ESTUDO DAS CÔNICAS

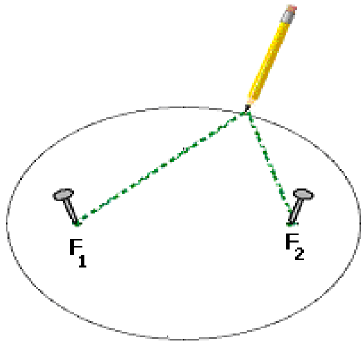
Revisão do "Terceirão" – Professor Veloso.

A – Estudo da Elipse

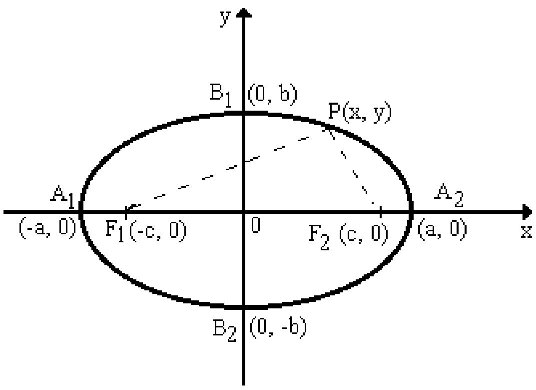
1 – Definição

Dados dois pontos fixos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ de um plano, tais que a distância entre estes pontos seja igual a $\mathbf{2c > 0}$, denomina-se **elipse**, à curva plana cuja soma das distâncias de cada um de seus pontos P até estes pontos fixos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ é igual a um valor constante **2a**, onde a > c. Ou seja, $\mathbf{PF_1 + PF_2 = 2a}$.

Os pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ são denominados **focos** e a distância F_1F_2 é conhecida como **distância focal** da elipse.



Elementos de uma Elipse:



- **Focos**: os pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$
- **Centro**: o ponto **O**, que é o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$
- **Vértices**: os pontos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_1}$ e $\mathbf{B_2}$
- **Eixo maior**: $\overline{A_1A_2}$, cuja medida é **2a**
- **Eixo menor**: $\overline{B_1B_2}$, cuja medida é **2b**
- **Distância focal**: F_1F_2 = **2c**

2 – Equação reduzida da elipse de eixo maior horizontal e centro na origem

2.1 – Relação métrica entre os elementos da elipse

Seja uma elipse de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, sendo **2a** a medida do eixo maior e **2b** a medida do eixo menor, como vimos anteriormente.

Consideremos um ponto $P(x, y)$ da elipse:

1) Sabemos, por definição, que $PF_1 + PF_2 = 2a$

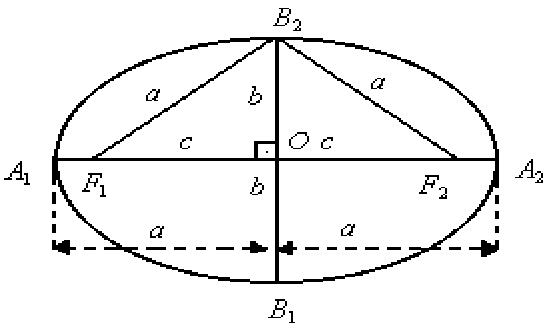
2) Em particular, $B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$

3) Como $B_2F_1 = B_2F_2$, pois a reta $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ é mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$

4) Podemos escrever, por exemplo (substituindo 3 em 2), $B_2F_1 + B_2F_1 = 2a \Rightarrow 2B_2F_1 = 2a \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathbf{B_2F_1 = a}$ *(Podemos escrever também que* $\boldsymbol{B_2F_2 = a}$*)*

5) Considerando que F_1OB_2 ou F_2OB_2 são triângulos retângulos, podemos escrever $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$.



2.2 – Equação da elipse

1) Usando a fórmula da distância entre dois pontos, podemos escrever:

$\mathbf{PF_1 + PF_2 = 2a} \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$

Observe que $x - (-c) = x + c$.

2) Elevando ao quadrado ambos os membros da expressão, temos:

$$(x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2$$

3) Desenvolvendo a expressão acima, fazendo $\mathbf{a^2 - c^2 = b^2}$, e simplificando, chegaremos a

$\mathbf{b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2}$

4) Dividindo ambos os membros por $\mathbf{a^2b^2}$ teremos, finalmente:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Que é a **equação reduzida da elipse** de eixo maior horizontal e centro na origem (0,0).

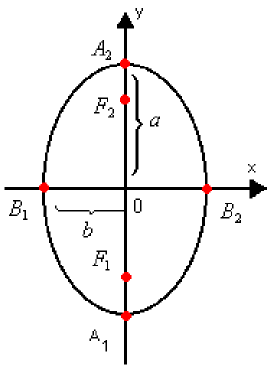
Observação: Como a elipse tem o **eixo maior** contido em **Ox**, o denominador de $\mathbf{x^2}$ é maior que o denominador de $\mathbf{y^2}$.

3 – Equação reduzida da elipse de eixo maior vertical e centro na origem

Nesse caso, os focos serão os pontos $\mathbf{F_1(0, -c)}$ e $\mathbf{F_2(0, c)}$.

Um ponto **P(x, y)** qualquer da elipse deve obedecer à condição: $\mathbf{PF_1 + PF_2 = 2a} \Rightarrow$ (Procedimento análogo ao caso anterior) $\Rightarrow$

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$



Observação: Como a elipse tem o ***eixo maior*** contido em **Oy**, o denominador de $\mathbf{y^2}$ é maior que o denominador de $\mathbf{x^2}$.

4 – Excentricidade da Elipse

O quociente $\frac{c}{a}$ é conhecido como **excentricidade** da elipse, sendo indicado por **e**.

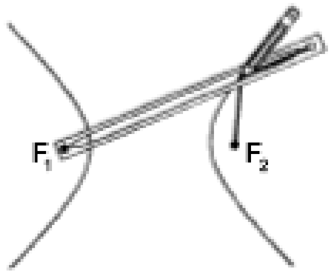
Como, por definição, **a > c**, podemos afirmar que a excentricidade **e**, de uma elipse, é um número positivo menor que 1. Ou seja, $\mathbf{0 < e < 1}$.

B – Estudo da Hipérbole

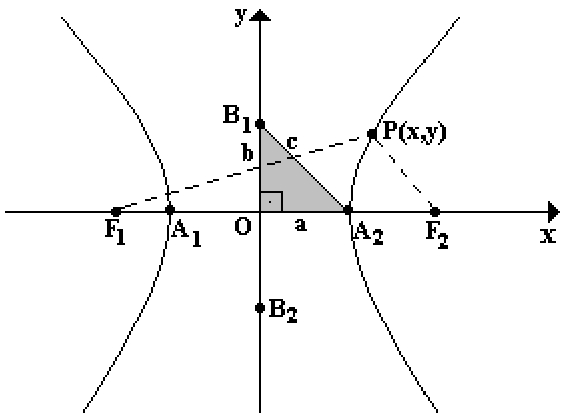
1 – Definição

Dados dois pontos fixos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ de um plano $\boldsymbol{\alpha}$, tais que a distância entre eles seja igual a $\mathbf{F_1F_2 = 2c > 0}$, denomina-se **hipérbole** ao conjunto formado por todos os pontos **P** do plano $\boldsymbol{\alpha}$ para os quais o módulo da diferença das distâncias de F_1 e F_2 é constante e menor que $\mathbf{F_1F_2}$. Ou seja, $\mathbf{|PF_1 - PF_2| = 2a}$, onde **a** é constante (a < c).

Assim, temos por definição $|PF_1 - PF_2| = 2a$



Elementos de uma Hipérbole:



- Os pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ são denominados **focos** da Hipérbole
- A distância $\mathbf{F_1F_2 = 2c}$ **é** conhecida como **distância focal** da Hipérbole
- O ponto médio **O**, do segmento $\overline{F_1F_2}$, é o **centro** da Hipérbole
- Pelo ponto **O** traçamos a reta perpendicular a $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ e assinalamos os pontos $\mathbf{B_1}$ e $\mathbf{B_2}$, tais que $OB_1 = OB_2$, sendo $B_1B_2 = 2b$
- O segmento $\overline{A_1A_2}$ é denominado **eixo real** (ou **transverso**) e sua medida é **2a**
- O segmento $\overline{B_1B_2}$ é denominado **eixo imaginário** (ou **conjugado**) e sua medida é **2b**
- $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

2 – Equação reduzida da hipérbole de eixo maior na horizontal e centro na origem

Seja **P(x, y)** um ponto qualquer de uma hipérbole e sejam $\mathbf{F_1(c,0)}$ e $\mathbf{F_2(-c,0)}$ os seus focos. Sendo **2a** o valor constante com a < c, como vimos acima, podemos escrever:
$\mathbf{|PF_1 - PF_2| = 2a}$

1) Usando a fórmula da distância entre dois pontos, podemos escrever:

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=\pm 2a$$

Observe que x – (-c) = x + c.

2) Elevando ao quadrado ambos os membros da expressão, temos:

$$(x-c)^2+y^2-(x+c)^2-y^2+2\sqrt{(x-c)^2+y^2}.\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2$$

3) Desenvolvendo a expressão acima, fazendo $\mathbf{b^2 = c^2 - a^2}$, e simplificando, chegaremos a:

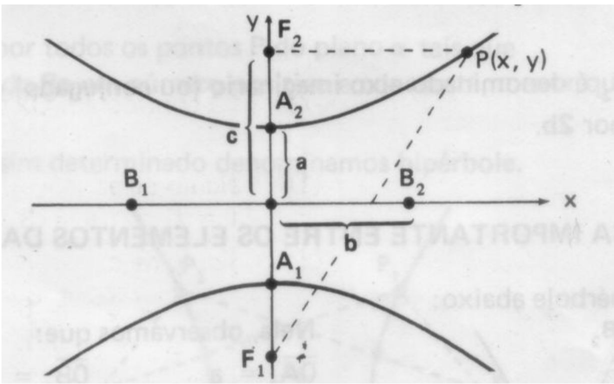
$$\mathbf{b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2}$$

4) Dividindo ambos os membros por $\mathbf{a^2b^2}$ teremos, finalmente:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Observação: Como a hipérbole tem o **eixo maior** contido em **Ox**, o denominador de $\mathbf{x^2}$ é maior que o denominador de $\mathbf{y^2}$.

3 – Equação reduzida da hipérbole de eixo maior na vertical e centro na origem



Se o eixo transverso ou eixo real (A_1A_2) da hipérbole estiver em Oy, a equação da hipérbole de centro na origem (0,0) passa a ser:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Observação: Como a hipérbole tem o ***eixo maior*** contido em **Oy**, o denominador de $\mathbf{y^2}$ é maior que o denominador de $\mathbf{x^2}$.

4 – Excentricidade da Hipérbole

O quociente $\frac{c}{a}$ é conhecido como **excentricidade** da hipérbole, sendo indicado por **e**.

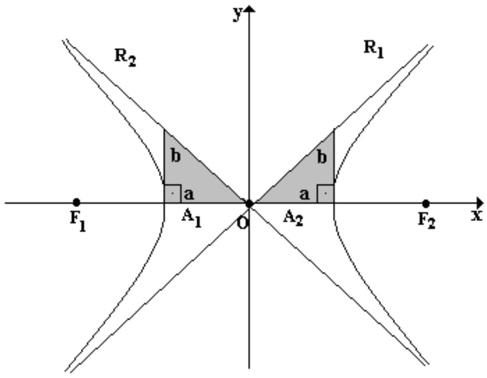
Como, por definição, **a < c**, podemos afirmar que a excentricidade **e**, de uma hipérbole, é um número maior que 1. Ou seja, **e > 1**.

5 – Assíntotas da Hipérbole

Prova-se que as assíntotas, são as retas de equações:

$\mathbf{r_1}$: $y = \frac{b}{a}x$

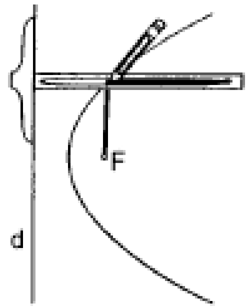
$\mathbf{r_2}$: $y = -\frac{b}{a}x$



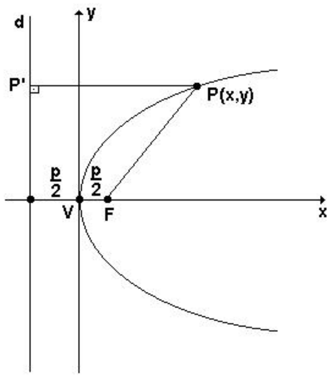
B – Estudo da Parábola

1 – Definição

Denomina-se Parábola o conjunto de todos os pontos de um plano que são equidistantes de uma reta dada e de um ponto fixo (não pertencente à reta) deste plano.



Considere no plano cartesiano xOy, uma reta **d** (diretriz) e um ponto fixo **F** pertencente ao eixo das abscissas, conforme figura abaixo:



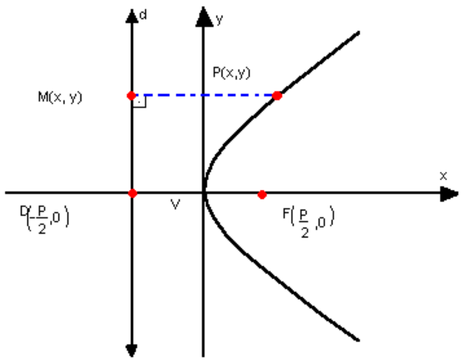
Elementos de uma Parábola:

- O ponto **F** é denominado **foco** da parábola
- A reta **d** é denominada **diretriz** da parábola
- A distância do ponto **F** à reta **d** é denominada **parâmetro** da parábola, representado por **p**
- O ponto **V** da parábola**,** tal que VF = $\frac{p}{2}$, é denominado **vértice** da parábola
- A reta $\overleftrightarrow{VF}$ é denominada **eixo de simetria** da parábola

2 – Equação reduzida da parábola

2.1 – Equação reduzida da parábola de eixo de simetria horizontal e vértice na origem

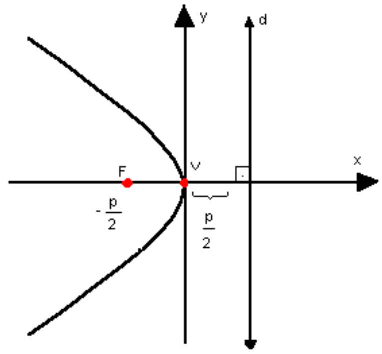
1º Caso: Concavidade para a direita



Foco: F($\frac{p}{2}$, 0) **Diretriz:** $x + \frac{p}{2} = 0$

Equação da Parábola: $y^2 = 2px$

1º Caso: Concavidade para a esquerda

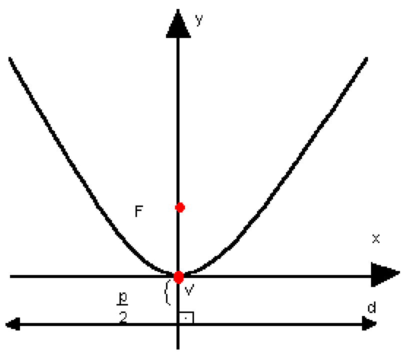


Foco: F($-\frac{p}{2}$, 0) **Diretriz:** $x - \frac{p}{2} = 0$

Equação da Parábola: $y^2 = -2px$

2.2 – Equação reduzida da parábola de eixo de simetria vertical e vértice na origem

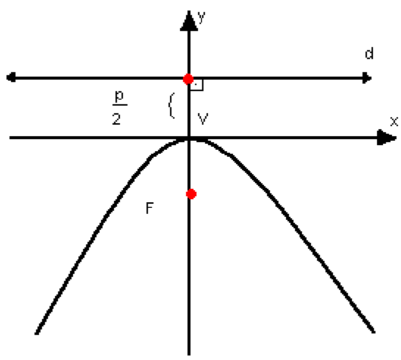
1º Caso: Concavidade para cima



Foco: F(0, $\frac{p}{2}$) **Diretriz:** $y + \frac{p}{2} = 0$

Equação da Parábola: $x^2 = 2py$

1º Caso: Concavidade para baixo



Foco: F($-\frac{p}{2}$, 0) **Diretriz:** $x - \frac{p}{2} = 0$

Equação da Parábola: $x^2 = -2py$

EXERCÍCIOS – *Resolver todos os exercícios da Lista nº 4.*