Calculo I

FUNÇÕES E MODELOS

Prof. Pablo Vargas

Tópicos Abordados

- Introdução
- Noções sobre conjuntos
- Intervalos
- Função
- Representando uma função
- Modelos matemáticos
- Tipos de Funções
- Combinando Funções
- Funções Compostas
- Propriedades das Funções

Introdução

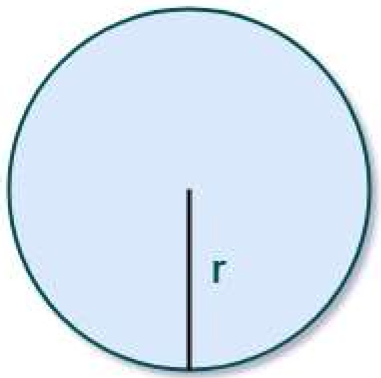
- **Função** é quando um valor depende de outro valor.
- **Função** possuem um **Domínio**, **Imagem**, **Variável dependente** e **Variável independente.**

Introdução

$$A = \pi . r^2$$

Variável dependente

Variável independente



Introdução

Exemplo: Um avião que viaja a 300 km/h percorre uma distância s (espaço) em t horas.

Ou seja,

$$s = 300t$$

Se o avião partindo de PVH para BSB demora cerca de 3 horas para chegar em seu destino, qual a distancia percorrida?

Introdução

Exemplo: A equação $y = \sqrt{30 - x}$ define y como função de x.

O valor da raiz quadrada não pode ser menor que zero. Portanto,

$$30 - x \geq 0$$

$$30 \geq x$$

$$x \leq 30$$

y=raiz30-x.ggb

Noções sobre conjuntos

Conjunto: é estabelecido quando agrupamos elementos com as mesmas características.

- ❖Existem diversas formas de representar um conjunto. Exemplos:
  - ❖Os elementos do conjunto A são os números naturais pares menores que 10.
  - ❖A = {0, 2, 4, 6, 8}
  - ❖A = $\{x \in N \mid x$ é par menor que 10}
  - ❖x tal que x é par menor que 10
  - ❖A=$\{x \in N : x \text{ é } par\ e\ x\ < 10\}$

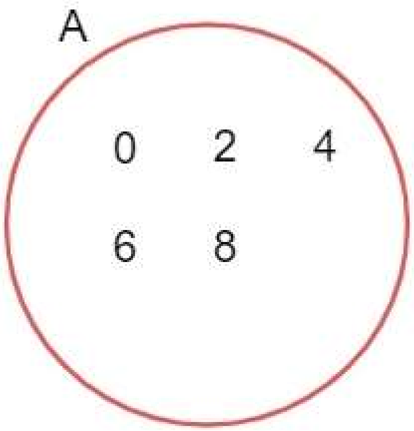


Diagrama de Venn-Euler

Noções sobre conjuntos

Relação de pertinência: mostra se um elemento está dentro ou não de um conjunto, ou seja, se ele pertence ou não pertence a um conjunto.

$\in \;\rightarrow$ *Pertence*

$\notin \;\rightarrow$ *Não Pertence*

Noções sobre conjuntos

Exemplo: Considere o conjunto B = {-5,-3,-1,1, 3, 5}.

❖ Note que o valor de 5 pertence ao conjunto B, ou seja,

$$5 \in B$$

❖ Note que o valor 0 não pertence ao conjunto B, ou seja,

$$0 \notin B$$

Noções sobre conjuntos

Relação de inclusão: mostra-nos se um conjunto está contido ou não dentro de outro.

$$C \to \text{Contido}$$
$$\not\subset \to N\tilde{a}o\ Contido$$

Noções sobre conjuntos

Exemplo: Considere os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {2, 3} e C = {5, 6, 7}

❖ Conjunto B está por completo dentro do conjunto A, portanto, o conjunto B está contido no conjunto A.

$$B \subset A$$

❖ Obs: podemos dizer que B é um subconjunto de A.

Noções sobre conjuntos

Exemplo: Considere os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {2, 3} e C = {5, 6, 7}

- Entretanto, o conjunto C não está por completo no conjunto A, logo, o conjunto C não está contido no conjunto A.

$$C \not\subset A$$

Noções sobre conjuntos

Conjunto unitário: quando possui um único elemento.

Exemplo: A = {5}

Conjunto vazio: quando não possui nenhum elemento.

Exemplo: A= { } ou A={Ø}

Noções sobre conjuntos

Conjunto universo: é o que contém todos os outros conjuntos.

Exemplo: considere os conjuntos A = {– 1, – 2, 1, 2}, B ={0, 1, 2, 3} e C = {1, –1, 2, –2}, veja que todos eles são compostos por números inteiros, ou seja:

$$A \subset \mathbb{Z}$$

$$B \subset \mathbb{Z}$$

$$C \subset \mathbb{Z}$$

Noções sobre conjuntos

Conjunto complementar: é formado pela diferença B – A, ou seja, tomamos os elementos de B e retiramos os elementos de A contidos em B.

Obs: É um conceito que diz respeito apenas a uma relação de conjunto e subconjunto!

Exemplo: considere os conjuntos A = {1, 2} e B ={0, 1, 2, 3}, calcule C=B-A.

C={0,3}

Noções sobre conjuntos

Conjuntos das partes: conjunto das partes de A é formado por todos os possíveis subconjuntos dos elementos do conjunto A.

Exemplo: determine o conjunto das partes do conjunto A = {1, 2, 3}.

P (A) = {{1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}, {}}

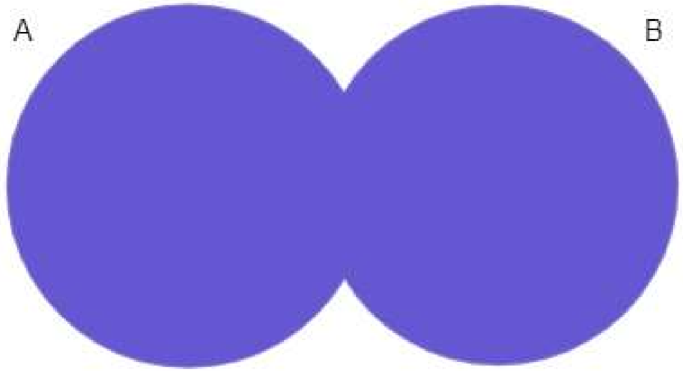
Obs: número de elementos do conjunto das partes de A é equivalente a 2^n.

Noções sobre conjuntos

Operações com conjuntos: podem ser dos tipos união ou intersecção ou diferença de conjuntos.

União: será um novo conjunto constituído por elementos que pertencem a, pelo menos, um dos conjuntos em questão.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



Noções sobre conjuntos

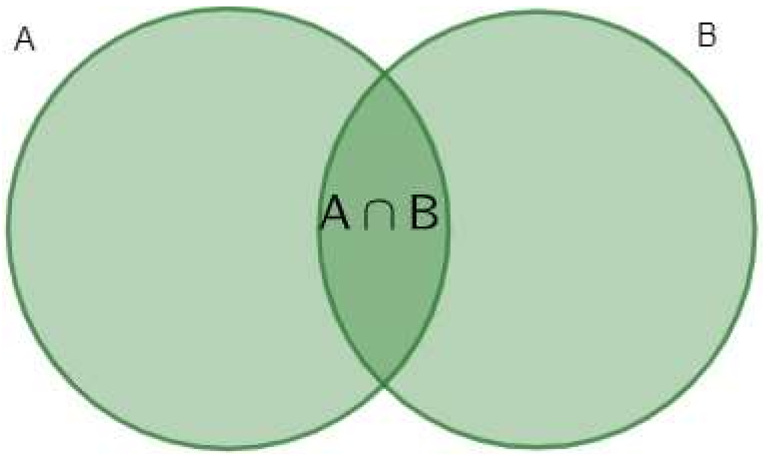
Exemplo (União de conjuntos): Considere os conjuntos A = {0, 2, 4, 6, 8, 10} e B = {1, 3, 5, 7, 9, 11}:

A U B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}

Noções sobre conjuntos

Intersecção de conjuntos: será um novo conjunto formado por elementos que pertencem, ao mesmo tempo, a todos os conjuntos envolvidos.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



Noções sobre conjuntos

Exemplo (Intersecção de conjuntos): Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $C = \{0, -1, -2, -3\}$

$$A \cap B = \{2, 4, 6\}$$

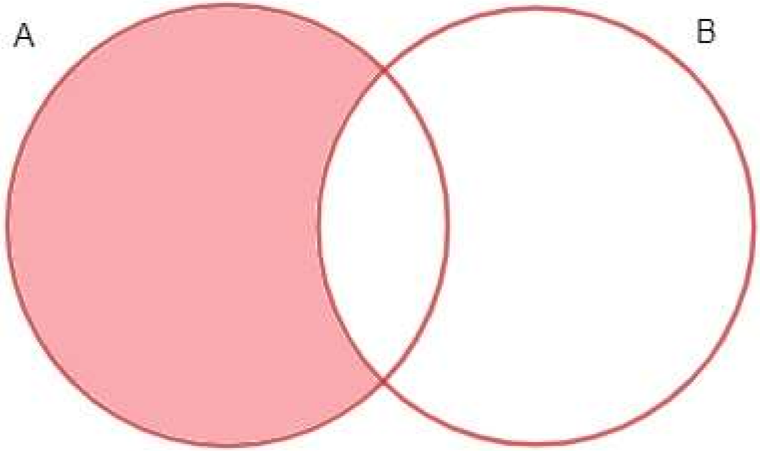
$$A \cap C = \{\ \} \text{ ou } \emptyset$$

$$B \cap C = \{0\}$$

Noções sobre conjuntos

Diferença de conjuntos: a diferença entre dois conjuntos, A e B, é dada pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



Noções sobre conjuntos

Exemplo (Diferença de conjuntos): Considere os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {0, 1, 2, 3, 4, 6, 7} e C = { }.

$$A - B = \{5\}$$

$$A - C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$C - A = \{\ \}$$

Intervalos

...significa que o conjunto possui cada número real entre dois extremos indicados, seja numericamente ou geometricamente.

Exemplos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\} =]1, 2[$$

Intervalos

Notações: uma forma de representar os intervalos.

I. **Intervalo aberto:** quando seus extremos não estão incluídos.

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

Intervalos

Notações: uma forma de representar os intervalos.

I. **Intervalo fechado:** quando seus extremos estão incluídos.

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Intervalos

Notações: uma forma de representar os intervalos.

I. **Intervalo semiaberto/semifechado:** quando um dos seus extremos são incluídos.

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

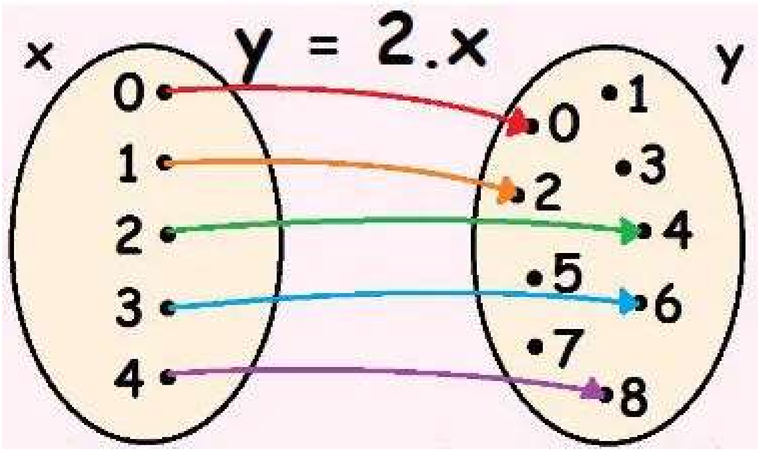
Função

“Chama-se função a toda correspondência f que atribui a cada valor de uma variável x em seu domínio um e um só valor de uma variável y num certo conjunto Y” (AVILA, 2014)

x = 1

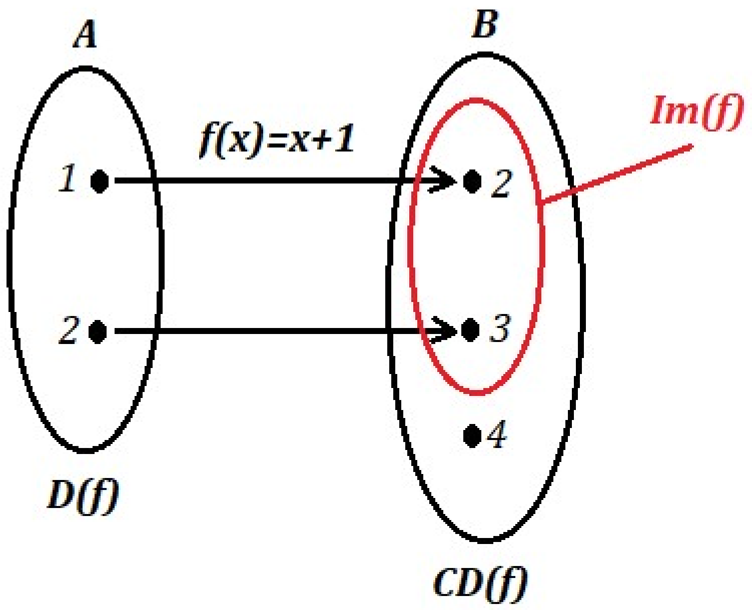
Função

Exemplo: Vamos representar uma função de números naturais de forma que, para cada número natural escolhido, obtenha-se o seu dobro. Ou seja, se escolhermos o **1**, teremos o número **2. Portanto..**



Domínio, imagem e contradomínio

“...são conjuntos importantes para definirmos o que é função e compreendermos melhor o seu comportamento.”



Domínio, imagem e contradomínio

Domínio: é formado pelos valores que o x pode assumir.

Normalmente, o domínio e o contradomínio é conjunto dos números reais, entretanto, pode ser que haja algumas restrições para o domínio.

$$\boldsymbol{f : A \to B}$$

A: é o domínio.

B: é o contradomínio.

Domínio, imagem e contradomínio

Exemplo 1(Domínio): ***f(x) = 2x*** **e f: A → B, A = {1, 2, 3, 4, 5} e B ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10}.**

$$\boldsymbol{f: A \to B}$$

D(f): {1, 2, 3, 4, 5}

Domínio, imagem e contradomínio

Exemplo 2(Domínio): determine o domínio da função $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$

Note que o x **não** pode ser igual a 0, já que isso causaria uma indeterminação. Nesse caso o domínio da minha função não pode ser 0, então:

D(f) = R*

D(f)=$\{x \in R : x \neq 0\}$

D(f)=$]-\infty, 0[U]0, +\infty[$

Domínio, imagem e contradomínio

Exemplo 3(Domínio): determine o domínio da função $\boldsymbol{y = \sqrt{x - 5}}$

Note que os valores que estão dentro da raiz não podem ser negativos, já que isso acarretaria em números complexos. Nesse caso o domínio da minha função não pode ser menor 0, ou seja:

$$x - 5 \geq 0$$

$$x \geq 5$$

D(f) = $\{x \in R : x \geq 5\}$

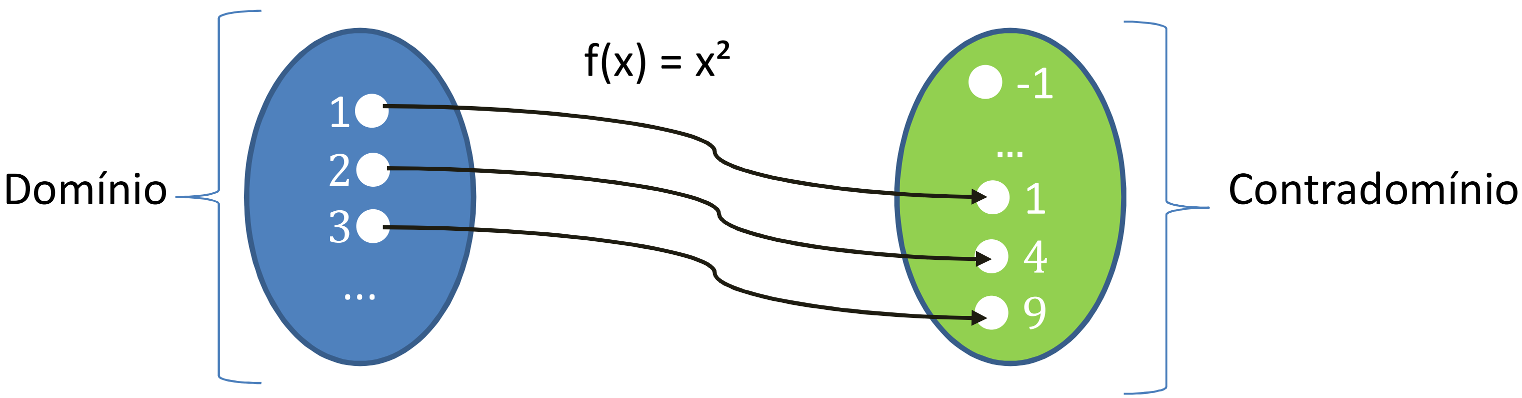
$$D(f) = [5,\infty[$$

Domínio, imagem e contradomínio

Contradomínio: o contradomínio de uma função $f: A \rightarrow B$ é o conjunto B.

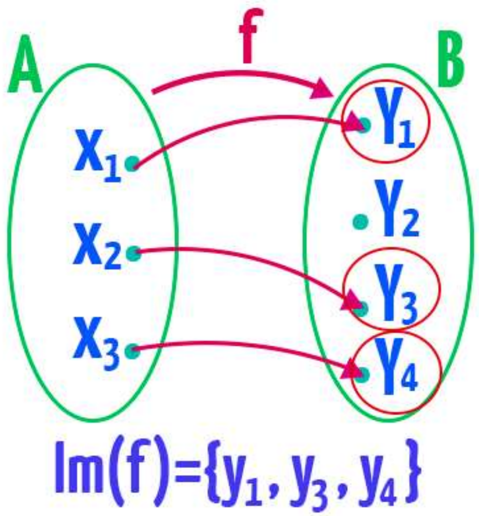
Exemplo: $f(x) = x^2$ com $f: R \rightarrow R$

Note que por mais que nessa função a imagem nunca seja negativa, ainda sim o contradomínio pode ser os números reais.



Domínio, imagem e contradomínio

Imagem: é um subconjunto do contradomínio formado por todos os elementos correspondentes de algum elemento do domínio.



Domínio, imagem e contradomínio

Exemplo 1 (Imagem): Encontre a imagem da função $f(x) = x^2$ $f: R \rightarrow R$

$f(1) = 1^2 = 1$, a imagem da função quando x é igual a 1 é 1.

$f(2) = 2^2 = 4$, a imagem da função quando x é igual a 2 é 4.

Analisando a função de forma geral, para encontrarmos o conjunto imagem, sabemos que x^2 com x pertencente ao real sempre será um número positivo, logo, o conjunto imagem será:

Im(f) = R^+ (conjunto dos números reais positivos).

Domínio, imagem e contradomínio

Exemplo 2 (Imagem): Seja f = 2x – 1 f: A → B em que A = {0, 1, 2, 3} e B = {-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, qual será o conjunto imagem?

R=O conjunto imagem será formado pelos valores de cada um dos elementos do conjunto substituídos em f .

f(0) = 2 · 0 – 1 = 0 – 1 = **-1**

f(1) = 2 · 1 – 1 = 2 – 1 = **1**

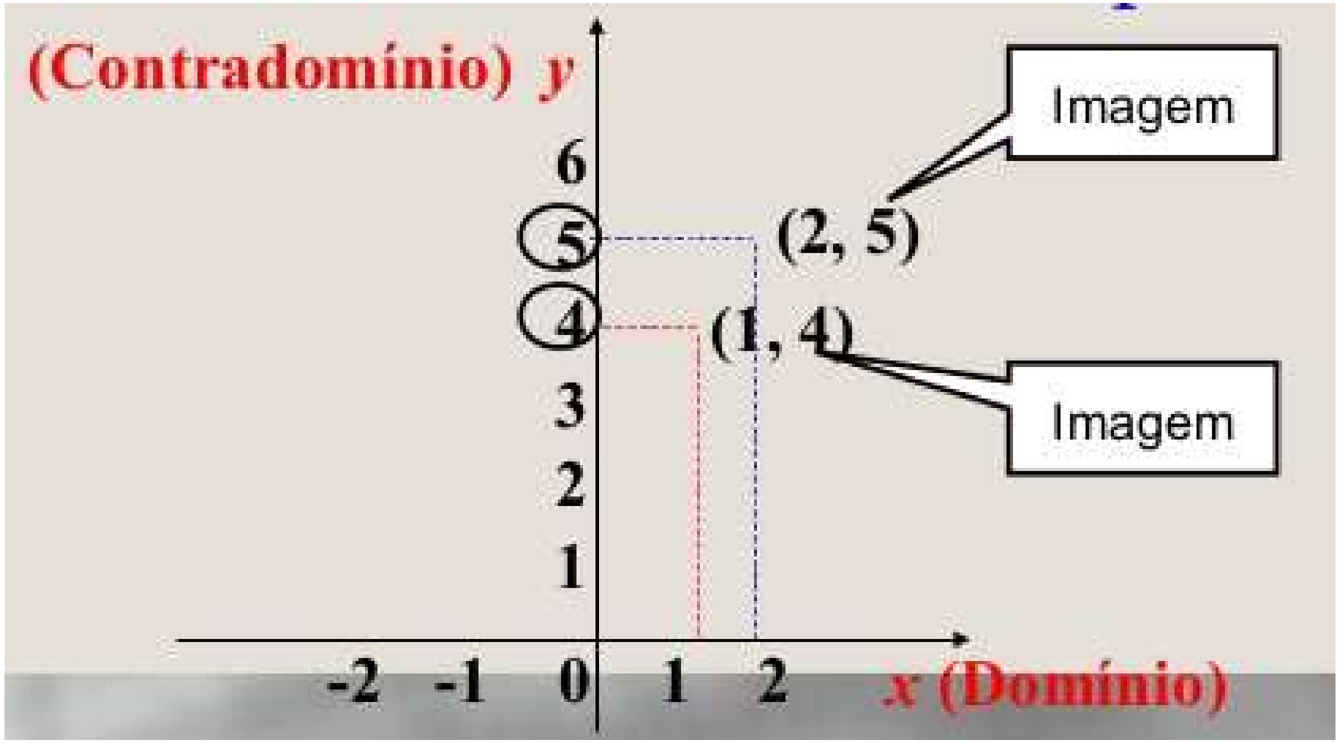
f(2) = 2 · 2 – 1 = 4 – 1 = **3**

f(3) = 2 · 3 – 1 = 6 – 1 = **5**

Im(f) = {-1, 1, 3,5}

Domínio, imagem e contradomínio

Graficamente:



Exercícios

Qual o **domínio** de cada função?

a) ƒ(x)=2x – 1

b) ƒ(x)=x^2

$c)\ f(x) = \frac{1}{x-7}$

$d)\ g(x) = \frac{3}{\sqrt{3-x}}$

Exercícios

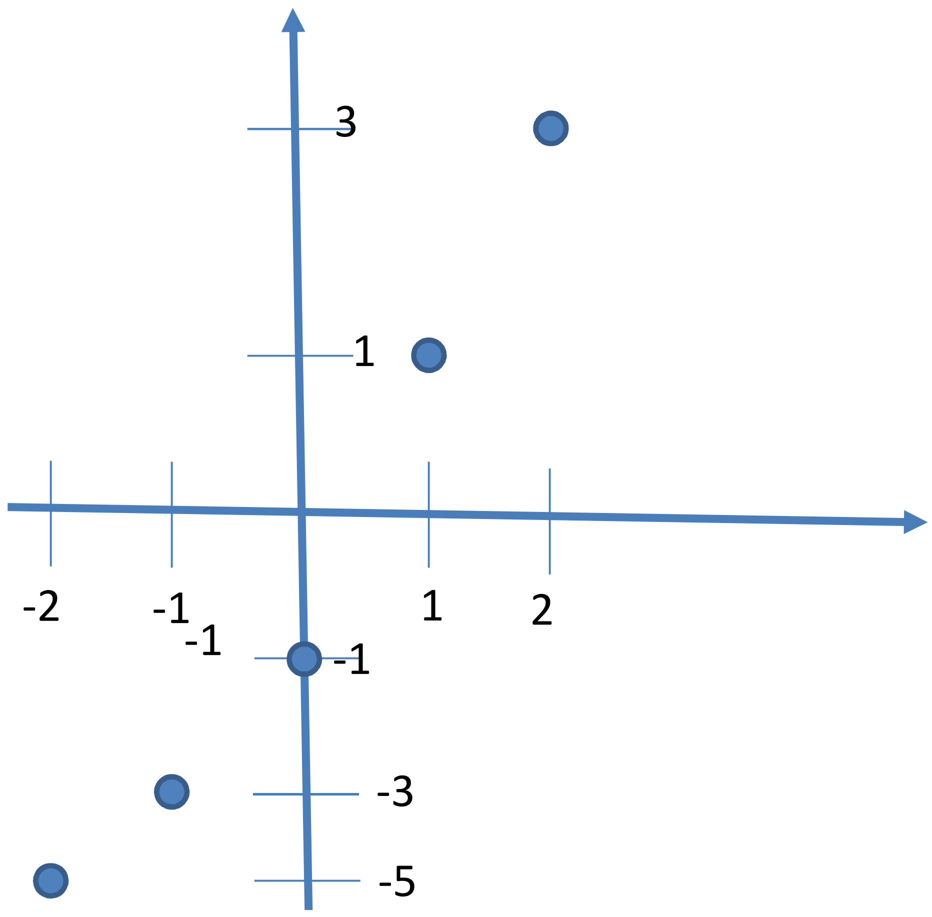
Qual o **domínio** de cada função?

a) ƒ(x)=2x – 1

D={x ∈ R}

$D=(-\infty, \infty)=]-\infty, \infty[$

x	f(x)
-2	$f(-2) = 2.(-2)$ −1=-5
-1	$f(-1) = 2.(-1) - 1 = -3$
0	$f(0) = 2.0 - 1 = -1$
1	$f(1) = 2.1 - 1 = 1$
2	$f(2) = 2.2 - 1 = 3$

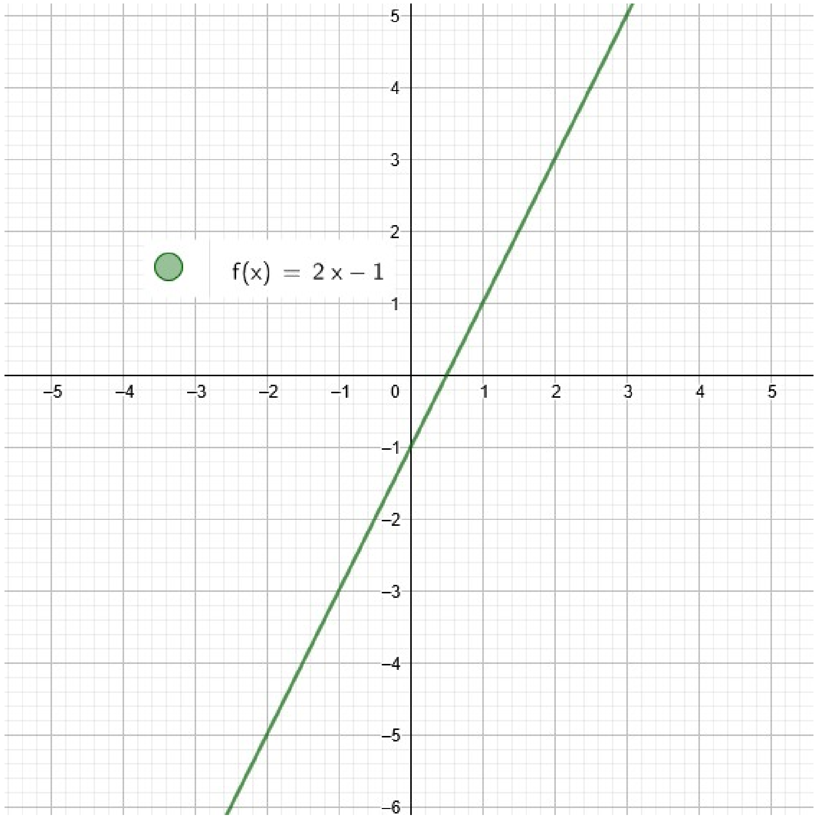


Exercícios

Qual o **domínio** de cada função?

a) $f(x)=2x-1$

$D=\{x \in \mathbb{R}\}$



Exercícios

Qual o **domínio** de cada função?

b) $f(x)=x^2$

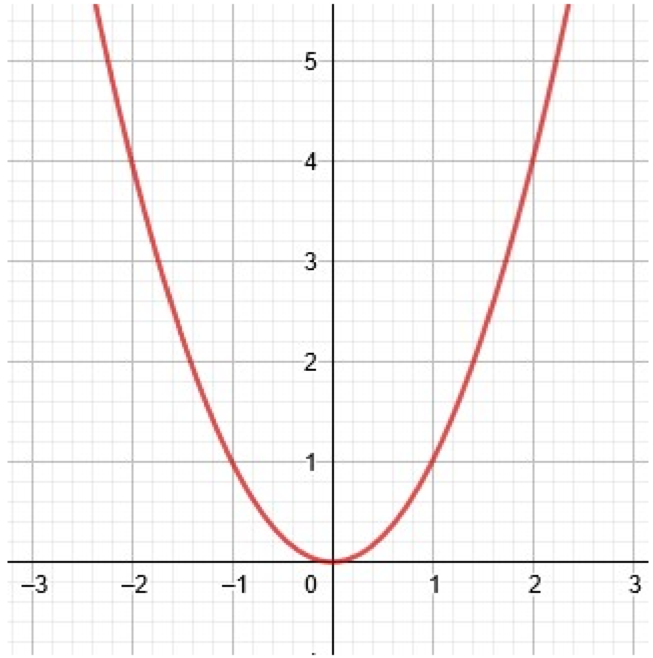
D=(-∞,∞)

$f(0) = 0^2 = 0$

$f(-2) = (-2)^2 = 4$

$f(-3) = (-3)^2 = 9$

I=[0,∞)



Exercícios

Qual o **domínio** de cada função?

$c)\ f(x) = \frac{1}{x-7}$

$$x - 7 \neq 0$$

$$x \neq 7$$

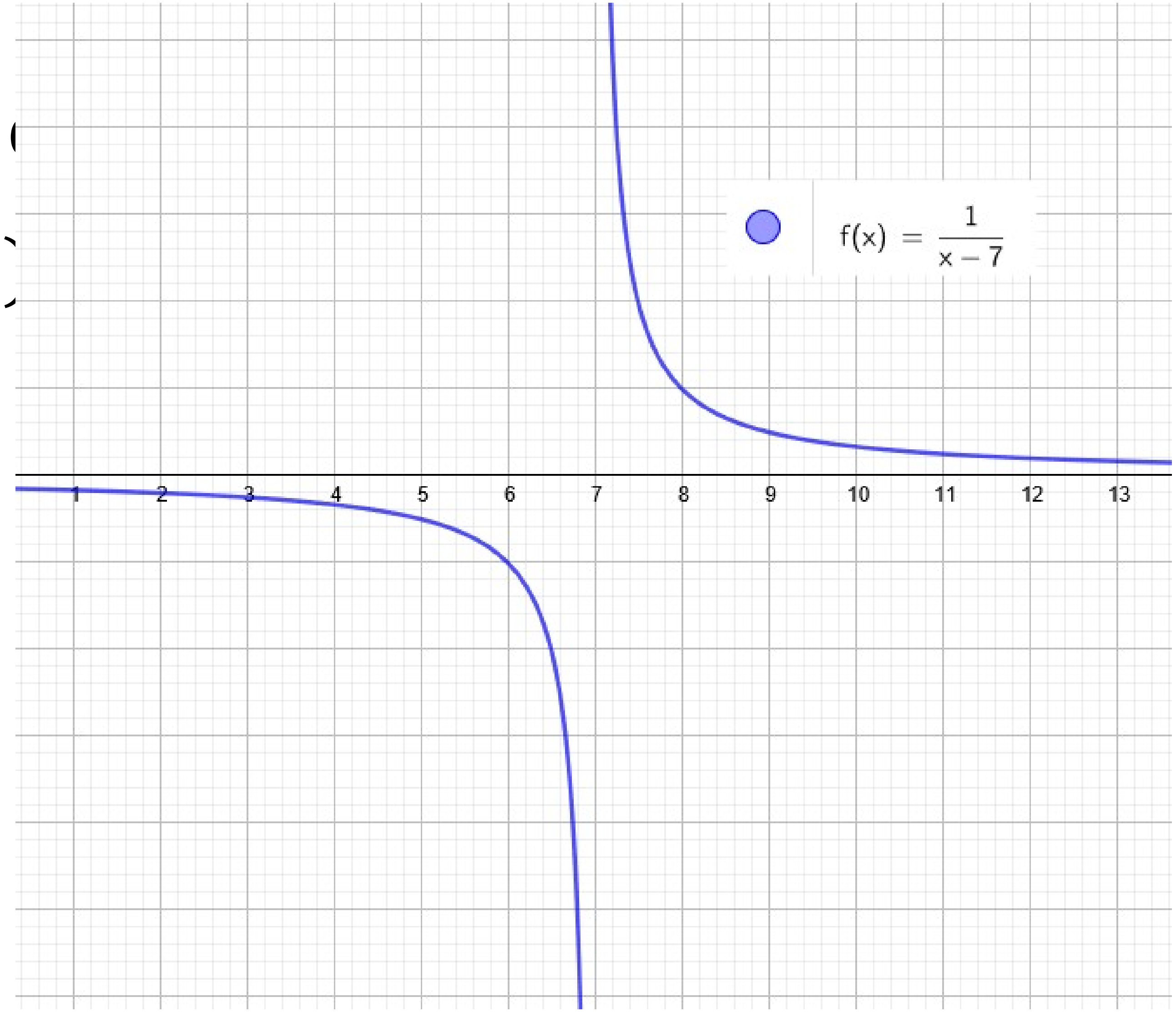
$$D = \{x\ \in R \mid x \neq 7\}$$

$$D =]-\infty, 7[U]7, \infty[$$

Exercícios

Qual o (

$c)\ f(x)$



Exercícios

Qual o **domínio** de cada função?

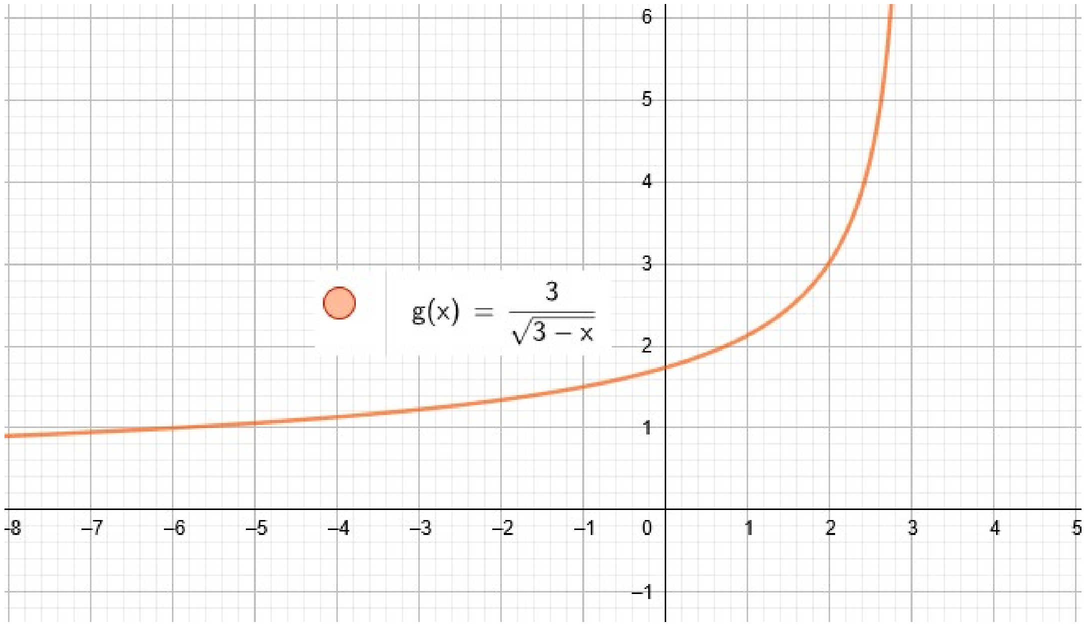
$$d)\ g(x) = \frac{3}{\sqrt{3-x}}$$

$$3 - x > 0$$

$$3 > x$$

$$D = \{x \in R \mid x < 3\}$$

$$D =]-\infty, 3[$$

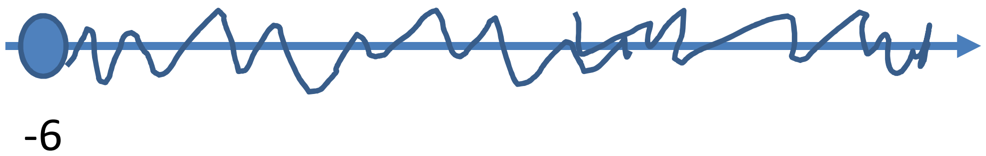


Exemplo

Qual o domínio de $h(x)=\frac{\sqrt{6+x}}{\sqrt{x-2}}$

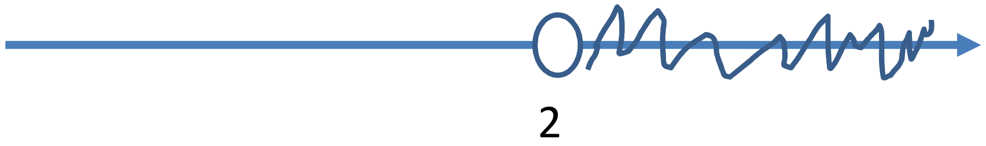
$6 + x \geq 0$

$x \geq -6$

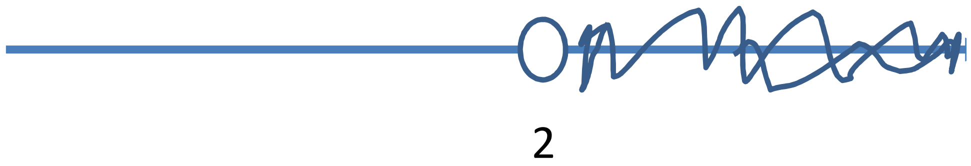


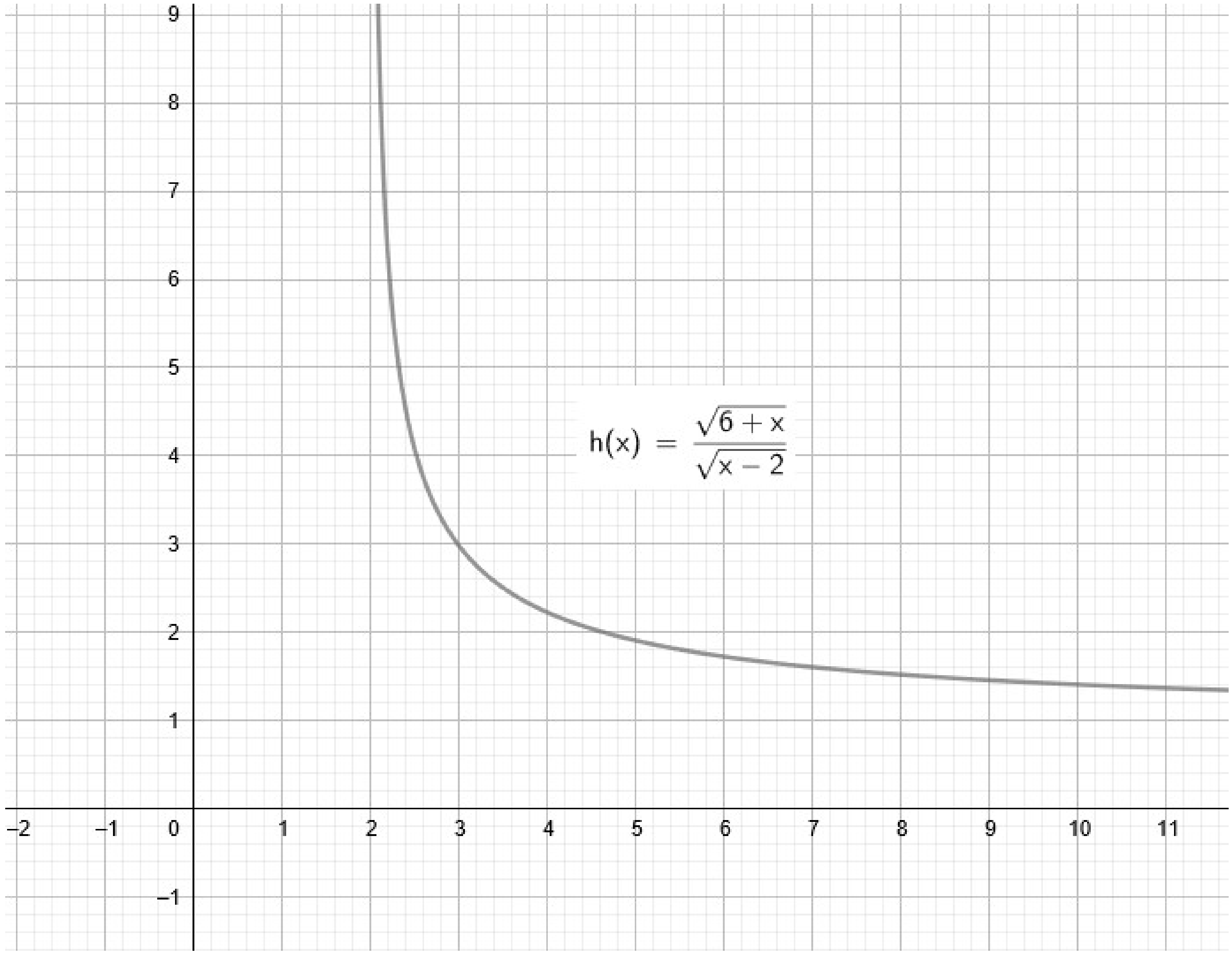
$x - 2 > 0$

$x > 2$



D=$\{x \ \in R \mid x > 2\}$





$h(x) = \frac{\sqrt{6+x}}{\sqrt{x-2}}$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Representando uma função

- Verbal
- Numérica
- Visual
- Algébrica

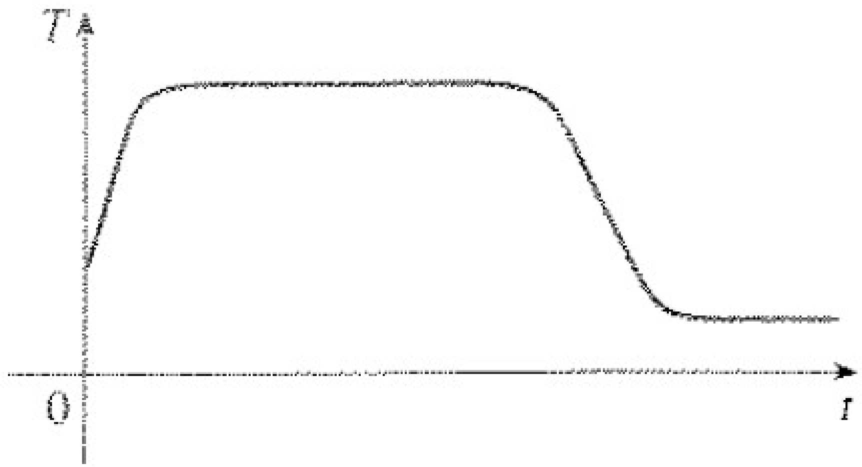
Representando uma função

- **Verbal**
  - “C” é o custo de enviar uma carta de peso “g” pelos correios.
  - 1 dollar custa 2,30 reais.
- **Numérica**

C (Reais)	g (gramas)
20	0<g<500
40	500<g<1000
80	g<1000

Representando uma função

- **Visual**



Representando uma função

- **Algébrica**

$$A = \pi.r^2$$

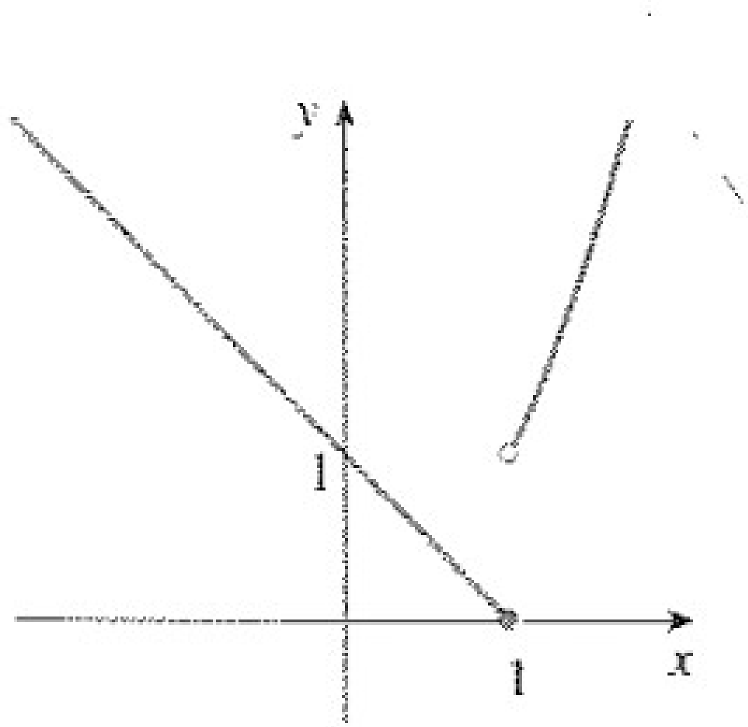
Representando uma função

- **Funções definidas por partes**

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & se\ x \leq 1 \\ x^2 & se\ x > 1 \end{cases}$$

Representando uma função

- **Funções definidas por partes**

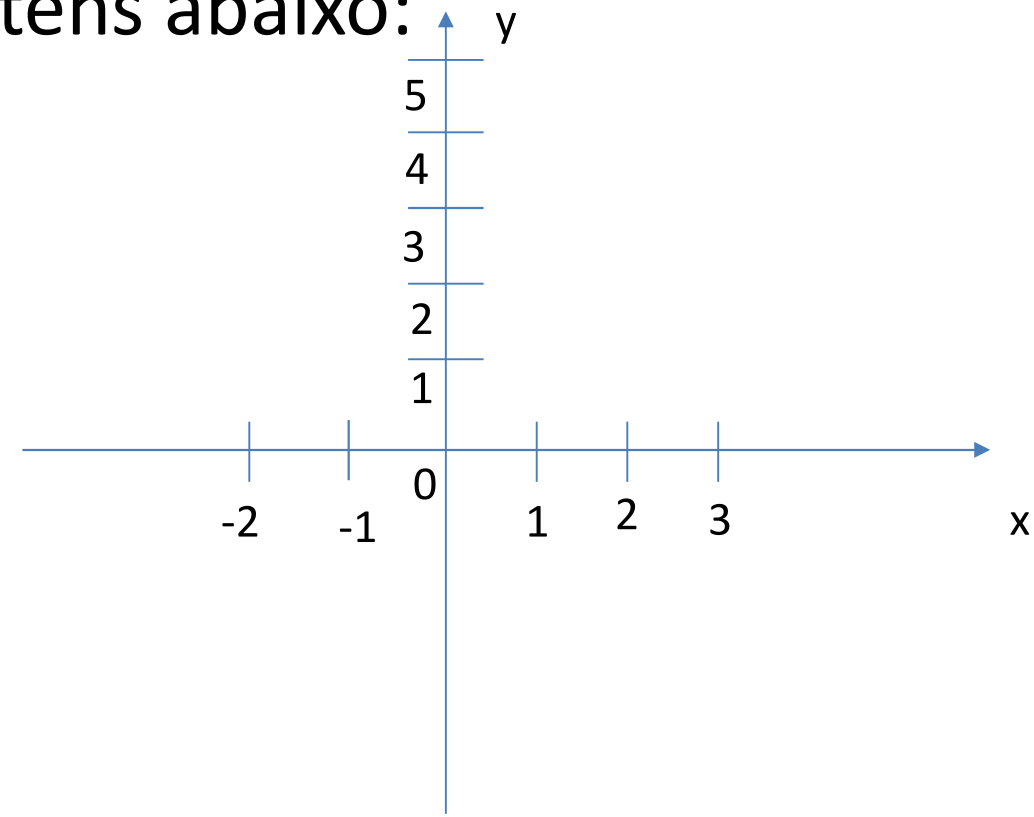


Exercícios

Esboce o gráfico dos itens abaixo:

a) $f(x) = x + 2$

x	$f(x) = x + 2$
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4
3	5

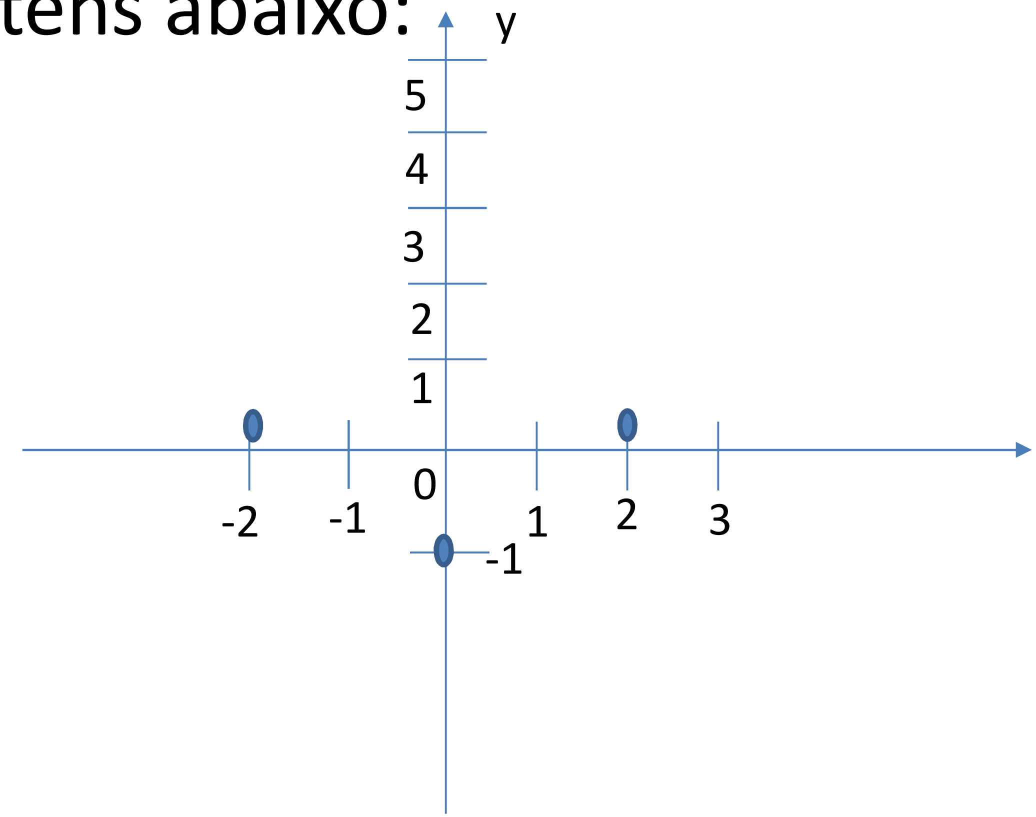


Exercícios

Esboce o gráfico dos itens abaixo:

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

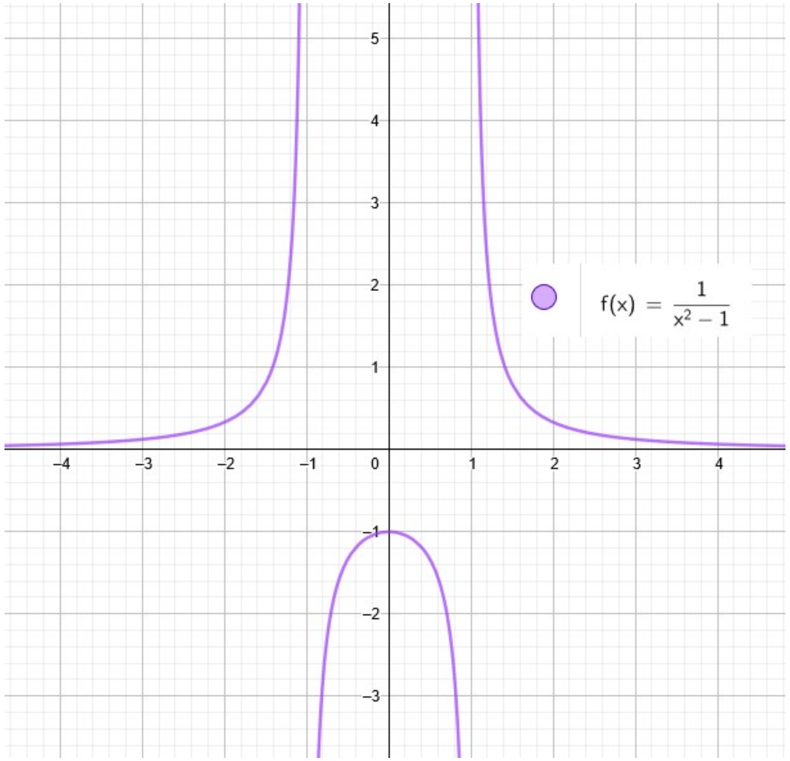
x	$f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$
-2	$f(x) = \dfrac{1}{(-2)^2-1} = \dfrac{1}{4-1} = \dfrac{1}{3}$
-1	$f(x) = \dfrac{1}{(-1)^2-1} = \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0} = \nexists$
0	$f(x) = \dfrac{1}{0^2-1} = \dfrac{1}{0-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$
1	$f(x) = \dfrac{1}{1^2-1} = \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0} = \nexists$
2	$f(x) = \dfrac{1}{2^2-1} = \dfrac{1}{4-1} = \dfrac{1}{3} =$

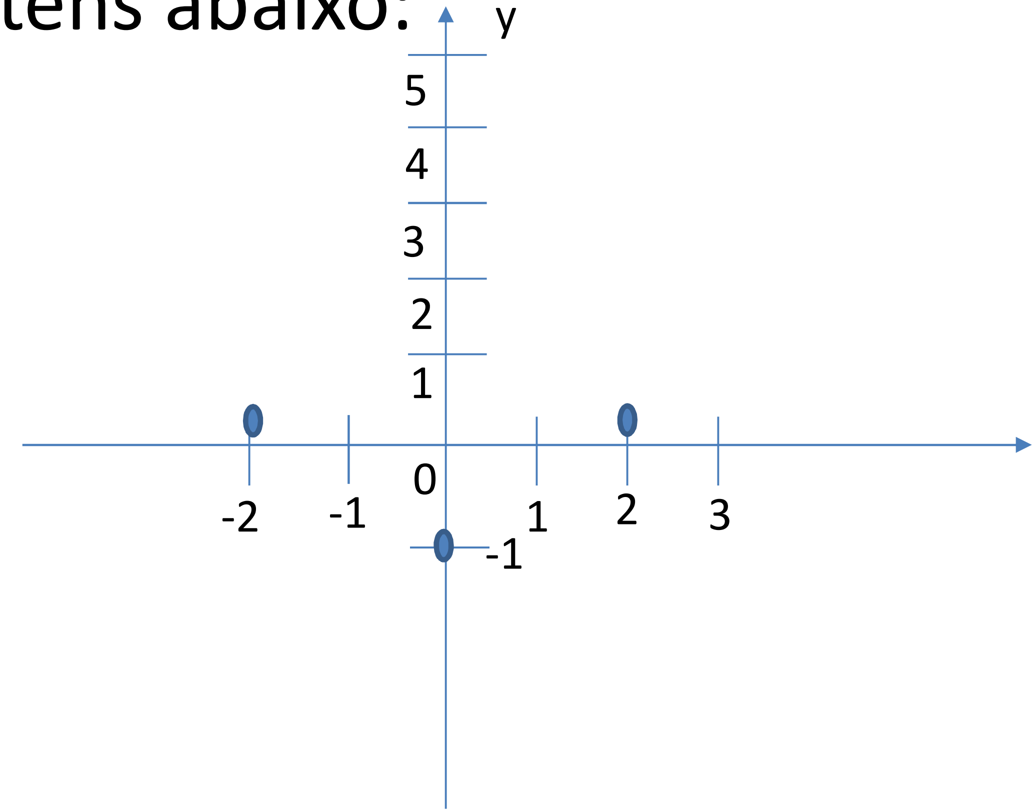


Exercícios

Esboce o gráfico dos itens abaixo:

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$





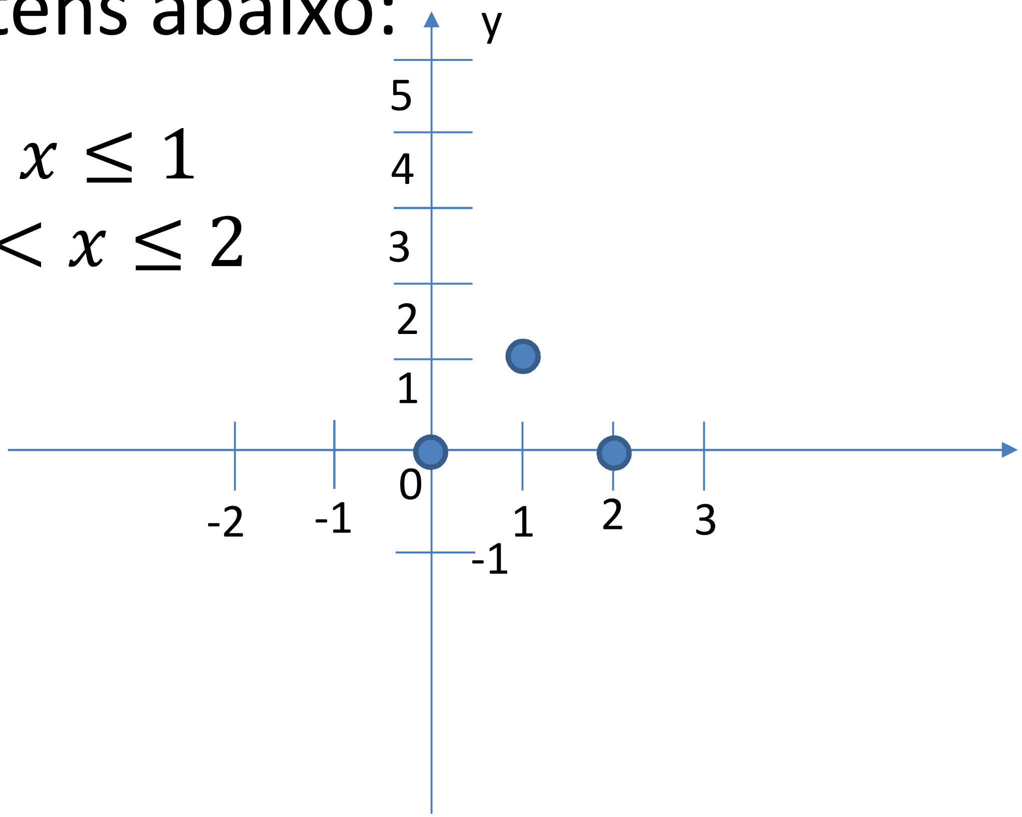
Exercícios

Esboce o gráfico dos itens abaixo:

c) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$D = [0,2]$

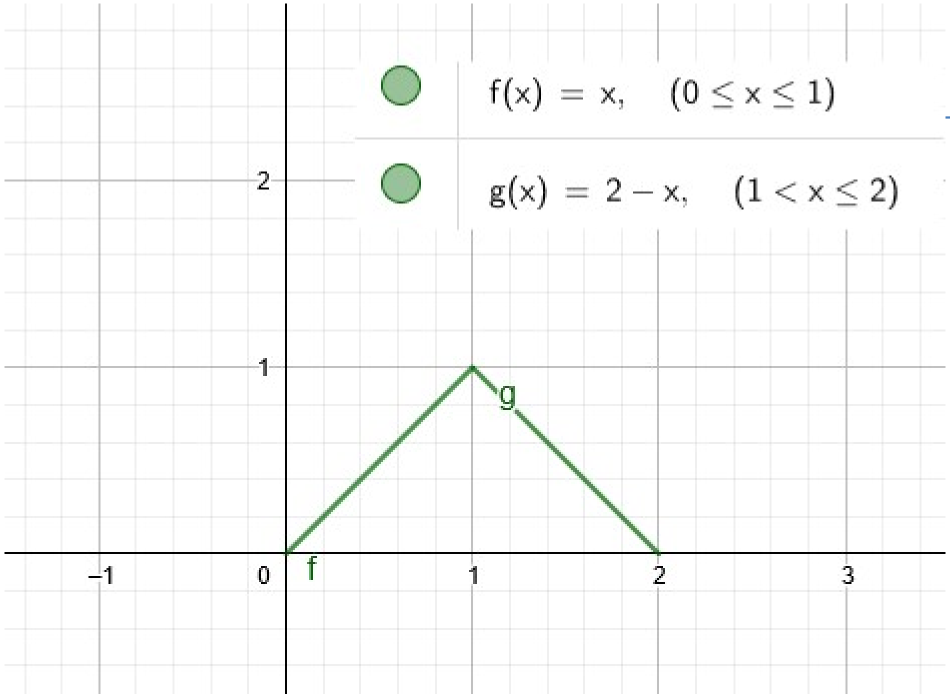
x	$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$
-2	$\nexists$
-1	$\nexists$
0	0
1	1
2	0

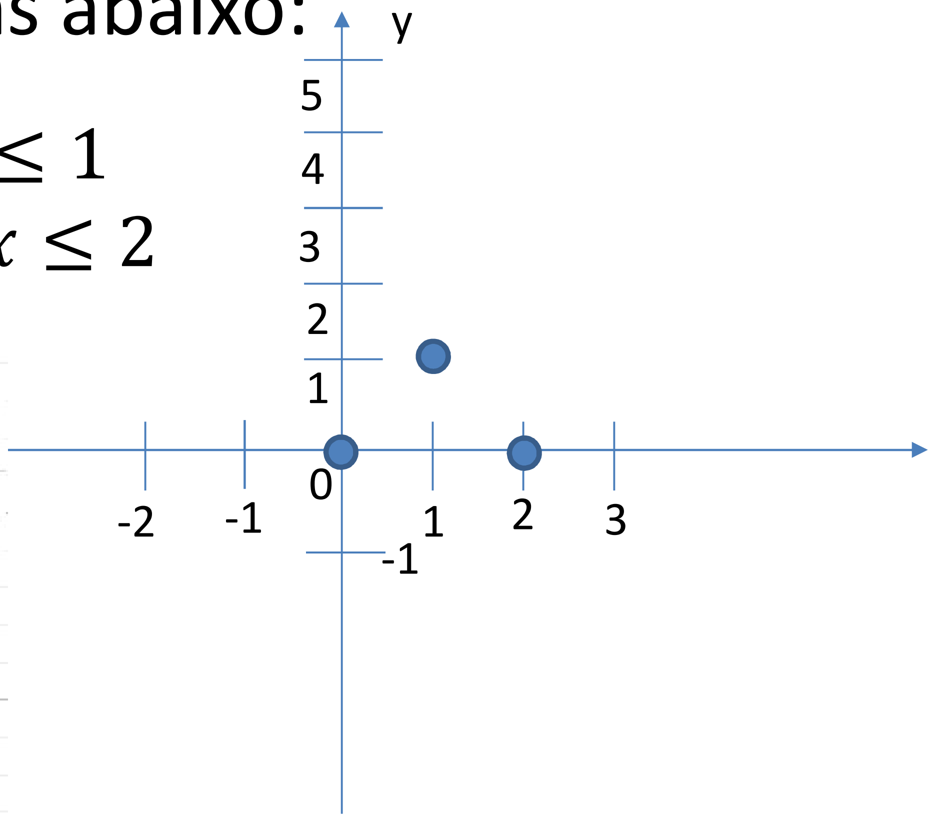


Exercícios

Esboce o gráfico dos itens abaixo:

c) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



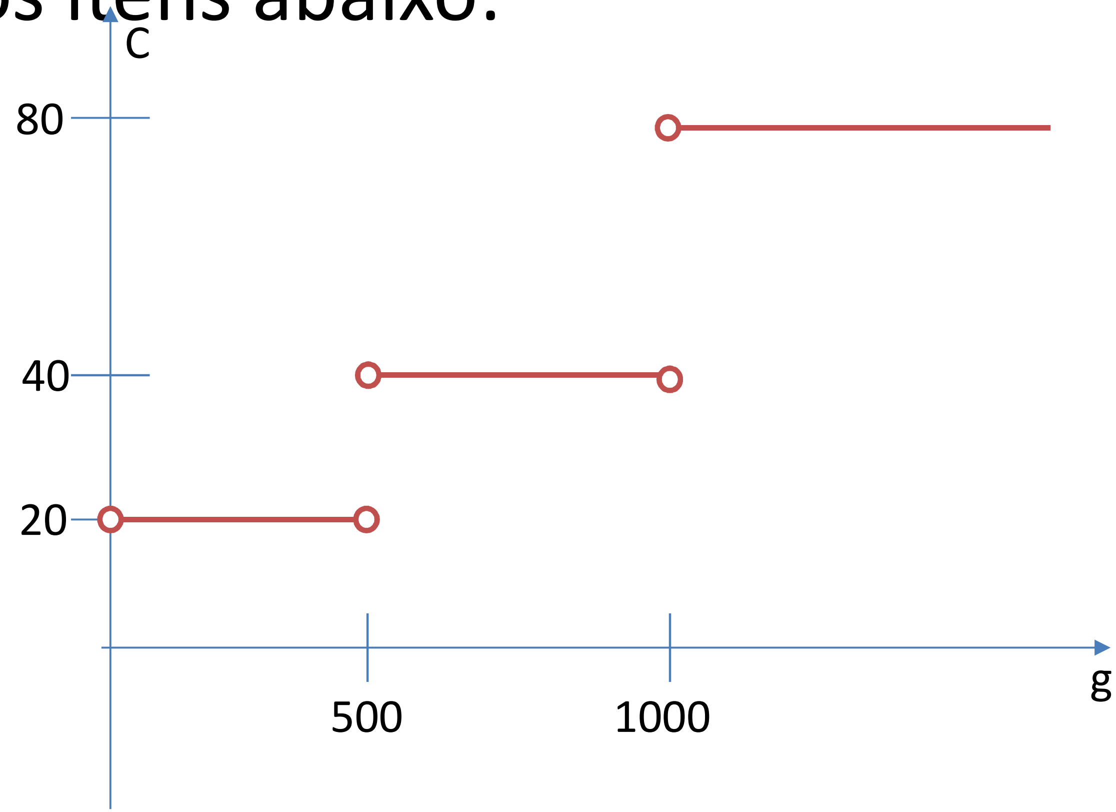


Exercícios (retorno 10:25)

Esboce o gráfico dos itens abaixo:

d)

C (Reais)	g (gramas)
20	0<g<500
40	500<g<1000
80	g<1000



Exercícios

Esboce o gráfico dos itens abaixo:

e) $f(x) = |x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$