Calculo I

Continuidade e Limites parte 2

Prof. Pablo Vargas

Limite da função

- **Limites Infinitos:** consiste nos casos em que o limite em um determinado ponto resulta em $\pm\infty$.

I) **Seja $\boldsymbol{f}$** uma função definida em ambos os lados de a**,** exceto possivelmente em a. Então...

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes, tomando x suficientemente próxima de a, mas não igual a a.

Limite da função

- **Limites Infinitos:**

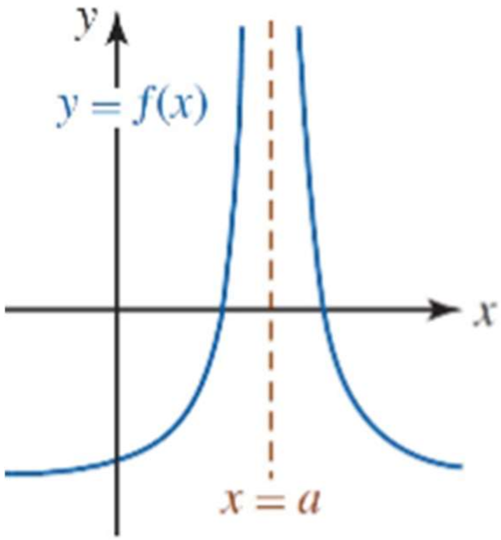
II) Seja $\boldsymbol{f}$ uma função definida em ambos os lados de a**,** exceto possivelmente em a. Então...

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

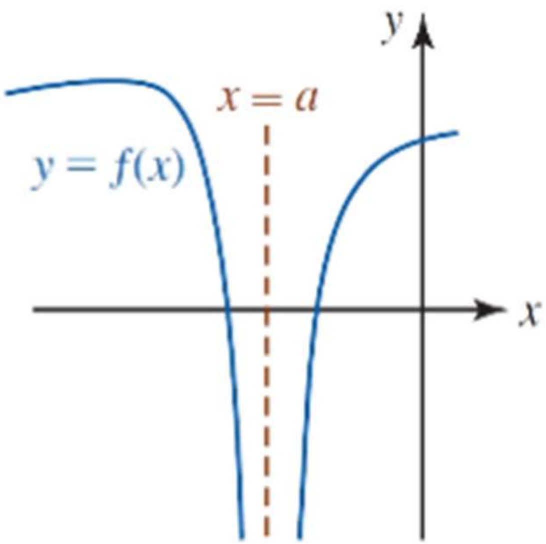
significa que os valores de $f(x)$ podem ser arbitrariamente grandes, porém negativos, escolhendo-se os valores de x próximos de a, mas não igual a a.

Limite da função

- **Limites Infinitos:**



$a)\ \lim_{x \to a} f(x) = \infty$



$b)\ \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Limite da função

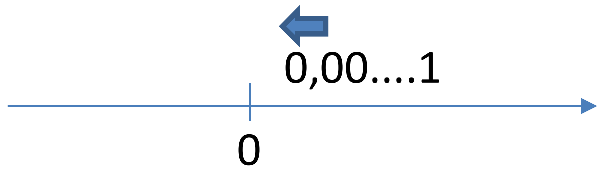
- **Operações com $\pm\infty$:** considerando $n \in N^*$ e c sendo uma constante.

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$	$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$
$(+\infty)^n=+\infty$	$(+\infty)(-\infty)=-\infty$
se n par então $(-\infty)^n=+\infty$	se n ímpar então $(-\infty)^n=-\infty$
$+\infty+c=+\infty$	$-\infty+c=-\infty$
se $c>1$ então $c^{+\infty}=+\infty$	se $c>1$ então $c^{-\infty}=0$
se $0<c<1$ então $c^{+\infty}=0$	se $0<c<1$ então $c^{-\infty}=+\infty$
$\dfrac{c}{\pm\infty}=0$	

Limites Infinitos

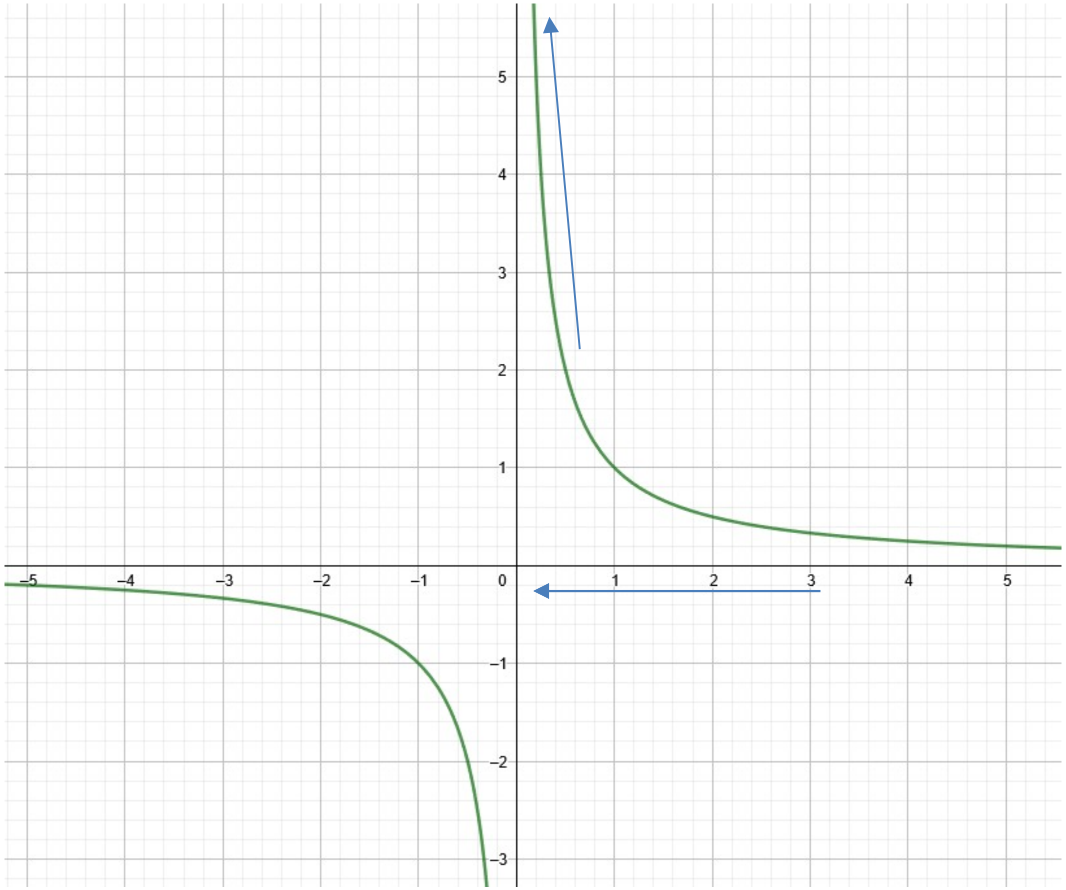
- **Exemplo 1**: A função $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$ está definida para todo $x \neq 0$. Quando x se aproxima de 0 pela direita , o denominador também se aproxima de 0, permanecendo sempre positivo; logo, a função cresce acima de qualquer número.
  - Dizemos que ela tende para ∞ $(\text{ou } +\infty)$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{0{,}00\ldots 1} = \infty$$



Limites Infinitos

- **Exemplo 1**: $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$



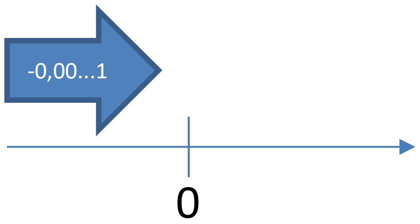
Limites Infinitos

- **Exemplo 1**: ao contrário, se $x \to 0^{-}$, a função tende a -∞.
  - Dizemos que ela tende para -∞:

$$\lim_{x\to 0^{-}} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^{-}} \frac{1}{-0{,}00\ldots1} = -\infty$$

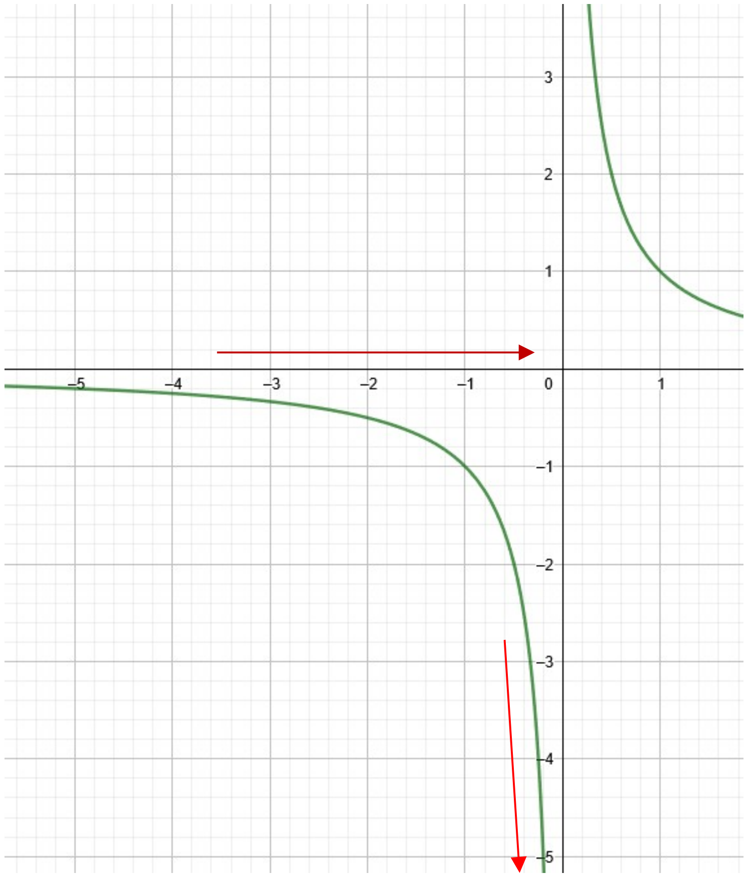
Portanto,

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{x} = \pm\infty$$



Limites Infinitos

- **Exemplo 1:** $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



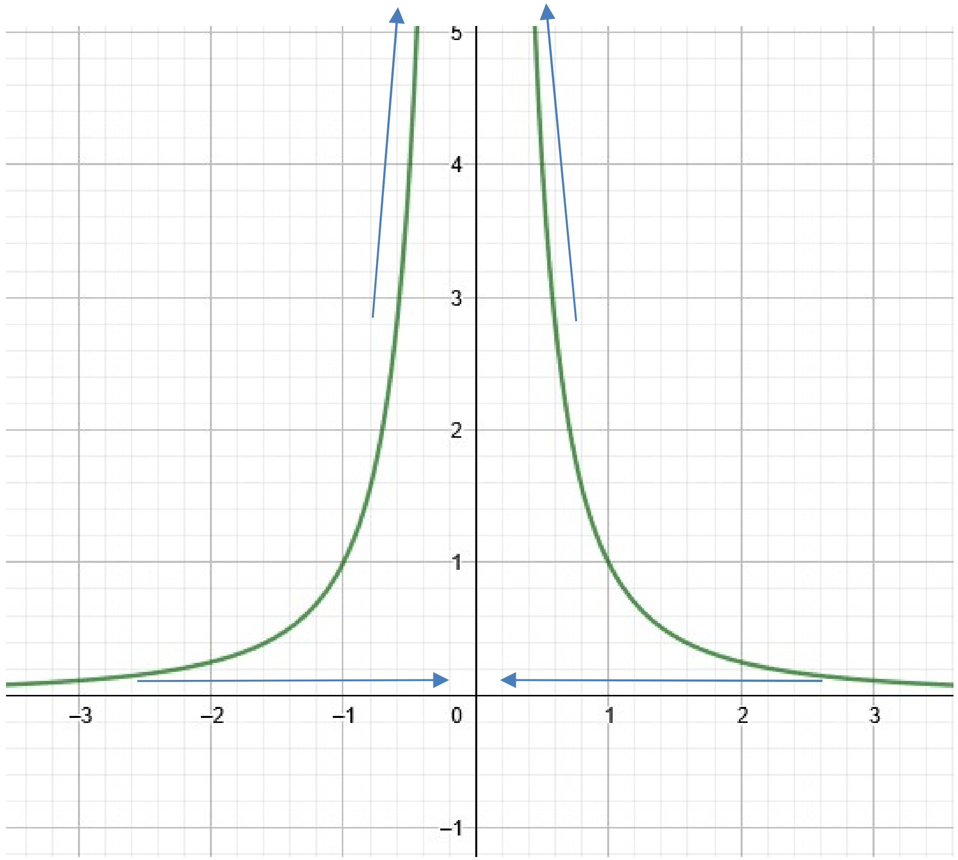
Limites Infinitos

- **Exemplo 2**: em relação a $\boldsymbol{y = \frac{1}{x^2}}$, com o tender de x a 0, seja pela direita ou esquerda, o denominador, sempre positivo, tende a 0 e a função tende a infinito positivo.

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{1}{x^2} = \infty$$

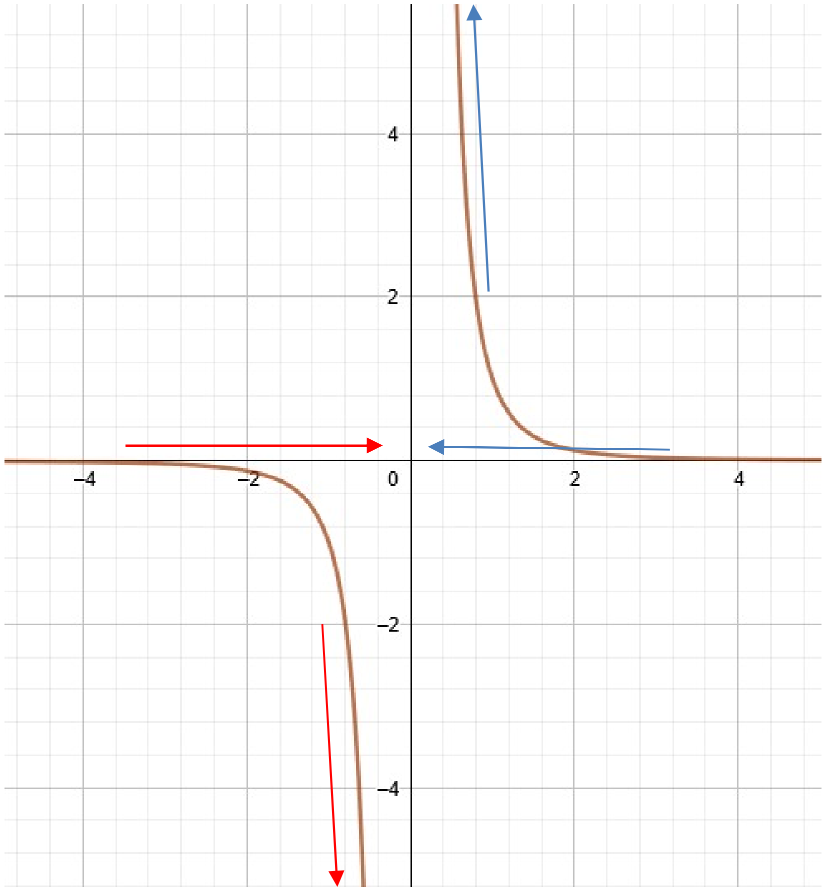
Limites Infinitos

- **Exemplo 2:** $\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{1}{x^2} = \infty$



Limites Infinitos

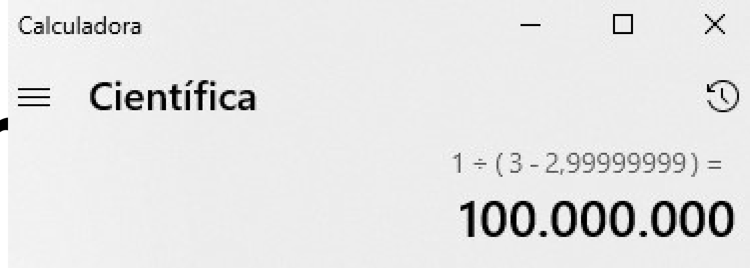
- **Exemplo 3:** $\lim_{x \to 0^{\pm}} \dfrac{1}{x^3} = \pm\infty$



Limites Infi

- **Exemplo 4**: Qual o valor de $\lim_{x \to 3^{\pm}} \frac{1}{3-x}$?
  - Observe que quando $x \to 3^{+}$ o denominador será negativo.
  - Imagine um número vindo da direita tão próximo de 3 (ex: 3,00...001). A subtração no denominador terá um número bem próximo de 0 com valor negativo.
    - $\lim_{x \to 3^{+}} \frac{1}{-0{,}00\ldots001}$
  - Ou seja, um número inteiro positivo dividido por um número bem próximo de 0 com valor negativo, demonstra que a função tende a $-\infty$.

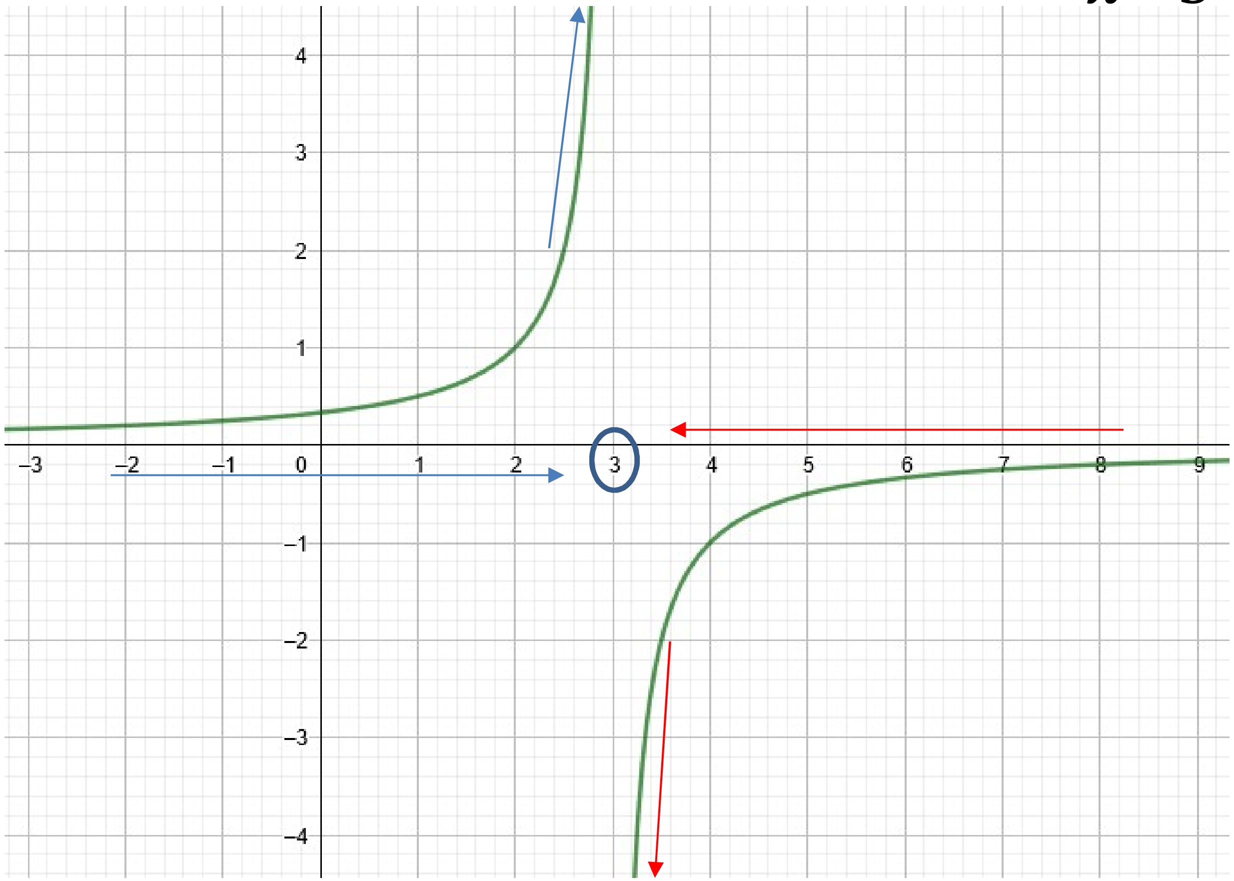
Limites Infir



- **Exemplo 4**: Qual o valor de $\lim_{x \to 3^{\pm}} \frac{1}{3-x}$?
  - Observe que quando $x \to 3^{-}$ o denominador será positivo.
  - Imaginem um número vindo da esquerda tão próximo de 3 (ex: 2,99...999). A subtração no denominador terá um número bem próximo de 0 com valor positivo.
    - $\lim_{x \to 3^{-}} \frac{1}{0{,}00\ldots001}$
  - Ou seja, um número inteiro positivo dividido por um número bem próximo de 0, demonstra que a função tende a ∞.

Limites Infinitos

- **Exemplo 4**: Qual o valor de $\lim\limits_{x \to 3^{\pm}} \frac{1}{3-x}$?

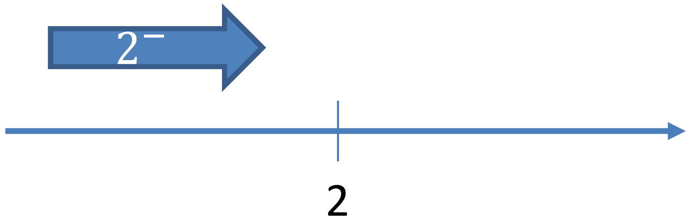


$$\lim_{x \to 3^{\pm}} \frac{1}{3 - x} = \mp\infty$$

Exercícios

- Determine:

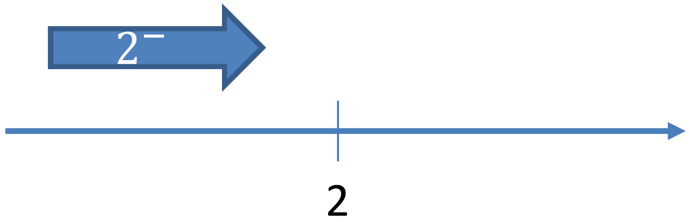
$$a)\ \lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x-2}$$



Exercícios

- Determine:

$$a)\ \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2}$$



$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1{,}99\ldots 99}{1{,}99\ldots 99-2} = \frac{1{,}99999}{-0{,}00\ldots 001}=-\infty$$

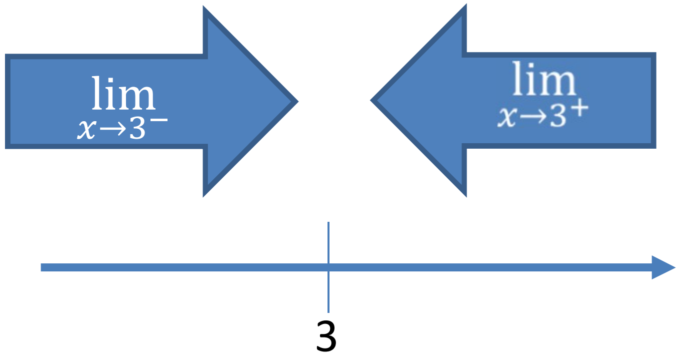
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2{,}00\ldots 1}{2{,}00\ldots 1-2} = \frac{2{,}00\ldots 1}{0{,}00\ldots 001}=\infty$$

$$\lim_{x\to 2^\mp} \frac{x}{x-2} = \mp\infty$$

Exercícios

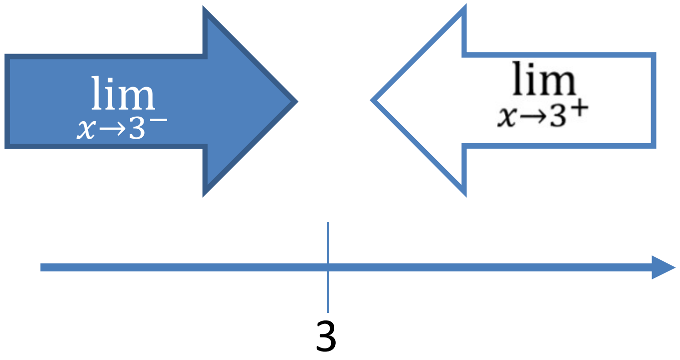
- Determine

$$b)\ \lim_{x\to 3^{\pm}} \frac{2}{(x-3)^2}$$



Exercícios

- Determine



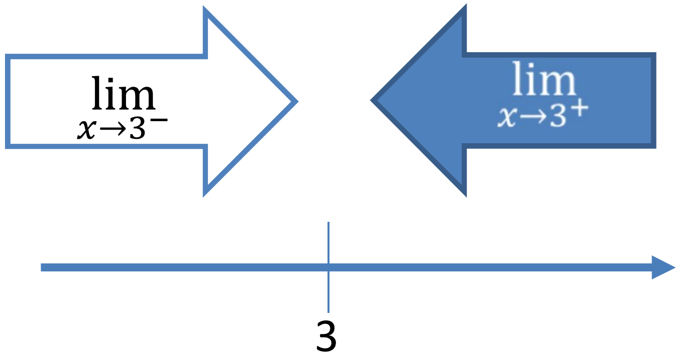
$$b)\ \lim_{x \to 3^{\pm}} \frac{2}{(x-3)^2}$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2}{(2{,}99999-3)^2} = \lim_{x \to 3^-} \frac{2}{(-0{,}00001)^2} =$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2}{0{,}000000001} = \infty$$

Exercícios

- Determine



$$b)\ \lim_{x\to 3^{\pm}} \frac{2}{(x-3)^2}$$

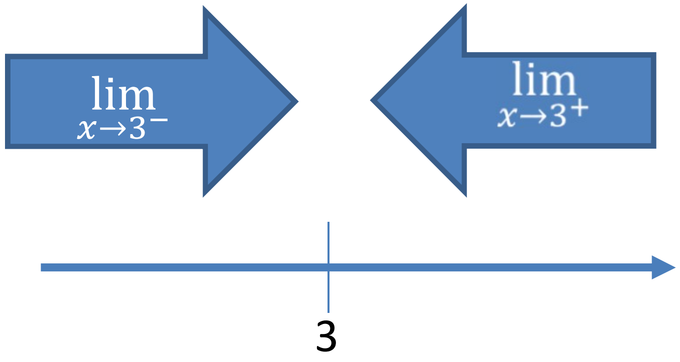
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2}{(3{,}000001-3)^2} = \lim_{x\to 3^+} \frac{2}{(3{,}000001-3)^2} =$$

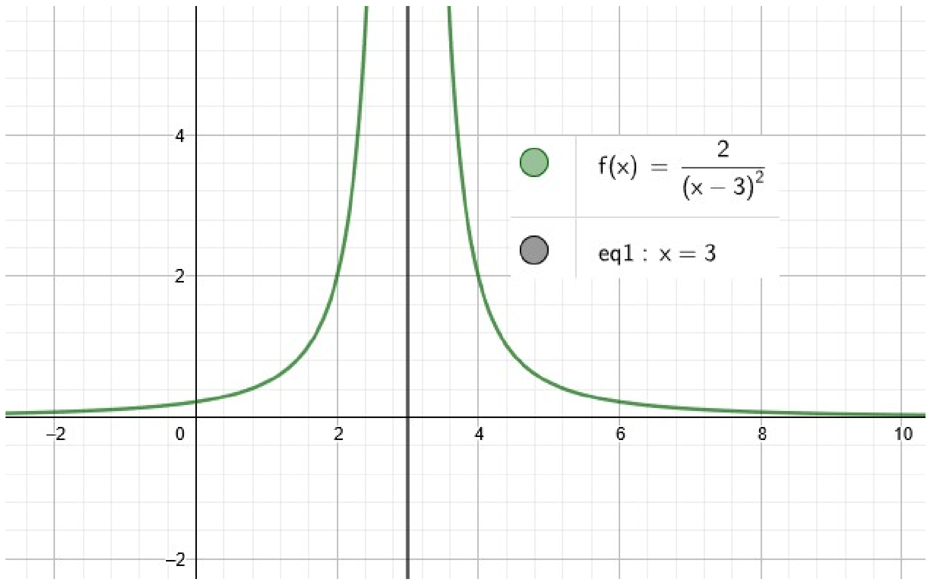
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2}{(0{,}000001)^2} = \infty$$

Exercícios

- Determine

$$b)\ \lim_{x\to 3^{\pm}} \frac{2}{(x-3)^2}$$





Limites Infinitos

- **Propriedades com limites infinitos:**

$$I)\quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty$$

$$II)\quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} \infty, \text{ n=par} \\ -\infty, \text{ n=ímpar} \end{cases}$$

Limites Infinitos

- Exemplo: determine $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3 + 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

$$= \lim_{x\to 0} \cancelto{0}{x^3} + \lim_{x\to 0} \cancelto{0}{2\sqrt[3]{x}} + \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

$$= 0 + 0 + \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

$$= \infty$$

Limites Infinitos

- Exemplo: determine $\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} \frac{x^3+1}{\sqrt{x}-1}$?

$$\lim_{x \to 1^{+}} \frac{x^3 + 1}{\sqrt{1{,}00\ldots01} - 1} = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{0,000..}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^{-}} \frac{x^3 + 1}{\sqrt{0{,}99\ldots99} - 1} = \lim_{x \to 1^{-}} \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{-0,000..}} = -\infty$$

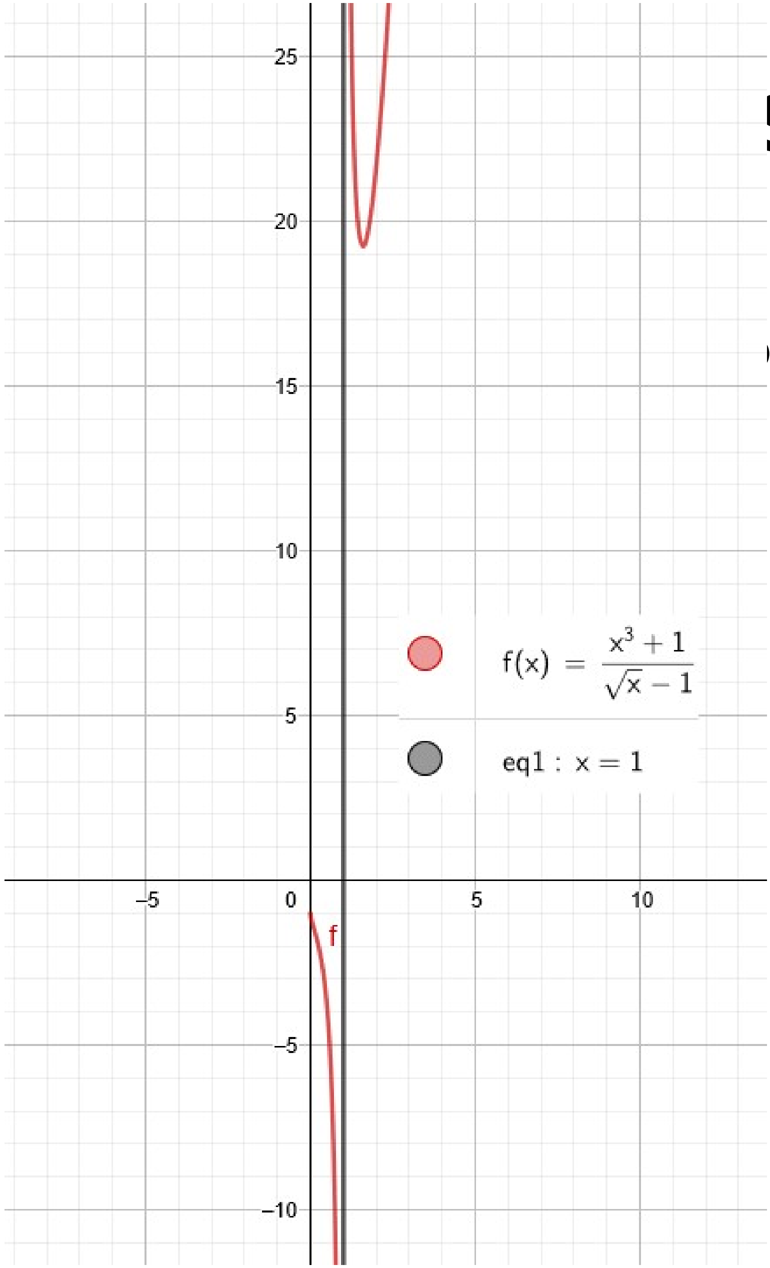
$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x^3+1}{\sqrt{x}-1} = \pm\infty$$

Limites Infinitos

- Exemplo: determine $\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x^3+1}{\sqrt{x}-1}$?
  - Quando $x \to 1^{\pm}$ o valor do denominador se aproxima de 0, tornando-se um valor tão próximo de zero que o valor desse limite tende ao $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x^3+1}{\sqrt{x}-1} = \pm\infty$$

- Exemplo:



Limites Infinitos

- **Assíntotas Verticais**: uma reta x =k é uma assíntota vertical do gráfico de uma função se...

$$\lim_{x \to k^+} f(x) = \infty \; ou \; \lim_{x \to k^+} f(x) = -\infty$$

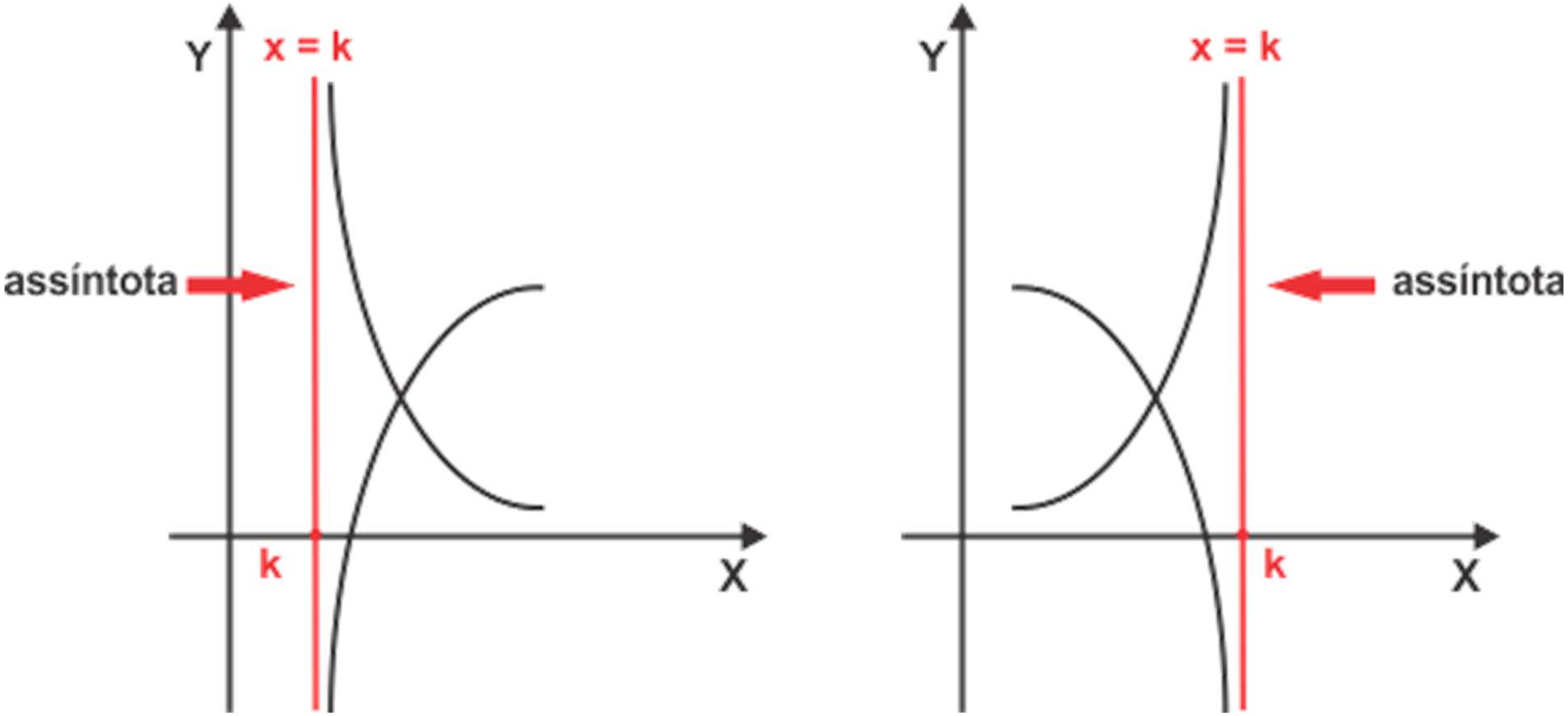
Bem como,

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = \infty \; ou \; \lim_{x \to k^-} f(x) = -\infty$$

Limites Infinitos

- **Assíntotas Verticais**:

$$\lim_{x \to k+} f(x) = \pm\infty \quad \text{e/ou} \quad \lim_{x \to k-} f(x) = \pm\infty$$



Limites Infinitos

- **Exemplo**: determine uma assíntota vertical para $f(x) = \frac{x}{3-\sqrt{x}}$
  - Devemos pensar em um número de x que torne possível o **denominador ficar com valor 0** e então **analisar o número tanto da direita como da esquerda**.

$$\lim_{x \to 9^{\pm}} \frac{x}{3-\sqrt{x}}$$

Limites Infinitos

- **Exemplo**: determine uma assíntota vertical para $f(x) = \frac{x}{3-\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \to 9^+} \frac{x}{3-\sqrt{9{,}00\ldots1}} =$$

$$\lim_{x \to 9^+} \frac{9{,}00\ldots1}{3-3{,}0\ldots1} = \lim_{x \to 9^+} \frac{9{,}00\ldots1}{-0{,}0\ldots1} = -\infty$$

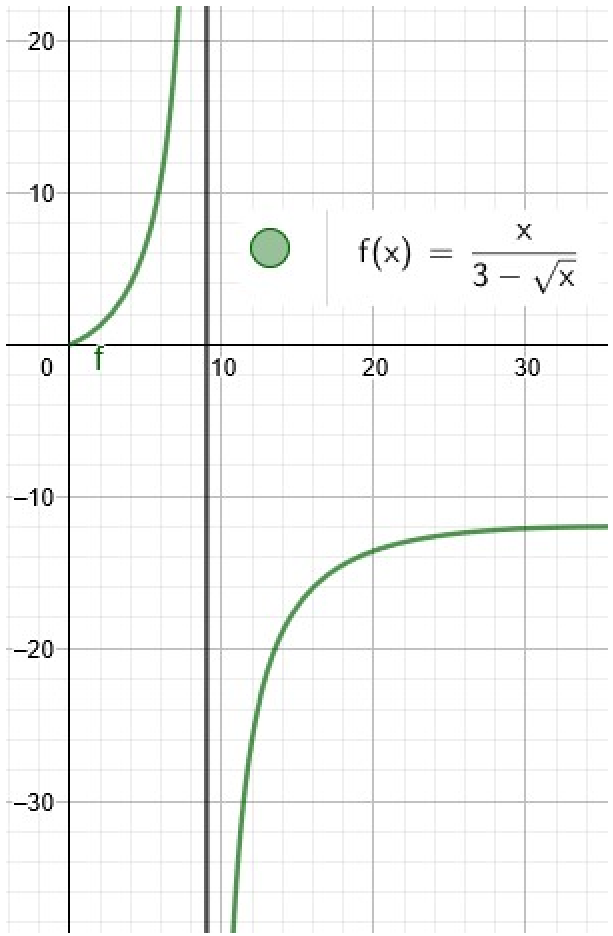
$$\lim_{x \to 9^-} \frac{x}{3-\sqrt{8{,}99\ldots9}} = \lim_{x \to 9^-} \frac{x}{3-2{,}9\ldots9}$$

$$= \lim_{x \to 9^-} \frac{x}{0{,}00..1} = \infty$$

Limites Infinitos

- **Exemplo**: determine uma assíntota vertical para $f(x) = \frac{x}{3-\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \to 9^{\pm}} \frac{x}{3-\sqrt{x}} = \mp\infty$$



Portanto, existe uma assíntota vertical em x=9

Limites no Infinito

- **Limites no infinito**: casos em que queremos saber como a função se comporta quando x tende ao $\pm\infty$.

I) Dizemos que $f(x)$ possui limite L quando x tende a mais infinito:

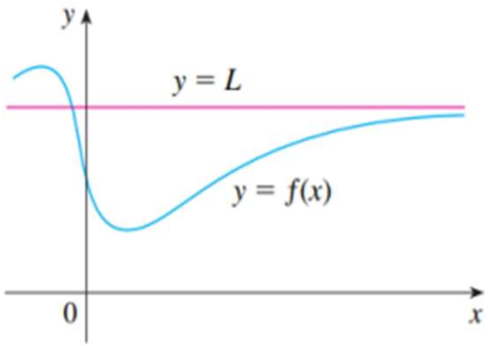
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

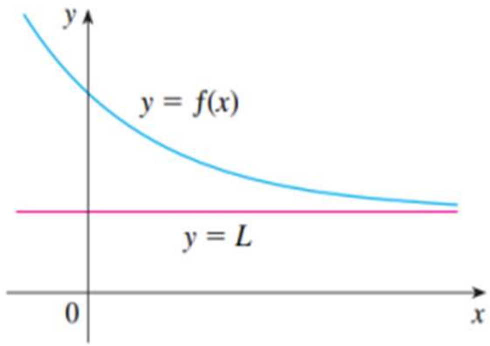
II) Dizemos que $f(x)$ possui limite L quando x tende a menos infinito:

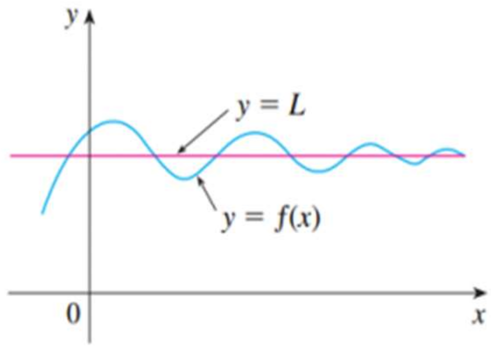
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Limites no Infinito

- **Exemplo**: $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$



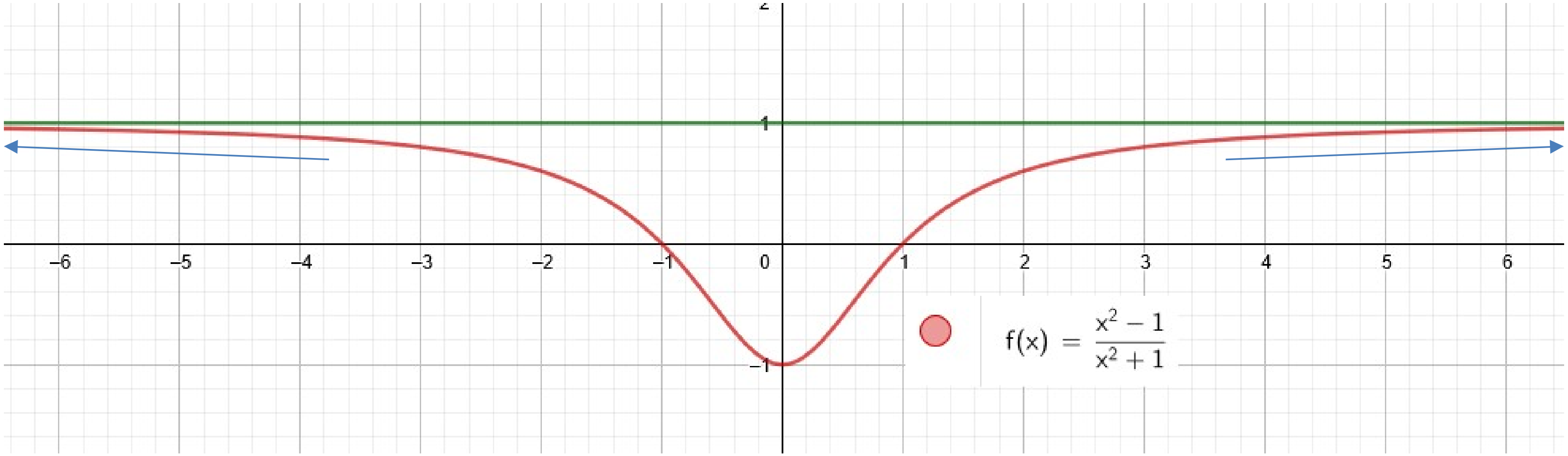




Limites no Infinito

- **Exemplo:** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0,600000
± 3	0,800000
± 4	0,882353
± 5	0,923077
± 10	0,980198
± 50	0,999200
± 100	0,999800
± 1000	0,999998

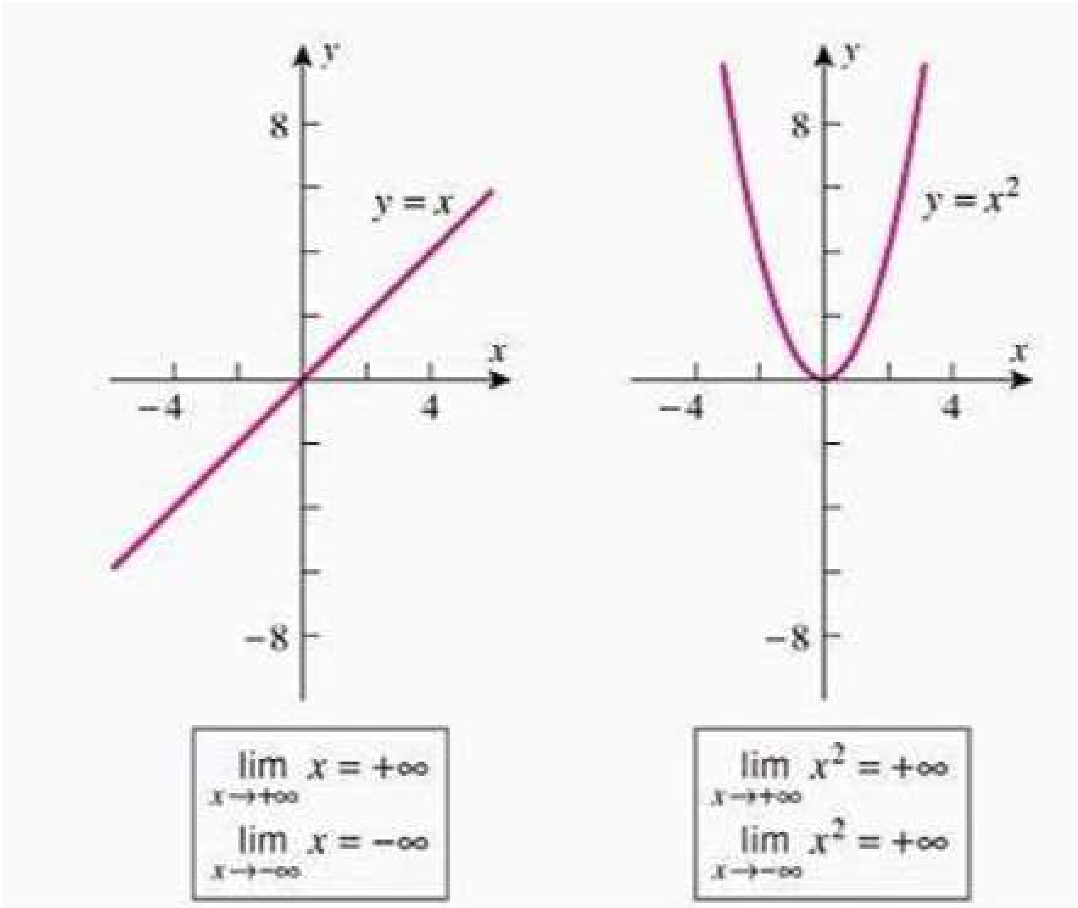


Limites no Infinito

- **Exemplo**: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$

Limites no Infinito

- **Exemplos:**



Limites no Infinito

- **Propriedades do limites no infinito:** se n pertence a Z_+^* .

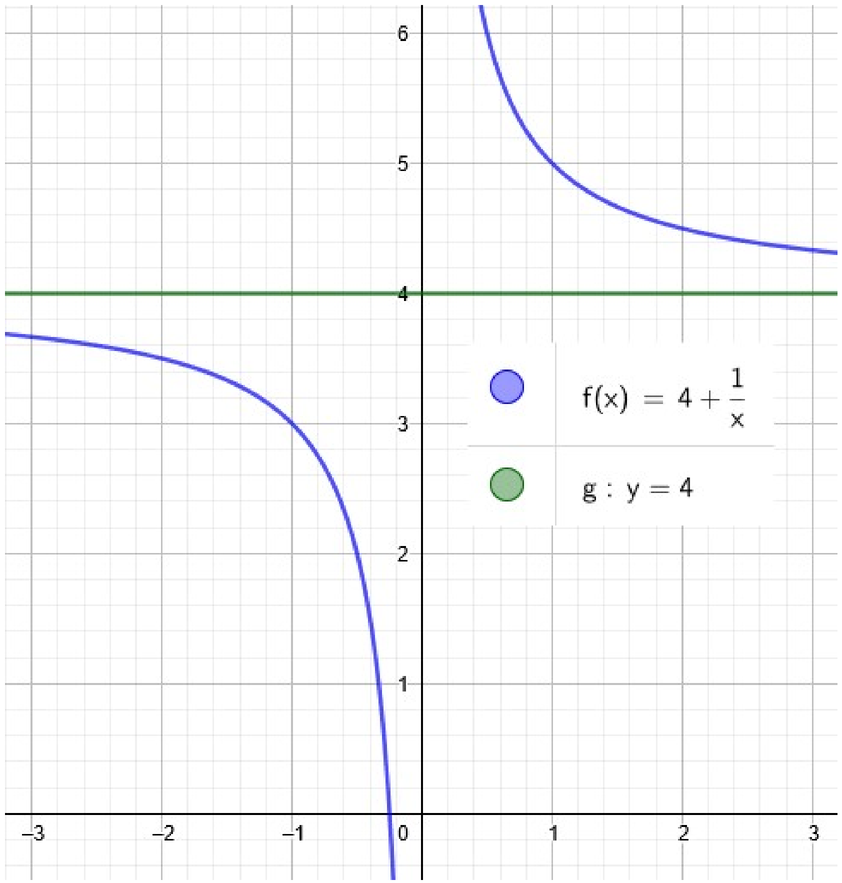
I) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

II) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} k = k$

Limites no Infinito

- **Exemplo:** calcule $\lim_{x\to\infty}(4+\frac{1}{x})$

$= \lim_{x\to\infty} 4 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$
$= 4 + 0 = 4$



Limites no Infinito

- **Exemplo:** calcule $\lim_{x \to \pm\infty} (3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})$

$= \lim_{x \to \pm\infty} 3 + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2}$

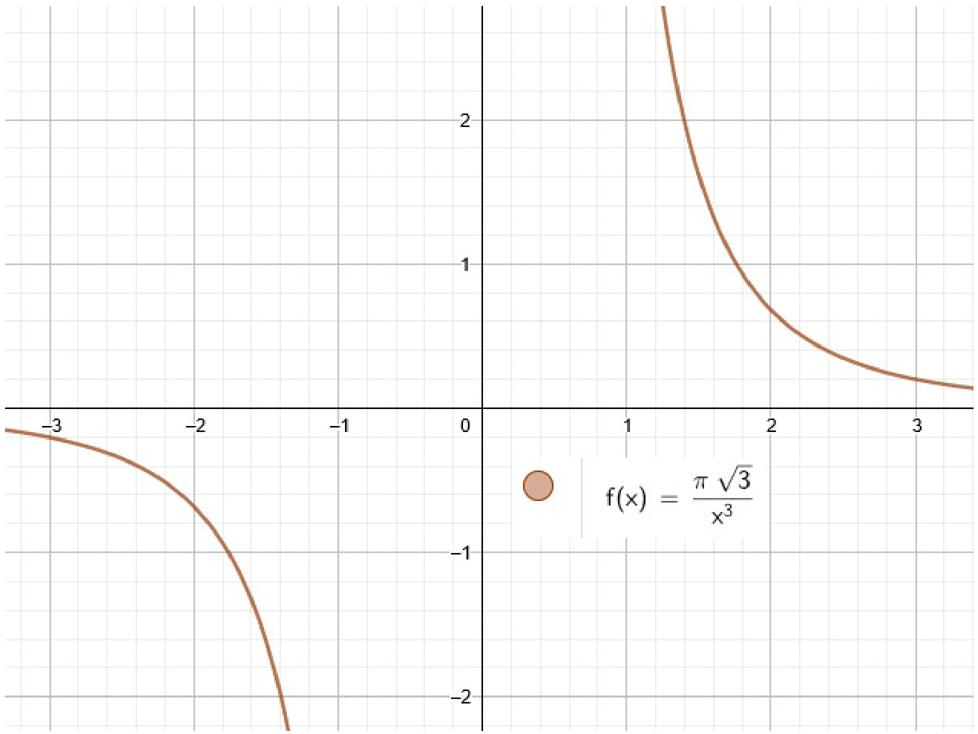
$= 3 + 0 - 0 = 3$

Limites no Infinito

- **Exemplo:** calcule $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\pi.\sqrt{3}}{x^3}\right)$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\pi\sqrt{3}.\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= \pi\sqrt{3}.\lim_{x \to -\infty} \cancelto{0}{\left(\frac{1}{x^3}\right)} = 0$$



Limites no Infinito

- **Polinômios**: quando $x \to \pm\infty$, um polinômio sempre tende a infinito em valor absoluto; se é $+\infty$ ou $-\infty$ depende do sinal do termo de mais alto grau e depende também de ser $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$.

Limites no Infinito

I) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n}$=0
II) $\lim_{x\to\pm\infty} k$=k

- **Exemplo 1:** calcule $\lim_{x\to\pm\infty}(3x^4 - 7x^3 + x^2 + 5)$
  - Devemos fatorar a potência de mais alto grau, que nesse caso é x^4. Portanto, dividir todos membros do meu polinômio por x^4. Digite a equação aqui.

$$x^4(3 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^4})$$

  - A expressão entre parênteses tende a 3 com $x \to \pm\infty$, ao passo que o fator x^4 tende a $+\infty$, $x \to \pm\infty$.

$\lim_{x\to\pm\infty}(3x^4 - 7x^3 + x^2 + 5)$=
$\lim_{x\to\pm\infty} x^4(3 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^4})$ = $\lim_{x\to\pm\infty} x^4(3)$ = $\lim_{x\to\pm\infty} x^4(3)$ = $\infty.3$
=∞

Limites no Infinito

- **Exemplo 2:** calcule $\lim_{x\to-\infty}(4x^5 - 7x^4 + 2)$
  - Devemos fatorar a potência de mais alto grau, que nesse caso é x^5. Portanto, dividir todos membros do meu polinômio por x^5.

$$x^5(4 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^5})$$

  - A expressão entre parênteses tende a 4 com $x \to -\infty$, ao passo que o fator x^5 tende a $-\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}(4x^5 - 7x^4 + 2) = \lim_{x\to-\infty} x^5(4 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^5}) =$
$\lim_{x\to-\infty} x^5(4) = (-\infty).(-\infty).(-\infty).(-\infty).(-\infty).4 = -\infty$

Limites no Infinito

- **Exemplo 3:** calcule $\lim_{x\to\infty}(-3x^2 + x - 10)$
  – Devemos fatorar a potência de mais alto grau, que nesse caso é x^2. Portanto, dividir todos membros do meu polinômio por x^2.

$$x^2(-3 + \frac{1}{x} - \frac{10}{x^2})$$

  – A expressão entre parênteses tende a -3 com $x \to \infty$, ao passo que o fator x^2 tende a ∞.

$$\lim_{x\to\infty}(-3x^2 + x - 10) = \lim_{x\to\infty} x^2(-3 + \frac{1}{x} - \frac{10}{x^2}) =$$
$$\lim_{x\to\infty} x^2(-3) = \infty^2.(-3) = \infty.(-3) = -\infty$$

Limites no Infinito

- **Exemplo 3:** calcule $\lim_{x \to -\infty} (-3x^2 + x - 10)$
  - Devemos fatorar a potência de mais alto grau, que nesse caso é x^2. Portanto, dividir todos membros do meu polinômio por x^2.

$$x^2(-3 + \frac{1}{x} - \frac{10}{x^2})$$

  - A expressão entre parênteses tende a -3 com $x \to -\infty$, ao passo que o fator x^2 tende a ∞.

$$\lim_{x \to -\infty} (-3x^2 + x - 10) = \lim_{x \to -\infty} x^2(-3 + \frac{1}{x} - \frac{10}{x^2}) = \lim_{x \to -\infty} x^2(-3) = (-\infty)^2.(-3) = \infty.(-3) = -\infty$$

Obs: quando o maior expoente do polinômio é par, não faz diferença x→ $\pm\infty$

$$I) \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$II) \quad \lim_{x \to \pm\infty} k = k$$

Exercícios

- Determine os limites abaixo:

$$a) \lim_{x \to \pm\infty} (7x^3 + 2x^2 - x - 1)$$

$$b) \lim_{x \to \pm\infty} (-9x^6 + 1 - 3x)$$

Limites no Infinito

- **Assíntota horizontal:** tendemos a função a menos infinito e a mais infinito, o número descoberto é a assíntota horizontal da função.
  - Se um ou os dois limites resultarem em um **valor finito**, quer dizer que encontramos uma ou duas assíntotas horizontal.
  - Não é necessário que os dois limites sejam iguais. Caso os limites resultem em constantes diferentes, teremos 2 assíntotas.

Limites no Infinito

- **Assíntota horizontal:** seja $L\ e\ M \in R$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$$

Obs: L e M podem ser iguais, bem como, diferentes.

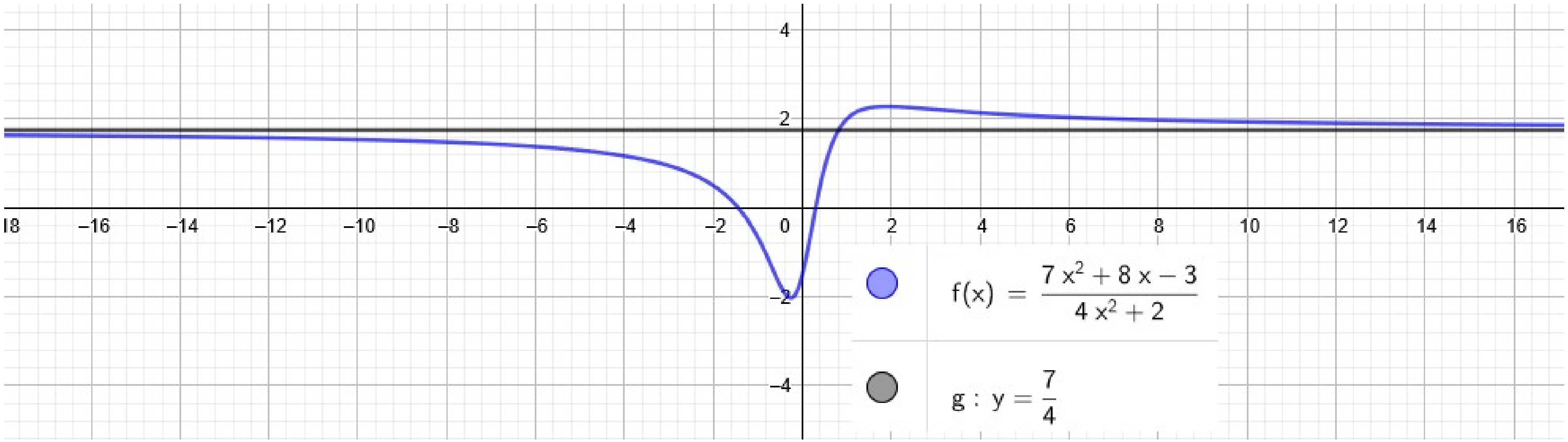
Limites no Infinito

I) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n}=0$

II) $\lim_{x\to\pm\infty} k=k$

- **Exemplo:** calcule $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{7x^2+8x-3}{4x^2+2}$
  - Ao dividir todos os membros por x^2 teremos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{7+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{4+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{7+0-0}{4+0}=\frac{7}{4}$$



Limites no Infinito

$I) \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n}=0$

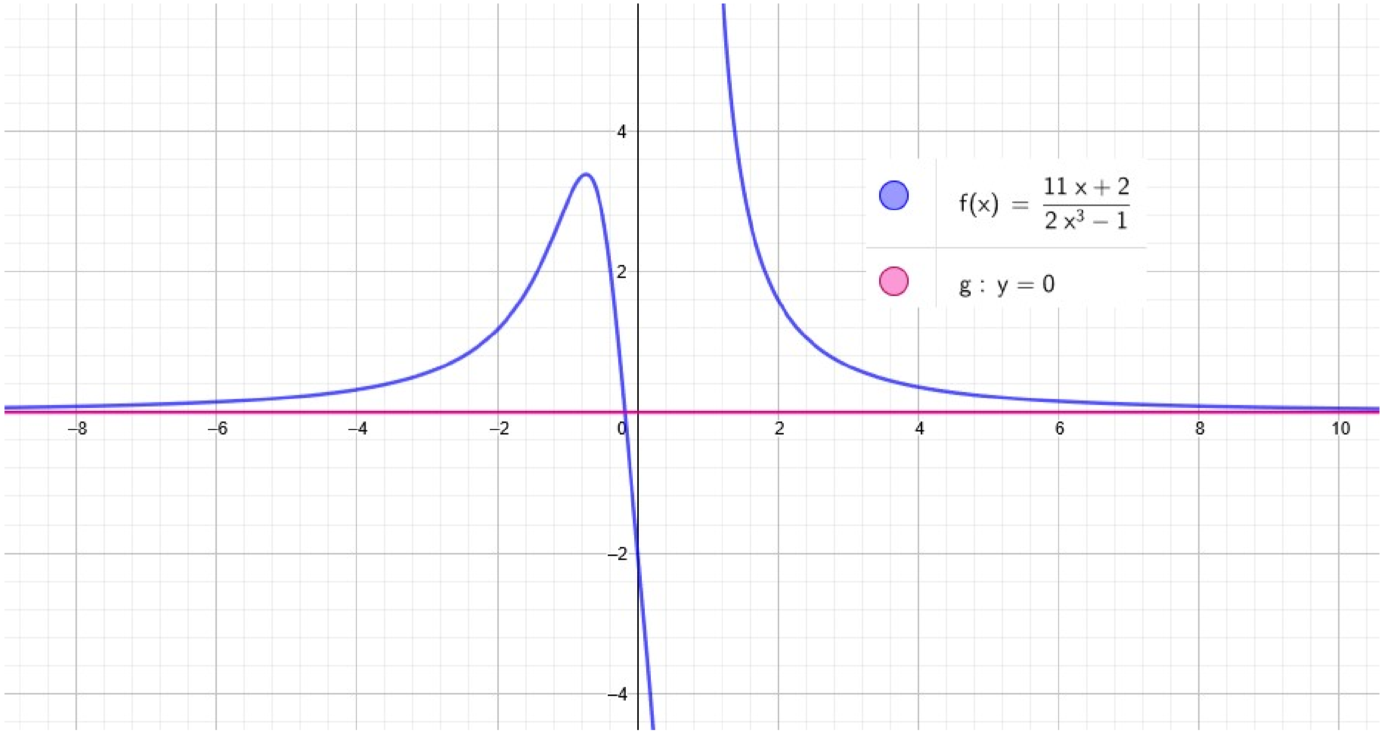
$II) \lim\limits_{x\to\pm\infty} k=k$

- **Exemplo:** verifique se existe uma assíntota horizontal na função $f(x) = \frac{11x+2}{2x^3-1}$
  - Devemos calcular o limite de f(x) quando x tende a $\pm\infty$ e verificar se existe um valor constante no limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} = \frac{0}{2} = 0$$

Limites no Infinito

- **Exemplo:** verifique se existe uma assíntota horizontal na função $f(x) = \frac{11x+2}{2x^3-1}$



Limites no Infinito

- **Quociente de polinômios:** o cálculo do limite do quociente de polinômios com $x \to \pm\infty$ também seguem a mesma lógica de fatorar a potência de mais alto grau.

Limites no Infinito

I) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n}=0$

II) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k=k$

- **Exemplo 1:** determine $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^3-7x+2}{5x^3+4x^2+8x-1}$

  – Se os **polinômios** tem o **mesmo grau**, o limite coincide com o **quociente dos coeficientes dos termos dominantes**.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3-7x+2}{5x^3+4x^2+8x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\overset{1}{\cancel{x^3}}\left(3-\frac{7}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{\overset{1}{\cancel{x^3}}\left(5+\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3-\frac{7}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{5+\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

Limites no Infinito

I) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

II) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k = k$

- **Exemplo 1:** determine $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3-7x+2}{5x^3+4x^2+8x-1}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{7}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1.7}{x^2} = 7.\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 7.0 = 0$$

Limites no Infinito

I) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n}=0$

II) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k=k$

- **Exemplo 2:** determine $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3-7x+2}{5x^4+4x^2+8x-1}$
  - Grau do numerador é menor que do denominador.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3-7x+2}{5x^4+4x^2+8x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3}(3-\frac{7}{x^2}+\frac{2}{x^3})}{\cancel{x^4}(5+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{1}{x^4})} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3-\frac{7}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{x(5+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{1}{x^4})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{5x} = \frac{3}{5} \cdot \cancel{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}}^{0} = 0$$

Limites no Infinito

- **Exemplo 3:** determine $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3x^4 - 7x + 2}{5x^3 + 8x - 1}$
  - Grau do numerador é maior que do denominador.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^4 - 7x + 2}{5x^3 + 8x - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancelto{1}{x^4}(3 - \frac{7}{x^3} + \frac{2}{x^4})}{\cancel{x^3}(5 + \frac{8}{x^2} - \frac{1}{x^3})} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(3 - \frac{7}{x^2} + \frac{2}{x^3})}{5 + \frac{8}{x^2} - \frac{1}{x^3}} =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{5} = \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$$

Exercícios (para casa)

- Determine

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5x-3}{2x^2+1}$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+2x-5}{2x-1}$$

Limites Fundamentais

- **Propriedades trigonométricas:**

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cossec}^2\theta$$

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y \pm \operatorname{sen} y \cdot \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Limites Fundamentais

- **Propriedades trigonométricas:**

	0° ou 0 rad	**30° ou $\frac{\pi}{6}$ rad**	**45° ou $\frac{\pi}{4}$ rad**	**60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad**	**90° ou $\frac{\pi}{2}$ rad**
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

Limites Fundamentais

- Usando com frequência na resolução dos exercícios.

$$I)\ \lim_{x\to 0} \frac{sen\,(x)}{x} = 1$$

$$II)\ \lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$III)\ \lim_{x\to 0} \frac{a^{x}-1}{x} = \ln a$$

Limites Fundamentais

- **Exemplo 1**: determine $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\,(4x)}{x}$
  - Utiliza-se as propriedades trigonométricas transformando a função tg na divisão de seno por cosseno:

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg(4x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(4x)}{cos(4x) \cdot x}$$

Limites Fundamentais

- **Exemplo 1**: determine $\lim_{x\to 0} \frac{tg\,(4x)}{x}$
  - Em seguida, deve-se multiplicar numerador e denominador por 4 e aplicar a propriedade da multiplicação de limites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(4x)\cdot 4}{cos(4x)\cdot 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{4}{cos(4x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sen(4x)}{4x}$$

Limites Fundamentais

- Exemplo 1: determine $\lim_{x \to 0} \frac{tg\,(4x)}{x}$
  - Resolva os dois limites separadamente e, no fim, multiplique as respostas.
    - No primeiro vê-se facilmente que quando $x \to 0$ o denominador tenderá a 1, pois cos(0)=1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{4}{cos(4x)} = \frac{4}{cos(0)} = \frac{4}{1} = 4$$

Limites Fundamentais

$I)\ \lim_{x\to 0}\frac{sen\,(x)}{x} = 1$

$II)\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$III)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

- Exemplo 1: determine $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,(4x)}{x}$
  - No segundo limite deve-se fazer uma mudança de variável, onde $u = 4x$, sabendo que quando $x \to 0$ temos também $u \to 0$. Assim:

$$u = 4x$$
$$u = 4.0 = 0$$
$$u \to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(4x)}{4x} = \lim_{u\to 0}\frac{sen(u)}{u}$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{sen(u)}{u} = 1$$

Limites Fundamentais

- Exemplo 1: determine $\lim_{x \to 0} \frac{tg\,(4x)}{x}$
  - Por fim, deve-se multiplicar o resultado dos dois limites, onde obtém-se:

$$\lim_{x \to 0} \frac{4}{cos(4x)} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sen(4x)}{4x} = 4 \cdot 1 = 4$$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Limites Fundamentais

- **Exemplo 2**: determine $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$
  - Percebemos que ao manipular este limite chega-se em uma expressão semelhante ao segundo limite fundamental:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)^{1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$I)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\,(x)}{x} = 1$

$II)\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

$III)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

Limites Fundamentais

- Exemplo 2: determine $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$
  - Manipulando o primeiro limite percebe-se facilmente que tem-se um limite fundamental:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$I)\ \lim_{x\to 0} \frac{sen\,(x)}{x} = 1$$

$$II)\ \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$III)\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

Limites Fundamentais

- Exemplo 2: determine $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$
  - Já o segundo, manipulando e usando as propriedades dos limites tem-se :

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} =$$
$$1 + 0 = 1$$

Limites Fundamentais

- Exemplo 2: determine $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$
  - Por fim, basta multiplicar os resultados :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)=e\cdot 1=e$$

Limites Fundamentais

- **Exemplo 3**: determine $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$
  - Realiza-se a soma e subtração de 1 no numerador e, em seguida, separa-se este limite na soma de outros dois:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + 1 - 1 - e^{-x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{-e^{-x} + 1}{x}$$

$$I)\ \lim_{x \to 0} \frac{sen\,(x)}{x} = 1$$

$$II)\ \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$III)\ \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Limites Fundamentais

- Exemplo 3: determine $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x}$
  - O primeiro é aplicação direta do 3º limite fundamental:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = \ln e = 1$$

$$\boldsymbol{I)}\ \lim_{x \to 0} \frac{sen\,(x)}{x} = 1$$

$$\boldsymbol{II)}\ \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\boldsymbol{III)}\ \lim_{x \to 0} \frac{a^{x}-1}{x} = \ln a$$

Limites Fundamentais

- Exemplo 3: determine $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$
  - O segundo deve-se manipular ele, onde chega-se a:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-e^{-x}+1}{x}(.-1) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{-x}$$

  - Agora fazendo uma troca de variável, u=-x e sabendo que quando $x \to 0$ também $u \to 0$, substituindo tem-se:

$$u = -x$$
$$u = 0$$
$$u \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{-x} = \lim_{u\to 0} \frac{e^{u}-1}{u}$$

  - Nota-se novamente o 3º limite fundamental:

$$\lim_{u\to 0} \frac{e^{u}-1}{u} = \ln e = 1$$

$$\boldsymbol{I)}\ \lim_{x\to 0} \frac{sen\,(x)}{x} = 1$$

$$\textit{II)}\ \lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\textit{III)}\ \lim_{x\to 0} \frac{a^{x}-1}{x} = \ln a$$

Limites Fundamentais

- Exemplo 3: determine $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$
  - Somando os dois limites tem-se:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{-e^{-x} + 1}{x} = 1 + 1 = 2$$