Calculo I

FUNÇÕES E MODELOS

Prof. Pablo Vargas

Tópicos Abordados

- Introdução
- Noções sobre conjuntos
- Intervalos
- Função
- Representando uma função
- Modelos matemáticos
- Tipos de Funções
- Combinando Funções
- Funções Compostas
- Propriedades das Funções

Introdução

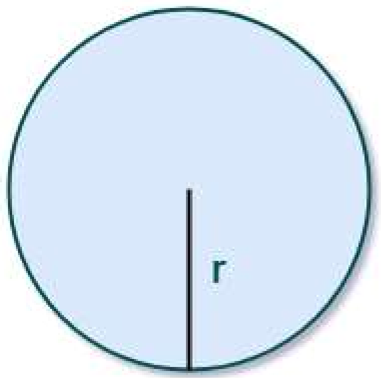
- **Função** é quando um valor depende de outro valor.
- **Função** possuem um **Domínio**, **Imagem**, **Variável dependente** e **Variável independente.**

Introdução

$$A = \pi . r^2$$

Variável dependente

Variável independente



Introdução

Exemplo: Um avião que viaja a 300 km/h percorre uma distância s (espaço) em t horas.

Ou seja,

$$s = 300t$$

Se o avião partindo de PVH para BSB demora cerca de 3 horas para chegar em seu destino, qual a distancia percorrida?

Introdução

Exemplo: A equação $y = \sqrt{30 - x}$ define y como função de x.

O valor da raiz quadrada não pode ser menor que zero. Portanto,

$$30 - x \geq 0$$

$$30 \geq x$$

$$x \leq 30$$

y=raiz30-x.ggb

Noções sobre conjuntos

Conjunto: é estabelecido quando agrupamos elementos com as mesmas características.

- ❖Existem diversas formas de representar um conjunto. Exemplos:
  - ❖Os elementos do conjunto A são os números naturais pares menores que 10.
  - ❖A = {0, 2, 4, 6, 8}
  - ❖A = $\{x \in N \mid x$ é par menor que 10}
  - ❖x tal que x é par menor que 10
  - ❖A=$\{x \in N : x \text{ é } par\ e\ x < 10\}$

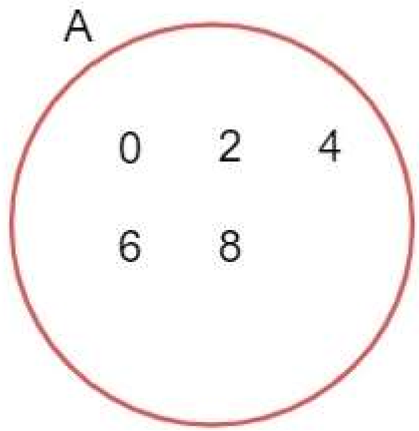


Diagrama de Venn-Euler

Noções sobre conjuntos

Relação de pertinência: mostra se um elemento está dentro ou não de um conjunto, ou seja, se ele pertence ou não pertence a um conjunto.

$\in \quad \rightarrow$ *Pertence*

$\notin \quad \rightarrow$ *Não Pertence*

Noções sobre conjuntos

Exemplo: Considere o conjunto B = {-5,-3,-1,1, 3, 5}.

❖ Note que o valor de 5 pertence ao conjunto B, ou seja,

$$5 \in B$$

❖ Note que o valor 0 não pertence ao conjunto B, ou seja,

$$0 \notin B$$

Noções sobre conjuntos

Relação de inclusão: mostra-nos se um conjunto está contido ou não dentro de outro.

$$C \rightarrow \text{Contido}$$

$$\not\subset \rightarrow Não\ Contido$$

Noções sobre conjuntos

Exemplo: Considere os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {2, 3} e C = {5, 6, 7}

- Conjunto B está por completo dentro do conjunto A, portanto, o conjunto B está contido no conjunto A.

$$B \subset A$$

  - Obs: podemos dizer que B é um subconjunto de A.

Noções sobre conjuntos

Exemplo: Considere os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {2, 3} e C = {5, 6, 7}

❖ Entretanto, o conjunto C não está por completo no conjunto A, logo, o conjunto C não está contido no conjunto A.

$$C \not\subset A$$

Noções sobre conjuntos

Conjunto unitário: quando possui um único elemento.

Exemplo: A = {5}

Conjunto vazio: quando não possui nenhum elemento.

Exemplo: A= { } ou A={Ø}

Noções sobre conjuntos

Conjunto universo: é o que contém todos os outros conjuntos.

Exemplo: considere os conjuntos A = {– 1, – 2, 1, 2}, B ={0, 1, 2, 3} e C = {1, –1, 2, –2}, veja que todos eles são compostos por números inteiros, ou seja:

$$A \subset \mathbb{Z}$$

$$B \subset \mathbb{Z}$$

$$C \subset \mathbb{Z}$$

Noções sobre conjuntos

Conjunto complementar: é formado pela diferença B – A, ou seja, tomamos os elementos de B e retiramos os elementos de A contidos em B.

Obs: É um conceito que diz respeito apenas a uma relação de conjunto e subconjunto!

Exemplo: considere os conjuntos A = {1, 2} e B ={0, 1, 2, 3}, calcule C=B-A.

C={0,3}

Noções sobre conjuntos

Conjuntos das partes: conjunto das partes de A é formado por todos os possíveis subconjuntos dos elementos do conjunto A.

Exemplo: determine o conjunto das partes do conjunto A = {1, 2, 3}.

P (A) = {{1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}, {}}

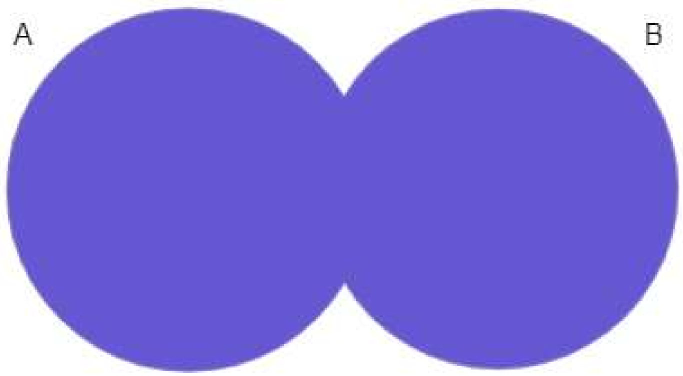
Obs: número de elementos do conjunto das partes de A é equivalente a 2^n.

Noções sobre conjuntos

Operações com conjuntos: podem ser dos tipos união ou intersecção ou diferença de conjuntos.

União: será um novo conjunto constituído por elementos que pertencem a, pelo menos, um dos conjuntos em questão.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



Noções sobre conjuntos

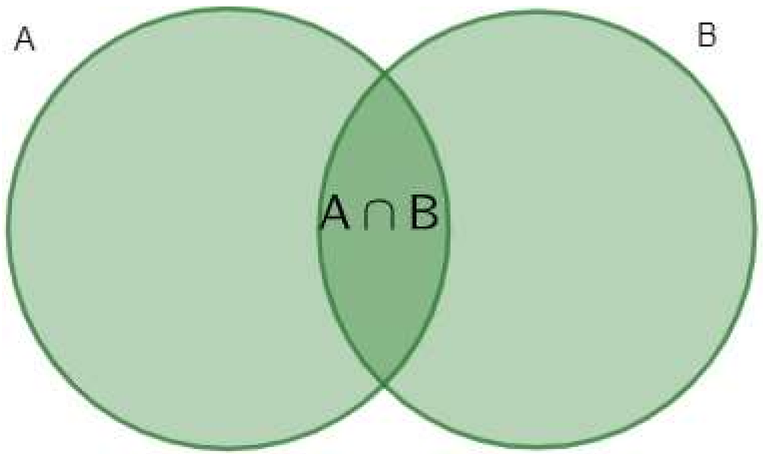
Exemplo (União de conjuntos): Considere os conjuntos A = {0, 2, 4, 6, 8, 10} e B = {1, 3, 5, 7, 9, 11}:

A U B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}

Noções sobre conjuntos

Intersecção de conjuntos: será um novo conjunto formado por elementos que pertencem, ao mesmo tempo, a todos os conjuntos envolvidos.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



Noções sobre conjuntos

Exemplo (Intersecção de conjuntos): Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $C = \{0, -1, -2, -3\}$

$$A \cap B = \{2, 4, 6\}$$

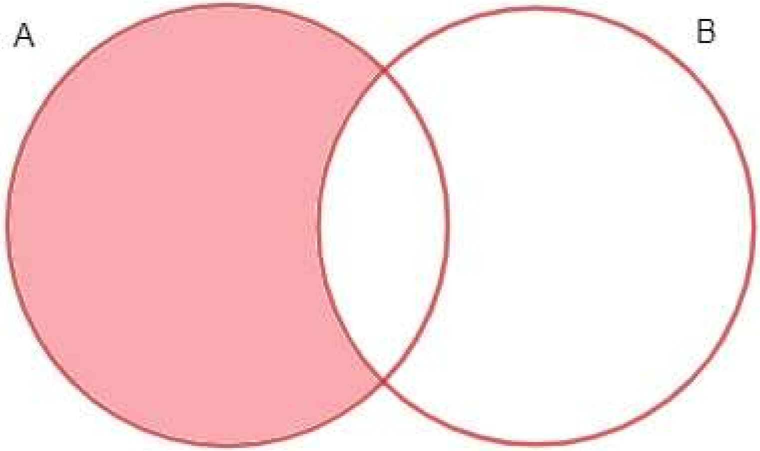
$$A \cap C = \{\ \} \text{ ou } \emptyset$$

$$B \cap C = \{0\}$$

Noções sobre conjuntos

Diferença de conjuntos: a diferença entre dois conjuntos, A e B, é dada pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



Noções sobre conjuntos

Exemplo (Diferença de conjuntos): Considere os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ e $C = \{\ \}$.

$$A - B = \{5\}$$

$$A - C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$C - A = \{\ \}$$

Intervalos

...significa que o conjunto possui cada número real entre dois extremos indicados, seja numericamente ou geometricamente.

Exemplos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\} =]1, 2[$$

Intervalos

Notações: uma forma de representar os intervalos.

I. **Intervalo aberto:** quando seus extremos não estão incluídos.

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

Intervalos

Notações: uma forma de representar os intervalos.

I. **Intervalo fechado:** quando seus extremos estão incluídos.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Intervalos

Notações: uma forma de representar os intervalos.

I. **Intervalo semiaberto/semifechado:** quando um dos seus extremos são incluídos.

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

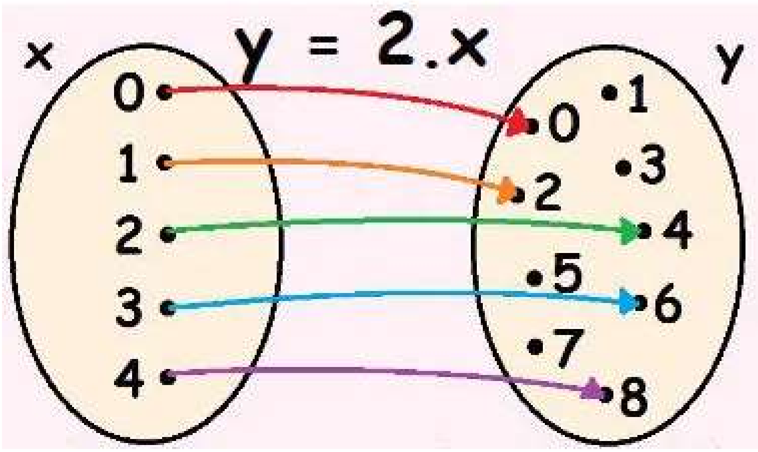
Função

"Chama-se função a toda correspondência f que atribui a cada valor de uma variável x em seu domínio um e um só valor de uma variável y num certo conjunto Y" (AVILA, 2014)

$x = 1$

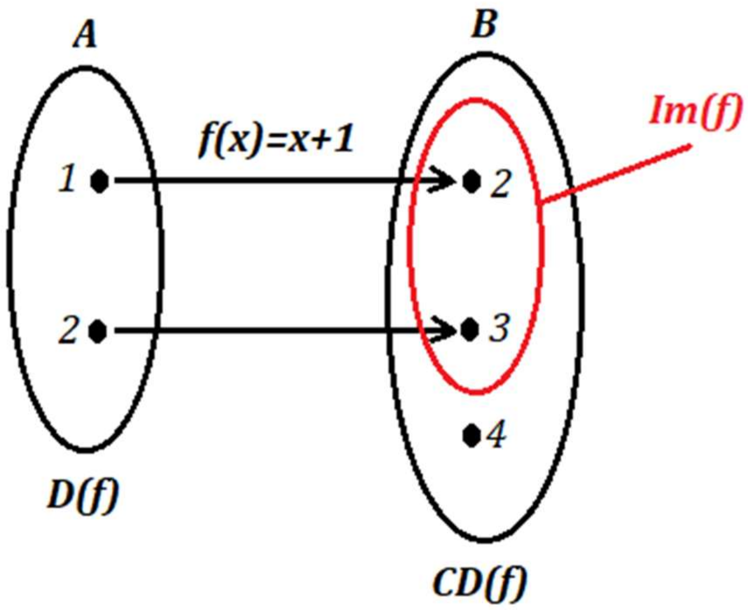
Função

Exemplo: Vamos representar uma função de números naturais de forma que, para cada número natural escolhido, obtenha-se o seu dobro. Ou seja, se escolhermos o **1**, teremos o número **2. Portanto..**



Domínio, imagem e contradomínio

“...são conjuntos importantes para definirmos o que é função e compreendermos melhor o seu comportamento.”



Domínio, imagem e contradomínio

Domínio: é formado pelos valores que o x pode assumir.

Normalmente, o domínio e o contradomínio é conjunto dos números reais, entretanto, pode ser que haja algumas restrições para o domínio.

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$$

A: é o domínio.

B: é o contradomínio.

Domínio, imagem e contradomínio

Exemplo 1(Domínio): ***f(x) = 2x*** **e f: A → B, A = {1, 2, 3, 4, 5} e B ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10}.**

$\boldsymbol{f: A \rightarrow B}$

D(f): {1, 2, 3, 4, 5}

Domínio, imagem e contradomínio

Exemplo 2(Domínio): determine o domínio da função $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$

Note que o x **não** pode ser igual a 0, já que isso causaria uma indeterminação. Nesse caso o domínio da minha função não pode ser 0, então:

D(f) = R*

D(f)=$\{x \in R \colon x \neq 0\}$

D(f)=$]-\infty, 0[U]0, +\infty[$

Domínio, imagem e contradomínio

Exemplo 3(Domínio): determine o domínio da função $\boldsymbol{y = \sqrt{x - 5}}$

Note que os valores que estão dentro da raiz não podem ser negativos, já que isso acarretaria em números complexos. Nesse caso o domínio da minha função não pode ser menor 0, ou seja:

$$x - 5 \geq 0$$

$$x \geq 5$$

D(f) = $\{x \in R \,:\, x \geq 5\}$

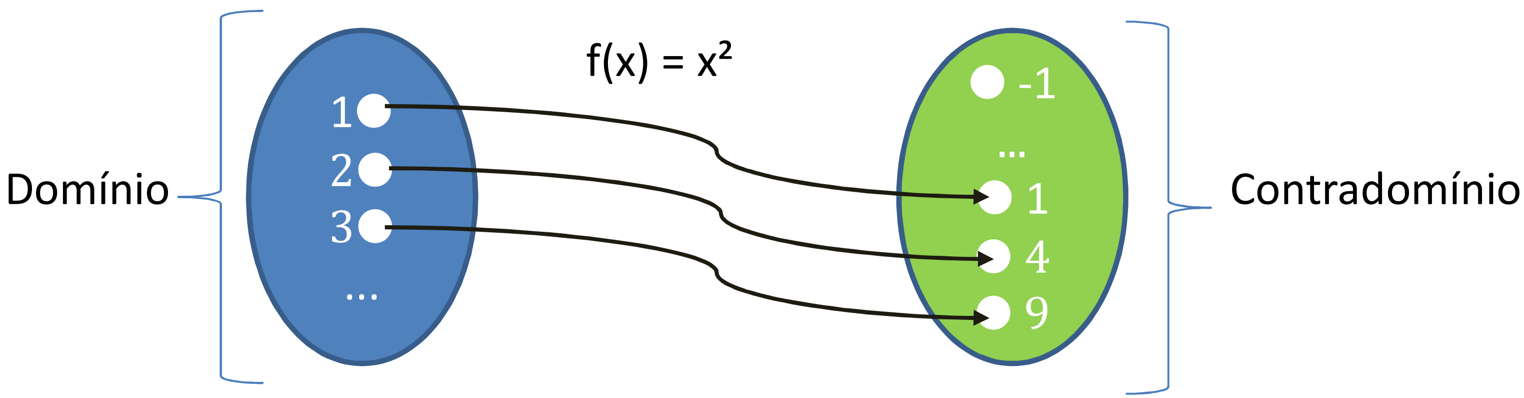
$$D(f) = [5,\infty[$$

Domínio, imagem e contradomínio

Contradomínio: o contradomínio de uma função $f: A \to B$ é o conjunto B.

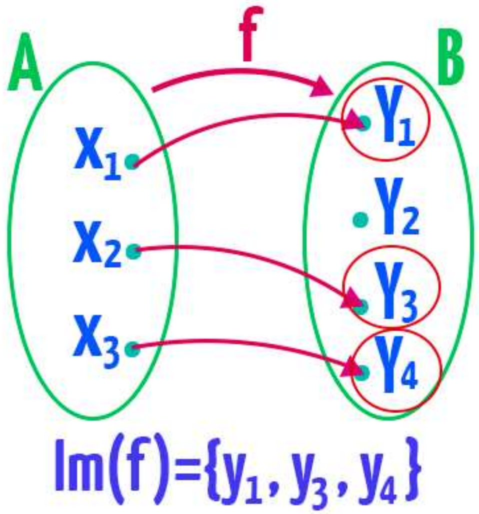
Exemplo: $f(x) = x^2$ com $f: R \to R$

Note que por mais que nessa função a imagem nunca seja negativa, ainda sim o contradomínio pode ser os números reais.



Domínio, imagem e contradomínio

Imagem: é um subconjunto do contradomínio formado por todos os elementos correspondentes de algum elemento do domínio.



Domínio, imagem e contradomínio

Exemplo 1 (Imagem): Encontre a imagem da função $f(x) = x^2$ $f: R \rightarrow R$

$f(1) = 1^2 = 1$, a imagem da função quando x é igual a 1 é 1.

$f(2) = 2^2 = 4$, a imagem da função quando x é igual a 2 é 4.

Analisando a função de forma geral, para encontrarmos o conjunto imagem, sabemos que x^2 com x pertencente ao real sempre será um número positivo, logo, o conjunto imagem será:

$Im(f) = R^+$ (conjunto dos números reais positivos).

Domínio, imagem e contradomínio

Exemplo 2 (Imagem): Seja f = 2x – 1 f: A → B em que A = {0, 1, 2, 3} e B = {-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, qual será o conjunto imagem?

R=O conjunto imagem será formado pelos valores de cada um dos elementos do conjunto substituídos em f .

f(0) = 2 · 0 – 1 = 0 – 1 = **-1**

f(1) = 2 · 1 – 1 = 2 – 1 = **1**

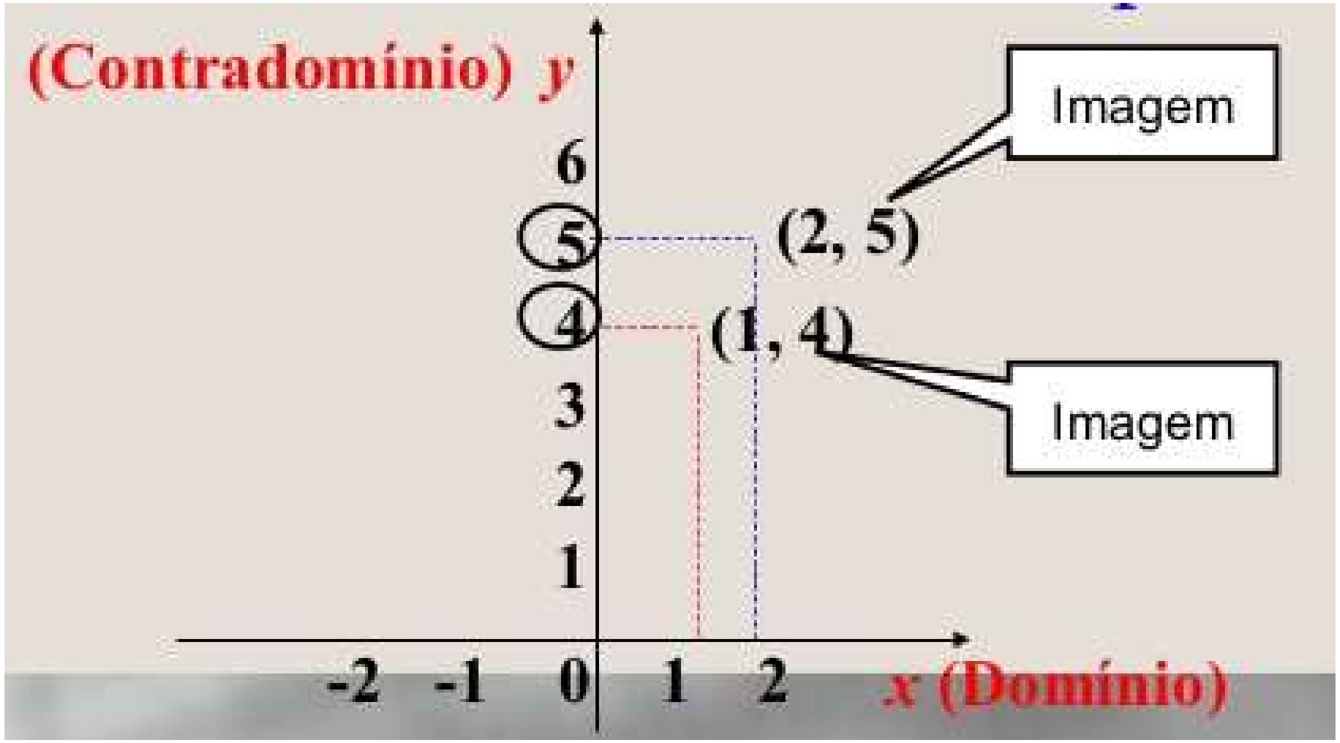
f(2) = 2 · 2 – 1 = 4 – 1 = **3**

f(3) = 2 · 3 – 1 = 6 – 1 = **5**

Im(f) = {-1, 1, 3,5}

Domínio, imagem e contradomínio

Graficamente:



Exercícios

Qual o **domínio** de cada função?

a) $f(x)=2x - 1$

b) $f(x)=x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{x-7}$

d) $g(x) = \frac{3}{\sqrt{3-x}}$

Exercícios

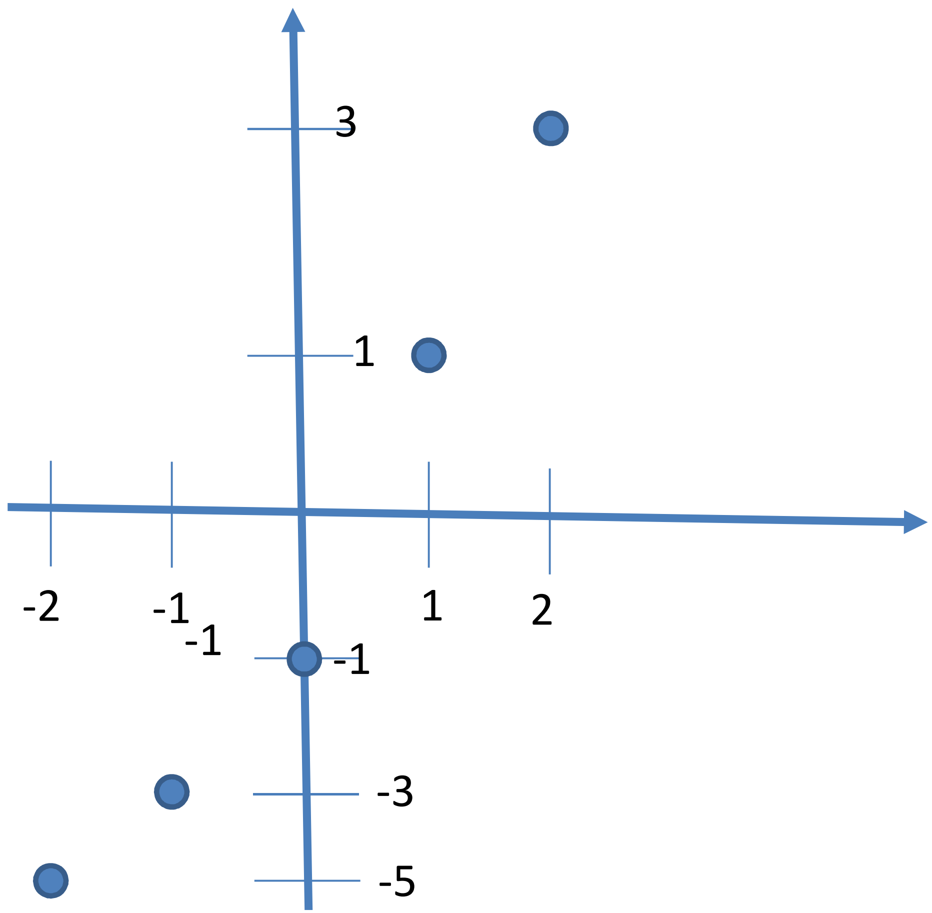
Qual o **domínio** de cada função?

a) $f(x)=2x-1$

$D=\{x \in \mathbb{R}\}$

$D=(-\infty, \infty)=]-\infty, \infty[$

x	f(x)
-2	$f(-2) = 2.(-2)$ −1=-5
-1	$f(-1) = 2.(-1) - 1 = -3$
0	$f(0) = 2.0 - 1 = -1$
1	$f(1) = 2.1 - 1 = 1$
2	$f(2) = 2.2 - 1 = 3$

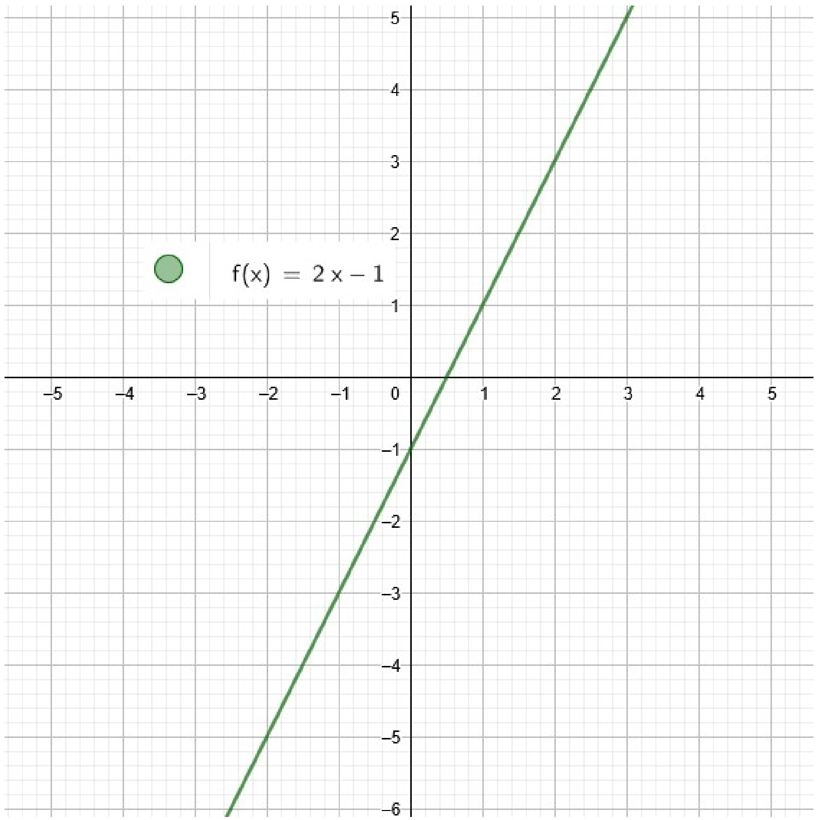


Exercícios

Qual o **domínio** de cada função?

a) $f(x)=2x-1$

$D=\{x \in R\}$



Exercícios

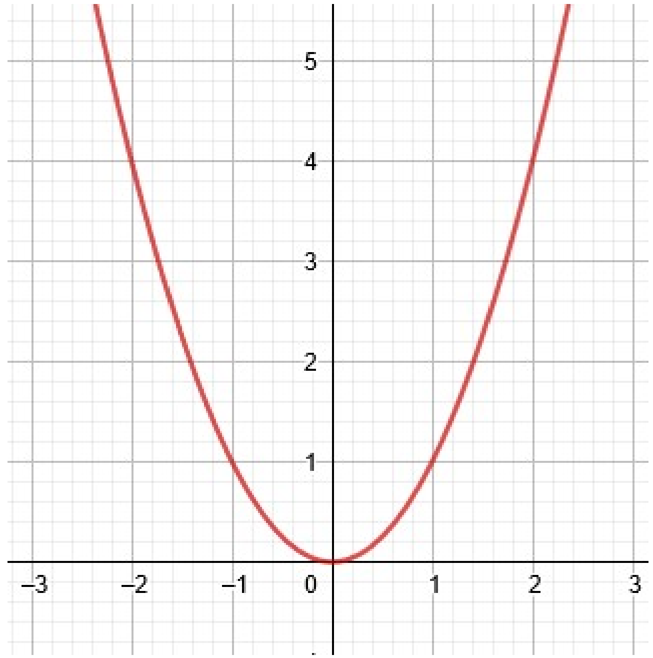
Qual o **domínio** de cada função?

b) $f(x)=x^2$

D=(-∞,∞)

$$f(0) = 0^2 = 0$$
$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$
$$f(-3) = (-3)^2 = 9$$

I=[0,∞)



Exercícios

Qual o **domínio** de cada função?

$c)\ f(x) = \frac{1}{x-7}$

$$x - 7 \neq 0$$

$$x \neq 7$$

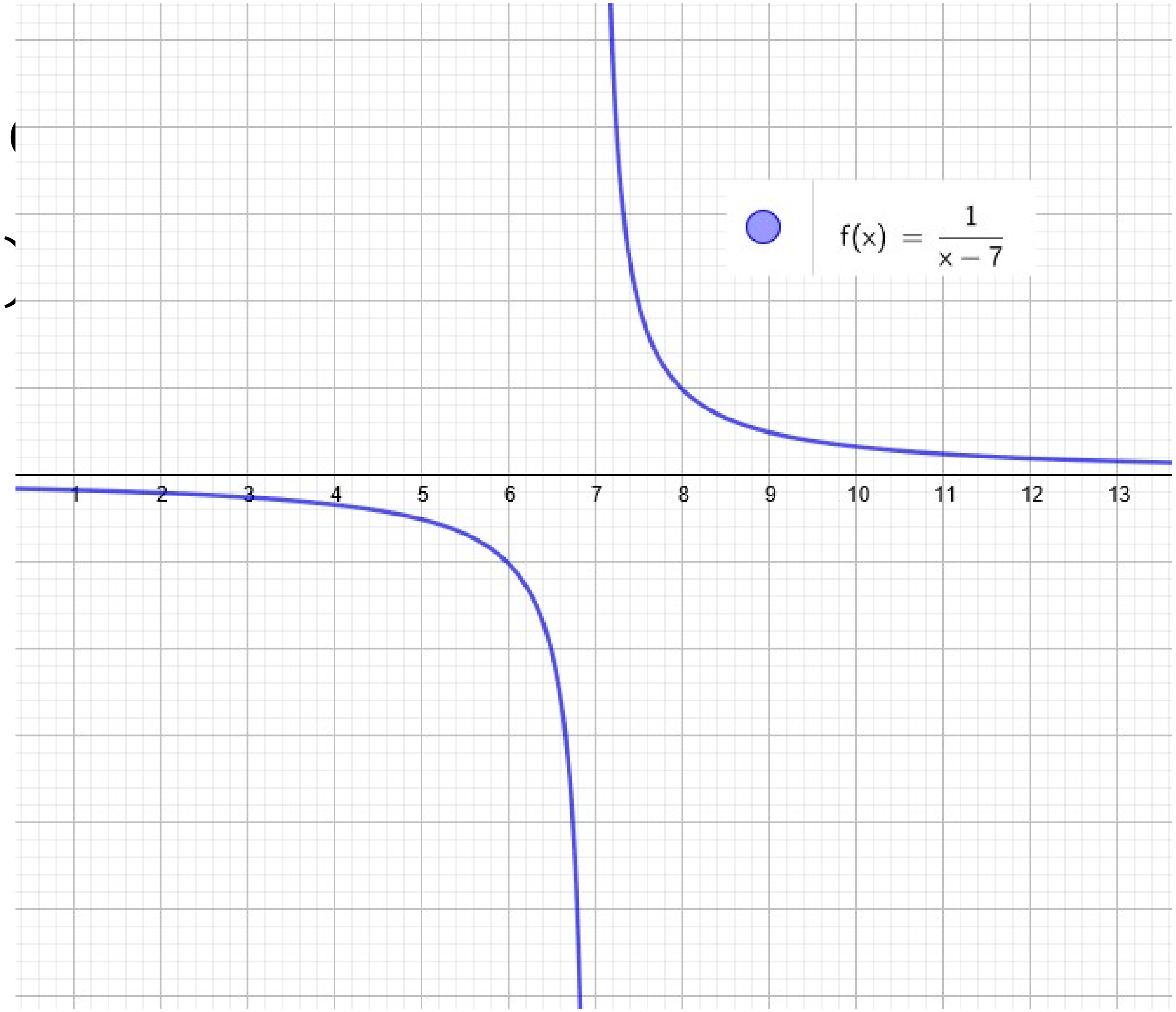
$$D = \{x \ \in R \mid x \neq 7\}$$

$$D =]-\infty, 7[U]7, \infty[$$

Exercícios

Qual o (

$c)\ f(x)$



Exercícios

Qual o **domínio** de cada função?

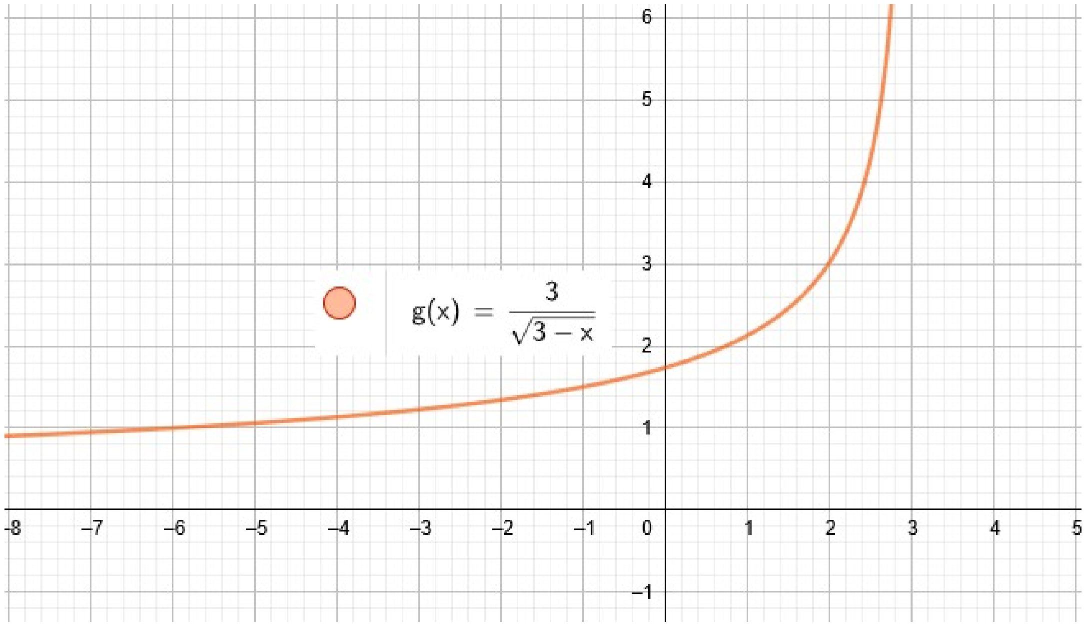
$d)\ g(x) = \frac{3}{\sqrt{3-x}}$

$3 - x > 0$

$3 > x$

$D = \{x \ \in R \ |x < 3\}$

$D =]-\infty, 3[$

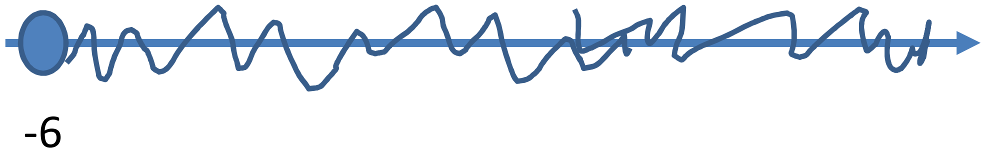


Exemplo

Qual o domínio de $h(x)=\frac{\sqrt{6+x}}{\sqrt{x-2}}$

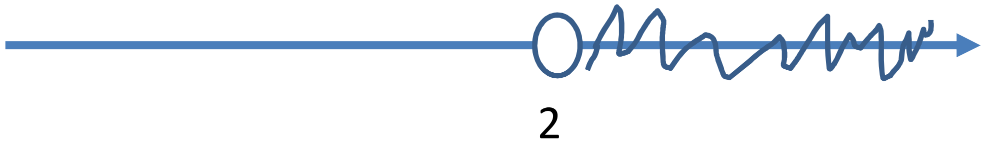
$6 + x \geq 0$

$x \geq -6$

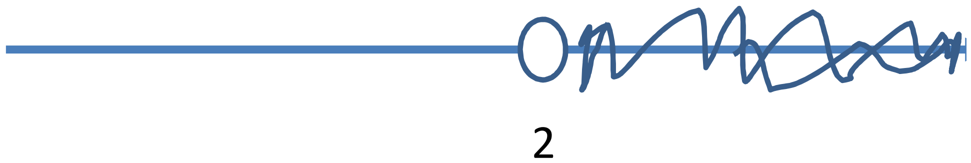


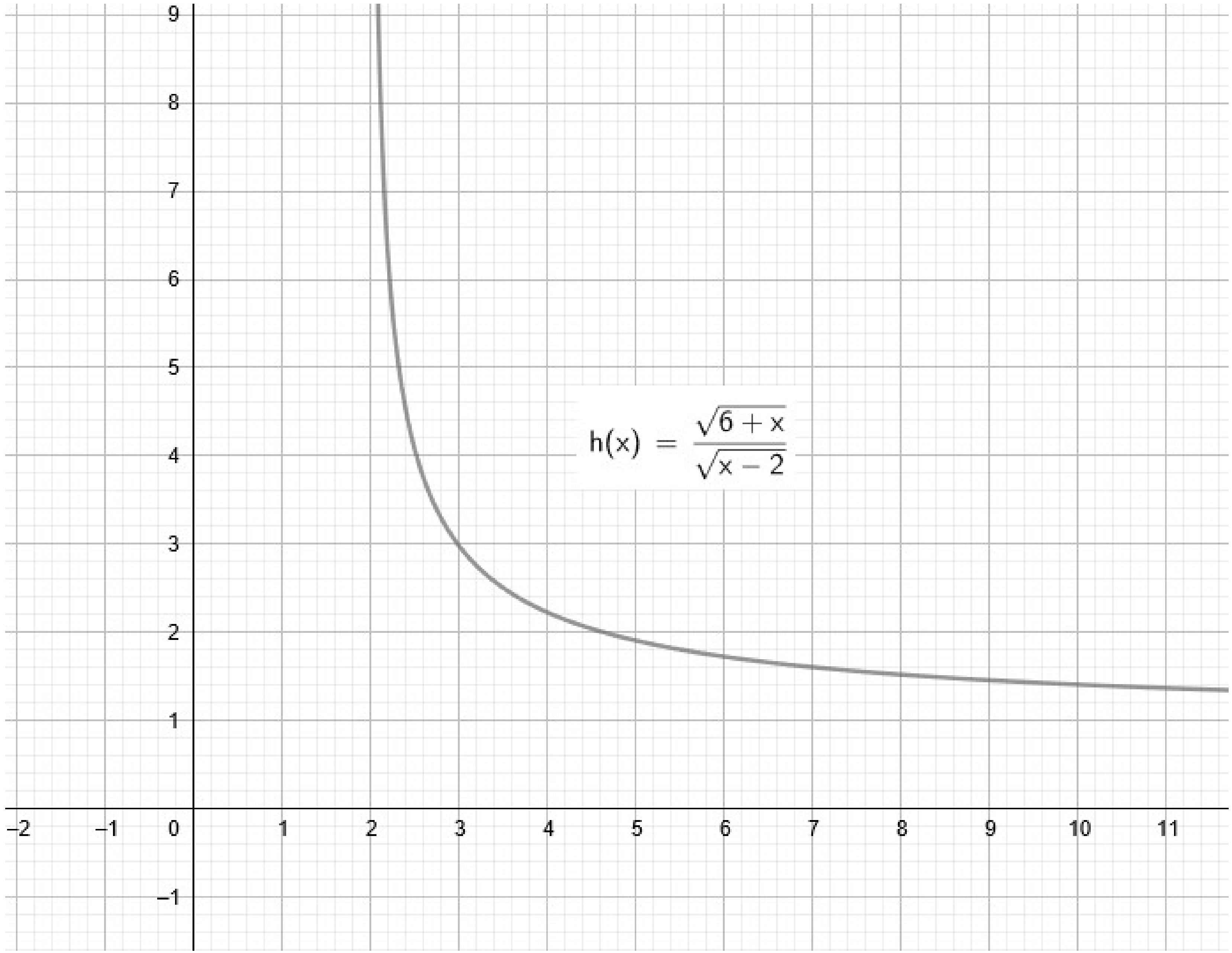
$x - 2 > 0$

$x > 2$



D=$\{x \in R \mid x > 2\}$





$h(x) = \frac{\sqrt{6 + x}}{\sqrt{x - 2}}$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Representando uma função

- Verbal
- Numérica
- Visual
- Algébrica

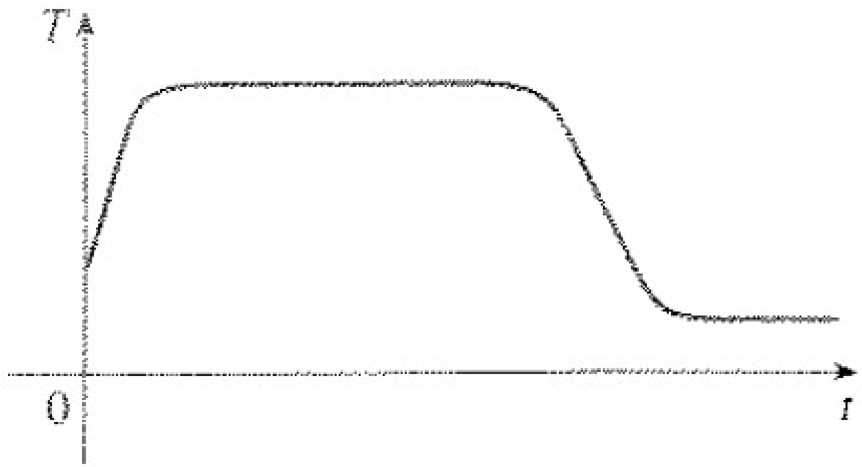
Representando uma função

- **Verbal**
  - “C” é o custo de enviar uma carta de peso “g” pelos correios.
  - 1 dollar custa 2,30 reais.
- **Numérica**

C (Reais)	g (gramas)
20	0<g<500
40	500<g<1000
80	g<1000

Representando uma função

- **Visual**



Representando uma função

- **Algébrica**

$$A = \pi . r^2$$

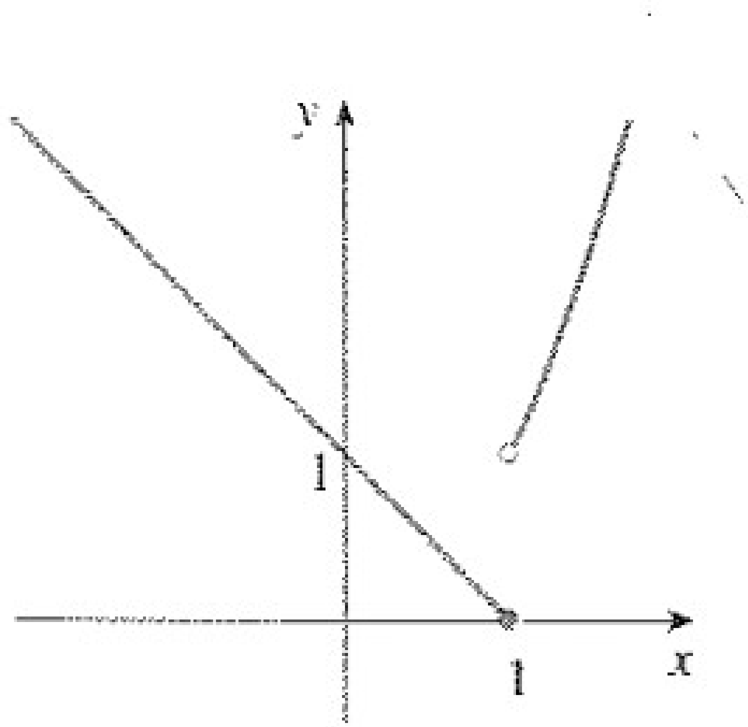
Representando uma função

- **Funções definidas por partes**

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & se\ x \leq 1 \\ x^2 & se\ x > 1 \end{cases}$$

Representando uma função

- **Funções definidas por partes**

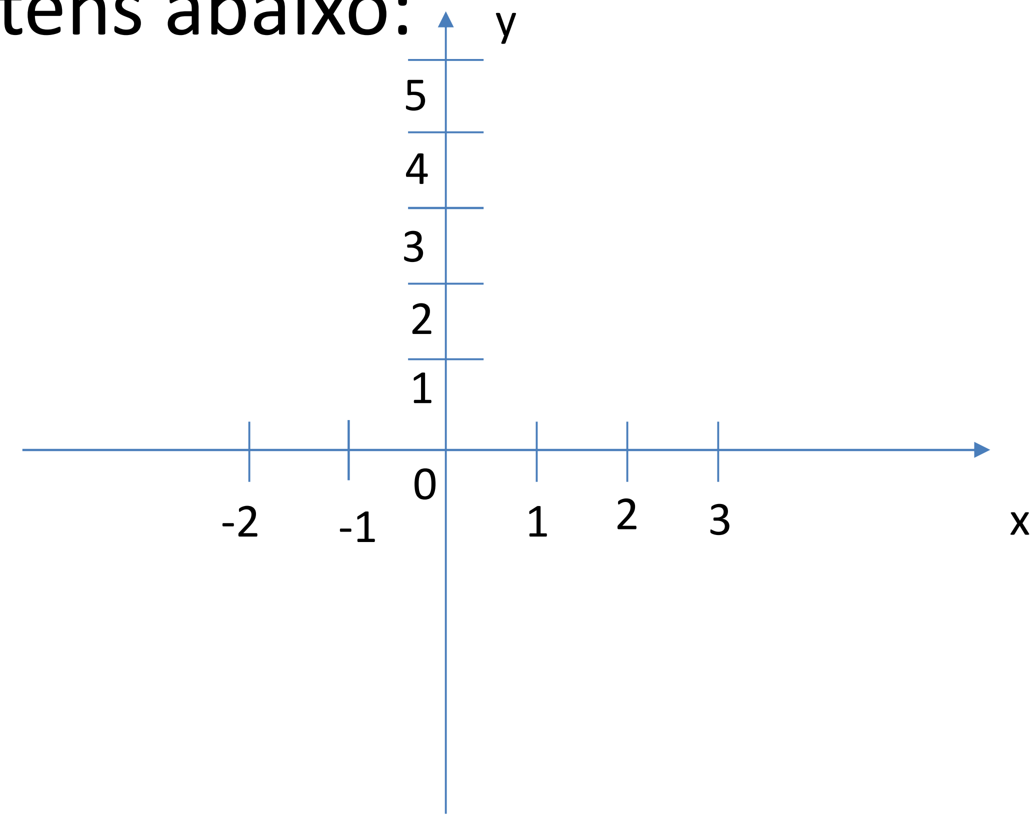


Exercícios

Esboce o gráfico dos itens abaixo:

a) $f(x) = x + 2$

x	$f(x) = x + 2$
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4
3	5

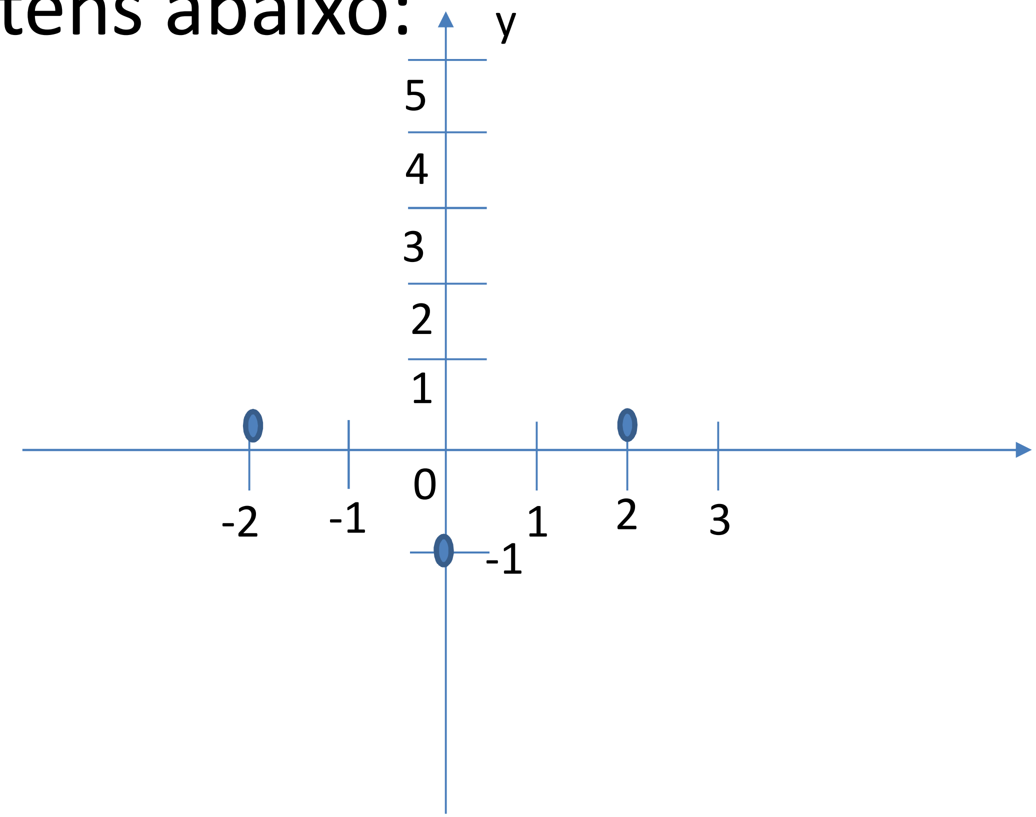


Exercícios

Esboce o gráfico dos itens abaixo:

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

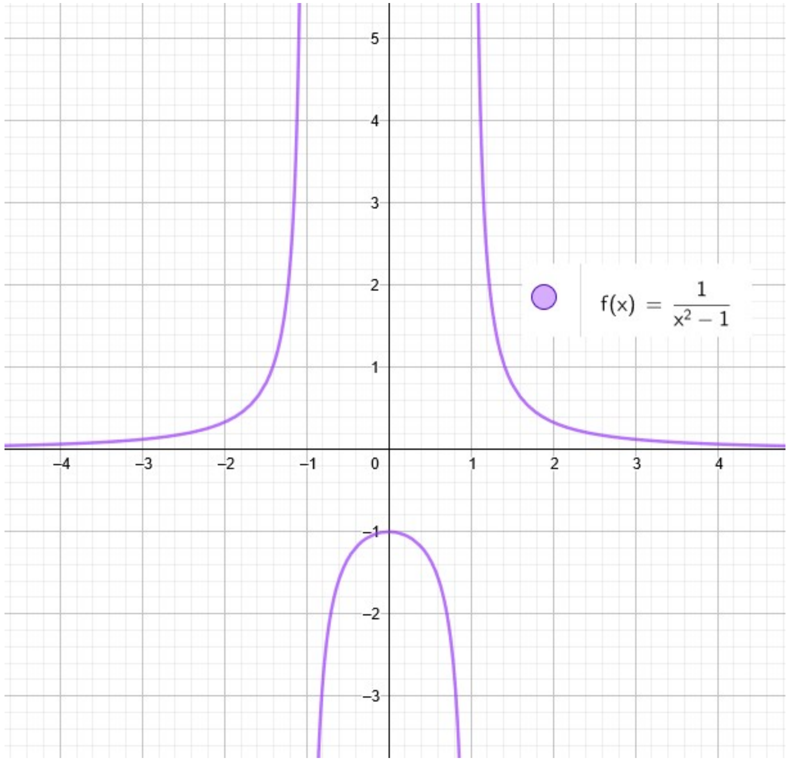
x	$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
-2	$f(x) = \frac{1}{(-2)^2-1} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$
-1	$f(x) = \frac{1}{(-1)^2-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \nexists$
0	$f(x) = \frac{1}{0^2-1} = \frac{1}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$
1	$f(x) = \frac{1}{1^2-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \nexists$
2	$f(x) = \frac{1}{2^2-1} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} =$

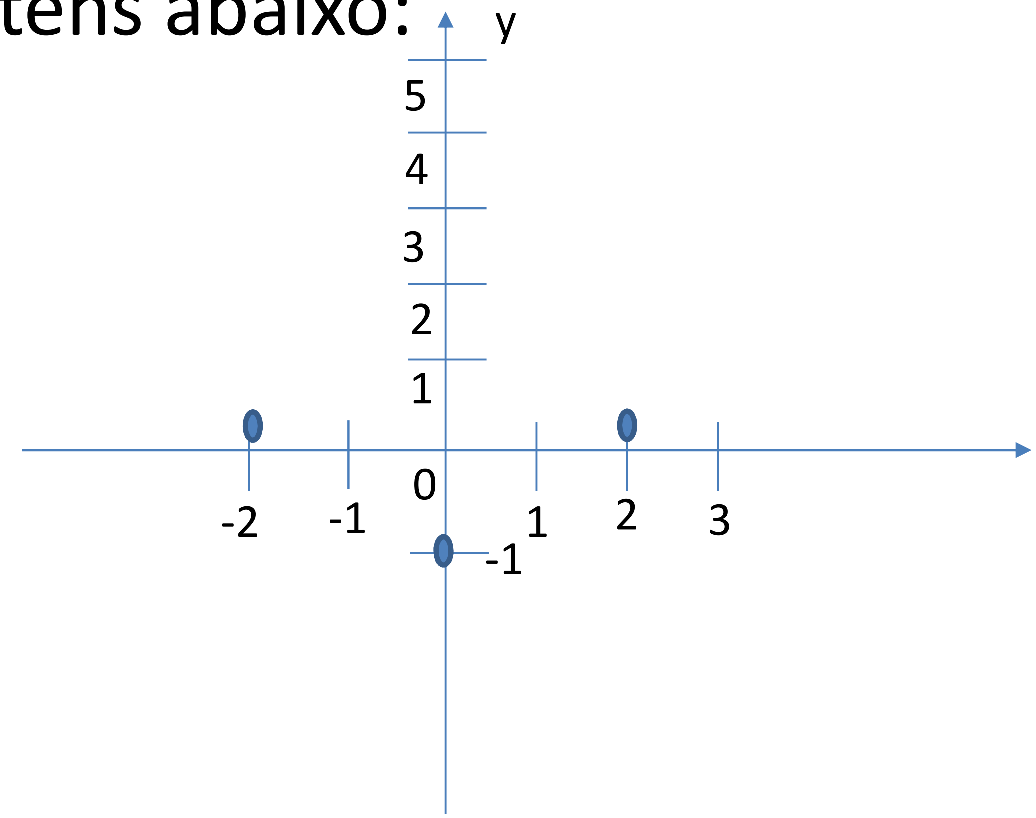


Exercícios

Esboce o gráfico dos itens abaixo:

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$





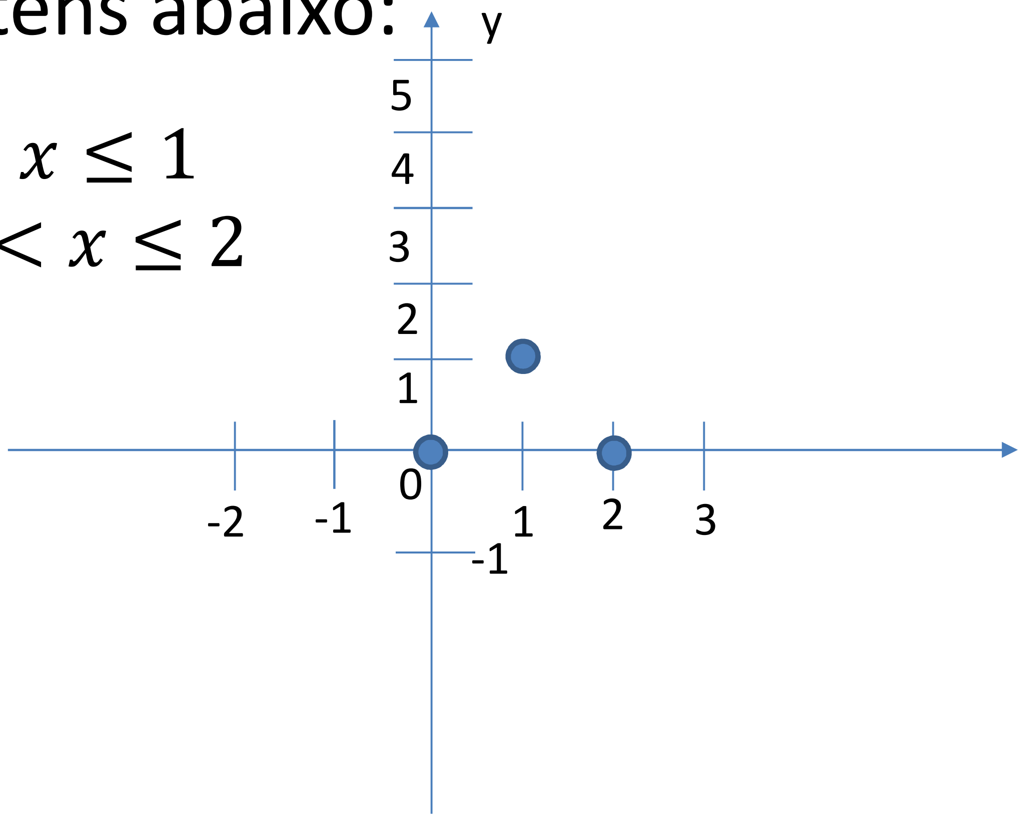
Exercícios

Esboce o gráfico dos itens abaixo:

c) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$D = [0,2]$

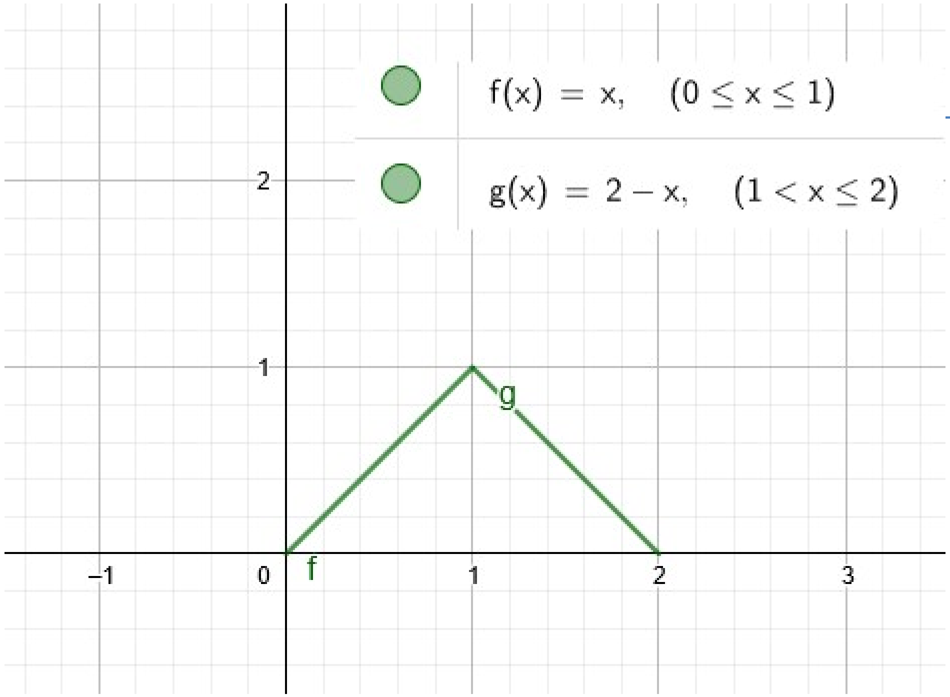
x	$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$
-2	∄
-1	∄
0	0
1	1
2	0

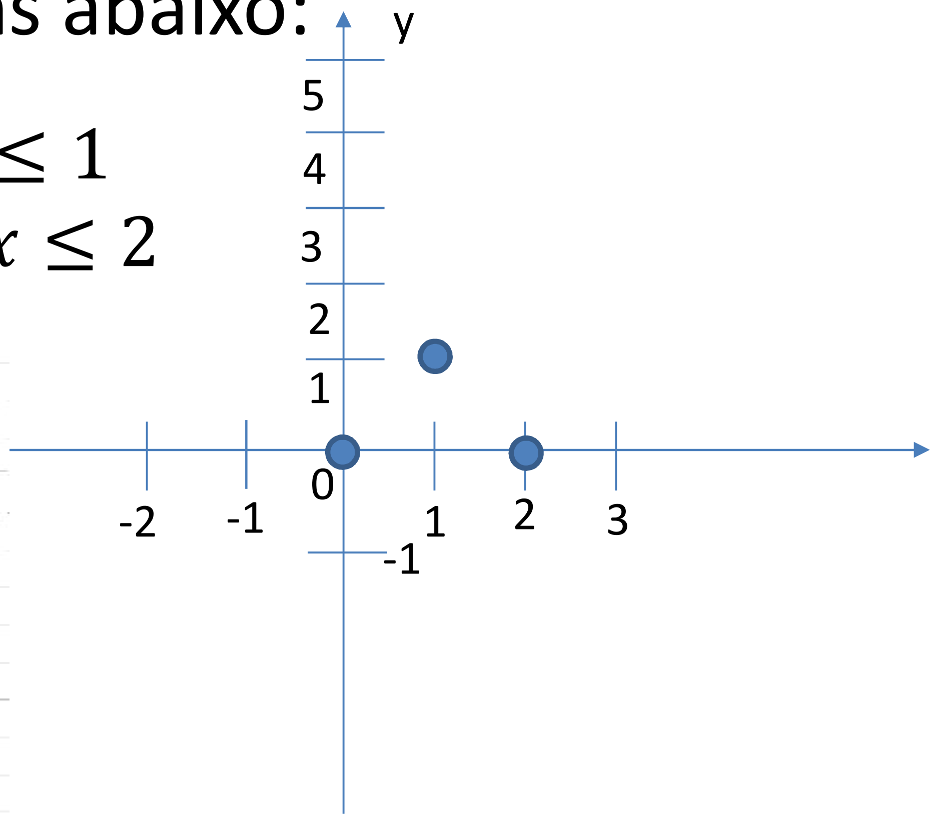


Exercícios

Esboce o gráfico dos itens abaixo:

c) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



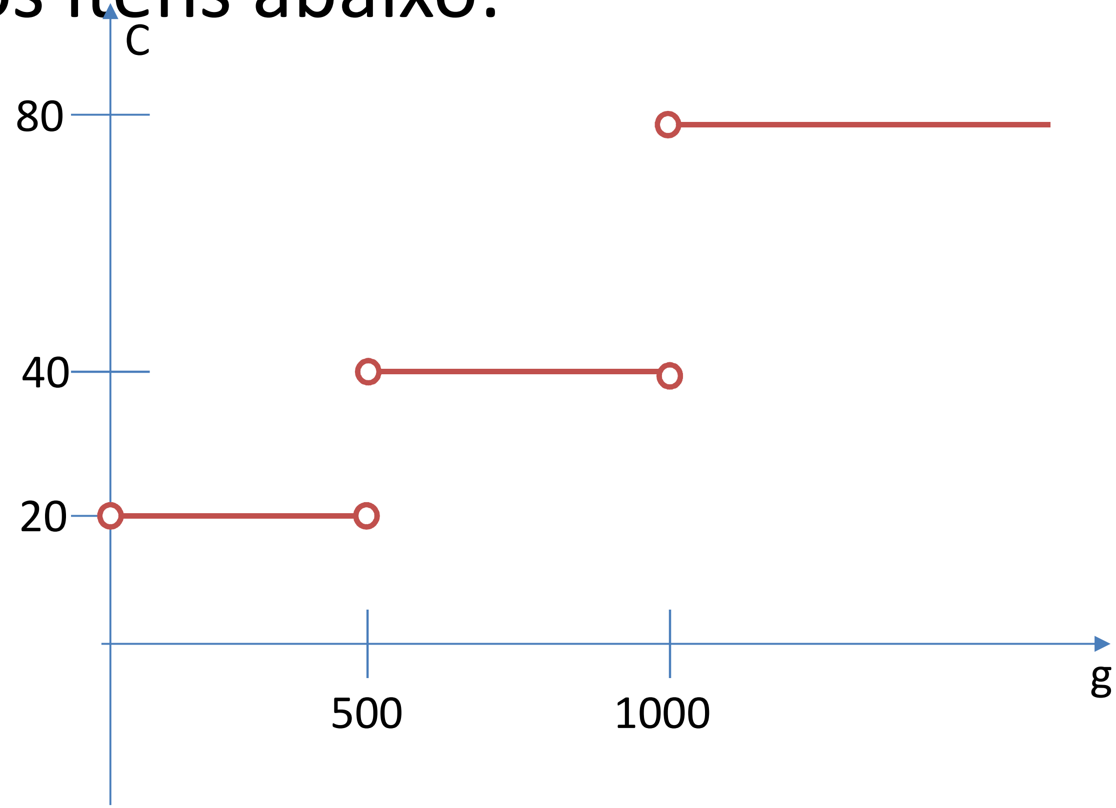


Exercícios (retorno 10:25)

Esboce o gráfico dos itens abaixo:

d)

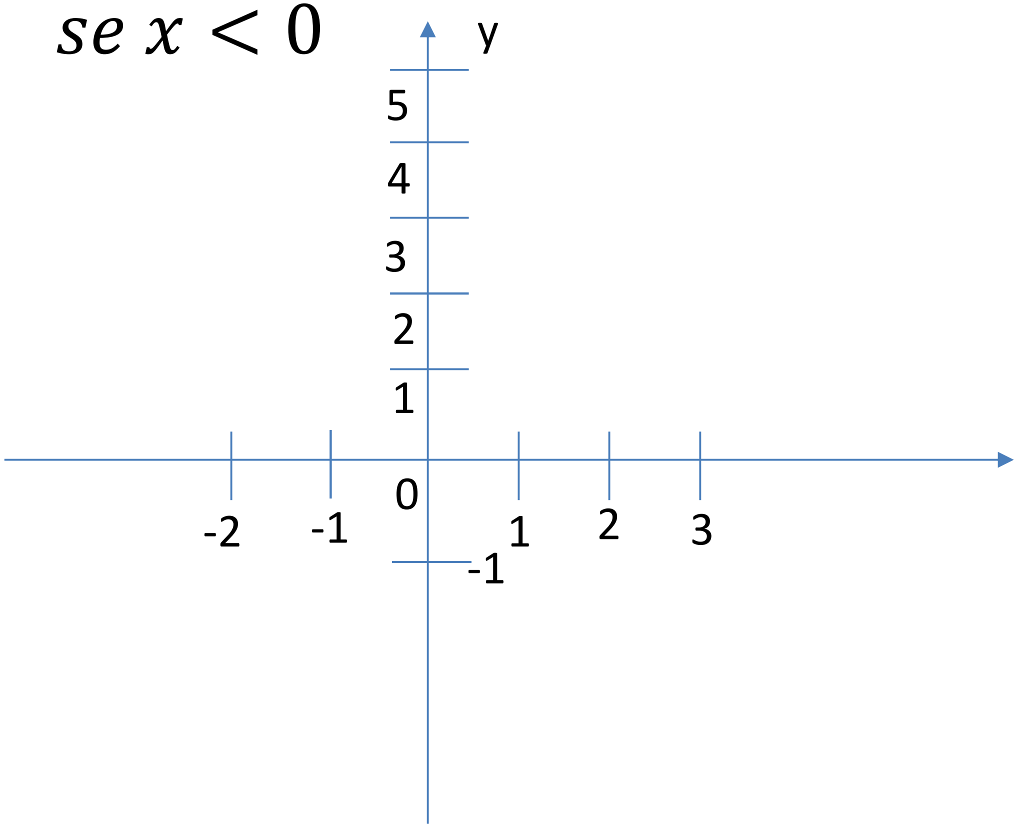
C (Reais)	g (gramas)
20	0<g<500
40	500<g<1000
80	g<1000



Exercícios

Esboce o gráfico dos itens abaixo:

e) $f(x) = |x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$

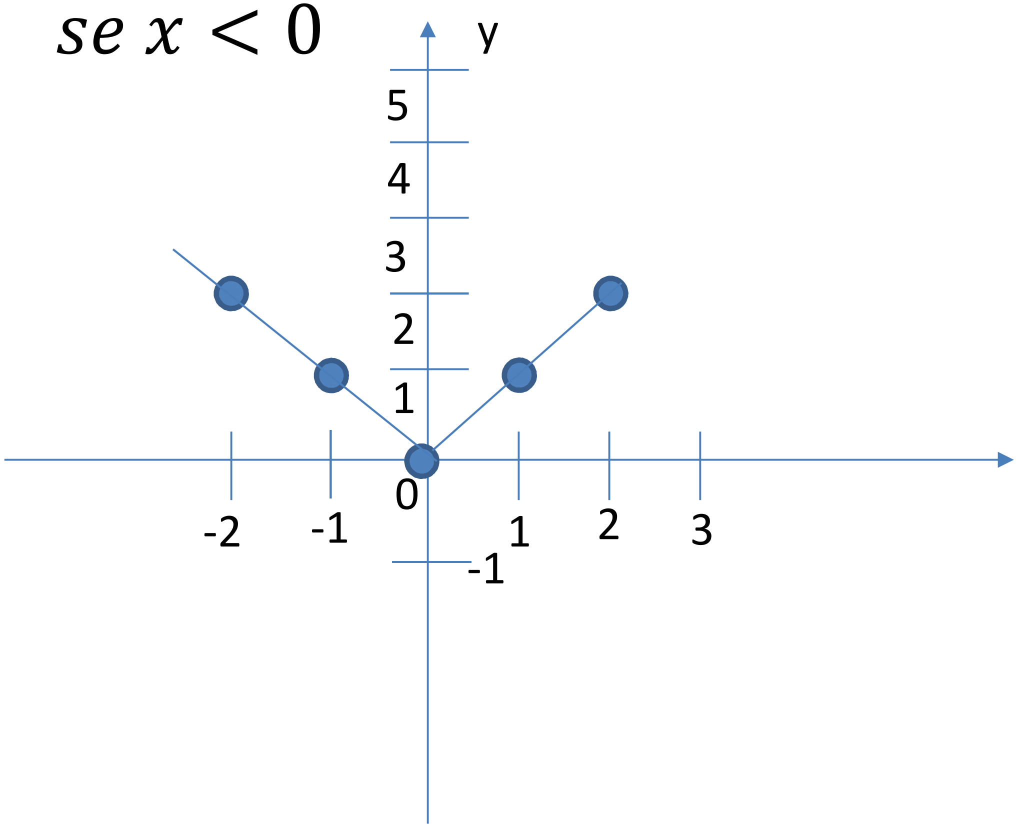


Exercícios

Esboce o gráfico dos itens abaixo:

$$\text{e) } f(x) = |x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

x	$f(x) = \|x\| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$
-2	$-(-2) = 2$
-1	$-(-1) = 1$
0	0
1	1
2	2



Teste da Reta Vertical

- Nem toda curva no plano de coordenadas pode ser gráfico de uma função.

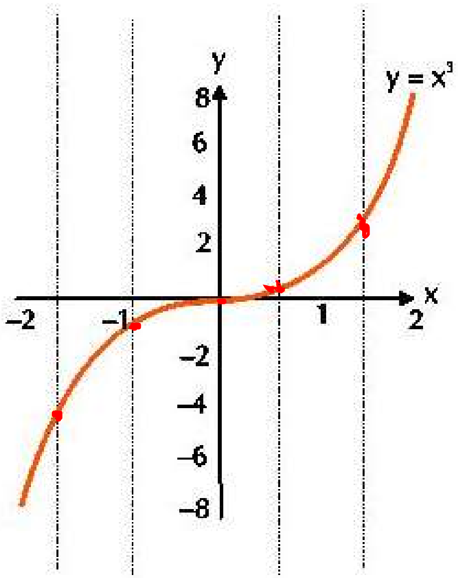
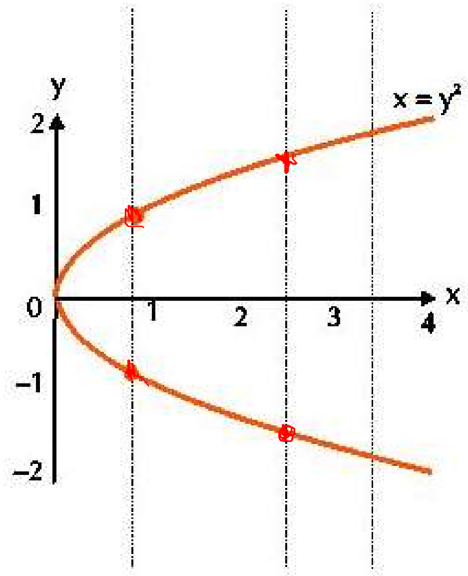


Gráfico de uma função



Não é gráfico de uma função

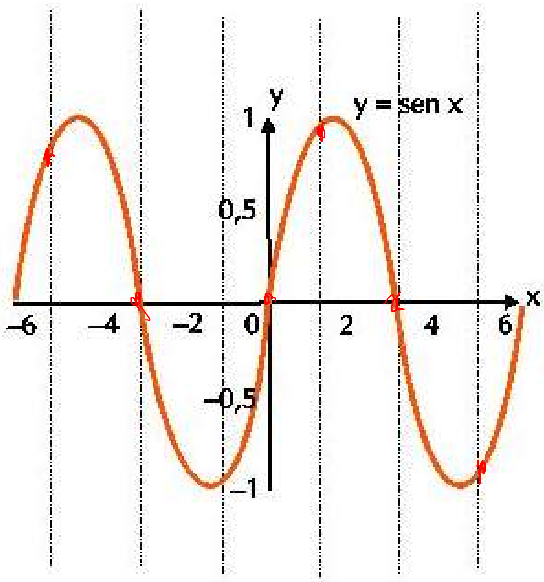


Gráfico de uma função

Representando uma função

- **Simetrias**
  - Função par: Se ʄ satisfazer **ʄ(-x)=ʄ(x)**
  - Função impar: Se ʄ satisfazer **ʄ(-x)=-ʄ(x)**

PAR: $f(-x)=f(x)$
ÍMPAR: $f(-x)=-f(x)$

Exercícios

As funções abaixo são pares ou impares?

a) $f(x) = x^5 + x$

PAR: ʄ(-x)=ʄ(x)
ÍMPAR: ʄ(-x)=-ʄ(x)

Exercícios

As funções abaixo são pares ou impares?

a) $f(x) = x^5 + x$

$$x = 2 \therefore f(2) = 2^5 + 2 = 32 + 2 = 34$$

$$x = -2 \therefore f(-2) = (-2)^5 + (-2) = -34$$

$$f(-2) = -f(2)$$

$$-34 = -34$$

Função ímpar

PAR: ʄ(-x)=ʄ(x)
ÍMPAR: ʄ(-x)=-ʄ(x)

Exercícios

As funções abaixo são pares ou impares?

b) $ʄ(x) = 1 - x^4$

PAR: ƒ(-x)=ƒ(x)
ÍMPAR: ƒ(-x)=-ƒ(x)

Exercícios

As funções abaixo são pares ou impares?

b) ƒ(x) = 1 - x^4

$$x = 2 \therefore f(2) = 1 - 2^4 = 1 - 16 = -15$$

$$x = -2 \therefore f(-2) = 1 - (-2)^4 = 1 - 16 = -15$$

$$f(-2) = f(2)$$

$$-15 = -15$$

Função par

PAR: $f(-x)=f(x)$
ÍMPAR: $f(-x)=-f(x)$

Exercícios

As funções abaixo são pares ou impares?

c) $f(x) = 2x - x^2$

PAR: ƒ(-x)=ƒ(x)
ÍMPAR: ƒ(-x)=-ƒ(x)

Exercícios

As funções abaixo são pares ou impares?

c) ƒ(x) = 2x – x²

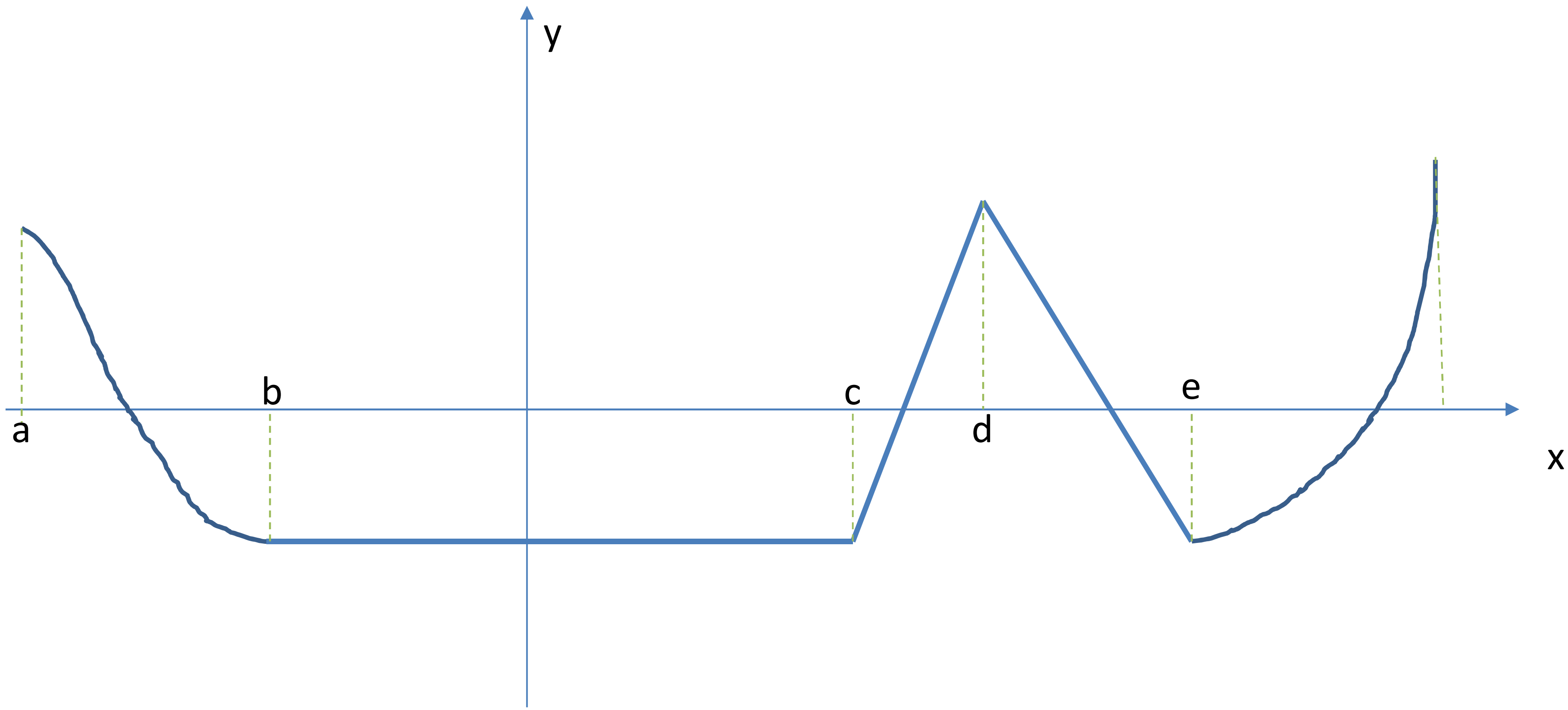
$$x = 3 \therefore f(3) = 2.3 - 3^2 = 6 - 9 = -3$$

$$x = -3 \therefore f(-3) = 2.(-3) - (-3)^2 = -6 - 9 = -15$$

Nem par e nem ímpar

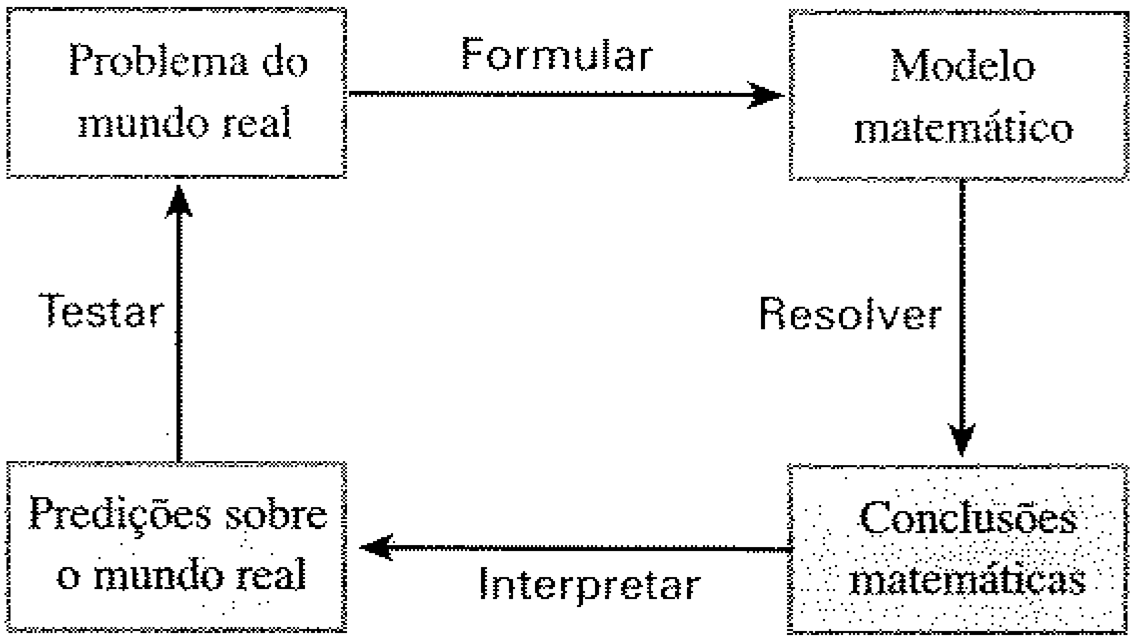
Representando uma função

- **Funções crescentes e decrescentes.**



Modelos matemáticos

- "...é uma descrição matemática de um fenômeno do mundo real..." (Stewart)
- **Modelos** tem o propósito de compreender o fenômeno e tentar fazer previsões do futuro.



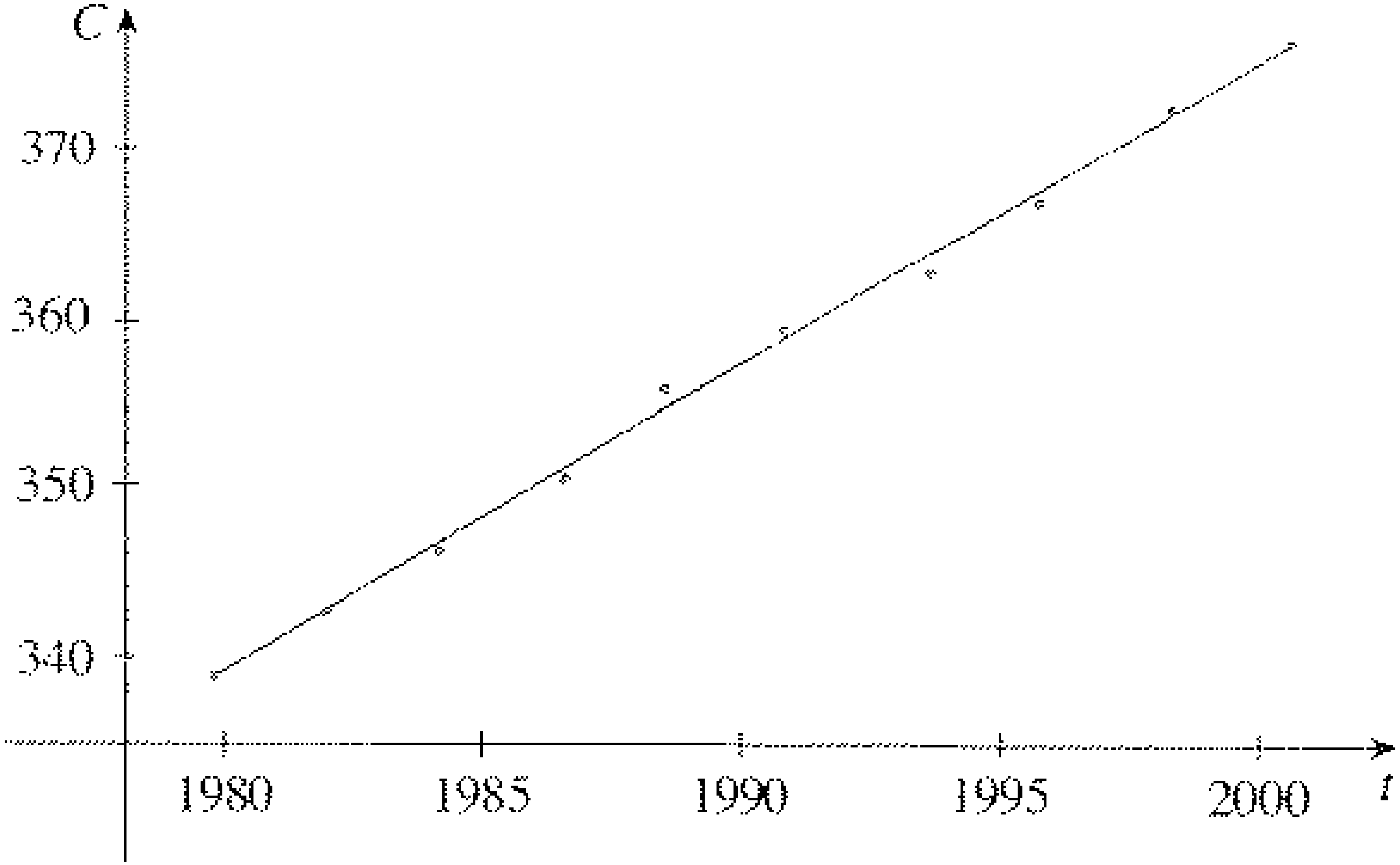
Modelos matemáticos

- **Modelo empírico** ocorre quando não existe uma lei física ou princípio que nos ajude a formular o modelo.

Exemplo

Use a Tabela 1 para encontrar um modelo para o nível de dióxido de carbono.

Ano	Nível de CO_2 (em ppm)
1980	338.7
1982	341.1
1984	344.4
1986	347.2
1988	351.5
1990	354.2
1992	356.4
1994	358.9
1996	362.6
1998	366.6
2000	369.4



C
370
360
350
340
1980
1985
1990
1995
2000
t

Tipos de Funções

- **Lineares ou afim**: variam a uma taxa constante.

$$y = mx + n$$

Coeficiente angular

Coeficiente linear

  - Exemplo:

$$f(x) = 3x - 2$$

Coeficiente angular: 3

Coeficiente linear: -2

Tipos de Funções

- **Quadrática:** aquela que é dada por um trinômio do 2º grau com a $\neq 0$. Seu gráfico é uma parábola.

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$$

  - **Exemplos: quadrática.ggb**

Tipos de Funções

- Exemplos de trinômio que não seja quadrado perfeito:

$$\boldsymbol{y = x^2 + 6x + 11 = (x^2 + 2 \times x \times 3) + 11}$$
$$\boldsymbol{= (x^2 + 2 \times x \times 3 + 9) + 2}$$
$$\boldsymbol{y = (x + 3)^2 + 2}$$

Ou seja, translada $y=x^2$ três unidade para esquerda e 2 unidades para cima.

– **trinomio quadrado não perfeito.ggb**

Tipos de Funções

- **Polinômios**

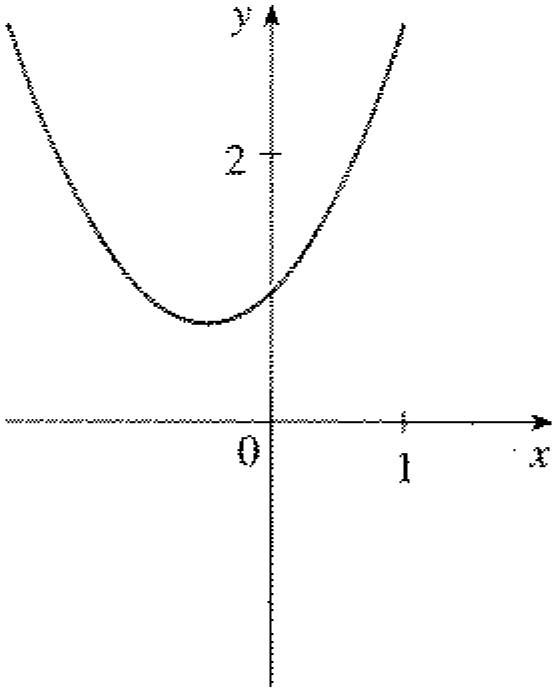
Grau do polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

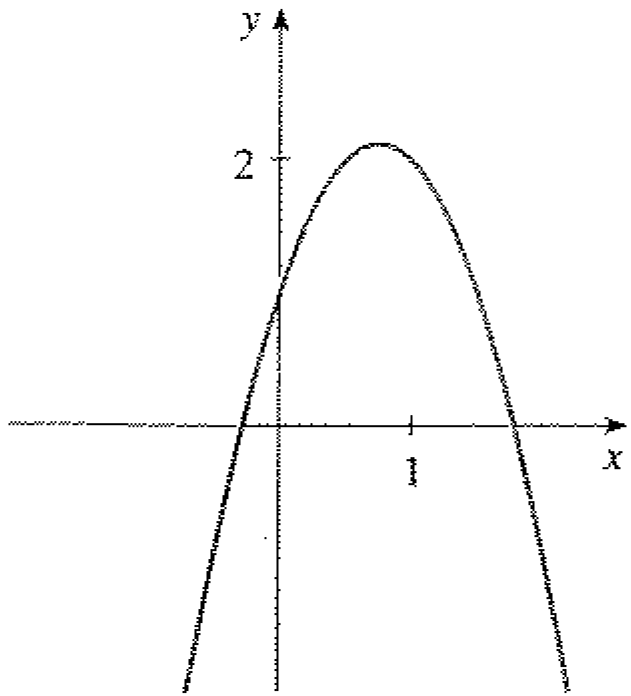
Coeficiente dominante

Tipos de Funções

- **Polinômios**
  - Função quadrática:



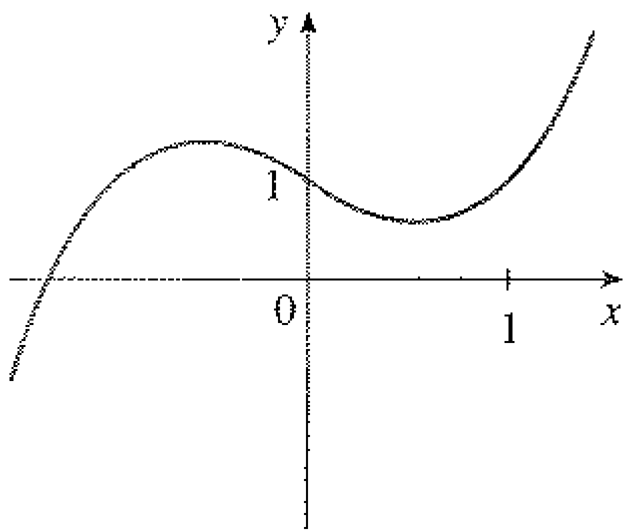
(a) $y = x^2 + x + 1$



(b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

Tipos de Funções

- **Polinômios**
  - Função cúbica:



(a) $y = x^3 - x + 1$

Tipos de Funções

- **Polinômios**
  - Outros exemplos:polinômios.ggb

Tipos de Funções

- **Funções Potências**

$$f(x) = x^a$$

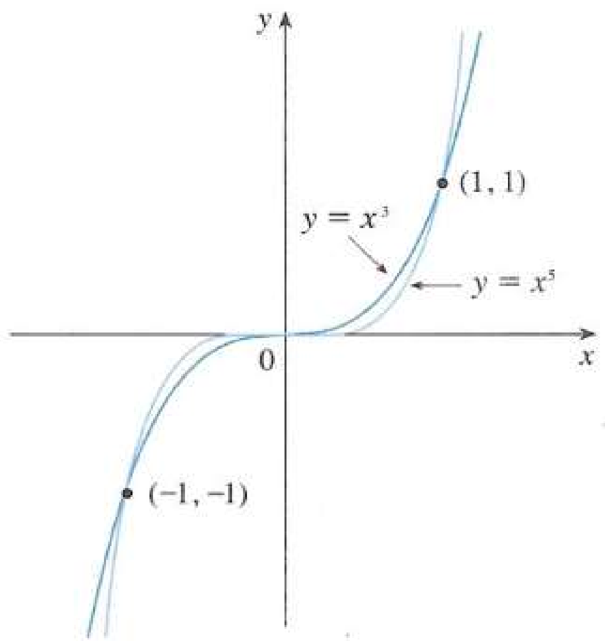
a) "a" igual N* e ímpar: inteiro ímpar positivo.ggb
b) "a" igual N* e par :inteiro par positivo.ggb
c) "a" igual Z, impar e negativo: ímpar negativo.ggb
d) "a" igual Z, par e negativo:par negativo.ggb
e) "a" igual número 1/n: pontencias 1_n.ggb

Tipos de Funções

a) Domínio: R Imagem(f)=R

Passam pelos pontos: (0,0),(-1,-1) e (1,1).

São exemplos de funções ímpares.



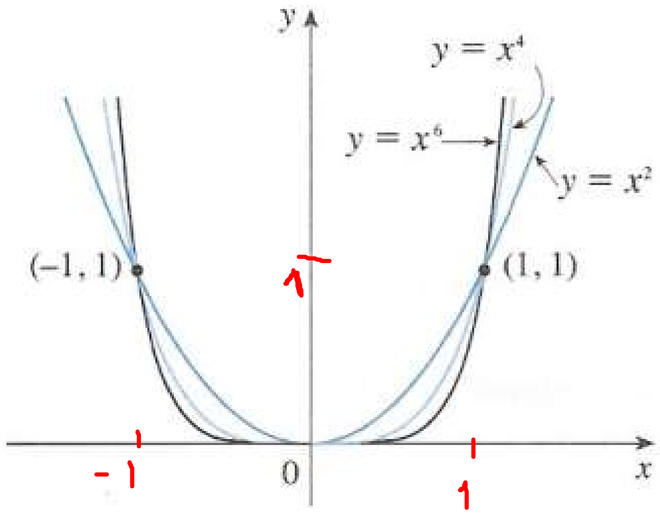
Tipos de Funções

b) Domínio: R

Imagem: conjunto dos reais não negativos: R^+

Passam pelos pontos: (0,0),(-1,1) e (1,1).

Todas as funções desse tipo são funções pares.



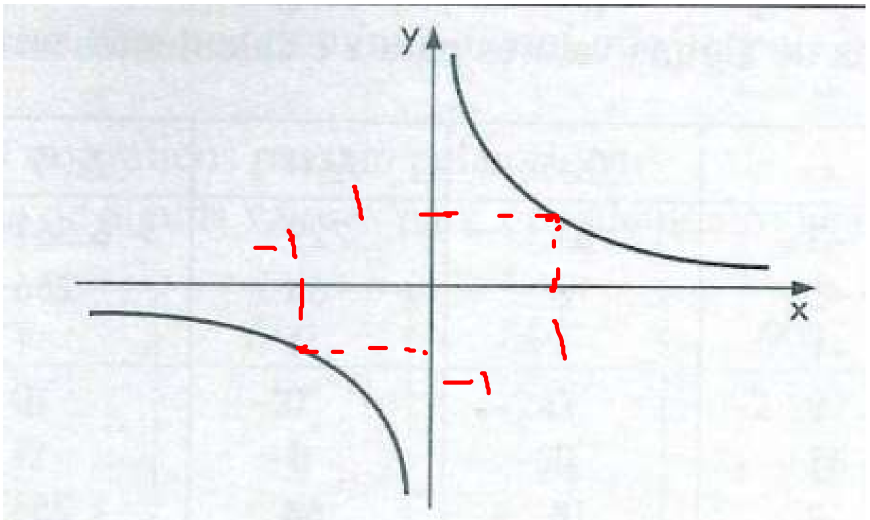
Tipos de Funções

c) Domínio: R-{0} ou R*   Imagem: R-{0} ou R*

Interseção com o eixo 0x ou 0y não há.

Gráfico é uma hipérbole.

É uma função ímpar: f(x)=-f(-x)

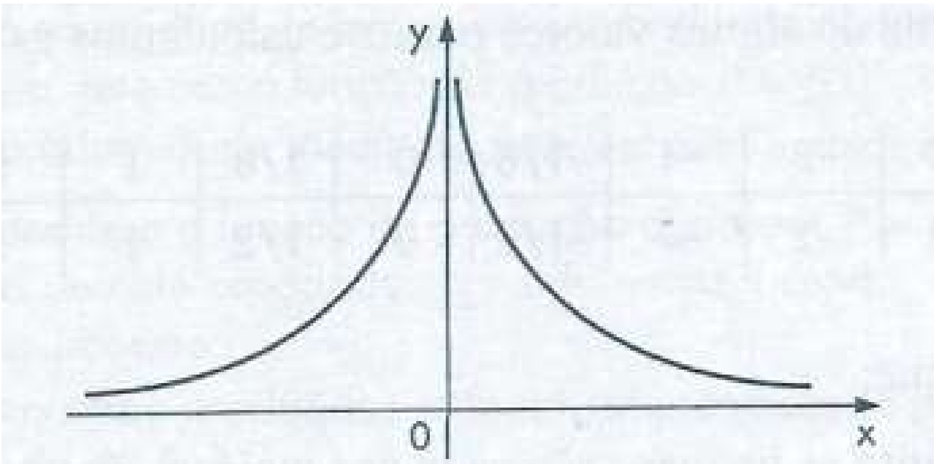


Tipos de Funções

d) Domínio: R-{0} ou R*   Imagem(f)=R_{+}^{*}

Interseção com o eixo 0x ou 0y não há.

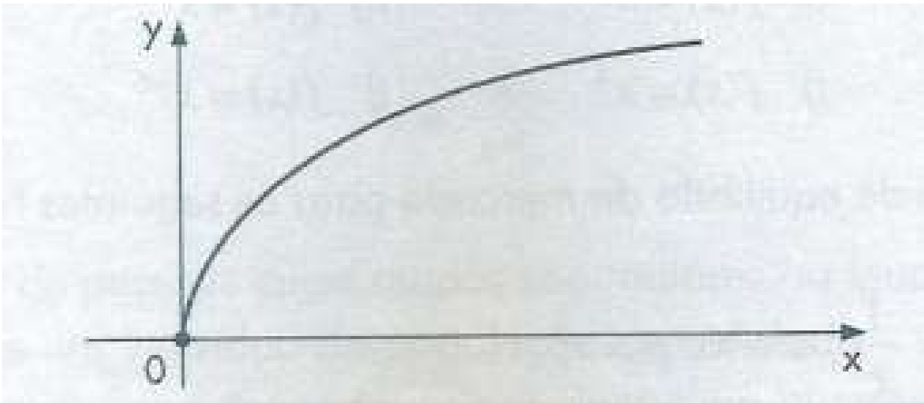
São exemplos de funções pares.



Tipos de Funções

e) Para n=2

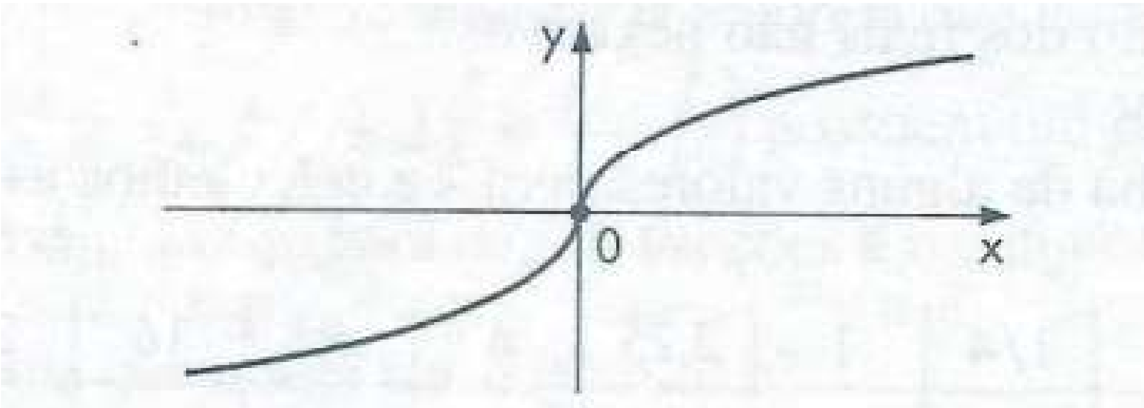
- Domínio: R+ (conjunto dos reais não negativos)=[0, ∞)
- Imagem(f)= R+ (conjunto dos reais não negativos)
- Interceptos: (0,0)



Tipos de Funções

e) Para n=3

- Domínio: R
- Imagem(f)=R
- Interceptos: (0,0)
- Função ímpar



Tipos de Funções

- **Função racional:** é a razão de dois polinômios.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

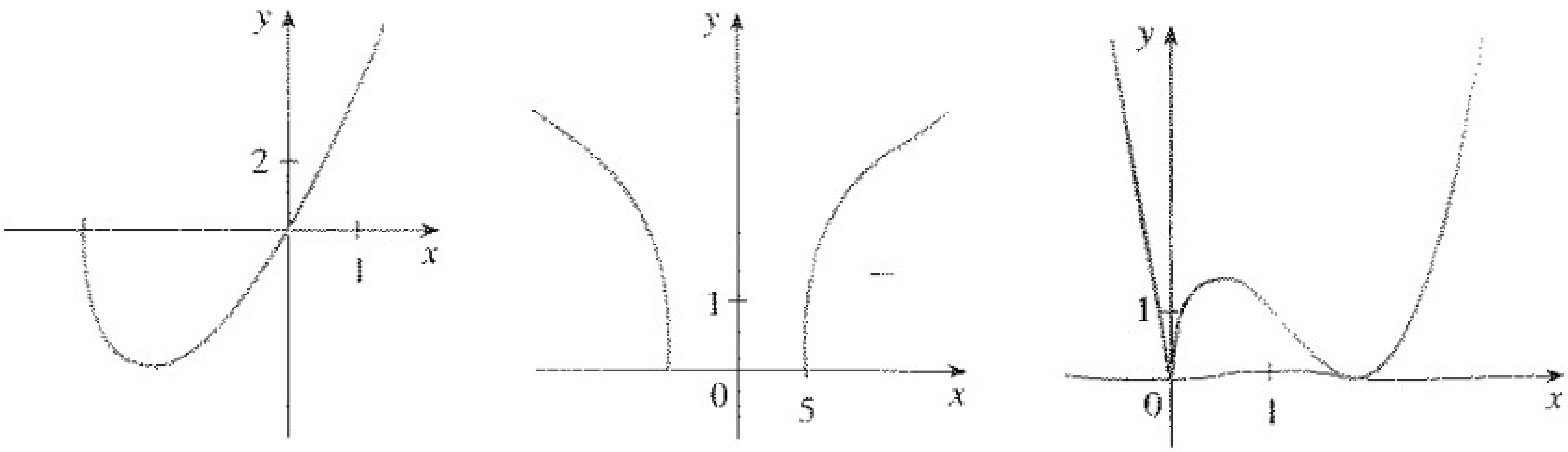
  - O **domínio** são todos os valores de **x** onde $Q(x) \neq 0$
  - Ex: funções racionais.ggb

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

Tipos de Funções

- **Funções algébricas:** operações algébricas (como adição, multiplicação, divisão e extração de raízes) nos polinômios.

Exemplos: funções algébricas.ggb



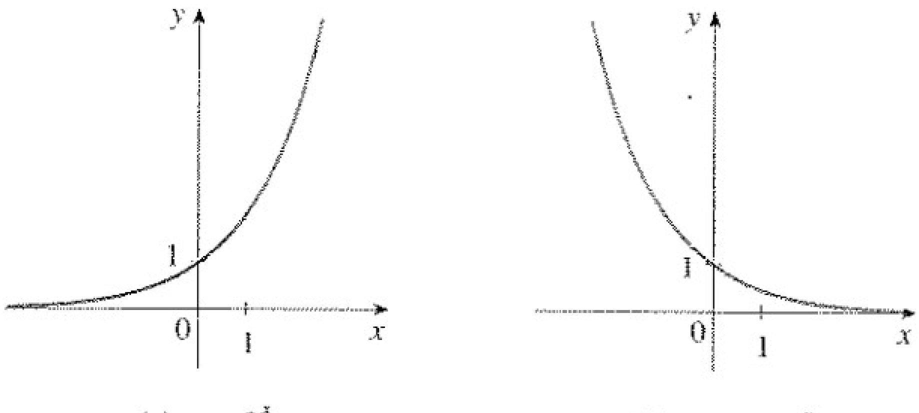
(a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

Tipos de Funções

- **Funções exponenciais:** representada pela variável no expoente e cuja a base é sempre > 0 e ≠ 1.

$$ƒ(x)=a^x$$

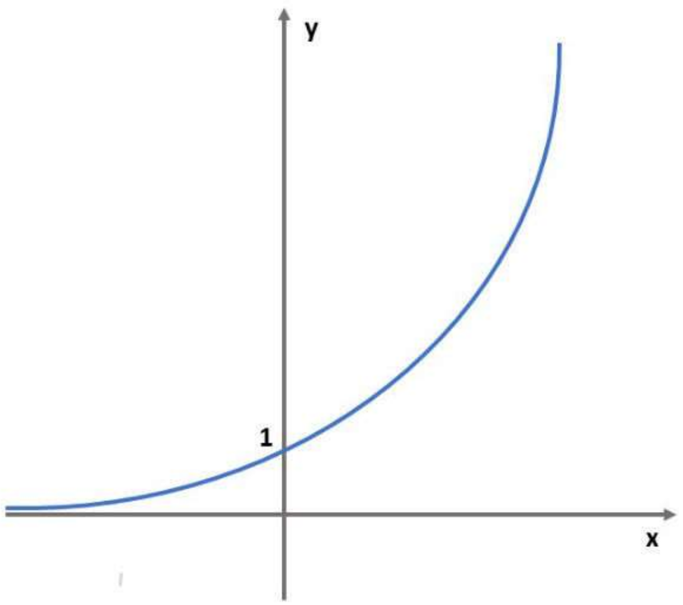
- Exemplos: funções exponenciais.ggb



(a) $y = 2^x$ (b) $y = (0.5)^x$

Tipos de Funções

- **Funções exponenciais:**
  - Passa pelo ponto (0,1), pois todo número elevado a zero é igual a 1.
  - Não toca no eixo x.



Tipos de Funções

- **Funções exponenciais:** propriedades da função exponencial.

$a^x \, a^y = a^{x+y}$

$a^x / a^y = a^{x-y}$

$(a^x)^y = a^{x.y}$

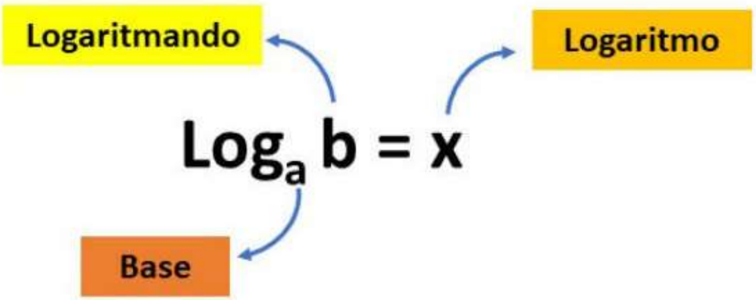
$(a\, b)^x = a^x \, b^x$

$(a / b)^x = a^x / b^x$

$a^{-x} = 1 / a^x$

Tipos de Funções

- **Funções logarítmicas:** é a inversa da função exponencial.

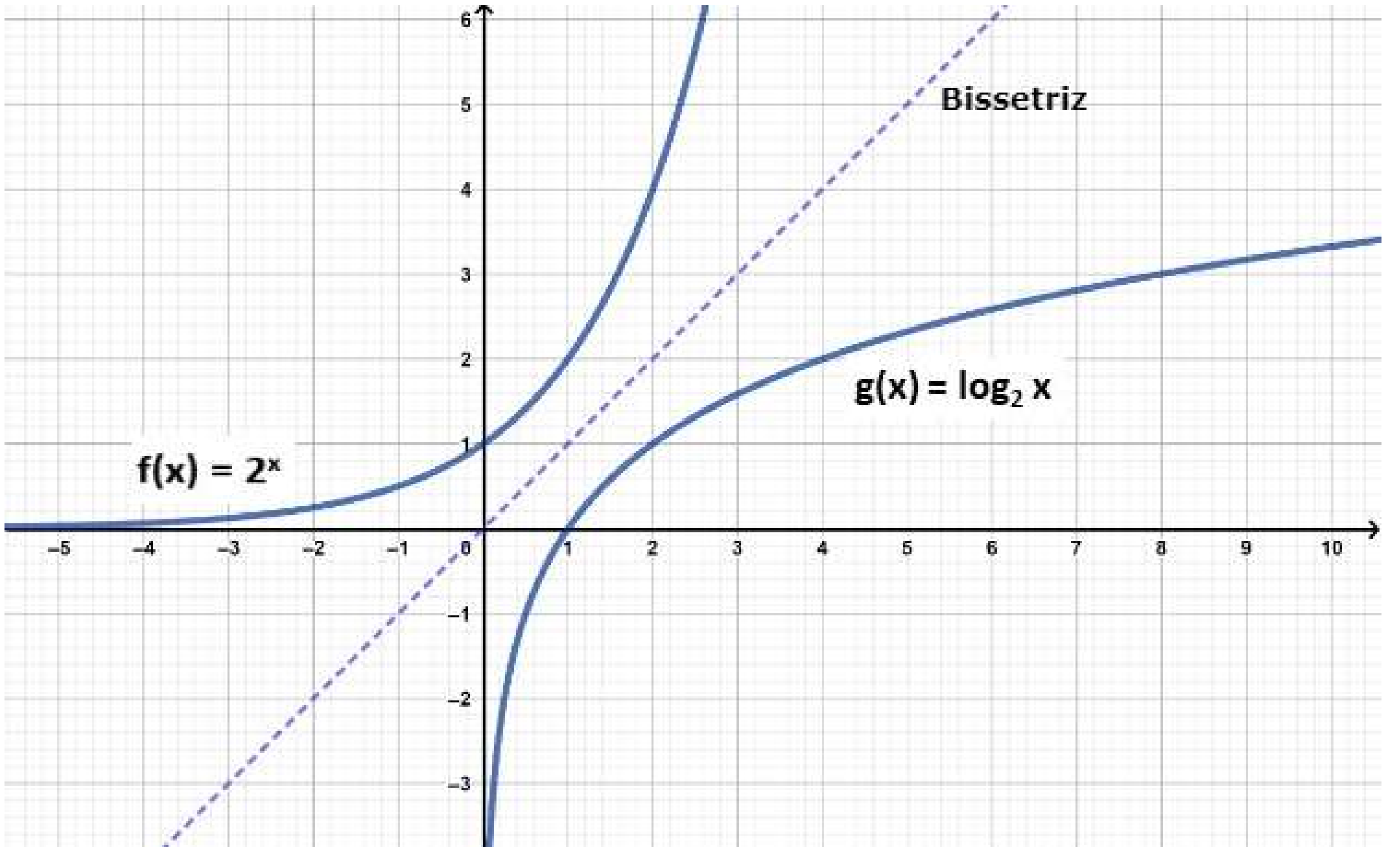


$a = R^{+}$ e $a \neq 1$

Exemplos: logarítmicas.ggb

Tipos de Funções

- **Funções logarítmicas:** $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$



Tipos de Funções

- **Funções logarítmicas: propriedades operatórias.**
  - **Produto:** $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$
  - **Quociente:** $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$
  - **Potência:** $\log_a b^c = c.\log_a b$
  - **Mudança de Base:** $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Tipos de Funções

- **Logaritmo Natural:** é quando a base do log vale e

$$\ln a = \log_e a$$

Obs: e é chamado de número de Euler e é um numero irracional valendo aproximadamente 2,71...

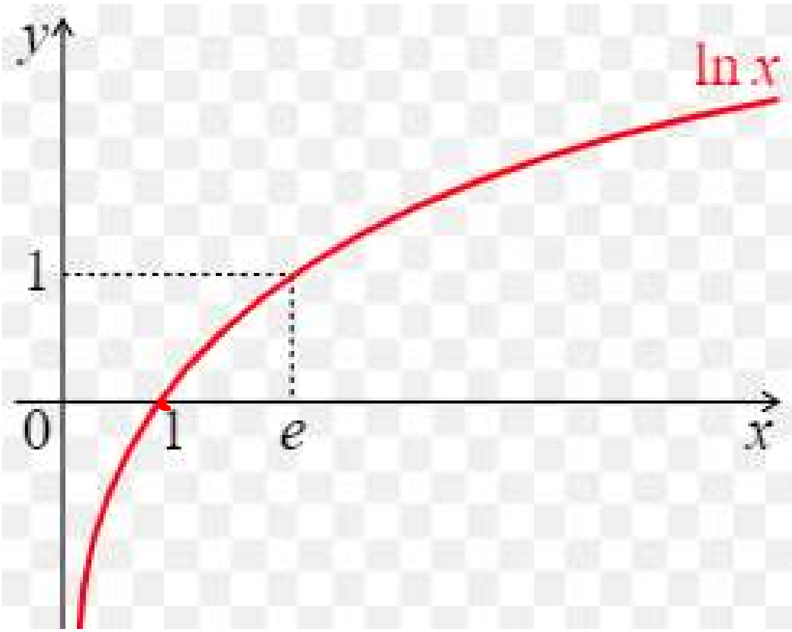
Tipos de Funções

- **Logaritmo Natural:**

I) $\ln_e = 1$

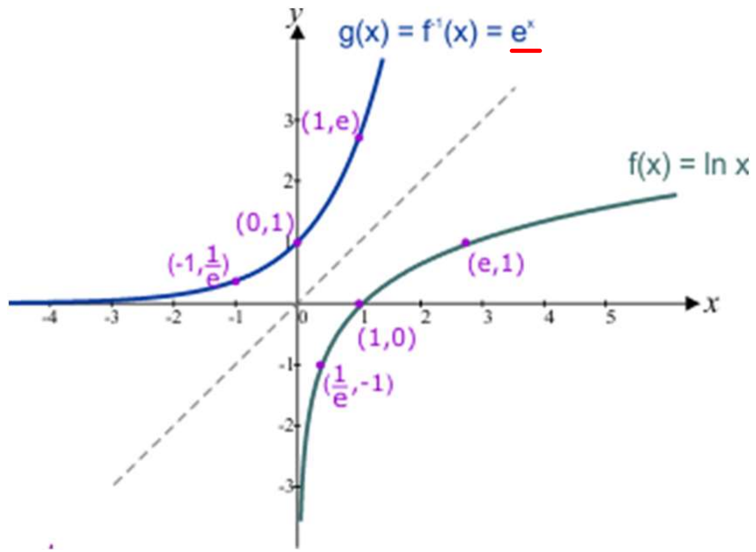
II) $\ln 1 = 0$

III) $\ln e^n = n$



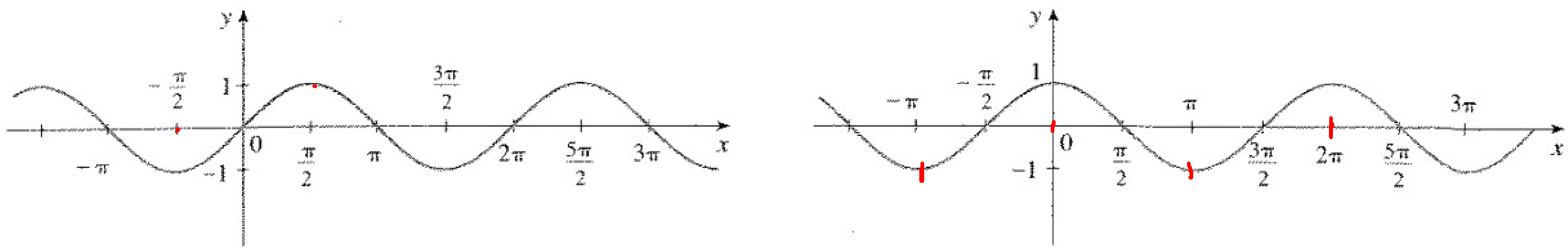
Tipos de Funções

- **Funções exponenciais natural:** cuja base é o número de Euler.



Tipos de Funções

- **Funções trigonométricas:** são funções angulares, importantes no estudo dos triângulos e na modelação de fenômenos periódicos.
  - São periódicas



(a) $f(x) = \text{sen}\, x$

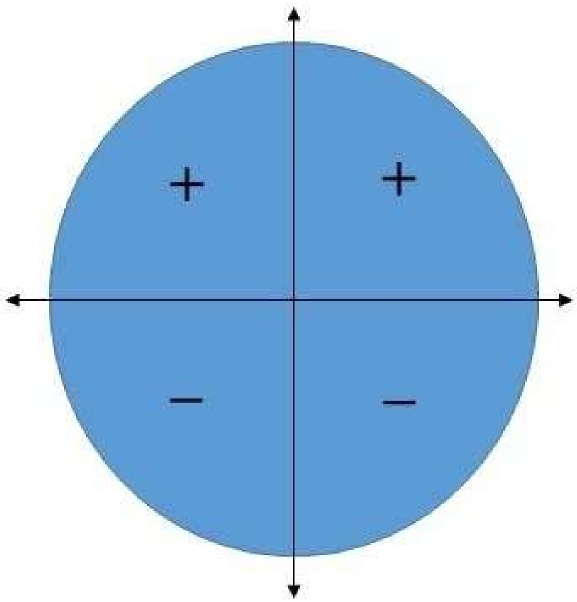
(b) $g(x) = \cos x$

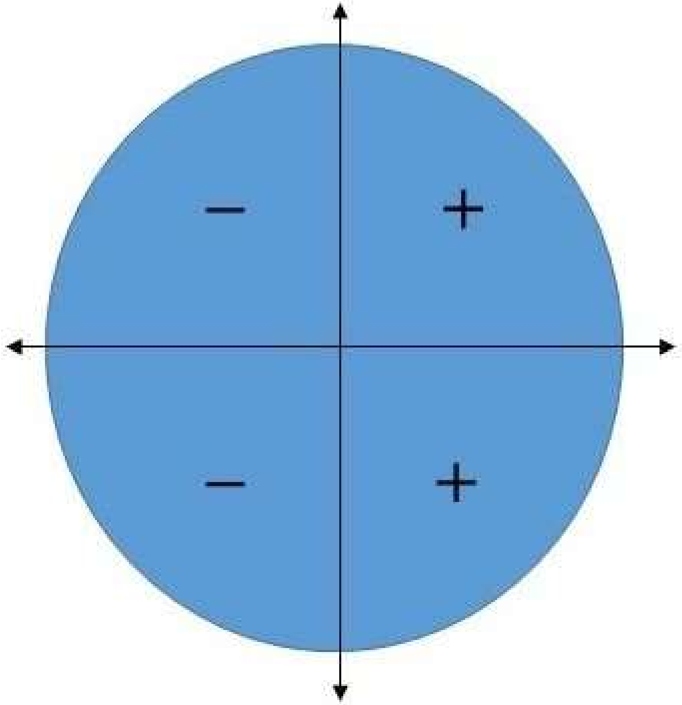
Tipos de Funções

- **Funções trigonométricas:**
  - **Seno e Cosseno** são periódicas de 2π.

$$sen\ (x + 2\pi) = sen\ x$$

$$cos\ (x + 2\pi) = cos\ x$$





Tipos de Funções

- **Funções trigonométricas:** seno é uma função ímpar e cosseno é par.
  - Dom(sen)=R
  - Dom(cos)=R
  - Im(sen)=[-1, 1]
  - Im(cos)=[-1,1]
- Exemplos: funções trigonometricas.ggb

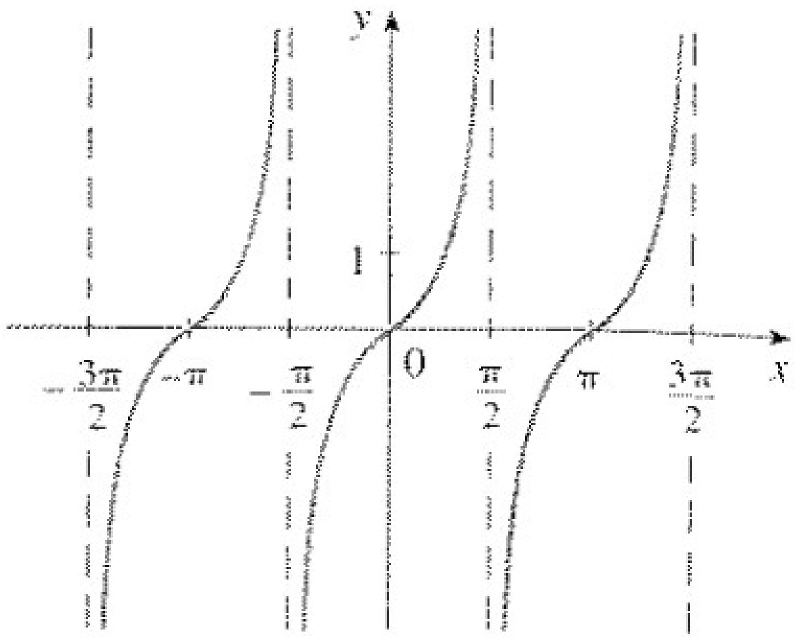
Tipos de Funções

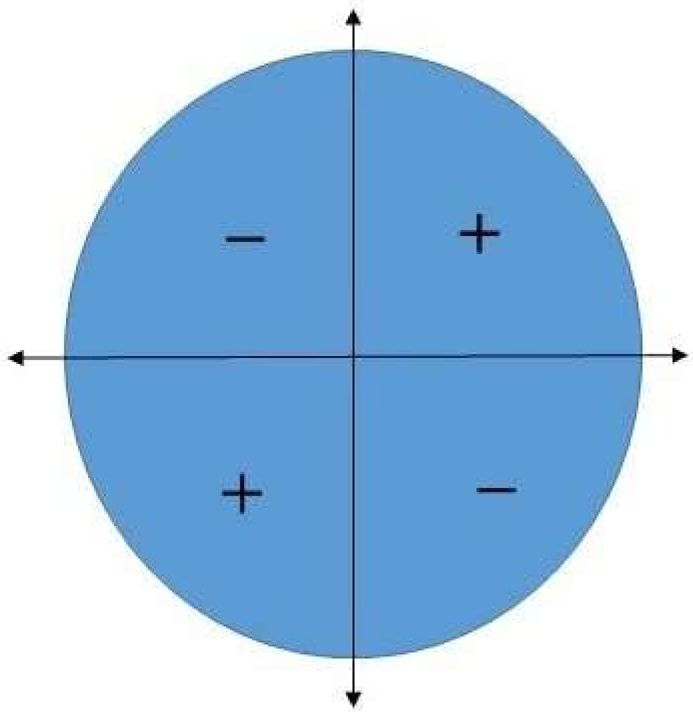
- **Funções trigonométricas:**
  - **Tangente** é a razão entre seno e cosseno com período **π**.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Tipos de Funções

- Tangente:





Tipos de Funções

- Tangente: **função ímpar e crescente**.

Dom(tan)={x ∈ R|x ≠ π/2 + kπ | k ∈ Z}

I=R

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x$$

Tipos de Funções

- Secante, cossecante e cotangente: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/secante-cosecante-cotangente.htm

Tipos de Funções

- **Funções transcendentais:** são funções não algébricas.
  - Ex: funções trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e etc...

Exercícios

- Classifique as funções abaixo:

(a) $f(x) = 5^x$

(b) $g(x) = x^5$

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$

(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

Exercícios

- Classifique as funções abaixo:

(a) $f(x) = 5^x$

(b) $g(x) = x^5$

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$

(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

a) Exponencial
b) Potência
c) Algébrica
d) Polinomial

Combinando Funções

$$x \in D(f) \cap D(g)$$

- Soma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- Subtração:$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- Multiplicação: $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

$$(cf)(x) = c.f(x)$$

c=constante

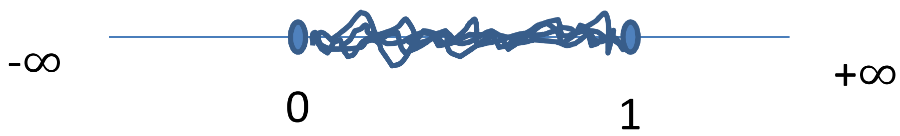
- Divisão:$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

g(x)$\neq 0$

Combinando Funções

- Exemplos: considere $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{1-x}$.

$$D(f) = [0, \infty)$$
$$D(g) \rightarrow 1 - x \geq 0 \ \therefore 1 \geq x$$
$$D(g) = (-\infty, 1]$$
$$[0, \infty) \cap (-\infty, 1]$$



$$D = [0,1]$$

Combinando Funções

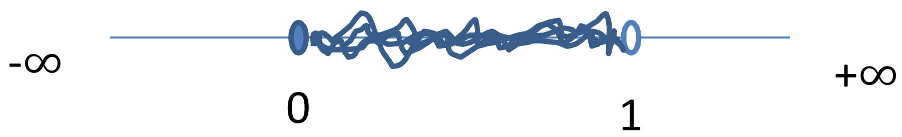
- Exemplos: considere $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{1-x}$.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = \sqrt{x(1-x)}$$

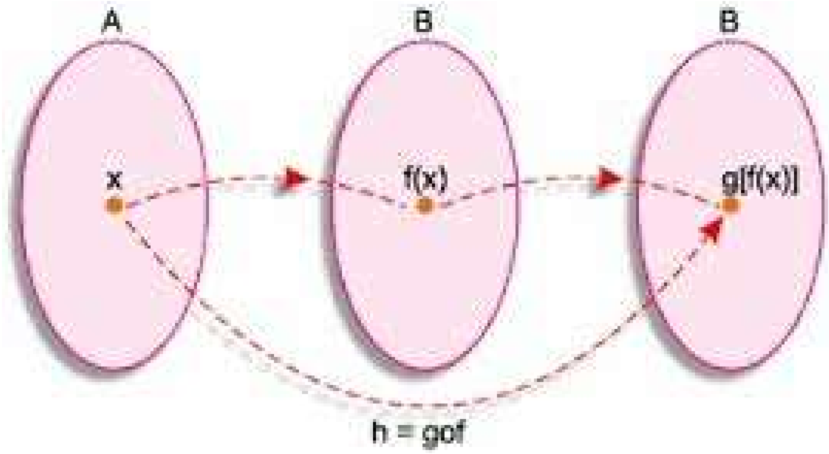
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{x/(1-x)}$$



Funções Compostas

- Também chamada de função de função, é um tipo de função matemática que combina duas ou mais variáveis.

$$fog\ (x) = f(g(x))$$
$$gof\ (x) = g(f(x))$$



Funções Compostas

- **fog ≠ gof**
  - **Exemplos:** determine o gof(x) e fog(x) das funções $f(x) = 2x + 2$ e $g(x) = 5x$

gof(x) $= g[f(x)] = g(2x+2) = 5(2x+2) = 10x + 10$

fog(x) $= f[g(x)] = f(5x) = 2(5x) + 2 = 10x + 2$

Exercícios

- Dado $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ e $h(x) = -3 + 2x$
  - Calcule: fog(x), gof(x), gogof(x) e hohof(x)

Exercícios

- Dado $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ e $h(x) = -3 + 2x$
  - Calcule: fog(x), gof(x), gogof(x) e hohof(x)

$$fog(x) = f\big(g(x)\big) = f(x+2) = (x+2)^2$$

$$gof(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = x^2 + 2$$

$$gogof(x) = g\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = g(x^2+2) = x^2 + 2 + 2$$
$$= x^2 + 4$$

$$hohof(x) = h\Big(h\big(f(x)\big)\Big) = h\big(h(x^2)\big) = h(-3 + 2x^2)$$
$$= -3 + 2(-3 + 2x^2) = 4x^2 - 9$$

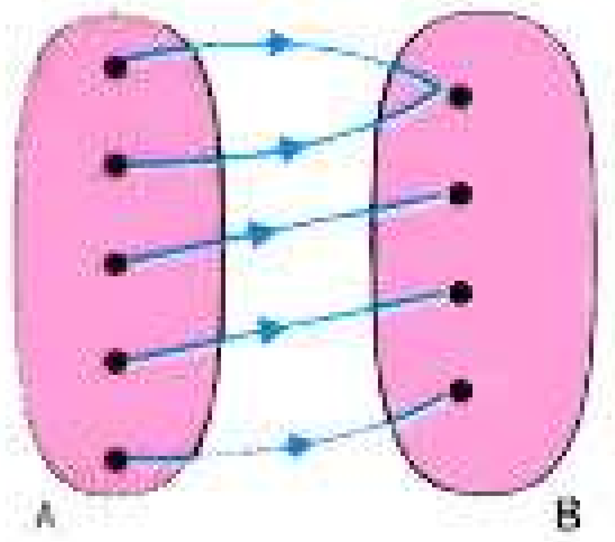
Propriedades das Funções

Considere $f : A \rightarrow B$

- **Função sobrejetora**: uma função é sobrejetora se, e somente se, o seu conjunto imagem for especificadamente igual ao contradomínio, Im = B.
  - Exemplo: se temos uma função $f : Z \rightarrow Z$ definida por $y = x + 1$ ela é sobrejetora, pois Im = Z.

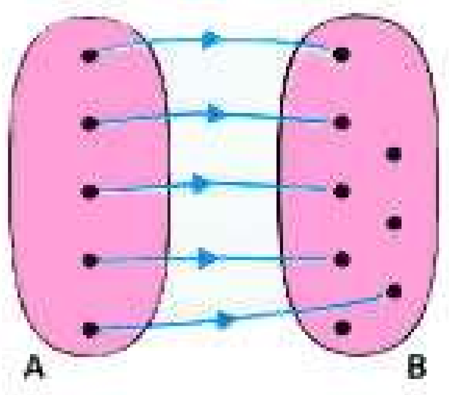
Propriedades das Funções

- **Função sobrejetora**:



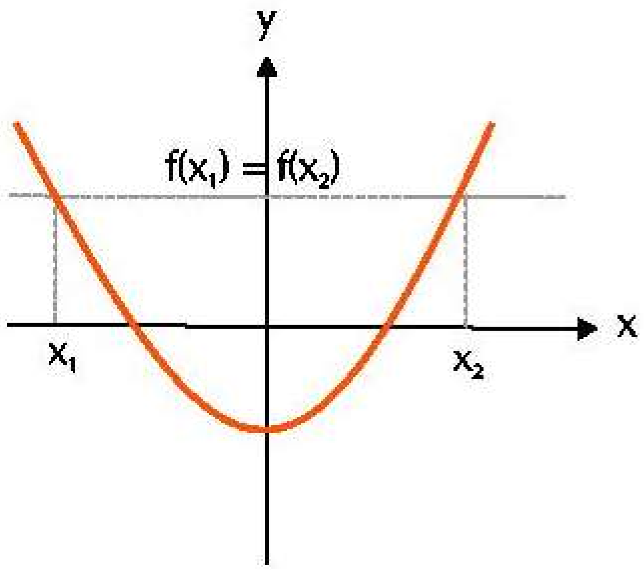
Propriedades das Funções

- **Função injetora**: se os elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas.
  – Exemplo: dada a função f : R→R, tal que f(x) = 3x.

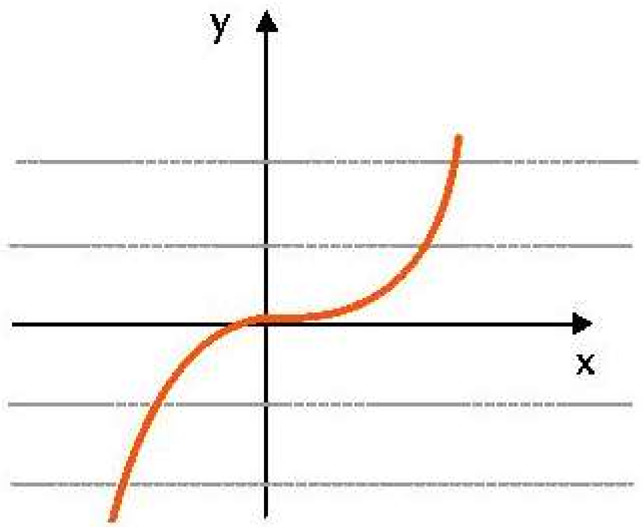


Teste da reta horizontal

Uma função é injetora se nenhuma reta horizontal interceptar seu gráfico em mais de um ponto.



Não é injetora

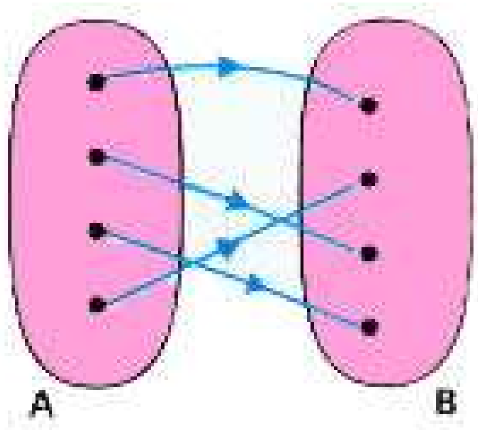


É injetora

Propriedades das Funções

- **Função bijetora**: uma função é bijetora se ela é injetora e sobrejetora.

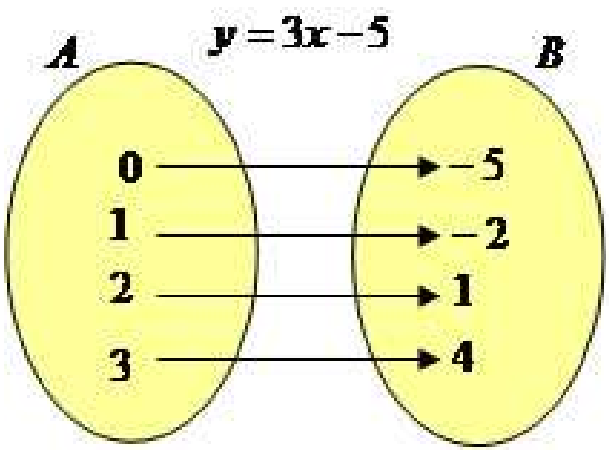
Exemplo: dada a função f : A→B, tal que f(x) = 5x + 4.

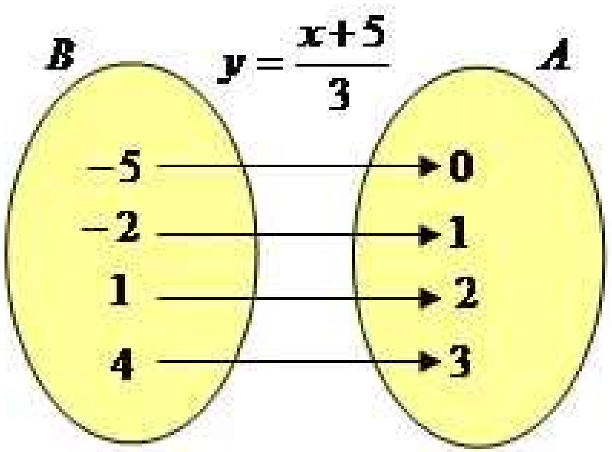


Propriedades das Funções

- **Função inversa**: uma função poderá ter inversa se ela for bijetora.

Exemplo: y = 3x-5 possui inversa y = (x+5)/3





Propriedades das Funções

- **Lei de formação da função inversa**: uma forma de encontrar a inversa de uma função bijetora.

  1º: inverte y por x e x por y.

  2º: isola o novo y

  3º: esse novo y é a inversa

Propriedades das Funções

- **Exemplo: calcule a inversa de** $\boldsymbol{y = \frac{x-1}{x+2}}$ *quando x for seu numero.*

Propriedades das Funções

- **Exemplo: calcule a inversa de** $\boldsymbol{y = \frac{x-1}{x+2}}$ ***quando x for seu numero.***

1º: $x = \dfrac{y-1}{y+2}$

2º: $x(y+2) = y-1$

$x.y + 2x = y - 1$

$x.y - y = -2x - 1$

$y(x-1) = -2x - 1$

$y = \frac{-2x-1}{x-1}$

3º: $f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-1}$

$\log_a(a^x) = x \; para \; todo \; x \in R$
$a^{\log_a x} = x \; para \; todo \; x > 0$

$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$

Propriedades das Funções

- **Exemplo: calcule a inversa de $\boldsymbol{y = 2^x}$**