DACC Departamento Acadêmico de Ciência da Computação

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA

Álgebra Linear

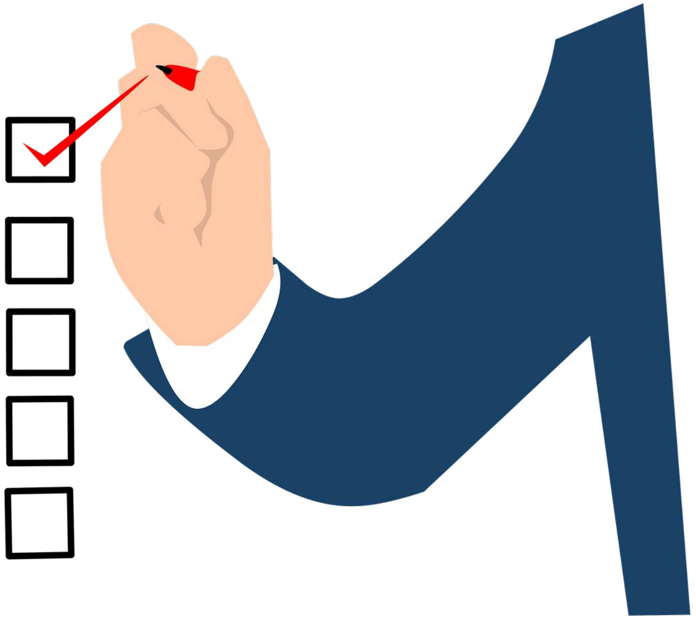
Professor:

Me. Lucas Marques da Cunha

lucas.marques@unir.br

Roteiro

1. Operações elementares sobre Linhas
2. Algoritmo de eliminação
3. Algoritmos para resolver Sistemas Triangulares
4. Forma Linha Degrau
5. Sistemas Sobredeterminados
6. Sistemas Subdeterminados
7. Forma Linha Degrau Reduzida
8. Exercícios práticos



Anteriormente, vimos que…

- **Sistemas lineares** são conjuntos de equações lineares que devem ser resolvidas ao mesmo tempo.
- Sistemas lineares são **equivalentes** quando possuem o mesmo conjunto solução.
- **Sistemas triangulares** apresentam resolução particularmente mais fácil e de baixo custo.
- Podemos utilizar **operações elementares** sobre as equações do sistema linear para obter sua forma triangular.

Operações elementares sobre linhas

I. **Intercambiar duas linhas.**

II. **Multiplicar uma linha por um número real diferente de zero.**

III. **Substituir uma linha por sua soma a um múltiplo de outra linha.**

Operações elementares sobre linhas

- Retomando o exemplo da aula anterior.
  - **Sistemas 2x2**

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 5x_2 & = & 9 \\ 6x_1 & + & 7x_2 & = & 4 \end{array}$$

  - **Sistema equivalente triangular** após operações elementares.

$$\begin{array}{rrcrcr} - & 6x_1 & - & 10x_2 & = & -18 \\ & & - & 3x_2 & = & -14 \end{array}$$

Solução: x_1 = -4.7778 e x_2 = 4.6667

Operações elementares sobre linhas

- **Exemplo 01:** Seja o seguinte sistema de três equações e três incógnitas:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 23 \\ - & 4x_1 & + & x_2 & - & 8x_3 & = & -26 \\ & 6x_1 & - & 12x_2 & + & 12x_3 & = & 18 \end{array}$$

Este sistema pode ser escrito como **Ax = b**, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & -8 \\ 6 & -12 & 12 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 23 \\ -26 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Operações elementares sobre linhas

- O sistema apresentado no exemplo 01 não é triangular superior.
- Para transformar este sistema em outro **triangular superior equivalente**, devemos eliminar os coeficiente a_{21}, a_{31} e a_{32}.
- O processo de eliminação será feito com o uso de matrizes.

Operações elementares sobre linhas

- **Passo 0:** Escrever a **matriz aumentada** com os coeficientes da matriz do sistema A e lado direito b:

$$
\begin{array}{rrrrl}
2 & 3 & 5 & 23 & \quad (L1) \\
-4 & 1 & -8 & -26 & \quad (L2) \\
6 & -12 & 12 & 18 & \quad (L3)
\end{array}
$$

Operações elementares sobre linhas

- **Passo 1:**
  - Substituir (L2) por -(-4/2) x (L1) + (L2)
  - Substituir (L3) por -(6/2) x (L1) + (L3)

$$\begin{array}{rrrrl} 2 & 3 & 5 & 23 & \quad (L1) \\ 0 & 7 & 2 & 20 & \quad (L2) \\ 0 & -21 & -3 & -51 & \quad (L3) \end{array}$$

Operações elementares sobre linhas

- **Passo 2:**
    - Substituir (L3) por -(-21/7) x (L2) + (L3)

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 3 & 5 & 23 & \qquad & (L1) \\
0 & 7 & 2 & 20 & \qquad & (L2) \\
0 & 0 & 3 & 9 & \qquad & (L3)
\end{array}$$

Operações elementares sobre linhas

- A partir dos coeficientes da matriz anterior é possível escrever o **sistema triangular superior equivalente** ao sistema original.

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 23 \\ & & 7x_2 & + & 2x_3 & = & 20 \\ & & & & 3x_3 & = & 9 \end{array}$$

Operações elementares sobre linhas

- **Vamos testar!**

GNU Octave

Operações elementares sobre linhas

- **Exercício 01:** Seja o seguinte sistema:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & 6x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 40 \\
- & 18x_1 & - & 15x_2 & - & 5x_3 & - & 12x_4 & = & -111 \\
- & 30x_1 & - & 14x_2 & - & 10x_3 & - & 24x_4 & = & -184 \\
 & 12x_1 & - & x_2 & + & 15x_3 & + & 43x_4 & = & 227
\end{array}
$$

- Aplique o algoritmo de eliminação no sistema apresentado de modo que se obtenha um sistema triangular equivalente.

Operações elementares sobre linhas

- **Exercício 02:** Seja o seguinte sistema:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
6x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 40 \\
-\ 18x_1 & - & 15x_2 & - & 5x_3 & - & 12x_4 & = & -111 \\
-\ 30x_1 & - & 14x_2 & - & 10x_3 & - & 24x_4 & = & -184 \\
12x_1 & - & x_2 & + & 15x_3 & + & 43x_4 & = & 227
\end{array}
$$

- **Com Octave**, aplique o algoritmo de eliminação no sistema apresentado de modo que se obtenha um sistema triangular equivalente.

Algoritmo para sistemas triangulares

- Um sistema triangular é um sistema linear com a forma de triângulo **superior ou inferior**.
- A forma do sistema triangular superior é:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & a_{14}x_4 & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & a_{24}x_4 & \cdots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & a_{33}x_3 & + & a_{34}x_4 & \cdots & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & & & a_{44}x_4 & \cdots & a_{4n}x_n & = & b_4 \\
 & & & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

- A forma do sistema triangular inferior é:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
a_{11}x_1 & & & & & & & & & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & & & & & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & & & & & = & b_3 \\
a_{41}x_1 & + & a_{42}x_2 & + & a_{43}x_3 & + & a_{44}x_4 & & & = & b_4 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_n & + & a_{n2}x_2 & + & a_{n3}x_3 & + & a_{n4}x_4 & \cdots & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Algoritmo da substituição reversa

- Este método se emprega para resolver sistemas **triangulares superiores**. Observe o exemplo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 11x_1 & + & 12x_2 & + & 13x_3 & + & 14x_4 & = & 1 \\ & & 22x_2 & + & 23x_3 & + & 24x_4 & = & 2 \\ & & & & 33x_3 & + & 34x_4 & = & 3 \\ & & & & & & 44x_4 & = & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Passo\ 1. & x_4 = \frac{4}{44} = \frac{1}{11} \\ Passo\ 2. & x_3 = \frac{3-34x_4}{33} = \frac{3-34\frac{1}{11}}{33} = \frac{-1}{363} \\ Passo\ 3. & x_2 = \frac{2-33x_3-44x_4}{22} = \frac{2-33\frac{-1}{363}-44\frac{1}{11}}{22} = \frac{-4}{743} \\ Passo\ 4. & x_1 = \frac{2-12x_2-13x_3-14x_4}{11} = \frac{2-12\frac{-4}{743}-13\frac{-1}{363}-14\frac{1}{11}}{11} = \frac{-6}{383} \end{array}$$

Algoritmo da substituição reversa

- **Como seria o algoritmo? O que entra, o que sai e como fazer o passo a passo?**
- Neste exemplo, entra a matriz A $\in \mathbb{R}^{4x4}$ e o vetor b $\in \mathbb{R}^{2}$:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 22 & 23 & 24 \\ 0 & 0 & 33 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 44 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Algoritmo da substituição reversa

Algoritmo substituiçãoReversaVersão0

- Entrada: $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $b \in \mathbb{R}^4$
- Saída: $x \in \mathbb{R}^4$
- Procedimento:
  1. Calcular $x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$.
  2. Calcular $x_3 = \frac{b_3 - a_{34}x_4}{a_{33}}$
  3. Calcular $x_2 = \frac{b_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4}{a_{22}}$
  4. Calcular $x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4}{a_{11}}$

fim do algoritmo substituiçãoReversaVersão0

Algoritmo da substituição reversa

- **Utilizando o algoritmo apresentado, é possível resolver um sistema triangular superior A de tamanho 10x10 ou 100x100? Justifique.**

Algoritmo da substituição reversa

- Para fazer uma versão melhorada do algoritmo de substituição reversa primeiro devemos observar como são realizados os passos.
- Observe como se calcula x_2 no passo 3:

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4}{a_{22}} = \frac{b_2 - \sum\limits_{j=2+1}^{4} a_{2j}x_j}{a_{22}}$$

- Observe como se calcula x_1 no passo 4:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4}{a_{11}} = \frac{b_1 - \sum\limits_{j=1+1}^{4} a_{1j}x_j}{a_{11}}$$

Algoritmo da substituição reversa

- A partir dessas observações podemos reescrever o algoritmo de substituição reversa apresentado da seguinte forma:

$$Passo\ 1. \quad Seja\ k = 1,\ i = 4 - k + 1.\ Calcular\ x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{4} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

$$Passo\ 2. \quad Seja\ k = 2,\ i = 4 - k + 1.\ Calcular\ x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{4} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

$$Passo\ 3. \quad Seja\ k = 3,\ i = 4 - k + 1.\ Calcular\ x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{4} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

$$Passo\ 4. \quad Seja\ k = 4,\ i = 4 - k + 1.\ Calcular\ x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{4} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

Algoritmo da substituição reversa

- Portanto, o algoritmo de substituição reversa pode ser escrito assim:

Algoritmo substituiçãoReversaVersão1

- Entrada: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$
- Saída: $x \in \mathbb{R}^n$
- Procedimento:
  1. Repetir para $k = n, ..., 1$ (ordem reversa ou decrescente)
     (a) Calcular $i = n - k + 1$.
     (b) Calcular $x_i = \dfrac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$.

fim do algoritmo substituiçãoReversaVersão1

Algoritmo da substituição reversa

- **Exercício 02:** Escreva uma função em Octave para resolver um sistema triangular superior utilizando substituição reversa.

Algoritmo da substituição direta

- **Como seria o algoritmo? O que entra, o que sai e como fazer o passo a passo?**
- Neste exemplo, entra a matriz A ∈ $\mathbb{R}^{4x4}$ e o vetor b ∈ $\mathbb{R}^{2}$:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 22 & 0 & 0 \\ 31 & 32 & 33 & 0 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Algoritmo da substituição direta

Algoritmo substituiçãoDiretaVersão0

- Entrada: $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $b \in \mathbb{R}^4$
- Saída: $x \in \mathbb{R}^4$
- Procedimento:
  1. Calcular $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$.
  2. Calcular $x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$
  3. Calcular $x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$
  4. Calcular $x_4 = \frac{b_4 - a_{41}x_1 - a_{42}x_2 - a_{43}x_3}{a_{44}}$

fim do algoritmo substituiçãoDiretaVersão0

Algoritmo da substituição direta

- Versão melhorada do algoritmo da substituição direta:
- Observe como se calcula x_3 no passo 3:

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} = \frac{b_3 - \sum_{j=1}^{3-1} a_{3j}x_j}{a_{33}}$$

- Observe como se calcula x_4 no passo 4:

$$x_4 = \frac{b_4 - a_{41}x_1 - a_{42}x_2 - a_{43}x_3}{a_{44}} = \frac{b_4 - \sum_{j=1}^{4-1} a_{4j}x_j}{a_{44}}$$

Algoritmo da substituição direta

- Reescrevendo o algoritmo anterior:

$$Passo\ 1.\quad Seja\ k = 1.\ Calcular\ x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j}{a_{kk}}$$

$$Passo\ 2.\quad Seja\ k = 2.\ Calcular\ x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j}{a_{kk}}$$

$$Passo\ 3.\quad Seja\ k = 3.\ Calcular\ x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j}{a_{kk}}$$

$$Passo\ 4.\quad Seja\ k = 4.\ Calcular\ x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j}{a_{kk}}$$

Algoritmo da substituição direta

Algoritmo substituiçãoDiretaVersão1

- Entrada: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$
- Saída: $x \in \mathbb{R}^n$
- Procedimento:

  1. Repetir para $k = 1, ..., n$

     (a) Calcular $x_k = \dfrac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j}{a_{kk}}$.

fim do algoritmo substituiçãoDiretaVersão1

Algoritmo da substituição reversa

- **Exercício 03:** Escreva uma função em Octave para resolver um sistema triangular inferior utilizando substituição direta.

Forma Linha degrau

- Esse método é aplicado quando **não for possível gerar uma matriz triangular estrita**.
- Isso pode ocorrer em qualquer etapa de redução em que todas as possíveis escolhas para o **elemento pivô em uma coluna dada forem 0**.

Forma Linha degrau

- Considere o sistema representado pela matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \longleftarrow \text{Linha pivô} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Forma Linha degrau

- Se a operação III for usada para eliminar os elementos não nulos das quatro últimas linhas da primeira coluna, a matriz resultante será:

$$
\begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\\
\longleftarrow \text{Linha pivô} \\
\\
\\
\\
\end{array}
\end{array}
$$

Note que os quatro primeiros elementos das colunas 1 e 2 são nulos.

Forma Linha degrau

- Nessa etapa, a redução à forma estritamente triangular se interrompe.
- **Todas as quatro possíveis escolha para o elemento pivô na segunda coluna são 0.**

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Linha pivô} \\ \\ \\ \end{array}$$

Forma Linha degrau

- **Como proceder a partir daí?**
- A meta é simplificar o sistema tanto quanto possível. Por isso, podemos passar à terceira coluna e eliminar os últimos elementos.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Sistema Inconsistente!

Forma Linha degrau

- Vamos supor que agora mudemos o segundo membro do sistema, de modo a obter um **sistema consistente**.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

Forma Linha degrau

- Vamos supor que agora mudemos o segundo membro do sistema, de modo a obter um **sistema consistente**.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Forma Linha degrau

- O conjunto solução será o conjunto de todas 5-uplas que satisfazem as três primeiras equações:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_5 &= 3 \end{aligned}$$

- **Variáveis principais** correspondem aos primeiros elementos **não nulos** em cada linha da matriz reduzida.
- Variáveis livres correspondem as variáveis restantes, tais como x_2 e x_4;

Forma Linha degrau

- Passamos as **variáveis livres** para o segundo membro;

$$x_1 + x_3 + x_5 = 1 - x_2 - x_4$$
$$x_3 + 2x_5 = - x_4$$
$$x_5 = 3$$

Temos $x_2 = x_4 = 0$, $x_5 = 3$, $x_3 = -6$, $x_1 = 4$. Portanto, (4, 0, -6, 0, 3) é uma solução para o sistema.

Forma Linha degrau

- **Definição:**
- Uma matriz é dita na **forma linha degrau**:

  I. Se o primeiro elemento não nulo em cada linha não nula é 1.

  II. Se a linha k não consiste inteiramente de zeros, o números de zero iniciais na linha k + 1 é maior que o número de zeros iniciais da linha k.

  III. Se há linhas cujos elementos são todos nulos, elas estão abaixo das linhas contendo elementos não nulos.

Forma Linha degrau

- As seguintes matrizes estão na forma linha degrau.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- As seguintes matrizes não estão na forma linha degrau.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma Linha degrau

- **Definição:**
- O processo de usar as operações sobre linhas I, II e III para transformar uma sistema linear em um cuja matriz aumentada está na forma linha degrau é chamado de **eliminação gaussiana**.

Sistemas sobredeterminados

- Um sistema é dito ***sobredeterminado*** se há mais equações que incógnitas.
- Sistemas sobredeterminados são geralmente (mas não sempre) **inconsistentes**.
- **Exemplo:**

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 - x_2 = 3$$

$$-x_1 + 2x_2 = -2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sistemas subdeterminados

- Um sistema de m equações é dito ***subdeterminado*** se tivermos menos equações que incógnitas ($m < n$).
- Sistemas subdeterminados são geralmente (mas não sempre) **consistentes** com um número infinito de soluções.

Sistemas subdeterminados

- **Exemplo:**

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Forma Linha Degrau Reduzida

- **Definição:**
- Uma matriz é dita na **forma linha degrau reduzida** se:

I. A matriz está na forma linha degrau.

II. O primeiro elemento não nulo em cada linha é o único elemento não nulo em sua coluna.

Forma Linha Degrau Reduzida

- As seguintes matrizes estão na forma linha degrau reduzida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- O processo de utilização de operações elementares sobre linhas para transformar uma matriz na forma linha degrau reduzida é chamada de ***redução de Gauss-Jordan***.

Forma Linha Degrau Reduzida

- **Exemplo:** Use a redução de Gauss-Jordan para resolver o sistema:

$$-x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

Forma Linha Degrau Reduzida

- **Exemplo:** Use a redução de Gauss-Jordan para resolver o sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \leftarrow \text{Linha pivô}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right] \leftarrow \text{Linha pivô}$$

Forma Linha Degrau Reduzida

- **Exemplo:** Use a redução de Gauss-Jordan para resolver o sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Forma linha degrau

Forma Linha Degrau Reduzida

- **Exemplo:** Use a redução de Gauss-Jordan para resolver o sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Forma linha degrau reduzida

Se fizermos x_4 igual a qualquer número real α, então $x_1 = \alpha$, $x_2 = -\alpha$ e $x_3 = \alpha$. Então, todas as 4-uplas da forma $(\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha)$ são soluções do sistema.

Forma Linha Degrau Reduzida

- **Exercícios:** Use a redução de Gauss-Jordan para resolver o sistema:

$x_1 + x_2 = -1$

$4x_1 - 3x_2 = 3$

Solução

$1x_1 + 0x_2 = 0$

$0x_1 + x2 = -1$

$x_1 = 0 \text{ e } x_2 = -1$

Dúvidas, sugestões?