DACC Departamento Acadêmico de Ciência da Computação

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA

Álgebra Linear

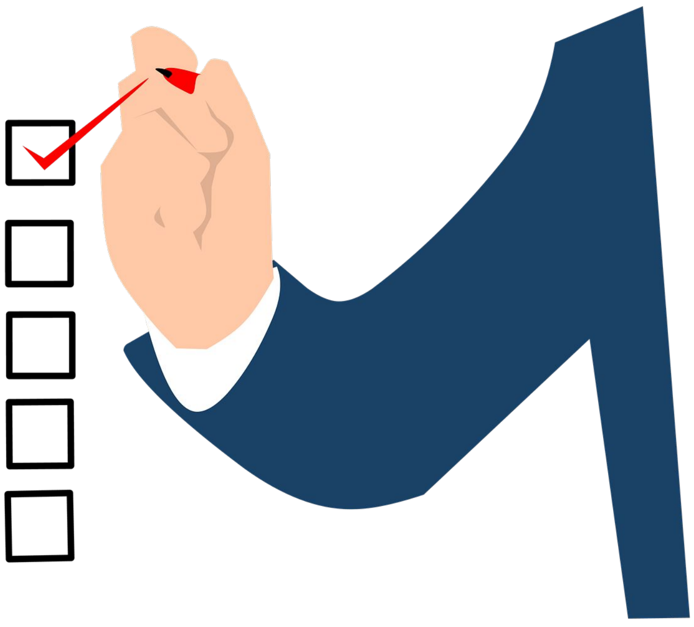
Professor:

Me. Lucas Marques da Cunha

lucas.marques@unir.br

Roteiro

1. Matrizes e Sistemas de Equações
2. Sistemas de Equações Lineares
3. Tipos de Sistemas Lineares
4. Sistemas Equivalentes
5. Forma triangular estrita
6. Algoritmo de eliminação
7. Exercícios práticos



Matrizes e Sistemas de Equações

- “Mais de 75% de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais envolvem a **resolução de uma sistema linear** em algum estágio.” (Steven J. Leon)
- Desse modo, é frequentemente possível **reduzir um problema** sofisticado a um simples sistema de equações lineares.
- Sistemas lineares estão presentes em aplicações em áreas como **negócios, economia, sociologia, ecologia, demografia, genética, eletrônica, engenharia e física**.

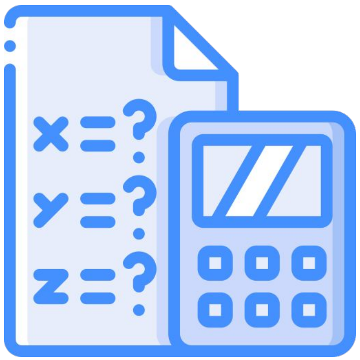
Matrizes e Sistemas de Equações

Matrizes e Sistemas de Equações

- Uma **equação linear** a n incógnitas é uma equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

em que a_1, a_2, …, a_n e b são números reais e x_1, x_2, …, x_n são variáveis.



Matrizes e Sistemas de Equações

- Um sistema linear de *m* equações em *n* incógnitas é portanto um sistema da forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

- no qual a_{ij} e b são todos números reais. O sistema na forma apresentada acima são chamados de **sistemas lineares m x n**.

Matrizes e Sistemas de Equações

- Seguem exemplos de sistemas lineares:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 &= 4 \end{aligned}$$

- O sistema (a) é 2x2, (b) é 2x3 e (c) é um sistema 3x2.

Matrizes e Sistemas de Equações

- A solução de um sistema m x n é uma n-upla ordenada de números (x_1, x_2,..., x_n) que **satisfaz todas as equações do sistema**.

- Por exemplo, o par ordenado (1, 2) é uma solução do sistema **(a)**, já que:

$$1 \,.\, (1) + 2 \,.\, (2) = 5$$
$$2 \,.\, (1) + 3 \,.\, 2 = 8$$

- O termo ordenado (2, 0, 0) é uma solução do sistema (b), já que:

$$1 \,.\, (2) - 1 \,.\, (0) + 1 .\, (0) = 2$$
$$2 \,.\, (2) + 1 \,.\, (0) - 1 \,.\, (0) = 4$$

Matrizes e Sistemas de Equações

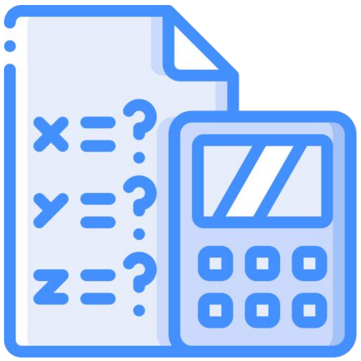
- **Na verdade, o sistema (b) tem muitas soluções. Você consegue identificar algumas delas? Use o Octave para realizar os testes.**

Matrizes e Sistemas de Equações

- O sistema (c) não tem solução. Pela terceira equação segue-se a primeira ordenada de qualquer solução deve ser 4.
- Usando-se $x_1 = 4$ nas duas primeiras equações, vemos que a segunda coordenada deve satisfazer:

$$4 + x_2 = 2$$

$$4 - x_2 = 1$$



Matrizes e Sistemas de Equações

- O sistema (c) é classificado como **inconsistente**, já que nenhum número real satisfaz ambas as equações.
- Os sistemas (a) e (b) são **consistentes**, pois ambos os sistemas possuem pelo menos uma solução.

Tipos de solução de Sistemas Lineares

Tipos de solução de Sistemas Lineares

- **Sistema Possível e Determinado (SPD):** O sistema tem solução e ela é única.
- As retas que descrevem cada uma das equações cruzam em um ponto.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - 2y = -12 \end{cases}$$

Tipos de solução de Sistemas Lineares

- **Sistema Possível e Indeterminado (SPI):** O sistema tem infinitas soluções.
- As retas que descrevem cada uma das equações são **coincidentes**.

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases}$$

Tipos de solução de Sistemas Lineares

- **Sistema Impossível (SI):** O sistema não tem solução.
- As retas que correspondem às equações são **paralelas**.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = -1 \end{cases}$$

Sistemas equivalentes

- Considere os dois sistemas:

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \\ x_2 \qquad &= 3 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{(b)}\quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

- O sistema (a) é de fácil solução pois é claro das duas últimas equações que $x_2 = 3$ e $x_3 = 2$.

Sistemas equivalentes

- Usando esses valores na primeira equação, obtemos:

$$3x_1 + 2 \,.\, (3) - (2) = -2$$

$$3x_1 + 6 - 2 = -2$$

$$3x_1 + 4 = -2$$

$$3x_1 = -2 - 4$$

$$3x_1 = -6$$

$$x_1 = (-6)/3$$

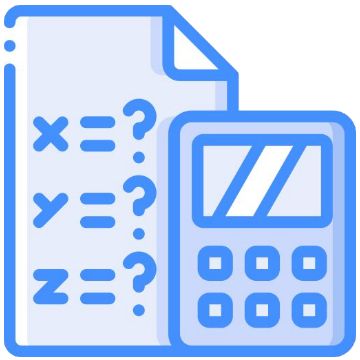
$$x_1 = -2$$

Então, a solução do sistema é (-2, 3, 2)

Sistemas equivalentes

- Apesar de o sistema (b) parecer mais difícil, ele tem a mesma solução que o sistema (a): Para verificar isso, vamos somar as duas primeiras equações do sistema:

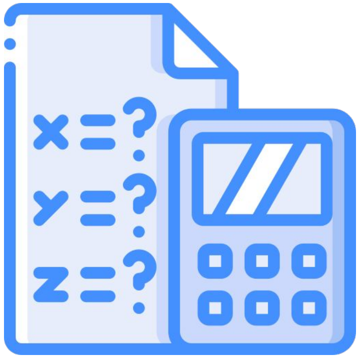
$$
\begin{array}{rcl}
\cancel{3x_1} + 2x_2 - \cancel{x_3} & = & -2 \\
-\cancel{3x_1} - x_2 + \cancel{x_3} & = & 5 \\
\hline
x_2 & = & 3
\end{array}
$$



Sistemas equivalentes

- Similarmente (x_1, x_2, x_3) deve satisfazer a nova equação formada subtraindo-se a primeira equação da terceira:

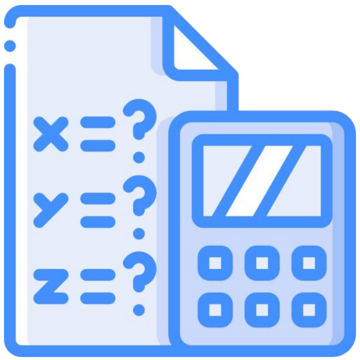
$$
\begin{array}{r}
\cancel{3x_1} + \cancel{2x_2} + x_3 = 2 \\
\cancel{3x_1} + \cancel{2x_2} - x_3 = -2 \\
\hline
2x_3 = 4
\end{array}
$$



Sistemas equivalentes

- Portanto, qualquer solução do sistema (b) deve ser também uma solução do sistema (a). Podemos demonstrar subtraindo-se a primeira equação da segunda

$$
\begin{array}{rcl}
x_2 & = & 3 \\
3x_1 + 2x_2 - x_3 & = & -2 \\
\hline
-3x_1 - x_2 - x_3 & = & 5
\end{array}
$$



Sistemas equivalentes

- Então, somam-se a primeira e a terceira equações:

$$
\begin{array}{r}
3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\
2x_3 = 4 \\
\hline
3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2
\end{array}
$$

- Portanto, (x_1, x_2, x_3) é uma solução do sistema (b) se e somente se for uma solução do sistema (a). Desse modo, ambos têm o mesmo conjunto de solução {(-2, 3, 2)}

Sistemas equivalentes

- **Definição:**
  - Dois sistemas de equações envolvendo as mesmas variáveis são ditos equivalentes se tiverem o **mesmo conjunto solução**.

Sistemas equivalentes

- **Há três operações que podem ser usadas em um sistema para obter um sistema equivalente:**
  - A ordem em que duas equações aparecem podem ser trocada.
  - Ambos os lados de uma equação podem ser multiplicados por um número real diferente de zero.
  - Um múltiplo de uma equação pode ser somado a (ou subtraído de) outra.

Sistemas n x n

- Um sistema é dito estar na **forma triangular estrita** se na k-ésima equação os coeficientes k -1 variáveis são todos nulos e o coeficiente de x_k é diferente de zero (k = 1, 2, …, n).
- **Exemplo:** O sistema abaixo está na forma triangular, já que na segunda equação os coeficientes são 0, 1, -1, respectivamente, e na terceira equação os coeficiente são 0, 0, 2, respectivamente.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Sistemas n x n

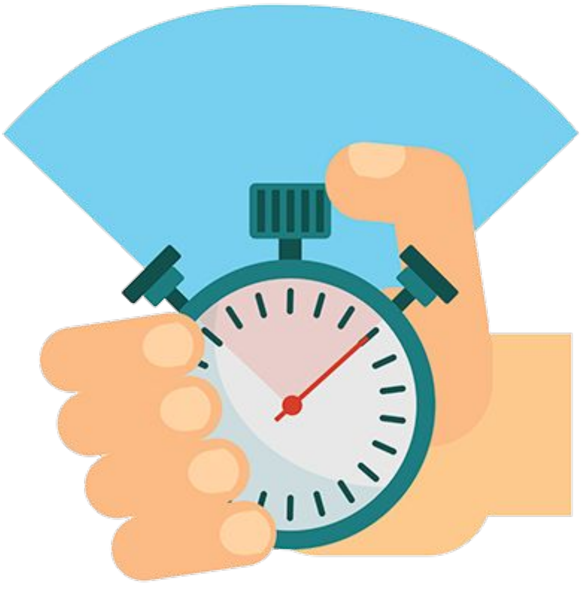
- **Como poderíamos solucionar o sistema apresentado?**

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\
x_2 - x_3 &= 2 \\
2x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

Exercício

- **Resolva o sistema a seguir:**

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

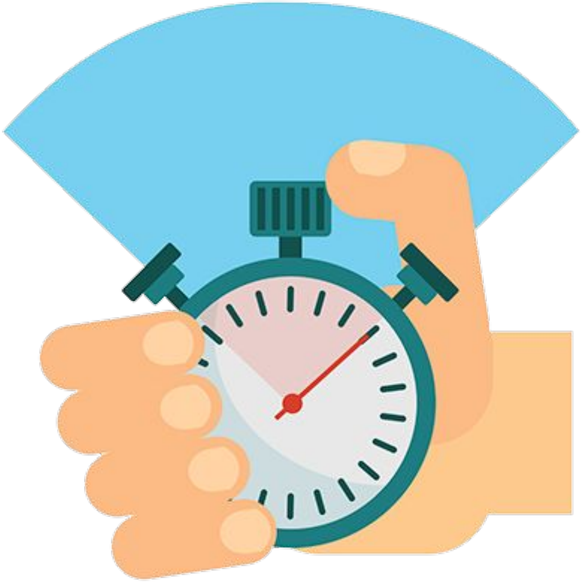


Exercício

- **Resolva o sistema a seguir:**

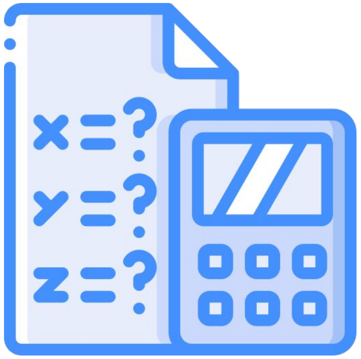
$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1 \\
x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\
4x_3 + 3x_4 &= 3 \\
4x_4 &= 4
\end{aligned}
$$

Solução: (1, -1, 0, 1)



Algoritmo de eliminação

- Resolver um sistema triangular e fácil. Basta resolver o mesmo por substituição reversa ou direta.
- A ideia do **algoritmo de eliminação** é transformar um sistema que não é triangular em outro **sistema equivalente** que é triangular.
- O processo de eliminação também se denomina processo de **escalonamento** ou **triangulação de Gauss**.



Algoritmo de eliminação

- **Exemplo 01 - Caso 2x2:** Seja o seguinte sistema de duas equações e duas incógnitas:

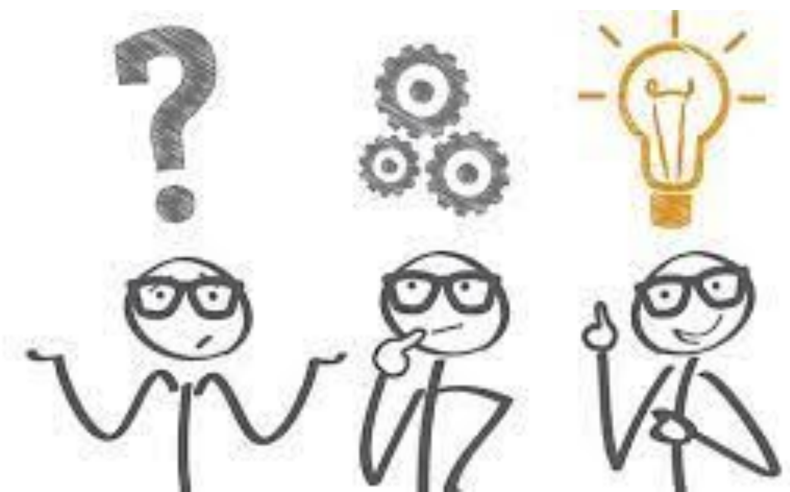
$$
\begin{array}{rcrcl}
3x_1 & + & 5x_2 & = & 9 \\
6x_1 & + & 7x_2 & = & 4
\end{array}
$$

- Este sistema pode escrever-se como Ax = b onde:

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}.
$$

Algoritmo de eliminação

- O sistema do exemplo (1) não triangular pois a_{21} = 6 != 0 e a_{12} = 5 != 0.
- **A pergunta é: como transformar o sistema do exemplo (1) em outro equivalente que seja triangular superior?**



Algoritmo de eliminação

- **Solução:**
- Uma forma de fazer isso é substituir a segunda equação do sistema (1) por outra equação equivalente que tenha um zero na posição a_{21}, ou seja, temos que **eliminar o termo** $a_{21}x_1$ do sistema (1).
- **Passo 1**: Multiplicar a primeira equação de (1) por:

$$\mu_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{6}{3} = -2.$$

- O sistema torna-se:

$$\begin{array}{rcrcr} -\ 6x_1 & - & 10x_2 & = & -18 \\ 6x_1 & + & 7x_2 & = & 4 \end{array}$$

Algoritmo de eliminação

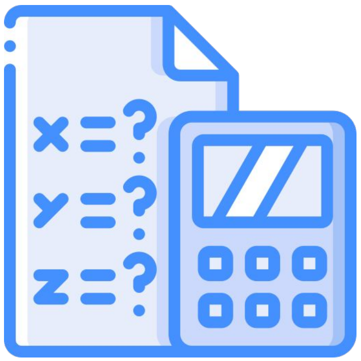
- **Passo 2**: Somar as equações do sistema do passo 1 e substituir o resultado na segunda equação. Assim, o sistema torna-se:

$$\begin{array}{rrrrrrr} - & 6x_1 & - & 10x_2 & = & -18 \\ & & - & 3x_2 & = & -14 \end{array}$$

- O Sistema acima é **triangular superior** e é equivalente ao sistema original.

Algoritmo de eliminação

- Vamos entender melhor cada operação realizada para triangularização do sistema:
    - O multiplicador $\mu_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{6}{3}$ é escolhido de modo que ao somar as equações se elimine o termo $a_{21}x_1$. Este multiplicador se denomina **multiplicador de eliminação.**
    - O termo que está no denominador do multiplicador de eliminação $a_{11} = 3$ se denomina **pivô**.



Algoritmo de eliminação

- O processo de **eliminação** pode ser feito com **arranjo matricial**.
- Considere o sistema linear do exemplo (1):

$$\begin{array}{ccccc} 3x_1 & + & 5x_2 & = & 9 \\ 6x_1 & + & 7x_2 & = & 4 \end{array}$$

- Arranjo matricial 2x2 com os **coeficientes da matriz** do sistema A e lado direito b:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 3 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 4 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} (L1) \\ (L2) \end{array} \longleftarrow \textbf{Matriz aumentada}$$

Algoritmo de eliminação

- O termo **matriz** significa simplesmente um arranjo retangular de números.
- **Matriz de coeficientes** é um arranjo de tamanho $m \times n$ de números cujos elementos são os valores de x_i;
- **Matriz quadrada** possui o mesmo número de linhas e colunas, isto é se m = n;
- **Matriz aumentada** possui os coeficientes do sistema e os números do segundo membro do sistema.

Exercícios

1. Use a substituição reversa para resolver cada um dos seguintes sistemas de equações:

a.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 2 \\ 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ -x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1 \\ 4x_3 + x_4 - 2x_5 &= 1 \\ x_4 - 3x_5 &= 0 \\ 2x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Exercícios

2. Resolva o sistema:

   a. $4 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$

      $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$

      $2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -1$

      $3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3$

Dúvidas, sugestões?