# Calculo I

Continuidade e Limites

Prof. Pablo Vargas

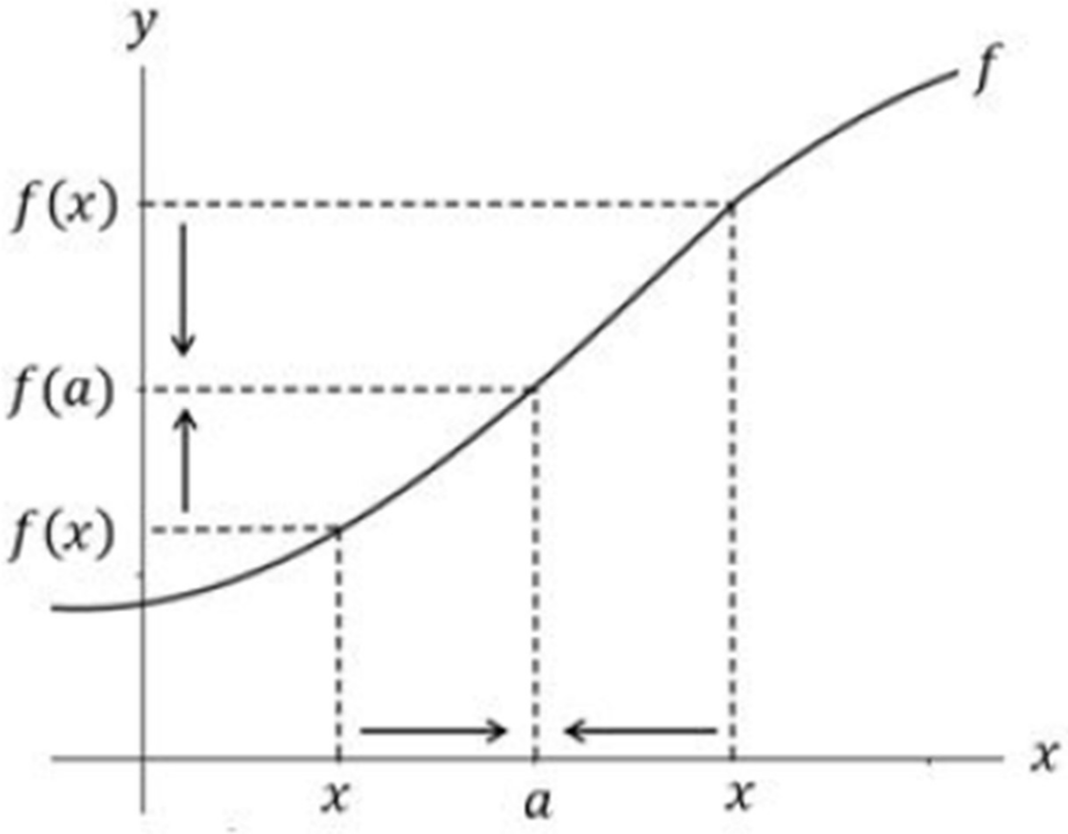
# Tópicos Abordados

- Introdução
- Limite da função
- Leis do Limite
- Continuidade
- Teorema do valor intermediário
- Limites Laterais

# Introdução

- A noção intuitiva de limite envolve a questão de proximidade de um determinado valor de x a uma tendência do valor de y.
- Limite está interessado em saber como a função se comporta quando **se aproxima de** um certo valor **x**.

# Introdução



# Introdução

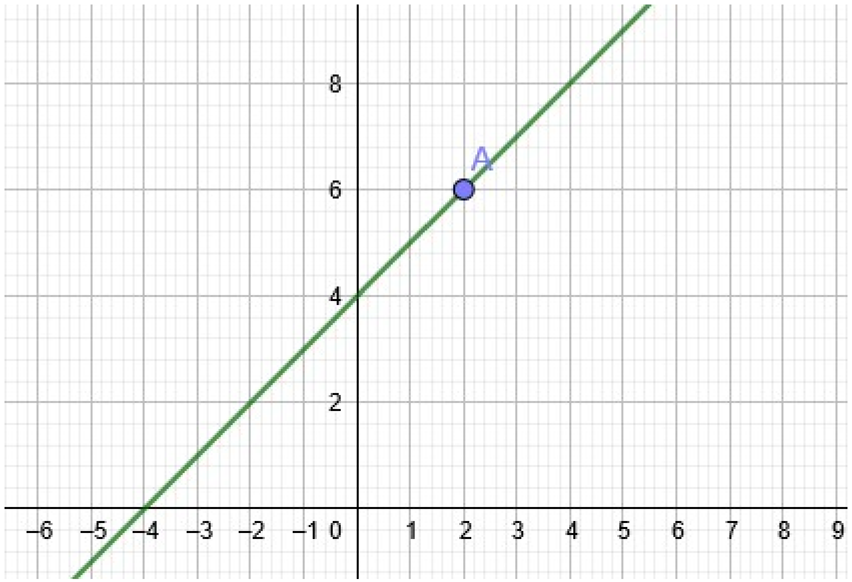
- Exemplo: qual o limite de f(x)=x+4 no ponto x = 2

| Pela esquerda ( $x < 2$ ) | | | Pela direita ( $x > 2$ ) | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $f(x)$ | | $x$ | $f(x)$ |
| 1 | 5 | | 3 | 7 |
| 1,5 | 5,5 | | 2,5 | 6,5 |
| 1,9 | 5,9 | | 2,1 | 6,1 |
| 1,95 | 5,95 | | 2,05 | 6,05 |
| 1,99 | 5,99 | | 2,01 | 6,01 |
| 1,999 | 5,999 | | 2,001 | 6,001 |

# Introdução

- Exemplo: qual o limite de f(x)=x+4 no ponto x = 2

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x + 4) \quad = 6$$

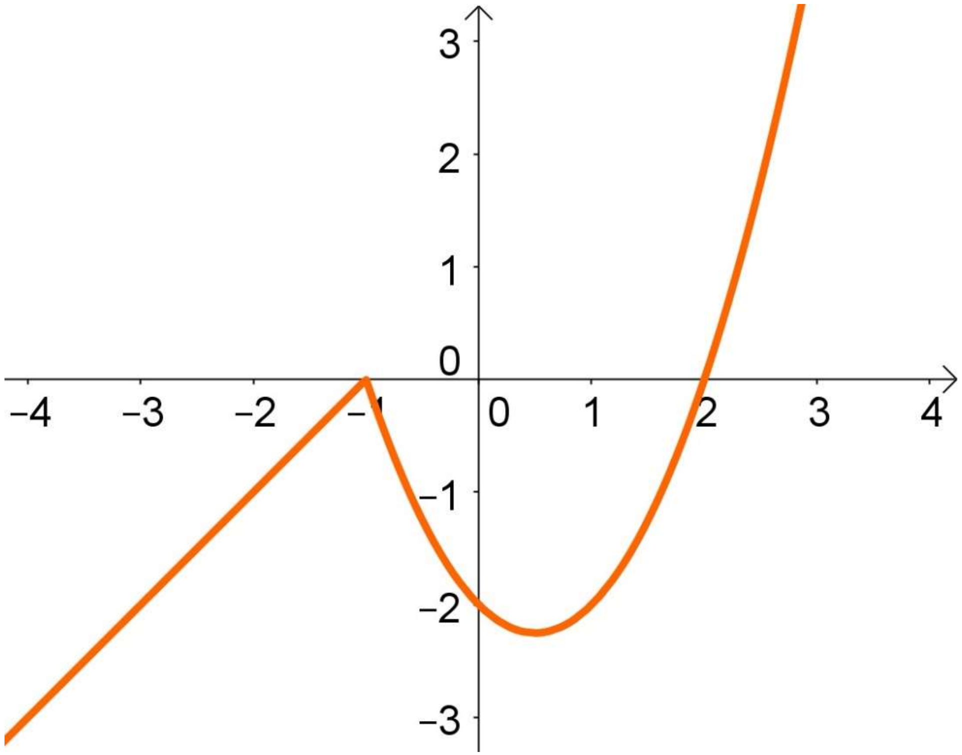


# Introdução

- A maioria dos gráficos que lidamos **não apresentam rupturas**. Inicialmente, essa aspecto visual do gráfico sem qualquer ruptura deu origem ao conceito de **continuidade**.
  - ...É quando o gráfico da função não possui quebras ou saltos em todo seu domínio.
- A definição moderna de continuidade depende da noção de limite (ÁVILA, 2014).

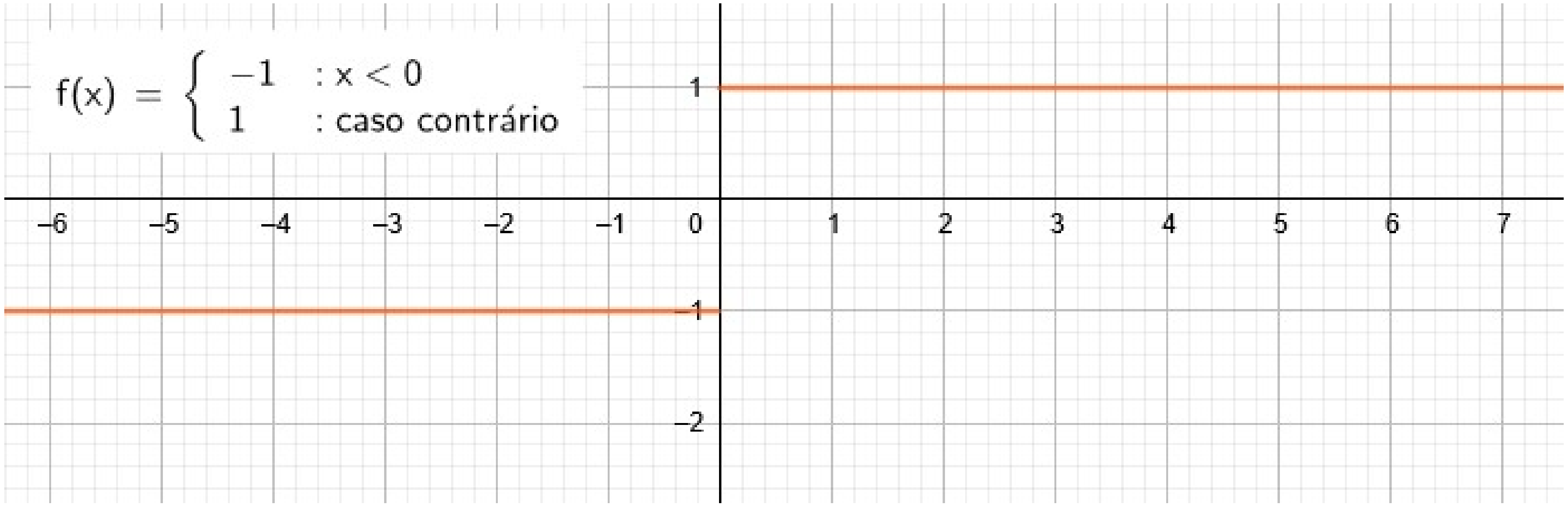
# Introdução

- Exemplo/continuidade:



# Introdução

- Não exemplo/descontinuidade:



# Limite da função

- O **limite** de **f(x)**, quando **x** tende a ***a***, é igual a **L**

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}$$

# Limite da função

- **Exemplos:**

*a)* $\boldsymbol{f(x) = 3x - 7}$

$$\lim_{x \to 5}(3x - 7) \quad = f(5) = 3.5 - 7 = 8$$

*b)* $\boldsymbol{f(x) = x^2 - \sqrt{x} + 1}$

$$\lim_{x \to 4}\left(x^2 - \sqrt{x} + 1\right) = f(4) = 4^2 - \sqrt{4} + 1 = 15$$

# Limite da função

- **Exemplo:** A função $f(x) = \frac{x^2+8x-20}{x^2-x-2}$ está definida para todo x, exceto x=2. No entanto, podemos escreve-la da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+8x-20}{x^2-x-2} = \frac{(x-2)(x+10)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+10}{x+1}}$$

  - Nessa nova expressão podemos substituir $x \rightarrow 2$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+8x-20}{x^2-x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x+10}{x+1}\right) = \frac{12}{3} = 4}$$

# Limite da função

- Exemplo: $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

# Limite da função

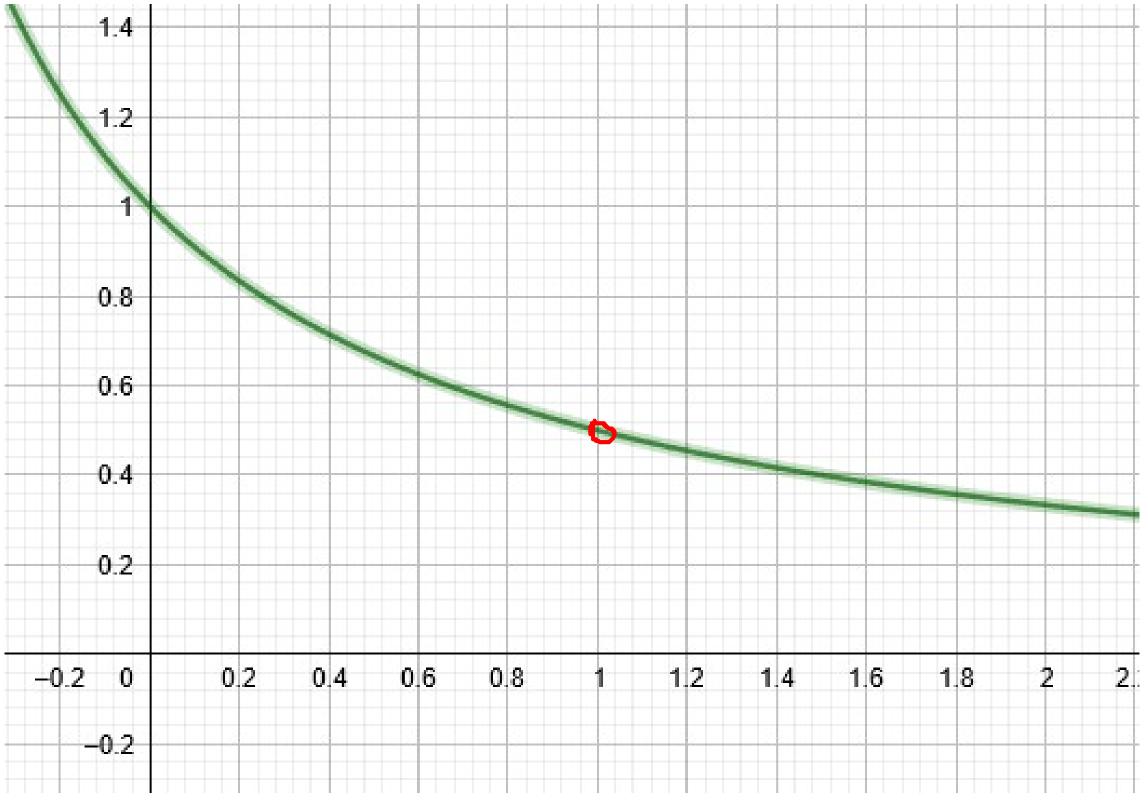
- Exemplo: $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ **=0,5**

| x<1 | f(x) |
|---|---|
| 0,5 | 0,6666 |
| 0,9 | 0,5263 |
| 0,99 | 0,5025 |
| 0,999 | 0,5002 |
| 0,9999 | 0,5000 |

| x>1 | f(x) |
|---|---|
| 1,5 | 0,4000 |
| 1,1 | 0,4761 |
| 1,01 | 0,4975 |
| 1,001 | 0,4997 |
| 1,0001 | 0,4999 |

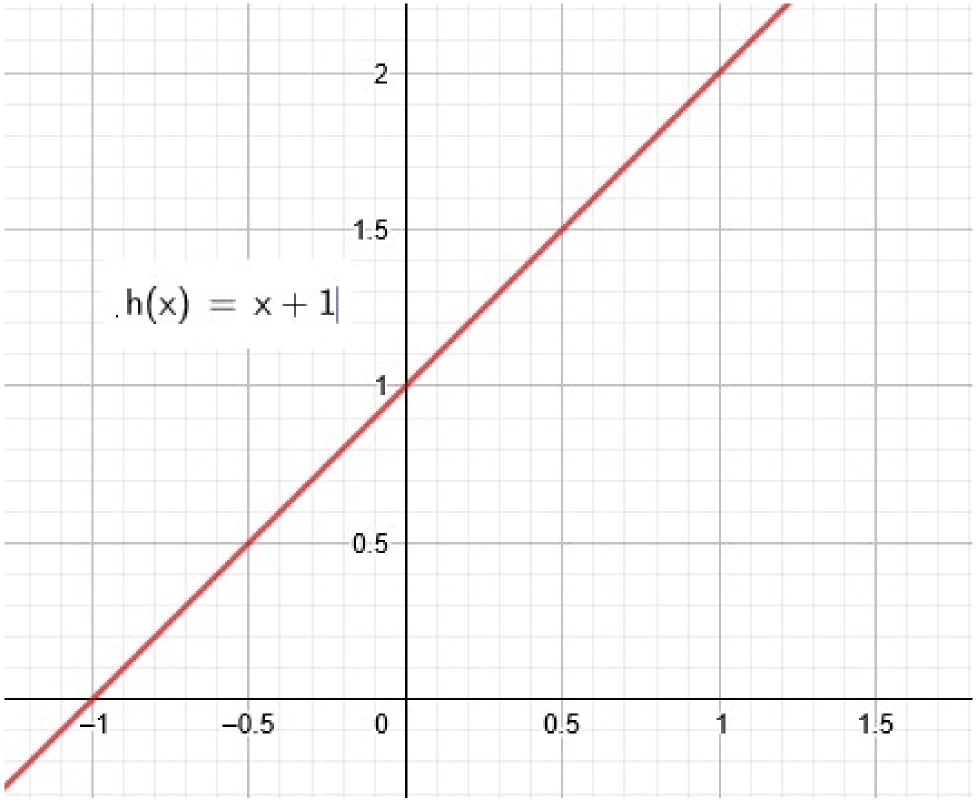
# Limite da função

- Exemplo: $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ **=0,5**



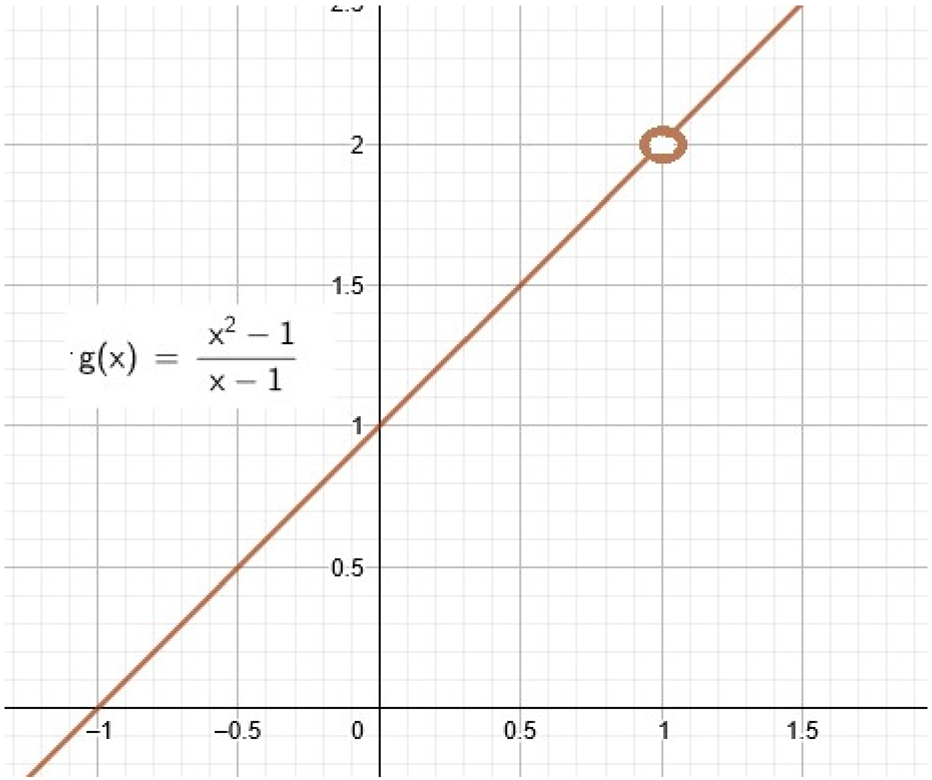
# Limite da função

- Exemplo 2:



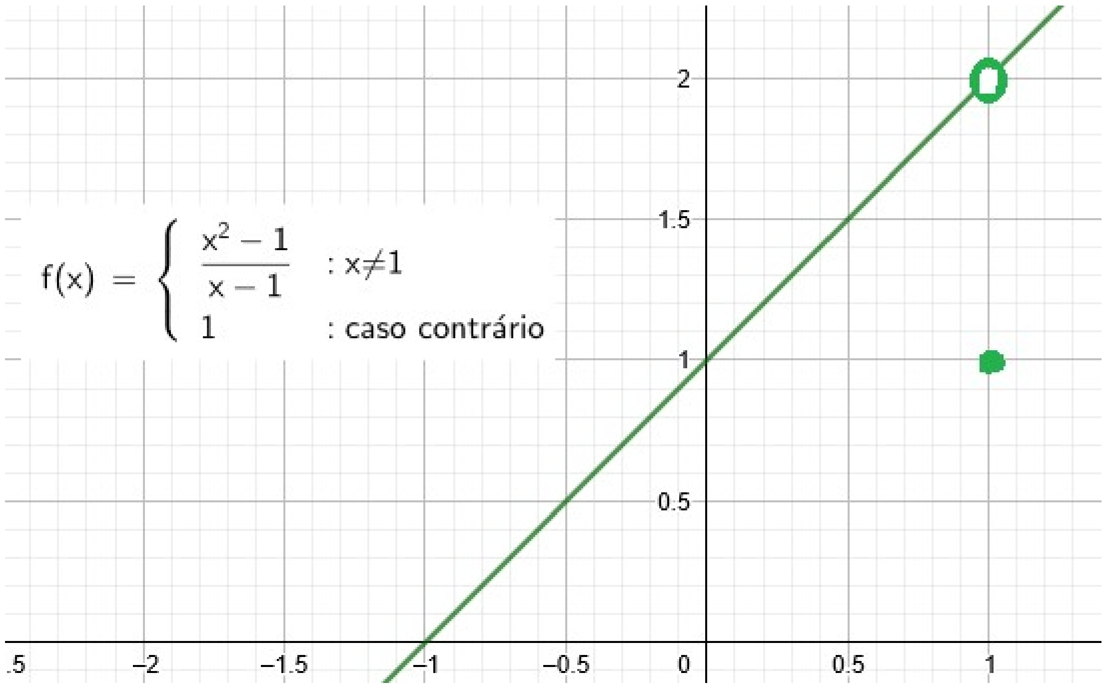
# Limite da função

- Exemplo 2:



# Limite da função

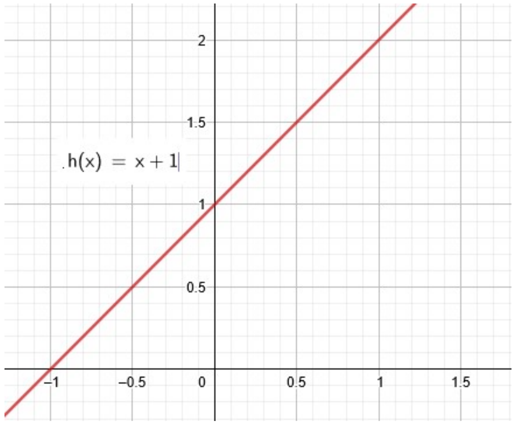
- Exemplo 2:



# Limite da função

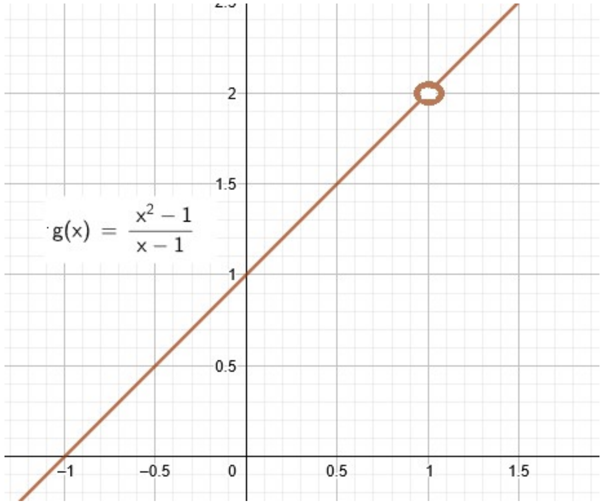
- Exemplo 2:

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x)$$




- Exemplo 2:

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x)$$



# Leis do Limite

- Leis do limite: seja c uma constante e suponha qu existam os limites $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$
  - Então:

*I.* $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

*II.* $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c. \lim_{x \to a} f(x)$

*III.* $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x)$

*IV.* $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ se $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

# Leis do Limite

**Outras Leis do Limite:**

– **Limite de uma função constante**

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k$$

– **Potência de Limites**

$$\lim_{x \to a} (f(x))^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n = L^n$$

# Leis do Limite

**Outras Leis do Limite:**

**– Exponencial do Limite**

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $b \in \mathbb{R}$ , então:

$$\lim_{x \to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x \to a} f(x)} = b^L \quad .$$

**– Logaritmo do Limite**

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ , $L > 0$ , $b \in \mathbb{R}$ , $b > 0$ , $b \neq 1$ e $n \in \mathbb{N}$ , então:

$$\lim_{x \to a}(log_b f(x)) = log_b(\lim_{x \to a} f(x)) = log_b L \quad .$$

# Leis do Limite

**Outras Leis do Limite:**

– **Raiz do Limite**

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ , $n \in \mathbb{N}$ e $L > 0$ quando $n$ for par, então:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L} \quad .$$

# Leis do Limite

- **Propriedade de Substituição Direta**: Se “f” for uma função **polinomial ou racional** e “a” estiver no domínio de “f”, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

# Leis do Limite

- **Exemplos**
  - Calcule os limites a seguir:

$$\lim_{x \to 2}(2x^2 - 7x + 4)$$

Obs: Toda vez que calcula-se um limite deve-se iniciar aplicando o valor no qual deseja-se saber o limite. Somente se der alguma **indeterminação** deve-se recorrer a outros métodos e técnicas.

# Leis do Limite

- **Exemplos**
  - Calcule os limites a seguir:

$$\lim_{x\to 2}(2x^2-7x+4) = 2\lim_{x\to 2}x^2-7\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}4 = 2\cdot 2^2-7\cdot 2+4 = -2$$

# Leis do Limite

- **Exemplos**
  - Calcule os limites a seguir:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 7x - 2}{-3x + 5}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 7x - 2}{-3x + 5} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} x^2 + 7 \lim\limits_{x \to 1} x - \lim\limits_{x \to 1} 2}{-3 \lim\limits_{x \to 1} x + \lim\limits_{x \to 1} 5} = \frac{1^2 + 7 \cdot 1 - 2}{-3 \cdot 1 + 5} = 3$$

# Leis do Limite

- **Exemplos**
  - Calcule os limites a seguir:

$$\lim_{x \to 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 2}$$

$$\lim_{x \to 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 2} = \frac{\sqrt[3]{\lim\limits_{x \to 27} x} - \lim\limits_{x \to 27} 1}{\lim\limits_{x \to 27} x - \lim\limits_{x \to 27} 2} = \frac{\sqrt[3]{27} - 1}{27 - 2} = \frac{2}{25}$$

# Leis do Limite*

- **Exercícios**
  - Calcule os limites a seguir:

a) $\lim_{x \to 5}(2x^2 - 3x + 4)$

b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

# Leis do Limite

- **Solução:a)** $\lim_{x \to 5}(2x^2 - 3x + 4)$

$$\lim_{x \to 5}(2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x \to 5}(2x^2) - \lim_{x \to 5} 3x + \lim_{x \to 5} 4$$

$$= 2\lim_{x \to 5}(x^2) - 3\lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4$$

$$= 2(5^2) - 3(5) + 4 = 39$$

# Leis do Limite

- **Solução: b)** $\lim\limits_{\boldsymbol{x \to -2}} \dfrac{\boldsymbol{x^3+2x^2-1}}{\boldsymbol{5-3x}}$

$$= \frac{\lim\limits_{\boldsymbol{x \to -2}} (x^3+2x^2-1)}{\lim\limits_{x \to -2} (5-3x)} = \frac{\lim\limits_{\boldsymbol{x \to -2}} x^3 + \lim\limits_{\boldsymbol{x \to -2}} 2x^2 - \lim\limits_{\boldsymbol{x \to -2}} 1}{\lim\limits_{x \to -2} 5 - \lim\limits_{x \to -2} 3x}$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5-3(-2)} = \frac{-1}{11}$$

# Leis do Limite

- **Indeterminação nos limites**: ocorre quando nos deparamos com expressões indeterminadas.

  Ex: $\frac{0}{0}$ , $\frac{x}{0}$ , $\frac{\infty}{\infty}$ , $\infty - \infty$ , $\infty^0$ , $1^\infty$

  Solução: devemos usar algumas operações algébricas buscando retirar a indeterminação.

# Leis do Limite

- Exemplo: Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{2x^3}{3x^2}$.
  - Se realizarmos a substituição de x=0 caímos em uma indeterminação.

  Solução: **simplificando** o numerador com o denominador podemos retirar a indeterminação.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\cancel{x^3}}{3\cancel{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^1}{3} = 0$$

# Leis do Limite

- **Exemplo: Encontre** $\lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}^2-\mathbf{1})/(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})$
  - **Solução:** Substituindo o x=1 não podemos encontrar o limite, devemos fazer algumas operações algébricas. **Fatoração** no numerador permitirá o cancelamento com o denominador.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1).(x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$$

$$\boxed{a^2-b^2=(a+b).(a-b)}$$

# Leis do Limite

- **Exemplo [$ax^2+bx+c=a(x-x1).(x-x2)$]: Encontre** $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$
  - **Solução:** Substituindo o x=2 não podemos encontrar o limite, devemos fazer algumas operações algébricas. **Fatoração** no numerador permitirá o cancelamento com o denominador.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\boldsymbol{x^2 + x - 6}}{\boldsymbol{x - 2}} =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2).(x+3)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x+3) = 2 + 3 = 5$$

$$x^2 + x - 6$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 1 - 4.1.(-6)$$
$$\Delta = 1 + 24$$
$$\Delta = 25$$
$$x1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{25}}{2.1} = 2$$
$$x2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{2.1} = -3$$

# Leis do Limite

- **Exemplo: Encontre** $\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{3}+\boldsymbol{h})^2-\mathbf{9}}{\boldsymbol{h}}$
  - **Solução:** Substituindo o h=0 não podemos encontrar o limite, devemos fazer algumas operações algébricas. Se desenvolvermos o **binômio de newton** e depois simplificarmos algebricamente, é possível retirar a indeterminação do denominador.

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{3}+\boldsymbol{h})^2-\mathbf{9}}{\boldsymbol{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{(9+6h+h^2)-9}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0} \frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 6+h = 6$$

# Leis do Limite

- **Exemplo: Encontre** $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sqrt{(t^2+9)}-3}{t^2}$
  - **Solução:** Substituindo o t=0 **não** podemos encontrar o limite, devemos fazer algumas operações algébricas. Se **racionalizar** o numerador é possível eliminar a indeterminação do limite.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{(t^2+9)}-3}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{(t^2+9)}-3}{t^2} . \frac{\sqrt{(t^2+9)}+3}{\sqrt{(t^2+9)}+3}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2+9)-9}{t^2(\sqrt{(t^2+9)}+3)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2(\sqrt{(t^2+9)}+3)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{(t^2+9)}+3}$$

$$= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

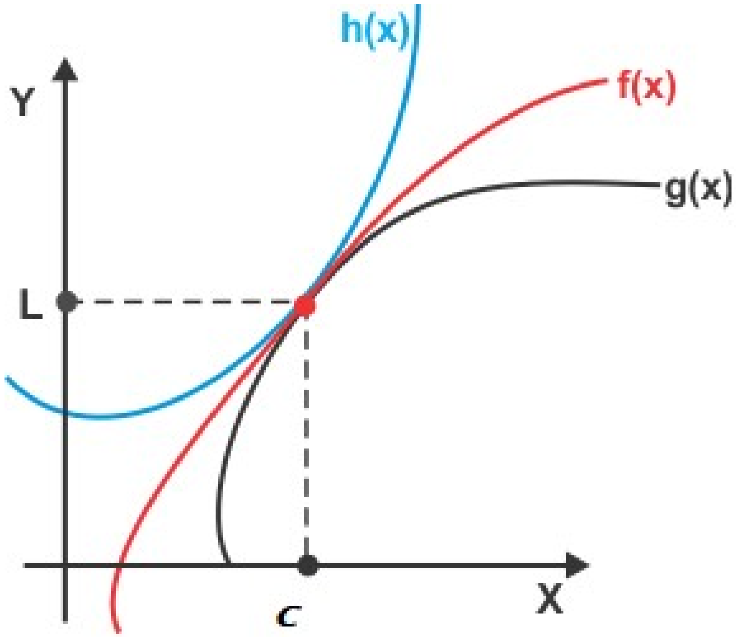
# Leis do Limite

- **Teorema do Confronto:** suponha que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo c, exceto, possivelmente, no próprio x=c.
  - **Suponha também que**

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

  - **Então:**

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$



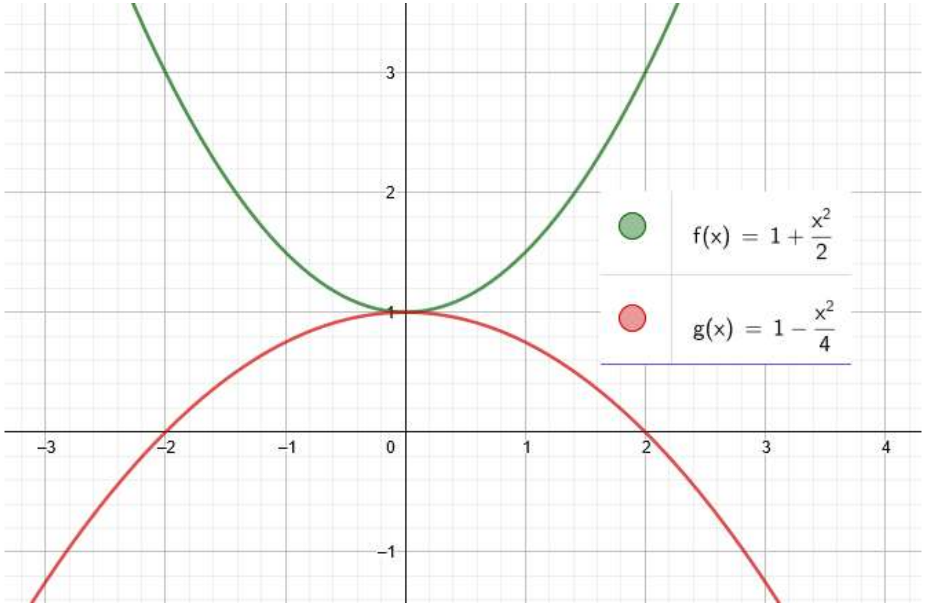
# Leis do Limite

- **Exemplo:** uma vez que $1 - \frac{x^2}{4} \leq \mathrm{u(x)} \leq 1 + \frac{x^2}{2}$ , para x $\neq$0. Determine $\lim_{x \to 0} u(x)$
  - **Como:**

$$\lim_{x \to 0} 1 - \frac{x^2}{4} = \mathbf{1} \quad \boldsymbol{e} \qquad \lim_{x \to 0} 1 + \frac{x^2}{2} = \mathbf{1}$$

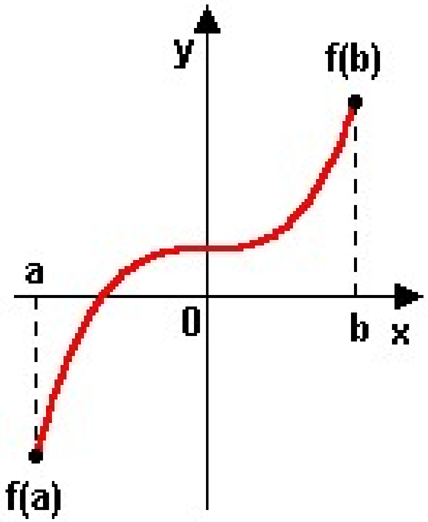
  - **Então:**

$$\lim_{x \to 0} \boldsymbol{u(x)} = \mathbf{1}$$

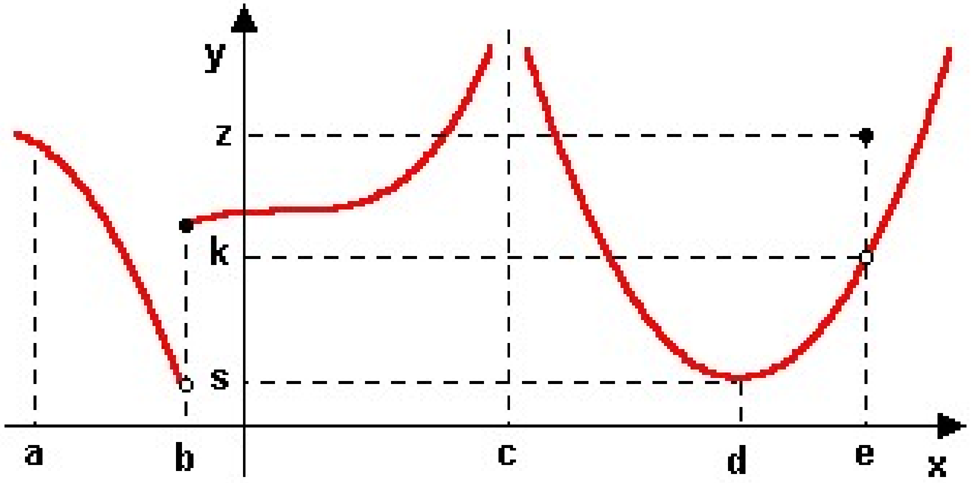


# Continuidade

- Dizemos que f é contínua no ponto x=a se f(x) aproximar o valor de f(a) com x tendendo ao valor a.




CONTÍNUA




DESCONTÍNUA

# Continuidade

- Alguns exemplos de funções contínuas:
  - Polinômios.
  - Funções racionais.
  - Funções trigonométricas.
  - Funções trigonométricas inversas.
  - Funções exponenciais.
  - Funções logarítmicas.

# Continuidade

- Dizemos que uma função f(x) é contínua num ponto *a* do seu domínio se as seguintes condições são satisfeitas:
  I. $\exists\, f(a)$
  II. $\exists\, \lim_{x \to a} f(x)$
  III. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

# Continuidade

- **Propriedade das Funções contínuas:**
  - **Se f(x) e g(x)são contínuas em x = a, então:**
    - **f(x)$\pm$g(x) é contínua em a;**
    - **f(x) . g(x) é contínua em a;**
    - $\frac{f(x)}{g(x)}$ **é contínua em a (g(a)$\neq$ $0$) .**
    - $[f(x)]^n$ **é contínua em a (n $\in Z^+$)**
    - $\sqrt[n]{f(x)}$ **é contínua em a (n $\in Z^+$)**
    - **Se f(x) é contínua em "a" e g(x) é contínua em f(c), então gof é contínua em "a".**

# Continuidade

- **Exemplo:** a função f(x)=x-2 é continua no ponto x=2?

*I.* $\exists\ f(a)$

$$f(2) = 2 - 2 = 0\ (existe)$$

*II.* $\exists\ \lim\limits_{x \to a} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x - 2$ =2-2=0 (existe)

*III.* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ = $f(a)$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ = $f(2) \leftrightarrow 0=0$ (são iguais)

Logo f(x) é continua no ponto x=2.

# Continuidade

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

- **Exemplo:** Dado $\boldsymbol{f(x) = x^2 e\ g(x) = x + 1}$. Determine se gof é contínuo em c=2.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

$\lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4 \therefore f(2) = 2^2 = 4$ (é contínua)

$$\lim_{x \to f(2)} g(x) = g(f(2))$$

$\lim_{x \to f(2)} g(x) = 4 + 1 = 5 \therefore g\big(f(2)\big) = 4 + 1 = 5$ (é contínua)

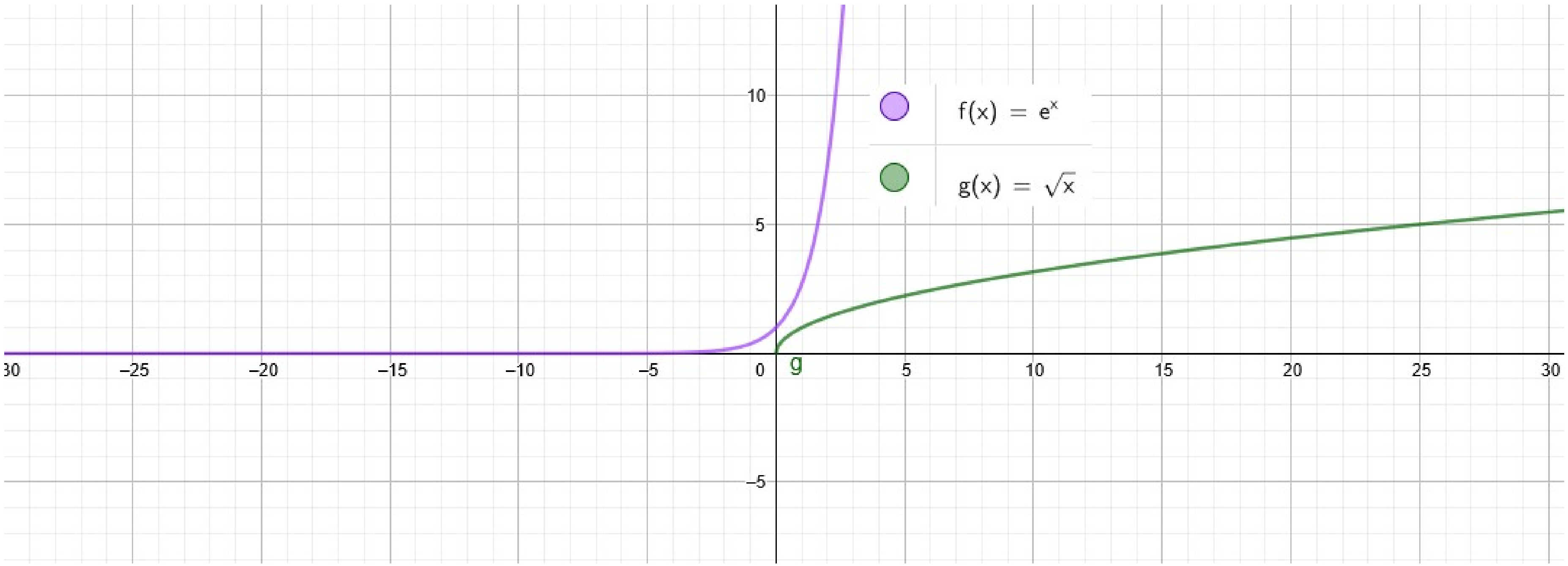
Logo: gof(2) é contínua

$$g\big(f(x)\big) = x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

# Continuidade

- **Exercício:** quais das funções abaixo são contínuas no conjunto do **números reais**.

  $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$



# Continuidade

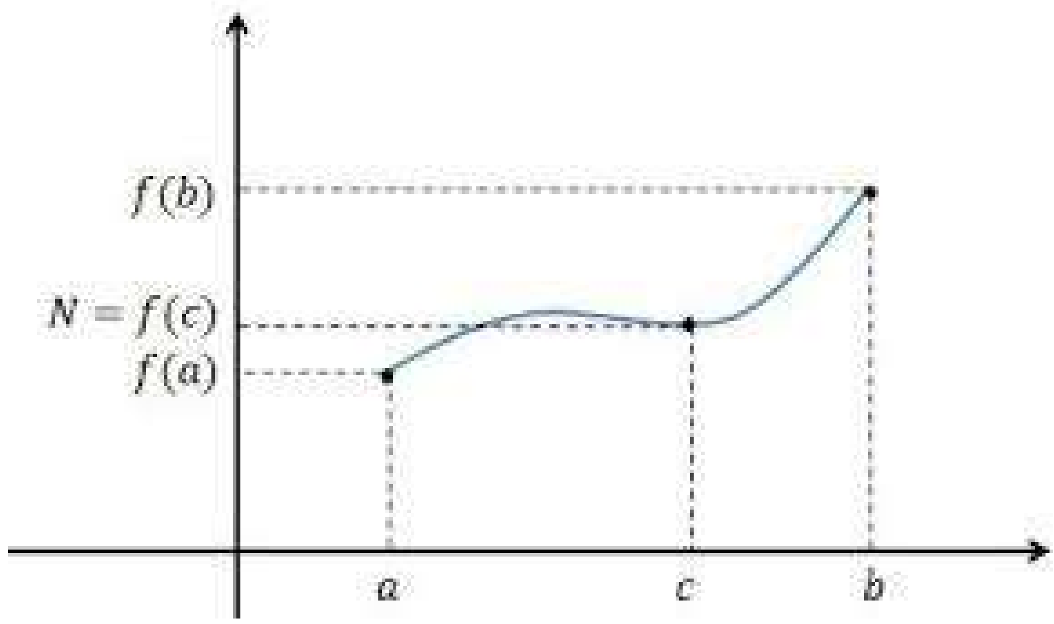
- **Exercício:** quais das funções abaixo são contínuas no conjunto do números reais.

  $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$

  R= somente f(x)

# Teorema do valor intermediário

- Suponhamos que f é uma função **contínua** no intervalo fechado [a, b]. Se N é um valor entre f(a) e f(b), então existe pelo menos um c ∈ [a, b] tal que f(c) = N.



# Teorema do valor intermediário

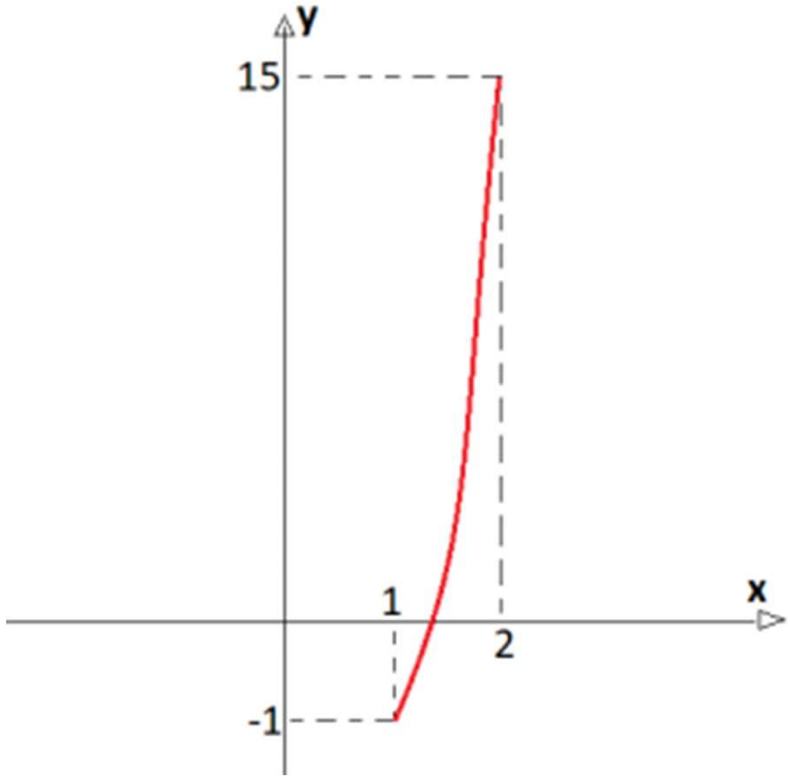
- Exemplo: Demonstrar que a equação $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$ possui pelo menos uma raiz real.
  - Devemos analisar a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$, que por ser polinomial, é uma função contínua.

$$f(1) = 1^3 + 3.1^2 - 5 = 1 + 3 - 5 = -1$$

$$f(2) = 2^3 + 3.2^2 - 5 = 8 + 12 - 5 = 15$$

# Teorema do valor intermediário

- Exemplo: Demonstrar que a equação $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$ possui pelo menos uma raiz real.



# Teorema do valor intermediário

- Exemplo: Demonstrar que a equação $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$ possui pelo menos uma raiz real.
  - Pelo Teorema do Valor Intermediário, podemos concluir que existe $c \in [1,2]$, tal que $f(c) = 0$, de onde podemos concluir que a equação $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$ possui pelo menos uma raiz real.

# Teorema do valor intermediário

- Exemplo 2: A conclusão do teorema pode ser falsa se a função não for contínua. Considere D[0,2]:

$$f(x) = \begin{cases} x, se\ x \neq 1 \\ 2, se\ x = 1 \end{cases}$$

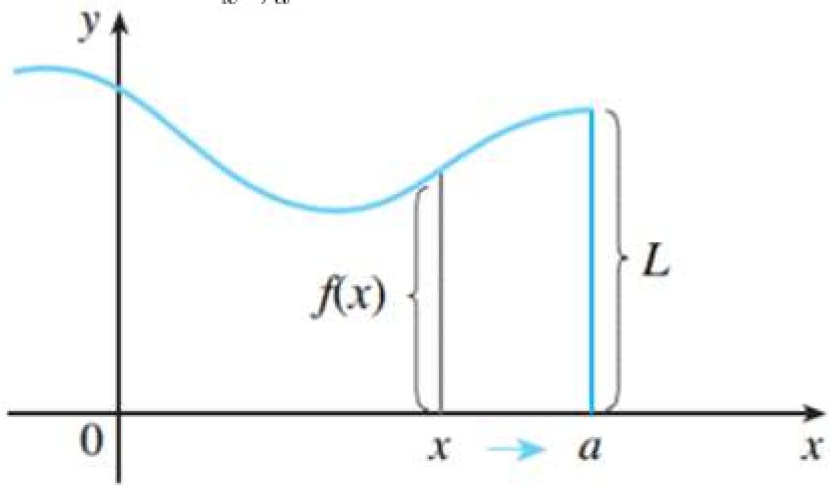
  – Esta função está definida no intervalo [0, 2] e cumpre $f(0) = 0 < 1 < 2 = f(2)$.

  – No entanto, não existe nenhum elemento $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = 1$.

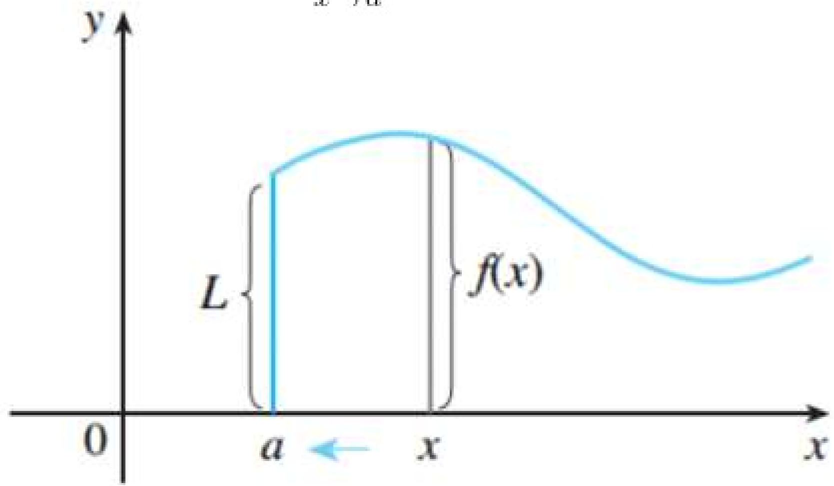
# Limites Laterais

- Significa calcular o limite em um determinado ponto a  aproximando-se por ambos os lados, ou seja, pela direita e pela esquerda.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$




$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$



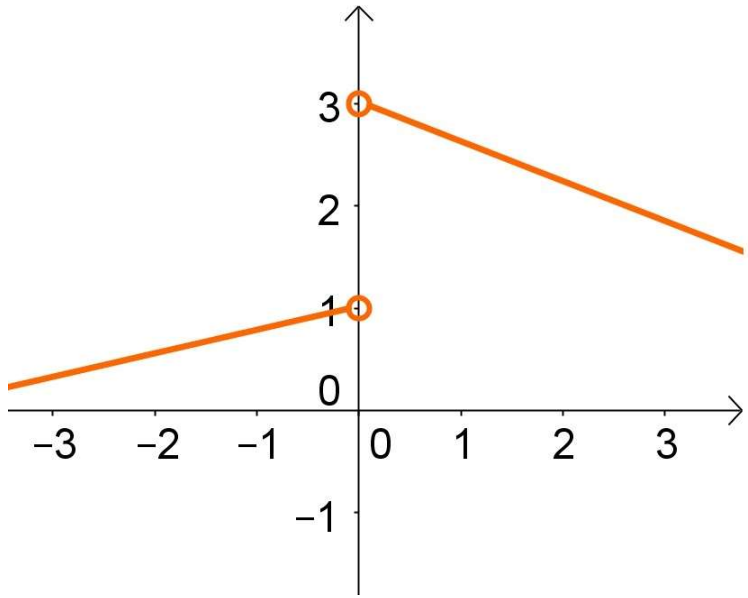
# Limites Laterais

- Exemplo: Observando o gráfico da função f(x) presente na figura a seguir, podemos determinar os seus limites.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \nexists$$



# Limites Laterais

- O limite de f(x) para x→a existe se, e somente se, os limites laterais à direita a esquerda são iguais.
- Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = C$
  - Então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = C$$

Obs: Caso os limites laterais em “a” sejam diferentes, o limite neste ponto a não existe.

# Limites Laterais

- Exemplos: Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & se \;\; x \leqslant -2 \\ 2x + 7, & se \;\; x > -2 \end{cases}$

**a)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

Quando o limite tende pela direita temos a função $f(x) = 2x + 7$ . Ao aplicar o limite quando $x \to -2$ obtém-se:

$$\lim_{x \to -2^+} 2x + 7 = -4 + 7 = 3 \;\; .$$

Logo,

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = 3 \;\; .$$

# Limites Laterais

- Exemplos: Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & se \quad x \leqslant -2 \\ 2x + 7, & se \quad x > -2 \end{cases}$

**b)** $\lim_{x \to -2^-} f(x)$

Quando o limite tende pela esquerda temos a função $f(x) = x^2 - 1$ . Ao aplicar o limite quando $x \to -2$ obtém-se:

$$\lim_{x \to -2^-} x^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \quad .$$

Logo,

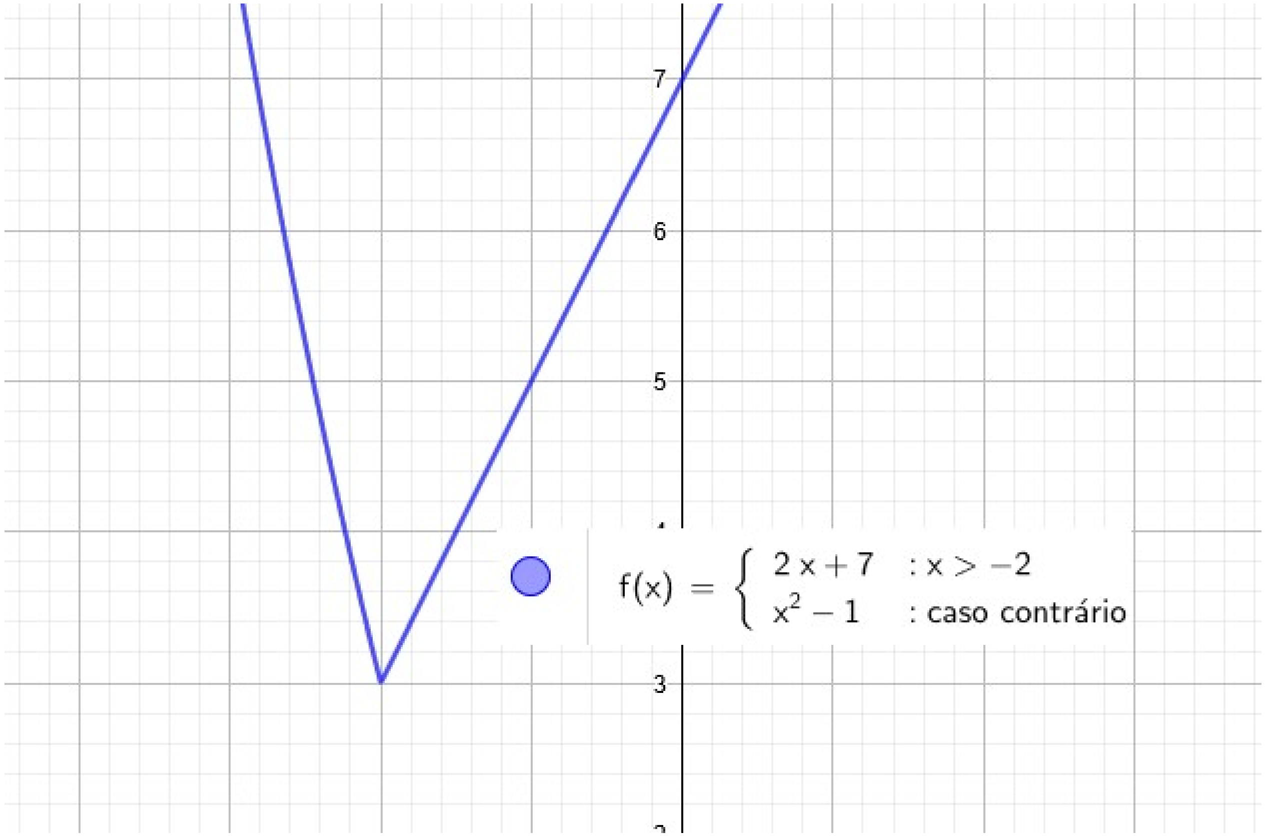
$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = 3 \quad .$$

Portanto, os limites laterais são iguais, ou seja, $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^-} f(x) = 3$ e pela **Existência do Limite** tem-se:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 3 \quad .$$

# Limites Laterais

- Exemplos: Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & se \quad x \leqslant -2 \\ 2x + 7, & se \quad x > -2 \end{cases}$



# Limites Laterais

- Exemplos: para a função g(x) ilustrada abaixo, encontre os limites a seguir: $\lim_{x \to 1^-} g(x) = ?;$ $\lim_{x \to 1^+} g(x) = ;$ $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 1;$ $\lim_{x \to 2^+} g(x) = 1;$ $\lim_{x \to 3^-} g(x) = 0;$ $\lim_{x \to 3^+} g(x) = 0;$ $\lim_{x \to 4^-} g(x) = 1;$ $\lim_{x \to 4^+} g(x) = \nexists;$ $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

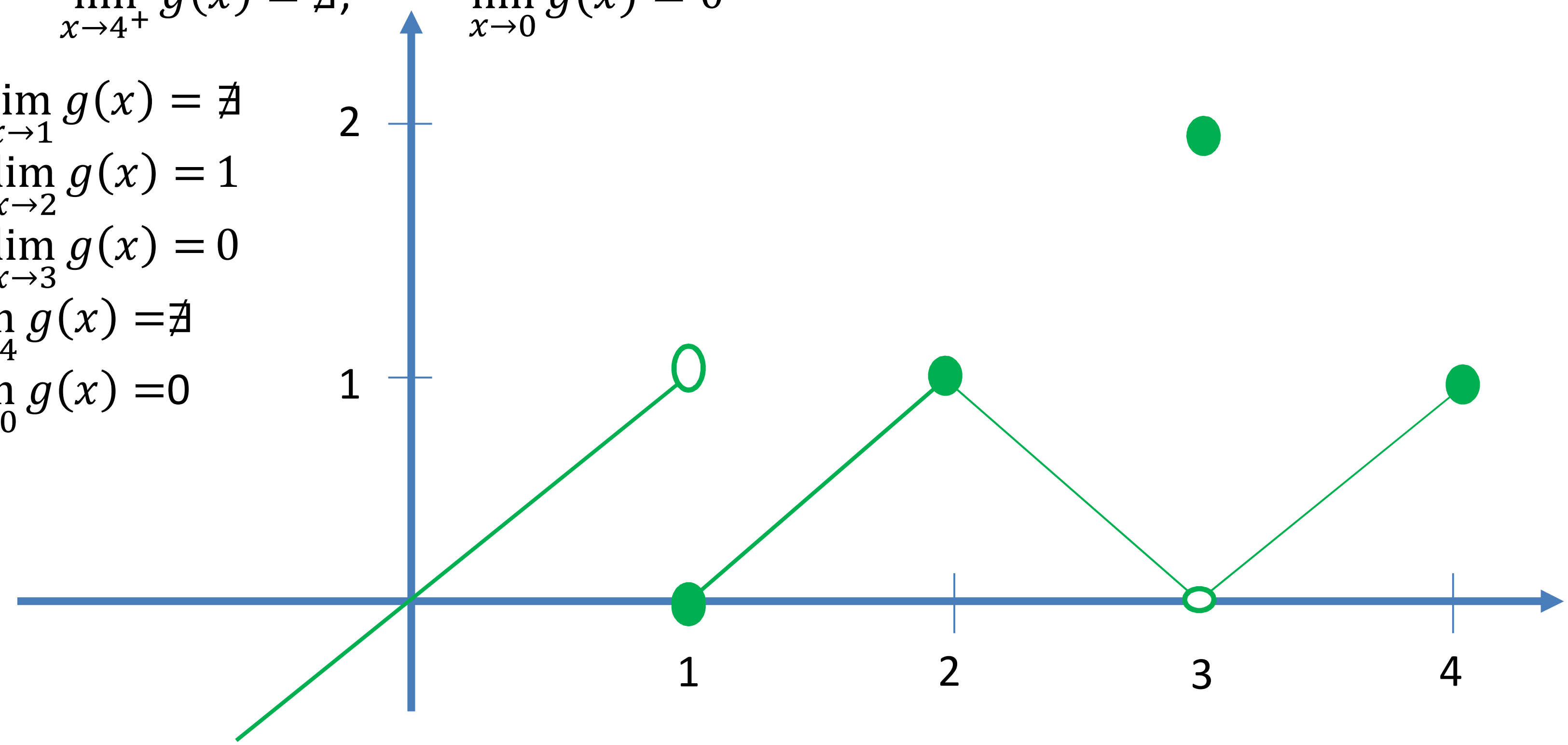
$\lim_{x \to 1} g(x) = \nexists$

$\lim_{x \to 2} g(x) = 1$

$\lim_{x \to 3} g(x) = 0$

$\lim_{x \to 4} g(x) = \nexists$

$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$



# Limites Laterais

- Exemplos: para a função g(x) ilustrada abaixo, encontre os limites a seguir: $\lim_{x \to 1^-} g(x) = ?$; $\lim_{x \to 1^+} g(x) = ?$; $\lim_{x \to 2^-} g(x) = ?$; $\lim_{x \to 2^+} g(x) = ?$; $\lim_{x \to 3^-} g(x) = ?$; $\lim_{x \to 3^+} g(x) = ?$; $\lim_{x \to 4^-} g(x) = ?$; $\lim_{x \to 4^+} g(x) = ?$; $\lim_{x \to 0} g(x) = ?$

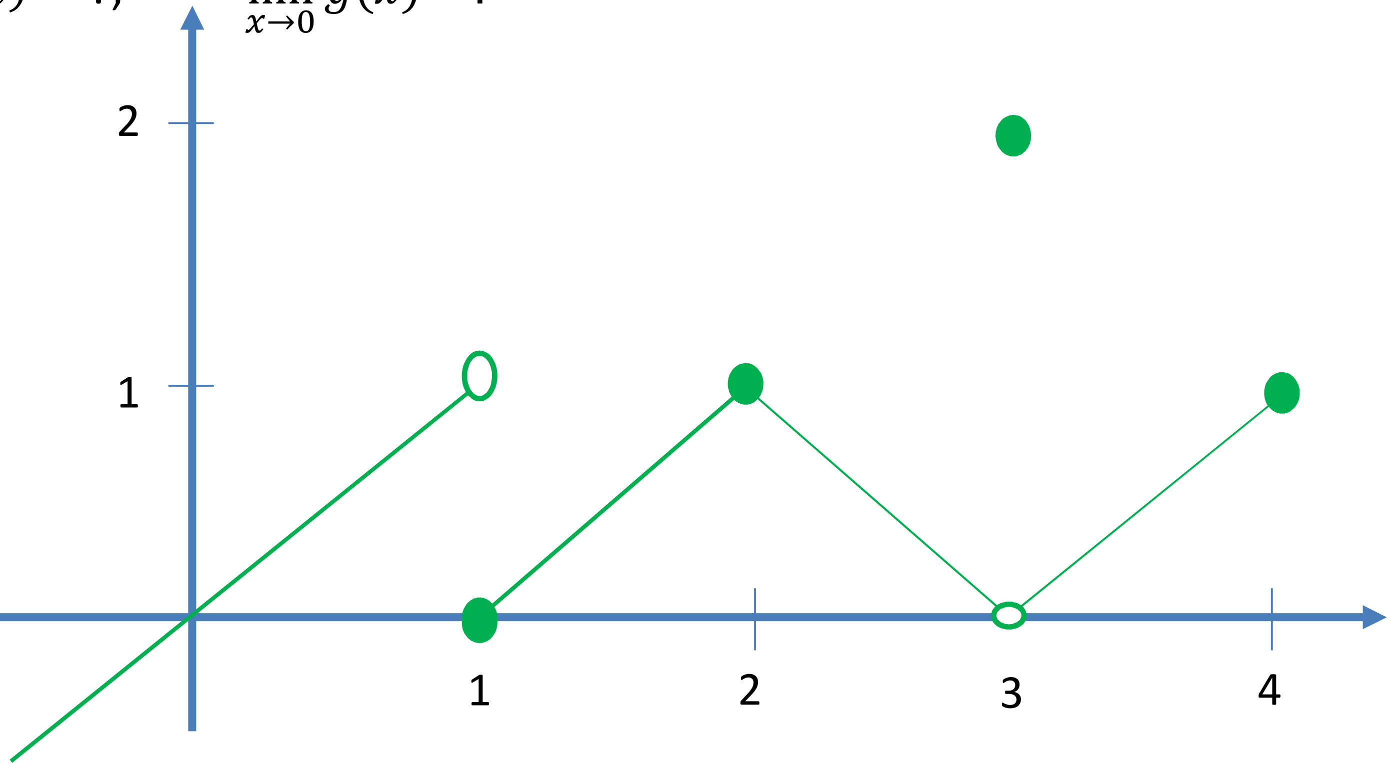
$\lim_{x \to 1} g(x) =$

$\lim_{x \to 2} g(x) =$

$\lim_{x \to 3} g(x) =$

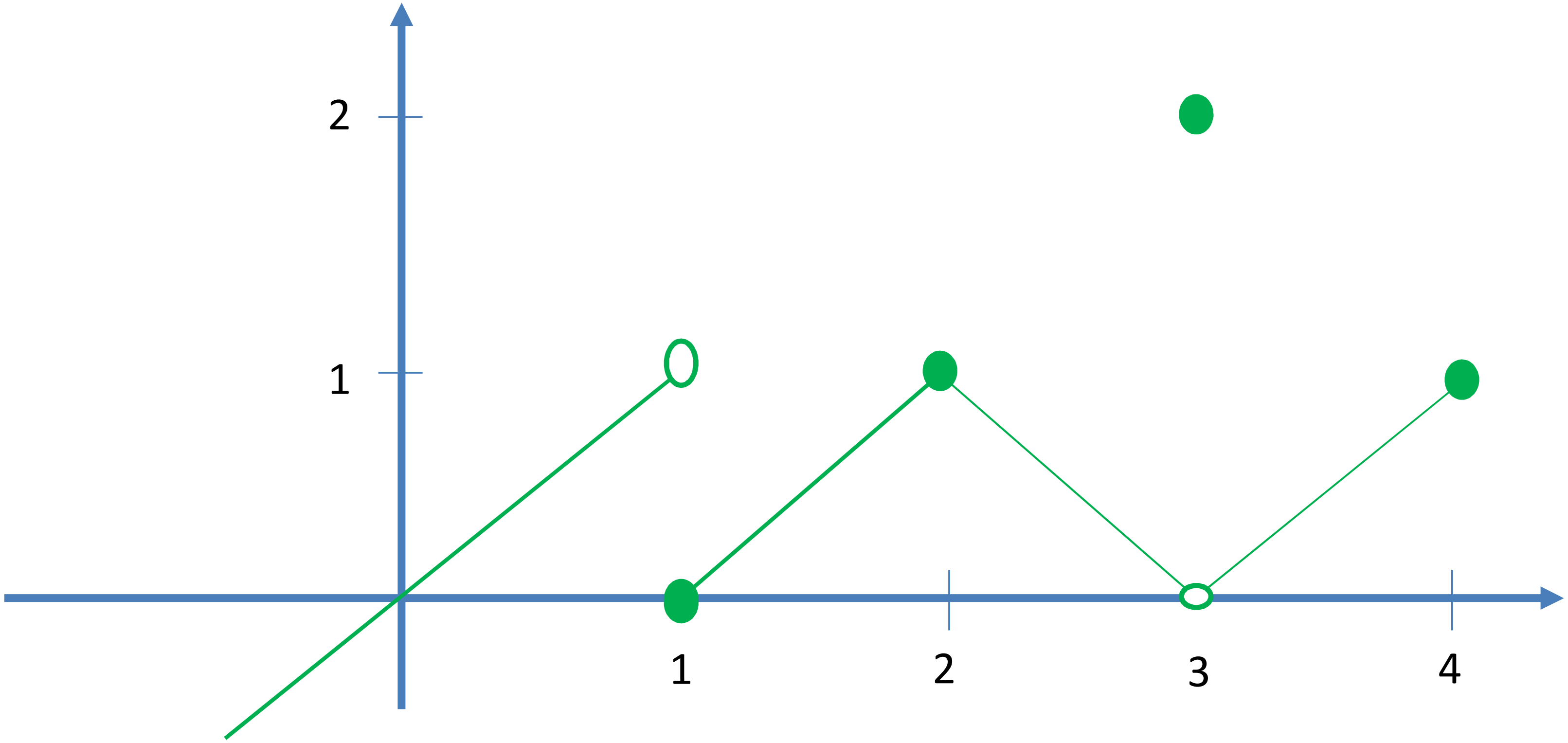
$\lim_{x \to 4} g(x) =$

$\lim_{x \to 0} g(x) =$



# Limites Laterais

- Exemplos: $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 1$; $\lim_{x \to 1^+} g(x) = 0$; $\lim_{x \to 2^-} g(x)=1$; $\lim_{x \to 2^+} g(x)=1$; $\lim_{x \to 3^-} g(x) = 0$; $\lim_{x \to 3^+} g(x) = 0$; $\lim_{x \to 4^-} g(x) = 1$; $\lim_{x \to 4^+} g(x) = \nexists$; $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$



# Limites Laterais

- Exercícios: determine os limites $\lim_{x \to 3^+} \sqrt{x-3}$ , $\lim_{x \to 3^-} \sqrt{x-3}$ e $\lim_{x \to 3} \sqrt{x-3}$

# Limites Laterais

- Exercícios: determine os limites

$\lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x-3}$

$= \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{3{,}00001 - 3} = \sqrt{0{,}00001} = 0{,}00316...$

$\lim\limits_{x \to 3^-} \sqrt{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \sqrt{2{,}99999 - 3} = \sqrt{-0{,}00001} = \nexists$

$\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x-3}$

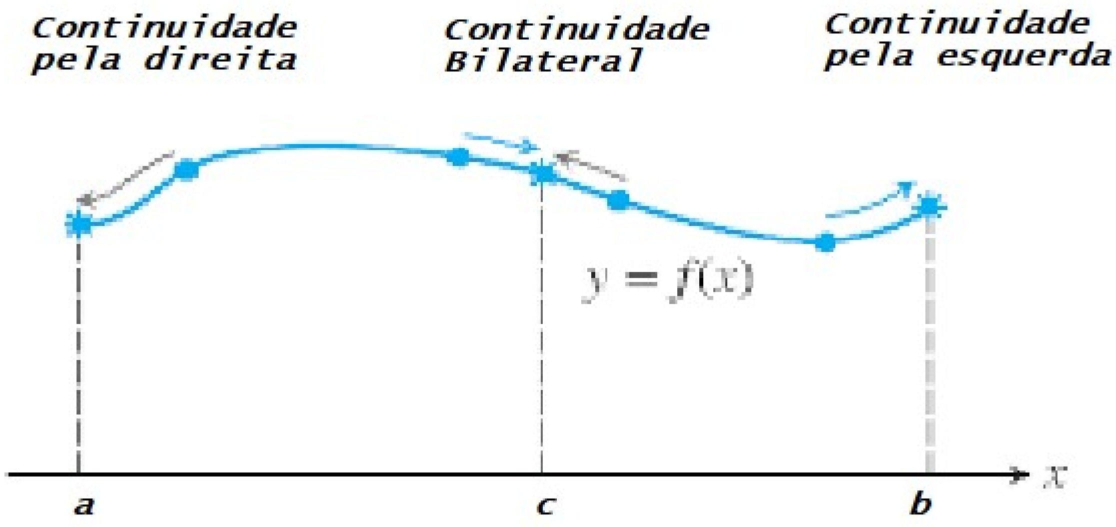
$\lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} \neq \lim\limits_{x \to 3^-} \sqrt{x-3}$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x-3} = \nexists$

# Continuidade

- **Extremidades:** uma função $y = f(x)$ é contínua na extremidade esquerda "a" de seu domínio se:

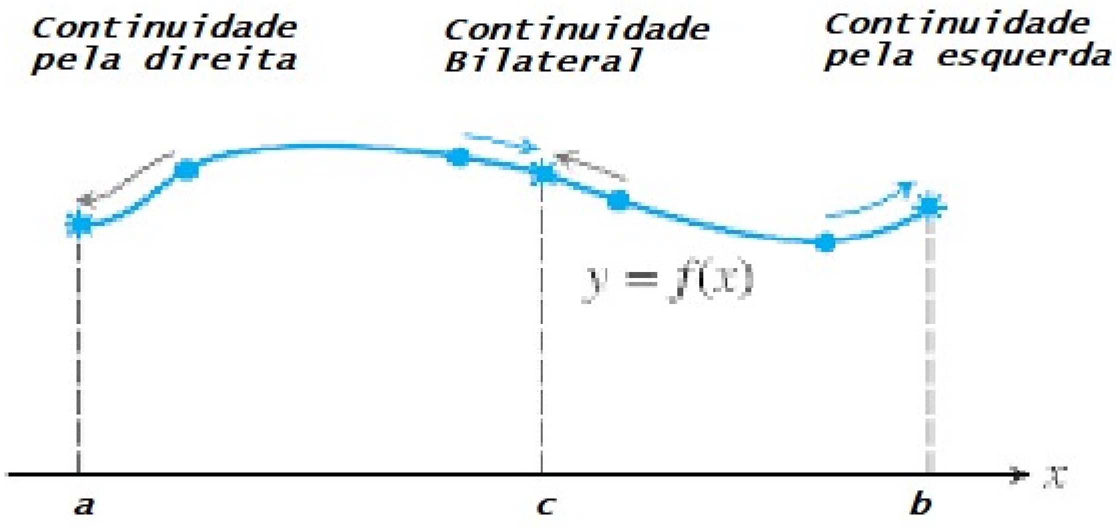
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$



# Continuidade

- **Extremidades:** uma função $y = f(x)$ é contínua na extremidade direita "b" de seu domínio se:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$



# Continuidade

- **Exemplo:** a função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é contínua em todo seu domínio [-2,2]?
  - Extremidade esquerda $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = f(-2)$$

$$\sqrt{\lim_{x \to -2^+} 4 - x^2} = \sqrt{4 - (-2)^2}$$

$$\sqrt{4 - 4} = \sqrt{4 - 4}$$

São iguais logo é a extremidade da esquerda

# Continuidade

- **Exemplo:** a função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é contínua em todo seu domínio [-2,2]?
  - Extremidade direita $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

$$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = f(2)$$

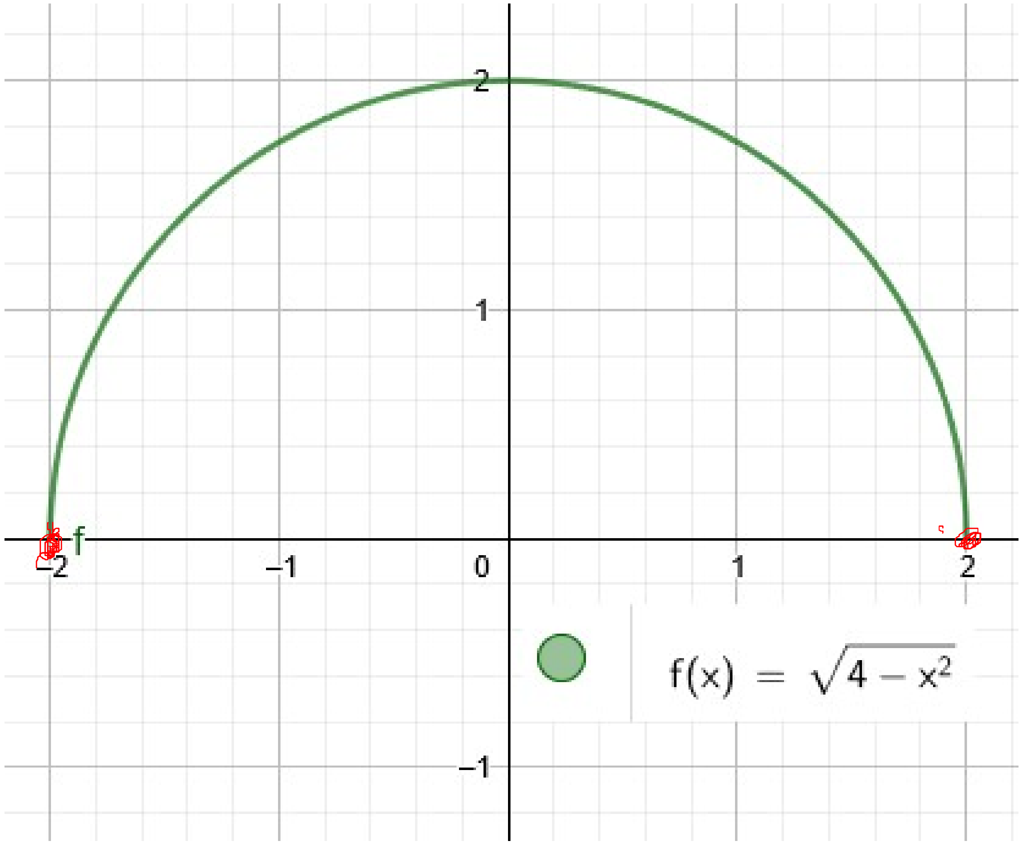
$$\sqrt{\lim_{x \to 2^-} 4 - x^2} = \sqrt{4 - 2^2}$$

$$\sqrt{4 - 4} = \sqrt{4 - 4}$$

São iguais logo é a extremidade da direita

# Continuidade

- **Exemplo:** a função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é contínua em todo seu domínio [-2,2]?



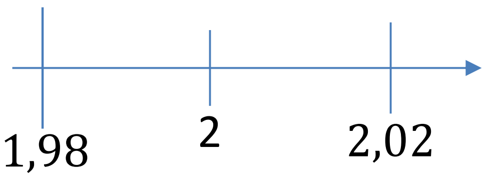

Obs: a função não possui limites bilaterais em x=-2 e x=2

# Definição precisa de Limite

- https://www.youtube.com/watch?v=zPqqLgtpblU
- Assista o vídeo e responda o exercício equivalente ao seu nome nos próximos slides.

# Definição precisa de Limite

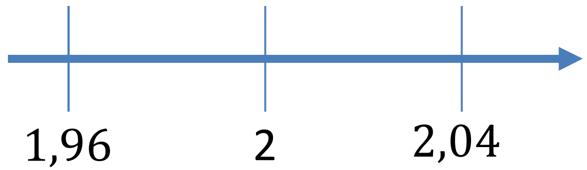
- Exercício(valendo 1 pt na prova): Dado $\lim_{x \to 2}(6 + 2x)$ e ε=0,04. Determine um δ positivo tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que 0<|x-a|< δ




| | | |
|---|---|---|
| 2 | 20211019090 | BRUNO MCPHERSON SIMÔA CHIAMENTI |
| 11 | 20211021740 | IAN LAVORENTE DE MIRANDA |
| 12 | 20211016249 | JOAO GUILHERME TAVARES REIS |
| 13 | 20211014440 | JOÃO PEDRO DIAS MAGALHÃES |

# Definição precisa de Limite

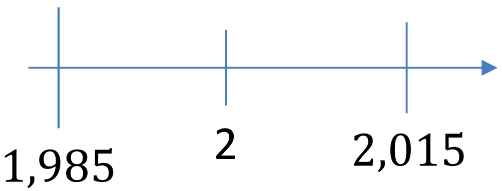
- Exercício(valendo 1 pt na prova): Dado $\lim_{x \to 2}(6 + 2x)$ e ε=0,08. Determine um δ positivo tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que 0<|x-a|< δ




| | | |
|---|---|---|
| 3 | 20211010530 | DEIVISON CORRÊA LIMA |
| 4 | 20201008360 | FERNANDO MARQUES FERREIRA |
| 14 | 20211010639 | KAROLYNE IMACULADA ANDRADE MUNIZ |
| 15 | 20211010147 | LUIZ HENRIQUE DE ALMEIDA FORTE |

# Definição precisa de Limite

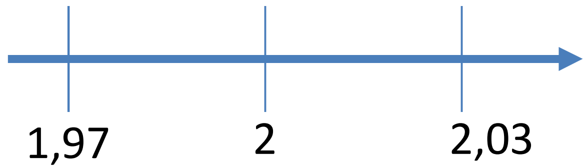
- Exercício(valendo 1 pt na prova): Dado $\lim_{x \to 2}(6 + 2x)$ e ε=0,03. Determine um δ positivo tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que 0<|x-a|< δ




| | | |
|---|---|---|
| 5 | 20211010586 | GABRIEL BARROS COSTA |
| 6 | 20211020340 | GABRIEL SERGIO SALDANHA DA SILVA |
| 16 | 20211010755 | MARIA LUIZA RODRIGUES DOS PASSOS |
| 17 | 20211010782 | SANDY PEREIRA CAMPOS |

# Definição precisa de Limite

- Exercício(valendo 1 pt na prova): Dado $\lim_{x \to 2}(6 + 2x)$ e ε=0,06. Determine um δ positivo tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que 0<|x-a|< δ

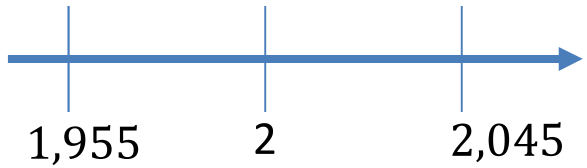



δ =0,03

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 20211014413 | GABRIELLY CRISTINE ARAÚJO RODRIGUES |
| 8 | 20201001912 | GIANLUCA GIMENES GALVAO |
| 18 | 201611948 | VICTOR HUGO RIBEIRO GOMES |

# Definição precisa de Limite

- Exercício(valendo 1 pt na prova): Dado $\lim_{x \to 2}(6 + 2x)$ e ε=0,09. Determine um δ positivo tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que 0<|x-a|< δ




| | | |
|---|---|---|
| 1 | 20211010100 | ANDERSON DA SILVA MENDONÇA |
| 9 | 20211010620 | GUILHERME ALVES DE LUNA SILVA |
| 10 | 20211014422 | GUSTAVO DE CAMILO KLOSINSKI |
| 19 | 20211010817 | WILLIAM CARDOSO BARBOSA |