s \times s$-**Untermatrix** von A.

Zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 3 & 9 \end{pmatrix} \tag{5.740}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \tag{5.741}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 9 \end{pmatrix} \tag{5.742}$$

Die Determinante einer $s \times s$-Untermatrix von A heisst eine **s-reihige Unterdeterminante** von A.

Satz 5.7.2 *Für $0 \neq A \in Mat(m,n;K)$ sind äquivalent*

(1) Rang $A = r$

(2) (a) Es gibt eine r-reihige Unterdeterminante von A, die nicht Null ist.

(a) Jede $(r+1)$-reihige Unterdeterminante von A ist Null

Beweis Es genügt zu zeigen

$$\text{Rang } A \geq k \Leftrightarrow \text{ es gibt eine } k \times k\text{-Untermatrix von } A \text{ mit Determinante ungleich Null} \tag{5.743}$$

- $\Leftarrow$ Sei B eine $k \times k$ Untermatrix von A mit $\det B \neq 0$.
  Daraus folgt Rang $B = k$ und deshalb auch Rang $A \geq k$.

- $\Rightarrow$ Ist Rang $A \geq k$, so gibt es k linear unabhängige Zeilen in A. Nach Vertauschungen können wir sie in die ersten k Zeilen bringen (der Rang ändert sich dadurch offensichtlich nicht).
  Es gibt in dieser Matrix k linear unabhängige Spalten, die wir in die ersten k Spalten bringen können. Man erhält:

$$\left.\begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} B & \\ \hline & \end{array} \end{pmatrix}\right\} k \tag{5.744}$$

$$\underbrace{\qquad\quad}_{k} \tag{5.745}$$

Also ist B eine Untermatrix von A mit $\det B \neq 0$ $\square$

Beispiel

$$Rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4 \tag{5.746}$$

Quiz

(1) Das Produkt zweier invertierbarer Matrizen ist invertierbar.

(2) Ist $A \in Mat(n;K)$ nicht invertierbar, dann hat $Ax = b$ unendlich viele Lösungen.

(3) Ist $A \in Mat(n;K)$ invertierbar, dann gilt $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$.

(4) Für $A \in Mat(n;K)$ und $\alpha \in K$ gilt $det(\alpha A) = \alpha det\ A$.

(5) Ist $A \in Mat(n;K)$ invertierbar, dann gilt $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

(6) Für $A \in Mat(m,n;K)$ gilt Rang $A =$ Rang A^t.

(7) Für $A \in Mat(m,n;K)$ gilt Kern $A =$ Kern A^t.

(8) Für $A \in Mat(m,n;K)$ ist Kern $A \neq \{0\}$ gdw die Spalten von A linear abhängig sind.

(9) Sind $a_1, ..., a_n$ in einem Vektorraum V der Dimension n linear unabhängig, dann ist $\{a_1, ..., a_n\}$ eine Basis von V.

(10) Ist $A \in Mat(m;K)$ invertierbar und $B \in Mat(m,n;K)$ dann gilt Bild $AB =$ Bild B.

(11) Jede Matrix $A \in Mat(n;K)$ ist ein Produkt von Elementar-Matrizen.

(12) Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig und/oder Erzeugendensysteme?

(13)

$$\mathbb{R}^4 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\} \tag{5.747}$$

(14)

$$\mathbb{C} \text{ über } \mathbb{R} : \{2 - 3i, 5 + 7i\} \tag{5.748}$$

(15)

$$\text{Kern} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\} \tag{5.749}$$

(16)

$$Mat(2;\mathbb{R}) : \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} \tag{5.750}$$

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$:

(17)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \tag{5.751}$$

(18)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{5.752}$$

(19)

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \tag{5.753}$$

(20)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \tag{5.754}$$

Zusatzaufgabe Bestimmen Sie die Determinante von $A \in Mat(n;K)$, falls

(i) $A^{-1} = A^t$ (orthogonale Matrix, A invertierbar)

(ii) $A^t = -A$ (schiefsymmetrische Matrix, n ungerade)

(iii) $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ (nilpotente Matrix)

(iv) $A^2 = A$ (idempotente Matrix)

Lösungen

(1) Wahr.

(2) Falsch. $Ax = 0$ ergibt unendlich viele Lösungen.

(3) Wahr.

$$det(A^{-1}) det\, A = det\, A^{-1} A \tag{5.755}$$
$$= det\, E \tag{5.756}$$
$$= 1 \tag{5.757}$$

(4) Falsch: $det\, \alpha A = \alpha^n\, det\, A$

(5) Wahr

$$A^t (A^{-1})^t = (A^{-1} A)^t \tag{5.758}$$
$$= E^t = E \tag{5.759}$$

(6) Wahr. Spaltenrang = Zeilenrang.

(7) Falsch. Es ist möglich, dass z.B. $m \neq n$ ist.

(8) Wahr. Normalerweise betrachtet man aber Kern $A = 0$, wenn Spalten unabhängig sind.

(9) Wahr. In jedem Vektorraum mit Dimensionen mm, n gibt es eine Basis.

(10) Falsch. Die Frage ist: Ändert sich das Bild durch Zeilenumformungen?

$$Bild\, AB \neq Bild\, B \tag{5.760}$$
$$Bild\, BA = Bild\, B \tag{5.761}$$

(11) Falsch.

(12) Wahr, wenn auch bislang unbewiesen für nicht-endliche Vektorräume.

(13) Linear unabhängig, aber keine Basis (Dimension 4, aber nur 3 Vektoren).

(14) Linear unabhängig, Erzeugendensystem, Basis. (vgl. Standardbasis: $\{1, i\}$)

(15) Rang der Matrix: 2. 3 Spalten, d.h. 3-2 = 1 Vektor im Kern. Dies ist eine Basis.

(16) Vektoren sind linear abhängig, nur 3 sind linear unabhängig. Kein Erzeugendensystem.

(17)

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.762)$$

$$= -16 - 12 = -28 \quad (5.763)$$

(18)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 8 & 4 & 5 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -(3)(5)(-2)(5) = 150 \quad (5.764)$$

(19)

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (-5)(3)(-3) = 45 \quad (5.765)$$

(20)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} \quad (5.766)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c^2-a^2)-(c-a)(b-a) \end{pmatrix} \quad (5.767)$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) \quad (5.768)$$

Zusatzaufgabe

(i)

$$A^{-1} = A^t \quad (5.769)$$

$$\Rightarrow E = AA^t \quad (5.770)$$

$$\Rightarrow det\, E = det\, AA^t \quad (5.771)$$

$$\Rightarrow det\, E = (det\, A)(det\, A^t) \quad (5.772)$$

$$\Rightarrow 1 = (det\, A)^2 \quad (5.773)$$

$$\Rightarrow det\, A = 1 \text{ oder } -1. \quad (5.774)$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
A^t &= -A && (5.775)\\
&\Rightarrow det A^t = det(-A) && (5.776)\\
&\Rightarrow det\, A = (-1)^n det\, A && (5.777)\\
&\Rightarrow det\, A = -det\, A && (5.778)\\
&\Rightarrow det\, A = 0 && (5.779)
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
A^k &= 0 && (5.780)\\
&\Rightarrow det\, A^k = det 0 && (5.781)\\
&\Rightarrow (det\, A)^k = 0 && (5.782)\\
&\Rightarrow det\, A = 0 && (5.783)
\end{aligned}
$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
A^2 &= A && (5.784)\\
&\Rightarrow det\, A^2 = det\, A && (5.785)\\
&\Rightarrow (det\, A)^2 = det\, A && (5.786)\\
&\Rightarrow det\, A = 0 \text{ oder } 1 && (5.787)
\end{aligned}
$$

Index