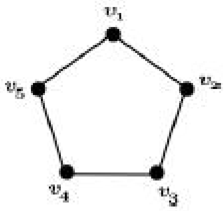
Universidade Federal de Rondônia
Departamento de Ciência da Computação
Estrutura de Dados II – Lista 1 – Grafos

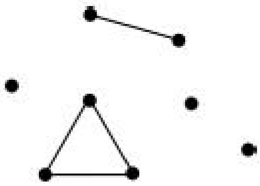
1. Desenhe as versões não orientadas e orientadas do grafo *G= (V,E)*, onde *V*={1,2,3,4,5,6} e *E*={(2,5),(6,1),(5,3),(2,3)} .

2. Desenhe os grafos não orientados completos com 4 vértices (K_4), 5 vértices (K) e 6 vértices (K_6).

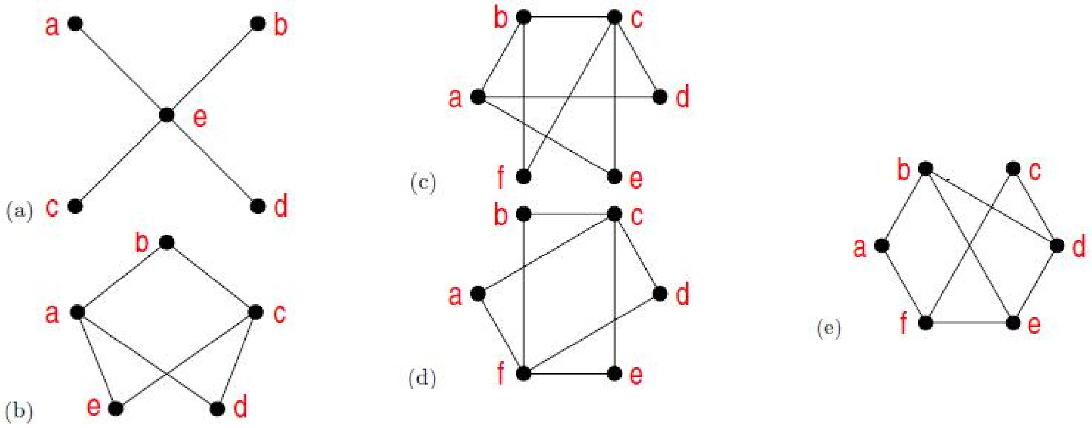
3. Sabendo que cada vértice tem pelo menos grau 3, qual o maior número possível de vértices em um grafo com 35 arestas? Lembre-se que a soma dos graus dos vértices é igual a duas vezes o número de arestas. Se cada aresta liga dois vértices teríamos 70 vértices de grau 1. Se cada vértice tem pelo menos grau 3, então...
4. Quantas arestas possui um grafo completo com *n* vértices? E um grafo orientado completo com *n* vértices?
5. Encontre o complemento do seguinte grafo.



6. Quantas componentes conexas tem o seguinte grafo?



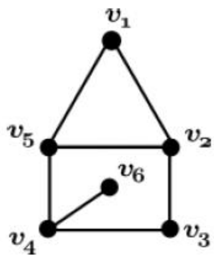
7. Determine se cada um dos grafos abaixo é bipartido. Justifique.



8. Quantas arestas tem um grafo com vértices de graus 5; 2; 2; 2; 2; 1? Desenhe um possível grafo.
9. Existe um grafo simples com cinco vértices dos seguintes graus? Se existir, desenhe um possível grafo.

a) 3,3,3,3,2.
b) 1,2,3,4,5.

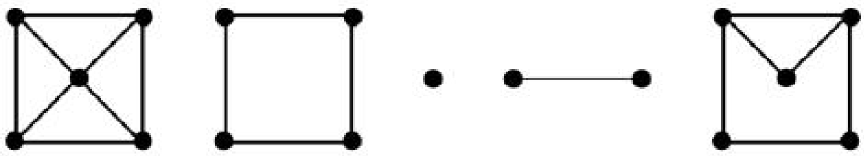
10. Represente o grafo abaixo usando matriz de adjacências e lista de adjacências.



11. Desenhe um grafo de 8 vértices,
(a) que contém um circuito euleriano, mas não contém nenhum ciclo hamiltoniano.
(b) que contém um caminho hamiltoniano, mas não contém nenhum caminho euleriano.
(c) que contém um caminho hamiltoniano e um caminho euleriano.
(d) que não contém um caminho hamiltoniano nem um caminho euleriano.

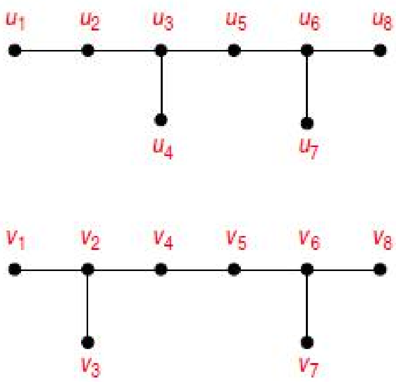
12. Considere um jogo de dominós que contém 10 peças com as seguintes configurações: (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (2,3); (2,4); (2,5); (3,4); (3,5); (4,5). É possível colocar as peças de maneira que o número de uma peça é igual ao número da peça adjacente? (Dica: represente o problema com um grafo e veja se ele é Euleriano).

13. Dados os seguintes grafos, indique todos os pares e tais que:
(a) G_x é subgrafo de G_y;
(b) G_x é subgrafo gerador de G_y;
(c) G_x é subgrafo induzido de G_y;
(d) G_x não é subgrafo de G_y.

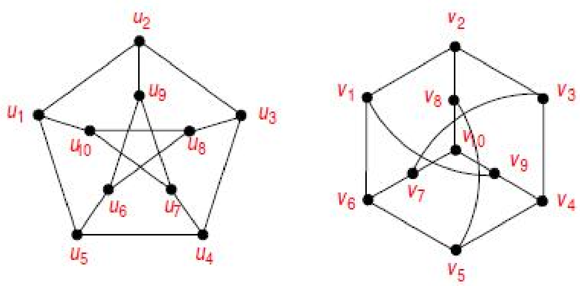


G_1 G_2 G_3 G_4 G_5

14. Diga se os pares de grafos abaixo são isomorfos e porquê.

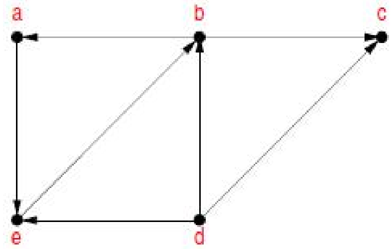


(a)

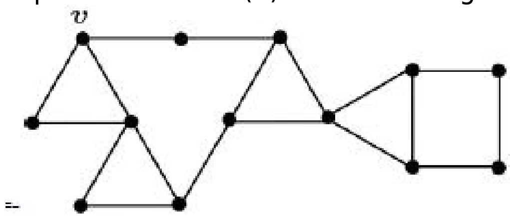


(b)

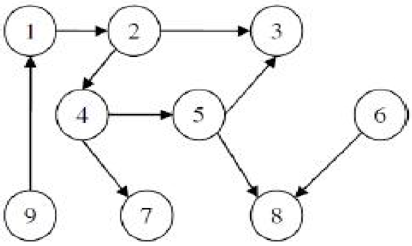
15. Qual é a quantidade mínima de arestas para um grafo ser conexo?
16. Determine os componentes fortemente conexos do grafo abaixo.



17. Mostre para o grafo abaixo a ordem em que os vértices são numerados por uma (a) busca em profundidade e (b) busca em largura a partir de *v*.



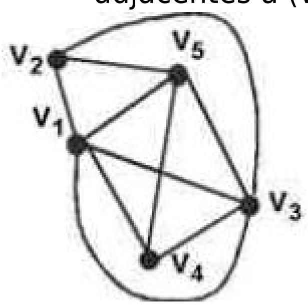
18. Defina o que é Ordenação Topológica e mostre uma ordem dos vértices produzida pela ordenação topológica do seguinte grafo:

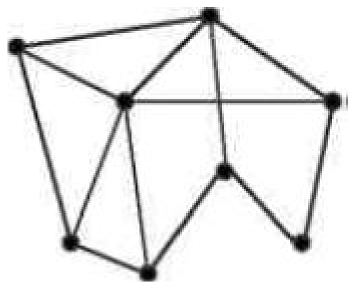


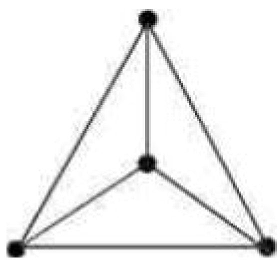
19. Explique o que é a SPT (*shortest path tree* - Árvore do caminho mais curto) e como funciona o algoritmo de Dijkstra utilizado para gerá-la. Utilize desenhos para ilustrar o processo.
20. Explique o algoritmo de Prim e Kruskal para criar uma árvore geradora mínima.
21. Discuta sobre a ordem de complexidade dos algoritmos de grafos quando consideramos as representações de lista de adjacências e de matriz de adjacências.
22. Pode haver um grafo simples com 15 vértices, cada um com grau 5?
23. Determine se cada um dos grafos abaixo é bipartido.
24. Existe um grafo simples com cinco vértices dos seguintes graus? Se existir, desenhe um possível grafo.

(a) 3; 3; 3; 3; 2 (b) 1; 2; 3; 4; 5 (c) 1; 2; 3; 4; 4 (d) 3; 4; 3; 4; 3
(e) 0; 1; 2; 2; 3 (f) 1; 1; 1; 1; 1

25. Qual a ordem e o número de arestas de cada grafo?
26. a)Quais dos grafos abaixo são completos?
    b)Quais dos grafos abaixo são simples?
    c) No grafo (a), quais vértices são adjacentes a v3? E quais arestas são adjacentes a (v3,v5)?

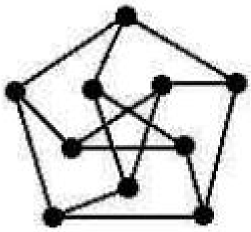


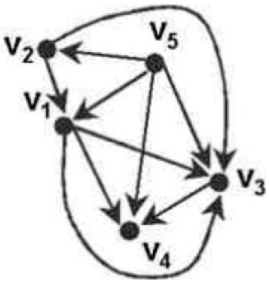




A B C

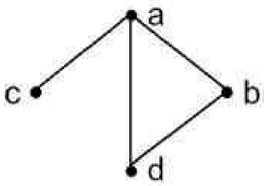
27. O grafo (a) é regular? Por quê? Existe alguma fonte ou sumidouro no grafo (b)?

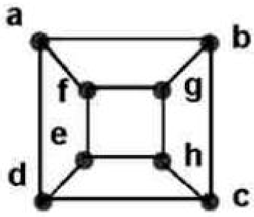


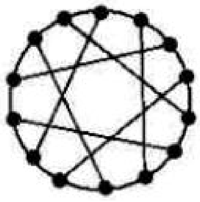


(a) (b)

28. Defina caminho Euleriano e caminho Hamiltoniano.
29. Qual dos grafos acima são cíclicos? Indique os grafos que são conexos. Qual(is) dos grafos abaixo são Eulerianos? Quais são Hamiltonianos?

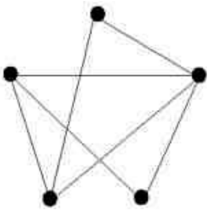


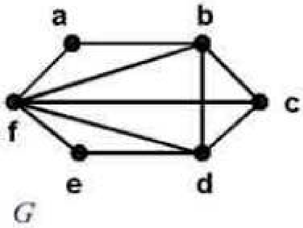


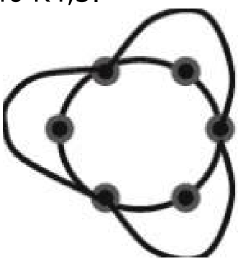


(a) (b) (c)

30. Quais os complementos dos grafos (a) e (c)? Os grafos (b) e (c) são isomorfos? Represente graficamente um grafo K4,3.





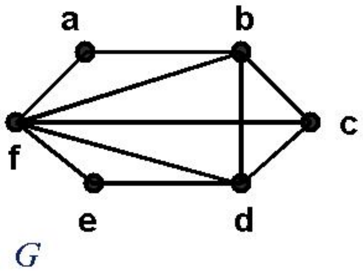


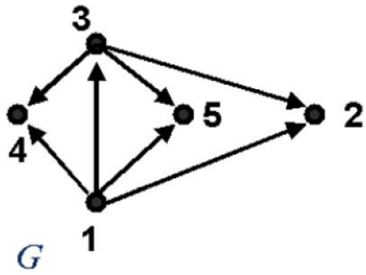
(a) (b) (c)

31. Preencha a tabela de comparação entre matriz de adjacências e listas de adjacências, assim como suas respectivas ordens de complexidade.

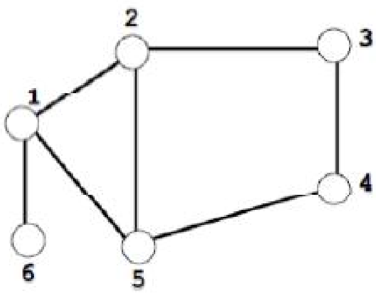
Comparação	"Vencedor"
Rapidez para saber se (x,y) está no grafo	
Rapidez para determinar o grau de um vértice	
Menor memória em grafos pequenos	Listas: Matriz:
Menor memória em grafos grandes	
Inserção/remoção de arestas	Matriz: Listas:
Melhor na maioria dos problemas	
Rapidez para percorrer o grafo	Listas: Matriz:

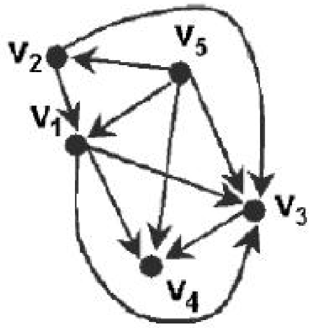
32. Represente os grafos abaixo utilizando matrizes de adjacências e listas de adjacências.





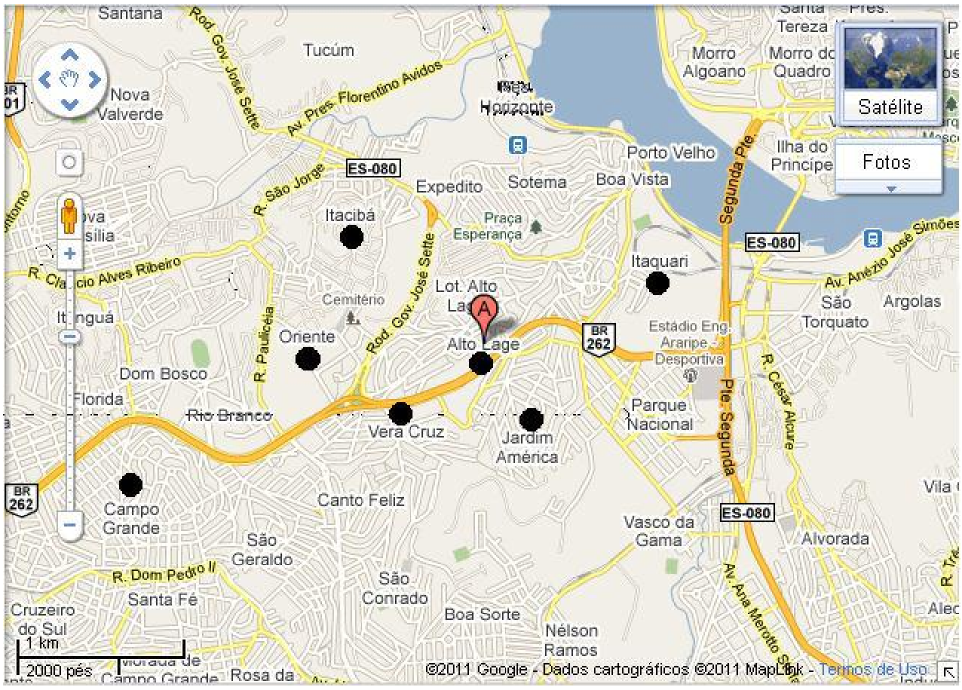
33. Realize a busca em largura e em profundidade nos grafos abaixo.

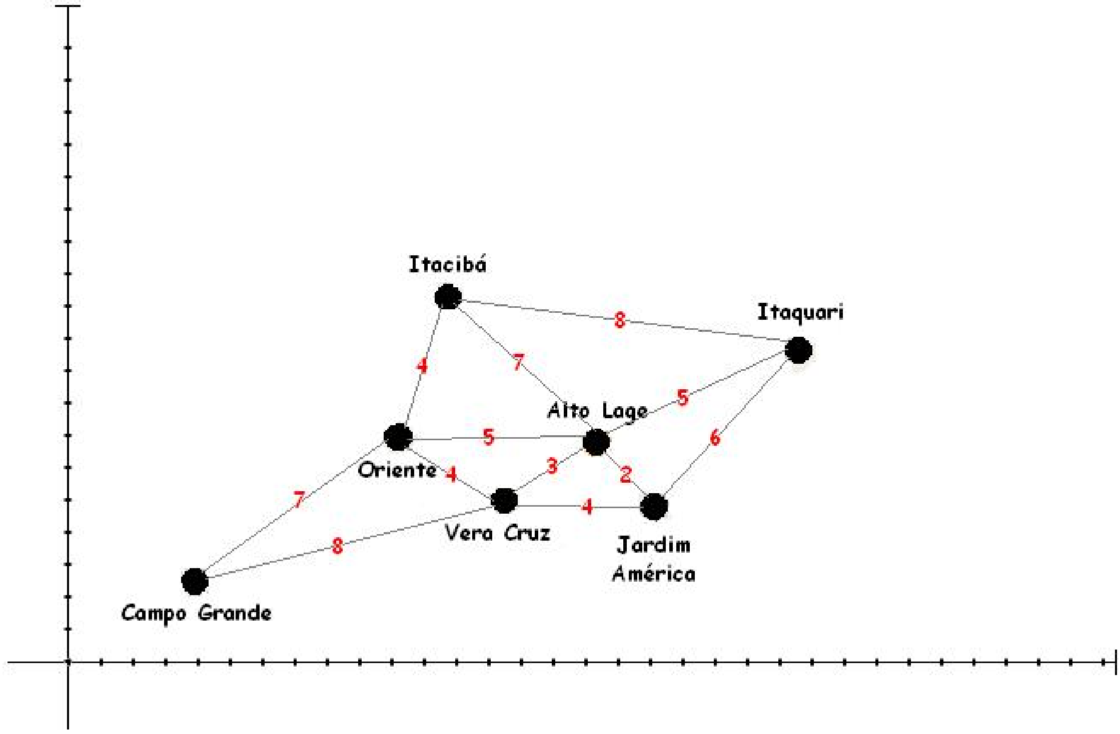




34. Qual é a complexidade da Busca em Largura (BFS - *Breadth-First Search*)? E da Busca em Profundidade (DFS - *Depth-First Search*)?
35. Qual é o número cromático do grafo K3,2?

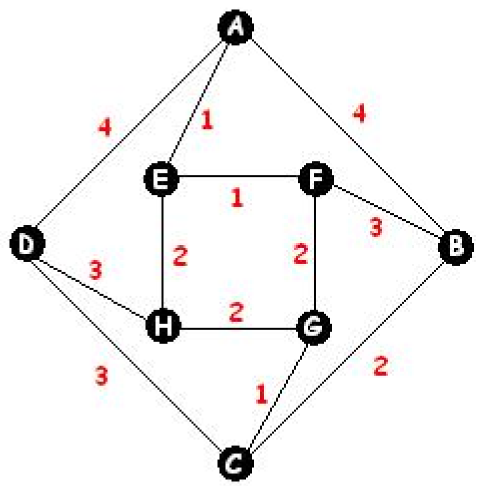
36. Suponhamos que uma empresa que faça instalação de fibra ótica necessite interligar os bairros abaixo representados:





A partir de um estudo meticuloso, os dados relevantes à instalação da fibra ótica, podem ser resumidos ao Grafo mostrado acima. Gere a Árvore Geradora Mínima para este caso, usando a ideia do Algoritmo de Kruskal e de Prim.

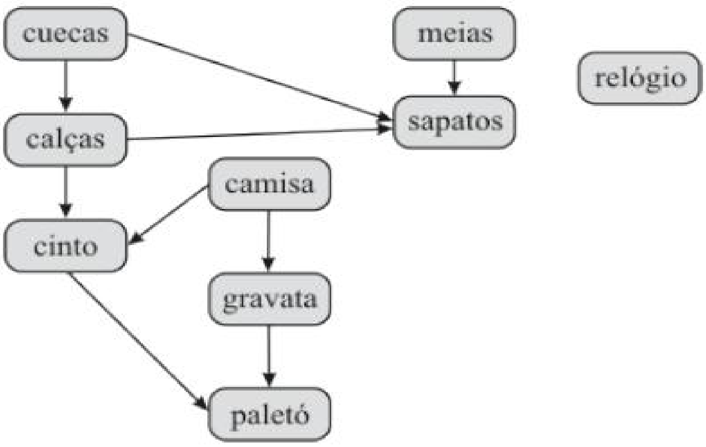
37. (Adaptado de Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação Ex. 19, p. 361) Use o Algoritmo de Prim para resolver a Árvore Geradora Mínima para o Grafo indicado. Use também o Algoritmo de Kruskal e compare os resultados.



38. Dada a seguinte matriz de adjacência, gere a árvore geradora mínima usando Prim ou Kruskal.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	6	14	6	2	5	7
B	6	0	10	7	0	10	0
C	14	10	0	7	0	0	0
D	6	7	7	0	5	0	0
E	2	0	0	5	0	6	3
F	5	10	0	0	6	0	4
G	7	0	0	0	3	4	0

39. Dê quatro ordenações topológicas diferentes do digrafo cujos arcos são a-c a-d b-c b-d c-e d-e.
40. Obtenha as ordenações topológicas para o grafo abaixo.



Observação: Abaixo estão alguns teoremas interessantes que podem auxiliar.

Teorema: Todo grafo euleriano é conexo e todos os seus vértices possuem grau par.

Teorema (do aperto de mãos ou handshaking): Seja G um grafo. A soma dos graus de todos os vértices do G é duas vezes o número de arestas de G. Especificamente, se os vértices de G são V1, v2, ..., vn, onde n é um inteiro positivo, então

Grau de G = grau(v1) + grau(v2) + ... + grau(vn)
= 2 * número de arestas de G.

Corolário: O grau total de um grafo é par.

Teorema: Em qualquer grafo G, existe um número par de vértices de grau ímpar.

Teorema: Se um grafo possui um circuito Euleriano, então cada vértice do grafo tem grau par.

Teorema: Se algum vértice de um grafo tem grau ímpar, então o grafo não tem um circuito Euleriano.

Teorema: Se cada vértice de um grafo não vazio tem grau par e o grafo é conexo, então o grafo tem um circuito Euleriano.
Corolário: Um grafo conexo tem um caminho euleriano se tiver no máximo 2 vértices de grau ímpar.

Definição: O número cromático de um grafo representa o menor número de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo sem que vértices adjacentes tenham a mesma cor.