DACC Departamento Acadêmico de Ciência da Computação

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA

Álgebra Linear

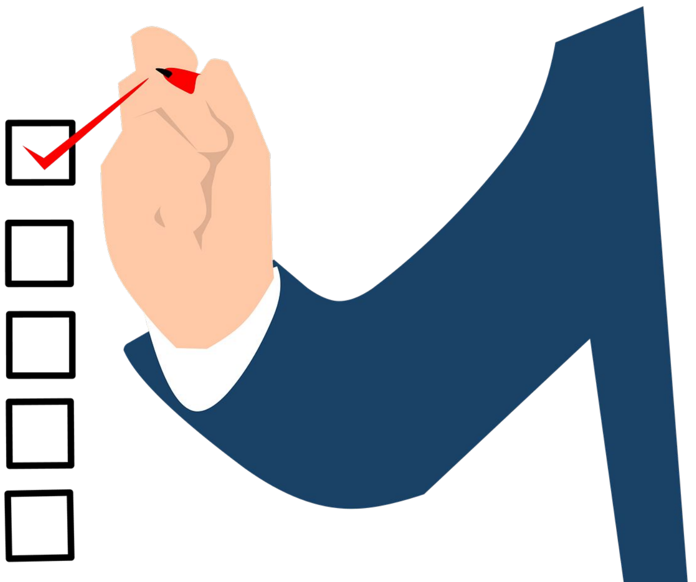
Professor:

Me. Lucas Marques da Cunha

lucas.marques@unir.br

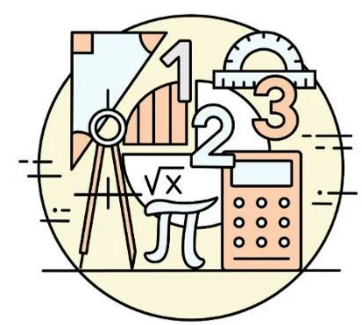
Roteiro

1. Determinantes
2. O determinante de uma matriz
   a. 2ª ordem
   b. 3ª ordem
   c. 4ª ordem
   d. Laplace
   e. Sarrus
3. Propriedade
4. Matriz Adjunta
5. Regra de Cramer
6. Exercícios práticos



Determinantes

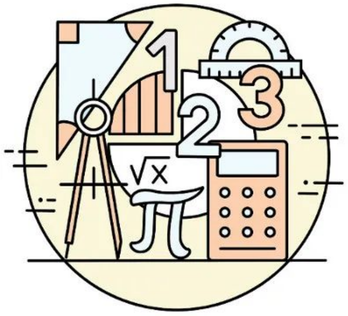
- A cada **matriz quadrada** é possível associar um número chamado de **determinante da matriz**.
- O valor deste número dirá se a matriz é **singular**.
    - **det(A) $\neq$ 0 (Não singular)**



Determinantes

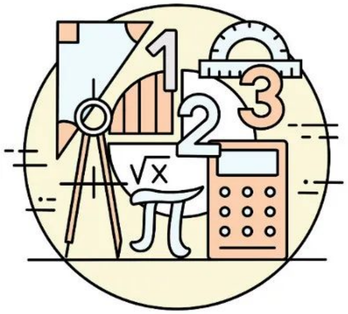
- **NOTAÇÃO:**
  - Podemos nos referir ao determinantes de uma matriz específica incluindo o arranjo entre linhas verticais.
  - Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathit{então} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$



Determinantes

- **DEFINIÇÃO:**
  - Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz n x n e seja M_{ij} a matriz (n-1) x (n-1) obtida de A elimina-se a linha e a coluna contendo a_{ij}.
  - O determinante de M_{ij} é chamado de **menor** de a_{ij}.
  - Definimos o **cofator** de A_{ij} de a_{ij} por:
    - $\mathbf{A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})}$



Determinantes

- Para calcular um determinante de **2ª ordem,** fazemos:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

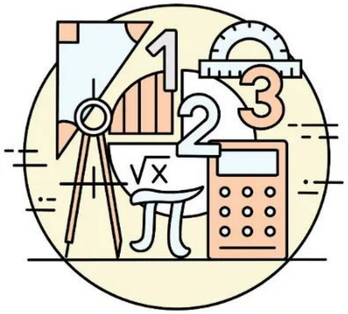
$+$ $\quad a_{11} \cdot a_{22}$

$-$ $\quad a_{12} \cdot a_{21}$

- **Exemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12-2 = -14$$

$2 \qquad -12$



Determinantes

- Um determinante de **3ª ordem**:
- **Regra de Laplace:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = 1 \cdot (-1)^2 \cdot (-10) + 3(-1)^3 \cdot 22 + 5 \cdot (-1)^4 + 18$$

$$det(A) = 1 \cdot 1 \cdot (-10) + 3 \cdot (-1) \cdot 22 + 5 \cdot 1 \cdot 18$$
$$det(A) = -10 - 66 + 90$$
$$det(A) = 14$$

Determinantes

UNIR

- Um determinante de **4ª ordem** pode ser definido em função da expansão em cofatores ao longo de qualquer linha ou coluna.
- Para calcular o valor do determinantes 4x4, é necessário avaliar quatro determinantes 3x3.

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$D = \Sigma\, a_{ij} \cdot A_{ij}$$

$$D = \underbrace{a_{11}}_{\text{Linha 1}} \cdot \underbrace{A_{11}}_{\text{Coluna 1}} + \underbrace{a_{12}}_{\text{Linha 1}} \cdot \underbrace{A_{12}}_{\text{Coluna 2}} + \underbrace{a_{13}}_{\text{Linha 1}} \cdot \underbrace{A_{13}}_{\text{Coluna 3}} + \underbrace{a_{14}}_{\text{Linha 1}} \cdot \underbrace{A_{14}}_{\text{Coluna 4}}$$

$$D = 4 \cdot A_{11} + 5 \cdot A_{12} + (-3) \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}$$

Determinantes

- O determinante de uma matriz n x n, A, escrito det(A), é um escalar associado à matriz A que é definido indutivamente por:

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11}, & se\; n = 1 \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}, & se\; n > 1 \end{cases}$$

$$na\; qual\; A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}), para\; j = 1, \ldots, n$$

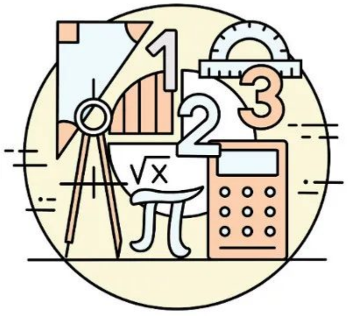
- São os **cofatores** associados com os elementos na primeira linha de A.

Determinantes

- **Não é necessário utilizar somente a primeira linha na expansão de cofatores.**
- Para economizar trabalho, pode-se iniciar a expansão ao longo da linha ou coluna que contém mais zeros.
- Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$-2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2\,.\,3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 12$$



Determinantes

FIQUE LIGADO

- Se A é uma matriz n x n, então $\det(A^T) = \det(A)$;
- Se A é uma matriz triangular n x n, então o determinantes de A é igual ao produto dos elementos diagonais de A.
- Seja A uma matriz n x n:
  - Se A tem uma linha ou coluna consistindo inteiramente em zeros, então $\det(A) = 0$;
  - Se A tem duas linhas idênticas ou duas colunas idênticas, então $\det(A) = 0$;

Determinantes - Regra de Sarrus

- A **regra de Sarrus** é um método utilizado para calcular o determinante de matrizes de ordem 2 e ordem 3.
- Quando a matriz é de ordem 2, para calcular o determinante pela regra de Sarrus, basta calcular a diferença entre o produto da **diagonal principal** e o produto da **diagonal secundária**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Determinantes - Regra de Sarrus

- Em uma matriz 3x3, aplicando a regra de Sarrus, temos que:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Determinantes - Regra de Sarrus

- **Regra de Sarrus em matrizes de 3x3**
- Quando a matriz é de ordem 3, é necessário seguir os passos a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- **1º passo:** copiar as duas primeiras colunas novamente, no final da matriz.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Determinantes - Regra de Sarrus

- **2º passo:** identificar os termos da diagonal principal e das outras duas diagonais paralelas a ela.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

- **3º passo**: calcular a soma do produto entre os termos de cada uma das diagonais.

$$D_p = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$

Determinantes - Regra de Sarrus

- **4º passo:** identificar os termos da diagonal secundária e das outras duas diagonais paralelas a ela.

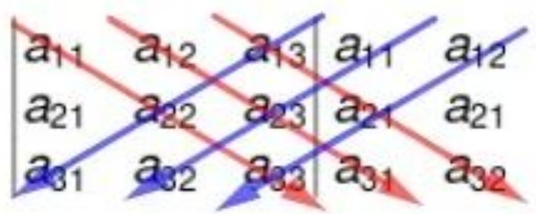
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

- **5º passo**: calcular a soma do produto de cada uma das diagonais.

$$D_s = a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Determinantes - Regra de Sarrus

- **6º passo:** calcular a diferença entre Dp e Ds.



$$\det(A) = D_p - D_s$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

Determinantes - Regra de Sarrus

- **Exemplo:** Calcule o determinante da matriz pela regra de Sarrus.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Solução:** Para calcular o determinante da matriz, copiamos as duas colunas ao final da matriz.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right.$$

Determinantes - Regra de Sarrus

- **Exemplo:** Calcule o determinante da matriz pela regra de Sarrus.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right.$$

$$\det(A) = 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (-1) - (1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \cdot 0)$$

$$\det(A) = 0 + 2 - 3 - (1 - 4 + 0)$$

$$\det(A) = -1 - (-3)$$

$$\det(A) = -1 + 3$$

$$\det(A) = 2$$

Exercícios

1. Seja A, uma matriz 3x3:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   a. Encontre os valores de $\det(M_{21})$, $\det(M_{22})$ e $\det(M_{23})$;
   b. Encontre os valores de A_{21}, A_{22} e A_{23};
   c. Use suas respostas da parte (b) para calcular det(A)

   det(A) = 1 * 8 + (-2) * (-2) + 3 * (-5) = 8 + 4 - 15 = -3

Exercícios

2. Use determinantes para determinar se as seguintes matrizes 2x2 são não singulares;

$$a)\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 4\end{pmatrix}\quad b)\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 4\end{pmatrix}\quad c)\begin{pmatrix}3 & -6\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

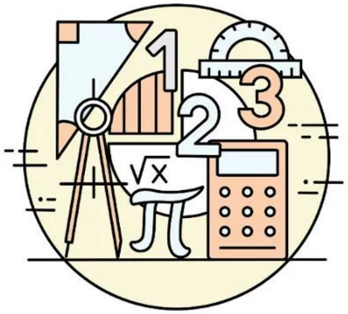
3. Calcule os seguintes determinantes:

$$a)\begin{vmatrix}3 & 5\\ -2 & -3\end{vmatrix}\quad b)\begin{vmatrix}5 & -2\\ -8 & 4\end{vmatrix}\quad c)\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 5\end{vmatrix}$$

Propriedades dos determinantes

- **Se E é uma matriz elementar, então:**
  - det(EA) = det(E) det(A)
- Em que:

$$\det(E) = \begin{cases} -1, se\ E \text{ é } do\ tipo\ I \\ \alpha \neq 0, se\ E \text{ é } do\ tipo\ II \\ 1, se\ E \text{ é } do\ tipo\ III \end{cases}$$



Propriedades dos determinantes

- Os efeitos que as **operações sobre linhas** e colunas têm sobre o valor de determinante podem ser resumidas assim:

I. A troca de duas linhas (ou colunas) de uma matriz **muda o sinal do determinante**.
II. A multiplicação de uma única linha ou coluna de uma matriz por uma escalar tem efeito de **multiplicar o determinante por esse escalar**.
III. A soma de um múltiplo de uma linha (ou coluna) a outra **não muda o valor do determinante**.

Propriedades dos determinantes

- **Qual o método mais simples para calcular determinantes?**
- Vejamos o exemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

Se n > 3 e A tem elementos não nulos, a eliminação é o método mais eficiente, no sentido que envolve menos operações aritméticas.

Solução:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -6 & -5 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) * (2) * (-6) * (-5) = -60$$

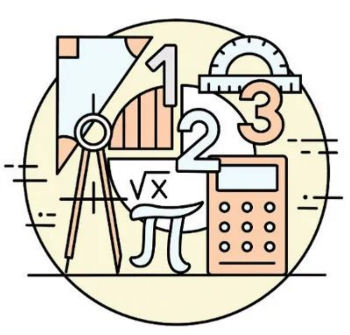
Matriz adjunta

UNIR

- Seja A uma matriz n x n. Uma **matriz adjunta** de A é dada por:

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix}$$

- Para formar a adjunta, substitui-se cada termo por seu cofator e então transpor a matriz resultante.

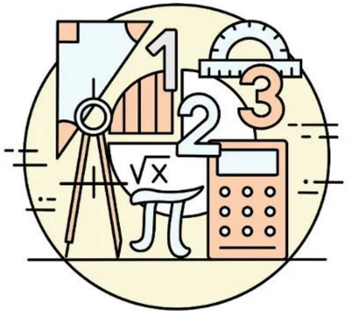


Matriz adjunta

- Se uma matriz A tem inversa, então:

$$\left(A^{-1} = \frac{1}{det(A)} * adj(A)\right) = I$$

- Onde adj(A) é a **matriz adjunta** de A e é definida como a transposta da matriz dos cofatores dos elementos de A.



Matriz adjunta

- **Exemplo:** Para uma matriz 2x2,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

- Se A tem inversa, então:

$$\left(A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}} * \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \right) = I$$

Matriz adjunta

- **Exemplo:** Seja A uma matriz 3x3, calcule Adj A e A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$adj\ A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -7 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\ adj\ A = \frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -7 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Regra de Cramer

- Seja A uma matriz n x n não singular e seja b $\in \mathbb{R}^n$. Seja A_i a matriz obtida pela substituição da i-ésima coluna de A por b. Se x é a única solução de **Ax = b**, então:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \; para \; i = 1, 2, \ldots, n$$

$$Desde \; que \; x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)}(adj\;A)b$$

$$Segue - se \; que \; x_i = \frac{b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni}}{\det(A)} = \frac{det(A_i)}{det(A)}$$

Regra de Cramer

- **Exemplo: Use a regra de Cramer para resolver:**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \quad det(A_1) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -4 \quad det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -8$$

$$x_1 = \frac{-4}{-4} = 1, x_2 = \frac{-4}{-4} = 1, x_3 = \frac{-8}{-4} = 2$$

Exercícios

1. Para cada um dos seguintes itens, calcule (i) det(A), (ii) adj A e (iii) A^{-1}.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad b)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Use a regra de Cramer para resolver cada um dos seguintes sistemas.

   a. $x_1 + 2x_2 = 3$
   $3x_1 - x_2 = 1$

   b. $2x_1 + 3x_2 = 2$
   $3x_1 + 2x_2 = 5$

Dúvidas, sugestões?