Lista 4 Álgebra Linear

nome: William Cardoso Barbosa

1. Considere os vetores $x1 = (2, 1)$ e $x2 = (6, 3)$ em $\mathbb{R}^2$.
    a. Determine o comprimento (módulo) de cada vetor.
        i. para $x1 = (2, 1)$

        $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

        $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2}$

        $|\vec{v}| = \sqrt{5}$

        ii. para $x1 = (6, 3)$

        $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

        $|\vec{v}| = \sqrt{6^2 + 3^2}$

        $|\vec{v}| = \sqrt{36 + 9}$

        $|\vec{v}| = \sqrt{45} => \sqrt{3.3.5} => 3\sqrt{5}$

    b. Seja $x3 = x1 + x2$. Determine o comprimento de $x3$. Compare este comprimento com a soma dos comprimentos $x1$ e $x2$

    $x3 = (2, 1) + (6, 3) => (8, 4)$

    Comprimeneto

    $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

    $|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 4^2}$

    $|\vec{v}| = \sqrt{64 + 16}$

    $|\vec{v}| = \sqrt{80} => \sqrt{2.2.2.2.5} => 4\sqrt{5}$

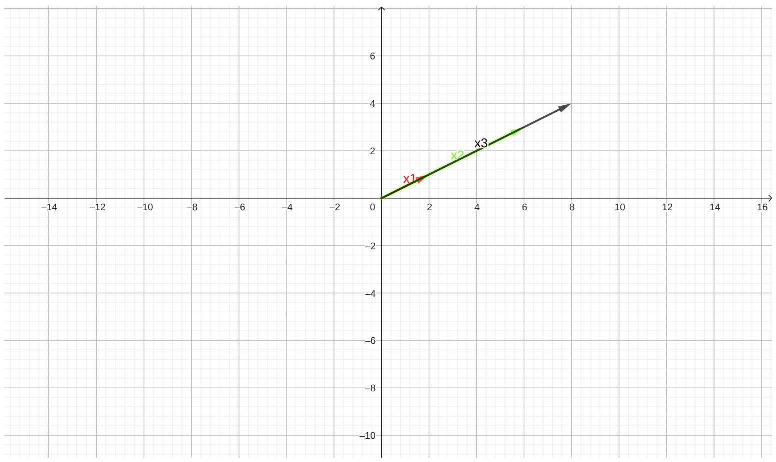
    Comparação

    $x1 + x2 => \sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

    logo

$$x1 + x2 = x3$$

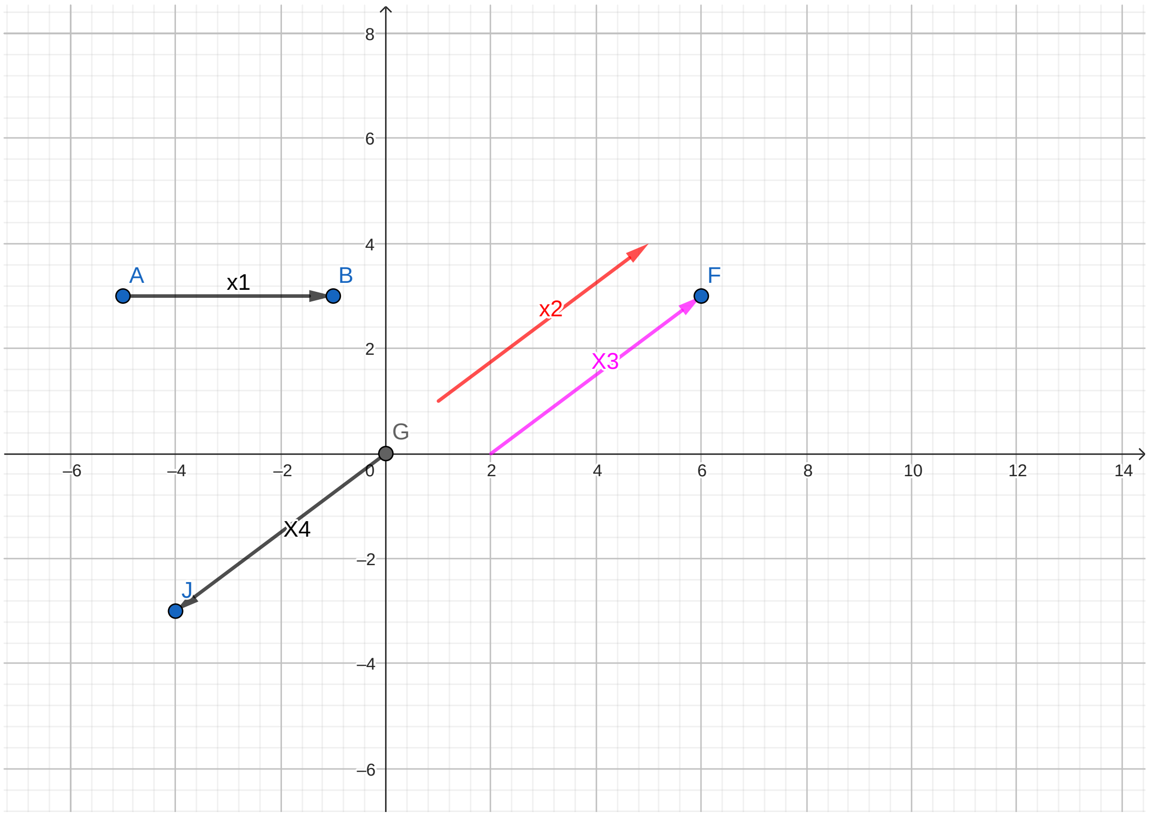
c. Trace o gráfico ilustrando como $x3$ poder ser construído geometricamente usando $x1$ e $x2$. Use este gráfico para dar uma interpretação geométrica à sua resposta na parte (b).



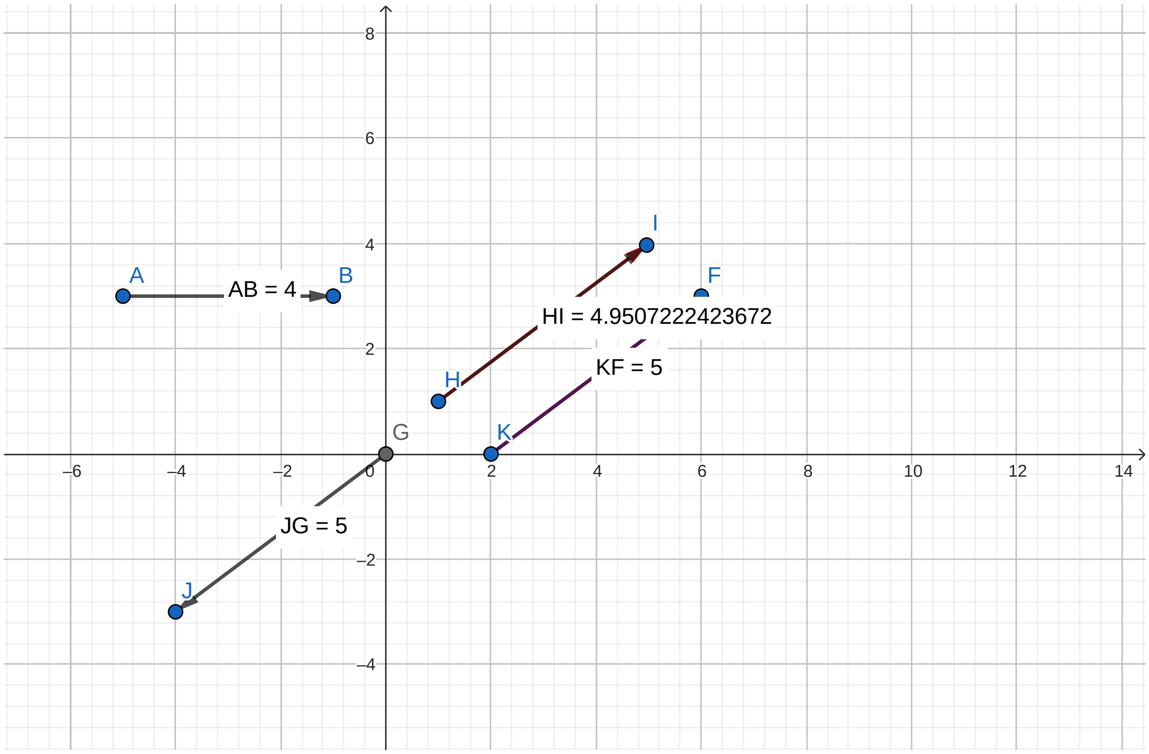
2. Dados os vetores abaixo em $\mathbb{R}^2$, identifique os vetores que apresentam mesmo comprimento (módulo), direção e sentido. Para isso, utilize o Geogebra para traçar os vetores no espaço $\mathbb{R}^2$.

   a) O vetor $x1$ é representado pelo segmento orientado de (-5, 3) a (-1, 3).
   b) O vetor $x2$ é representado pelo segmento orientado de (1, 1) a (5, 4).
   c) O vetor $x3$ é representado pelo segmento orientado de (2, 0) a (6, 3).
   d) O vetor $x4$ é representado pelo segmento orientado da origem a (-4, -3).

   REPRESENTAÇÃO



COMPARAÇÕES DE MÓDULO



conclusões

x3 e x4 possuem o mesmo módulo.

x2 e x3 possuem mesma direção e sentido, mas módulos diferentes.

3. Dado o vetores $x1$ = (2, 1) em $\mathbb{R}^2$, explique a relação entre o vetor x1 e os vetores abaixo:
   a. $x2$ = (− 2, − 1)
      i. $|\vec{x}2| = -|\vec{x}1|$ a relação é de oposição.
   b. $x3 = (6, 3)$
      i. $|\vec{x}3| = (2, 1).3 => (6, 3)$ o vetor x3 é 3 -multiplicador escalar- vezes o vetor x1.
   c. $x4 = (-4, -2)$
      i. $|\vec{x}4| = (-4, -2)$ O vetor x4 enquadra-se na mesma situação do anterior, com o escalar igual a -2.

4. Mostre que $V = \mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial real. Considere as operações usuais, ou seja, $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$, com $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$.

   PROVANDO TODAS AS PROPRIEDADES

   1. u + v = (x1,x2) + (y1,y2) = (x1+y1, x2 + y2)
   2. u = (x1,x2), v = (y1, y2)
   3. u + [v + w] =

      (x1, x2) + [(y1, y2) + (z1, z2)]

      $= (x1, x2) + (y1 + z1, y2 + z2)$
      $= (x1 + [y1 + z1], x2 + [y2 + z2])$
      $= ([x1 + y1] + z1,[x2 + y2] + z2)$
      $= (x1 + y1, x2 + y2) + (z1, z2)$
      $= [(x1, x2) + (y1, y2)] + (z1, z2)$
      $= [u + v] + w$

   d. e = (0,0)

   $u + e = (x1, x2) + (0, 0)$
   $= (x1 + 0, x2 + 0)$
   $= (x1, x2) = u$

   e. -u = (-x1, -x2)

   $u + (-u) = (x1, x2) + (-x1, -x2)$
   $= (x1-x1, x2 - x2)$
   = (0, 0)
   = e

   f. $\alpha[\beta u] = \alpha[\beta(x1, x2)]$
   $= \alpha(\beta x1, \beta x2)$
   $= (\alpha[\beta x1],\alpha[\beta x2])$
   $= ([\alpha\beta]x1, [\alpha\beta]x2)$
   $= [\alpha\beta](x1, x2)$

   $= [\alpha\beta]$u

g.

$[\alpha + \beta]u = [\alpha + \beta](x1, x2)$
$= ([\alpha + \beta]x1,[\alpha + \beta]x2)$
$= (\alpha x1 + \beta x1, \alpha x2 + \beta x2)$
$= (\alpha x1, \alpha x2) + (\beta x1, \beta x2)$
$= \alpha(x1, x2) + \beta(x1, x2)$
$= \alpha u + \beta u$

h.

$\alpha[u + v] = \alpha[(x1, x2) + (y1, y2)]$
$= \alpha(x1 + y1, x2 + y2)$
$= (\alpha[x1 + y1], \alpha[x2 + y2])$
$= (\alpha x1 + \alpha y1, \alpha x2 + \alpha y2)$
$= (\alpha x1, \alpha x2) + (\alpha y1, \alpha y2)$
$= \alpha(x1, x2) + \alpha(y1, y2)$
$= \alpha u + \alpha v$

i.

$1u = 1(x1, x2)$
$= (1x1, 1x2)$
$= (x1, x2)$
= u

todas as propriedades foram provadas e confirmadas , logo o conjunto V é um espaço vetorial real.

5) Mostre que $S = \{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Demonstrarei que:

i. Para quais quer $u\ v,\ u + v$ está contido em R

i. $u = (x, 2x), v = (y, 2y)$

ii. (y+x, 2x+2y)

iii. (y+x, 2(x+y))

iv. x + y = p

v. (p, 2p) ⇒ provado

ii. $k.u$ pertence a R

i. k = 2, u = (x, 2x)

ii. 2(x, 2x)

iii. (2x, 4x)

6) Em cada caso, escreva o vetor v como combinação linear dos vetores dados.

a. Em ℝ² , v = (1, 3), v1 = (1, 2) e v2 = (−1, 1).

ℝ² , v = (1, 3), v1 = (1, 2) e v2 = (−1, 1).

$V = av1 \ + bv2$

$V = a(1, 2) + b(-1, 1)$

$V = (a, 2a) + (-b, b)$

$V = (a - b, 2a + b)$

$(1, 3) = (a - b, 2a + b)$

$1 = a - b => \ \ - b = 1 - a(-1) => \ b = 1 + a$

$a = 2/3$

$b = 5/3$

b. Em ℝ² , v = (1, 3), v1 = (0, 0) e v2 = (3, 9).

$ℝ², v = (1, 3), v1 = (0, 0)ev2 = (3, 9).$

$V = av1 \ + bv2$

$V = a(0, 0) + b(3, 9)$

$V = (0, \ 0) + (3b, 9b)$

$V = (3b, 9b)$

$(1, 3) = (3b, 9b)$

$1 = 3b => \quad => b = 1/3$

$3 = 9b => b = 1/3$

$a = 0$

$b = 1/3$

c. Em ℝ² , v = (1, 5), v1 = (1, 3) e v2 = (1, −2)

$\mathbb{R}^2, v = (1, 5), v1 = (1, 3) ev2 = (1, -2)$

$V = av1 \ + bv2$

$V = a(1, 3) \ + b(1, -2)$

$V = (a, 3a) + (b, -2b)$

$V = (a + b, 3a - 2b)$

$(1, 5) \ = (a + b, 3a - 2b)$

$1 = a + b => b = 1 - a$

$5 = 3a - 2b => 3a - 2(1 - a) => 3a - 2 + 2a = 5 => 5a = 7 => a = 7/5$

$a = 7/5$

$b = 12/5$

d. Em ℝ² , v = (4, 1), v1 = (1, 2) e v2 = (3, −1)

$\mathbb{R}^2, v = (4, 1), v1 = (1, 2) ev2 = (3, -1)$

$V = av1 \ + bv2$

$V = a(1, 2) \ + b(3, -1)$

$V = (a, 2a) + (3b, -b)$

$V = (a + 3b, 2a - b)$

$(4, 1) \ = (a + 3b, 2a - b)$

$4 = a + 3b => a = 4 - 3b$

$1 = 2a - b => 1 = 2(4 - 3b) - b => 1 = 8 - 3b\ - b => -7 = -4b => b = 7/4$

$a = -5/4$

$b = 7/4$

e. ℝ³ , v = (2, 1, 4), v1 = (1, 0, 0), v2 = (1, 1, 0) e v3 = (1, 1, 1)

$\mathbb{R}^3, v = (2,1,4), v1 = (1,0,0), v2 = (1,1,0)ev3 = (1,1,1)$

$V = av1\ + bv2 + cv3$

$V = a\ (1,0,0)\ + b(1,1,0) + c(1,1,1)$

$V = (a,0,0) + (b,b,0) +\ (c,c,c)$

$V = (a + b + c, b + c, c)$

$(2,1,4) = (a + b + c, b + c, c)$

$2 = a + b + c\ =>\ 2 = a - 3 + 4 => a = -2 + 3 - 4 => a = -3$

$1 = b + c => 1 - 4 = b => b = -3$

$4 = c$

$a = -3$

$b = -3$

$c = 4$

7) Determine o subespaço S, do espaço V, gerado pelos vetores de A, em cada caso.

a) V = ℝ² e A = {(0, 1), (0, −2)}

V = ℝ² e A = {(0, 1), (0, −2)}

(a, b) = x(0, 1) + y(0, -2)

a = x

b = -2y => b / -2 = y

(a, b) = a(0, 1) + b/-2(0, -2)

S= $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2$ / $a = x$ e $b = -3y\}$

b) $V = \mathbb{R}^2$ e $A = \{(1, 1), (7, 7)\}$.

$V = \mathbb{R}^2$ e $A = \{(1, 1), (7, 7)\}$.

$(a, b) = x(1, 1) + y(7,7)$

$(a, b) = (x, x) + (7y, 7y)$

$a = x + 7y$

$b = x + 7y$

S= $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2$ / $a = b\}$

c) $V = \mathbb{R}^2$ e $A = \{(1,2), (2, 1)\}$.

$V = \mathbb{R}^2$ e $A = \{(1,2), (2, 1)\}$.

$(a, b) = x(1, 2) + y(2,1)$

$(a, b) = (x, 2x) + (2y, y)$

$a = x + 2y$

$b = 2x + y$

S= $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2$ / $a = b\}$

d) $V = \mathbb{R}^3$ e $A = \{(1, 2, 1), (2, 1, -2)\}$

$V = \mathbb{R}^3$ e $A = \{(1, 2, 1), (2, 1, -2)\}$

$(a, b, c) = x(1, 2, 1) + y(2, 1, -2)$

$(a, b, c) = (x, 2x, 2x) + (2y, y, -2y)$

$(a, b, c) = (x+2y, 2x+y, 2x-2y)$

$a = x+2y$

$b = 2x+y$

$c = 2x-2y$

S= $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ / $a = x+2y$, $b = 2x+y$ e $c = 2x-2y$ $\}$

e) $V = \mathbb{R}^3$ e $A = \{(1, 2, 0), (3, 0, 1)\}$.

$V = \mathbb{R}^3$ e $A = \{(1, 2, 0), (3, 0, 1)\}$.

(a, b, c) = x(1, 2, 0) + y (3, 0, 1)

(a, b, c) = (x, 2x, 0) + (3y, 0, y)

(a, b, c) = (x+3y, 2x, y)

a = x + 3y

b = 2x

c = y

S= {(a, b, c) $\in \mathbb{R}^3$ / a = x + 3y , b = 2x e c = y }