DEFINIÇÃO Expoentes racionais

Seja u um número real, variável ou expressão algébrica, e n um inteiro maior do que 1. Então:

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u}.$$

Se m é um inteiro positivo, m/n está na forma reduzida e todas as raízes são números reais. Assim

$$u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m \quad \text{e} \quad u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}.$$

O numerador de um expoente racional é a *potência* para a qual a base está elevada, e o denominador é o índice da *raiz*. A fração m/n precisa estar na forma reduzida, caso contrário, isso pode ocasionar algum problema de definição. Vejamos:

$$u^{2/3} = (\sqrt[3]{u})^2$$

essa expressão está definida para todo número u real, mas:

$$u^{4/6} = (\sqrt[6]{u})^4$$

está definida somente para $u \geq 0$.

EXEMPLO 4 Conversão de radicais para potências, e vice-versa

(a) $\sqrt{(x+y)^3} = (x+y)^{3/2}$

(b) $3x\sqrt[5]{x^2} = 3x \cdot x^{2/5} = 3x^{7/5}$

(c) $x^{2/3}y^{1/3} = (x^2y)^{1/3} = \sqrt[3]{x^2y}$

(d) $z^{-3/2} = \dfrac{1}{z^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{z^3}}$

Uma expressão envolvendo potências está *simplificada* se cada fator aparece somente uma vez e todos os expoentes são positivos.

EXEMPLO 5 Simplificação de expressões com potências

(a) $(x^2y^9)^{1/3}(xy^2) = (x^{2/3}y^3)(xy^2) = x^{5/3}y^5$

(b) $\left(\dfrac{3x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\dfrac{2x^{-1/2}}{y^{2/5}}\right) = \dfrac{6x^{1/6}}{y^{9/10}}$

O Exemplo 6 sugere uma forma de simplificar uma soma ou uma diferença de radicais.

EXEMPLO 6 Simplificação de expressões com radicais

(a) $2\sqrt{80} - \sqrt{125} = 2\sqrt{16 \cdot 5} - \sqrt{25 \cdot 5}$
$= 8\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$
$= 3\sqrt{5}$

(b) $\sqrt{4x^2y} - \sqrt{y^3} = \sqrt{(2x)^2y} - \sqrt{y^2y}$
$= 2|x|\sqrt{y} - |y|\sqrt{y}$
$= (2|x| - |y|)\sqrt{y}$

Segue um resumo dos procedimentos usados para *simplificar expressões* que envolvem radicais.

Simplificação de expressões com radicais

1. Remover os fatores dos radicais (Exemplo 2).
2. Eliminar os radicais dos denominadores, e os denominadores dos radicandos (Exemplo 3).
3. Combinar somas e diferenças dos radicais, se possível (Exemplo 6).

EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 6, encontre as raízes reais indicadas.

1. Raiz quadrada de 81.
2. Raiz quarta de 81.
3. Raiz cúbica de 64.
4. Raiz quinta de 243.
5. Raiz quadrada de $\dfrac{16}{9}$.
6. Raiz cúbica de $\dfrac{-27}{8}$.

Nos exercícios de 7 a 12, calcule a expressão sem usar a calculadora.

7. $\sqrt{144}$ 8. $\sqrt{-16}$
9. $\sqrt[3]{-216}$ 10. $\sqrt[3]{216}$
11. $\sqrt[3]{-\dfrac{64}{27}}$ 12. $\sqrt{\dfrac{64}{25}}$

Nos exercícios de 13 a 22, use uma calculadora para encontrar o valor da expressão.

13. $\sqrt[4]{256}$ 14. $\sqrt[5]{3125}$
15. $\sqrt[3]{15{,}625}$ 16. $\sqrt{12{,}25}$
17. $81^{3/2}$ 18. $16^{5/4}$
19. $32^{-2/5}$ 20. $27^{-4/3}$
21. $\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{-1/3}$ 22. $\left(-\dfrac{125}{64}\right)^{-1/3}$

Nos exercícios de 23 a 32, simplifique a expressão removendo fatores do radicando.

23. $\sqrt{288}$ 24. $\sqrt[3]{500}$
25. $\sqrt[3]{-250}$ 26. $\sqrt[4]{192}$
27. $\sqrt{2x^3y^4}$ 28. $\sqrt[3]{-27x^3y^6}$
29. $\sqrt[4]{3x^8y^6}$ 30. $\sqrt[3]{8x^6y^4}$
31. $\sqrt[5]{96x^{10}}$ 32. $\sqrt{108x^4y^9}$

Nos exercícios de 33 a 38, racionalize o denominador.

33. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}$ 34. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$
35. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ 36. $\dfrac{2}{\sqrt[4]{y}}$
37. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y}}$ 38. $\sqrt[5]{\dfrac{a^3}{b^2}}$

Nos exercícios de 39 a 42, converta para a forma exponencial (forma de potência).

39. $\sqrt[3]{(a+2b)^2}$ 40. $\sqrt[5]{x^2y^3}$
41. $2x\sqrt[3]{x^2y}$ 42. $xy\sqrt[4]{xy^3}$

Nos exercícios de 43 a 46, converta para a forma radical.

43. $a^{3/4}b^{1/4}$ 44. $x^{2/3}y^{1/3}$
45. $x^{-5/3}$ 46. $(xy)^{-3/4}$

Nos exercícios de 47 a 52, escreva usando um radical simples.

47. $\sqrt{\sqrt{2x}}$ **48.** $\sqrt{\sqrt[3]{3x^2}}$

49. $\sqrt[4]{\sqrt{xy}}$ **50.** $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}$

51. $\dfrac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[3]{a}}$ **52.** $\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}$

Nos exercícios de 53 a 60, simplifique as expressões exponenciais.

53. $\dfrac{a^{3/5}a^{1/3}}{a^{3/2}}$ **54.** $(x^2y^4)^{1/2}$

55. $(a^{5/3}b^{3/4})(3a^{1/3}b^{5/4})$ **56.** $\left(\dfrac{x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)^6$

57. $\left(\dfrac{-8x^6}{y^{-3}}\right)^{2/3}$ **58.** $\dfrac{(p^2q^4)^{1/2}}{(27q^3p^6)^{1/3}}$

59. $\dfrac{(x^9y^6)^{-1/3}}{(x^6y^2)^{-1/2}}$ **60.** $\left(\dfrac{2x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)\left(\dfrac{3x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right)$

Nos exercícios de 61 a 70, simplifique as expressões radicais.

61. $\sqrt{9x^{-6}y^4}$ **62.** $\sqrt{16y^8z^{-2}}$

63. $\sqrt[4]{\dfrac{3x^8y^2}{8x^2}}$ **64.** $\sqrt[5]{\dfrac{4x^6y}{9x^3}}$

65. $\sqrt[3]{\dfrac{4x^2}{y^2}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{y}}$ **66.** $\sqrt[5]{9ab^6} \cdot \sqrt[5]{27a^2b^{-1}}$

67. $3\sqrt{48} - 2\sqrt{108}$ **68.** $2\sqrt{175} - 4\sqrt{28}$

69. $\sqrt{x^3} - \sqrt{4xy^2}$ **70.** $\sqrt{18x^2y} + \sqrt{2y^3}$

Nos exercícios de 71 a 78, substitua ○ por <, = ou > para tornar a expressão verdadeira.

71. $\sqrt{2+6} \bigcirc \sqrt{2} + \sqrt{6}$

72. $\sqrt{4} + \sqrt{9} \bigcirc \sqrt{4+9}$

73. $(3^{-2})^{-1/2} \bigcirc 3$ **74.** $(2^{-3})^{1/3} \bigcirc 2$

75. $\sqrt[4]{(-2)^4} \bigcirc -2$ **76.** $\sqrt[3]{(-2)^3} \bigcirc -2$

77. $2^{2/3} \bigcirc 3^{3/4}$ **78.** $4^{-2/3} \bigcirc 3^{-3/4}$

79. O tempo t (em segundos) que uma pedra leva para cair de uma distância d (em metros) é aproximadamente $t = 0{,}45 \cdot \sqrt{d}$. Quanto tempo uma pedra leva para cair de uma distância de 200 metros?

Capítu

Polinômios e fatoração

Objetivos de aprendizagem

- Adição, subtração e multiplicação de polinômios.
- Produtos notáveis.
- Fatoração de polinômios usando produtos notáveis.
- Fatoração de trinômios.
- Fatoração por agrupamento.

Adição, subtração e multiplicação de polinôm

Um **polinômio em x** é qualquer expressão que pode ser escrita na forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

onde n é um inteiro não negativo e $a_n \neq 0$. Os números a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 são números re dos **coeficientes**, e a_nx^n, $a_{n-1}x^{n-1}$, ..., a_1x, a_0 são os números chamados **termos**.

O **grau do polinômio** é n, e o **coeficiente principal** é o número real a_n. Polinômi dois e três termos são chamados **monômios**, **binômios** e **trinômios**, respectivamente.

Um polinômio escrito com as potências de x na *ordem decrescente* está na **forma p**

Para adicionar ou subtrair polinômios, nós adicionamos ou subtraímos os termos co expoente na variável, chamados *termos semelhantes*. Caso haja termos que não sejam se basta adicioná-los ou subtraí-los de 0 (zero).

EXEMPLO 1 Adição e subtração de polinômios

(a) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 1) + (x^3 + 2x^2 - 5x + 3)$

(b) $(4x^2 + 3x - 4) - (2x^3 + x^2 - x + 2)$

SOLUÇÃO

(a) Agrupamos os termos semelhantes e então os combinamos, como segue:

$$\begin{aligned}&(2x^3 + x^3) + (-3x^2 + 2x^2) + (4x + (-5x)) + (-1 + 3)\\&= 3x^3 - x^2 - x + 2\end{aligned}$$

(b) Agrupamos os termos semelhantes e então os combinamos, como segue:

$$\begin{aligned}&(0 - 2x^3) + (4x^2 - x^2) + (3x - (-x)) + (-4 - 2)\\&= -2x^3 + 3x^2 + 4x - 6\end{aligned}$$