Calculo I

Integrais

Prof. Pablo Vargas

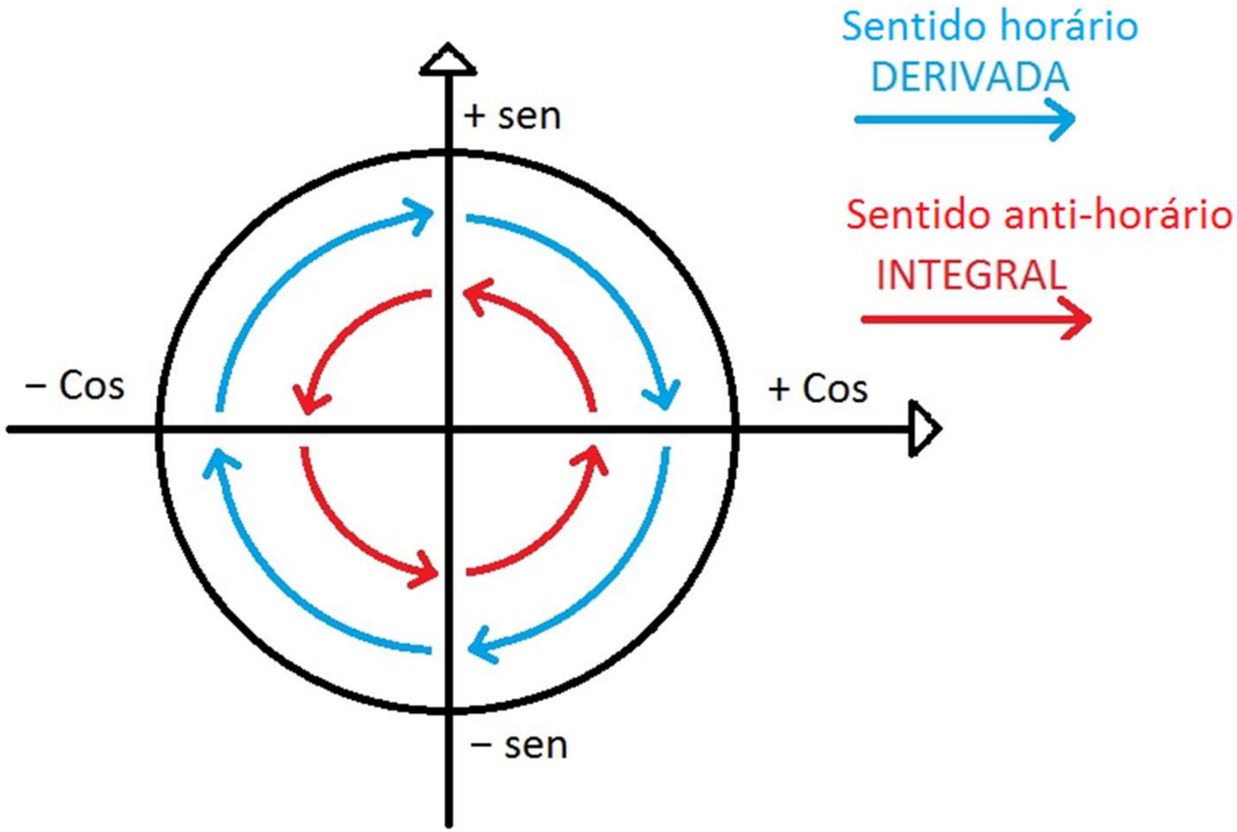
Introdução

- A integral está relacionada com o conceito de **primitivas**.
  - Diz-se que uma função F é primitiva de uma outra função f se esta é a derivada de F...

$$\boldsymbol{F' = f}$$

  - Exemplos:
    - x^3 é $primitiva\ de\ 3x^2$
    - $\sqrt{x}$ é $primitiva\ de\ \frac{1}{2\sqrt{x}}$
    - $\frac{1}{x}$ é $primitiva\ de\ \frac{-1}{x^2}$

Introdução


+ sen
− Cos
+ Cos
− sen
Sentido horário
DERIVADA
Sentido anti-horário
INTEGRAL

Introdução

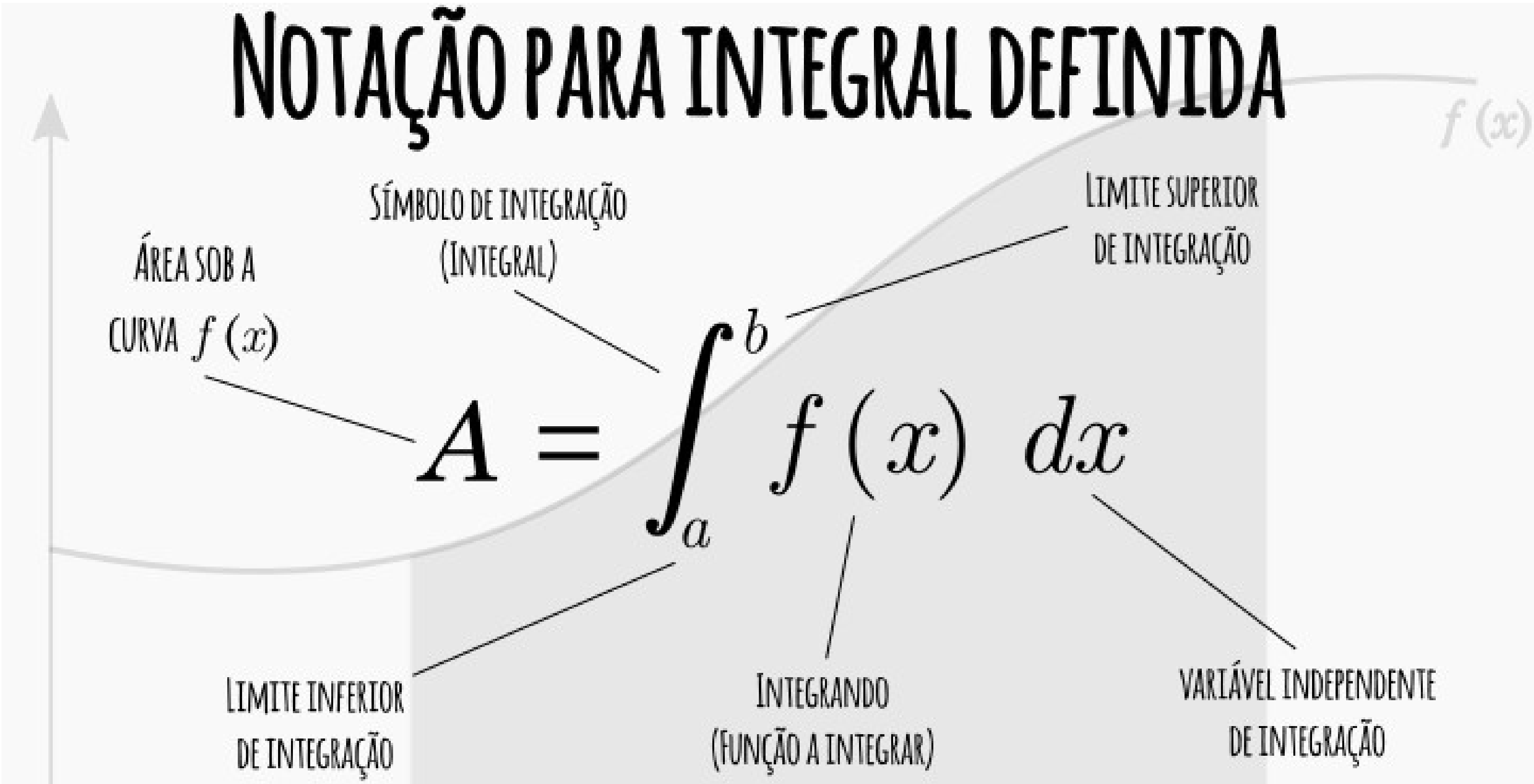
- Como a derivada de uma constante C é sempre zero, se F é primitiva de f, então $F + C$ também é. De fato,

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

  – Vemos, assim, que uma função f que tenha primitiva F possui uma infinidade de primitivas, do tipo $F(x) + C$, onde C é uma constante arbitrária.

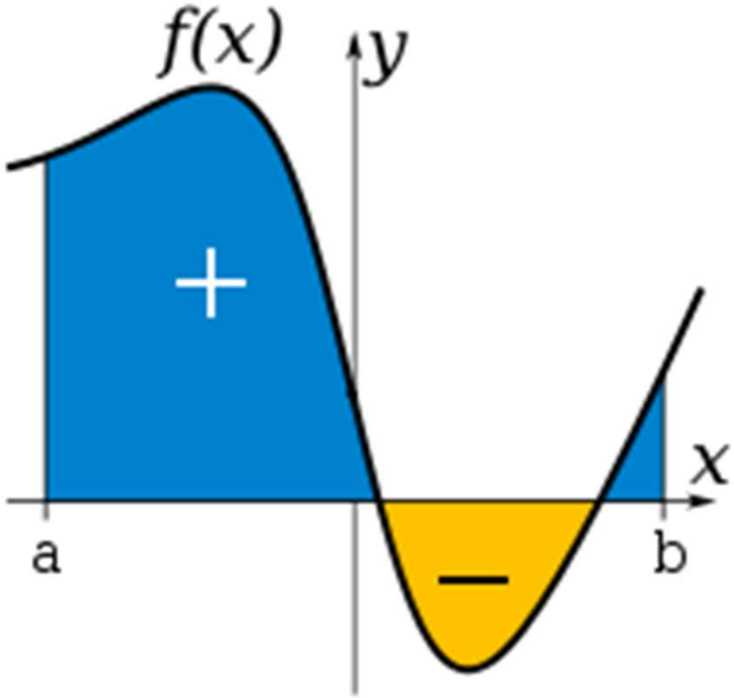
Integral

- "um método para **calcular áreas e volumes**"

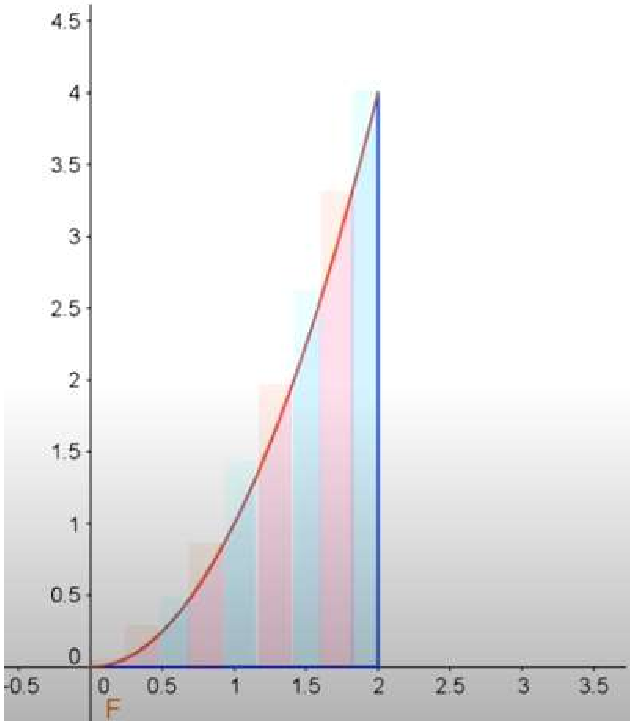


Integral

- “um método para calcular áreas e volumes”



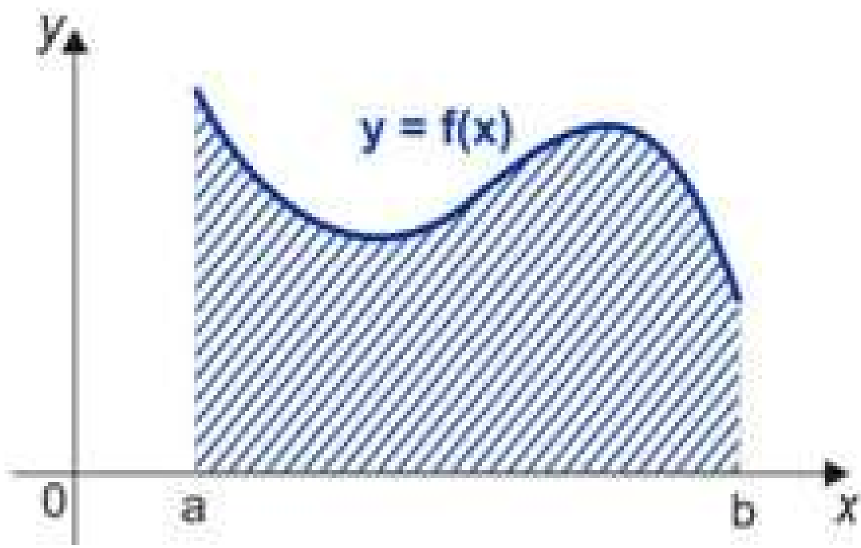
Integral de Riemann



$$Área = \int_a^b f(x)dx = \overbrace{\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^{n}}^{\textit{Soma das áreas de Retângulos}} \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\textit{Base}} \underbrace{f(x_i)}_{\textit{Altura}}$$

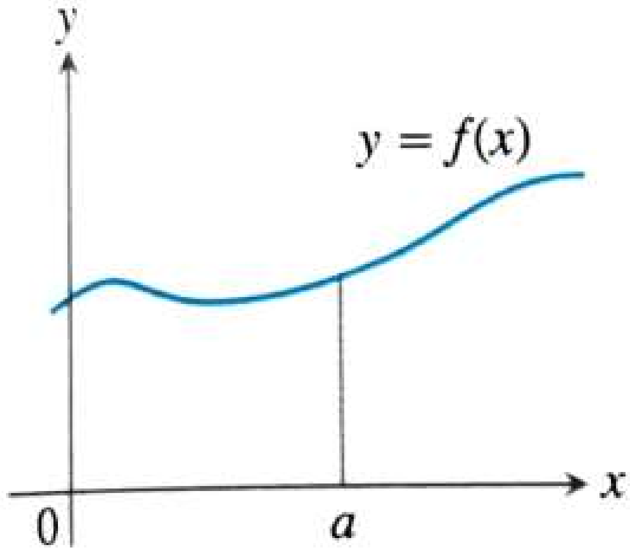
Integral

- Teorema 1: **Integrabilidade de funções contínuas**
  – Se $f(x)$ é contínua durante o intervalo de [a,b], então existe integral.



Integral

- Teorema 2: se f e g são integráveis, logo...

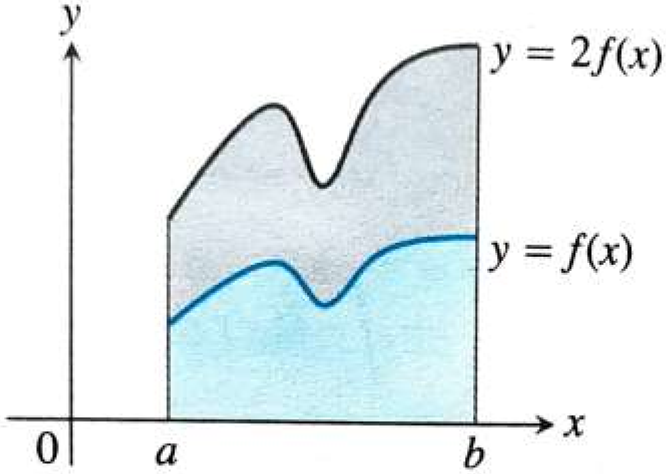


(a) *Intervalo de largura zero:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Integral

- Teorema 2: se f e g são integráveis, logo...

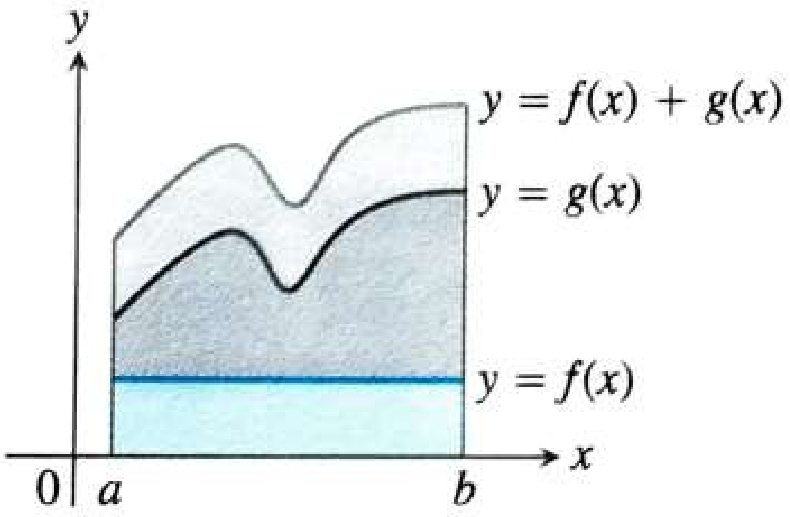


(b) *Multiplicação por constante:* $(k = 2)$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

Integral

- Teorema 2: se f e g são integráveis, logo...

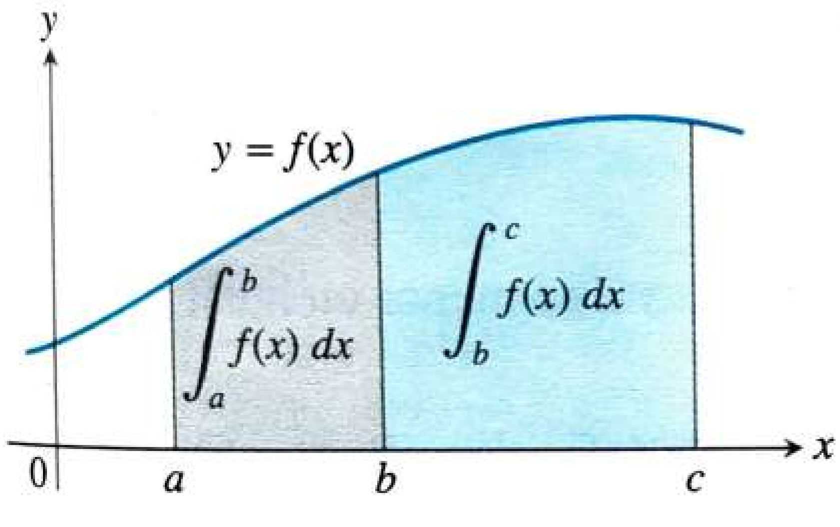


(c) *Soma: (áreas se somam)*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Integral

- Teorema 2: se f e g são integráveis, logo...

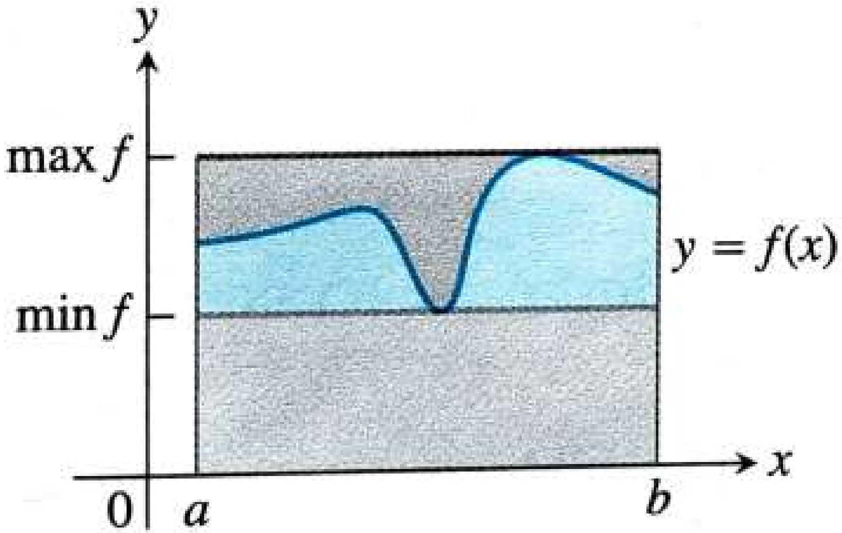


(d) *Aditividade para integrais definidas:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Integral

- Teorema 2: se f e g são integráveis, logo...

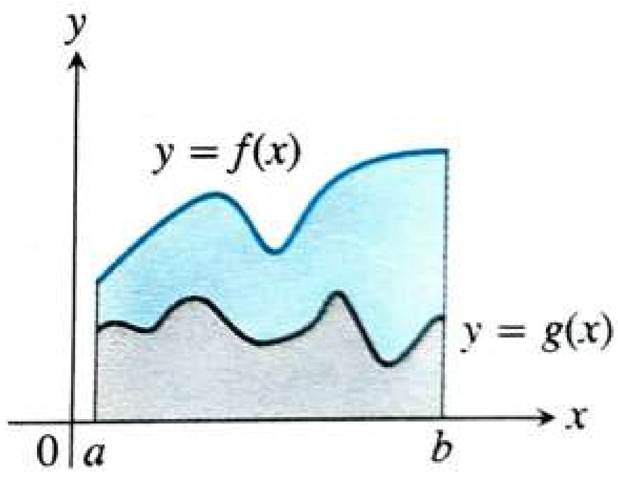


(e) *Desigualdade max-min:*

$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx$$
$$\leq \max f \cdot (b - a)$$

Integral

- Teorema 2: se f e g são integráveis, logo...



(f) *Dominação:*

$f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Integral

- Teorema 2: se f e g são integráveis, logo...

I. $\int_b^a f(x).dx = -\int_a^b f(x).dx$

II. $\int_a^a f(x).dx = 0$

III. $\int_a^b kf(x).dx = \mathrm{k}\int_a^b f(x).dx$

IV. $\int_a^b (f(x) \pm g(x)).dx = \int_a^b f(x).dx \pm \int_a^b g(x).dx$

V. $\int_a^b f(x).dx + \int_b^c f(x).dx = \int_a^c f(x).dx$

VI. $\min f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x).dx \leq \max f \cdot (b-a)$

VII. $f(x) \geq g(x)\ em\ [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x).dx \geq \int_a^b g(x).dx$

$$\int_a^b f(x).dx + \int_b^c f(x).dx = \int_a^c f(x).dx$$

Integral

$$\int_b^a f(x).dx = -\int_a^b f(x).dx$$

- Exemplo: Para ilustrar algumas regras, suponhamos que $\int_1^{-4} f(x).dx = 5, \int_1^4 f(x).dx = -2\ e\ \int_{-4}^4 h(x).dx = 7$

  a) Calcule $\int_{-4}^4 f(x).dx$

$$\int_{-4}^1 f(x).dx + \int_1^4 f(x).dx = \int_{-4}^4 f(x).dx$$

$$\int_{-4}^1 f(x).dx = -5$$

$$\int_{-4}^1 f(x).dx + \int_1^4 f(x).dx = \int_{-4}^4 f(x).dx = -5 + (-2) = -7$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)).dx = \int_a^b f(x).dx \pm \int_a^b g(x).dx$$

Integral

- Exemplo: Para ilustrar algumas regras, suponhamos que $\int_4^1 f(x).dx = 5, \int_1^{-4} f(x).dx = -2 \; e \; \int_{-4}^4 h(x).dx = 7$

b) Calcule $\int_4^{-4} (f(x) + h(x)).dx$

$$\int_4^{-4} (f(x) + h(x)).dx = \int_4^{-4} f(x).dx + \int_4^{-4} h(x).dx$$

$$\int_4^{-4} (f(x) + h(x)).dx = 7 + (-7) = 0$$

$$\int_{-4}^{4} f(x).dx = -7 \therefore \int_4^{-4} f(x).dx = 7$$

$$\int_{-4}^{4} h(x).dx = 7 \therefore \int_4^{-4} h(x).dx = -7$$

Integral

I. $\int_b^a f(x).dx = -\int_a^b f(x).dx$

II. $\int_a^a f(x).dx = 0$

III. $\int_a^b kf(x).dx = \mathrm{k}\int_a^b f(x).dx$

IV. $\int_a^b (f(x) \pm g(x)).dx = \int_a^b f(x).dx \pm \int_a^b g(x).dx$

V. $\int_a^b f(x).dx + \int_b^c f(x).dx = \int_a^c f(x).dx$

- Exercício: suponhamos que $\int_1^2 f(x).dx = -4, \int_1^5 f(x).dx = 6\ e\ \int_1^5 g(x).dx = 8$
  - Calcule:

a) $\int_2^2 g(x).dx =$

b) $\int_5^1 f(x).dx =$

c) $\int_1^2 3.f(x).dx =$

d) $\int_2^5 f(x).dx =$

e) $\int_1^5 (f(x) - g(x)).dx =$

Regras de Derivação

$$\int_a^b x.\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, a < b$$

$$\int_a^b c.\,dx = c(b - a), c = constante$$

$$\int_a^b x^2.\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, a < b$$

Regras de Derivação

Exemplo: calcule as integrais abaixo.

a) $\int_{1}^{\sqrt{2}} x.dx$

$$\int_{a}^{b} x.dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, a < b$$

$$\int_{1}^{\sqrt{2}} x.dx = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_a^b x.dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, a < b$$

$$\int_a^b c.dx = c(b-a), c = constante$$

$$\int_a^b x^2.dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, a < b$$

Regras de Derivação

Exercícios: calcule as integrais abaixo.

$a)\ \int_1^2 3x^2.dx$

$b)\ \int_0^2 (2x-3).dx$

$$\int_a^b x.dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, a < b$$

$$\int_a^b c.dx = c(b-a), c = constante$$

$$\int_a^b x^2.dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, a < b$$

10:33

Regras de Derivação

Exercícios: calcule as integrais abaixo.

a) $\int_1^2 3x^2.dx$

$$\int_1^2 3x^2.dx = 3\int_1^2 x^2.dx$$

$$3\int_1^2 x^2.dx = 3\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = 3\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 3\left(\frac{7}{3}\right) = 7$$

$$\int_a^b x.dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, a < b$$

$$\int_a^b c.dx = c(b-a), c = constante$$

$$\int_a^b x^2.dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, a < b$$

10:33

Regras de Derivação

Exercícios: calcule as integrais abaixo.

b) $\int_0^2 (2x-3).dx$

$$\int_0^2 2x.dx - \int_0^2 3.dx = 2\int_0^2 x.dx - 3(2-0)$$

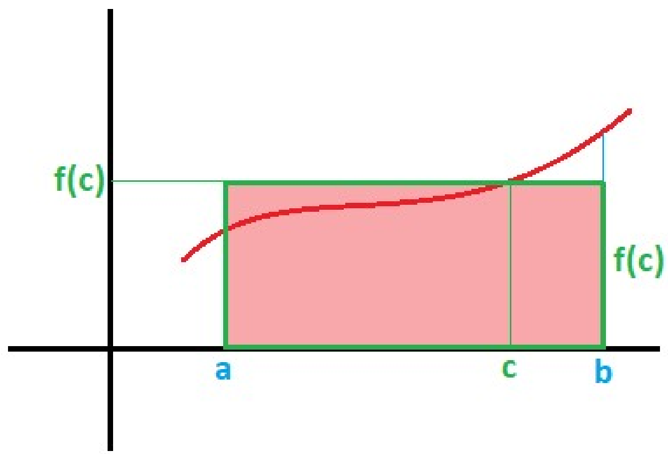
$$2\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) - 6 = 2\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - 6 = 4 - 6$$

$$= -2$$

Aplicações Integrais

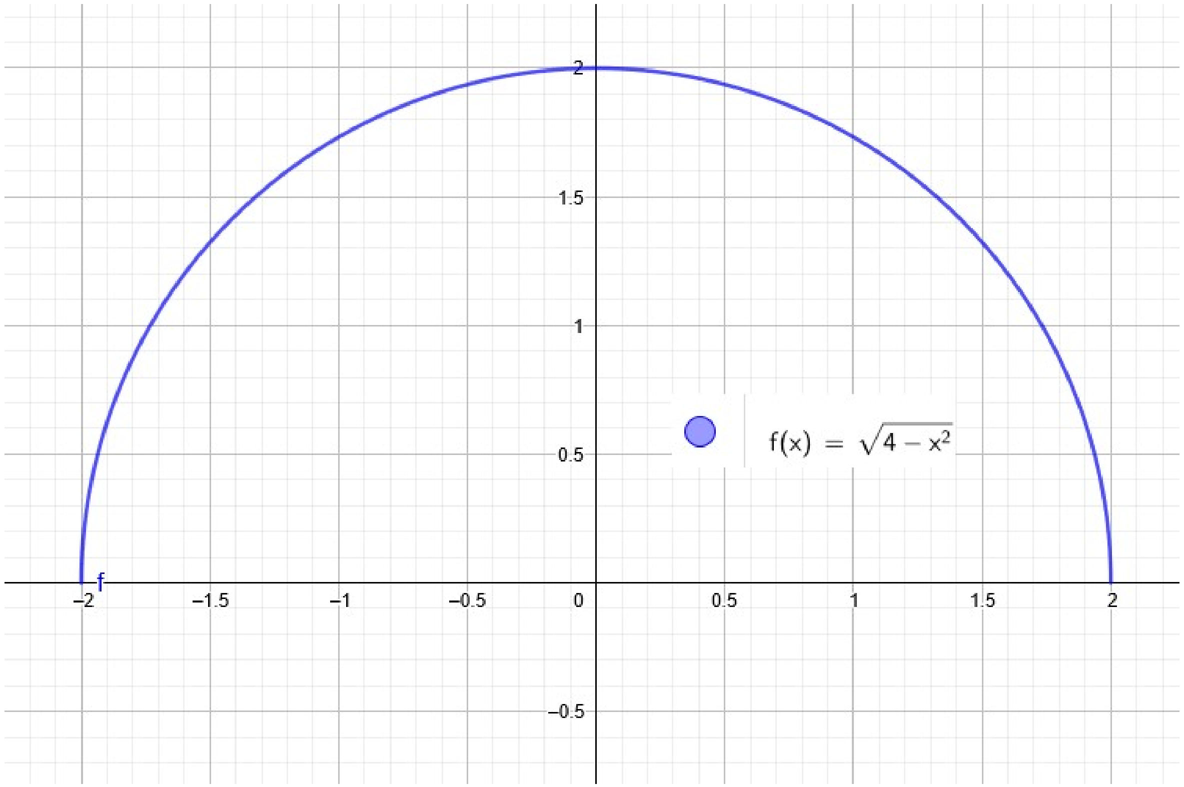
- **Teorema do valor médio para integrais definidas:** se f for contínua em $[a, b]$, então em algum ponto c em $[a, b]$...

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx$$



Aplicações Integrais

- Exemplo: determine o valor médio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ em $[-2,2]$



Aplicações Integrais

- Exemplo: determine o valor médio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ em $[-2,2]$
  - A área de um semicírculo: $\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi 2^2 = 2\pi$

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}.\, dx = 2\pi$$

  - Portanto,

$$média(x) = f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).\, dx$$

$$= \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}.\, dx = \frac{1}{4}2\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx$$

Exercícios (para casa)

$$\int_a^b c.dx = c(b-a), c = constante$$

- Determine o valor médio de $f(x) = x^2 - 1$ em $[0, \sqrt{3}]$

a b

$$f(c) = \frac{1}{\sqrt{3}-0}\int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 1).dx$$

$$f(c) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\int_0^{\sqrt{3}} x^2.dx - \int_0^{\sqrt{3}} 1.dx\right)$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^2.dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{3}} = \left(\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{3}$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} 1.dx = 1.\left(\sqrt{3} - 0\right) = \sqrt{3}$$

$$\int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx$$

Exercícios (para casa)

$$\int_a^b c.dx = c(b-a), c = constante$$

- Determine o valor médio de $f(x) = x^2 - 1$ em $[\underset{a}{0}, \underset{b}{\sqrt{3}}]$

$$f(c) = \frac{1}{\sqrt{3}-0}\int_0^{\sqrt{3}}(x^2-1).dx$$

$$f(c) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{3} - \sqrt{3}\right)$$

$$f(c) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{\cancel{3}\,2}}{3\cancel{\sqrt{3}}} - 1 = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3} - 1 = \frac{3}{3} - 1 = 0$$

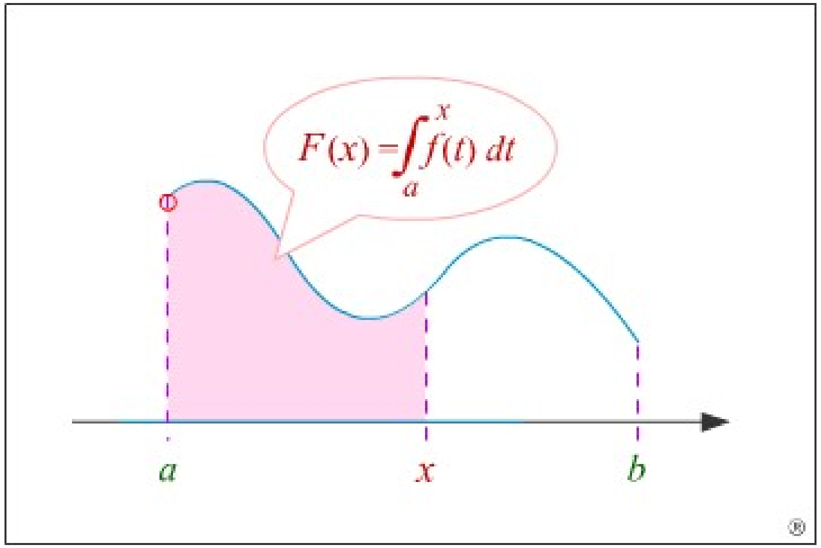
$$f(1) = 0$$

Teorema Fundamental do Cálculo

- "...permite calcular integrais através de primitivas"

I)Encontre F, que é primitiva de f

II) Calcule $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x).dx$



Teorema Fundamental do Cálculo

- Se f é contínua em [a,b], então $F(x) = \int_a^x f(t).dt$ é contínua em [a,b] e derivável em (a,b), e sua derivada é $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t).dt = f(x)$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t).dt = f(x)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

- Exemplo 1: Determine $\frac{dy}{dx}$ se

$y = \int_a^x (t^3 + 1).dt$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x (t^3 + 1).dt = x^3 + 1$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t).\,dt = f(x)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

- Exemplo 2: Determine $\frac{dy}{dx}$ se

$$y = \int_x^5 3t.\,sen\ t.\,dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_x^5 3t.\,sen\ t.\,dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\int_5^x 3t.\,sen\ t.\,dt\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d}{dx}\int_5^x 3t.\,sen\ t.\,dt = -\,3x.\,sen\ x$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t).\,dt = f(x)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

- Exemplo 3: Determine $\frac{dy}{dx}$ se

$$y = \int_1^{x^2} \cos t\,.\,dt$$

  - O limite superior de integração agora é x^2. Isso torna y uma composição de duas funções,

$$y = \int_1^u \cos t.\,dt \quad \text{e} \quad u = x^2$$

  - Aplica-se a regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \left(\frac{d}{du}\int_1^u \cos t.\,dt\right).\frac{du}{dx}$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t).dt = f(x)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

- Exemplo 3: Determine $\frac{dy}{dx}$ se

$$y = \int_1^{x^2} \cos t \, . dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \left(\frac{d}{du}\int_1^u \cos t . dt\right).\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos u . \frac{du}{dx} = \cos x^2 \, . (2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xcos\, x^2$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t).dt = f(x)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

- Exemplo 4: Determine $\frac{dy}{dx}$ se

$$y = \int_{1+3x^2}^{4} \frac{1}{2+e^t}.dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-\int_4^{1+3x^2} \frac{1}{2+e^t}.dt)$$

$$y = \int_4^u \frac{1}{2+e^t}.dt \ \ e \ u = 1 + 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d}{du}(\int_4^u \frac{1}{2+e^t}.dt).\frac{d(1+3x^2)}{dx}$$

Teorema Fundamental do Cálculo

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t).dt = f(x)$$

- Exemplo 4: Determine $\frac{dy}{dx}$ se

$$y = \int_{1+3x^2}^{4} \frac{1}{2+e^t}.dt$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d}{du}\left(\int_4^u \frac{1}{2+e^t}.dt\right).\frac{d(1+3x^2)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2+e^{(1+3x^2)}}.\frac{d(1+3x^2)}{dx}$$

$$= -\frac{6x}{2+e^{(1+3x^2)}}$$

Teorema Fundamental do Cálculo

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t).\,dt = f(x)$$

- Exercícios: Determine $\frac{dy}{dx}$ se

$$y = \int_{x^2}^{4}(t^3+2).\,dt$$

Teorema Fundamental do Cálculo

- Parte 2: se f é contínua em qualquer ponto de [a,b] e se F é qualquer primitiva de f em [a,b], então...

$$\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

- Exemplo 1: Calcule a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x . dx$

I. Qual função derivamos e achamos cos x? R: $sen\, x \leftarrow \boldsymbol{antiderivada}$

$II.\ \int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$

$$= F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = sen\frac{\pi}{2} - sen\, 0 = 1 - 0 = 1$$

Teorema Fundamental do Cálculo

- Exemplo 2: Calcule a $\int_0^4 2x.dx$

$$2\int_0^4 x.dx$$

I. Qual função derivamos e achamos x? R: $\frac{\mathrm{x}^2}{2} \leftarrow antiderivada$

Prova: $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' = \frac{1}{2}.2x = x$

Teorema Fundamental do Cálculo

- Exemplo 2: Calcule a $\int_0^4 2x.dx$

$$2\int_0^4 x.dx$$

II. $\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$

$$2.[\mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(0)] = 2.\left[\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = 2.\left[\frac{16}{2} - 0\right]$$

$$= 16$$

Integrais Indefinidas

- “...quando o intervalo de integração não esta definido.”

$$\int f(x).dx = F(x) + C$$

C: constante arbitrária

$F(x)$: Primitiva

a e b: não definidos

Integrações básicas

$$I. \quad \int k.\,dx = kx + C$$

$$II. \quad \int x^n.\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \; (n \neq -1)$$

$$III. \quad \int \frac{1}{x}.\,dx = \ln|x| + C$$

$$IV. \quad \int e^x.\,dx = e^x + \mathrm{C}$$

$$V. \quad \int a^x.\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathrm{C}$$

Integrações básicas

$$VI.\ \int sen\,x.dx = -\cos x + C$$

$$VII.\int cos\,x.dx = sen\,x + C$$

$$VIII.\int sec^2x.dx = tg\,x + C$$

$$IX.\ \int cossec^2x.dx = -cotg\,x + \mathrm{C}$$

$$X.\ \ \int tg\,x.dx = \ln|\sec x| + C$$

Métodos de Integração

"...utilizada para cálculo de funções mais complexas onde é difícil prever sua primitiva e intervalo não definido"

Regra da Substituição: se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja a imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então...

$$\int f\big(g(x)\big).\,g'(x).\,dx = \int f(u).\,du$$

$$\int f(g(x)).g'(x).dx = \int f(u).du$$

$$\int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$$

Métodos de Integração

Exemplo 1: determine $\int (x^2 - 5x).(2x-5).dx$

$$u = x^2 - 5x \ \therefore \frac{du}{dx} = 2x - 5 \leftrightarrow du = (2x-5).dx$$

$$\int u.du = \frac{u^{1+1}}{1+1} + C = \frac{u^2}{2} + \mathrm{C}$$

$$\int (x^2 - 5x).(2x-5).dx = \frac{(x^2-5x)^2}{2} + \mathrm{C}$$

$$\int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$$

Métodos de Integração

Exemplo 2: determine $\int \sqrt{2x+1}.dx$

$$u = 2x + 1 \therefore \frac{du}{dx} = 2 \leftrightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int u^{\frac{1}{2}}.\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}.du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \sqrt{2x+1}.dx = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$$

Métodos de Integração

Exemplo 3: determine $\int 2(2x+4)^5.dx$

$$u = 2x + 4 \therefore \frac{du}{dx} = 2 \leftrightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int 2u^5 \frac{du}{2} = \int u^5.du = \frac{u^{5+1}}{5+1} + C = \frac{u^6}{6} + C$$

$$\int 2(2x+4)^5.dx = \frac{(2x+4)^6}{6} + C$$

$$\int sen\,x.\,dx = -\cos x + C$$

Métodos de Integração

Exercício: Determine $\int sen\,4x.\,dx$

$$u = 4x \therefore \frac{du}{dx} = 4 \rightarrow dx = \frac{du}{4}$$

$$\int sen\,u.\frac{du}{4} = \frac{1}{4}.\int sen\,u.\,du$$

$$\frac{1}{4}(-\cos u) + C = -\frac{\cos 4x}{4} + C$$

Métodos de Integração

Regra da substituição em integrais definidas: se g' for contínua no intervalo [a,b] e f for contínua na imagem de g(x)=u então...

$$\int_a^b f\big(g(x)\big).\,g'(x).\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u).\,du$$

Métodos de Integração

Exemplo (método 1): Calcule $\int_{-1}^{1} 3x^2 . \sqrt{x^3+1} . dx$

$$u = x^3 + 1 \therefore \frac{du}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2} \rightarrow du = 3x^2 dx$$

$$u(a) = u(-1) = (-1)^3 + 1 = 0$$

$$u(b) = u(1) = 1^3 + 1 = 2$$

$$\int_0^2 du . \sqrt{u} = \int_0^2 u^{1/2} . du = \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Big]_0^2 = \frac{2}{3} u^{3/2}\Big]_0^2$$

$$= \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3} . 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Métodos de Integração

Exemplo (método 2): Calcule $\int_{-1}^{1} 3x^2.\sqrt{x^3+1}.dx$

$$u = x^3 + 1 \therefore \frac{du}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\int \frac{du}{dx}.\sqrt{u}.dx = \int u^{1/2}.du = \frac{2}{3}u^{3/2} + \mathrm{C} = \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2} + \mathrm{C}$$

– *Aplicando o intervalo antigo*

$$\frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{3}[(1^3+1)^{3/2} - ((-1)^3+1)^{\frac{3}{2}}] = \frac{2}{3}.2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Exercícios

Calcule as integrais abaixo.

a) $\int_{-1}^{1} \frac{5x}{(4+x^2)^2} . dx$

$$u = 4 + x^2 \therefore \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow \frac{du}{2x} = dx$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{5x}{(u)^2} . \frac{du}{2x} = \int_{-1}^{1} \frac{5}{(u)^2} . \frac{du}{2} = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} u^{-2} . du$$

$$= \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} u^{-2} . du = \frac{5}{2} . \left(\frac{u^{-2+1}}{-2+1} \right) |_{-1}^{1} = \frac{5}{2} . \left(\frac{u^{-1}}{-1} \right) |_{-1}^{1}$$

$$= \frac{5}{2} . \left(\frac{(4+x^2)^{-1}}{-1} \right) |_{-1}^{1} = -\frac{5}{2} \left(\frac{1}{4+x^2} \right) |_{-1}^{1} = -\frac{5}{2} \left(\frac{1}{4+1^2} - \frac{1}{4+(-1)^2} \right)$$

$$= 0$$

Exercícios

Calcule as integrais abaixo.

b) $\int_0^1 \frac{5x}{(4+x^2)^2}.dx$

$$u = 4 + x^2 \therefore \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow \frac{du}{2x} = dx$$

$$\int_0^1 \frac{5x}{(u)^2}.\frac{du}{2x} = \int_0^1 \frac{5}{(u)^2}.\frac{du}{2} = \frac{5}{2}\int_0^1 u^{-2}.du$$

$$= \frac{5}{2}\int_0^1 u^{-2}.du = \frac{5}{2}.\left(\frac{u^{-2+1}}{-2+1}\right)|_0^1 = \frac{5}{2}.\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right)|_0^1$$

$$= \frac{5}{2}.\left(\frac{(4+x^2)^{-1}}{-1}\right)|_0^1 = -\frac{5}{2}\left(\frac{1}{4+x^2}\right)|_0^1 = -\frac{5}{2}(\frac{1}{4+1^2} - \frac{1}{4+(0)^2})$$

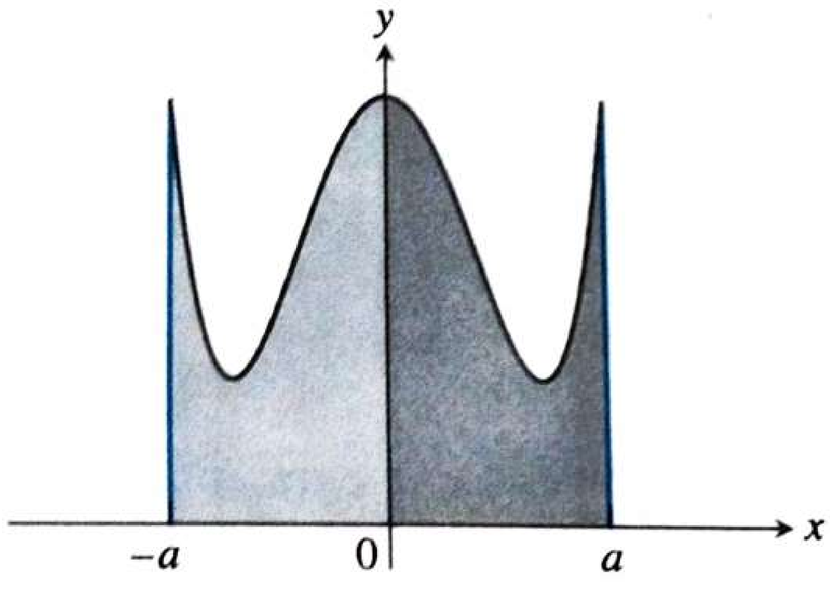
$$= \frac{1}{8}$$

Integrais definidas de funções simétricas

Seja f contínua no intervalo simétrico[-a,a].

a) Se f é par, então...

$$\int_{-a}^{a} f(x).dx = 2\int_{0}^{a} f(x).dx$$

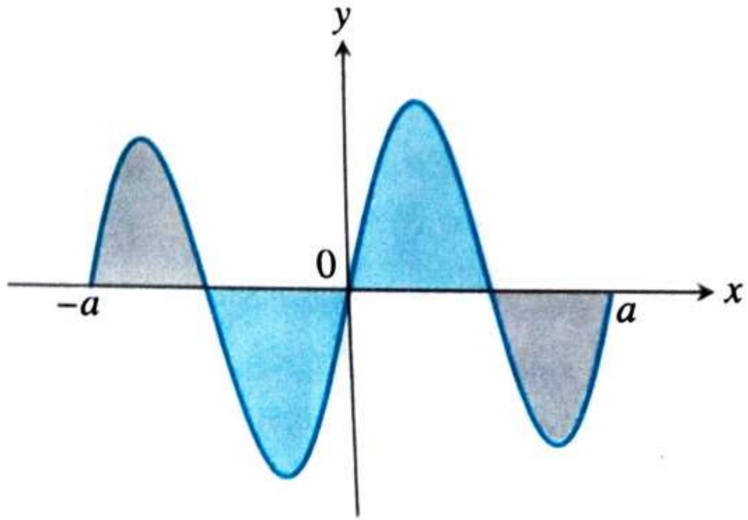


Integrais definidas de funções simétricas

Seja f contínua no intervalo simétrico[-a,a].

b) Se f é impar, então...

$$\int_{-a}^{a} f(x).\,dx = 0$$



Integrais definidas de funções simétricas

Exemplo: calcule $\int_{-2}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6).dx$

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 6$ é par. Logo:

$$\int_{-2}^{2} f(x).dx = 2\int_{0}^{2} f(x).dx$$

$$= 2.[\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 6x]_0^2$$

$$= 2.\left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} + 12\right) = \frac{232}{15}$$

Extras

- https://www.youtube.com/watch?v=CWWbjoOjYOg
- https://www.youtube.com/watch?v=qRMvrwLt96s