DACC Departamento Acadêmico de Ciência da Computação

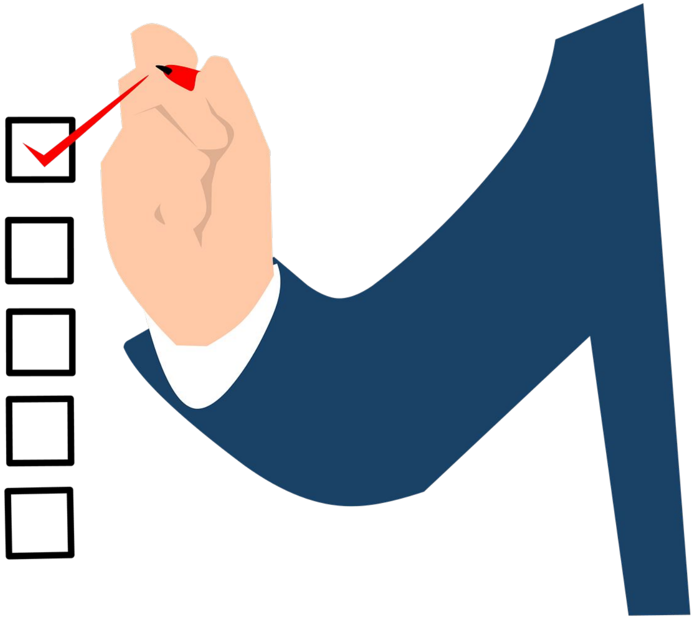
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA

Álgebra Linear

Professor:
Me. Lucas Marques da Cunha
lucas.marques@unir.br

Roteiro

1. Espaços vetoriais
   a. Definições e exemplos
   b. Subespaços
   c. Combinação Linear
2. Exercícios práticos

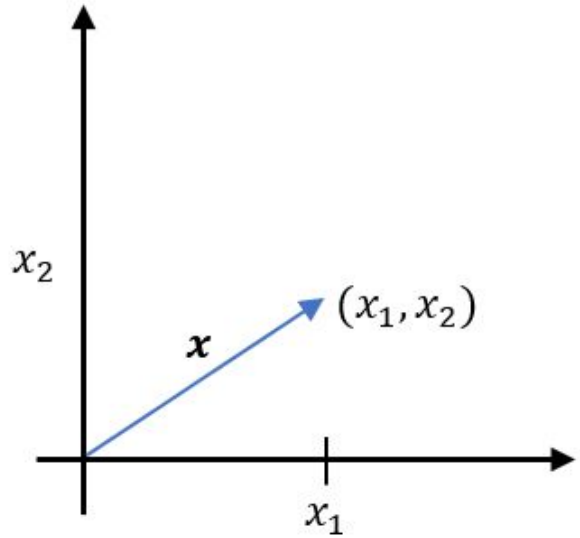


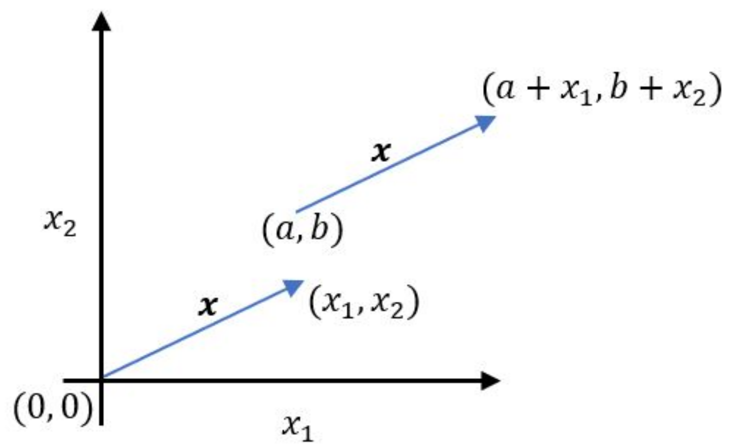
Espaços vetoriais

- **Espaços Vetoriais Euclidianos**
  - São espaços vetoriais elementares (**$\mathbb{R}^n$**) para n = 1, 2,...
  - Considerando inicialmente $\mathbb{R}^2$, vetores não nulos nesse espaço podem ser representados geometricamente por **segmentos de reta orientados**.
  - Esta representação geométrica permite visualizar como as operações de adição e multiplicação por escalar funcionam no **($\mathbb{R}^2$).**

Espaços vetoriais

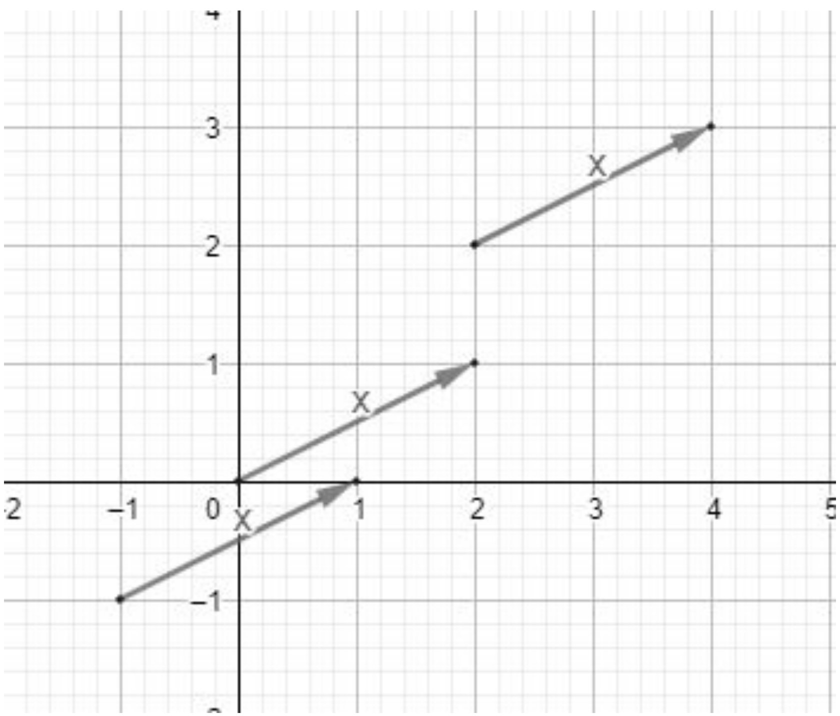
- **Espaços Vetoriais Euclidianos**
  - Dado um vetor não nulo x, podemos associá-lo ao **segmento de reta orientado** no plano de (0, 0) a (x, y).
  - Se equacionarmos segmentos de reta que têm o mesmo **comprimento, direção e sentido**, x pode ser representado **por qualquer segmento** de (a, b) a (a + x, b + y)





Espaços vetoriais

- **Espaços Vetoriais Euclidianos**
  - **Por exemplo**: O vetor $x = (2, 1)^T$ em $\mathbb{R}^2$ pode ser representado também pelo segmento orientado de (2, 2) a (4, 3) ou de (-1, -1) a (1, 0).



GeoGebra

Espaços vetoriais

- **Espaços Vetoriais Euclidianos**
  - O comprimento euclidiano de um vetor $x = [x_1; x_2]$ como comprimento de qualquer segmento representando x.
  - O comprimento do segmento (0, 0) a (x_1, x_2) é $\sqrt{\mathbf{x_1^2 + x_2^2}}$.
  - Portanto, o comprimento do segmento (0,0) a (1,2) é:
  - $\sqrt{\mathbf{1^2 + 2^2}} = \sqrt{\mathbf{5}} = \mathbf{2{,}2}$

GeoGebra

Espaços vetoriais

- **Espaços Vetoriais Euclidianos**
  - Para cada vetor x = [x_1; x_2] e cada escalar α, o produto αx é definido como:

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$$

  - **Por exemplo**:

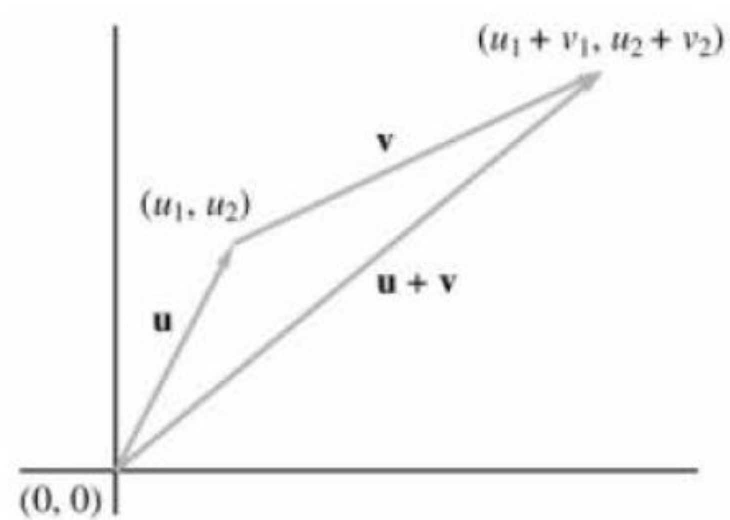
$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, então - x = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, 3x = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, -2x = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

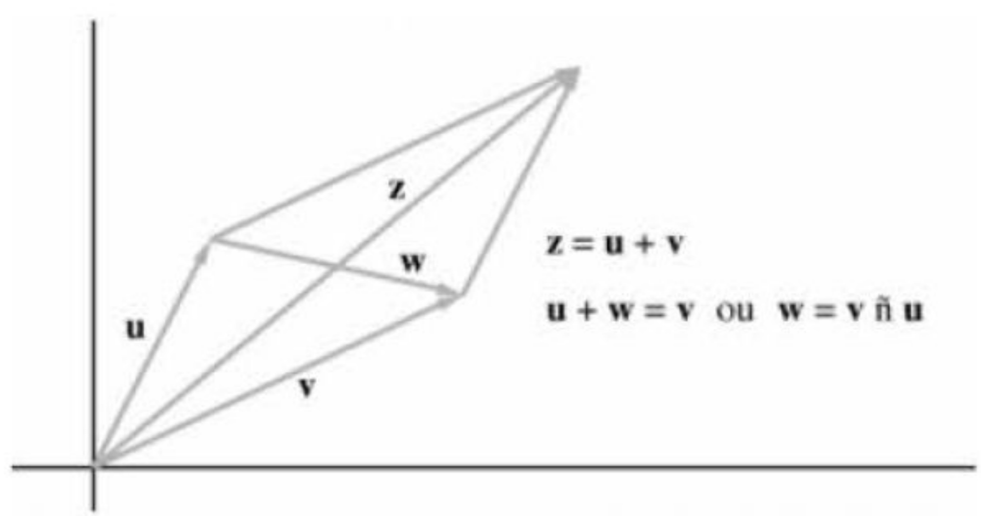
Espaços vetoriais

- **Espaços Vetoriais Euclidianos**
  - A soma de dois vetores u e v:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} e\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ é } definida\ por:$$

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$





Espaços vetoriais

- **Espaços Vetoriais Euclidianos**
  - Em geral, a multiplicação por escalar e adição em $\mathbb{R}^n$ são definidas, respectivamente por:

$$\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} e \; x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$para\ quaisquer\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\ e\ qualquer\ escalar\ \boldsymbol{\alpha}.$$

Espaços vetoriais

- **Definição:**
- Um *espaço vetorial real* é um conjunto ***V***, não vazio, com duas operações: soma, $V \times V \to V$, e multiplicação por escalar, $\mathbb{R} \times V \to V$, tais que, para quaisquer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$ e a, b $\in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades sejam satisfeitas:

Espaços vetoriais

- **Propriedades:**
  - Adição
    - i) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ - associativa
    - ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ - comutativa
    - iii) existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = u$
      - **0** é o vetor nulo
    - iv) Existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
  - Multiplicação
    - v) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$, a escalar
    - vi) $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$, a, b escalares
    - vii) $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$
    - viii) $1.\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Espaços vetoriais

- O **conjunto V** refere-se ao **conjunto universal** para o espaço vetorial.
- O termo **escalar** é usado para se referir a um número real, embora em certos casos possa se referir a números complexos.
- O termo **espaço vetorial** é usado para indicar que o conjunto de escalares é o conjunto de números reais.

Espaços vetoriais

Também podem ver $\mathbb{R}^n$ como um conjunto de todas as matrizes n x 1 com elementos reais.

A adição e a multiplicação por escalar de vetores no $\mathbb{R}^n$ é simplesmente a adição e multiplicação por escalar de matrizes.

Espaços vetoriais

- **Propriedade de fechamento de duas operações.**
  - Estas propriedades podem ser resumidas em:
    - 1ª) Se $x \in V$ e α é um escalar, então $\alpha x \in V$;
    - 2ª) Se $x, y \in V$, então $x + y \in V$;
  - **Exemplo**: Seja $W = \{(a, 1) \mid a \text{ real}\}$. Com adição e multiplicação por escalar definidas na forma usual. Os elementos (3, 1) e (5, 1) estão em W, mas a soma:
    - $(3, 1) + (5, 1) = (8, 2)$
    - **Não é um elemento de W.**

Espaços vetoriais

- Designamos por *vetor* um elemento do espaço vetorial
- **Exemplo:** V = M(2, 2) é o conjunto de matrizes 2x2
  - V é um espaço vetorial
    - Todas as propriedades anteriores são satisfeitas se a adição é entendida como a adição de matrizes; e a multiplicação por um escalar for a forma padrão de matrizes

Espaços vetoriais

- **Exemplo:** V = M(2, 2) - Prova

Axioma 1: (u + v) + w = u + (v + w)

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (u_{11}+v_{11}) & (u_{12}+v_{12}) \\ (u_{21}+v_{21}) & (u_{22}+v_{22}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (u_{11}+v_{11})+w_{11} & (u_{12}+v_{12})+w_{12} \\ (u_{21}+v_{21})+w_{21} & (u_{22}+v_{22})+w_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}+(v_{11}+w_{11}) & u_{12}+(v_{12}+w_{12}) \\ u_{21}+(v_{21}+w_{21}) & u_{22}+(v_{22}+w_{22}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{11}+w_{11}) & (v_{12}+w_{12}) \\ (v_{21}+w_{21}) & (v_{22}+w_{22}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}\right) = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$$

Espaços vetoriais

- **Exemplo:** V = M(2, 2) - Prova

Axioma 2: u + v = v + u

Operação vetorial genérica

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

Interpretação concreta

Espaços vetoriais

- **Exemplo:** V = M(2, 2) - Prova

Axioma 3: Existe um elemento **0** em V, chamado um vetor nulo para V, tal que **u** + **0** = **u** para todo **u** em V.

$$\text{Seja } \mathbf{0} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Então,}$$

$$\forall\, \mathbf{u} \in V,\quad \mathbf{u} + \mathbf{0} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Espaços vetoriais

- **Exemplo:** V = M(2, 2) - Prova

Axioma 4: Para todo **u** em V, há um objeto –**u** em V, chamado um oposto ou negativo ou simétrico de **u**, tal que **u** + (-**u**) = **0**

$$\text{Seja } -\mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}. \text{ Então,}$$

$$\forall \mathbf{u} \in V, \quad \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} + (-u_{11}) & u_{12} + (-u_{12}) \\ u_{21} + (-u_{21}) & u_{22} + (-u_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} - u_{11} & u_{12} - u_{12} \\ u_{21} - u_{21} & u_{22} - u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Espaços vetoriais

- **Exemplo:** V = M(2, 2) - Prova

Axioma 5: $k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

$$k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= k\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(u_{11}+v_{11}) & k(u_{12}+v_{12}) \\ k(u_{21}+v_{21}) & k(u_{22}+v_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k\,u_{11}+k\,v_{11} & k\,u_{12}+k\,v_{12} \\ k\,u_{21}+k\,v_{21} & k\,u_{22}+k\,v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\,u_{11} & k\,u_{12} \\ k\,u_{21} & k\,u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k\,v_{11} & k\,v_{12} \\ k\,v_{21} & k\,v_{22} \end{bmatrix} = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

Espaços vetoriais

- **Exemplo:** V = M(2, 2) - Prova

Axioma 6: $(k + l)\,\mathbf{u} = k\,\mathbf{u} + l\,\mathbf{u}$

$$(k+l)\mathbf{u} = (k+l)\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (k+l)u_{11} & (k+l)u_{12} \\ (k+l)u_{21} & (k+l)u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\,u_{11} + l\,u_{11} & k\,u_{12} + l\,u_{12} \\ k\,u_{21} + l\,u_{21} & k\,u_{22} + l\,u_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k\,u_{11} & k\,u_{12} \\ k\,u_{21} & k\,u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l\,u_{11} & l\,u_{12} \\ l\,u_{21} & l\,u_{22} \end{bmatrix} = k\,\mathbf{u} + l\,\mathbf{u}$$

- **Exemplo:** V = M(2, 2) - Prova

Axioma 7: $k(l\,\mathbf{u}) = (k\,l)\,(\mathbf{u})$

$$k(l\,\mathbf{u}) = k\left(l\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= k\begin{bmatrix} l\,u_{11} & l\,u_{12} \\ l\,u_{21} & l\,u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\,l\,u_{11} & k\,l\,u_{12} \\ k\,l\,u_{21} & k\,l\,u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k\,l)u_{11} & (k\,l)u_{12} \\ (k\,l)u_{21} & (k\,l)u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (k\,l)\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = (k\,l)\mathbf{u}$$

Espaços vetoriais

- **Exemplo:** V = M(2, 2) - Prova

Axioma 8: 1**u** = **u**

$$1\mathbf{u} = 1\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1u_{11} & 1u_{12} \\ 1u_{21} & 1u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Espaços vetoriais

- **Contra-Exemplo:** Um conjunto que **não** é um espaço vetorial:
  - Seja $\mathbf{u} = (u1, v1)$ e $\mathbf{v} = (u2, v2)$
  - Seja $V = R^2$ e adição e multiplicação definidas como:
    - $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u1 + u2, v1 + v2)$
    - $k.\mathbf{u} = (ku1, 0)$
  - Nesse caso, o axioma 8 não vale, pois:
    - $1\mathbf{u} = 1(u1, v1) = (u1, 0) \neq \mathbf{u}$
  - Logo V não é um espaço vetorial

Propriedades adicionais

1. **$0x = O$, onde O é o vetor nulo.**
2. **$x + y = O$ implica que $y = -x$ (isto é, a inversa aditiva é única)**
3. **$(-1)x = -x$**

Exercícios

1. Considere os vetores $x_1 = (8, 6)^T$ e $x_2 = (4, -1)^T$ em $\mathbb{R}^2$:
   a. Determine o comprimento de cada vetor.
   b. Seja $x_3 = x_1 + x_2$. Determine o comprimento de x_3. Compare este comprimento com a soma dos comprimentos de x_1 e x_2.
   c. Trace um gráfico ilustrando como x_3 pode ser construído geometricamente usando x_1 e x_2. Use esse gráfico para dar uma interpretação geométrica à sua resposta na parte (b).

Subespaços vetoriais

- **Definição:** Dado um espaço vetorial V, um subconjunto *W*, não vazio, será um subespaço vetorial de *V* se:
  - i) Para quaisquer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in W$, tivermos $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$
  - ii) Para quaisquer $a \in \mathrm{R}$, $\mathbf{u} \in W$, tivermos $a\mathbf{u} \in W$

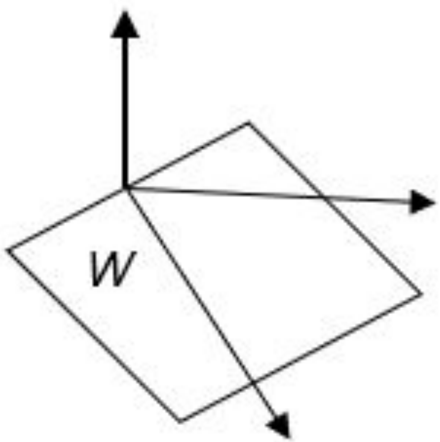
- **Observações:**
  - 1) Ao operarmos em *W* (soma e multiplicação por escalar) não obteremos um vetor fora de *W*
    - Isso é suficiente para afirmar que *W* é ele mesmo um espaço vetorial, pois assim as operações ficam bem definidas
    - Assim, não precisamos verificar novamente as propriedades (i) a (viii) de espaço vetorial porque elas são válidas em V, que contém *W*

Subespaços vetoriais

- **Observações:**
  - 2) Qualquer subespaço *W* de *V* precisa necessariamente conter o vetor nulo (por causa da condição (ii) da definição quando a = 0)
  - 3) Todo espaço vetorial admite, pelo menos, dois subespaços (que são chamados de subespaços triviais):
    - O conjunto formado apenas pelo vetor nulo
    - O próprio espaço vetorial

Subespaços vetoriais

- **Exemplo 1:** $V = \mathbb{R}^3$ e $W \subset V$, um plano passando pela origem



Observe que, se W não passasse pela origem, não seria um subespaço

Os únicos subespaços de $\mathbb{R}^3$ são a origem, as retas e planos que passam pela origem e o próprio $\mathbb{R}^3$

Subespaços vetoriais

- **Exemplo 2:** $V = R^5$ e $W = \{(0,x_2,x_3,x_4,x_5);\ x_i \in R\}$
  - Isso é, *W* é o conjunto de vetores de R^5 com a primeira coordenada nula
  - Vamos verificar as condições (i) e (ii):
  - (i):$\mathbf{u} = (0, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $\mathbf{v} = (0, y_2, y_3, y_4, y_5) \in W$

  Então: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(0, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4, x_5+y_5) \in W$
  - (ii) $k\mathbf{u} = (0, kx_2, kx_3, kx_4, kx_5) \in W$
  - Portanto, *W* é subespaço vetorial de R^5.

Subespaços vetoriais

- **Exemplo 3**: Seja $S = \{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1 = x_2\}$. O conjunto S é não vazio, já que $x = (1, 1, 0)^T \in S$. Para mostrar que S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, é preciso verificar que as duas propriedades de fechamento são válidas:

  (i) Se $x = (a, a, b)^T$ é qualquer vetor de S, então:

  $$\alpha x = (\alpha a, \alpha a, \alpha b)^T \in S$$

  (iI) Se $(a, a, b)^T$ e $(c, c, d)^T$ são elementos arbitrários de S, então:

  $$(a, a, b)^T + (c, c, d)^T = (a+c, a+c, b+d)^T \in S$$

  Como S é não vazio e satisfaz as duas condições de fechamento, segue-se que S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Subespaços vetoriais

- **Espaço Nulo de uma Matriz**
  - Seja A uma matriz n x n. Seja N(A) o conjunto de todas as soluções do sistema homogêneo $Ax = 0$. Portanto:
  - $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$
- Evidentemente, $0 \in N(A)$, logo N(A) é **não vazio**.
- Se $x \in N(A)$ e α é um escalar, então:
  - $A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha 0 = 0$
  - Portanto, $\alpha x \in N(A)$.
- Se x e y são elementos de N(A), então:
  - $A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$
  - Portanto, $x + y \in N(A)$.

Subespaços vetoriais

O conjunto de todas as soluções do sistema homogêneo $Ax = 0$ forma um subespaço $\mathbb{R}^n$. O subespaço N(A) é chamado de espaço nulo de A.

Subespaços vetoriais

- **Exemplo: Determine N(A) se** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Usando a redução de Gauss-Jordan para resolver Ax = 0:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = x_3 - x_4$$
$$x_2 = -2x_3 + x_4$$

$Logo, se\ fizermos\ x_3 = \alpha\ e\ x_4 = \beta, então:$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ -2\alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\beta} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

é $uma\ solução\ de\ Ax = 0, nos\ quais\ \alpha\ e\ \beta\ são\ escalares.$

Combinação Linear

- Sejam V um espaço vetorial real, $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ $\in V$ e a_1, a_2, ...,a_n números reais
- Então o vetor
  - $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \ldots a_n\mathbf{v_n}$
- é um elemento de V ao qual chamamos de ***combinação linear*** de $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$
  - Uma vez fixados vetores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ em V, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear desse é um subespaço vetorial
    - W é chamado de subespaço gerado por $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$
    - $W = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}]$

Combinação Linear

- **Exemplo 1:** $V = R^2$, $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$
  - Logo, $V = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}]$, pois dados $v = (x, y) \in V$, temos $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$
    - Ou seja, $\mathbf{v} = x.\mathbf{v_1} + y.\mathbf{v_2}$
- **Exemplo 2:**

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Então } [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R \right\}$$

Combinação Linear

- **Exercício:** $v = (-4,-18,7)$ é uma combinação linear de $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$? Escreva o vetor v como combinação linear dos vetores v_1 e v_2.
- **Solução**

$v = av_1 + bv_2$

$(-4,-18,7) = a(1,-3,2) + b(2,4,-1)$

$(-4,-18,7) = (a,-3a,2a) + (2b,4b,-b)$

$(-4,-18,7) = (a+2b,-3a+4b,2a-b)$

$$\begin{cases} a+2b = -4 \\ -3a+4b = -18 \\ 2a-b = 7 \end{cases}$$

Resposta:

$\mathbf{v = 2v_1 - 3\,v_2}$

Combinação Linear

- O conjunto de todas as combinações lineares de v_1, v_2, …, v_n é chamado de **cobertura** v_1, v_2, …, v_n.
- Por exemplo, o espaço nulo de A é a cobertura dos vetores $(1, -2, 1, 0)^T$ e $(-1, 1, 0, 1)^T$.

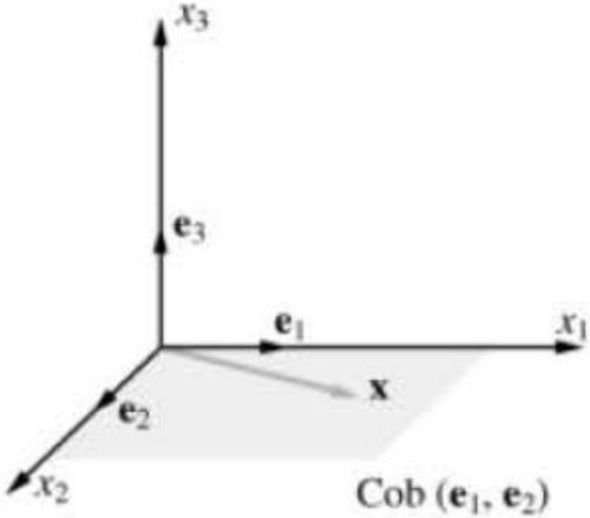
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Combinação Linear

- Em $\mathbb{R}^3$, a cobertura de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ é o conjunto de todos os vetores da forma:

$$\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

- O subespaço pode ser interpretado geometricamente como o conjunto de todos os vetores no espaço 3D que ficam no plano x_1x_2.



Combinação Linear

- **O conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto cobertura de V se e somente se todo vetor V é uma combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.**
- **Exemplo:** Quais dos seguintes são conjuntos de cobertura para $\mathbb{R}^3$?

  a) $\{e_1, e_2, e_3, (1, 2, 3)^T\}$

  b) $\{(1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T\}$

  c) $\{(1, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T\}$

  d) $\{(1, 2, 4)^T, (2, 1, 3)^T, (4, -1, 1)^T\}$

Combinação Linear

- **a) $\{e_1, e_2, e_3, (1, 2, 3)^T\}$**
  - Devemos determinar se um vetor arbitrário $(a, b, c)^T$ em $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores do conjunto.
  - Logo,
    - $(a, b, c)^T = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 + 0(1, 2, 3)^T$

Combinação Linear

- **b) $\{(1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T\}$**
  - Devemos determinar se é possível obter constantes α_1, α_2 e α_3 tais que:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  - que conduz ao sistema de equações:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= a \\ \alpha_1 + \alpha_2 \qquad &= b \\ \alpha_1 \qquad\qquad &= c \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ b - c \\ a - b \end{bmatrix}$$

  - Portanto:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (b - c) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (a - b) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Combinação Linear

- **c) $\{(1, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T\}$**
  - Devemos notar que combinações lineares de $(1, 0, 1)^T$ e $(0, 1, 0)^T$ produzem vetores da forma $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$;
  - Logo, qualquer vetor (a, b, c) em $\mathbb{R}^3$, no qual $a \neq c$, não pode estar na cobertura desses dois vetores.

Combinação Linear

- **d) $\{(1, 2, 4)^T, (2, 1, 3)^T, (4, -1, 1)^T\}$**
  - Pode ser feita da mesma forma que a letra (b):

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eliminação gaussiana

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 &= a \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= b \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= c \end{aligned} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

  - **O sistema é inconsistente!**
  - Portanto, a maioria das escolhas a, b e c, é impossível escrever $(a, b, c)^T$ como uma combinação linear do conjunto de vetores (d). Os vetores não cobrem $\mathbb{R}^3$

Exercícios

1. **Determine se os seguintes conjuntos forma subespaços do $\mathbb{R}^2$.**
   a. $\{(x_1, x_2)^T \mid x_1 + x_2 = 0\}$
   b. $\{(x_1, x_2)^T \mid x_1 x_2 = 0\}$
   c. $\{(x_1, x_2)^T \mid x_1 = 3x_2\}$
   d. $\{(x_1, x_2)^T \mid |x_1| = |x_2|\}$
   e. $\{(x_1, x_2)^T \mid x_1^2 = x_2^2\}$

Exercícios

2. Determine o espaço nulo de cada uma das seguintes matrizes

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercícios

3. Determine se os seguintes conjuntos são coberturas de $\mathbb{R}^2$.

$$a)\ \left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$b)\ \left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}\right\}$$

$$c)\ \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\}$$

Dúvidas, sugestões?