DACC Departamento Acadêmico de Ciência da Computação

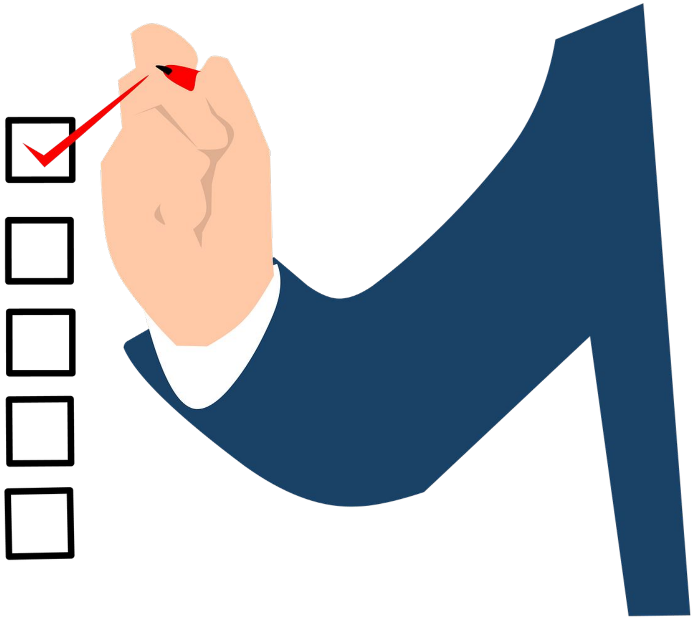
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA

Álgebra Linear

Professor:
Me. Lucas Marques da Cunha
lucas.marques@unir.br

Roteiro

1. Álgebra matricial
    a. Regras algébricas
    b. Matriz identidade
    c. Matriz inversa
2. Matrizes elementares
    a. Fatoração triangular
3. Matrizes particionadas
4. Exercícios práticos



Álgebra matricial

- As regras usadas para números reais **podem ou não funcionar** quando se usam matrizes.
- Por exemplo, se **a** e **b** são números reais então:
    - **a + b = b + a** e **a*b = b*a**
- Substituindo a e b por matrizes A e B, temos:
    - A + B = B + A (para matrizes quadradas)
    - $A*B \neq B*A$
  - A multiplicação de matrizes **não é comutativa**.

Álgebra matricial

- **Teorema:** Cada um dos enunciados é válido para quaisquer escalares α e β e para quaisquer matrizes A, B e C para as quais as operações indicadas são definidas.

1. $A + B = B + A$

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$

3. $(AB)C = A(BC)$

4. $A(B + C) = AB + AC$

5. $(A + B)C = AC + BC$

6. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

7. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

9. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Álgebra matricial

- **Exemplo:**
  - Dadas as matrizes A, B e C, verifique que A(BC) = (AB)C e A(B + C) = AB + AC.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra matricial

- **Exemplo:**
  - Dadas as matrizes A, B e C, verifique que A(BC) = (AB)C e A(B + C) = AB + AC.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2*1+1*2 & 2*0+1*1 \\ -3*1+2*2 & -3*0+2*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 4*1+1*2 & 1*1+2*2 \\ 3*4+4*1 & 3*1+4*2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 16 & 11 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1*2+2*-3 & 1*1+2*2 \\ 3*2+4*-3 & 3*1+4*2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} -4*1+5*2 & -4*0+5*1 \\ -6*1+11*2 & -6*0+11*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 16 & 11 \end{pmatrix}$$

Álgebra matricial

- **Exercícios:** Dadas as matrizes A, B e C, verifique que:
  a. A(B + C) = AB + AC
  b. α(A + B) = αA + αB

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra matricial

- **Matriz Identidade**
  - A matriz identidade n x n e matriz I = ($\boldsymbol{\delta}_{ij}$), onde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ se \ i = j \\ 0 \ se \ i \neq j \end{cases}$$

- A matriz identidade age como uma **identidade** para a multiplicação de matrizes:
  - **I*A = A*I = A**

Álgebra matricial

- **Matriz Identidade - Exemplo**
  - Verificar **I*A = A*I = A** no caso n = 3.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\2 & 6 & 3\\0 & 1 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\2 & 6 & 3\\0 & 1 & 8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\2 & 6 & 3\\0 & 1 & 8\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\2 & 6 & 3\\0 & 1 & 8\end{pmatrix}$$

Álgebra matricial

- **Matriz inversa**
  - Diz-se que um número real ***a*** tem um **inverso multiplicativo** se existe um número ***b*** tal que ***a*b = 1***.
  - Qualquer número não nulo ***a*** **tem um inverso multiplicativo** ***b = 1/a***.

Álgebra matricial

- Uma matriz *A n x n* é dita **não singular** ou **inversível** se existe uma matriz B tal que *AB* = *BA* = *I*. A matriz é dita o **inverso multiplicativo** de A.
- Se B e C são ambas inversos multiplicativos de A, então:
  - B = B * I = B*(A*C) = (B*A)*C = I*C = C

Álgebra matricial

- As matrizes A e B são inversas uma da outra, pois:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \; e \; B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chamamos o inverso multiplicativo de uma matriz não singular A simplesmente como inversa de A e denotamos por A^{-1}.

Álgebra matricial

- A matriz A não tem inversa. Considerando B é qualquer matriz 2x2, então:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ e \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{14} \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

- Portanto ***B*A*** não pode ser igual a ***I***.
- Uma matriz n x n é dita **singular** se não tem um inverso multiplicativo.

Método para Cálculo da Inversa

Exemplo Nicholson, pag. 39:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

Encontre a inversa da matriz A. Para isso, considere que a matriz inversa de A é

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Calcule AC, iguale a I e resolva os sistemas lineares resultantes para descobrir os valores de a, b, c, d.

Método para Cálculo da Inversa

Solução: $AC = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+7c & 3b+7d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Isso nos permite montar dois sistemas: $\begin{cases} a+2c=1 \\ 3a+7c=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} b+2d=0 \\ 3b+7d=1 \end{cases}$

Para resolvê-los, usamos o escalonamento sobre as matrizes aumentadas:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{array}\right] \text{ e } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

Observe que fazemos duas vezes o mesmo escalonamento (buscando colocar a matriz A na forma escalonada reduzida). Em uma destas vezes montamos a matriz aumentada com o vetor $[1\ \ 0]^t$ (para encontrar o vetor $[a\ \ c]^t$) e na outra vez com o vetor $[0\ \ 1]^t$ (para encontrar o vetor $[b\ \ c]^t$).

Álgebra matricial

- **Regras Algébricas para Transpostas.**
  - Há quatro regras algébricas básicas envolvendo **transpostas**.
    1. $(A^T)^T = A$
    2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
    3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
    4. $(AB)^T = B^T A^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercícios

1. Considere as matrizes A e C abaixo. Mostre que a matriz C é inversa da matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Mostre que a matriz A abaixo não possui inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Dada a matriz A, determine $A^{-1} + A^{T} - I_2$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrizes elementares

- Se iniciarmos com a matriz identidade I e realizarmos exatamente uma operação elementar sobre linhas, a matriz resultante é chamada de **matriz elementar**.
- Há três tipos de matrizes elementares, correspondendo aos três tipos de operações elementares sobre linhas.

Matrizes elementares

- **Tipo I:**
- Uma matriz elementar do tipo I é uma matriz obtida **intercambiando** duas linhas de ***I***.

$$E_I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_I A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$AE_I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matrizes elementares

- **Tipo II:**
- Uma matriz elementar do tipo II é uma matriz obtida **multiplicando-se** uma linha de ***I*** por uma constante não nula.

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AE_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & 3a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{33} \end{pmatrix}$$

Matrizes elementares

- **Tipo III:**
- Uma matriz elementar do tipo III é uma matriz obtida de ***I*** pela **adição** do múltiplo de uma linha para outra linha.

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3A = \begin{pmatrix} a_{11} + 3a_{31} & a_{12} + 3a_{32} & a_{13} + 3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$AE_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{11} + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{21} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{31} + a_{33} \end{pmatrix}$$

Matrizes diagonais e triangulares

- Uma matriz é n x n ***A*** é dita **triangular superior** se $a_{ij} = 0$ para $i > j$ e;
- **triangular inferior** se $a_{ij} = 0$ para $i < j$.
- Também, ***A*** é dita **triangular** se é triangular superior ou inferior.
- Por exemplo, as matrizes 3x3:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizes diagonais e triangulares

- Para um sistema linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ estar na **forma estritamente triangular**, a matriz de coeficientes **A** deve ser **triangular superior com elementos diagonais não nulos**.

- Uma matriz A, n x n é **diagonal** se $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Por exemplo, as matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fatoração triangular

- Se uma matriz A, n x n, pode ser reduzida à forma estritamente triangular superior usando somente a **operação sobre linhas (III)**, então é possível representar o processos de redução em termos de uma **fatoração matricial**.
- **Por exemplo:** Seja A, uma matriz 3x3, vamos utilizar apenas a operação elementar III para obter a sua forma estritamente triangular.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Fatoração triangular

- Para eliminar os elementos A_{21} e A_{31}, faremos:
- L2 = L2 - (l_{21}* L1) e L3 = L3 - (l_{31}* L1), para l_{21} = A_{21}/pivô e l_{31} =A_{31}/pivô. Assim, teremos: l_{21} = ½ e l_{31} = 2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

Fatoração triangular

- Para eliminar o elementos A_{32}, faremos:
- L3 = L3 - (l_{32}* L2), para $l_{32} = A_{32}$/pivô. Assim, teremos: l_{32} = -3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Fatoração triangular

- Chamaremos de **L** a matriz contendo os valores dos multiplicadores ***l***:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{32} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior unitária

- Chamaremos de **U** a matriz triangular superior resultante:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Fatoração triangular

- A fatoração de uma matriz A no produto de uma matriz triangular inferior **L** e uma matriz estritamente triangular superior **U** é chamada *fatoração **LU***.

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} = A$$

Fatoração triangular

- As três operações sobre linhas aplicadas à matriz A podem ser representadas como multiplicações por **matrizes elementares**.

$$E_3E_2E_1A = U$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Fatoração triangular

- Quando as inversas são multiplicadas nessa ordem, os multiplicadores l_{21}, l_{21}, l_{32} ficam abaixo da diagonal do produto.

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U$$

$$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = L$$

Fatoração triangular

- Se uma matriz A, n x n, pode ser reduzida à forma triangular superior estrita usando-se somente a operação sobre linhas III, então A tem uma **fatoração LU**.
- A matriz L é **triangular inferior unitária** e, se i > j, então l_{ij} é o múltiplo da linha j subtraído da linha i durante o processo de redução.

Matrizes particionadas

- As matrizes podem ser **subdivididas em blocos**, por exemplo a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- pode ser dividida em quatro submatrizes, A_{11}, A_{12}, A_{21} e A_{22},

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} 5 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right].$$

Matrizes particionadas

- Com relação à soma, duas matrizes podem ser somadas por blocos **se os blocos correspondentes nas matrizes forem do mesmo tamanho.**
- Seja A uma matriz m × p e B uma matriz p × n. Podemos particionar A e B em blocos e expressar o produto em termos de submatrizes de A e B. Considere os seguintes casos:
- **Caso 1:**

Se $B = [\,B_1\ B_2\,]$, onde B_1 é uma matriz $p \times t$ e B_2 é uma matriz $p \times (n-t)$, então

$$AB = A[\,B_1\ B_2\,] = [\,AB_1\ AB_2\,].$$

Matrizes particionadas

- **Caso 2:**

Se $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, onde A_1 é uma matriz $t \times p$ e A_2 é uma matriz $(m-t) \times p$, então

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \end{bmatrix}.$$

- **Caso 3:**

Se $A = [\, A_1 \; A_2 \,]$, onde A_1 é uma matriz $m \times t$ e A_2 é uma matriz $m \times (p-t)$ e $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, onde B_1 é uma matriz $t \times n$ e B_2 é uma matriz $(p-t) \times n$, então

$$AB = [\, A_1 \; A_2 \,] \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = A_1 B_1 + A_2 B_2.$$

Matrizes particionadas

- **Caso 4:**

Sejam as matrizes A e B particionadas em blocos como segue:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} t & p-t \end{array} & \end{array} \quad , \quad B = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} t \\ p-t \end{array} \\ \begin{array}{cc} s & n-s \end{array} & \end{array}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

Matrizes particionadas

- **Exemplo: Sejam A e B duas matrizes particionadas, calcule A*B**

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad B = \left[\begin{array}{c:c} -2 & -1 \\ -3 & 4 \\ \hdashline -5 & 0 \\ 2 & -1 \end{array}\right].$$

$$AB = \left[\begin{array}{c:c} \bar{0}_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} + I_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} & \bar{0}_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} + I_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \hdashline I_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} + \bar{0}_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} & I_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \bar{0}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} -5 & 0 \\ 2 & -1 \\ \hdashline -2 & -1 \\ -3 & 4 \end{array}\right].$$

Expansão de produto Externo

- Dados dois vetores **x** e **y** em $\mathbb{R}^n$, é possível executar uma multiplicação matricial entre eles se **transpusermos um dos vetores primeiro**.
- O **produto matricial $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$** é o produto de um vetor linha e um vetor coluna.
- O resultado será uma matriz 1x1, ou simplesmente um **escalar**.
- Este tipo de produto é chamado de **produto escalar** ou **produto interno**.

Expansão de produto Externo

- O produto matricial $\mathbf{xy}^T$ é o produto de uma matriz n x 1 por uma matriz 1 x n.
- O resultado é uma matriz n x n.
- O produto $\mathbf{xy}^T$ é chamado de **produto externo** de **x** e **y**.
- A matriz produto externo tem uma estrutura especial em que cada uma de suas linhas é um múltiplo de $\mathbf{y}^T$ e cada uma de suas colunas é um múltiplo de **x**.

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \; e \; y = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{xy}^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 8 \\ 3 & 5 & 2 \\ 9 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

Expansão de produto Externo

- Exemplo:
- Dados X e Y, calcule a expansão de produto externo de $\mathbf{XY^T}$.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; e \; Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Expansão de produto Externo

- Exemplo:
- Dados X e Y, calcule a expansão de produto externo de $\mathbf{XY^T}$.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; e \; Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$XY^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercícios

1. Encontre a inversa de cada uma das seguintes matrizes e compare seus resultados com a função `inv()` no Octave:

$$a)\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Quais das matrizes seguintes são elementares? Classifique cada matriz elementar por tipo.

$$a)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad d)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercícios

3. Calcule a fatoração LU de cada uma das seguintes matrizes:

$$a)\begin{pmatrix}3 & 1\\ 9 & 5\end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 6\\ -2 & 2 & 7\end{pmatrix}$$

4. Calcule a expansão de produto externo de **XY**^{T}.

$$X = \begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix} \; e \; Y = \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

Exercícios

5. Com Octave, calcule a multiplicação dos blocos a seguir:

$$a)\ \left[\begin{array}{cc} 4 & -2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Dúvidas, sugestões?