

Estrutura de Dados

Árvores

Conceitos

Problema

Representações / Implementações do TAD Lista Linear:

- **Lista encadeada dinâmica**
 - Eficiente para inserção e remoção dinâmica de elementos (início ou fim)
 - Ineficiente para busca: $O(n)$
- **Lista sequencial (ordenada) estática**
 - Eficiente para busca (busca binária)
 - Ineficiente para inserção e remoção de elementos (requer abrir espaços...)

Haveria uma ED que tivesse o melhor desempenho nas 3 operações (inserção, remoção e busca)?



Solução

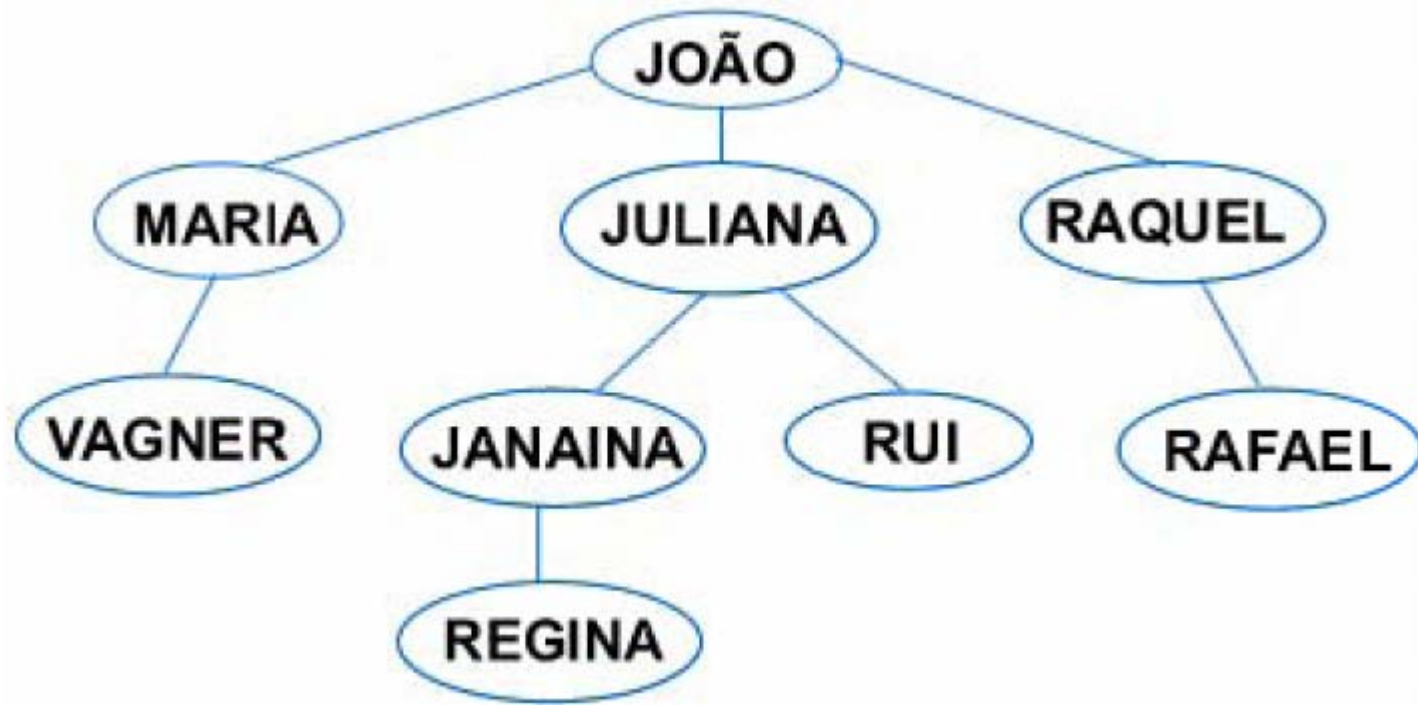
Árvores!!!

- solução eficiente para inserção, remoção e busca;
- representação não linear....



- **Estrutura de listas:** organização linear dos dados, onde sua propriedade básica é a relação sequencial mantida entre seus elementos
- **Estrutura de árvores:** organização dos dados de forma não-linear mantendo um relacionamento hierárquico entre seus elementos

Estrutura de árvore: exemplo de árvore genealógica



Estrutura de árvore: exemplo de organização de um livro

1. Livro XYZ

1.1 Cap. 1

1.1.1 Seção 1

1.1.2 Seção 2

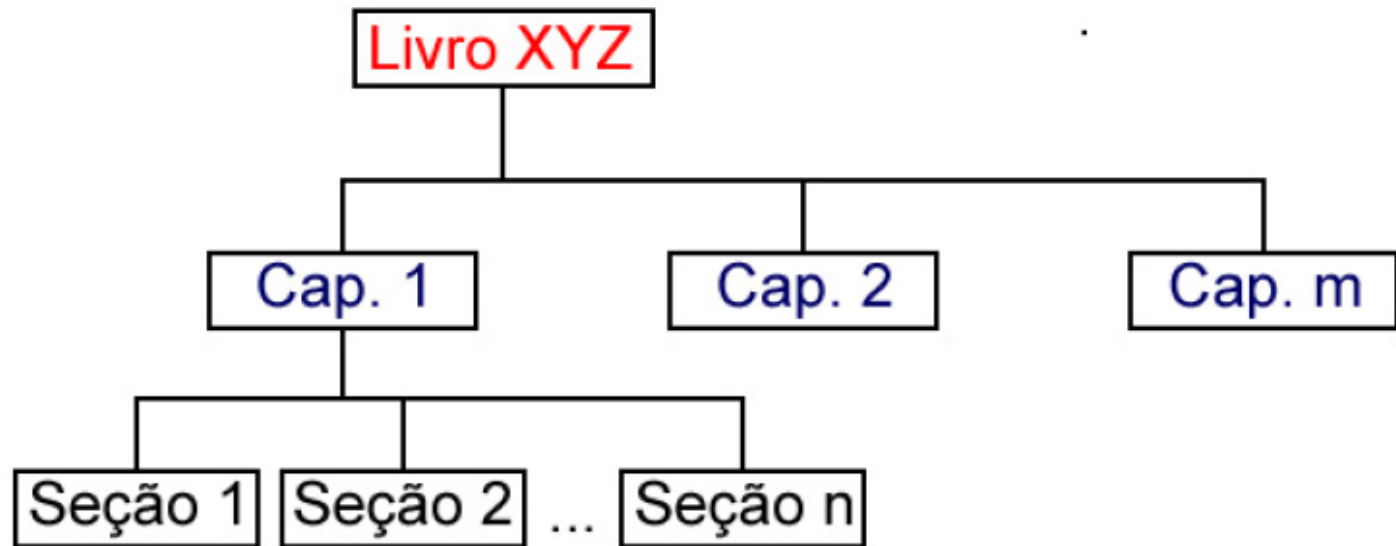
...

1.1.n Seção n

1.2 Cap. 2

...

1.m Cap. m

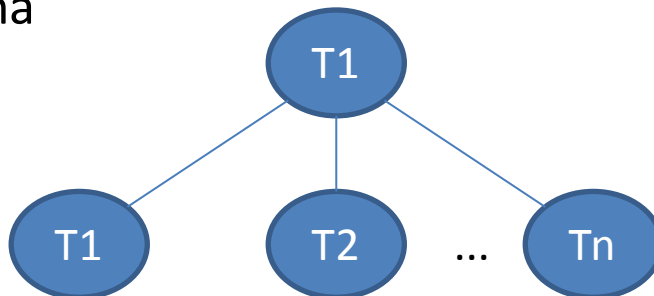


- Observe que para extrair informações específicas de uma determinada ramificação da árvore não é necessário o percurso por toda a estrutura de informação, uma vez que o relacionamento entre os dados nos permite uma consulta seletiva em regiões específicas da árvore

Definições

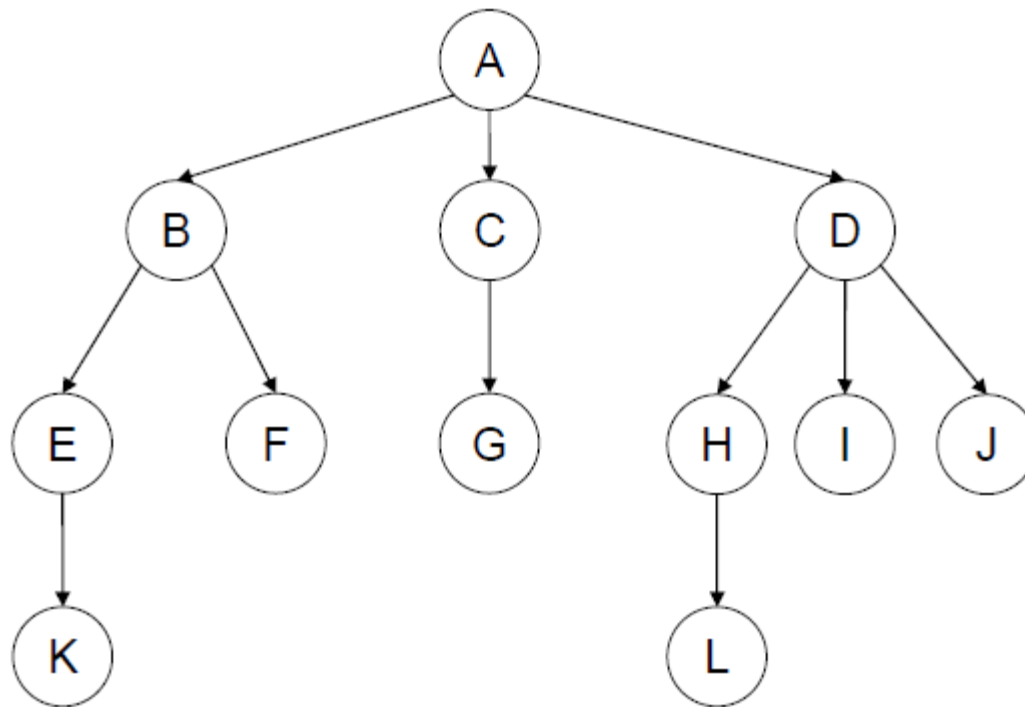
Árvore T: conjunto finito de elementos, denominados **nós** ou vértices, tais que:

- Se $T = \emptyset$, a árvore é dita vazia;
- Caso contrário:
 - T contém um nó especial, denominado **raiz**;
 - os demais nós, ou constituem um único conjunto vazio, ou são divididos em $n \geq 1$ conjuntos disjuntos não vazios (T_1, T_2, \dots, T_n) , que são, por sua vez, cada qual uma árvore;
 - T_1, T_2, \dots, T_n são chamadas **sub-árvores** de T;
 - Um nó sem sub-árvores é denominado **nó folha**, ou simplesmente, folha



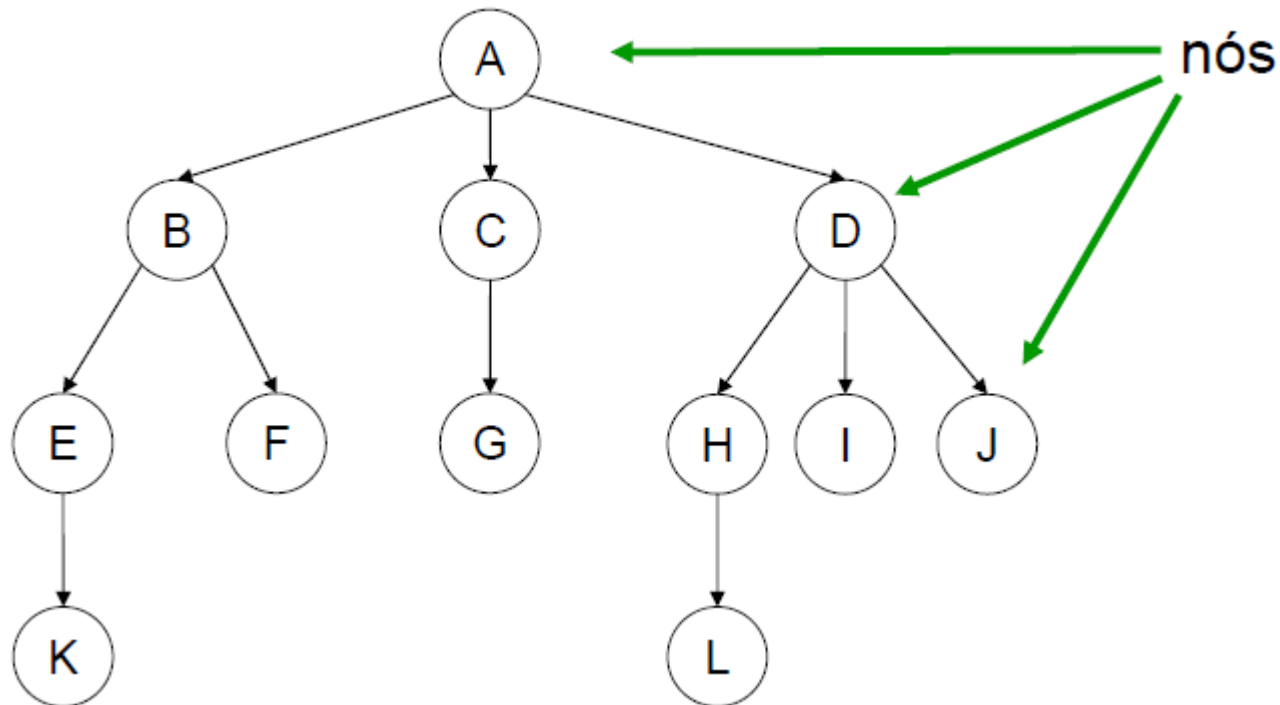
Representação

- Utilizaremos grafos para representar árvores,
 - Que são um conjunto de vértices (nós) e arestas
- Uma árvore é um grafo sem ciclos



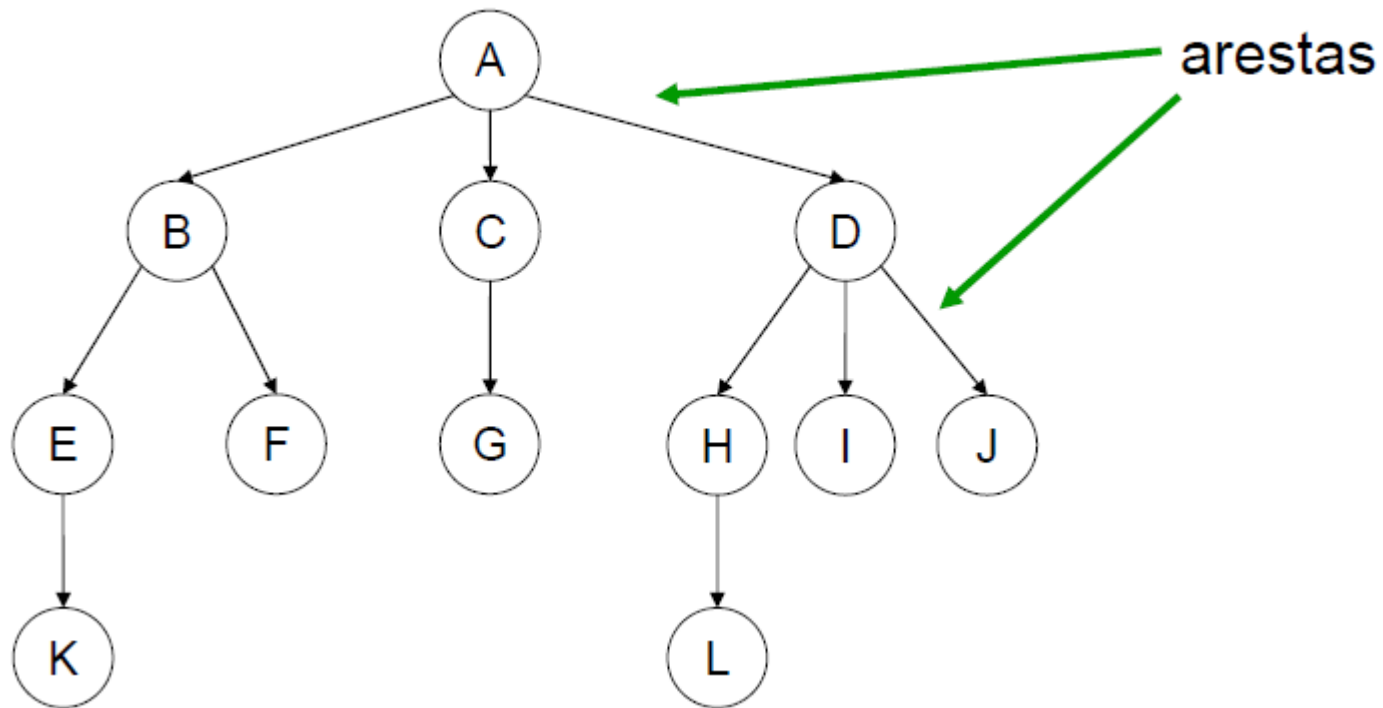
Nós (vértices)

- Esta árvore possui 12 nós (ou vértices).



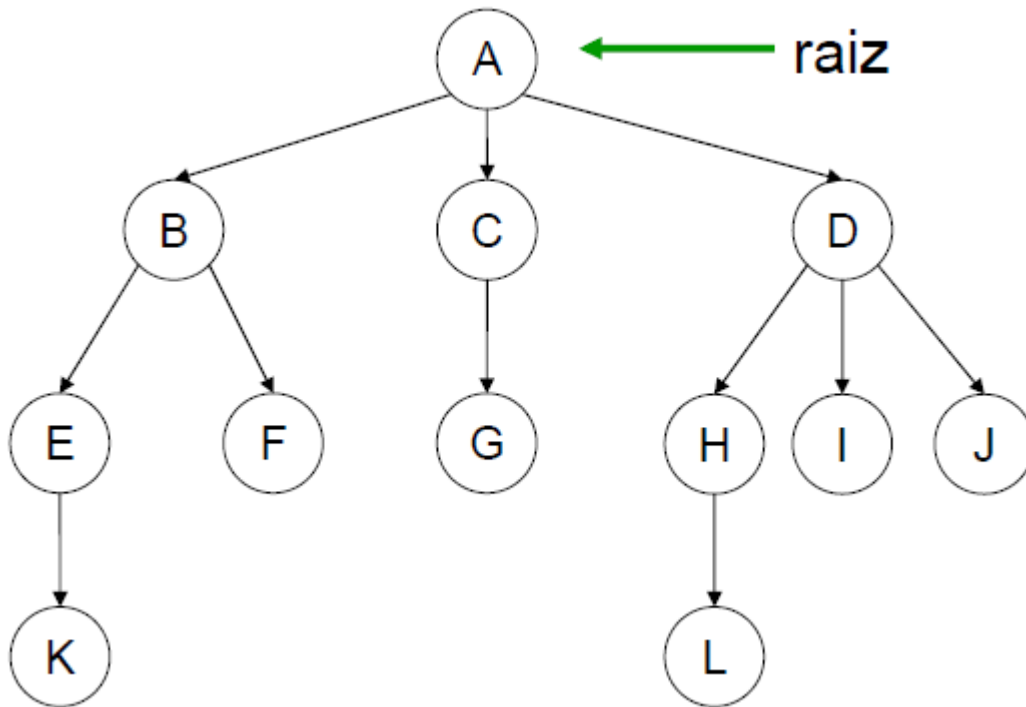
Arestas

- Uma aresta liga um nó a outro.



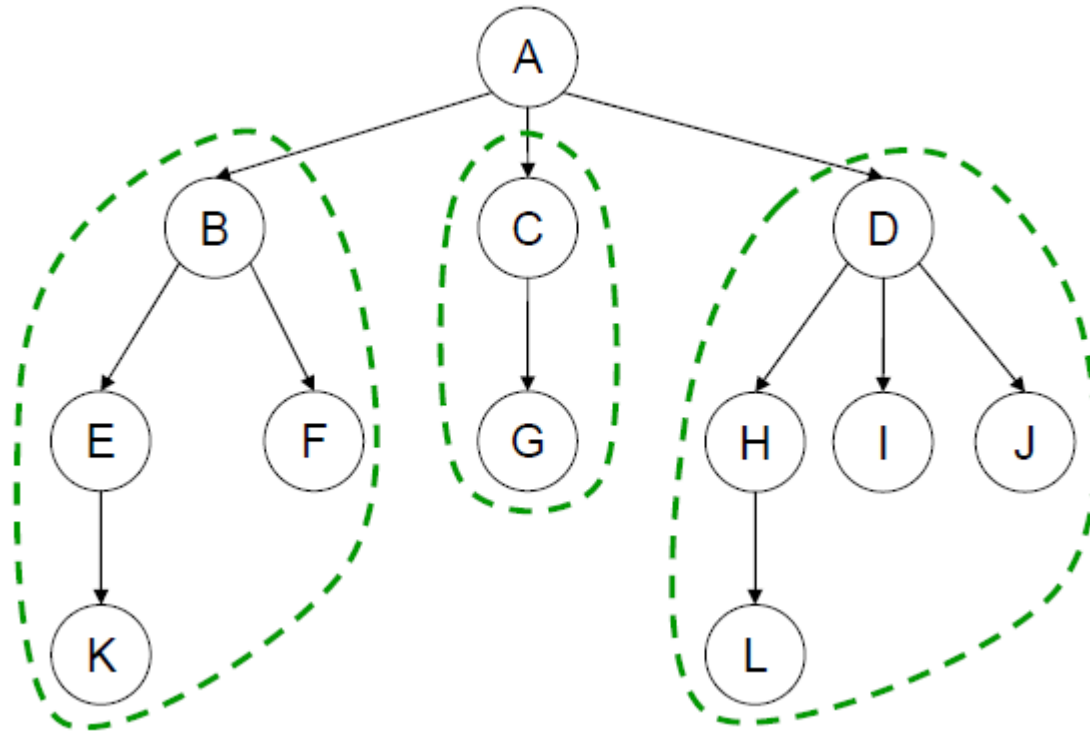
Raiz

- Normalmente, as árvores são desenhadas de forma invertida, com a raiz para cima.



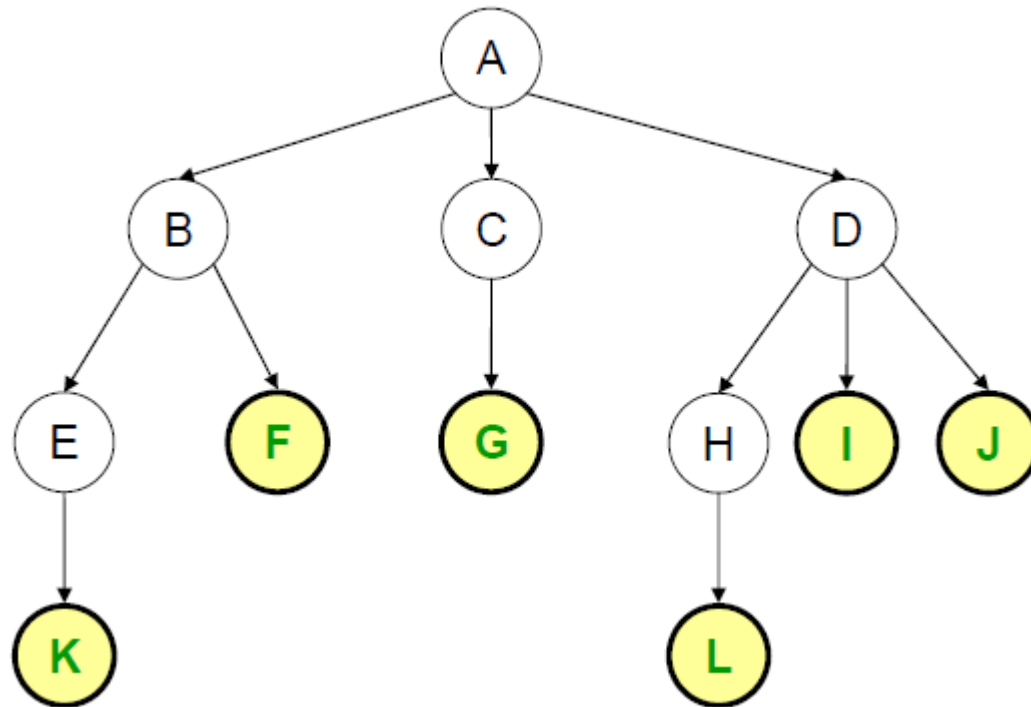
Subárvores

- O nó A possui 3 subárvores cujas raízes são B, C e D.



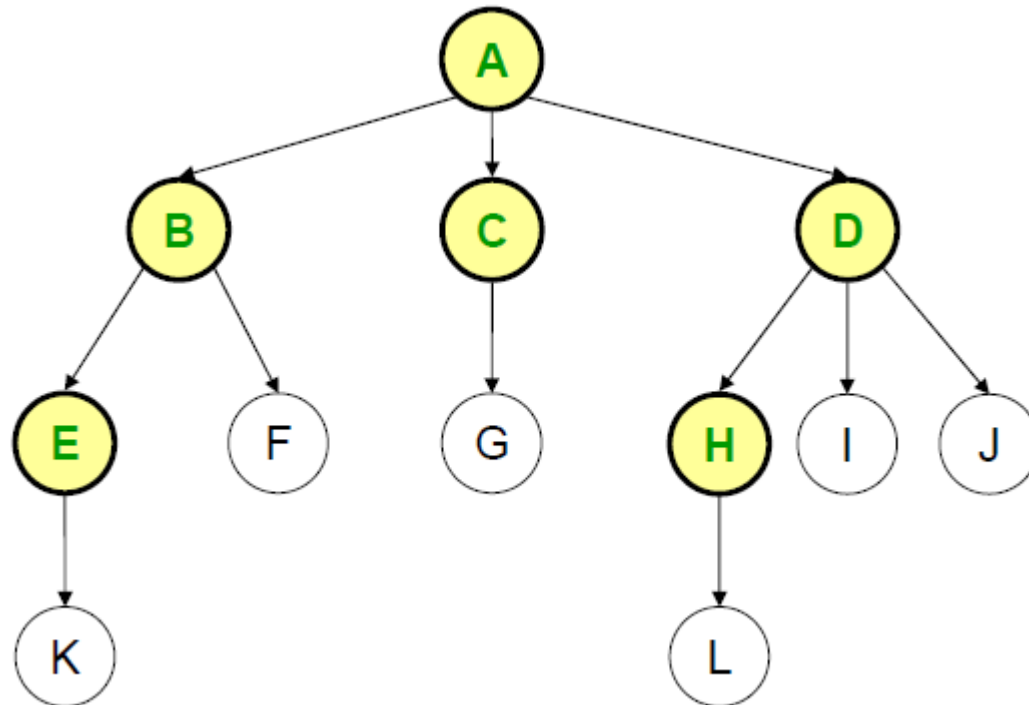
Folha

- Um nó sem descendentes (sem filhos) é denominado terminal ou folha.



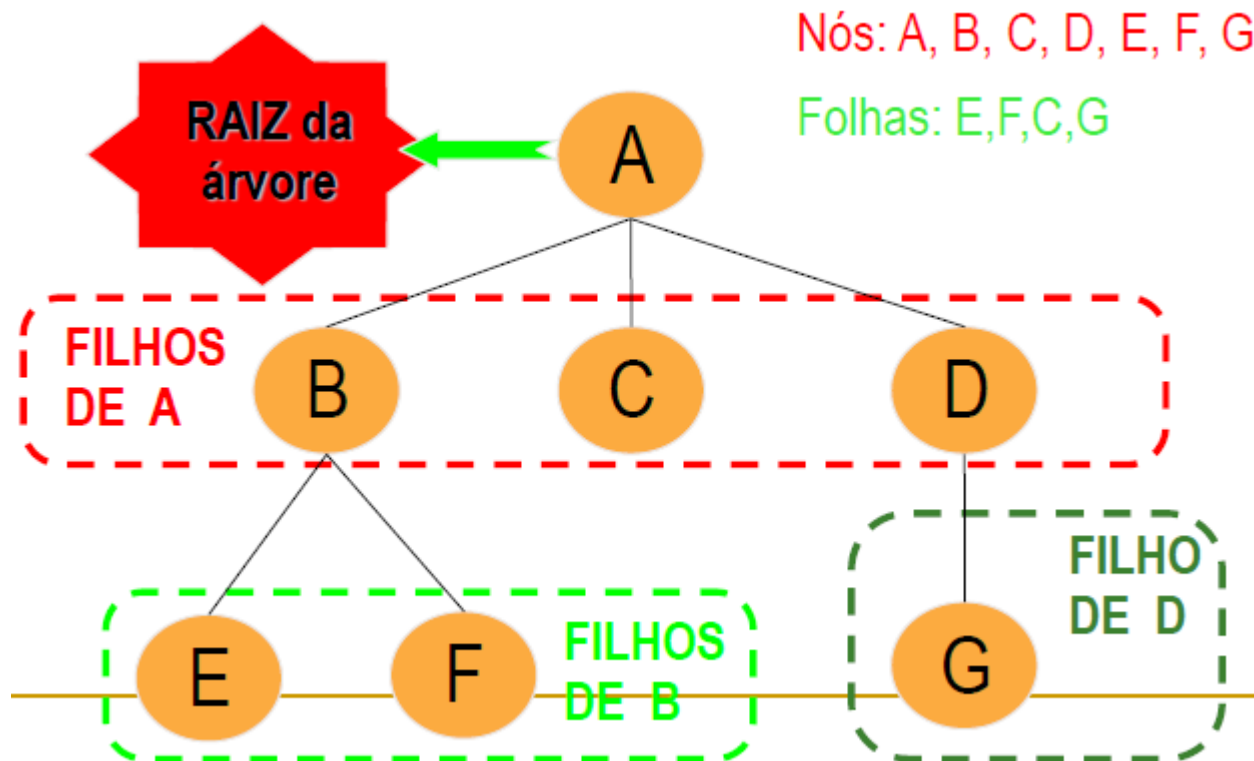
Não-Folha

- Um nó com descendentes (com filhos) é denominado não-folha ou nó interior.



Nós pais e filhos

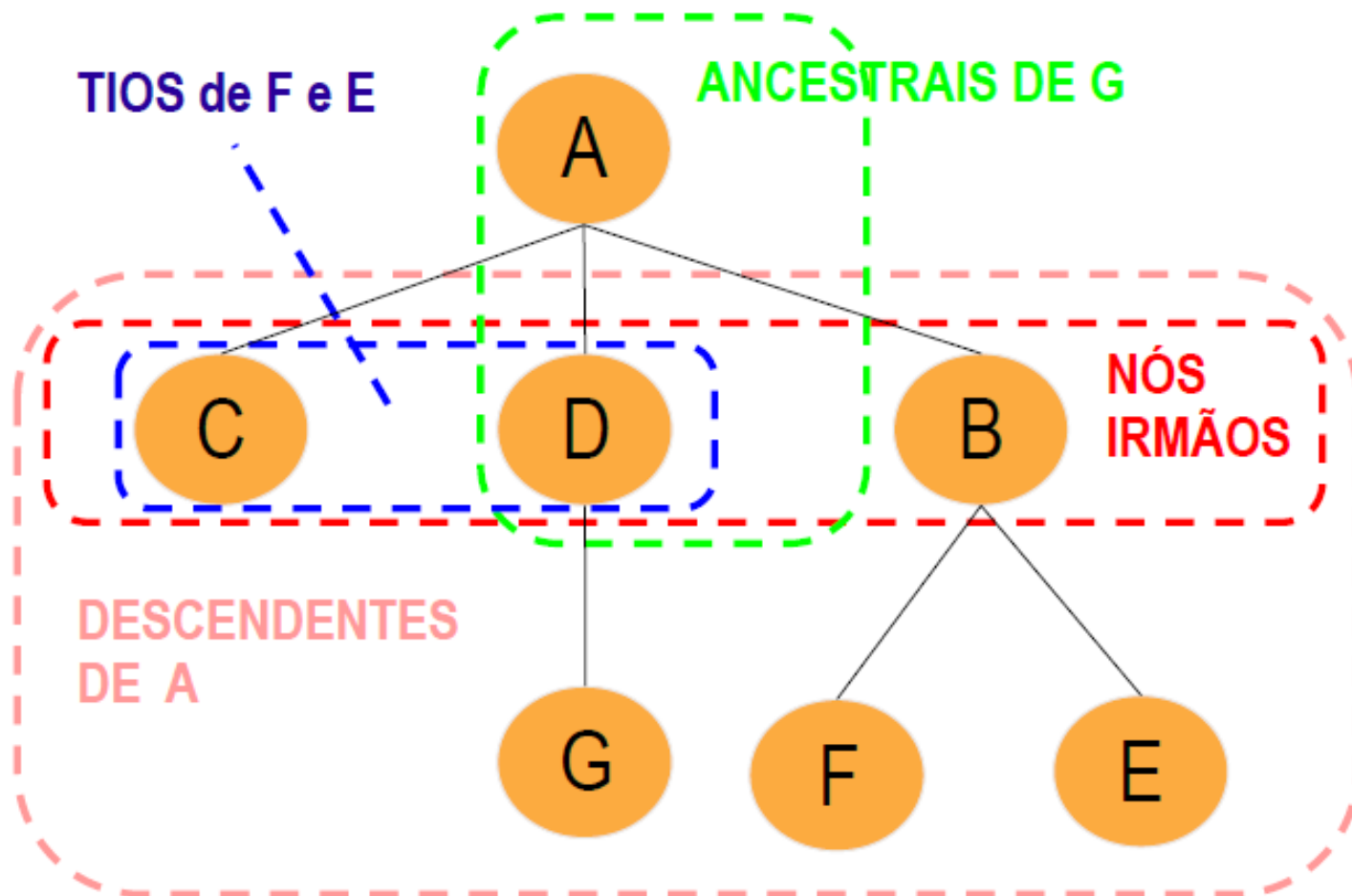
- Se um nó X é raiz de uma árvore, e um nó Y é raiz de uma sub-árvore de X, então X é **PAI** de Y e Y é **FILHO** de X



Ancestral e Descendente; Irmãos e Tios

- O nó X é um **ANCESTRAL** do nó Y (e Y é **DESCENDENTE** de X)
 - se X é o PAI de Y, ou se X é **PAI** de algum **ANCESTRAL** de Y
- Dois nós são **IRMÃOS** se são filhos do mesmo pai
- Se os nós Y1, Y2, ...Yj são irmãos, e o nó Z é filho de Y1, então Y2,...Yj são **TIOS** de Z

Exemplo



Conceitos

- Nível
 - Não há definição única para o valor de nível da raiz
- Grau
- Caminho e comprimento do caminho
- Altura ou profundidade
- Árvore Ordenada
- Árvore Orientada (há autores que definem orientada como ordenada; não distinguem os 2 conceitos)
- Floresta
- Árvore Cheia

Conceitos

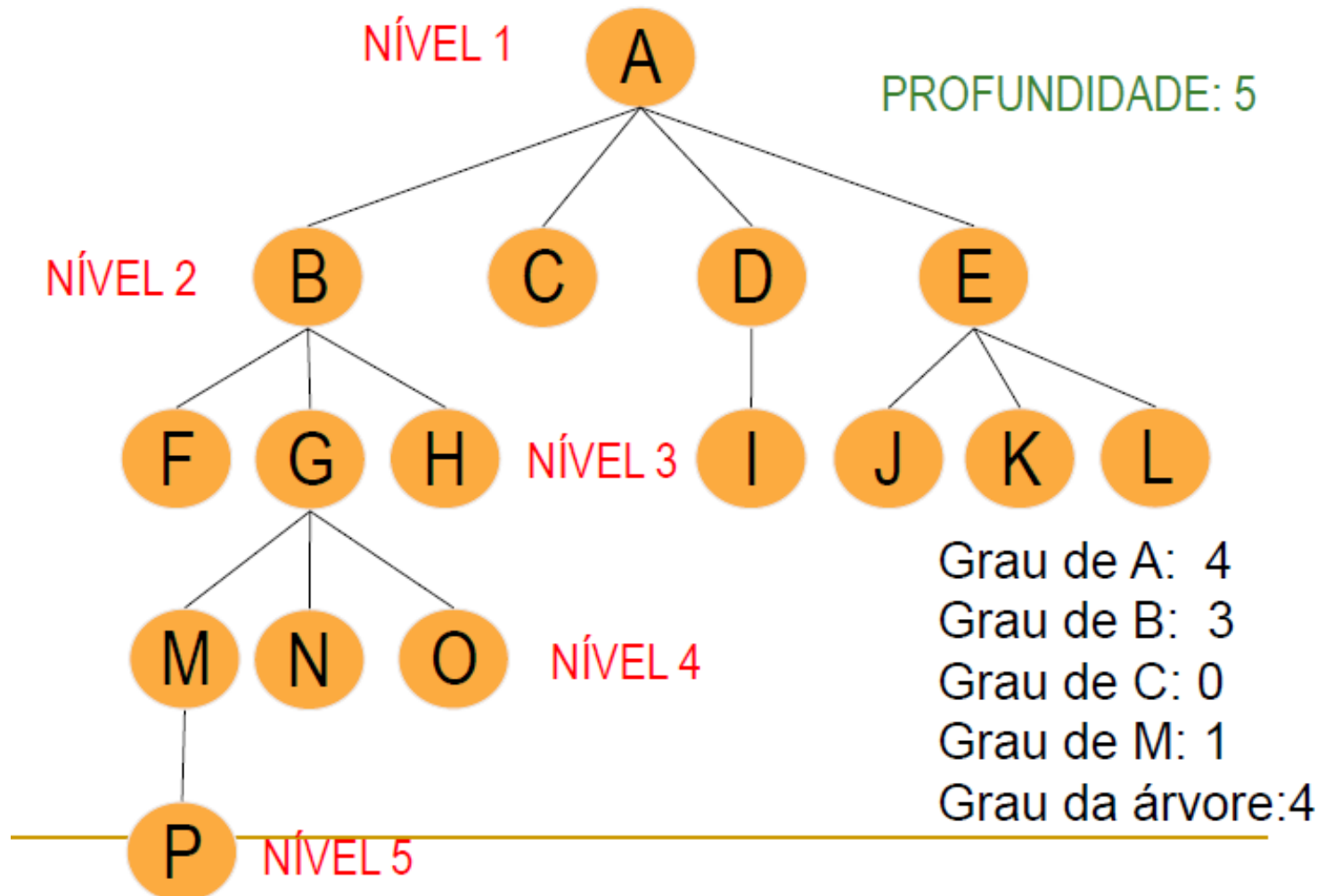
O **NÍVEL** de um nó **X** é definido como:

- O nível do nó raiz é 1 (esta definição não é universal – o nível da raiz pode ser 0);
- O nível de um nó não-raiz é dado por (nível de seu nó PAI + 1)
- Os nós de maior nível são também nós-folha.

O **GRAU de um nó X** pertencente a uma árvore é igual ao número de filhos do nó X

O **GRAU de uma árvore T** é o maior entre os graus de todos os seus nós

Conceitos



Conceitos

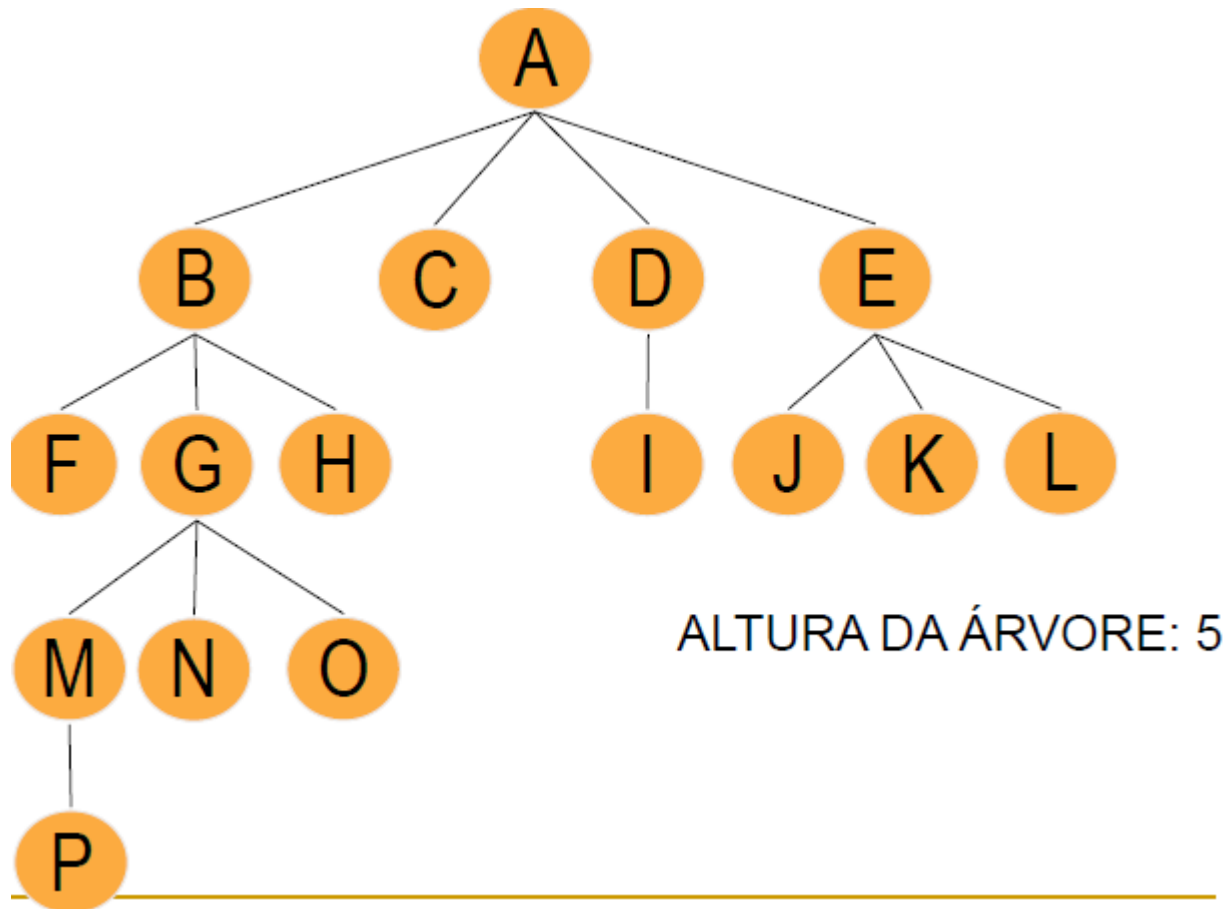
CAMINHO: sequência não vazia de nós, $P = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, onde o i -ésimo nó v_i da sequência é pai de v_{i+1}

COMPRIMENTO: tomando a definição de caminho, o comprimento de um caminho P é igual a $k - 1$, ou seja, o número de arestas de um caminho define o comprimento.

A **ALTURA** ou **PROFUNDIDADE** de uma árvore **X** é dada pelo **MAIOR NÍVEL** de seus nós.

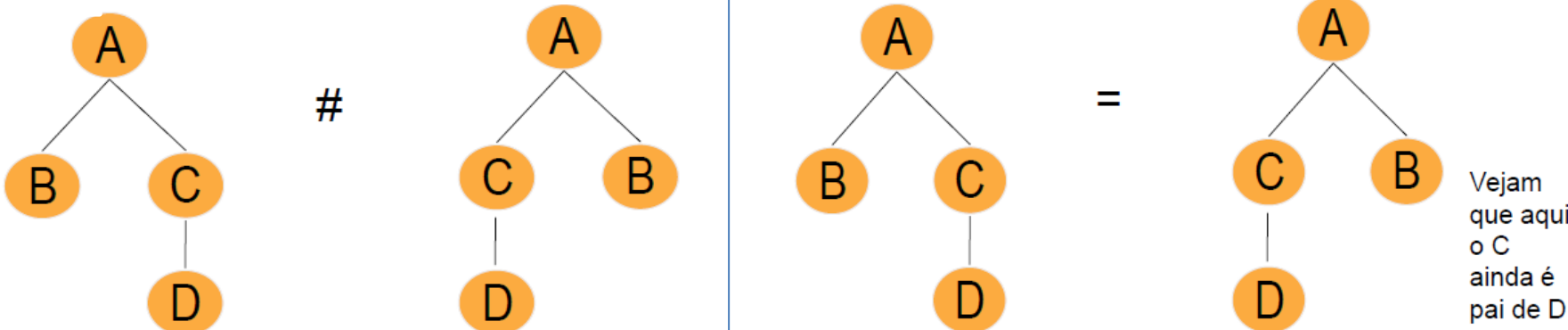
- Alternativamente, corresponde ao número de nós do maior caminho entre a raiz e os nós folhas.
- As folhas têm altura 0 (zero).
- Denota-se a altura de uma árvore com raiz **X** por **$h(X)$** , e a altura de uma sub-árvore com raiz **y** por **$h(y)$**

Altura da árvore - exemplo



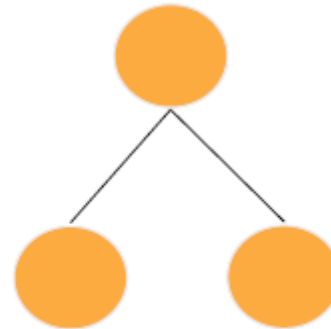
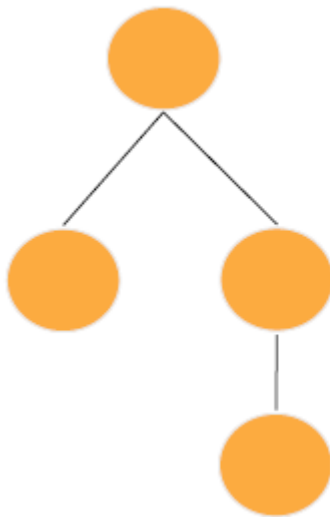
Conceitos

- Uma árvore é **ORDENADA** se considerarmos o conjunto de sub-árvores T_1, T_2, \dots, T_n como um conjunto ordenado. Ordenação é da esquerda para direita.
- Uma árvore é **ORIENTADA** se apenas a orientação relativa dos nós —e não sua ordem— está sendo considerada.



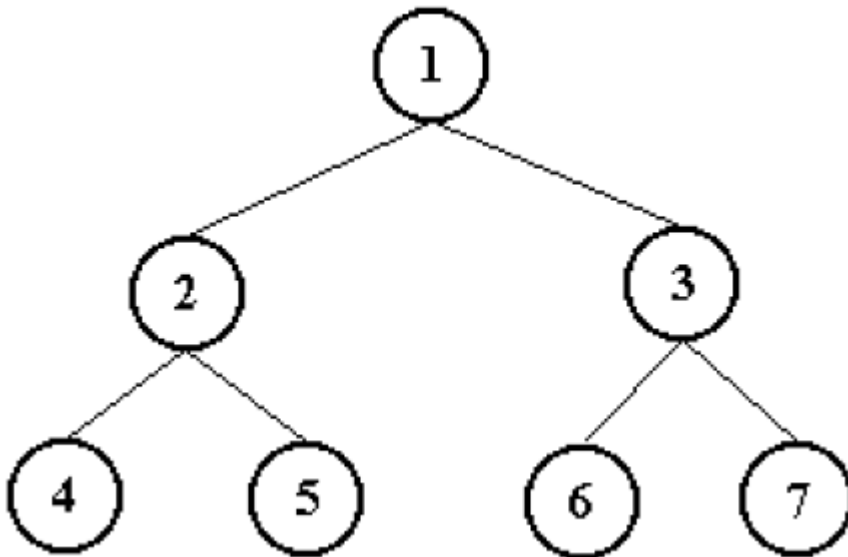
Floresta

- Uma **FLORESTA** é um conjunto de 0 ou mais árvores distintas



Árvore cheia

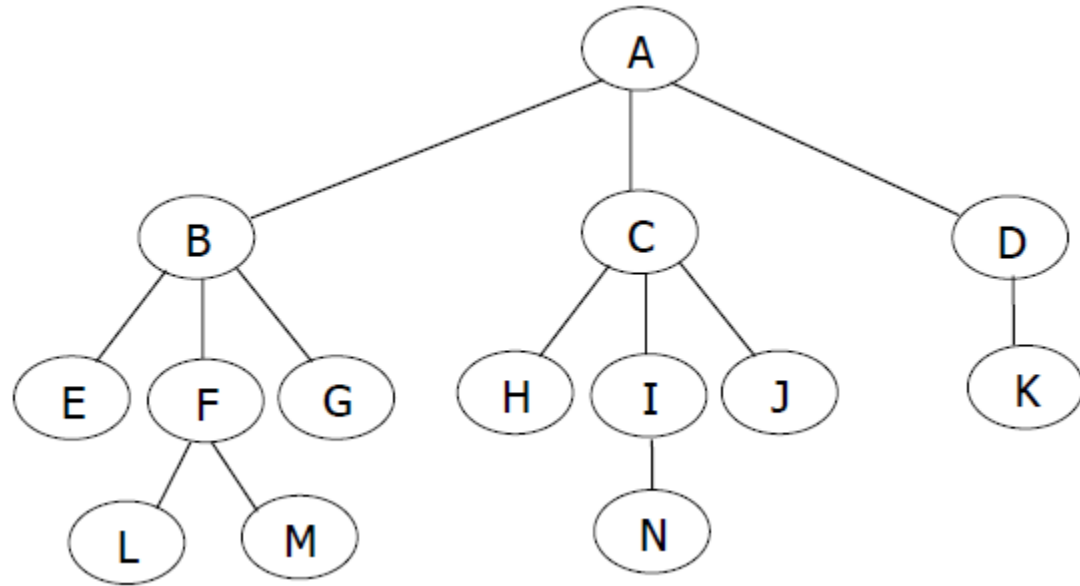
- Uma árvore de grau d é uma árvore cheia
 - se possui o número máximo de nós, isto é, todos os nós tem número máximo de filhos (exceto as folhas, logicamente) e todas as folhas estão na mesma altura



Exemplo de árvore cheia de grau 2

Exercício

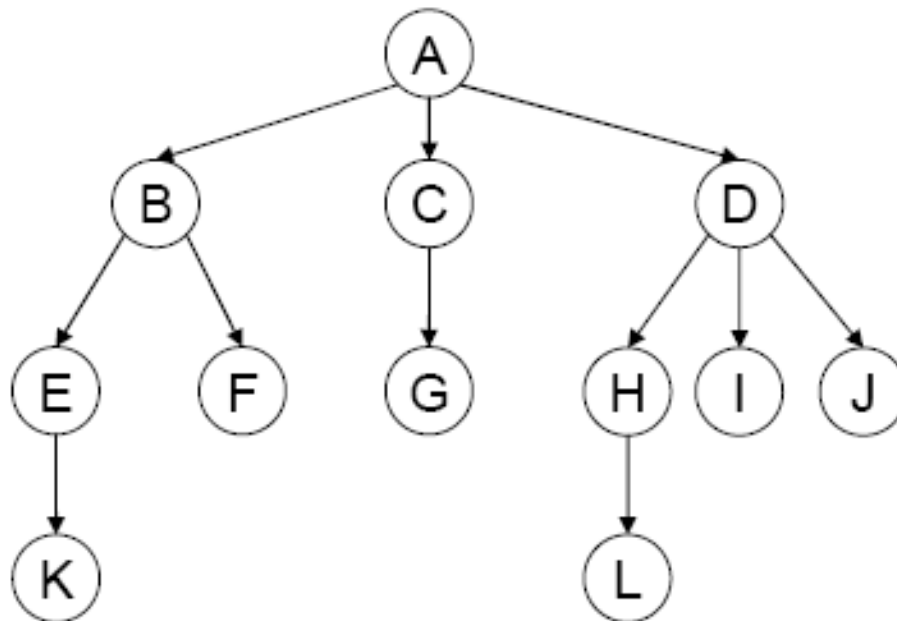
- a) Quantas subárvores A tem?
- b) Quem são os filhos de A? E os descendentes de A?
- c) Quais são os nós folha dessa árvore?
- d) Qual o grau dessa árvore?
- e) Qual a altura dessa árvore?



Outras representações gráficas

1. Representação por paragrafação
2. Representação por parênteses aninhados
 - (A (B) (C (D (G) (H)) (E) (F (I))))
3. Representação por Diagramas de Venn

Representação por paragrafação



A

..B

....E

.....K

....F

..C

....G

..D

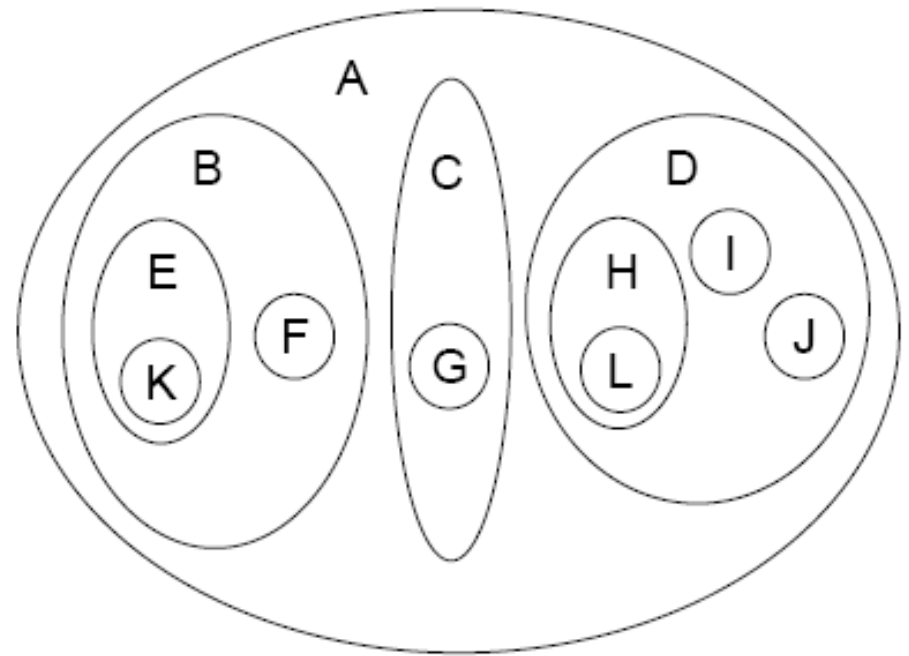
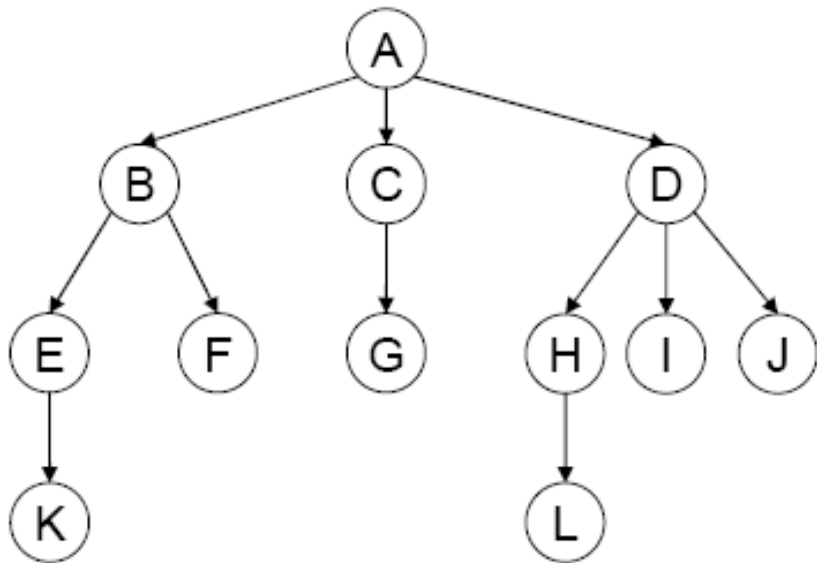
....H

.....L

....I

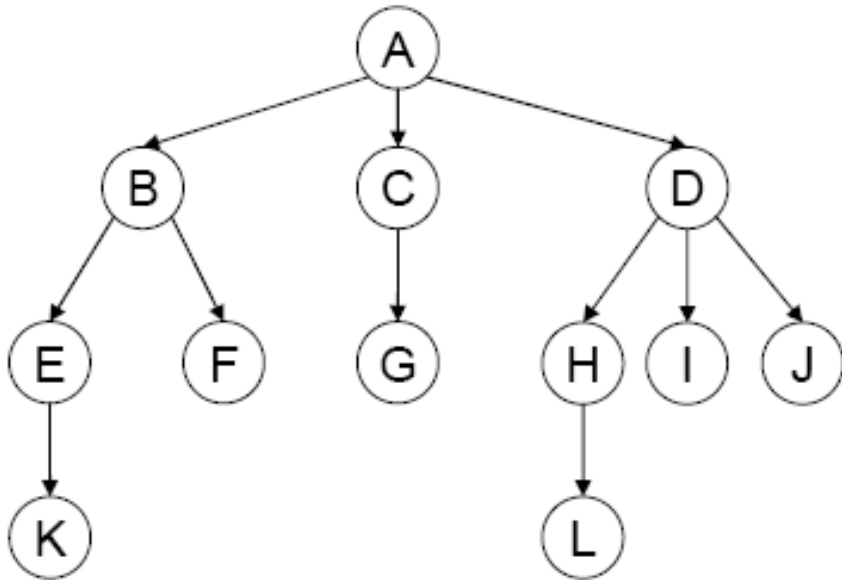
....J

Representação por Diagramas de Venn



Representação por parênteses aninhados

- ((A (B (E (K) (F)) C (G) D (H (L) (I) (J))))

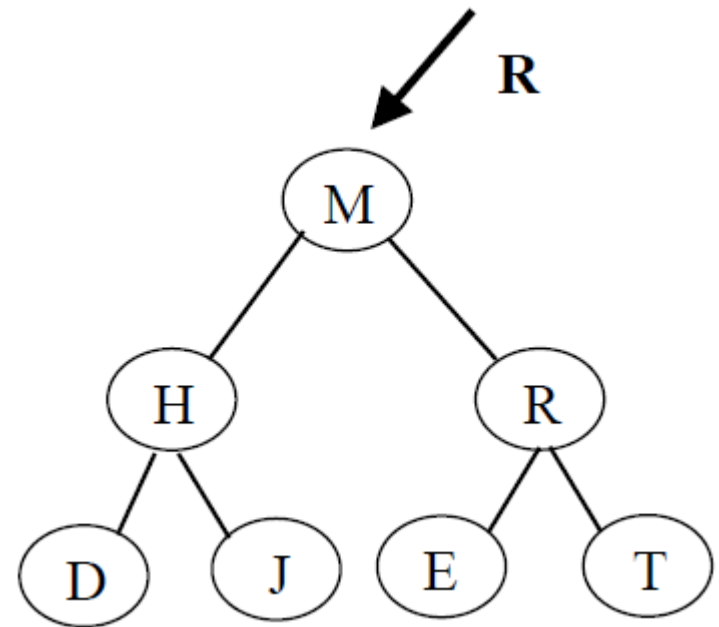


EXERCÍCIOS

Exercícios

Dada a árvore, indique:

- a) os nós folha;
- b) o grau da árvore;
- c) a altura da árvore;
- d) os descendentes do nó H.



Responda rápido:

- a) Num diagrama convencional de árvore (raiz no topo), se o nó X tem nível maior que o nó Y, então X aparece abaixo de Y no diagrama?
- b) Se o nó A tem 3 irmãos e B é pai de A, qual o grau de B?

Exercícios

Represente a árvore abaixo nas demais representações conhecidas (paragrafação, parênteses aninhados, diagramas de Venn):

