Calculo I

FUNÇÕES E MODELOS

Prof. Pablo Vargas

Tópicos Abordados

- Gráficos de Funções
- Combinações de Funções
- **Composição de Funções**
- Função Inversa
- Função Logarítmicas

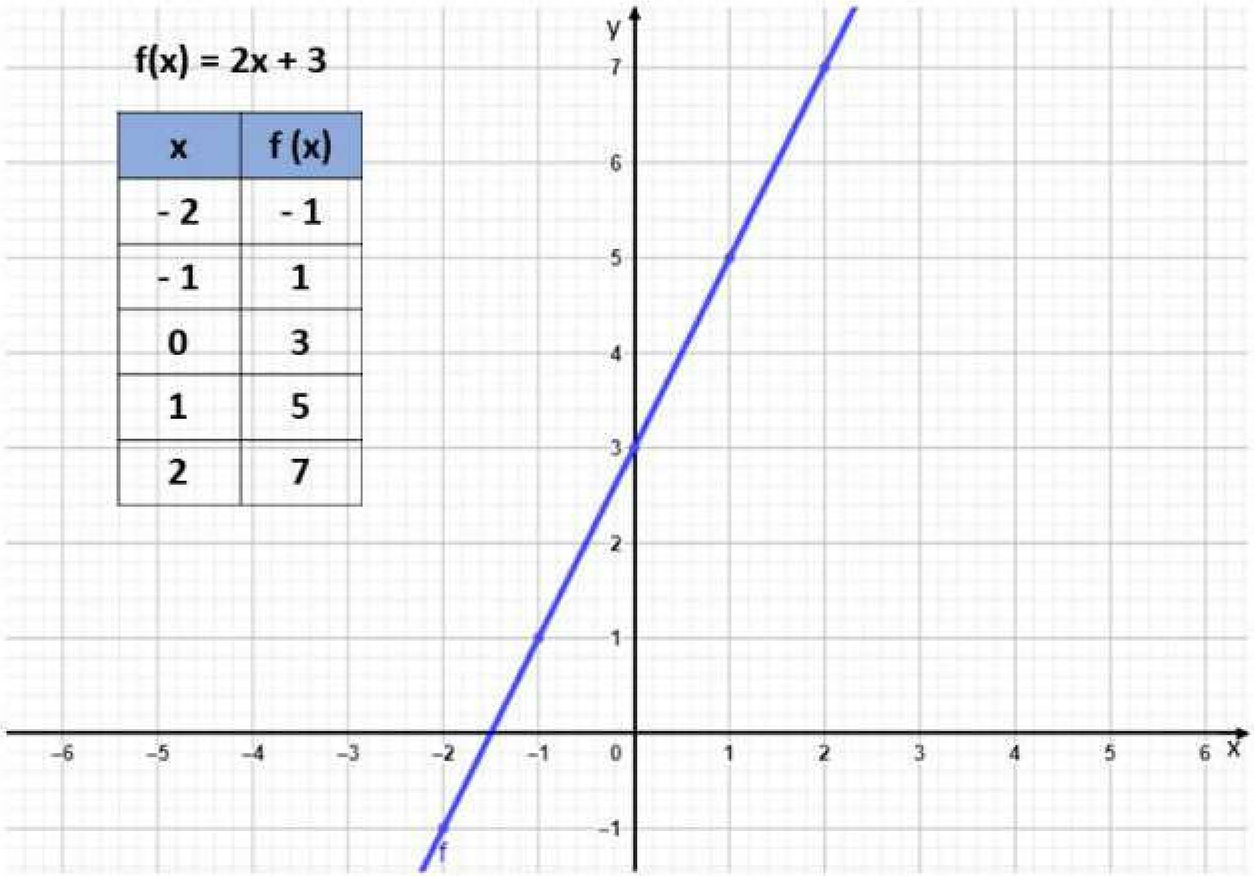
Gráficos de Funções

- “Se f é uma função com domínio D, seu gráfico consiste dos pontos no plano cartesiano cujas coordenadas são pares de entrada/saída para f”

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

Gráficos de Funções

- Exemplo:



x	f (x)
- 2	- 1
- 1	1
0	3
1	5
2	7

Gráficos de Funções

- Faça o gráfico da função:

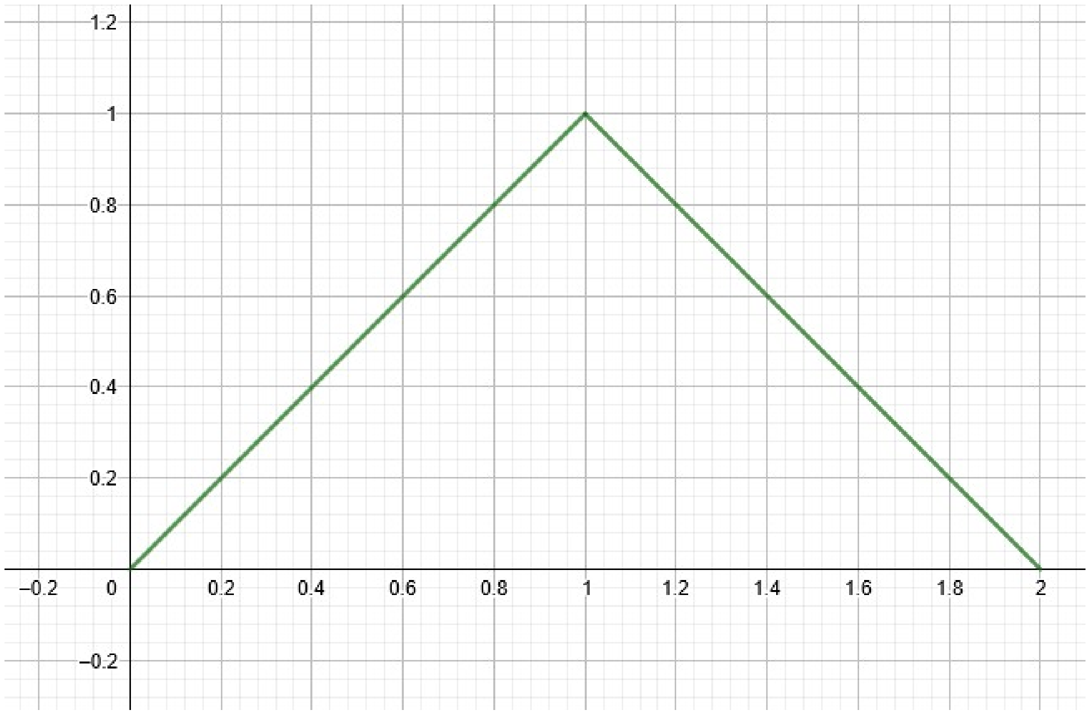
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

x	f(x)
-1	Não existe valores para f(x)
0	$f(0) = 0$
1	$f(1) = 1$
1,5	$f(1{,}5) = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$
2	$f(2) = 2 - 2 = 0$
3	Não existe valores para f(x)

Gráficos de Funções

- Faça o gráfico da função:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



Exercícios

- Faça o gráfico da função:

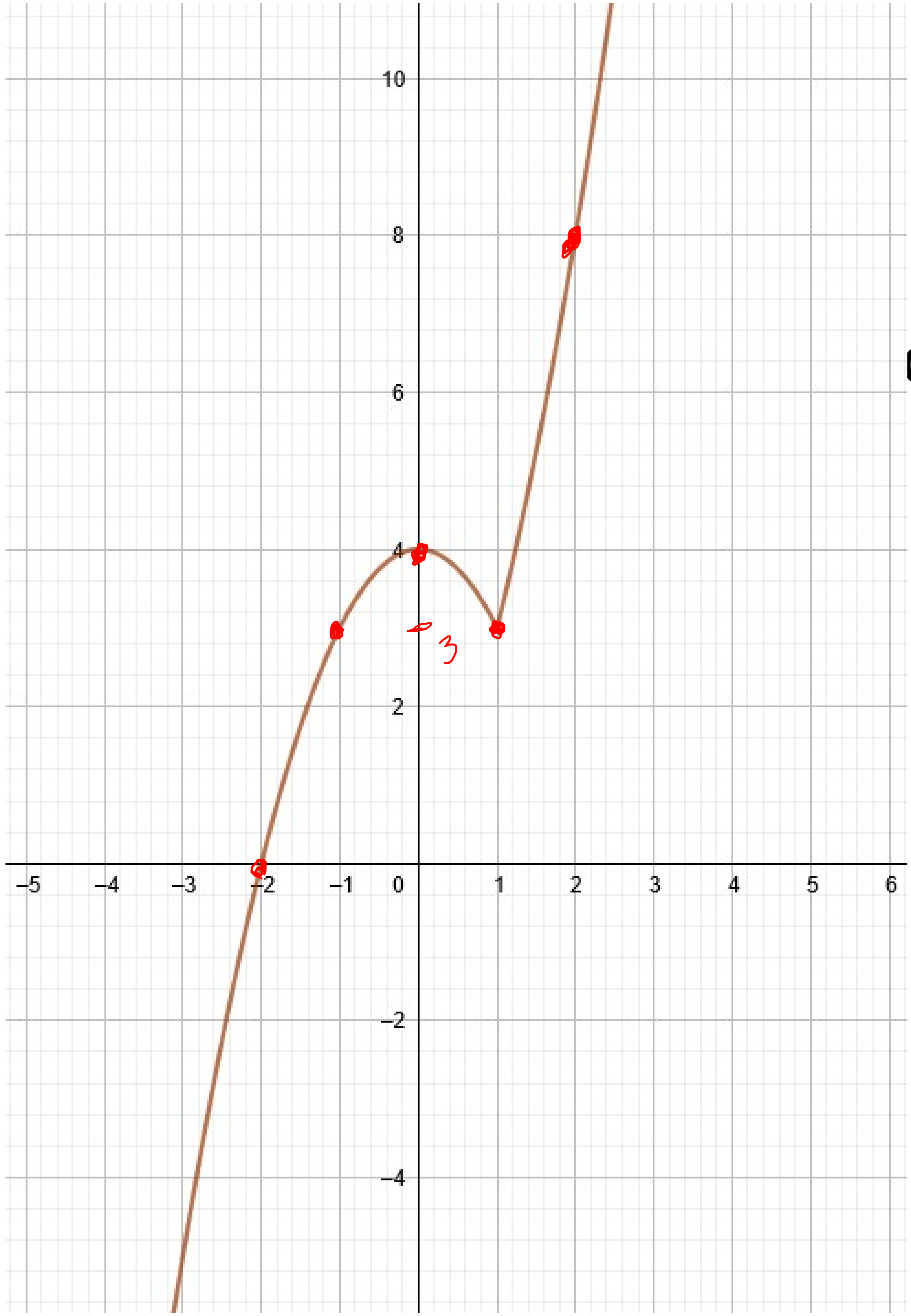
$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ x^2 + 2x, & x > 1 \end{cases}$$

Exercícios

- Faça o gráfico da função:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ x^2 + 2x, & x > 1 \end{cases}$$

X	$f(x)$
-2	$f(-2) = 4 - (-2)^2 = 0$
-1	$f(-1) = 4 - (-1)^2 = 3$
0	$f(0) = 4 - 0^2 = 4$
1	$f(1) = 4 - 1^2 = 3$
2	$f(2) = 2^2 + 2.2 = 8$



ícios

o: $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ x^2 + 2x, & x > 1 \end{cases}$

X	$f(x)$
-2	$f(-2) = 4 - (-2)^2 = 0$
-1	$f(-1) = 4 - (-1)^2 = 3$
0	$f(0) = 4 - 0^2 = 4$
1	$f(1) = 4 - 1^2 = 3$
2	$f(2) = 2^2 + 2.2 = 8$

Exercícios

- Encontre o domínio das funções abaixo:

$$a)\ f(x) = \frac{1}{x-7}$$

Exercícios

- Encontre o domínio das funções abaixo:

$$a)\ f(x) = \frac{1}{\underbrace{x-7}}$$

$$x - 7 \neq 0$$

$$x \neq 7$$

$$D = \{x \in R \mid x \neq 7\}$$

Exercícios

- Encontre o domínio das funções abaixo:

$$b)\ g(x) = \frac{3}{\sqrt{3-x}}$$

Exercícios

- Encontre o domínio das funções abaixo:

$b)\ g(x) = \frac{3}{\sqrt{3-x}}$

$$3 - x > 0$$

$$[-x > -3\ ]\ .(-1)$$

$$x < 3$$

$$D = \{x \in R \mid x < 3\}$$

Exercícios

- Encontre o domínio das funções abaixo:

$$c)\ h(x) = \frac{\sqrt{(6+x)}}{\sqrt{x-2}}$$

Exercícios

- Encontre o domínio das funções abaixo:

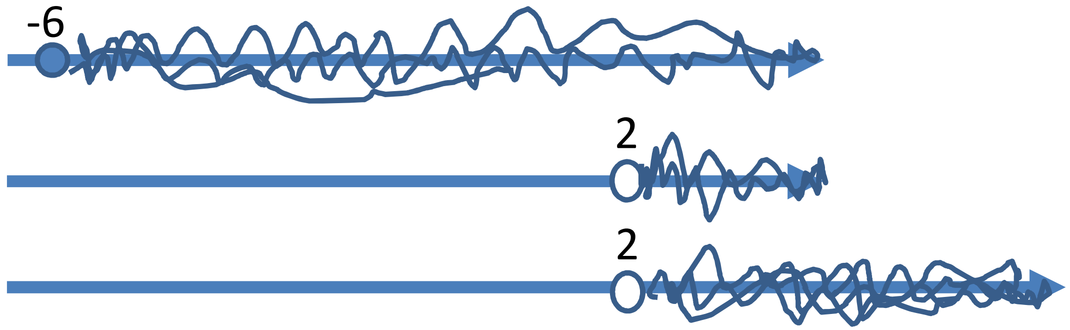
$$c)\ h(x) = \frac{\sqrt{(6+x)}}{\sqrt{x-2}}$$

$$I)\ 6 + x \geq 0$$

$$x \geq -6$$

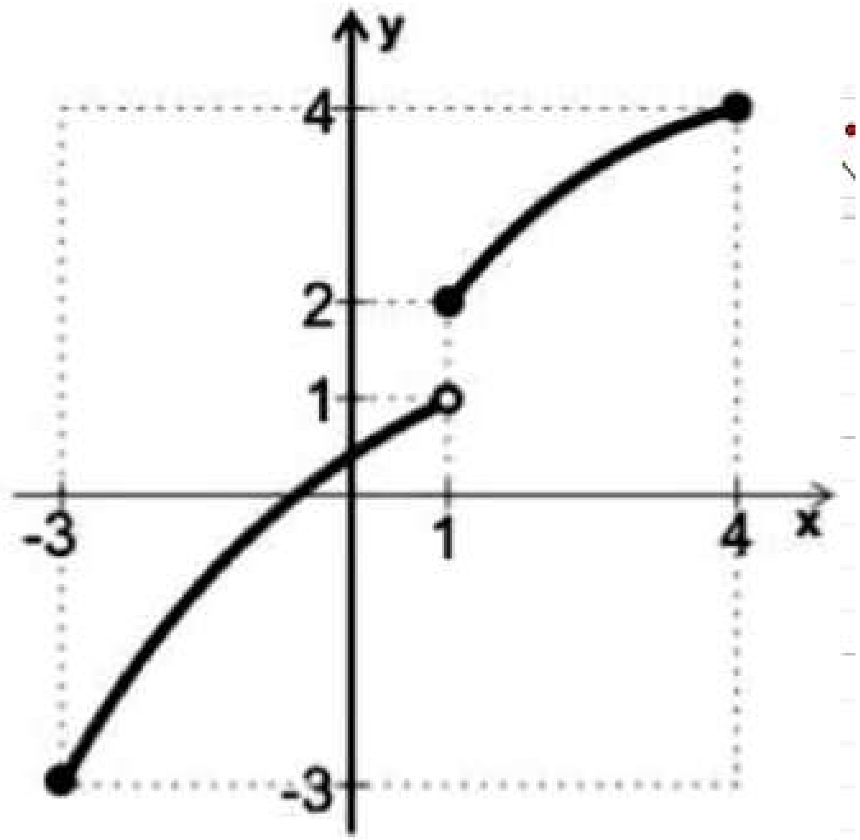
$$II)\ x - 2 > 0$$

$$x > 2$$



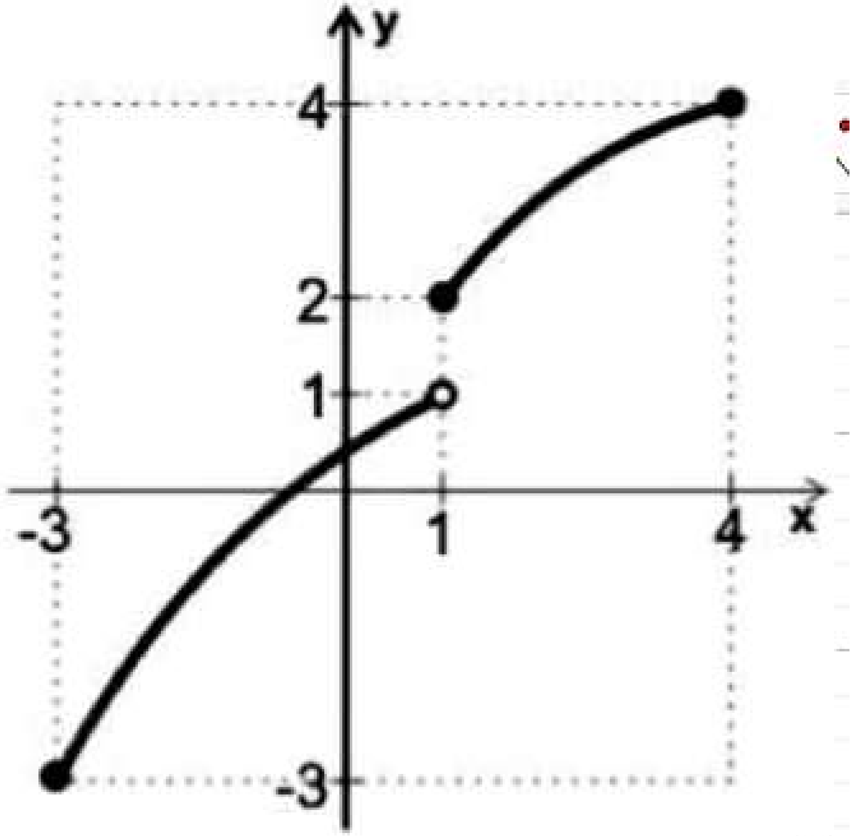
$$D =]2, \infty[$$

Exercícios



$D = ?$ $I = ?$

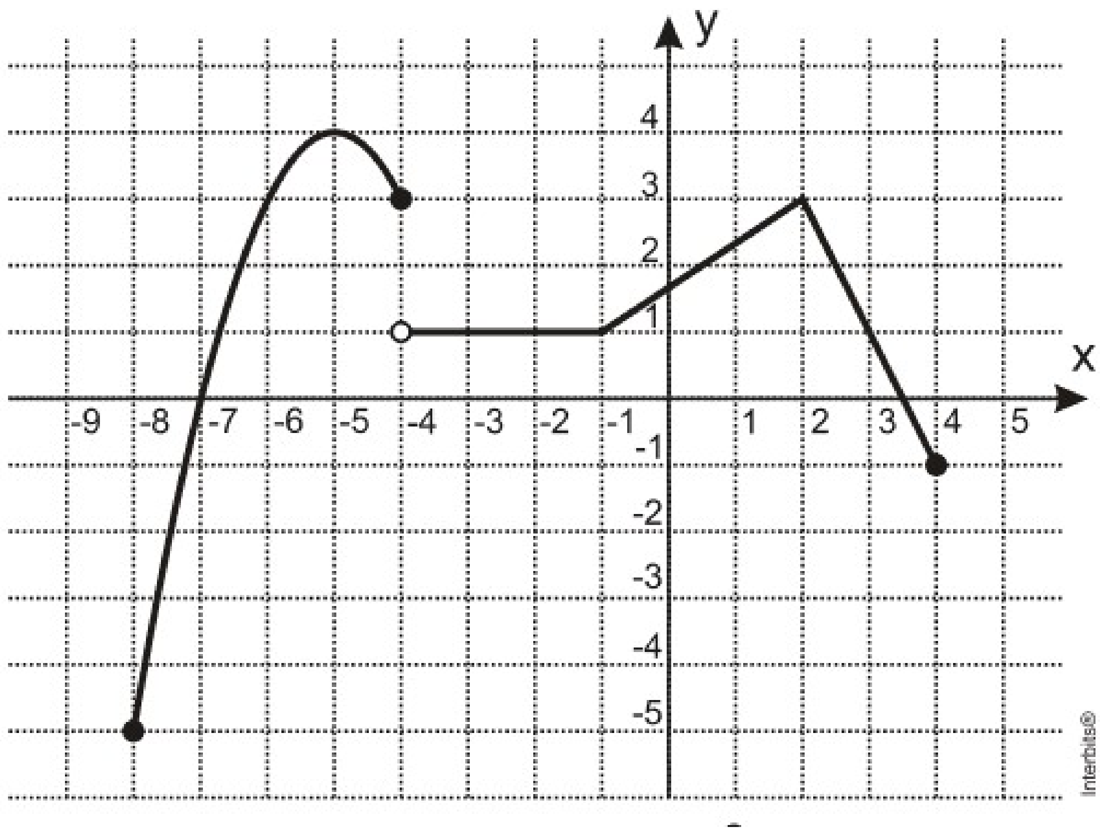
Exercícios



$$D = [-3,4]$$
$$I = [-3,1[\; U \; [2,4]$$

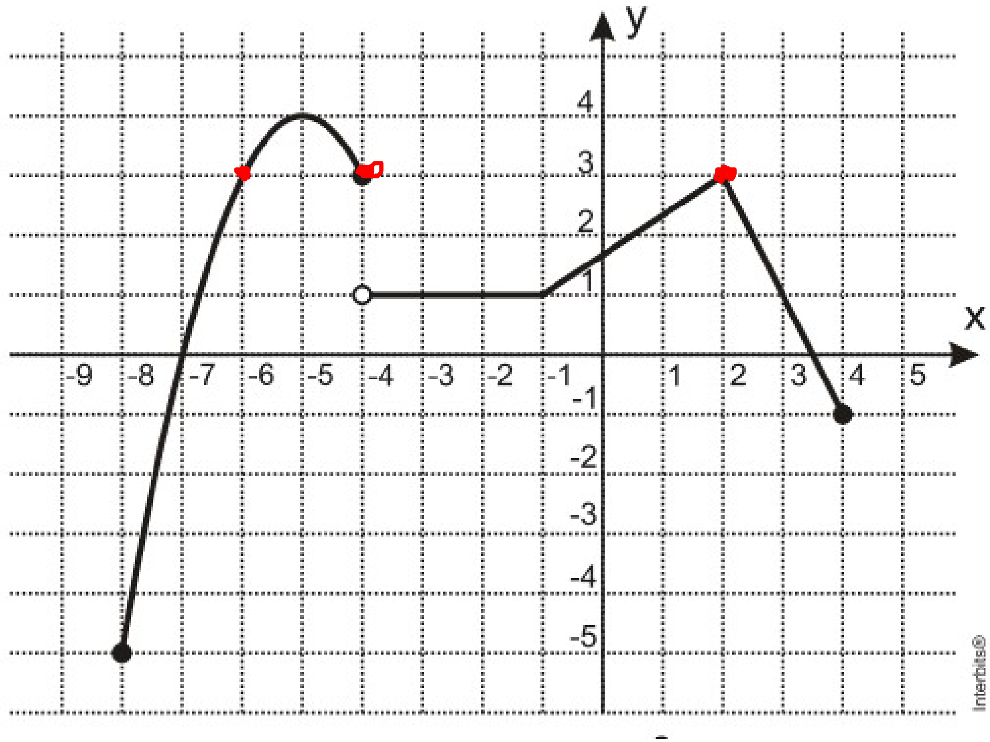
Exercícios

- Encontre o domínio e imagem das funções abaixo:
- Determine f(-4).
- f(x)=3, para x=?



Exercícios

- Encontre o domínio e imagem das funções abaixo: D=[-8,4] e I=[-5,4]
- Determine f(-4)=3.
- f(x)=3, para x=-4, x=2 e x=-6



Combinações de Funções

$$x \in D(f) \cap D(g)$$

- Soma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- Subtração:$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- Multiplicação: $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

$$(cf)(x) = c.f(x)$$

c=constante

- Divisão: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

g(x) $\neq$ 0

Combinações de Funções

- Encontre as funções “f+g”, “f-g”, “f.g”, “f/g”

  $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Combinações de Funções

- Digite a equação aqui.Respostas:$f\,(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

$$(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x^2} \qquad D = [0,2]$$

$$(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4 - x^2} \quad D = [0,2]$$

$$(f.g)(x) = \sqrt{x}.\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4x - x^3} \quad D = [0,2]$$

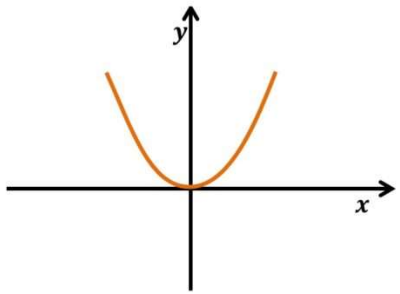
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4 - x^2}} = \sqrt{\frac{x}{4 - x^2}} \quad D = [0,2[$$

Combinações de Funções

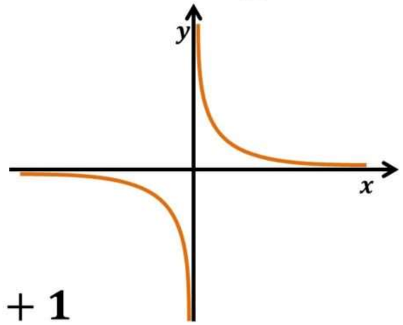
- Exemplo: considere f(x) e g(x), sendo p(x)=f(x)+g(x)

$$\mathbf{p(x)} = \mathbf{f(x)} + \mathbf{g(x)} = x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3+1}{x}$$

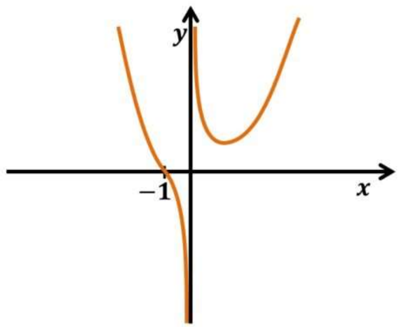
$\boldsymbol{f(x) = x^{2}}$



$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{x}}$

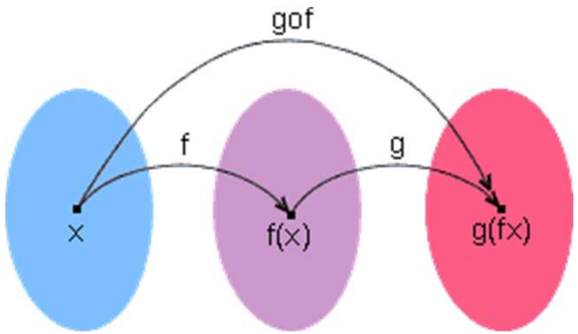


$\boldsymbol{p(x) = \frac{x^3+1}{x}}$



Composição de Funções

$$gof = g(f(x))$$



$$fogoh = f(g(h(x)))$$

Composição de Funções

- Encontre o **f∘g** e **g∘f** das funções abaixo:

$$f(x) = x^2 \quad e \quad g(x) = x - 3$$

Composição de Funções

- Resposta: $f(x) = x^2 \quad e \quad g(x) = x - 3$

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x-3) = (x-3)^2$$
$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = x^2 - 3$$

Exercícios

- Encontre fogoh se $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}, \mathrm{h}(x) = x + 3$.

Exercícios

- Encontre fogoh se $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}, \mathrm{h}(x) = x + 3$.

$$fogoh = f\left(g\big(h(x)\big)\right) = f\big(g(x+3)\big) =$$

$$f((x+3)^{10}) = \frac{\boldsymbol{(x+3)^{10}}}{\boldsymbol{(x+3)^{10}+1}}$$

$$g(h(x)) = g(x+3) = (x+3)^{10}$$

Exercícios

- Resposta: $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}, \mathrm{h}(x) = x + 3$.

  $(fogoh)(x) = f\left(g\big(h(x)\big)\right) = f\big(g(x+3)\big)$

  $= f((x+3)^{10}) = \dfrac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$

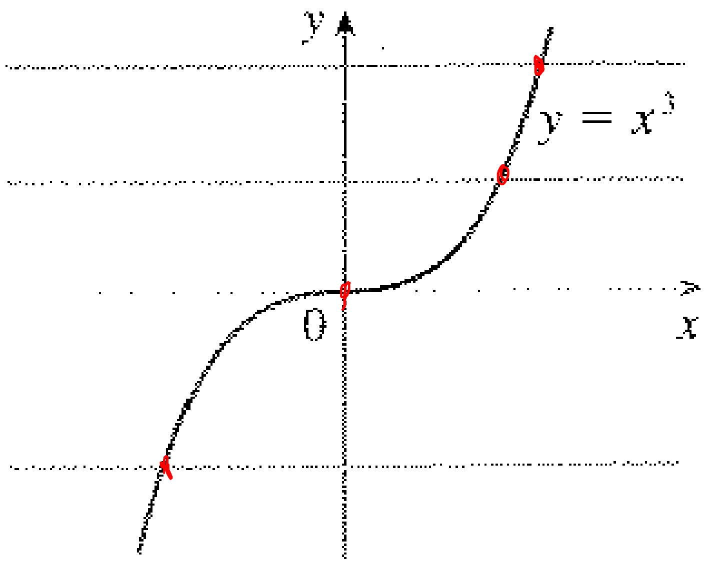
Funções Um a Um

- Uma função **ƒ** é chamada de **função um a um** se ela nunca assume o mesmo valor duas vezes.

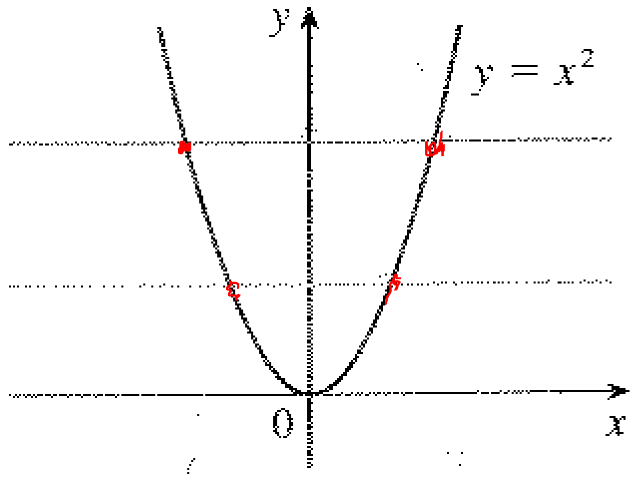
$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad sempre\ que\ x_1 \neq x_2$$

Funções Um a Um

- Exemplos:



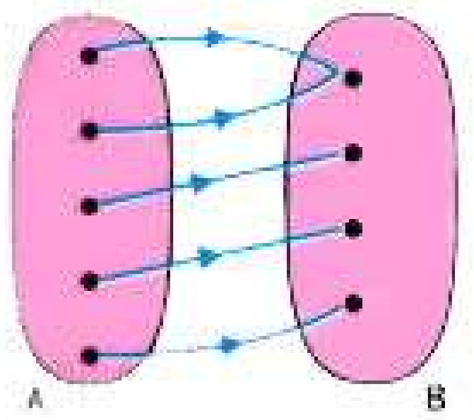
Função Um a Um



Não é função um a um

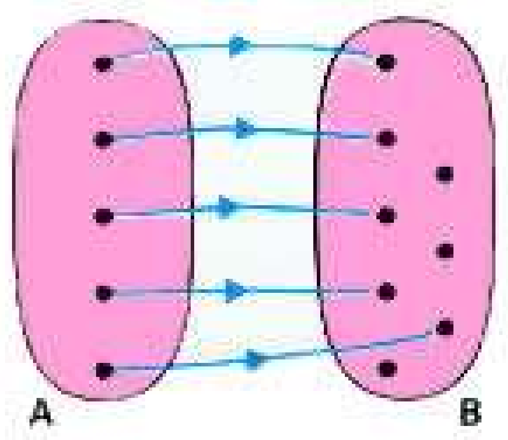
Funções Um a Um

- **Sobrejetora:** em outras palavras, não pode sobrar elementos no conjunto B sem receber flechas.



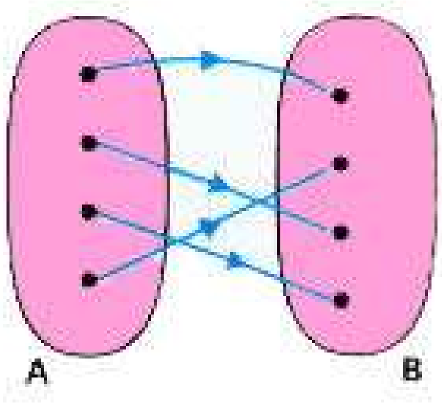
Funções Um a Um

- **Injetora**: não pode haver nenhum elemento no conjunto B que receba duas flechas.



Funções Um a Um

- **Bijetora**: quando é sobrejetora e injetora.



Exercícios

- Determine se a função é injetora.

$a)\ f: R \to R \ tal\ que\ f(x) = 3 + x^2$

Exercícios

- Determine se a função é injetora.

$a)\ f: R \rightarrow R\ tal\ que\ f(x) = 3 + x^2$

$$f(x) = 3 + x^2$$

$$f(-3) = 3 + (-3)^2 = 12$$

$$f(3) = 3+3^2=12$$

$$x1 \neq x2$$

$$f(x1) = f(x2)$$

R: Não é injetora

Exercícios

- Determine se a função é injetora.

$b)\ f: R \to R\ tal\ que\ f(x) = 2x$

Exercícios

- Determine se a função é injetora.

$b)\ f: R \rightarrow R\ tal\ que\ f(x) = 2x$

$$f(-2) = 2.(-2) = -4$$

$$f(2) = 2.2 = 4$$

$$x1 \neq x2$$

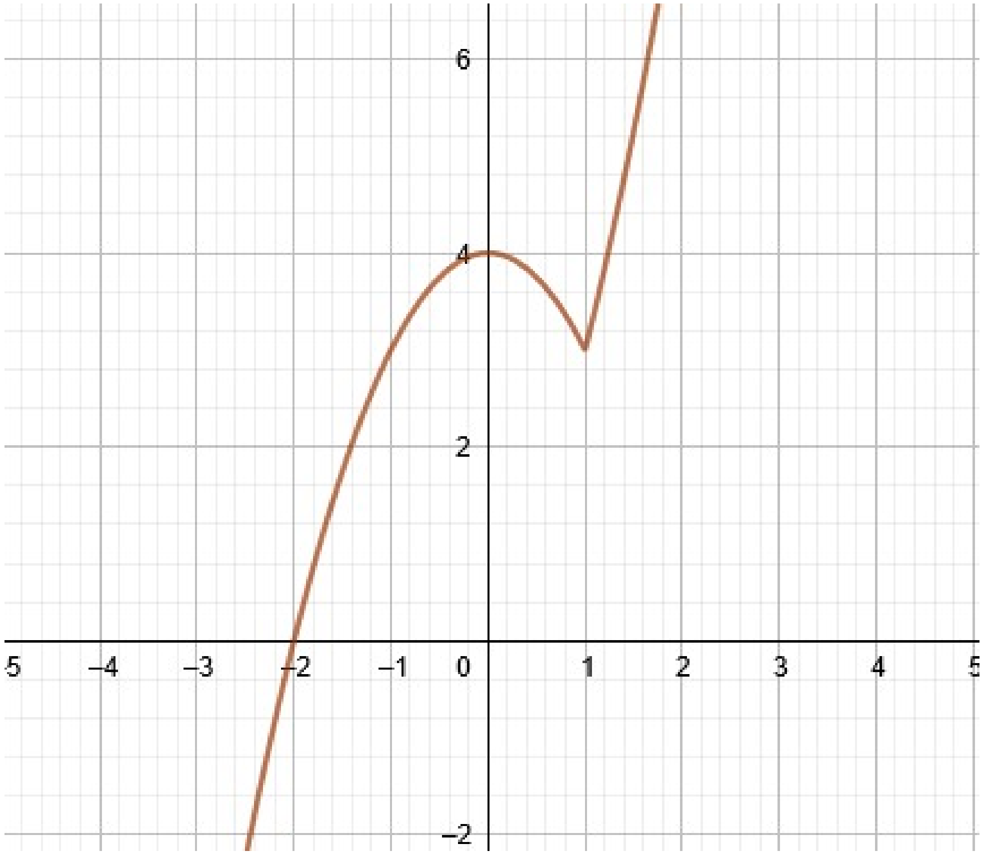
$$f(x1) \neq\ f(x2)$$

R: Função injetora

Exercícios

- Determine se a função é injetora.

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ x^2 + 2x, & x > 1 \end{cases}$$



Exercícios

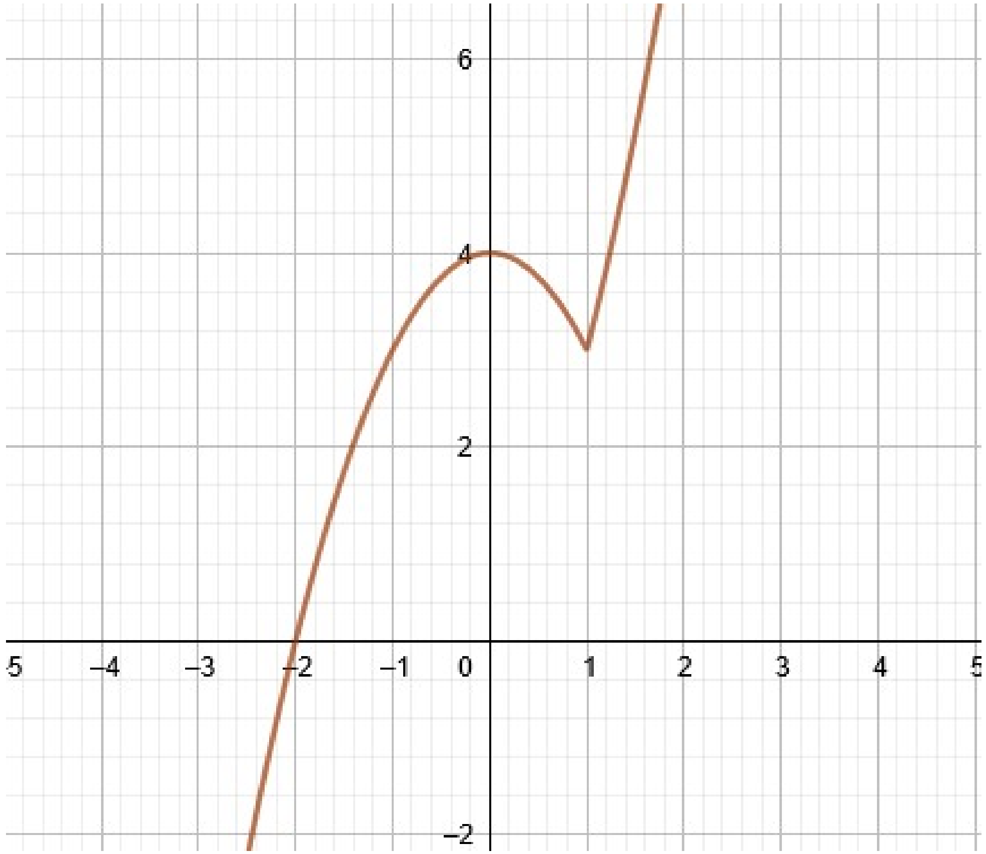
- Determine se a função é injetora.

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ x^2 + 2x, & x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 4 - 1^2 = 3$$

$f(-1)$=4 $-$ $(-1)^2$ =3

Função não é injetora



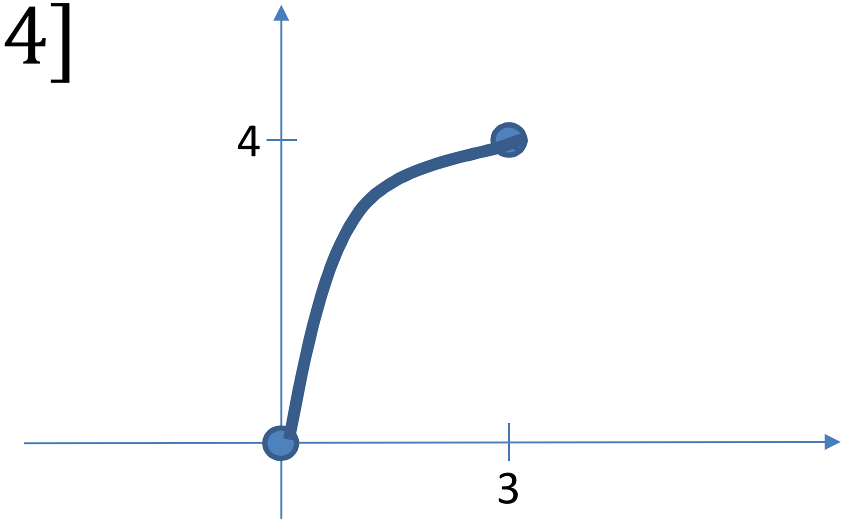
Exercícios

- Determine se a função é bijetora.

$a)\ f: R \rightarrow R_+ \ tal\ que\ f(x) = 2x^2$

$b)\ f: R \rightarrow R\ tal\ que\ f(x) = x - 1$

$c)\ f: [0,3] \rightarrow [0,4]$



Exercícios

- Determine se a função é bijetora.

$a)\ f: R \rightarrow R_+ \ tal\ que\ f(x) = 2x^2$

$$CD = R_+$$

$$Im = R_+$$

$$CD = Im \ \therefore \text{é}\ sobrejetora$$

$$f(2) = 2.2^2 = 8$$

$$f(-2) = 2.(-2)^2 = 8$$

$não$ é $injetora$. Logo não é bijetora.

Exercícios

- Determine se a função é bijetora.

$b)\ f: R \rightarrow R\ tal\ que\ f(x) = x - 1$

$$CD = R$$

$$Im = \mathrm{R}$$

$$CD = Im\ \ (\text{é}\ sobrejetora)$$

$$f(2) = 2 - 1 = 1$$

$$f(-2) = -2 - 1 = -3$$

Exercícios

- Determine se a função é bijetora.

$c)\ f: [0,3] \to [0,4]$

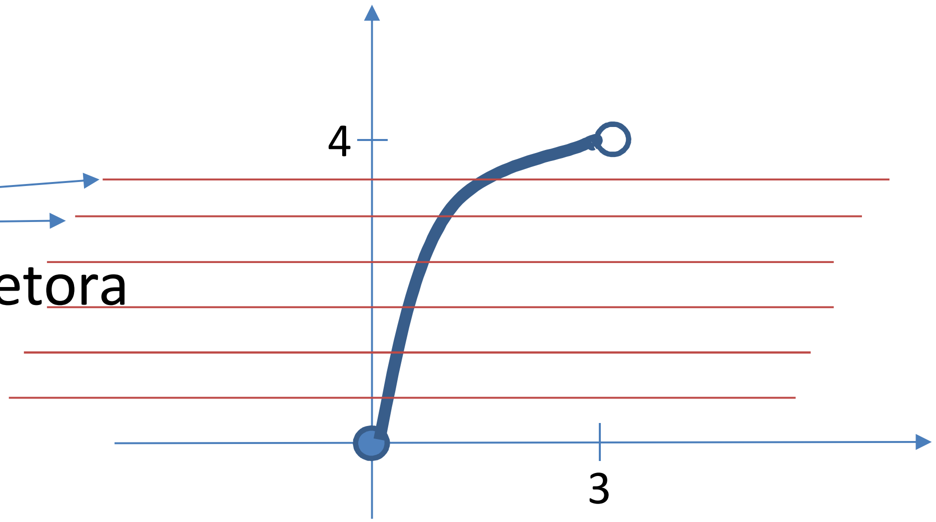
$CD = [0,4]$

$Im = [0,4]$

É sobrejetora.

É injetora.

Ou seja, função bijetora



Exercícios

- Determine se a função é injetora.

$d)\ f: R \rightarrow R\ tal\ que\ f(x) = (x+2)^2$

Exercícios

- Determine se a função é injetora.

$d)\ f: R \to R\ tal\ que\ f(x) = (x+2)^2$

$$f(2) = (2+2)^2 = 16$$
$$f(-2) = (-2+2)^2 = 0$$
$$f(0) = (0+2)^2 = 4$$
$$f(-4) = (-4+2)^2 = 4$$

Não é injetora.

Função Inversa

- Seja f uma **função injetora** com domínio A e imagem B. Então sua função inversa f^{-1} tem domínio B e imagem A.

$$f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y$$

Função Inversa

- **Equações de cancelamento:**

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \; para \; todo \; x \; em \; A$$
$$f\big(f^{-1}(x)\big) = x \; para \; todo \; x \; em \; B$$

Função Inversa

- **Exemplo:**

Para $f(x) = x^3$ **e** $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = x$$

Função Inversa

$$Como\ achar\ a\ inversa\ de\ uma\ função\ injetora?$$

1º Passo: Escreva $y = f(x)$

2º Passo: Resolva essa equação para x em termos de y (se possível).

3º Passo: Para expressar f^{-1} como uma função de x, torque x por y.

Função Inversa

- **Exemplo**:
  - Encontre a função inversa de $f(x)=x^3+2$

Função Inversa

- **Exemplo**:
  - Encontre a função inversa de $f(x)=x^3+2$

$$y = x^3 + 2$$

$$I)\ x = y^3 + 2$$

$$II)\ y^3 = x - 2 \quad .(\sqrt[3]{\ \ })$$

$$\sqrt[\cancel{3}]{y^{\cancel{3}}}=\sqrt[3]{(x-2)}$$

$$y = \sqrt[3]{(x-2)}$$

$$\boldsymbol{III)f^{-1}(x) = \sqrt[3]{(x-2)}}$$

Função Inversa

- **Exercícios**:
  - Encontre a função inversa de $f(x)=x^3+2$

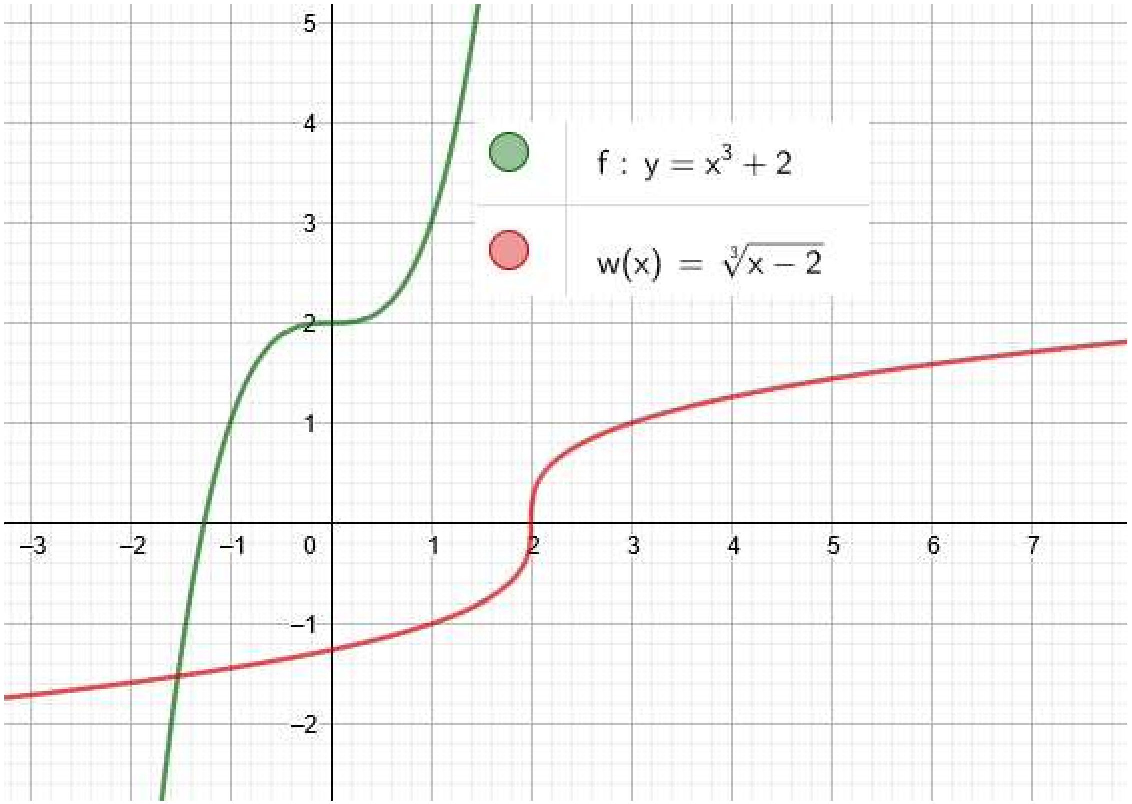
$$\boldsymbol{f^{-1}(x) = \sqrt[3]{(x-2)}}$$

$\boldsymbol{D = \{x \in R\}}$**=**$(-\infty, \infty)$

Função Inversa

- **Solução**:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$$



Função Logarítmicas

- Se **a>0** e **a≠1**

$$\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$$

Aplicado as **equações de cancelamento**:

$$\log_a(a^x) = x \; para \; todo \; x \in R$$

$$a^{\log_a x} = x \; para \; todo \; x > 0$$

Função Logarítmicas

- **Lei dos logaritmos**
  - Se **x** e **y** forem números positivos, então:

$$I)\ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$II)\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$III)\ \log_a(x^r) = r\log_a x \ \ (onde\ r \in R)$$

Função Logarítmicas

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

- **Exemplo:**

Calcular **$\log_2 80$ - $\log_2 5$**

$$\log_2 \mathbf{80} - \log_{\mathbf{2}} \mathbf{5} = \log_{\mathbf{2}}(\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{5}}) = \log_{\mathbf{2}} \mathbf{16}$$

$$\log_{\mathbf{2}} \mathbf{16} = \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{2}^{\boldsymbol{y}} = \mathbf{16}$$

$$\mathbf{2}^{\boldsymbol{y}} = \mathbf{2}^{\mathbf{4}}$$

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{4}$$

Função Logarítmicas

- **Logaritmos Naturais**

$$\log_e x = \ln x$$

  - Portanto:

$$\ln x = y \leftrightarrow e^y = x$$

  - Aplicando as **equações de cancelamento**:

$$\ln(e^x) = x \quad (x \in R)$$
$$e^{\ln x} = x \quad (x > 0)$$

Função Logarítmicas

- **Exercício**:
  a) $e^{5-3x}=10$

Função Logarítmicas

$$\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

- **Resolução**: $e^{5-3x}=10$

$e^{5-3x} = 10 \qquad .(\ln \quad)$

$\ln(e^{5-3x}) = \ln 10$

$5 - 3x = \ln 10$

$-3x = -5 + \ln 10$.(-1)

$3x = 5 - \ln 10$

$\boldsymbol{x = (5 - ln\,10)/3}$

Função Logarítmicas

- **Mudança de base**
  - Se **a>0** e **a≠1:**

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Função Logarítmicas

- **Mudança de base**
  - Exemplo: $\log_8 5$

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0{,}773976$$

Exercícios

- Ache a função inversa:
  a) $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$

Exercícios

- Ache a função inversa:
  a) $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$

$$y = \sqrt{10 - 3x}$$

$$I)\ x = \sqrt{10 - 3y}$$

$$II)\ x^2 = (\cancel{\sqrt{}}10 - 3y\cancel{)^2}$$

$$x^2 = 10 - 3y$$

$$3y = 10 - x^2$$

$$y = \frac{10 - x^2}{3}$$

$$III) y^{-1} = \frac{10 - x^2}{3}$$

Exercícios

$$\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

- Ache a função inversa:
  - b) $y = \ln(x + 3)$

Exercícios

$$\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

- Ache a função inversa:
  - b) $y = \ln(x + 3)$

$$I) \quad x = \ln(y + 3)$$

$$II) e^x = e^{\ln(y+3)}$$

$$e^x = y + 3$$

$$-y = -e^x + 3 \ (-1)$$

$$y = e^x - 3$$

$$III) \ y^{-1} = e^x - 3$$

Exercícios (p/ casa)

- Determine se as funções são sobrejetora.

$a)\ f: R \to R\ tal\ que\ f(x) = x + 3$

$b)\ f: R \to R\ tal\ que\ f(x) = x^4$

$c)\ f: R_+^* \to R_+\ tal\ que\ f(x) = 2x$

$d)\ f: [2,6] \to [0,3[$