Derivação Implícita

"...utilizada para derivação de funções definidas implicitamente."

Regra:

I. Derive os dois lados da equação em relação a x, considerando y como uma função derivável de x.
   - Obs: sempre que derivar y acrescentar $\frac{dy}{dx}$ ou (y').
   - Agrupe os termos que contêm $\frac{dy}{dx}$ ou (y') em um lado da equação.

Derivação Implícita

Exemplo 1: determine $\frac{dy}{dx}$ se $y^2 = x^2 + sen\ xy$

$$\frac{d(y^2)}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(sen\ xy)}{dx}$$

$$\frac{d(y^2)}{dx} = 2\text{y}.\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

$$\frac{d(sen\ xy)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{d(sen\ u)}{du}.\frac{d(xy)}{dx}$$

$$y = sen\ u\ \therefore u = xy$$

$$\frac{d(xy)}{dx} = (\overset{f}{x}\overset{g}{y})' = f'.g + f.g' = (x)'.y + x.(y)' = y + x.\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d(sen\ u)}{du}.\frac{d(xy)}{dx} = \cos\text{u}.\left(y + x.\frac{dy}{dx}\right) = \cos xy.\left(y + x.\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos xy.\left(y + x.\frac{dy}{dx}\right) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \text{y}.\cos xy + x.\frac{dy}{dx}\cos xy$$

Derivação Implícita

Exemplo 1: determine $\frac{dy}{dx}$ se $y^2 = x^2 + sen\ xy$

$$\frac{d(y^2)}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(sen\ xy)}{dx}$$

$$2\mathrm{y}.\frac{dy}{dx} = 2x + \cos xy.\left(y + x.\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2\mathrm{y}.\frac{dy}{dx} = 2x + \mathrm{y}.\cos xy + x.\frac{dy}{dx}.\cos xy$$

$$2\mathrm{y}.\frac{dy}{dx} - x.\frac{dy}{dx}.\cos xy = 2x + \mathrm{y}.\cos xy$$

$$\frac{dy}{dx}(2\mathrm{y} - x.\cos xy) = 2x + \mathrm{y}.\cos xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + \mathrm{y}.\cos xy}{2\mathrm{y} - x.\cos xy}$$

Derivação Implícita

Exemplo 2: determine $\frac{d^2y}{dx^2}$ se $2x^3 - 3y^2 = 8$

$$\frac{d(2x^3)}{dx} - \frac{d(3y^2)}{dx} = \frac{d(8)}{dx}$$

$$\frac{d(2x^3)}{dx} = 6x^2$$

$$\frac{d(3y^2)}{dx} = 6y.\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d(8)}{dx} = 0$$

$$6x^2 - 6y.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6x^2 = 6y.\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{6y} = \frac{x^2}{y}$$

Derivação Implícita

Exemplo 2: determine $\frac{d^2y}{dx^2}$ se $2x^3 - 3y^2 = 8$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \;\therefore\; \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{x^2}{y}\right)'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{(x^2)'.y - x^2.(y)'}{y^2}$$

$$= \frac{2x.y - x^2.\frac{x^2}{y}}{y^2} = \frac{2x.y}{y^2} - \frac{x^2.\frac{x^2}{y}}{y^2} =$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}$$

$(fg)' = f'.g + f.g'$
$(x^n)' = n.x^{n-1}$

Derivação Implícita

Exercícios: determine $\frac{dy}{dx}$ das funções abaixo.

a) $x^2y + x.y^2 = 6$

$(fg)' = f'.g + f.g'$
$(x^n)' = n.x^{n-1}$

Derivação Implícita

Exercícios: determine $\frac{dy}{dx}$ das funções abaixo.

a) $x^2y + x.y^2 = 6$

$$(x^2y)' + (x.y^2)' = (6)'$$

$$(x^2y)' = f'.g + f.g' = (x^2)'.\mathrm{y} + x^2.(\mathrm{y})'$$

$$= 2x.y + x^2.1.\frac{dy}{dx}$$

$$(x.y^2)' = f'.g + f.g' = (x^1)'.y^2 + x.(y^2)'$$

$$= y^2 + x.2\mathrm{y}.\frac{dy}{dx}$$

$(fg)' = f'.g + f.g'$
$(x^n)' = n.x^{n-1}$

Derivação Implícita

Exercícios: determine $\frac{dy}{dx}$ das funções abaixo.

a) $x^2y + x.y^2 = 6$

$$2x.y + x^2.1.\frac{dy}{dx} + y^2 + x.2y.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^2.1.\frac{dy}{dx} + x.2y.\frac{dy}{dx} = -2x.y - y^2$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + x.2y) = -2x.y - y^2$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{-2x.y - y^2}{x^2 + x.2y}}$$

$(fg)' = f'.g + f.g'$
$(x^n)' = n.x^{n-1}$

Derivação Implícita

Exercícios: determine $\frac{dy}{dx}$ das funções abaixo.

$b)\ xy^2 + 2y^3 = x - 2y$

$(fg)' = f'.g + f.g'$
$(x^n)' = n.x^{n-1}$

Derivação Implícita

Exercícios: determine $\frac{dy}{dx}$ das funções abaixo.

$c)\ x^3 + y^3 - 9xy = 0$

Exercício

Determine a equação reta tangente a curva $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$, no ponto (-1,0)

Exercício

Determine a equação reta tangente a curva $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$, no ponto (-1,0)

$$y = mx + n$$

$$(x^2)' + \frac{1}{2}(y)' - (1)' = (0)'$$

$$2x + \frac{1}{2}y' - 0 = 0 \rightarrow 2x + \frac{1}{2}y' = 0$$

$$\frac{y'}{2} = -2x \rightarrow y' = -4x \rightarrow y'(-1) = -4(-1) = 4$$

Exercício

Determine a equação reta tangente a curva $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$, no ponto (-1,0)

$$y = mx + n$$

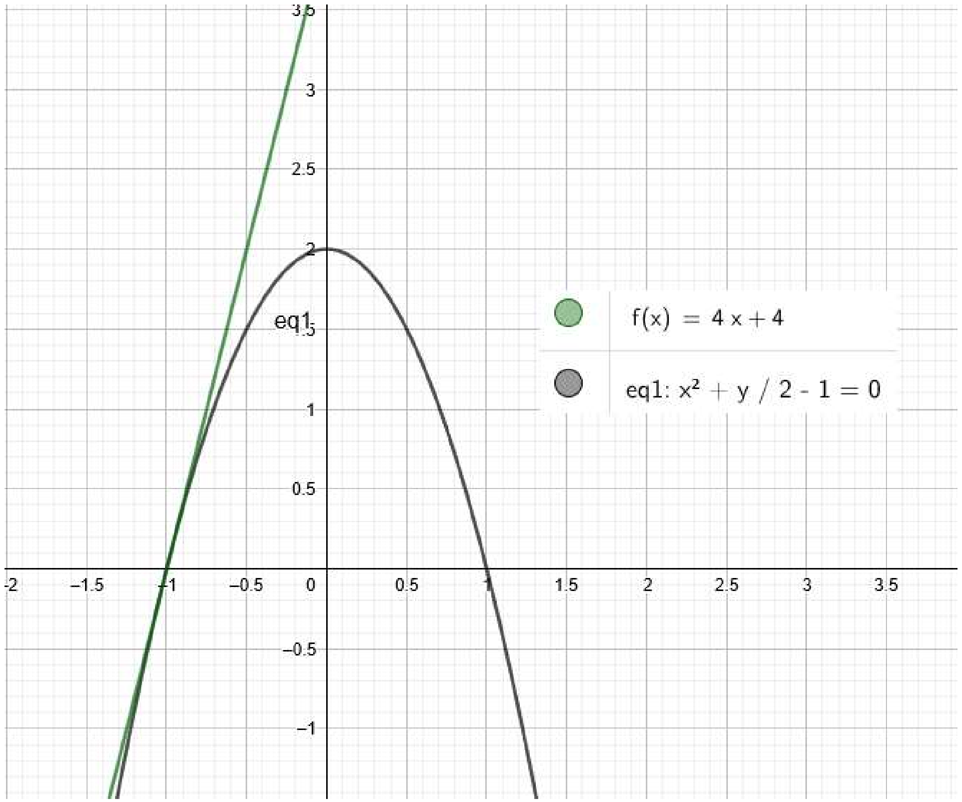
$$m = y'(-1) = 4$$

$$0 = 4(-1) + n \rightarrow n = 4$$

$$y = 4x + 4$$

Exercício

Determine a equação reta tangente a curva $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$, no ponto (-1,0)



Derivadas de Funções Inversas

Regra: se f tiver um intervalo I como domínio e $f'(x)$ existe e nunca é nula em I, então f^{-1} é derivável em qualquer ponto do seu domínio e dado por...

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Derivadas de Funções Inversas

Exemplo: $f(x) = x^3 - 2$ determine a derivada da inversa no ponto $\boldsymbol{x} =$ $\mathbf{2}$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$f^{-1}(x) \therefore y = x^3 - 2 \quad \rightarrow x = y^3 - 2 \rightarrow \quad x + 2 = y^3 \rightarrow y = \sqrt[3]{x+2} \rightarrow$
$f^{-1} = \sqrt[3]{x+2}$

$\left(f^{-1}(x)\right)' = \left(\sqrt[3]{x+2}\right)'$

$u = x + 2 \;\therefore y = \sqrt[3]{u}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{d(\sqrt[3]{u})}{du}.\frac{d(x+2)}{dx}$$

$$\frac{d(u^{\frac{1}{3}})}{du}.\frac{d(x+2)}{dx} = \frac{1}{3}.u^{-\frac{2}{3}}.1 = \frac{1}{3}.(x+2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

Derivadas de Funções Inversas

Exemplo: $f(x) = x^3 - 2$ determine a derivada da inversa no ponto $x = 2$.

$$f(2) = 2^3 - 2 = 6$$

$$d(y^{-1})(6) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(6+2)^2}} = \frac{1}{12}$$

Derivadas de Funções Inversas

Exemplo: $f(x) = x^3 - 2$ determine a derivada da inversa no ponto $x = 2$.

Outra forma:

I. Deriva $\rightarrow f'(x) = 3x^2$

II. Calcula a inversa $f(x) \rightarrow f^{-1} = \sqrt[3]{x+2}$

III. $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{3(\sqrt[3]{x+2})^2}$

Derivadas de Funções Inversas

Exemplo 2: verifique a fórmula para $f(x) = 8x^3$, calculando a derivada da inversa de $f(x)$.

I. Calcular a inversa

$$y = 8x^3 \rightarrow x = 8y^3 \rightarrow y^3 = \frac{x}{8} \rightarrow y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{8}}$$

$$y^{-1} = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}$$

II. Calcule a derivada da inversa

$$(y^{-1})' = \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}\right)' = \frac{1}{3}.\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{2} = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{6} = \frac{1}{6x^{\frac{2}{3}}}$$

Derivadas de Funções Inversas

Exemplo 2: verifique a fórmula para $f(x) = 8x^3$, calculando a derivada da inversa de $f(x)$.

Outro método

I. Calcular a derivada de $f(x)$

$$f'(x) = (8x^3)' = 24x^2$$

II. Calcular a inversa

$$y^{-1} = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}$$

III. $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f\prime(f^{-1}(x))} = \frac{1}{24(\frac{\sqrt[3]{x}}{2})^2} = \frac{1}{24.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{4}} = \frac{1}{6x^{\frac{2}{3}}}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

I) $\ln_e = 1$

II) $\ln 1 = 0$

III) $\ln e^n = n$

Exercícios (para casa)

a) Seja a função real definida por $f(x) = e^x + 1$. Calcular a derivada da inversa para x=2.

Exercícios (para casa)

I) $\ln_e = 1$

II) $\ln 1 = 0$

III) $\ln e^n = n$

b) Seja a função real definida por $y = 3x - 6$. Calcular o valor de $[y^{-1}(x)]'$

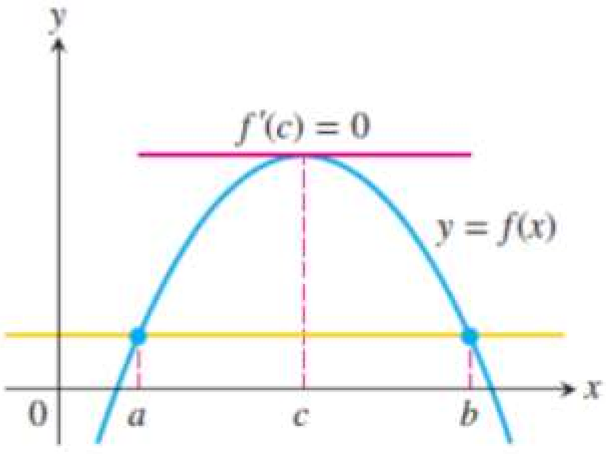
Teorema de Rolle

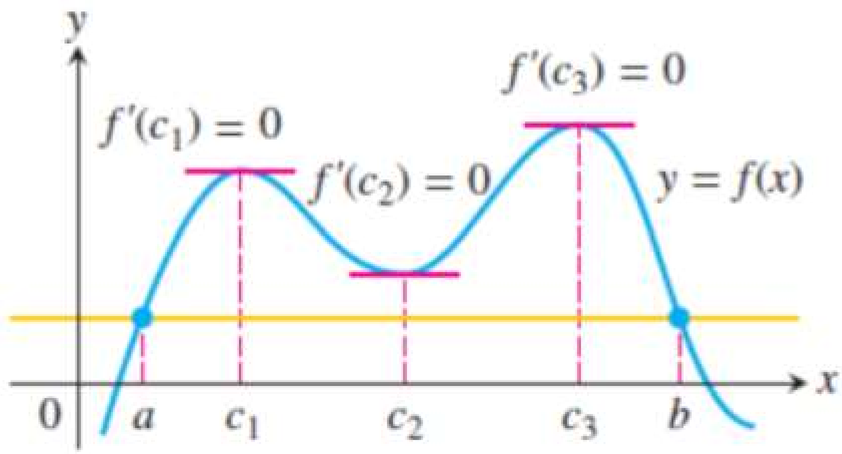
- Supondo que y = f (x) é contínua em todos os pontos de um intervalo fechado [a, b] e derivável em todos os pontos do intervalo (a, b).
  - Se f (a) = f (b) , então há pelo menos um número c em (a, b) no qual:

$$f'(c) = 0$$

Teorema de Rolle

"...diz que o gráfico de uma função derivável apresenta ao menos uma tangente horizontal entre dois pontos quaisquer onde a curva da função cruza uma reta horizontal."





Teorema do Valor Médio

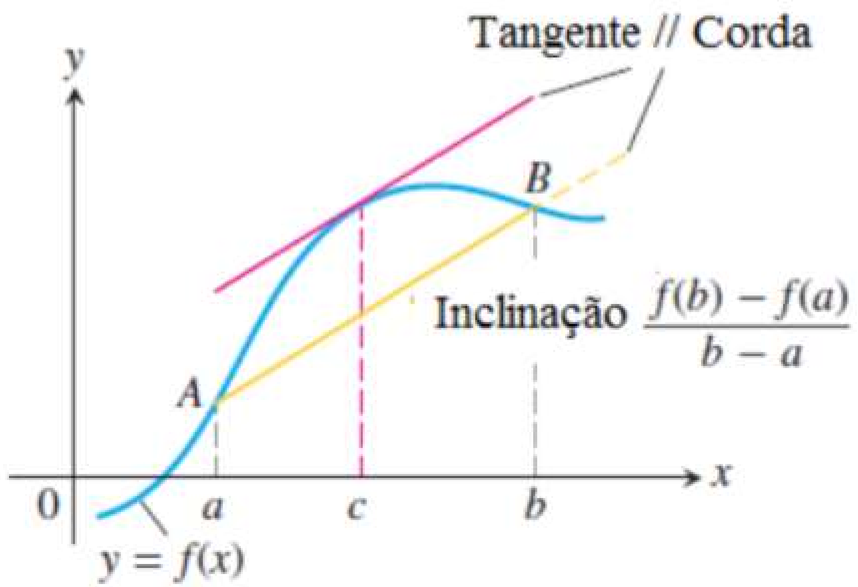
- Supondo que y = f (x) é contínua em um intervalo fechado [a, b] e derivável no intervalo (a, b).
  - Então, existe pelo menos um número c em (a, b) em que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema do Valor Médio

I. A função deve ser contínua num intervalo [a,b]
II. A função tem que ser derivável em [a,b]

Obs: representação de uma forma inclinada do Teorema de Rolle.



Teorema do Valor Médio

Exemplo: verifique se a função pode ser aplicada o teorema do valor médio e, se sim, aplique o teorema.

$a)\ f(x) = x^2 - 2x \quad [0,3]$

I) A função é contínua? R: função polinomial é continua no intervalo [0,3]

II) A função é derivável? R: toda função polinomial é derivável no intervalo do seu domínio.

Teorema do Valor Médio

Exemplo: verifique se a função pode ser aplicada o teorema do valor médio e, se sim, aplique o teorema.

a) $f(x) = x^2 + 2x \quad [\underset{a}{0},\underset{b}{3}]$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{15 - 0}{3 - 0} = 5$$

$$f(a) = f(0) = 0^2 + 2.0 = 0$$

$$f(b) = f(3) = 3^2 + 2.3 = 15$$

$$f'(x) = (x^2 + 2x)' = 2x + 2$$

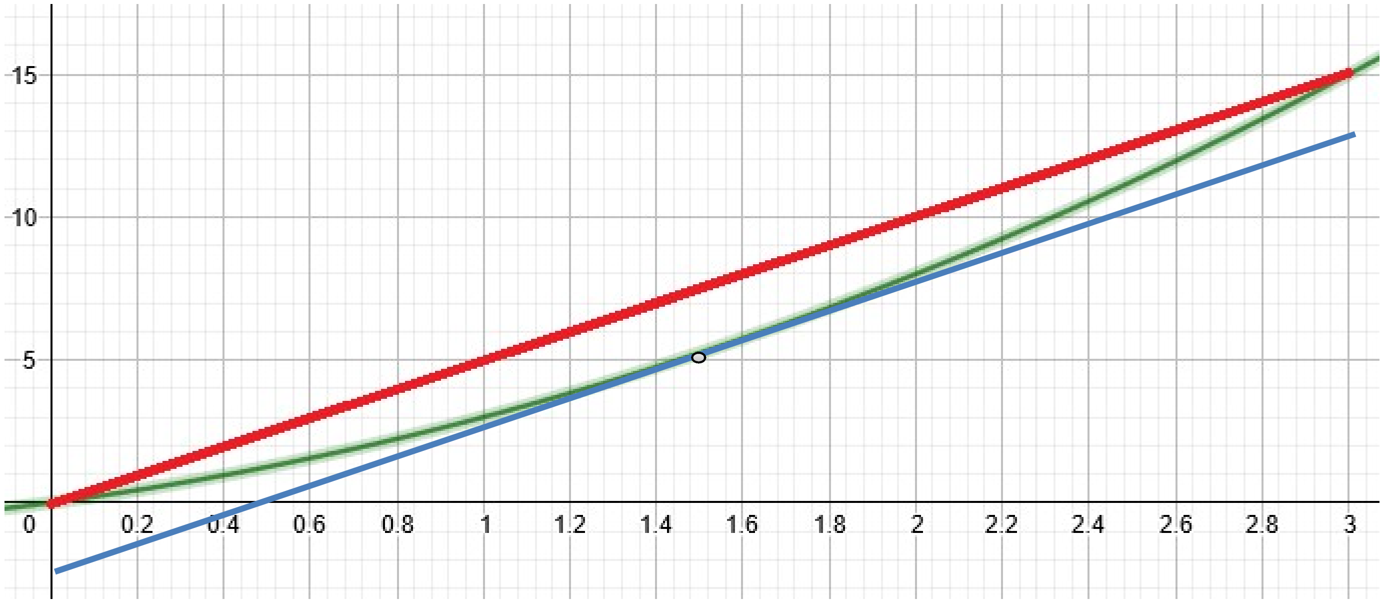
$$2c + 2 = 5 \therefore 2c = 3 \therefore c = \frac{3}{2}$$

Teorema do Valor Médio

Exemplo: verifique se a função pode ser aplicada o teorema do valor médio e, se sim, aplique o teorema.

a b

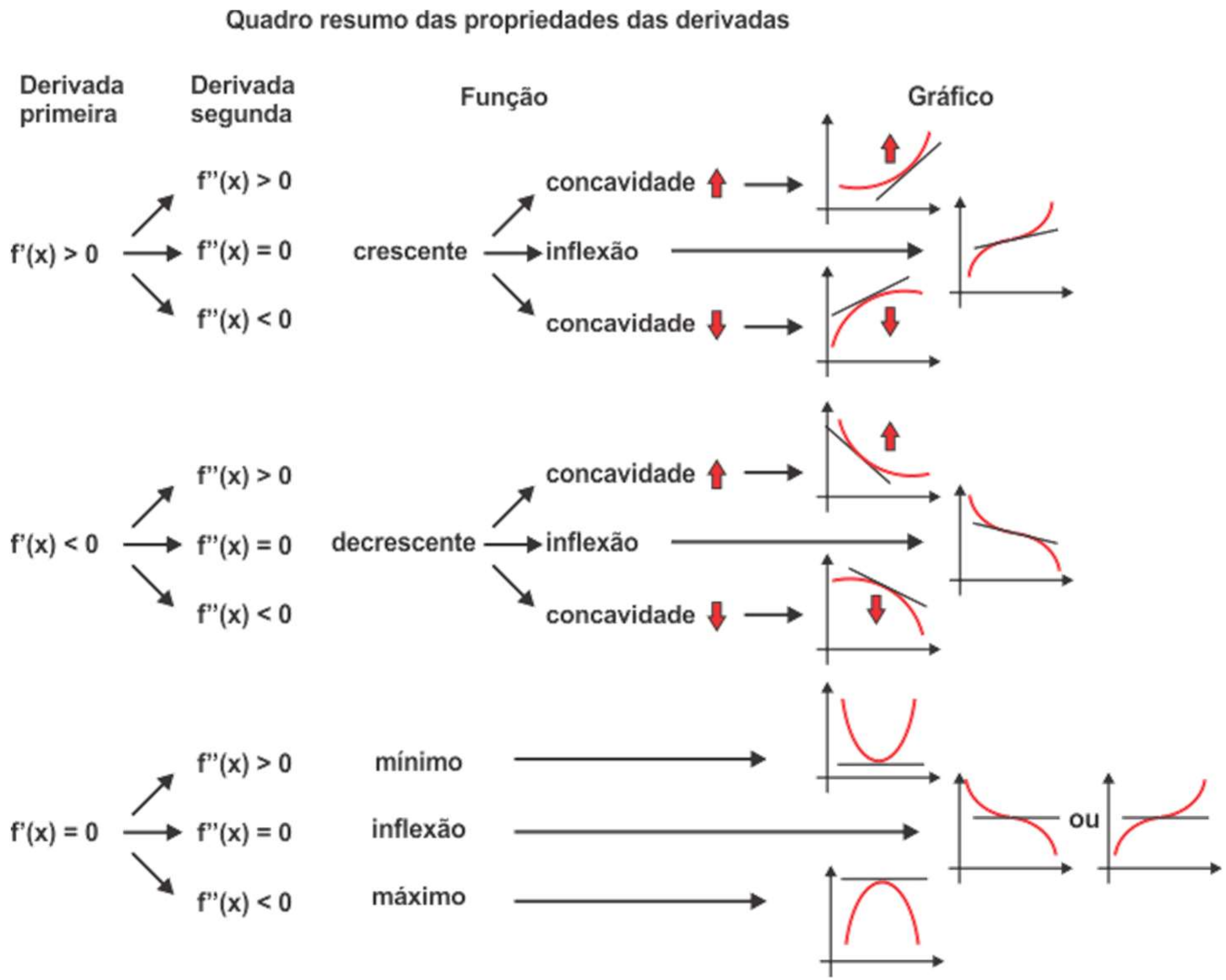
$$a)\ f(x) = x^2 + 2x \quad [0,3]$$



Aplicações da derivada

a) Quando a derivada é positiva, a função é crescente.
b) Quando a derivada é negativa, a função é decrescente.
c) Derivada crescente → Concavidade para cima
d) Derivada decrescente → Concavidade para baixo

Aplicações da derivada

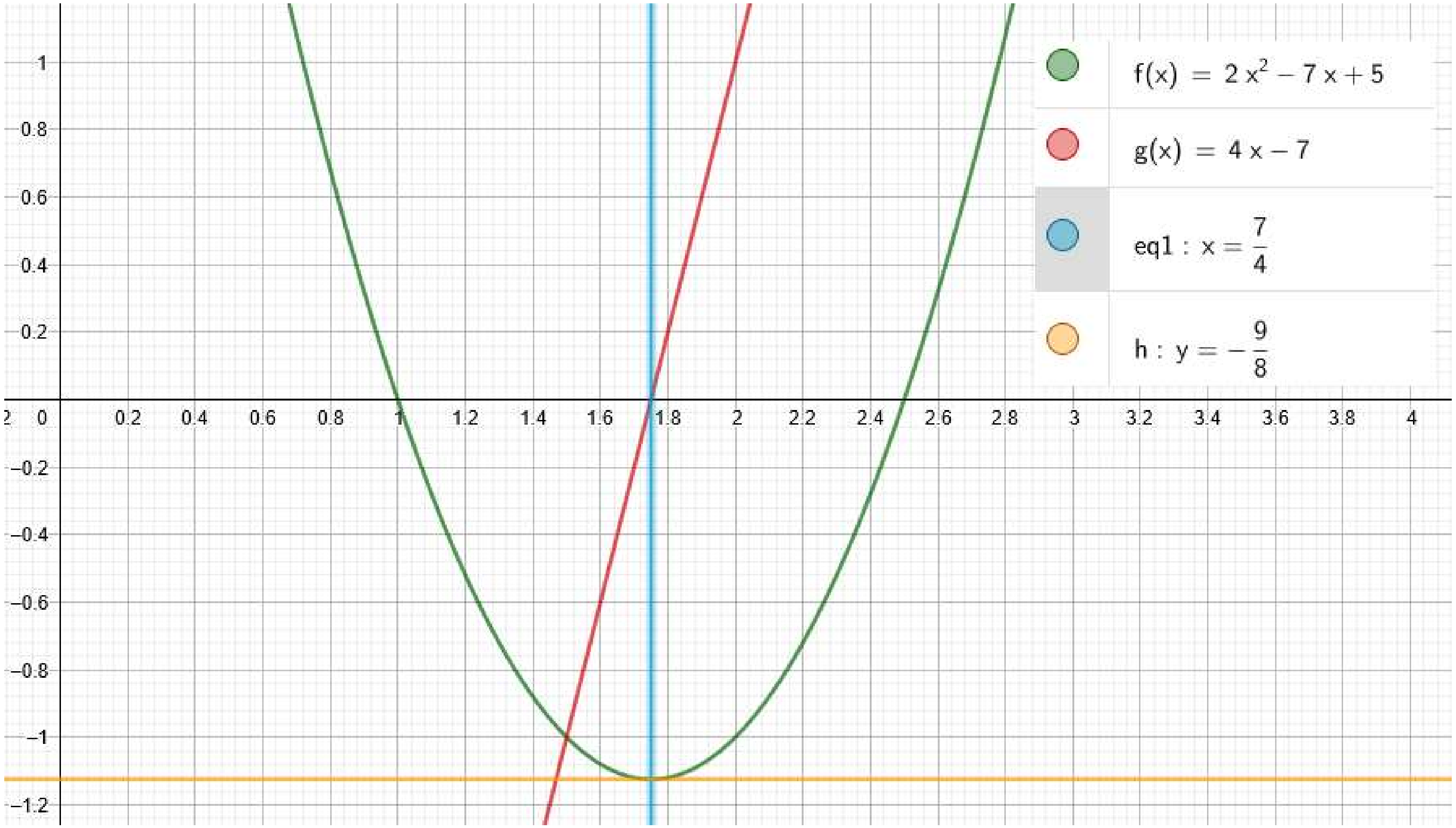


Aplicações da derivada

- Exemplo: considere a função quadrática $y = 2x^2 - 7x + 5$
  - Cuja a derivada é $y' = 4x - 7$, é positiva para $x > \frac{7}{4}$ e negativa para $x < \frac{7}{4}$; consequentemente, a função é crescente à direita de $x = \frac{7}{4}$ e decrescente à esquerda.
  - Portanto, ele atinge seu valor mínimo em $x = \frac{7}{4}$, onde a tangente é horizontal, pois $f'\left(\frac{7}{4}\right) = 0$.
    - $f\left(\frac{7}{4}\right) = -\frac{9}{8}$

Aplicações da derivada

- Exemplo: considere a função quadrática $y = 2x^2 - 7x + 5$



Extras

- https://www.youtube.com/watch?v=PMOEMs00Jz4