DACC | Departamento Acadêmico de Ciência da Computação

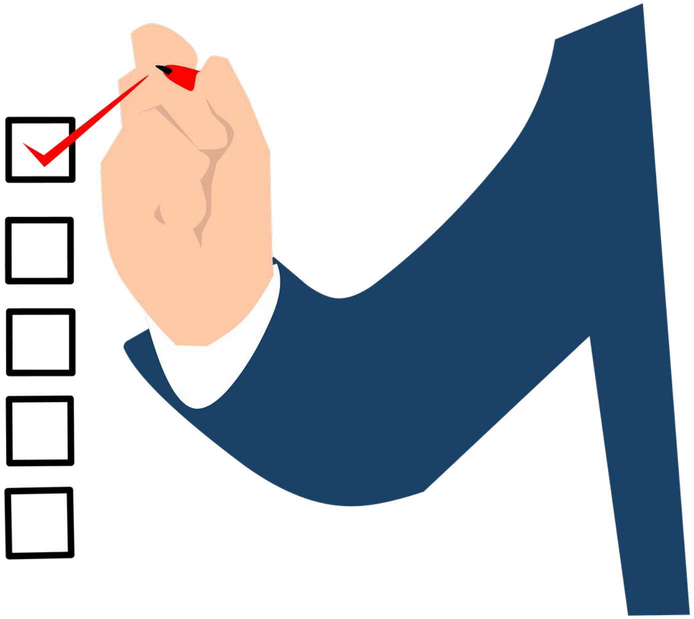
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA

Álgebra Linear

Professor:
Me. Lucas Marques da Cunha
lucas.marques@unir.br

Roteiro

1. Aritmética matricial
    a. Adição, Subtração, Multiplicação;
2. Operações Adicionais
    a. Multiplicação por escalar
    b. Transposição
3. Exercícios práticos



Aritmética matricial

- **Objetivos:**
  - Introduzir a notação padrão para matrizes e vetores;
  - Definir operações aritméticas (adição, subtração e multiplicação) com matrizes;
  - Introduzir operações adicionais: multiplicação por escalar e transposição;
  - Representar sistemas lineares como equações envolvendo matrizes e vetores;

Aritmética matricial

- **Notação matricial**
  - Em geral a_{ij} denota o elemento da matriz A que está na i-ésima linha e na j-ésima coluna. Este elemento refere-se ao elemento (i, j) de A;
  - Então, se A é uma matriz m x n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Aritmética matricial

- **Vetores**
  - São matrizes com somente uma linha ou uma coluna;
  - São utilizados para representar soluções de sistemas lineares;
  - Se uma n-upla é representada como uma matriz 1 x n, nos referimos a ela como um **vetor linha**.
  - Se a n-upla é representada por uma matriz n x 1, diz-se que é um **vetor coluna**.

Aritmética matricial

- **Vetores**
  - Por exemplo, a solução do sistema linear

    $x_1 + x_2 = 3;$

    $x_1 - x_2 = 1$
  - pode ser representada pelo vetor linha (2, 1) ou pelo vetor coluna $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aritmética matricial

- O conjunto de todas as matrizes n x 1 reais é chamado de **espaço euclidiano** de dimensão n e é normalmente denotado como $\mathbb{R}^n$.
- A **notação padrão** para um vetor coluna é uma letra minúscula em negrito, como em:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Aritmética matricial

- A notação padrão para a j-ésima **coluna** de A é a_j.
- Para indicar **vetores linha**, comumente utiliza-se setas horizontais para definir a i-ésima linha de A.
- Se A é uma matriz m x n, então os vetores linha de A são dados por:
    - $\vec{a_i} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ para i = 1, …, m;
- e os **vetores colunas** são dados por:

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \ldots, n$$

Aritmética matricial

- **Exemplo:**
  - Se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

então

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e

$$\vec{\mathbf{a}}_1 = (3,\ 2,\ 5), \quad \vec{\mathbf{a}}_2 = (-1,\ 8,\ 4)$$

Aritmética matricial

- **Igualdade:**
  - Duas matrizes são iguais se têm as mesmas dimensões e os elementos correspondentes são iguais.
  - **Definição:**
  - **Duas matrizes m x n A e B são ditas iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i e j;**

Aritmética matricial

- **Multiplicação por escalar**
  - Se A é uma matriz e α é um escalar, então αA é a matriz formada pela multiplicação de cada um dos elementos de A por α.
  - **Definição**:
  - **A é uma matriz e α um escalar, então αA é a matriz m x n cujo elemento (i, j) é αa_{ij}.**

Aritmética matricial

- **Multiplicação por escalar**
  - Por exemplo, se

A =

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

- então ½ * A é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- e 3 * A é:

$$\begin{pmatrix} 12 & 24 & 6 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

Aritmética matricial

- **Adição de Matrizes**
  - Duas matrizes com a mesma dimensão podem ser somadas adicionando-se seus elementos correspondentes.
  - **Definição:**
  - Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são ambas matrizes m x n, então a **soma** $A + B$ é a matriz m x n cujo elemento (i, j) é a $a_{ij} + b_{ij}$ para cada par ordenado (i, j).

Aritmética matricial

- **Adição de Matrizes**
  - Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Aritmética matricial

- **Adição de Matrizes**
  - Se definirmos A - B como A + (-1)B, então A - B é formada subtraindo-se cada elemento de B do elemento correspondente de A. Então,

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2-4 & 4-5 \\ 3-2 & 1-3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Aritmética matricial

- **Multiplicação de matrizes e sistemas lineares**
  - Se temos um sistema de uma equação linear com uma incógnita, ele pode ser escrito na forma:
    - ***ax = b***
  - Para um sistema linear, utiliza-se:
    - ***Ax = b***
  - Onde A é uma matriz m x n, ***x*** é um vetor de incógnitas em $\mathbb{R}^n$ e ***b*** está em $\mathbb{R}^m$.

Aritmética matricial

- **Multiplicação de matrizes e sistemas lineares**
  - **Caso 1:** Uma equação com várias incógnitas;
  - $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$
  - Se fizermos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

  - e definirmos o produto **Ax** por:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

A equação $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$ pode ser escrita com a equação matricial Ax = 4.

Aritmética matricial

- **Multiplicação de matrizes e sistemas lineares**
  - **Caso 2:** M equações e N incógnitas
  - Considere um sistema linear m x n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Podemos escrevê-lo como uma equação matricial:
  - **Ax = b**

Aritmética matricial

- **Multiplicação de matrizes e sistemas lineares**
  - Podemos escrevê-lo como uma equação matricial:
    - **Ax = b**
  - Onde A= (aij) é conhecido, x é uma matriz n x 1 incógnitas, e b é uma matriz m x1 qu representa o lado direito do sistema.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Aritmética matricial

- **Multiplicação de matrizes e sistemas lineares**
  - O produto de Ax pode ser definido como:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Aritmética matricial

- **Multiplicação de matrizes e sistemas lineares**
  - **Exemplos:**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \\ 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 24 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Aritmética matricial

- **Multiplicação de matrizes e sistemas lineares**
  - **Exemplo:** Escreva o seguinte sistema de equações como uma equação matricial da forma ***Ax* = *b***.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$$

Aritmética matricial

- **Multiplicação de matrizes e sistemas lineares**
  - **Exemplo:** Escreva o seguinte sistema de equações como uma equação matricial da forma ***Ax = b***.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aritmética matricial

- **Multiplicação de matrizes e sistemas lineares**
  - O Sistema linear:

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5$$

$$5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 6$$

  - pode ser escrito como uma equação matricial:

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Aritmética matricial

- **Multiplicação de matrizes e sistemas lineares**
  - **Definição:**
  - Se $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ são vetores em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ são escalares, então uma soma da forma:
    - $c_1 a_1 + c_2 a_2, \dots, c_n a_n$
  - é dita combinação linear dos vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$

Aritmética matricial

- **Multiplicação de matrizes e sistemas lineares**
  - Se A é uma matriz *m x n* e **x** é um vetor $\mathbb{R}^n$, então:
    - **$Ax = x_1a_1 + x_2a_2 +, \ldots, x_na_n$**
  - Se nós escolhermos **$x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 4$** para o sistema linear:

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5$$
$$5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 6$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

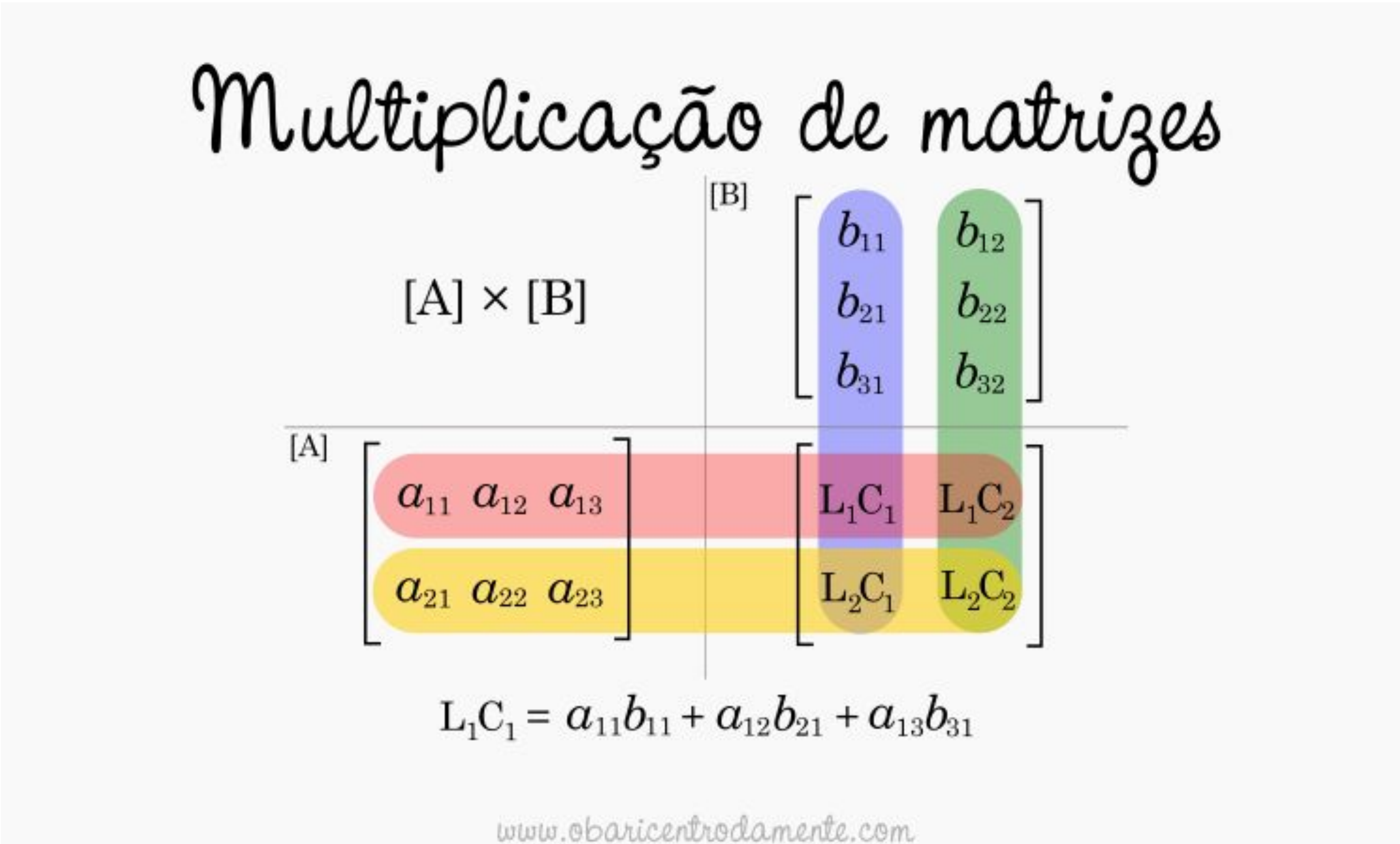
  - **x = [2; 3; 4] é uma solução do sistema;**

Aritmética matricial

- **Multiplicação de matrizes**
  - **Definição:**
  - Se A = (aij) é uma matriz m x n e B = (bij) é uma matriz n x r, então o produto AB = C (cij) é a matriz m x r cujos elementos são definidos por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj}$$

Aritmética matricial



Aritmética matricial

- Exemplo:

$$B.A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1).1+3.3 & (-1).2+3.4 \\ 4.1+2.3 & 4.2+2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Aritmética matricial

- Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & \mathbf{3} \\ 4 & 1 & \mathbf{6} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\cdot(-2) - 2\cdot 4 & 3\cdot 1 - 2\cdot 1 & 3\cdot 3 - 2\cdot 6 \\ 2\cdot(-2) + 4\cdot 4 & 2\cdot 1 + 4\cdot 1 & \mathbf{2\cdot 3 + 4\cdot 6} \\ 1\cdot(-2) - 3\cdot 4 & 1\cdot 1 - 3\cdot 1 & 1\cdot 3 - 3\cdot 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -14 & 1 & -3 \\ 12 & 6 & \mathbf{30} \\ -14 & -2 & -15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aritmética matricial

- É impossível multiplicar A por B quando o **número de colunas de A não for igual ao número de linhas de B**.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

- Entretanto, é possível multiplicar B por A.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 17 & 26 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}$$

Transposta de uma matriz

- Dada uma matriz m x n A, é muitas vezes útil formar uma nova matriz n x m, cujas colunas são as linhas de A.
- **Definição:** A **transposta** de uma matriz m x n A é a matriz n x m B definida por:
    - $\mathbf{b_{ji} = a_{ij}}$
    - para j = 1, …., n e i = 1, …, m. A transposta de A é denotada como A^T.

Transposta de uma matriz

- **Exemplos:**

a) $M = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow M^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 12 \\ 4 & -4 & 6 \\ 9 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 7 & -4 & 0 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

Transposta de uma matriz

- **Matriz simétrica:**
- Uma matriz A n x n é dita **simétrica** se $A^T = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 5 & 4 & 17 \\ 11 & 17 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 5 & 4 & 17 \\ 11 & 17 & 6 \end{bmatrix}$$

Exercícios

1. **Calcule as operações aritméticas matriciais para as matrizes A e B.**

   a. **$2A$**
   b. **$2A - 3B$**
   c. **AB**
   d. **A^TB^T**
   e. **$A + B$**
   f. **$(2A)^T - (3B)^T$**
   g. **BA**
   h. **$(BA)^T$**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Dúvidas, sugestões?