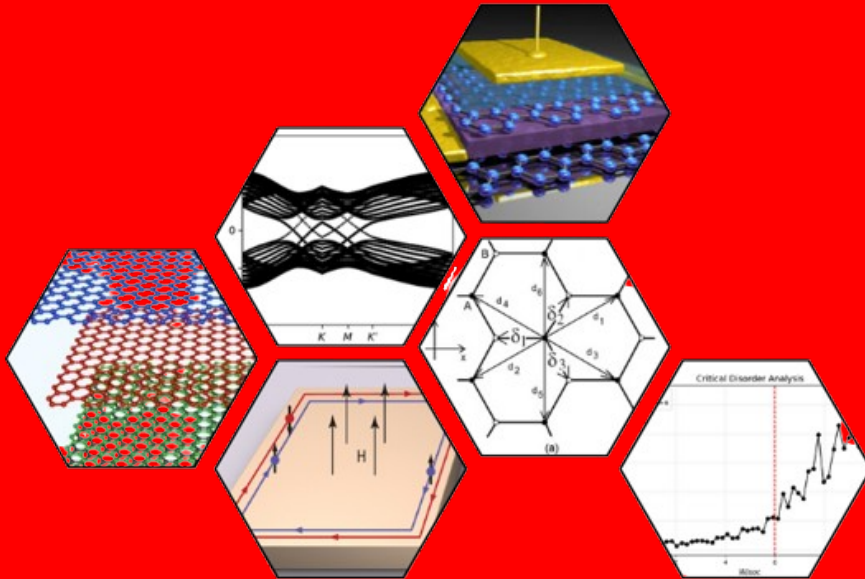


# STUDI PENGARUH STACKING LAYER DAN VARIASI PARAMETER PADA MODEL GRAFENA KANE-MELE



**AKMAL SURATMI**

**H021211024**



**PROGRAM STUDI FISIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**2025**

**STUDI PENGARUH STACKING LAYER DAN VARIASI PARAMETER PADA  
MODEL GRAFENA KANE-MELE**

**AKMAL RAGA SURATMI**

**H021211024**



**PROGRAM STUDI FISIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
2025**

**STUDI PENGARUH STACKING LAYER DAN VARIASI PARAMETER PADA  
MODEL GRAFENA KANE-MELE**

AKMAL SURATMI

H021211024

Skripsi

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana

Program Studi Fisika

pada

**PROGRAM STUDI FISIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
2025**

## Abstract

AKMAL SURATMI. **Pengaruh Disorder Anderson Terhadap Struktur Spektrum Energi *Quantum Spin Hall* dalam Model Grafena Kane Mele 3D.**(dibimbing oleh Tasrief surungan)

**LATAR BELAKANG.** Penelitian ini menganalisis perubahan spektrum energi **Quantum Spin Hall Insulators** (QSHI) pada model Kane-Mele grafena tiga dimensi (3D) yang disusun secara periodik sepanjang sumbu- $z$  di bawah pengaruh lokalisasi Anderson. **TUJUAN.** Tujuan utama penelitian ini adalah meninjau pengaruh kekuatan disorder ( $W$ ) pada sistem 3D serta mengamati degradasi *helical edge states* dalam struktur pita energi. **METODE.** Model 3D dikonstruksi dengan menumpuk lapisan-lapisan grafena dua dimensi (2D) menggunakan parameter hopping antarlapisan ( $t_{\perp} = 0,3t$ ) dan kopling spin-orbit intrinsik ( $\lambda_{SO} = 0,3\lambda_{SO}$ ). Simulasi dilakukan dengan metode *tight-binding*. Proses *averaging* dilakukan atas 500 realisasi disorder untuk meminimalisir fluktuasi statistik. **HASIL.** Hasil simulasi menunjukkan bahwa sistem mengalami perubahan struktur spektral pada  $W > 6,0\lambda_{SO}$ , ditandai dengan hilangnya persilangan pita tepi *helical* akibat lokalisasi Anderson. Kemudian Peta spektrum dibangun dengan memvariasi  $W$  dan  $t_{\perp}$ , mengungkapkan bahwa stabilitas QSHI tidak terpengaruhi seiring penambahan struktur antarlapisan. Analisis spektrum energi dan korelasi lokalisasi menunjukkan bahwa sistem mempertahankan keadaan tepi pada  $W < 6,0\lambda_{SO}$ , bahkan dengan peningkatan stabilitas hingga  $t_{\perp} = 0,5t$ . Temuan ini memberikan wawasan baru dalam desain material topologis berbasis struktur berlapis.

**Kata Kunci:** *Quantum Spin Hall Insulator*, grafena, model Kane-Mele, disorder Anderson, simulasi *tight-binding*

## Abstract

AKMAL SURATMI. **Spectral Response of Quantum Spin Hall Stability on 3D Kane-Mele Graphene Model to Anderson Disorder**(supervised by Tasrief Surungan)

**INTRODUCTION.** This study investigates the stability of the *Quantum Spin Hall Insulator (QSHI)* spectrum in a three-dimensional (3D) Kane-Mele graphene model with periodic stacking along the  $z$ -axis under Anderson localization.**AIM.** The primary objectives are to study disorder strength ( $W$ ) effect in the 3D system and observe the degradation of *helical edge states* in the energy band structure.**METHOD.** The 3D model is constructed by stacking two-dimensional (2D) graphene layers with interlayer hopping ( $t_{\perp} = 0.3t$ ) and intrinsic spin-orbit coupling ( $\lambda_{\text{SO}} = 0.3\lambda_{\text{SO}}$ ). Numerical simulations employ the *tight-binding method*. Disorder averaging is performed over 500 configurations to minimize statistical fluctuations. **RESULT**Simulation results reveal a spectral structure change at  $W > 6.0\lambda_{\text{SO}}$ , characterized by the disappearance of helical edge due to Anderson localization. A spectral map constructed by varying  $W$  and  $t_{\perp}$  demonstrates enhanced QSHI stability with increased interlayer coupling. Energy spectrum analysis and localization correlations confirm the persistence of edge states for  $W < 6.0\lambda_{\text{SO}}$ , with stability further improved up to  $t_{\perp} = 0.5t$ . These findings provide critical insights for designing topological materials with layered architectures.

**Keywords:** Quantum Spin Hall insulator, graphene, Kane-Mele model, Anderson disorder, tight-binding simulation

## DAFTAR ISI

<b>I</b>	<b>1PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
I.1	Latar Belakang . . . . .	1
I.2	Teori . . . . .	2
I.2.1	Efek Topologis . . . . .	2
I.2.2	Model Topologis Grafena . . . . .	4
I.2.3	Anderson Disorder . . . . .	8
I.3	Tujuan Penelitian . . . . .	9
I.4	Manfaat Penelitian . . . . .	9
<b>II</b>	<b>PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
II.1	Latar Belakang . . . . .	1
II.2	Landasan Teori . . . . .	2
II.2.1	Sifat Elektronik Material . . . . .	2
II.2.2	Efek Tepi dan Kuantisasi Konduktansi Tepi . . . . .	3
II.2.3	TKKN Invariant . . . . .	4
II.2.4	Model Haldane . . . . .	4
II.2.5	Model Kane dan Mele . . . . .	5
<b>III</b>	<b>MODEL DAN METODE PENELITIAN</b>	<b>6</b>
III.1	Model Fisik Sistem . . . . .	6
III.1.1	Tight Binding Model Grafena . . . . .	6
III.1.2	Kane-Mele <i>Spin Orbit Coupling</i> . . . . .	6
III.1.3	<i>Stacking Layer</i> . . . . .	7
III.2	Formulasi dan Validasi Numerik . . . . .	8
III.2.1	Diskretisasi Ruang . . . . .	8
III.2.2	Validasi Efek Tepi . . . . .	9
III.3	Metode Analisis Spektrum . . . . .	9
III.3.1	Peta Spektrum Ribbon . . . . .	9
III.3.2	Peta Probabilitas Elektron . . . . .	10

III.3.3 Peta Kerapatan Energi . . . . .	10
III.4 Metode Analisis Topologi . . . . .	11
III.4.1 <i>Hybrid Wannier Function</i> . . . . .	11
III.4.2 <i>Axion Angle</i> . . . . .	13
III.5 Parameter dan Implementasi . . . . .	14
III.5.1 Tabel Parameter . . . . .	14
III.5.2 Ekstensi Numerik . . . . .	14
III.6 Diagram Alur Penelitian . . . . .	15
<b>IV HASIL</b>	<b>16</b>
IV.1 Batas kekuatan Disorder . . . . .	16
IV.1.1 Validasi Topologis pada Sistem Bersih . . . . .	16
IV.1.2 Transisi Topologis: Plot DoS pada Energi Nol . . . . .	17
IV.2 Kerusakan Dispersi Energi dan Hilangnya Edge State Helical . . . . .	18
IV.3 Peta Spektrum . . . . .	19
<b>V KESIMPULAN</b>	<b>21</b>
V.1 Kesimpulan . . . . .	21
V.2 Saran . . . . .	21
<b>A Derivasi Matematis</b>	<b>25</b>
A.1 Tight Binding Model . . . . .	25
<b>B Lampiran Kode Program</b>	<b>27</b>
B.1 Kode Utama Simulasi(Model Kane-Mele 3D) . . . . .	27
B.2 Kode Tambahan: Analisis Data . . . . .	28

## DAFTAR GAMBAR

I.1	Skema konduktansi tepi pada pelat metal. Gambar diadaptasi dari <a href="https://universe-review.ca/F13-atom06d.htm##f08w">https://universe-review.ca/F13-atom06d.htm##f08w</a> . . . . .	3
I.2	Hasil pengukuran resistansi quantum hall effect. Gambar diadaptasi dari D.R. Leadley, Warwick University (1997). . . . .	3
I.3	<i>Berry curvature</i> pada BZ (a)chern number=-0,(b)chern number=0 (c)chern number=1. Gambar diadaptasi dari (Vanderbilt 2018). . . .	5
I.4	Struktur pita grafena yang menunjukkan kerucut dirac pada titik K dan K'. Gambar diadaptasi dari <a href="https://www.graphenea.com/blogs/graphene-news/6969324-a-bandgap-semiconductor-nanostructure-made-entirely-from-graphene">https://www.graphenea.com/blogs/graphene-news/6969324-a-bandgap-semiconductor-nanostructure-made-entirely-from-graphene</a>	
I.5	Skema <i>Second Neighbour Hoping</i> . Gambar diadaptasi dari <a href="https://nbviewer.org/github/topocm/topocm_content/blob/edx_2015/w4_haldane/haldane_model.ipynb">https://nbviewer.org/github/topocm/topocm_content/blob/edx_2015/w4_haldane/haldane_model.ipynb</a> . . . . .	7
I.6	Caption . . . . .	7
III.1	Visualisasi skema stacking layer . . . . .	8
IV.1	(a) Mode Trivial sistem(SOC=0.06) (b) Mode Non-Trivial sistem(SOC=0.24) . . . . .	16
IV.2	Evolusi <i>Hybrid Wannier Function</i> . . . . .	17
IV.3	Plot DoS pada $E = 0$ terhadap kekuatan disorder $W/\lambda_{SO}$ . . . . .	18
IV.4	Struktur pita energi pada $W = 6.0\lambda_{SO}$ . Tidak tampak lagi lintasan edge state yang menyambung pita valensi dan pita konduksi. . . . .	19
IV.5	Peta Spektrum sistem pada bidang parameter disorder. Daerah putih menandakan struktur spektrum topologis, sedangkan daerah gelap merupakan spektrum trivial. . . . .	20



## DAFTAR TABEL

III.1	Parameter Hamiltonian sistem <i>stacking layer</i> Honeycomb. . . . .	14
III.2	Konfigurasi geometri dan parameter kisi. . . . .	14
III.3	Parameter numerik dan konfigurasi simulasi PythTB. . . . .	14
III.4	Struktur kode numerik PythTB. . . . .	15

## BAB I

### 1 PENDAHULUAN

#### I.1 Latar Belakang

Material Kuantum datang sebagai pahlawan ketika komponen elektronik tradisional mencapai limit miniaturisasi. Di tengah maraknya riset tentang quantum transistors yang memanfaatkan fenomena superkonduktivitas, entanglement, dan fase topologis (Chang **and others** 2015), grafena mencuat sebagai primus inter pares: material dua dimensi yang tidak hanya menjanjikan transisi dari elektronik ke spintronik, tetapi juga membuka pintu bagi realisasi dissipationless electronics melalui proteksi topologi. Di sinilah fisika material bertemu dengan keanggunan matematika topologi, menciptakan simfoni sains yang berpotensi merevolusi komputasi kuantum hingga teknologi energi bersih (Nadeem **and others** 2021).

Grafena menunjukkan reputasi yang cemerlang sebagai laboratorium para peneliti sejak beberapa puluh tahun belakangan, hal ini disebabkan oleh sifat fisis grafena yang memukau. Dari segi ketahanan grafena bahkan mengalahkan berlian yang juga tersusun dari jenis atom yang sama. Lebih dari itu, grafena juga menunjukkan konduktivitas yang tinggi yang ditunjukkan pada struktur pita energi grafena yang menunjukkan Dirac cone pada titik simetri BZ (Wallace 1947) (Painter **and** Ellis 1970). Reputasi konduktivitas grafena semakin melejit pada akhir abad ke 20 saat Haldane menunjukkan apa yang dia sebut parity anomaly, model yang dia tunjukkan adalah kisi honeycomb yang ada pada Graphite 2 dimensi (Grafena) dengan dua atom per sub-kisi yang di atur untuk sedemikian untuk mendukung terrealisasinya proteksi topologi, hasilnya menunjukkan bahwa dispersi pita terjadi pada Dirac cone dan menciptakan fenomena konduktansi hall yang terkuantisasi (Haldane 1988). Fenomena ini menarik kita kembali pada Quantum Hall Conductance yang diteliti sebelum Haldane.

The Beauty of Physics adalah kalimat yang disandingkan dengan fenomena Quantum Hall Conductance oleh banyak ahli, hal ini didasarkan pada kuantisasi yang terjadi pada konduktansi ( $\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$ ) yang artinya pada regim kuantum detail material tidaklah menjadi penentu sifat elektronik melainkan hanya ditentukan oleh sifat topologis sistemnya (Klitzing, Dorda **and** Pepper 1980). Thouless pada penelitiannya kemudian menjelaskan fase Topologis, dimana sistem dibedakan dengan TKKN (Thouless-Kohmoto-Nightingale-den Nijs) sebuah integer yang diperoleh dengan mengintegrasikan medan magnetik pada BZ, Hal ini didasarkan pada perhitungan genus yang membedakan sifat topologis sistem,

inilah kemudian melahirkan istilah Topological Insulators (Thouless **and others** 1982).

Topik ini terus berkembang hingga pada tahun 2005 Kane dan Mele membuka pintu baru pada penelitian ini, Kopling Spin-Orbit yang selama ini diabaikan pada grafena sebab kecilnya efeknya tidak memberikan kontribusi yang signifikan pada sifat fisis grafena. Namun, Kane dan Mele menunjukkan peningkatan nilai kopling spin-orbit yang terjadi pada energi menuju nol mutlak menciptakan dispersi pita pada sistem persis dengan yang terjadi pada model Haldane. Fase Topologis yang ditunjukkan pada model Kane dan Mele menunjukkan ketahanan yang luar biasa terhadap gangguan fisis, hal ini dikarenakan fenomena spin split yang menjaga Topological invariant dari system (Kane **and** Mele 2005b)(Kane **and** Mele 2005a)(Fu, Kane **and** Mele 2007).

Secara eksperimental, Disorder memainkan peran penting pada properti elektronik sistem, hal ini didasarkan oleh kecacatan sampel yang tidak terhindarkan. Berbeda dengan insulator atau konduktor biasa, properti trivial Topological Insulators juga menyebabkan respon sistem terhadap disorder berbeda (Wu **and others** 2016). Oleh karena itu, studi tentang efek lokalisasi disorder pada Topological Insulators sangatlah penting dalam upaya pengaplikasian material ini menuju industri teknologi kontemporer.

Realisasi eksperimental hingga industrial dari topik teoritis seperti *Helical edge state material* menjadi tantangan yang dihadapi pada penelitian fisika kondensat kontemporer. Kecacatan pada material nyata pun tak dapat dihindarkan, oleh karena itu penelitian ini bertujuan untuk meninjau dampak dari kecacatan pada grafena yang mengalami gangguan potensial ataupun *defect* pada kisi hingga pengaruh penyusunan lapisan grafena.

## I.2 Teori

### I.2.1 Efek Topologis

#### Quantum Hall Conductance

Quantum Hall Conductance adalah versi terkuantisasi dari efek Hall klasik, efek ini ditinjau dari pelat semikonduktor 2 Dimensi dengan temperatur rendah dan medan magnetik tegak lurus yang kuat (lihat gambar I.6). Secara klasik resistivitas longitudinal diharapkan akan berbanding linier dengan medan flux magnetik. Namun, eksperimen yang dilakukan menunjukkan bahwa resistansi terkuantisasi dan menunjukkan adanya step-step (lihat gambar I.2). Dimana nilai resistansi longitudinalnya adalah  $R_{xy} = \frac{V_{hall}}{I_{channel}} = \frac{h}{e^2 v}$ , dimana  $v$  adalah nilai integer (1,2,3,4,...). Step-step ini mengindikasikan fenomena Topologis (Klitzing,

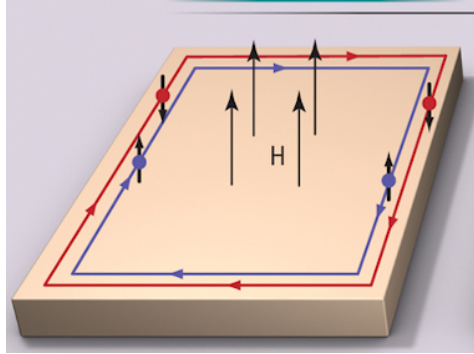


Figure I.1: Skema konduktansi tepi pada pelat metal. Gambar diadaptasi dari <https://universe-review.ca/F13-atom06d.htm#f08w>

Dorda and Pepper 1980).

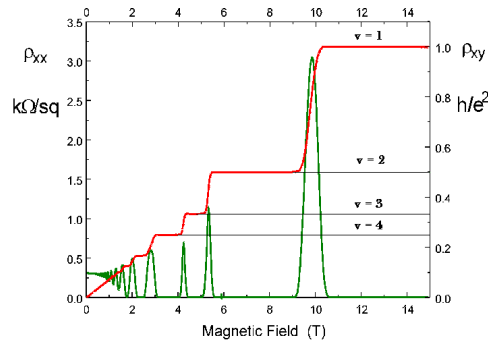


Figure I.2: Hasil pengukuran resistansi quantum hall effect. Gambar diadaptasi dari D.R. Leadley, Warwick University (1997).

## Chern Number

Chern number ( $C$ ) merupakan invarian topologis yang mengkuantifikasi sifat geometrik fungsi gelombang elektron dalam ruang momentum. Konsep ini pertama kali dijelaskan dalam konteks *Quantum Hall Effect* (QHE) oleh Thouless, Kohmoto, Nightingale, dan den Nijs (TKKN) (Thouless **and others** 1982). Secara matematis, Chern number didefinisikan sebagai integral dari *Berry curvature* ( $\Omega(\mathbf{k})$ ) di seluruh *Brillouin zone* (BZ):

$$C = \frac{1}{2\pi} \iint_{\text{BZ}} \Omega(\mathbf{k}) dk_x dk_y, \quad (1.1)$$

di mana  $\Omega(\mathbf{k})$  merupakan curl dari *Berry connection*  $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ :

$$\Omega(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathcal{A}(\mathbf{k}), \quad (1.2)$$

dengan  $\mathcal{A}(\mathbf{k})$  diberikan oleh:

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = -i \langle u_{\mathbf{k}} | \nabla_{\mathbf{k}} | u_{\mathbf{k}} \rangle. \quad (1.3)$$

Pada persamaan di atas,  $|u_{\mathbf{k}}\rangle$  adalah fungsi gelombang Bloch periodik untuk pita energi terisi, dan integral dilakukan pada ruang momentum dua dimensi (BZ).

### Peran Chern Number dalam Efek Hall Kuantum

Dalam konteks QHE, Chern number terkait langsung dengan konduktansi Hall terkuantisasi (Haldane 1988):

$$\sigma_{xy} = C \cdot \frac{e^2}{h}, \quad (1.4)$$

di mana  $C$  bernilai bilangan bulat (integer). Kuantisasi ini bersifat *topologis*, artinya tidak bergantung pada gangguan lokal atau detail material selama simetri topologi sistem terjaga.

### Aplikasi pada Model Haldane dan Kane-Mele

Pada model Haldane (Haldane 1988), Chern number muncul akibat patahnya simetri waktu-balik (*time-reversal symmetry*) oleh medan magnet periodik. Untuk grafena dengan modifikasi Haldane, nilai  $C = \pm 1$  menandai fase topologi non-trivial yang mendukung keadaan tepi (*edge states*) terkuantisasi.

Sementara itu, model Kane-Mele (Kane **and** Mele 2005b) memperkenalkan generalisasi Chern number ke invarian  $\mathbb{Z}_2$  akibat keberadaan spin-orbit coupling. Meskipun demikian, konsep Chern number tetap relevan untuk sistem dengan simetri spin-terpisah (*spin Chern number*).

## I.2.2 Model Topologis Grafena

### Struktur Dasar Grafena

Paper seminal (Wallace 1947) merumuskan model *tight-binding* pertama untuk grafena melalui Hamiltonian:

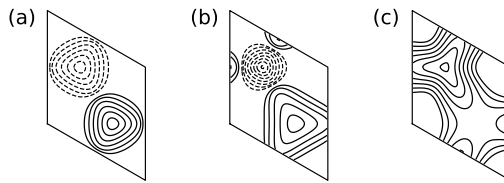


Figure 1.3: *Berry curvature* pada BZ (a)chern number=-0,(b)chern number=0 (c)chern number=1. Gambar diadaptasi dari (Vanderbilt 2018).

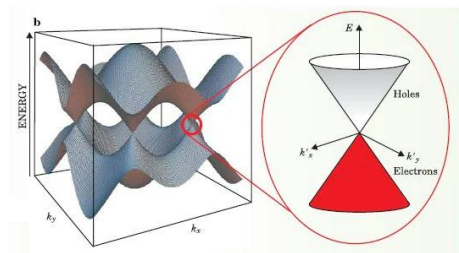


Figure 1.4: Struktur pita grafena yang menunjukkan kerucut dirac pada titik K dan K'. Gambar diadaptasi dari <https://www.graphenea.com/blogs/graphene-news/6969324-a-bandgap-semiconductor-nanostructure-made-entirely-from-graphene>

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle} (a_i^\dagger b_j + \text{h.c.}) \quad (1.5)$$

dengan  $t \approx 2.8$  eV merupakan integral *hopping* antar situs karbon terdekat, dan  $a_i^\dagger$  ( $b_j$ ) operator kreasi (anihilasi) pada sub-lattice A (B).

### Formulasi Hamiltonian Dirac

(Semenoff 1984) melakukan ekspansi  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  di sekitar titik Dirac ( $K$ ,  $K'$ ), menghasilkan Hamiltonian efektif:

$$H = \hbar v_F \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \quad (1.6)$$

dengan:

- $v_F \approx 10^6$  m/s: kecepatan Fermi

- $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$ : matriks Pauli merepresentasikan *pseudospin*
- $\mathbf{k}$ : vektor momentum relatif terhadap titik Dirac

Persamaan (I.6) menunjukkan ekivalensi formal dengan Hamiltonian Dirac (2+1)D untuk fermion tanpa massa, di mana  $v_F$  menggantikan  $c$ .

### Sifat Topologis

(Castro Neto **and others** 2009) mengidentifikasi konsekuensi topologis dari Hamiltonian (I.6):

$$\text{Indeks Chern } \mathcal{C} = \pm 1 \text{ per kerucut Dirac} \quad (I.7)$$

$$\text{Keadaan Tepi } \psi_{\text{edge}} \propto e^{ik_x x} e^{-|y|/\xi} \quad (I.8)$$

$$\text{Anomali Hall } \sigma_{xy} = \pm 4 \frac{e^2}{h} \quad (N = 0) \quad (I.9)$$

### Transport Elektronik

Relasi dispersi linear  $E(\mathbf{k}) = \pm \hbar v_F |\mathbf{k}|$  menghasilkan:

$$\rho(E) = \frac{2|E|}{\pi(\hbar v_F)^2} \quad (\text{kerapatan keadaan}) \quad (I.10)$$

dengan mobilitas elektron:

$$\mu = \frac{ev_F^2 \tau}{E_F} \quad (\tau : \text{waktu relaksasi}) \quad (I.11)$$

### Model Haldane

Haldane pada papernya (Haldane 1988) membuktikan bahwa fenomena quantum hall effect bisa terjadi tanpa adanya medan magnet eksternal. Haldane memperkenalkan hopping tetangga kedua untuk menciptakan efek pseudomagnet yang memecah time reversal symmetry (yang merupakan syarat dari fenomena Quantum Hall Effect) dan modulasi potensial untuk membuka celah energi.

Arah panah pada gambar I.6 mengindikasikan nilai hopping antara  $+it_2$  dan  $-it_2$  pada arah yang berlawanan. Perilaku ini menyebabkan perusakan simetri

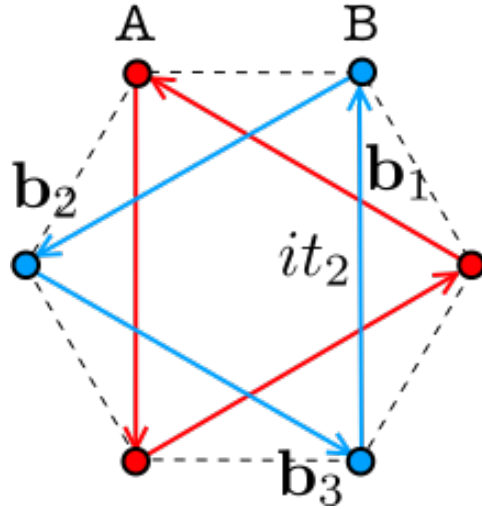


Figure I.5: Skema *Second Neighbour Hopping*. Gambar diadaptasi dari [https://nbviewer.org/github/topocm/topocm\\_content/blob/edx\\_2015/w4\\_haldane/haldane\\_model.ipynb](https://nbviewer.org/github/topocm/topocm_content/blob/edx_2015/w4_haldane/haldane_model.ipynb)

waktu pada sistem dengan bentuk hamiltonian:

$$H(k) = H_0(k) + M\sigma + 2t_2 \sum_i \sigma_z \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_i). \quad (I.12)$$

### Quantum Spin Hall

Seperti yang telah kita ketahui pada bagian I.2.1, terjadi kuantisasi konduktansi yang disebabkan oleh pembentukan *Landau Level* dalam medan magnet eksternal. Namun, *Quantum spin hall effect* menunjukkan bahwa kuantisasi konduktansi bisa diperoleh tanpa medan magnetik eksternal, melalui kopling intrinsik spin yang ditunjukkan oleh (Kane **and** Mele 2005b)

$$H_{KM} = H_t + H_{\lambda_{SO}} + H_R \quad (I.13)$$

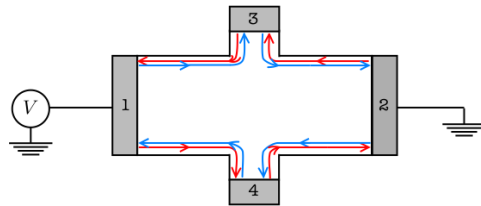


Figure I.6: Caption



dengan:

$$H_t = t \sum_{\langle i,j \rangle \sigma} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} \quad (\text{Hopping terdekat}) \quad (1.14)$$

$$H_{\lambda_{SO}} = i\lambda_{SO} \sum_{\langle \langle i,j \rangle \rangle \alpha\beta} \nu_{ij} c_{i\alpha}^\dagger s_{\alpha\beta}^z c_{j\beta} \quad (\text{SOC intrinsik}) \quad (1.15)$$

$$H_R = \lambda_R \sum_{\langle i,j \rangle \alpha\beta} c_{i\alpha}^\dagger (\mathbf{s}_{\alpha\beta} \times \hat{\mathbf{d}}_{ij})_z c_{j\beta} \quad (\text{Rashba SOC}) \quad (1.16)$$

di mana:

- $\nu_{ij} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\hat{\mathbf{d}}_1 \times \hat{\mathbf{d}}_2)_z = \pm 1$  (fase chiral next-nearest-neighbor)
- $\mathbf{s}$  = matriks Pauli untuk spin elektron
- $\hat{\mathbf{d}}_{ij}$  = vektor satuan antara situs  $i$  dan  $j$

Berbeda dengan karakterisasi topologis pada QHE yang ditentukan oleh *Chern Number*, QSHE dalam model kane-mele memiliki  $Z_2 = 1$  yang menjamin keberadaan konduktansi tepi yang dilindungi oleh *TRS* (*Time Reversal Symmetry*). Invarian  $\mathbb{Z}_2$  didefinisikan melalui integral curvature Berry di setengah BZ (Kane and Mele 2005a):

$$\mathbb{Z}_2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \oint_{1/2 \text{ BZ}} \mathcal{F}(\mathbf{k}) d^2k - \oint_{\partial(1/2 \text{ BZ})} \mathcal{A}(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{k} \right] \mod 2 \quad (1.17)$$

dengan:

$$\mathcal{F} = \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathcal{A} \quad (\text{Curvature Berry}) \quad (1.18)$$

$$\mathcal{A} = -i \sum_{n \in \text{OCC}} u_{n\mathbf{k}} \nabla_{\mathbf{k}} u_{n\mathbf{k}} \quad (\text{Koneksi Berry}) \quad (1.19)$$

### I.2.3 Anderson Disorder

(Anderson 1958) menunjukkan adanya fenomena lokalisasi elektron dalam potensial acak yang menyebabkan transisi logam-isolator, di mana fungsi gelombang elektron berubah dari keadaan *extended* menjadi *localized*. Mekanisme ini dapat dimodelkan melalui Hamiltonian:

$$H = \sum_i \epsilon_i i i + t \sum_{\langle i,j \rangle} (i j + \text{h.c.}) \quad (1.20)$$

dengan  $\epsilon_i \in [-W/2, W/2]$  adalah potensial on-site acak dan  $t$  adalah integral hopping.

### Dampak pada Sistem Topologi

Dalam sistem Quantum Spin Hall (QSH), disorder memengaruhi stabilitas fase topologi melalui:

- **Hybridisasi Edge-Bulk:** Disorder kuat menyebabkan edge states helical berhibridisasi dengan keadaan bulk terlokalisasi.

### I.3 Tujuan Penelitian

1. Memperoleh respon spektrum energi *Quantum Spin Hall* (QSH) Kane-Mele 3D terhadap variasi disorder.
2. Memperoleh Perubahan struktur pita energi sebagai respons terhadap disorder dalam model Kane-Mele 3D.
3. Memperoleh peta spektrum untuk memvisualisasikan stabilitas *Quantum Spin Hall* terhadap disorder.

### I.4 Manfaat Penelitian

1. Memberikan wawasan teoritis terhadap efek *stacking* lapisan dalam memperluas model Kane-Mele ke dimensi tiga.
2. Menyediakan Batas gangguan struktural (ketidakteraturan potensial, hopping, dan massa efektif) yang memengaruhi kestabilan fase topologis dalam sistem 3D.
3. Memberikan pemahaman lebih dalam mengenai bagaimana disorder memengaruhi keberlangsungan simetri pembalikan waktu (*time-reversal symmetry*) pada sistem topologis.
4. Mendukung pengembangan *dissipationless electronics* berbasis *edge states helical* untuk perangkat elektronik modern.

## **BAB II**

### **PENDAHULUAN**

#### **II.1 Latar Belakang**

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta

vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

## **II.2 Landasan Teori**

### **II.2.1 Sifat Elektronik Material**

Sifat elektronik material masih terhalang kabut yang tebal sebelum mekanika kuantum datang. Sebelumnya, sifat elektronik dari suatu material masih ditentukan oleh atom penyusun material tersebut. Paul Drude(1900) menjelaskan fenomena kelistrikan material dengan menganggap elektron sebagai gas gas ideal klasik, teori ini sayangnya gagal menjelaskan kapasitas panas elektronik (Kittel 1955).

Setelah datangnya mekanika kuantum kita tahu bahwa energi terkuantisasi pada level-level tertentu. Lebih dari itu, lewat representasi Bloch kita mampu membangun struktur pita energi dalam sistem material, hal ini akhirnya

memberikan kita informasi terbaru perihal sifat elektronik material.

Dalam menyelesaikan persamaan schrodinger, Bloch menggunakan fungsi gelombang periodik, dengan berlandaskan potensial periodik pada kristal.

$$\psi(r) = u_k(r)e^{ik \cdot r}$$

Interaksi antara gelombang elektron inilah yang akhirnya melahirkan celah pita energi. Klasifikasi material lahir dari informasi ini; isolator adalah material celah pita cukup besar antara pita valensi dan pita konduksi sehingga elektron tidak mampu berpindah bebas antara kisi, sedangkan konduktor adalah material dengan pita yang terisi setengah, sehingga elektron bebas bergerak di dalam material bahkan dengan energi tambahan yang kecil. Dari teori celah pita ini juga lahir semikonduktor, sebuah material dengan celah pita kecil sehingga elektron masih mampu melompat ke kisi tetangga.

## II.2.2 Efek Tepi dan Kuantisasi Konduktansi Tepi

Ide dari konduktansi tepi telah lahir jauh sebelum material topologis datang. Pada fisika klasik, ketika sebuah medan listrik  $E$  mengalir lurus kedalam sebuah pelat metal tipis sedemikian hingga elektron hanya mampu bergerak bebas dalam bidang dua dimensi. Kemudian sebuah medan magnet diaplikasikan tegak lurus terhadap pelat metal, gaya Lorentz akan memodulasi elektron menuju ketepian pelat(Kittel 1955).

$$E_y = -\frac{eB\tau}{m}E_x$$

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B}$$

$$R_H = -\frac{1}{ne}\rho_{xy} = R_H B_z$$

Deskripsi matematis ini memberi kita informasi dari resistivitas yang ditentukan secara linear oleh penambahan kekuatan medan magnet  $B_z$ .

(Klitzing, Dorda **and** Pepper 1980) Kemudian mencoba membawa fenomena ini kedalam rezim kuantum. dan menunjukkan bahwa pada medan magnet kuat dan suhu rendah, koefisien Hall menjadi terkuantisasi. Kuantisasi dari gerakan orbital elektron dengan frekuensi siklotron  $\omega_c$  mengarah ke kuantisasi level Landau dengan energi  $\epsilon_m = \hbar\omega_c(m + 1/2)$ . Fenomena ini melahirkan kuantisasi konduktansi tepi;

$$\sigma_{xy} = Ne^2/h$$

### II.2.3 TKKN Invariant

Ketika visualisasi dilakukan terhadap pita energi pada sistem yang dikerjakan oleh (Klitzing, Dorda **and** Pepper 1980), akan diperoleh celah pita yang memperantarai pita energi. Pertanyaan yang muncul setelah penelitian penting ini adalah; apa yang membedakan sistem ini dengan insulator biasa dan darimana nilai kuantisasi ini diperoleh.

Jawaban dari teka-teki ini muncul lewat diksi matematis yang menyelina masuk ke skena fisika. Topologi, sebagaimana dijelaskan oleh (Thouless **and** others 1982), adalah diksi yang menjelaskan klasifikasi geometri yang tahan terhadap deformasi ringan, seperti benda dengan satu lubang akan tetap diklasifikasikan dengan "genus" satu, selama lubang tersebut tetap satu tidak peduli dengan bentuk kulitnya. Hal ini membantu kita menjelaskan bahwa selama dua pita memiliki properti topologi yang sama, keduanya mampu terkoneksi secara adiabatik tanpa penutupan celah.

Bilangan kuantum topologi yang mengikat pita-pita ini dapat dimengerti lewat formulasi Berry Phase (Berry 1984). Berry menunjukkan pada penelitiannya bahwa sebuah hamiltonian kuantum akan menghasilkan fase geometris kompleks ketika diberi variasi eksternal. Fase ini memiliki garis integral  $\mathcal{A}_m = i\langle u_m | \nabla_k | u_m \rangle$ , dan integral bidang  $\mathcal{F}_m = \nabla \times \mathcal{A}_m$ . Invariant atau bilangan kuantum dari sistem dapat dihitung dengan;

$$n_m = \frac{1}{2\pi} \int d^2\mathbf{k} \mathcal{F}_m$$

### II.2.4 Model Haldane

Salah satu contoh material yang secara struktur mengizinkan fenomena topologis seperti yang dijelaskan pada bagian II.2.3 datang dari material dua dimensi Grafena (Castro Neto **and** others 2009) (Novoselov **and** others 2005). Material ini sangat menarik dari segi sifat elektronik dimana sturuktur pitanya menunjukkan apa yang disebut *Dirac Cone* pada sudut Brilioun Zone. Hal ini menyebabkan elektron bergerak mendekati kecepatan cahaya ketika melewati grafena. Fenomena ini juga makin jelas apabila melihat hamiltonian material ini, sebuah hamiltonian dengan susunan menyurupai hamiltonian relativistik Dirac tanpa massa;  $\mathcal{H}(\mathbf{q}) = \hbar v_F \mathbf{q} \cdot \vec{\sigma}$

Ide Kuantisasi tepi ini kemudian dibawa oleh (Haldane 1988) kedalam material grafena. Mengingat bahwa degenerasi di tengah titik *Dirac Cone* dilindungi oleh simetri pembalikan waktu dan simetri inversi, maka Haldane mencoba untuk merusak simetri inversi dengan mengaplikasikan beda potensial pada dua atom basis pada subkisi grafena (di masa itu masih disebut Graphite 2D, karena (Novoselov **and** others 2005) baru berhasil mengekstraksi Grafena beberapa

tahun kemudian) hal ini menciptakan hamiltonian dengan massa  $m$  yang berperan dalam penciptaan celah pada *Dirac Cone* sebesar  $2|m|$ .

Ketika prosedur merusak simetri inversi di atas menghasilkan celah energi, yang mana mengantarkan material tersebut menjadi insulator. Namun ketika medan magnet dengan rerata nol diaplikasikan untuk menciptakan fase imajiner kepada sistem, Haldane menunjukkan bahwa sistem tersebut tidak lagi menjadi sebuah insulator biasa. Dengan menggunakan model material teoritis dengan struktur heksagonal, Haldane berhasil menciptakan Kuantisasi tepi  $\sigma_{xy} = e^2/h$ .

Hasil yang diperoleh oleh Haldane dapat dikaitkan dengan perolehan bilangan kuantum yang didiskusikan pada II.2.3. Seperti yang ditunjukkan oleh (Berry 1984), Fase periodik menyebabkan terpelintirnya fungsi Bloch dalam ruang reciprocal. Pelintiran fungsi oleh Fase Berry inilah yang bertanggung jawab sebagai medan magnet imajinatif pada ruang momentum, memodulasi elektron menuju ketepian kristal.

### **II.2.5 Model Kane dan Mele**

## BAB III

### MODEL DAN METODE PENELITIAN

#### III.1 Model Fisik Sistem

##### III.1.1 Tight Binding Model Grafena

Penelitian ini menggunakan pendekatan Tight Binding Model untuk merepresentasikan hamiltonian penuh dari material. Model ini dipilih, selain karena digunakan dalam rujukan inti PhysRevB.91.085106 dan (Kane **and** Mele 2005b), namun juga karena sifat elektronik grafena yang hanya dipengaruhi oleh orbital  $P_z$ , sehingga material tersebut sangat efektif dibawah kedalam bentuk Tight Binding untuk mempermudah penyelesaian persamaan schrodinger.

Model Tight Binding merepresentasikan atom dalam kisi dengan satu basis orbital  $|f_n\rangle = |\phi(x - a)\rangle$  yang terlokalisasi, dengan satu basis orbital setiap atom, orbital ini akan saling tumpang tindih dengan basis atom terdekat. Sehingga Hamiltonian sistem dapat dibangun dengan dua suku; suku lokal ditambah suku tumpang tindih (Grosso **and** Parravicini 2014):

$$H = \sum_n \epsilon_n |f_n\rangle \langle f_n| + \sum_n b_{n+1} |f_n\rangle \langle f_{n+1}| + \text{H.c.}$$

Untuk Grafena, yang mana merupakan material dua dimensi dengan sruktur *Honey comb*, orbital terluar atom akan tumpang tidih dengan tiga tetangga terdekat ditambah enam tetangga terdekat kedua.

Dalam literatur modern (Castro Neto **and others** 2009), model hamiltonian Tight-Binding sering dituliskan dalam bentuk kuantisasi kedua. Dimana dalam penggambaran mekanika kuantum, sistem ditentukan oleh fungsi gelombang, sedangkan dalam kuantisasi kedua, elektron dianihilasi dan diciptakan dalam medan fermion oleh operator  $c$  dan  $c^\dagger$ . Sehingga secara matematis, Hamiltonian Grafena dapat diaproksimasi dengan bentuk;

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} \left( a_{\sigma,i}^\dagger b_{\sigma,j} + \text{H.c.} \right) - t' \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle, \sigma} \left( a_{\sigma,i}^\dagger a_{\sigma,j} + b_{\sigma,i}^\dagger b_{\sigma,j} + \text{H.c.} \right),$$

##### III.1.2 Kane-Mele *Spin Orbit Coupling*

Untuk memperoleh fase topologis, Kane-Mele(Kane **and** Mele 2005b) memanfaatkan pengaruh *Spin Orbit Coupling* pada grafena yang selama ini diabaikan sebab memiliki pengaruh yang sangat kecil pada sifat fisis grafena.



Kane-Mele menggunakan dua replika model HaldanePhysRevLett.61.2015 yang menambahkan fase imajiner pada suku hopping tetangga kedua yang menciptakan medan magnet imajinatif pada ruang momentum, memodulasi gerakan elektron ketepi material. Kane-Mele meningkatkan model ini dengan menambahkan variabel SOC dalam suku tersebut, menyebabkan modulasi berbeda setiap spin. secara matematis;

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{KM},l} = & t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} c_{il\sigma}^\dagger c_{jl\sigma} + i\lambda_{\text{SO}} \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle, \sigma} \nu_{ij} c_{il\sigma}^\dagger s_{\sigma\sigma'}^z c_{jl\sigma'} \\ & + i\lambda_R \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma\sigma'} c_{i\sigma}^\dagger (\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{d}}_{ij})_{\sigma\sigma'}^z c_{j\sigma'} + \lambda_v \sum_{i,\sigma} \xi_i c_{il\sigma}^\dagger c_{il\sigma}.\end{aligned}$$

Penambahan variabel spin di suku imajiner pada akhirnya akan mempertahankan simetri pembalikan waktu yang dirusak dalam model Haldane.

$$\begin{aligned}\mathcal{T} \mathcal{H}_{\text{KM},l} \mathcal{T}^{-1} &= \mathcal{T} \left[ t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} c_{il\sigma}^\dagger c_{jl\sigma} + i\lambda_{\text{SO}} \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} \nu_{ij} c_{il\sigma}^\dagger s_{\sigma\sigma'}^z c_{jl\sigma'} \right. \\ &\quad \left. + i\lambda_R \sum_{\langle i,j \rangle} c_{il\sigma}^\dagger (\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{d}}_{ij})_{\sigma\sigma'}^z c_{jl\sigma'} + \lambda_v \sum_{i,\sigma} \xi_i c_{il\sigma}^\dagger c_{il\sigma} \right] \mathcal{T}^{-1} \\ &= t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} c_{il\bar{\sigma}}^\dagger c_{jl\bar{\sigma}} - i\lambda_{\text{SO}} \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} \nu_{ij} c_{il\bar{\sigma}}^\dagger s_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}'}^z c_{jl\bar{\sigma}'} \\ &\quad - i\lambda_R \sum_{\langle i,j \rangle} c_{il\bar{\sigma}}^\dagger (\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{d}}_{ij})_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}'}^z c_{jl\bar{\sigma}'} + \lambda_v \sum_{i,\sigma} \xi_i c_{il\bar{\sigma}}^\dagger c_{il\bar{\sigma}} \\ &= \mathcal{H}_{\text{KM},l}.\end{aligned}$$

### III.1.3 Stacking Layer

Kami membangun model tiga dimensi dengan menumpuk lapisan model Kane-Mele (Kane **and** Mele 2005b), mengikuti pendekatan peneleitian berikut PhysRevB.91.085106. Hamiltonian total terdiri dari suku Kane-Mele intralayer, hopping antarlapisan, dan kopling spin-orbit (SOC) antarlapisan:

$$\mathcal{H} = \underbrace{\sum_l \mathcal{H}_{\text{KM},l}}_{\text{Intralayer}} + \underbrace{\tau \sum_{\langle l,l' \rangle} \sum_{i,\sigma} c_{il\sigma}^\dagger c_{il'\sigma}}_{\text{Hopping Antarlapisan}} + \underbrace{i\lambda_{\text{SO}\perp} \sum_{\langle l,l' \rangle} \sum_{i,\sigma,\sigma'} \mu_{ll'} c_{il\sigma}^\dagger s_{\sigma\sigma'}^z c_{il'\sigma'}}_{\text{Kopling Spin-Orbit Antarlapisan}},$$

Seperti yang ditunjukkan pada gambar III.1, *stacking* dilakukan dengan

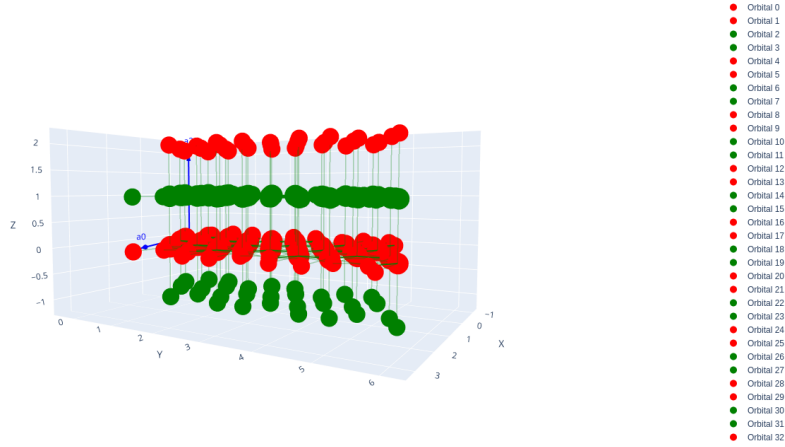


Figure III.1: Visualisasi skema stacking layer

munumpuk grafena dua dimensi di sumbu x, dengan perbedaan warna merah dan hijau menunjukkan perbedaan layer. skema ini menciptakan bentuk geometris tiga dimensi kepada grafena.

## III.2 Formulasi dan Validasi Numerik

### III.2.1 Diskretisasi Ruang

Dalam mekanika kuantum partikel diperlakukan sebagai variabel kontinyu, yang diatur oleh fungsi gelombang  $\psi(x)$ . Namun dalam kasus seperti material grafena, dimana basis orbital setiap atom terlokalisasi, ruang posisi dapat kita diskretisasi. Sehingga hamiltonian dari sistem juga dapat kita modelkan dalam bentuk matrix tridiagonal.

$$H = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{V} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{V}^\dagger & \mathbf{H}_1 & \mathbf{V} & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}^\dagger & \mathbf{H}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{V} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{V}^\dagger & \mathbf{H}_N \end{pmatrix}.$$

Dengan model hamiltonian ini kita akan dengan mudah memperoleh nilai energi dan fungsi gelombang dari sistem, dengan memasukkan model ini kedalam komputer dan mendiagonalisasi hamiltonian dengan  $H_n\psi_n(r) = E_n\psi(r)$ .

### III.2.2 Validasi Efek Tepi

Setelah memperoleh spektrum energi dari diagonalisasi hamiltonian pada ruang diskrit, kita akan memperoleh spektrum energi dari sistem yang periodik, dimana elektron memiliki potensi untuk menjelajah seluruh titik kisi dengan probabilitas universal. Namun dalam kasus konduktansi tepi, elektron tidak menjelajah seluruh titik kisi, melainkan termodulasi ketepian. Maka untuk memvalidasi model dan prosedur numerik, kita perlu menghitung spektrum energi sistem yang terbatas (tidak periodik). Hal ini dilakukan dengan *slab geometry*, dimana ruang tiga dimensi direduksi menjadi dimensi yang lebih rendah.

Untuk keperluan validasi, penelitian ini menggunakan arah (100), dimana arah y dan z tetap periodik sedangkan arah x terbatas. Secara konsep, seharusnya struktur pita akan menunjukkan terciptanya celah pita pada energi fermi akibat terlokalisasinya elektron di *bulk*, namun akan ada dua pita yang berbelok dari valensi ke pita konduktif, *vice versa*.

Pada penelitian ini, efek dari *Periodic Boundary Condition* dan *Open Boundary Condition* juga diuji, untuk melihat bagaimana distribusi energi yang diperbolehkan pada sistem ketika diterapkan batas pada material dan bagaimana respon sistem ketika diberi kondisi periodik.

### III.3 Metode Analisis Spektrum

Untuk melihat bagaimana respon sistem terhadap perubahan parameter, kita akan membangun peta respon energi. Hal ini dilakukan dengan membandingkan hasil plot fungsi energi terhadap variasi parameter. Pada penelitian ini, parameter yang akan divariasikan adalah straggled potential pada atom lokal dan kopling rashba, yang mana dijelaskan pada (Kane and Mele 2005b), melawan efek *Spin Orbit Coupling*. Plot-plot energi akan disusun dalam sumbu straggled potential vs kopling rashba, untuk melihat di titik mana *Spin Orbit Coupling* kalah.

$$\lambda_R < \lambda_{SOC}$$

#### III.3.1 Peta Spektrum Ribbon

Peta pertama yang akan dibangun adalah spektrum ribbon. Seperti yang disinggung sebelumnya; *edge state* hanya akan tervisualisasi pada spektrum pita energi apabila diterapkan *slab geometry*. Untuk satu nilai parameter, plot akan dibangun dengan mendiagonalisasikan energi pada dua sumbu periodik dan satu sumbu terbatas di titik-titik simetri tinggi;  $(\bar{\Gamma}, \bar{X}, \bar{M}, \bar{\Gamma}, \bar{Y})$

Untuk menentukan kriteria dari *edge state*, kita hanya perlu memperhatikan

transisi pita konduksi menuju pita valensi, dan sebaliknya. di titik straggled potential dan rashba besar seharusnya struktur pita akan menuju ke bentuk insulator trivial.

### III.3.2 Peta Probabilitas Elektron

Hasil dari diagonalisasi matrix hamiltonian tidak hanya memberikan kita informasi eigen energi, tapi memberikan kita informasi dari eigen vektor(eigen state)  $\psi_n(k)$ . Eigen state( $\psi_n(k)$ ) ini dapat ditulis sebagai superposisi orbital-orbital basis;

$$|\psi_n\rangle = \sum_{\alpha} c_{n\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle$$

Nilai kuadrat dari  $\sum_{\alpha} c_{n\alpha}$  secara fisis menunjukkan probabilitas keberadaan elektron, nilainya akan berkisar dari 0-1. Penelitian ini memanfaatkan nilai probabilitas ini untuk mendeteksi distribusi probabilitas pada sistem. Pita energi akan kembali diekstraksi dalam prosedur ini, namun dengan mode periodik dan penambahan pengukur probabilitas untuk melihat aktivitas elektron pada sistem.

Untuk menentukan kriteria dari *edge state* kita hanya perlu melihat pencampuran probabilitas pada struktur pita. Pada insulator trivial, probabilitas elektron akan kontras antara valensi dan konduksi, berbeda dengan mode tepi yang akan mencampur probabilitas.

### III.3.3 Peta Kerapatan Energi

Pita energi hanya memberikan kita gambaran visual dari perilaku sistem, maka untuk memvalidasi keberadaan keadaan tepi(*edge state*) kita perlu memperoleh nilai kuantitatif dari energi pada celah pita. Penelitian ini memanfaatkan ekstraksi kerapatan keadaan untuk mendeteksi keberadaan *edge state* pada energi fermi. Lebih dari itu, tidak seperti pita energi yang memaksa kita mereduksi dimensi untuk keperluan visualisasi, kerapatan keadaan mengizinkan kita untuk memotong seluruh sumbu(111).

Rapat keadaan dalam mekanika kuantum dimodelkan sebagai;

$$D(E) = \sum_n \delta(E - E_n)$$

Karena komputer tidak bisa membaca fungsi delta, maka penelitian ini menggunakan metode histogram untuk mendekati nilai analitik. Rentang energi akan dibagi menjadi bin dengan lebar  $\Delta E$ , hasil diagonalisasi hamiltonian kemudian akan menentukan berapa banyak level energi  $E_n$  yang masuk kedalam

setiap bin, yang kemudian akan dibagi dengan  $\Delta E$  untuk memperoleh kerapatan energi.

### III.4 Metode Analisis Topologi

#### III.4.1 Hybrid Wannier Function

Penggunaan Hybrid Wannier Centers (HWC) dalam model stacking layer ini bertujuan untuk memetakan perubahan sifat topologi sistem saat dimensi material diperluas. Dengan mengamati pola winding pada spektrum Wilson Loop, perubahan fase topologis yang dipicu oleh interaksi antar-lapisan dapat diidentifikasi secara visual melalui transisi antara pola partner-switching (topologis) dan pola berpasangan (trivial), mengikuti prosedur (Cole, Coh **and** Vanderbilt 2025).

Kane dan Mele (Kane **and** Mele 2005a) menjelaskan bahwasanya invariant yang menjelaskan sifat topologi dari sistem *Quantum Spin Hall* dapat ditentukan dari ganjil genap dari fluks, sehingga terdapat dua mode dari sistem ini; fase odd (Topologi,  $Z_2 = 1$ ) dan fase even (Trivial Insulator,  $Z_2 = 0$ ). Untuk memperoleh nilai dari  $Z_2$ , membagi ruang momentum menjadi dua sub-ruang; ruang titik TRIM (*Time Reversal Symmetry*) dan sub-ruang dimana tumpang tindih antar matrix bersifat anti-unitarian ( $\Theta$ ). Untuk matrix anti-simetrik  $2 \times 2$ , seluruh informasi dapat diperoleh dari Pfaffian;

$$P(\mathbf{k}) = Pf[\langle u_i(\mathbf{k}) | \bar{\theta} | u_j(\mathbf{k}) \rangle]$$

Lewat perolehan ini,  $Z_2$  invariant akhirnya dapat diperoleh dengan melihat perpindahan Pfaffian pada titik TRIM menghasilkan nol yang genap, maka sistem disebut even mode, begitupun sebaliknya.

$$\Delta = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial\tau} d\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \log[P(+i\delta)] \quad \text{mod } 2,$$

Meskipun formulasi Pfaffian memberikan definisi matematis yang kokoh, implementasi numeriknya sering kali terkendala oleh ambiguitas fase fungsi Bloch. (Soluyanov **and** Vanderbilt 2011) menawarkan pendekatan alternatif melalui representasi Wannier. Dalam metode ini, invarian  $Z_2$  ditentukan melalui evolusi *Wannier Charge Centers* (WCC) dalam skema *hybrid*. Evolusi posisi pusat muatan ini terhadap momentum  $\mathbf{k}$  pada arah tegak lurus menunjukkan 'pelintiran' topologis; di mana pada fase topologis ( $Z_2=1$ ), jalur-jalur WCC akan bertukar pasangan Kramers dan menghasilkan jumlah persilangan yang ganjil pada garis referensi di Zona Brillouin.

Dalam ruang satu dimensi, WCC dapat didefinisikan sebagai suku integrasi dari Potensial Berry (Berry 1984) (Gresch **and others** 2017);

$$\bar{x}_n = \frac{ia_x}{2\pi} \int_{-\pi/a_x}^{\pi/a_x} dk_x \mathcal{A}_n(k_x)$$

Atau;

$$\bar{x}_n(k_y, k_z) = \frac{a_x}{2\pi} \int_{-\pi/a_x}^{\pi/a_x} dk_x \mathcal{A}_n(k_x, k_y, k_z)$$

Dimana  $\mathcal{A}_n(k)$  dituliskan sebagai;

$$\bar{A}_n(\bar{k}) = \langle n_k | \nabla_{\bar{R}} | n_k \rangle$$

Untuk membawa persamaan ini ke dalam perhitungan numerik, kita tidak dapat langsung mengevaluasi turunan  $\nabla_{\bar{R}}$ , sehingga koneksi Berry didefinisikan melalui transport paralel diskret antar titik  $\mathbf{k}$  pada kisi Brillouin (Fukui, Hatsugai **and** Suzuki 2005). Didefinisikan *link variable*

$$U_n(k_l) = \frac{\langle n(k_l) | n(k_l + \hat{\mu}) \rangle}{|\langle n(k_l) | n(k_l + \hat{\mu}) \rangle|}$$

yang merepresentasikan holonomi fase Berry sepanjang satu langkah mesh. Hubungan antara  $U_n$  dan koneksi Berry kontinu diberikan oleh

$$\langle n(k) | n(k + \delta k_\mu) \rangle \simeq \exp[-i A_\mu(k) \delta k_\mu],$$

sehingga dengan mengikuti prosedur (Cole, Coh **and** Vanderbilt 2025) koneksi Berry diskret dapat diekstraksi sebagai

$$A_\mu(k) = -\frac{1}{i \delta k_\mu} \log U_n(k).$$

Dalam implementasi numerik yang digunakan oleh paket (Cole, Coh **and** Vanderbilt 2025), ekstraksi nilai  $A_\mu(k)$  melalui prosedur diskretisasi ini disusun menjadi sebuah operator transport paralel non-Abelian yang dikenal sebagai operator Wilson Loop,  $D_\perp(k)$ . Berdasarkan formulasi (Yu **and others** 2011), operator ini didefinisikan sebagai produk dari *link variables* di sepanjang jalur tertutup dalam zona Brillouin:  $D(k_\perp) = U(k_1)U(k_2) \dots U(k_N)$

Matriks Wilson Loop ini memiliki nilai eigen berbentuk  $\lambda_m = e^{i\theta_m(k_\perp)}$ , di mana fase  $\theta_m$  merupakan fase Berry terakumulasi yang secara fisik merepresentasikan

posisi pusat muatan Wannier hibrida (*Hybrid Wannier Centers*) dalam satuan tanpa dimensi:

$$\bar{x}_m(k_\perp) = \frac{\theta_m(k_\perp)}{2\pi} a_x$$

Dengan demikian, prosedur Soluyanov-Vanderbilt untuk menentukan invarian  $Z_2$  dilakukan dengan memplot evolusi fase  $\theta_m$  terhadap momentum tegak lurusnya ( $k_\perp$ ). Dalam fase topologis ( $Z_2 = 1$ ), spektrum fase ini akan menunjukkan fenomena *partner switching*, di mana jalur-jalur pusat muatan Wannier saling bertukar pasangan Kramers. Secara praktis, algoritma ini memastikan bahwa perhitungan tetap *gauge-invariant*, sehingga sifat topologi material dapat diidentifikasi secara stabil tanpa memerlukan syarat *gauge-fixing* yang rumit.

### III.4.2 Axion Angle

Gerakan orbital elektron dalam kristal tiga dimensi menciptakan *Pseudoscalar magnetoelectric phase coupling*  $\theta$  (Essin, Moore **and** Vanderbilt 2009). Perhitungan  $\theta$  adalah cara sederhana untuk meninjau adanya *surface hall conductivity* pada material (**PhysRevLett.58.1799**).

$$\delta\mathcal{L}_{EM} = \frac{\theta e^2}{2\pi h} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

Dengan itu (Qi, Hughes **and** Zhang 2008) mendefinisikan  $\theta$  sebagai integrasi elektron dalam dimensi yang satu kali lebih tinggi, dengan koneksi Berry  $\mathcal{A}_j^{\mu\nu} = i\langle u_\mu | \partial_j | u_\nu \rangle$ , diperoleh

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{BZ} d^3k \epsilon_{ijk} \text{Tr}[\mathcal{A}_i \partial_j \mathcal{A}_k - i \frac{2}{3} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \mathcal{A}_k]$$

(Qi, Hughes **and** Zhang 2008) menunjukkan bahwa sistem topologis yang invarian terhadap pembalikan waktu berada pada dimensi  $4 + 1$  yang diklasifikasikan dengan *second chern number*. Dengan itu  $\theta(\beta)$  dihitung untuk ekspresi *second chern number* menggunakan *Four Curvature Formulation*

$$\theta = \frac{1}{16\pi} \int_0^\beta d\beta' \int d^3k \epsilon_{ijkl} \text{Tr}[\mathcal{F}_{ij}(\mathbf{k}, \beta') \mathcal{F}_{kl}(\mathbf{k}, \beta')]$$

### III.5 Parameter dan Implementasi

#### III.5.1 Tabel Parameter

Table III.1: Parameter Hamiltonian sistem *stacking layer* Honeycomb.

Parameter	Simbol	Nilai	Satuan/Keterangan
Hopping dasar	$t$	1.0	Unit energi ( $e.V$ )
Spin-Orbit Coupling	$\lambda_{SOC}$	0.25 – 0.30	Nilai paper Kane-Mele
Rashba Coupling	$\lambda_R$	0.0 – 0.30	Pecahnya simetri inversi
Staggered Potential	$\Delta$	0.0 – 3.0	Perbedaan energi subkisi
Amplitudo Modulasi	$m_{axion}$	0.5	Onsite potensial terhadap $\beta$

Table III.2: Konfigurasi geometri dan parameter kisi.

Parameter	Deskripsi/Nilai
Struktur Kristal	Hexagonal ( <i>Honeycomb-like</i> )
Vektor Kisi Dasar	$\vec{a}_1 = (1, 0, 0)$ , $\vec{a}_2 = (0.5, \sqrt{3}/2, 0)$ , $\vec{a}_3 = (0, 0, 1)$
Posisi Orbital	$A = (1/3, 1/3, 0)$ , $B = (2/3, 2/3, 0)$
Derajat Kebebasan	<i>Spinful</i> (Matriks Pauli $\sigma_{x,y,z}$ )
Arah Periodik	$[0, 1, 2]$ (3D <i>Bulk</i> )
Dimensi Geometri <i>Slab</i>	20 unit sel (Arah-y terbatas)

Table III.3: Parameter numerik dan konfigurasi simulasi PythTB.

Parameter	Variabel Kode	Nilai/Pengaturan
Grid Momentum (HWC)	mesh shape	$41 \times 41 \times 41$
Grid Momentum (Axion)	nks	$30 \times 30 \times 30$
Rentang Parameter $\beta$	betas	$[0, 2\pi]$
Jumlah Sampling $\beta$	n_beta	21 titik
Skema Diferensiasi	diff_scheme	<i>Central</i>
Orde Diferensiasi	diff_order	8
Arah Integrasi WCC	axis_idx	1 (Sumbu-y)

#### III.5.2 Ekstensi Numerik

Dalam mengimplementasikan model yang telah dibangun pada III.1.3, penelitian ini memanfaatkan paket PythTB 2.0 Python yang dikembangkan oleh grub peneliti (Cole, Coh **and** Vanderbilt 2025). Paket ini dibangun untuk mengonstruksi dan menganalisis model Tight-Binding, yang di khususkan untuk studi teoritikal material topologis. Paket ini mereduksi kode numerik yang panjang menjadi baris singkat, menghemat waktu dan tenaga peneliti.



Penelitian ini mengadopsi empat fungsionalitas dari paket PythTB; Konstruksi model, *State sampling*, Analisis topologi, dan Visualisasi. Pada tabel berikut III.4, kami menunjukkan struktur dan fungsionalitas dari kode yang kami kembangkan.

Table III.4: Struktur kode numerik PythTB.

Kode	Fungsi	Keluaran
Model-Hamiltonian.py	Mengonstruksi model sistem <i>tight-binding</i>	Fungsi objek model
Peta-spektrum.py	Memetakan pengaruh gangguan ( <i>disorder</i> ) terhadap efek tepi	Visualisasi peta spektrum energi
Peta-prob.py	Memetakan pengaruh gangguan terhadap probabilitas elektron pada pita <i>bulk</i>	Visualisasi distribusi probabilitas elektron
Dos.py	Memetakan pengaruh gangguan terhadap kerapatan energi ( <i>Density of States</i> )	Peta <i>Density of States</i> (DOS)
hwf.py	Menganalisis sifat topologi tiga dimensi melalui <i>Wannier functions</i>	Plot evolusi <i>Hybrid Wannier Centers</i> (HWC)
axion-angle.py	Menganalisis efek topologi melalui respon magnetoelektrik	Plot nilai $\theta$ terhadap parameter $\beta$
visualisasi.py	Melakukan pemetaan struktur geometri model	Representasi visual struktur kristal

### III.6 Diagram Alur Penelitian

## BAB IV

### HASIL

#### IV.1 Batas kekuatan Disorder

Bagian ini bertujuan untuk menentukan nilai ambang disorder  $W_c$  yang memisahkan antara mode bulk dan mode hall dalam model Kane-Mele 3D. Dua pendekatan digunakan untuk mendeteksi perubahan struktur spektrum ini, yaitu validasi mode hall melalui visualisasi pita dan fungsi Wannier hibrid, serta perhitungan numerik DoS pada energi nol terhadap variasi disorder.

##### IV.1.1 Validasi Topologis pada Sistem Bersih

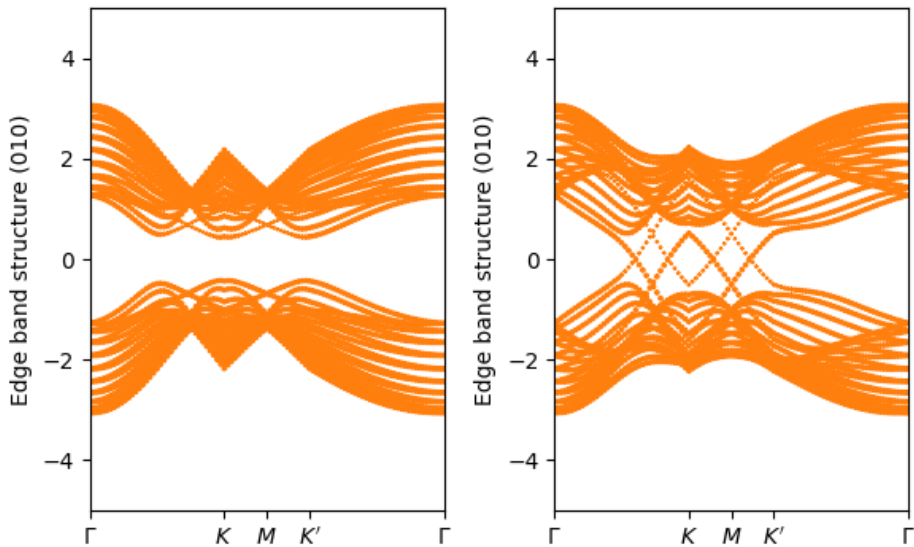


Figure IV.1: (a) Mode Trivial sistem(SOC=0.06) (b) Mode Non-Trivial sistem(SOC=0.24)

Untuk memastikan sistem berada dalam fase topologis sebelum disorder ditambahkan, dilakukan perhitungan struktur pita pada geometri slab (010) dan visualisasi fungsi Wannier hibrid pada sistem bulk. pada hasil yang kita peroleh pada gambar IV.1 menunjukkan adanya fase topologis pada sistem yang kita amati, hasil kita sesuai dengan model yang diperoleh pada penelitian (Lau, Ortix **and** Brink 2015). pembukaan celah pada sistem ini tidak serta merta menandakan bahwa konduktansi sistem nol. konduktansi pada bulk sistem

memanglah nol, karena elektron terlokalisasi akibat dari kopling intrinsik, namun dapat kita lihat bahwa terdapat band yang membelok dari area valensi menuju area konduksi dan sebaliknya, band tersebut menunjukkan adanya konduktansi pada tepian pelat. gambar IV.1 juga menunjukkan dispersi pada nilai kopling intrinsik rendah, pada grafik tersebut tidak ditunjukkan adanya konduktansi pada tepian. Hal ini menunjukkan peran dari kopling intrinsik yang menciptakan simetri pembalikan waktu yang menjaga sistem. Gambar IV.2 menunjukkan evolusi pusat

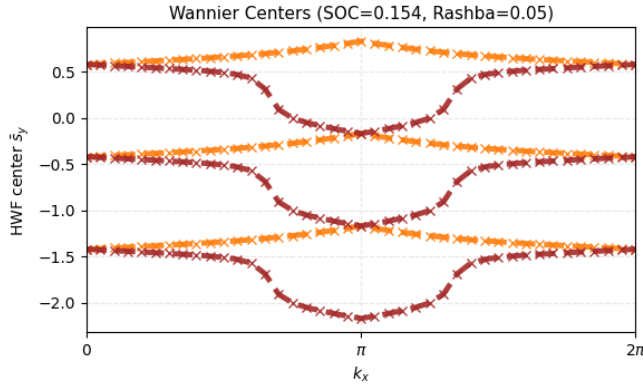


Figure IV.2: Evolusi *Hybrid Wannier Function*

fungsi Wannier hibrid sepanjang arah  $y$  terhadap momentum  $k_x$  dalam sistem bersih (tanpa disorder). Pada grafik tersebut, terlihat bahwa pusat-pusat HWF membentuk struktur yang saling berpotongan dan mengalami pergeseran kontinu sepanjang Brillouin zone. Hal ini bersesuaian dengan apa yang di ekspektasikan penelitian (Soluyanov **and** Vanderbilt 2011) untuk *wannier centers* pada  $Z_2$ .

Pola winding atau “perputaran” pusat HWF terhadap  $k_x$  merupakan indikasi bahwa sistem berada dalam fase topologis non-trivial. Hal ini mencerminkan adanya perubahan muatan topologis secara spasial yang tidak dapat dihapus tanpa menutup celah energi atau memutuskan simetri. Dalam konteks model Kane-Mele, pola ini setara dengan nilai invarian topologi  $Z_2 = 1$ .

#### IV.1.2 Transisi Topologis: Plot DoS pada Energi Nol

Untuk mendeteksi degradasi sifat topologis akibat disorder, dilakukan perhitungan densitas keadaan (DoS) pada energi nol ( $E = 0$ ) terhadap variasi kekuatan disorder  $W$ . Dalam sistem topologis, eksistensi celah energi (bandgap) menyebabkan DoS pada  $E = 0$  mendekati nol. Sebaliknya, peningkatan DoS(0) yang signifikan mengindikasikan lokalisasi akibat efek disorder, dan menandakan kemungkinan transisi dari mode hall ke mode bulk, klaim ini kita perkuat dengan

visualisasi dispersi energi pada bagian selanjutnya.

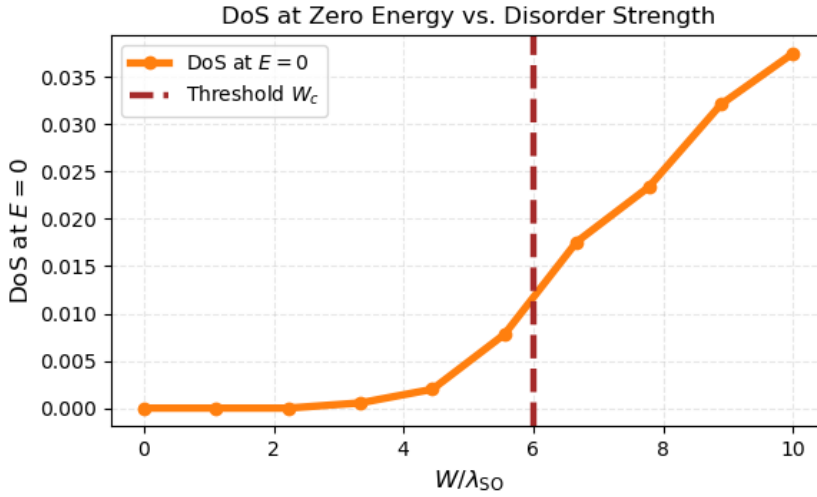


Figure IV.3: Plot DoS pada  $E = 0$  terhadap kekuatan disorder  $W/\lambda_{SO}$ .

Gambar IV.3 menunjukkan bahwa DoS pada energi nol tetap kecil untuk nilai disorder rendah ( $W < 3.5\lambda_{SO}$ ), mendukung bahwa sistem masih berada dalam mode hall. Namun, terjadi peningkatan yang tajam pada  $W > 3.8\lambda_{SO}$ , yang menandakan lokalisasi dan degradasi karakter topologi. Selanjutnya, pada  $W > 6.0\lambda_{SO}$ , DoS terus meningkat dan mencapai nilai tinggi, mengindikasikan bahwa sistem memasuki mode trivial dengan states lokalisasi pada  $E = 0$ . Dengan demikian, titik transisi disorder diperkirakan berada pada  $W_c \approx 6.3\lambda_{SO}$ .

## IV.2 Kerusakan Dispersi Energi dan Hilangnya Edge State Helical

Untuk memvalidasi transisi yang dideteksi melalui perhitungan DoS pada energi nol, dilakukan inspeksi terhadap struktur pita energi (band structure) pada sistem ribbon yang memiliki geometri terbatas secara transversal. Pada sistem topologis, pita energi menampilkan edge state khas yang melintasi celah (bandgap), dikenal sebagai *Helical Edge States*. Edge state ini merupakan tanda utama dari fasa topologis dan menjadi saluran utama untuk transportasi elektronik yang tidak mengalami hamburan balik *Backscattering-free*.

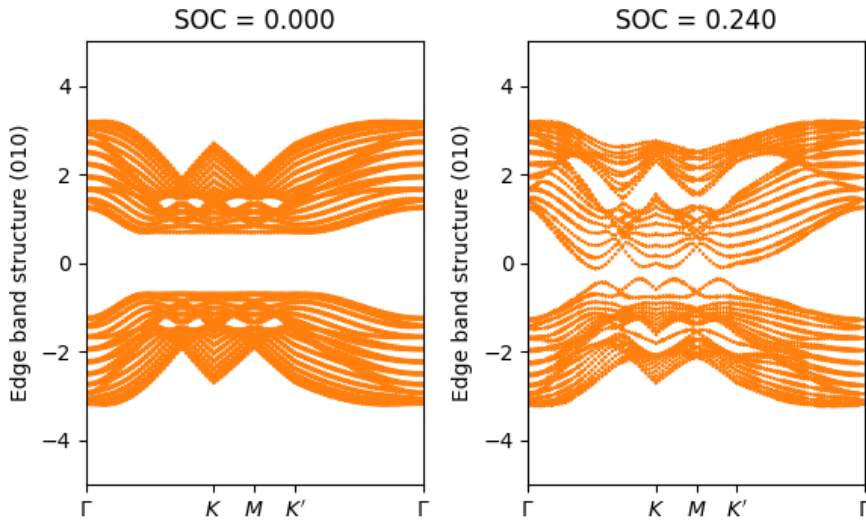


Figure IV.4: Struktur pita energi pada  $W = 6.0\lambda_{SO}$ . Tidak tampak lagi lintasan edge state yang menyambung pita valensi dan pita konduksi.

Gambar IV.4 menunjukkan bahwa pada  $W = 6.0\lambda_{SO}$ , lintasan edge state yang biasanya melintasi celah energi telah menghilang. Celah energi tetap terlihat secara global, namun tidak lagi terdapat konektivitas antara pita valensi dan pita konduksi di dekat energi nol. Hilangnya lintasan ini merupakan indikasi bahwa sistem tidak lagi berada dalam fase topologis. Meskipun DoS menunjukkan peningkatan (menandakan banyaknya states di energi nol), fakta bahwa edge state menghilang dan celah masih ada mengarahkan interpretasi bahwa sistem telah mengalami lokalisasi akibat disorder yang kuat.

Dengan kata lain, meskipun states eksis di sekitar energi nol, mereka tidak terdelokalisasi secara spasial dan tidak dapat menyumbang pada transportasi. Hal ini selaras dengan perhitungan konduktansi yang menunjukkan penurunan drastis pada titik  $W \approx 6.0\lambda_{SO}$ , mengonfirmasi degradasi saluran edge state sebagai konduktor dominan.

### IV.3 Peta Spektrum

Untuk memvisualisasikan respon spektrum secara lebih luas, dilakukan pemetaan terhadap sistem pada dua parameter disorder: disorder pada energi on-site ( $W_x$ ) dan disorder hopping ( $W_y$ ). Berdasarkan analisis DoS, band structure, dan konduktansi, spektrum Topologis eksis di daerah dengan  $W_x < 6.0$  dan  $W_y < 5.0$ , sedangkan di luar rentang ini sistem didominasi oleh states yang terlokalisasi.

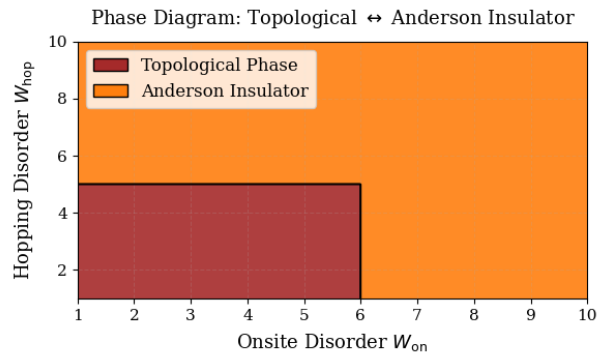


Figure IV.5: Peta Spektrum sistem pada bidang parameter disorder. Daerah putih menandakan struktur spektrum topologis, sedangkan daerah gelap merupakan spektrum trivial.

## BAB V

### KESIMPULAN

#### V.1 Kesimpulan

Setelah melakukan penelitian ini kami melihat adanya transisi dari struktur spektrum pada sistem Kane-Mele *Stacking* pada titik kekuatan disorder  $6\lambda_{SO}$  setelah titik itu sistem akan bertransisi dari struktur spektrum *Quantum Spin Hall* menuju struktur trivial, hal ini menunjukkan bahwa efek kopling antar layer tidak mempengaruhi kestabilan pada sistem perlayer.

Setelah menganalisa struktur pita pada sistem pada disorder kritis, sistem menunjukkan hilangnya *Helical Edge States* pada struktur *Ribbon*, hal ini memperkuat klaim kita bahwa nilai disorder  $6\lambda_{SO}$  adalah titik transisi yang memisahkan struktur spektrum topologis dan fase trivial. Hasil dari struktur *Ribbon* pita ini menunjukkan bahwa sistem dengan *slab geometry* (010) terlokalisasi yang artinya sistem tidak memasuki fase metalik. Sehingga meskipun analisis Dos menunjukkan kenaikan *Density Of States* pada titik kritis, namun sistem tetap terlokalisasi.

Setelah Menyusun Pemetaan spektrum untuk menunjukkan menunjukkan stabilitas *Quantum Spin Hall* pada model Kane-Mele *Stacking* dengan melakukan *Quench* pada kopling sistem, kami menyimpulkan bahwa sistem ini sangatlah stabil pada daerah disorder yang rendah yang pada aplikasinya merupakan efek dari kecacatan kisi. Hal ini menunjukkan bahwa model ini mampu menunjang *Dissipationless electronics* di masa depan.

#### V.2 Saran

Kami Sangatlah mengharapkan kelanjutan dari penelitian ini, agar lebih siap menuju aplikasi industrial. Salah satu *Gap* utama dari penelitian ini adalah tidak adanya analisis dari konduktansi yang sangat vital pada topik ini, alasan dari tidak dilakukannya analisis ini adalah keterbatasan waktu dan kompleksitas dari analisis tersebut.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anderson, P. W. (**march** 1958). "Absence of Diffusion in Certain Random Lattices". *in Phys. Rev.*: 109 (5), **pages** 1492–1505. DOI: 10.1103/PhysRev.109.1492. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.109.1492>.
- Berry, Michael Victor (**march** 1984). "Quantal phase factors accompanying adiabatic changes". *in Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*: 392.1802, **pages** 45–57. ISSN: 0080-4630. DOI: 10.1098/rspa.1984.0023. eprint: <https://royalsocietypublishing.org/rspa/article-pdf/392/1802/45/65511/rspa.1984.0023.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1098/rspa.1984.0023>.
- Castro Neto, A. H. **and others** (**january** 2009). "The electronic properties of graphene". *in Rev. Mod. Phys.*: 81 (1), **pages** 109–162. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.109. URL: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.109>.
- Chang, Cui-Zu **and others** (2015). "High-precision realization of robust quantum anomalous Hall state in a hard ferromagnetic topological insulator". *in Nature Physics*: 11.3, **pages** 305–310. DOI: 10.1038/nphys3217.
- Cole, Trey, Sinisa Coh **and** David Vanderbilt (**november** 2025). *Python Tight Binding (PythTB)*. **version** 2.0.0. DOI: 10.5281/zenodo.12721315. URL: <https://zenodo.org/records/12721315>.
- Essin, Andrew M., Joel E. Moore **and** David Vanderbilt (**april** 2009). "Magnetoelectric Polarizability and Axion Electrodynamics in Crystalline Insulators". *in Phys. Rev. Lett.*: 102 (14), **page** 146805. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.146805. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.146805>.
- Fu, Liang, C. L. Kane **and** E. J. Mele (**march** 2007). "Topological Insulators in Three Dimensions". *in Phys. Rev. Lett.*: 98 (10), **page** 106803. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.106803. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.106803>.
- Fukui, Takahiro, Yasuhiro Hatsugai **and** Hiroshi Suzuki (2005). "Chern Numbers in Discretized Brillouin Zone: Efficient Method of Computing (Spin) Hall Conductances". *in Journal of the Physical Society of Japan*: 74.6, **pages** 1674–1677. DOI: 10.1143/JPSJ.74.1674. eprint: <https://doi.org/10.1143/JPSJ.74.1674>. URL: <https://doi.org/10.1143/JPSJ.74.1674>.
- Gresch, Dominik **and others** (**february** 2017). "Z2Pack: Numerical implementation of hybrid Wannier centers for identifying topological materials". *in Phys. Rev. B*: 95 (7), **page** 075146. DOI: 10.1103/PhysRevB.95.075146. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.95.075146>.
- Grosso, Giuseppe **and** Giuseppe Pastori Parravicini (2014). "Chapter 1 - Electrons in One-Dimensional Periodic Potentials". *in Solid State Physics (Second*



- Edition*): **by**editorGiuseppe Grosso **and** Giuseppe Pastori Parravicini. Second Edition. Amsterdam: Academic Press, **pages** 1–65. ISBN: 978-0-12-385030-0. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385030-0.00001-3>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123850300000013>.
- Haldane, F. D. M. (**october** 1988). “Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the “Parity Anomaly””. *in**Phys. Rev. Lett.*: 61 (18), **pages** 2015–2018. DOI: 10.1103/PhysRevLett.61.2015. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.61.2015>.
- Kane, C. L. **and** E. J. Mele (**september** 2005a). “ $Z_2$  Topological Order and the Quantum Spin Hall Effect”. *in**Phys. Rev. Lett.*: 95 (14), **page** 146802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.146802. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.146802>.
- (**november** 2005b). “Quantum Spin Hall Effect in Graphene”. *in**Phys. Rev. Lett.*: 95 (22), **page** 226801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.226801. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.226801>.
- Kittel, Charles (1955). *Solid state physics*. **volume** 3. Shell Development Company Emeryville.
- Klitzing, K. v., G. Dorda **and** M. Pepper (**august** 1980). “New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance”. *in**Phys. Rev. Lett.*: 45 (6), **pages** 494–497. DOI: 10.1103/PhysRevLett.45.494. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.45.494>.
- Lau, Alexander, Carmine Ortix **and** Jeroen van den Brink (**february** 2015). “One-dimensional Dirac electrons on the surface of weak topological insulators”. *in**Phys. Rev. B*: 91 (8), **page** 085106. DOI: 10.1103/PhysRevB.91.085106. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.91.085106>.
- Nadeem, Muhammad **and**others (2021). “Overcoming Boltzmann’s Tyranny in a Transistor via the Topological Quantum Field Effect”. *in**Nano Letters*: 21.7. Epub 2021 Mar 29, **pages** 3155–3161. DOI: 10.1021/acs.nanolett.1c00378.
- Novoselov, K. S. **and**others (2005). “Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene”. *in**Nature*: 438.7065, **pages** 197–200. DOI: 10.1038/nature04233. URL: <https://doi.org/10.1038/nature04233>.
- Painter, G. S. **and** D. E. Ellis (**june** 1970). “Electronic Band Structure and Optical Properties of Graphite from a Variational Approach”. *in**Phys. Rev. B*: 1 (12), **pages** 4747–4752. DOI: 10.1103/PhysRevB.1.4747. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.1.4747>.
- Qi, Xiao-Liang, Taylor L. Hughes **and** Shou-Cheng Zhang (**november** 2008). “Topological field theory of time-reversal invariant insulators”. *in**Phys. Rev. B*: 78 (19), **page** 195424. DOI: 10.1103/PhysRevB.78.195424. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.78.195424>.

- Semenoff, Gordon W. (**december** 1984). “Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly”. in *Phys. Rev. Lett.*: 53 (26), **pages** 2449–2452. DOI: 10.1103/PhysRevLett.53.2449. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.53.2449>.
- Soluyanov, Alexey A. and David Vanderbilt (**january** 2011). “Wannier representation of  $\mathbb{Z}_2$  topological insulators”. in *Phys. Rev. B*: 83 (3), **page** 035108. DOI: 10.1103/PhysRevB.83.035108. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.83.035108>.
- Thouless, D. J. and others (**august** 1982). “Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential”. in *Phys. Rev. Lett.*: 49 (6), **pages** 405–408. DOI: 10.1103/PhysRevLett.49.405. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.405>.
- Vanderbilt, David (2018). *Berry Phases in Electronic Structure Theory: Electric Polarization, Orbital Magnetization and Topological Insulators*. Cambridge University Press Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press. ISBN: 978-0-521-85500-3. URL: <https://doi.org/10.1017/9781316662205>.
- Wallace, P. R. (**may** 1947). “The Band Theory of Graphite”. in *Phys. Rev.*: 71 (9), **pages** 622–634. DOI: 10.1103/PhysRev.71.622. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.71.622>.
- Wu, Binglan and others (**september** 2016). “Disorder effects in topological states: Brief review of the recent developments”. in *Chinese Physics B*: 25.11, **page** 117311. DOI: 10.1088/1674-1056/25/11/117311. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1674-1056/25/11/117311>.
- Yu, Rui and others (**august** 2011). “Equivalent expression of  $\mathbb{Z}_2$  topological invariant for band insulators using the non-Abelian Berry connection”. in *Phys. Rev. B*: 84 (7), **page** 075119. DOI: 10.1103/PhysRevB.84.075119. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.84.075119>.

## BAB A

### Derivasi Matematis

#### A.1 Tight Binding Model

Persamaan Schrodinger untuk potensial *single atom*:  $U(r)$

$$\left[ \frac{p^2}{2m} + U(r) \right] \phi(r) = E_0 \phi(r) \quad (\text{A.1})$$

$$\phi^*(r) \left[ \frac{p^2}{2m} + U(r) \right] \phi(r) = \phi^*(r) E_0 \phi(r) \quad (\text{A.2})$$

Dengan menambahkan pengaruh dari atom lain:

$$\psi_k(r) = \sum_j b_k(r_j) \phi_k(r - r_j) \quad (\text{A.3})$$

$$\psi(r + R_l) = e^{ik \cdot R_l} \psi(r), \quad (\text{Teori Bloch}) \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_j b_k(r_j) \phi(r - r_j + R_l) = e^{ik \cdot R_l} \sum_j b_k(r_j) \phi(r - r_j) \quad (\text{A.5})$$

Dengan mensubstitusi  $R_p = r_j - R_l$

$$b_k(R_p + R_l) = e^{ik \cdot R_l} b_k(R_p) \quad (\text{A.6})$$

$$b_k(R_l) = e^{ik \cdot R_l} b_k(0) \quad (\text{A.7})$$

$$b_k(r_j) = e^{ik \cdot r_j} b_k(0) \quad (\text{A.8})$$

Normalisasi Fungsi Gelombang:

$$\int d^3r \psi_k^*(\mathbf{r}) \psi_k(\mathbf{r}) = 1 \quad (\text{A.9})$$

$$1 = \sum_{r_j} b_k^*(r_j) \sum_{R_l} b_k^*(R_l) \int d^3r \phi_k^*(r - r_j) \phi_k(r - R_l) \quad (\text{A.10})$$

$$1 = b_k^*(0) b_k(0) \sum_{r_j} e^{ik \cdot r_j} \sum_{R_l} e^{ik \cdot R_l} \int d^3r \phi_k^*(r - r_j) \phi_k(r - R_l) \quad (\text{A.11})$$

$$1 = N b_k^*(0) b_k(0) \sum_{R_p} e^{-ik \cdot R_p} \int d^3r \phi_k^*(r - R_p) \phi_k(r) \quad (\text{A.12})$$

$$\left[ 1 = N b_k^*(0) b_k(0) \sum_{R_p} e^{-ik \cdot R_p} \int d^3r \phi_k^*(r - R_p) \phi_k(r) \right]^* \quad (\text{A.13})$$

$$1 = N b_k^*(0) b_k(0) \sum_{R_p} e^{ik \cdot R_p} \int d^3r \phi_k^*(r) \phi_k(r - R_p) \quad (\text{A.14})$$

$$b_k^*(0) b_k(0) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{R_p} e^{ik \cdot R_p} \alpha_k(R_p)} \quad (\text{A.15})$$

$$b_k(0) \approx \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (\text{A.16})$$

$$\psi_k(r) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{ik \cdot r_j} \phi_k(r - r_j) \quad (\text{A.17})$$

Maka *first order correction* dari energi:

$$\psi_k^*(r) H \psi_k = \frac{1}{N} \sum_j \sum_m e^{ik \cdot (r_j - r_m)} \int \phi^*(r - r_m) H \phi(r - r_j) dr \quad (\text{A.18})$$

$$\psi_k^*(r) H \psi_k = \frac{1}{N} \sum_n e^{-ik \cdot \rho(n)} \int \phi^*(r - \rho_n) H \phi(r) dr \quad (\rho_n = r_m - r_j) \quad (\text{A.19})$$

## BAB B

### Lampiran Kode Program

#### B.1 Kode Utama Simulasi(Model Kane-Mele 3D)

Berikut adalah kode utama yang memodelkan sistem yang kita teliti dalam lingkungan PyhTB:

Listing B.1: Model Stacking Graphene

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from pyhtb import tb_model
4
5 # Konstanta dan parameter
6 delta = 0.7
7 t = -1.0
8 soc_list = np.array([-0.054, -0.24])
9 rashba = 0.05
10 width = 10
11 nkr = 101
12 W = 15*soc_list
13 n_avg = 10 # jumlah sample untuk averaging
14
15 sigma_z = np.array([0., 0., 0., 1.])
16 sigma_x = np.array([0., 1., 0., 0])
17 sigma_y = np.array([0., 0., 1., 0])
18 r3h = np.sqrt(3.0) / 2.0
19 sigma_a = 0.5 * sigma_x - r3h * sigma_y
20 sigma_b = 0.5 * sigma_x + r3h * sigma_y
21 sigma_c = -1.0 * sigma_x
22
23 def set_model(t, soc, rashba, delta, W):
24     lat = [[1, 0, 0], [0.5, np.sqrt(3.0)/2.0, 0.0], [0.0, 0.0,
25         1.0]]
26     orb = [[1./3., 1./3., 0.0], [2./3., 2./3., 0.0]]
27     model = tb_model(3, 3, lat, orb, nspin=2)
28
29     disorder_values = np.random.uniform(-W/2, W/2, size=len(orb))
30     onsite_energies = [delta + disorder_values[i] if i % 2 == 0
31         else -delta + disorder_values[i] for i in range(len(orb))]
32     model.set_onsite(onsite_energies)
```

```

31
32     for lvec in ([0, 0, 0], [-1, 0, 0], [0, -1, 0]):
33         model.set_hop(t, 0, 1, lvec)
34     for lvec in ([1, 0, 0], [-1, 1, 0], [0, -1, 0]):
35         model.set_hop(soc * 1.j * sigma_z, 0, 0, lvec)
36     for lvec in ([-1, 0, 0], [1, -1, 0], [0, 1, 0]):
37         model.set_hop(soc * 1.j * sigma_z, 1, 1, lvec)
38     model.set_hop(0.3 * soc * 1.j * sigma_z, 1, 1, [0, 0, 1])
39     model.set_hop(-0.3 * soc * 1.j * sigma_z, 0, 0, [0, 0, 1])
40     model.set_hop(1.j * rashba * sigma_a, 0, 1, [0, 0, 0], mode
41                  = "add")
42     model.set_hop(1.j * rashba * sigma_b, 0, 1, [-1, 0, 0],
43                  mode= "add")
44     model.set_hop(1.j * rashba * sigma_c, 0, 1, [0, -1, 0],
45                  mode= "add")
46
47     return model

```

## B.2 Kode Tambahan: Analisis Data

*Syntax* tambahan untuk menganalisis hasil simulasi:

Listing B.2: Kode Analisis DOS

```

1
2 dos_at_zero = []
3
4 for W in W_values:
5     all_eigenvalues = []
6     for _ in range(n_samples):
7         # Bangun model dengan disorder W
8         my_model = set_model(t, soc, rashba, delta, W)
9
10        # Potong model menjadi ribbon
11        ribbon_model = my_model.cut_piece(width, fin_dir=1,
12                                           glue_edgs=False)
13
14        # Hitung eigenenergi
15        (k_vec, k_dist, k_node) = ribbon_model.k_path(
16            [[0.,0.], [2./3.,1./3.], [.5,.5], [1./3.,2./3.],
17            [0.,0.]],
18            nkr, report=False)
19
20        rib_eval = ribbon_model.solve_all(k_vec)

```

```

19     all_eigenvalues.append(rib_eval.flatten())
20
21     # Gabungkan semua eigenenergi
22     combined_eval = np.concatenate(all_eigenvalues)
23
24     # Hitung histogram dan ekstrak DOS pada E=0
25     hist, bin_edges = np.histogram(combined_eval, bins=50,
26                                     range=(-4., 4.), density=True)
27     bin_centers = 0.5 * (bin_edges[1:] + bin_edges[:-1])
28     idx_zero = np.argmin(np.abs(bin_centers)) # Indeks bin
29     terdekak E=0
30     dos_at_zero.append(hist[idx_zero])
31
32 # Menyimpan data ke dalam file CSV
33 with open('dos_at_zero.csv', mode='w', newline='') as file:
34     writer = csv.writer(file)
35     writer.writerow(["W/soc", "DOS_at_E=0"]) # Menulis header
36     for W, dos in zip(W_values / soc, dos_at_zero):
37         writer.writerow([W, dos]) # Menulis setiap baris data
38
39 # Plot hasil
40 #z2 =ribbon_model.z2_invariant()
41 #print(f"Z2 invariant: {z2}")
42 plt.plot(W_values/soc, dos_at_zero, 'o-', label='Simulasi')
43 plt.axvline(x=2.5, c='r', ls='--', label='Prediksi  $\lambda_{S0}=2.5 \backslash$ 
44      $\lambda_{S0}$ ')
45 plt.xlabel("$W/\backslash \lambda_{S0}$")
46 plt.ylabel("DOS pada E=0")
47 plt.legend()
48 plt.show()

```

Listing B.3: Kode Analisis Pita Energi

```

1
2 fig, ax = plt.subplots(1, 2, figsize=(10, 4))
3
4 for je, soc_val in enumerate(soc_list):
5     eval_total = None
6     for _ in range(n_avg):
7         my_model = set_model(t, soc_val, rashba, delta, W)
8         ribbon_model = my_model.cut_piece(width, fin_dir=1,
9             glue_edgs=False)
10        path =
11            [[0., 0.], [2./3., 1./3.], [.5, .5], [1./3., 2./3.], [0., 0.]]

```

```

10     (k_vec, k_dist, k_node) = ribbon_model.k_path(path, nkr
11           , report=False)
12     rib_eval = ribbon_model.solve_all(k_vec, eig_vectors=
13           False)
14
15     if eval_total is None:
16         eval_total = np.array(rib_eval)
17     else:
18         eval_total += np.array(rib_eval)
19
20     rib_eval_avg = eval_total / n_avg
21     nbands = rib_eval_avg.shape[0]
22     ax1 = ax[je]
23     ax1.set_xlim([0, k_node[-1]])
24     ax1.set_xticks(k_node)
25     ax1.set_xticklabels([r'$\Gamma$', r'$K$', r'$M$', r'$K$',
26           r'$\Gamma$'])
27     ax1.set_ylim(-5, 5)
28     ax1.set_ylabel("Averaged Band Structure (010)")
29     ax1.set_title(f"SOC={soc_val:.3f}")
30
31     for i in range(len(k_vec)):
32         ax1.scatter([k_dist[i] * nbands, rib_eval_avg[:, i], s
33               =2, c='black', alpha=0.5)
34
35 plt.tight_layout()
36 plt.savefig("averaged_band_structure.pdf")
37 plt.show()

```

Listing B.4: Kode Diagram Fasa

```

1
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import numpy as np
4
5 # Define phase boundary values
6 Wc_onsite = 6.0 # threshold for onsite disorder
7 Wc_hopping = 5.0 # threshold for hopping disorder
8
9 # Create grid
10 x = np.linspace(1, 10, 100) # Onsite disorder
11 y = np.linspace(1, 10, 100) # Hopping disorder
12 X, Y = np.meshgrid(x, y)
13

```



```

14 # Define trivial phase condition: either x > Wc_onsite or y >
    Wc_hopping
15 Z = np.zeros_like(X)
16 Z[(X > Wc_onsite) | (Y > Wc_hopping)] = 1 # Anderson
    Insulators
17 Z[(X <= Wc_onsite) & (Y <= Wc_hopping)] = 0 # Topological
    phase
18
19 # Plot the phase diagram
20 fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 5))
21 c = ax.contourf(X, Y, Z, levels=[-0.1, 0.5, 1.1], colors=['red',
    , 'black'], alpha=0.8)
22 ax.contour(X, Y, Z, levels=[0.5], colors='k', linewidths=1)
23
24 # Annotations and labels
25 ax.set_xlabel("Onsite_Disorder_W(x)")
26 ax.set_ylabel("Hopping_Disorder_W(y)")
27 ax.set_title("Phase_Diagram:_Topological_vs_Anderson_Insulators
    ")
28
29 # Color legend
30 from matplotlib.patches import Patch
31 legend_elements = [Patch(facecolor='red', label='Topological_
    Phase'),
32                     Patch(facecolor='black', label='Anderson_
    Insulator_Phase')]
33 ax.legend(handles=legend_elements, loc='upper_left')
34
35 plt.tight_layout()
36 plt.show()

```

Listing B.5: Data DOS at  $E=0$  terhadap kekuatan disorder ( $W/\text{soc}$ )

```

1 W/soc,DOS at E=0
2 0.0,0.0
3 1.1111111111111112,0.0
4 2.2222222222222223,0.0
5 3.3333333333333335,0.0005538366336633659
6 4.4444444444444445,0.0019863861386138597
7 5.5555555555555555,0.00779702970297029
8 6.6666666666666667,0.017558787128712856
9 7.7777777777777779,0.023363242574257405
10 8.888888888888889,0.03208796943121178
11 10.0,0.03748905795087555

```