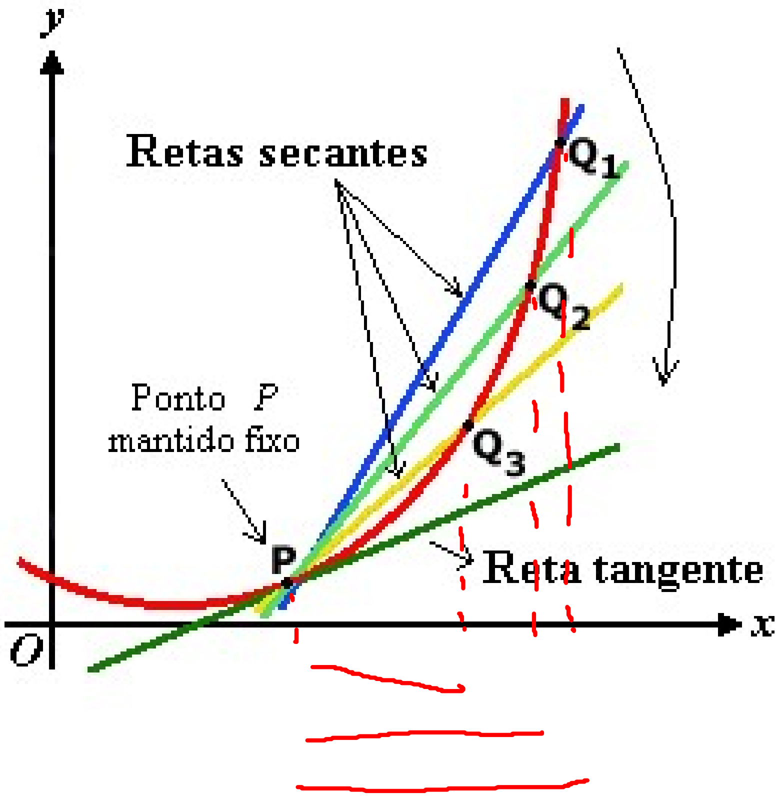
Calculo I

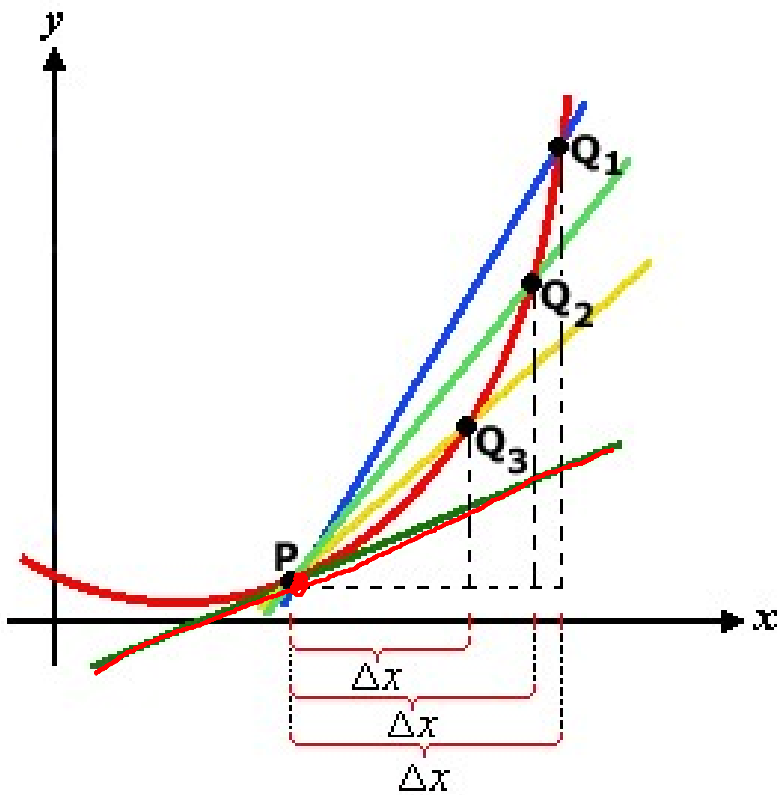
Coeficiente Angular da Reta Tangente e Derivada

Prof. Pablo Vargas

Introdução

- **Reta Tangente a uma Curva**





Introdução

- **Reta Tangente a uma Curva**

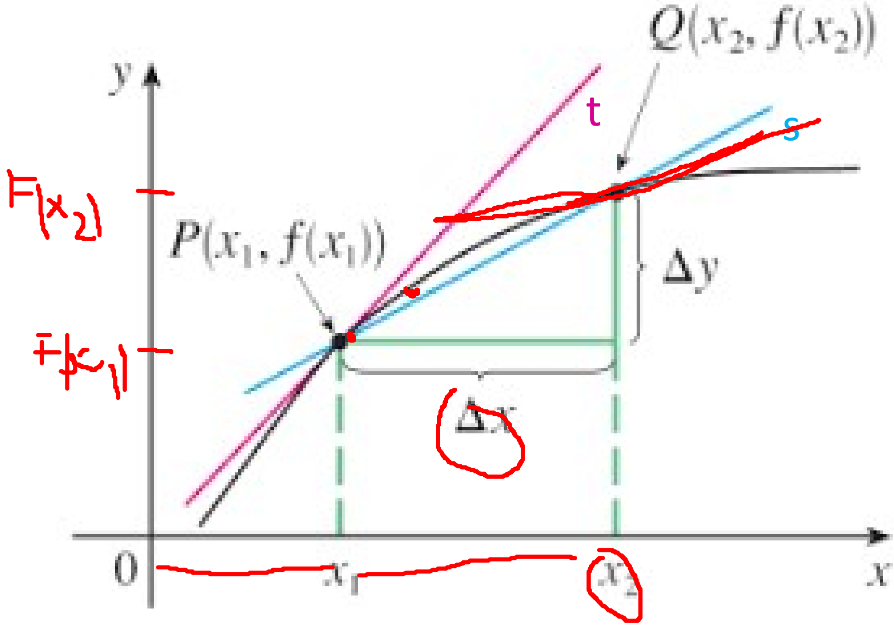
$P\left(x_1, \mathrm{f}(x_1)\right)$ e $Q(x_2, f(x_2))$

$$m_s = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$m_s = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\cancel{x_1} + \Delta x - \cancel{x_1}}$$

$$m_s = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$



Coeficiente Angular da Reta Tangente

- **Coeficiente Angular da Reta Tangente(m_t):** seja $y = f(x)$ uma função com alguma curva no ponto $P = (x_1, y_1)$, seu coeficiente angular da curva é dado por...

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

...desde que seu limite exista.

Coeficiente Angular da Reta Tangente

- **Exemplo 1:** Seja traçar a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto P de abcissa $x = 1$.

$P(1, f(x)) \therefore P(1,1)$

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{1^2} + 2.\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2.\cancel{\Delta x} + \Delta x^{\cancel{2}\ 1}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2 + \Delta x = 2$$

$f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 = 1^2 + 2.\Delta x + \Delta x^2$

Coeficiente Angular da Reta Tangente

- **Exemplo 1:** Seja traçar a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto P de abcissa $x = 1$. $P(1, f(x)) \therefore P(1, f(1)) = P(1,1)$

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$f(1) = 1^2 = 1$

$f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 = 1 + 2\Delta x + \Delta x^2$

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{1} + 2\Delta x + \Delta x^2 \cancel{-1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cancel{\Delta x} + \Delta x^{\cancel{2}\,1}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 + \Delta x = 2$$

Coeficiente Angular da Reta Tangente

- **Exemplo 1:** Seja traçar a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto P de abcissa $x = 1$.

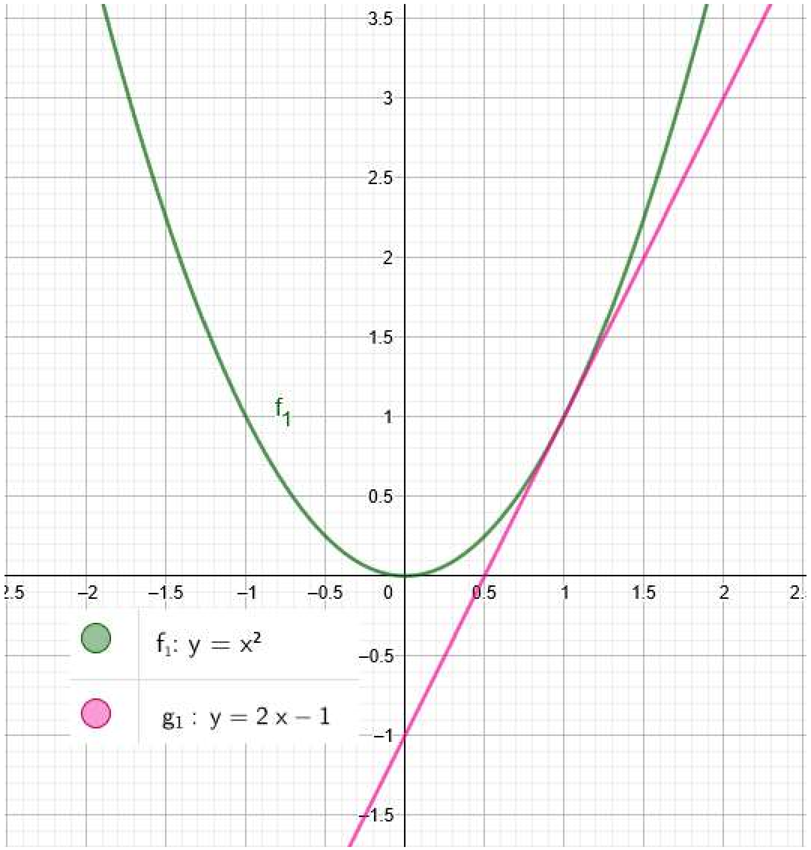
$Se\ m = 2$, podemos escrever a equação da reta tangente à curva no ponto $P = (1,1)$:

x_1 y_1

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = 2(x - 1)$$
$$y = 2x - 1$$

Coeficiente Angular da Reta Tangente

- **Exemplo 1:** Seja traçar a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto P de abcissa $x = 1$.



Coeficiente Angular da Reta Tangente

- **Exemplo 2:** Seja traçar a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto P de abcissa $x = -\frac{2}{3}$.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$f(-\frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$$

$$f\left(-\frac{2}{3} + \Delta x\right) = \left(-\frac{2}{3} + \Delta x\right)^2 = \frac{4}{9} - 2.\frac{2}{3}.\Delta x + \Delta x^2$$

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\frac{4}{9}} - \frac{4\Delta x}{3} + \Delta x^2 - \cancel{\frac{4}{9}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\frac{4\cancel{\Delta x}}{3} + \Delta x^{\cancel{2}\,1}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{4}{3} + \Delta x$$

$$m_t = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

Coeficiente Angular da Reta Tangente

- **Exemplo 2:** Seja traçar a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto P de abcissa $x = -\frac{2}{3}$.

$Se\ m = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$, podemos escrever a equação da reta tangente à curva no ponto $P = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

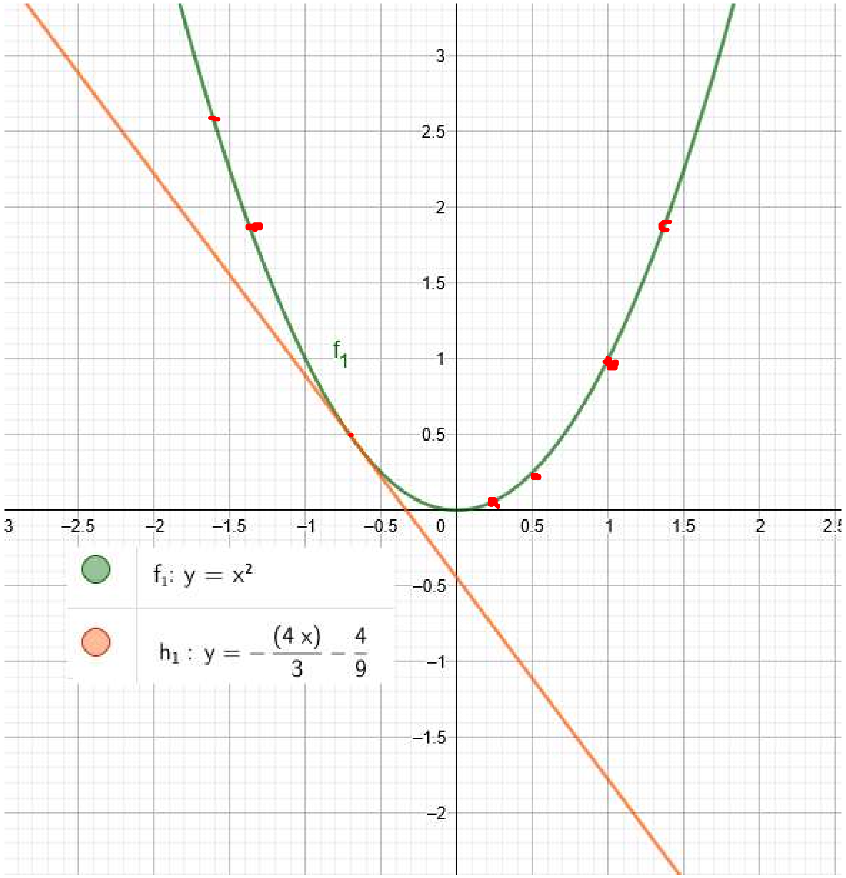
$$y - \frac{4}{9} = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

$$y - \frac{4}{9} = -\frac{4x}{3} - \frac{8}{9}$$

$$y = -\frac{4x}{3} - \frac{4}{9}$$

Coeficiente Angular da Reta Tangente

- **Exemplo 2:** Seja traçar a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto P de abcissa $x = -\frac{2}{3}$.



Coeficiente Angular da Reta Tangente

- **Exemplo 3:** qual a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 + 3x - 5$ no ponto $A = (x_1, y_1)$.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$f(x_1) = {x_1}^2 + 3x_1 - 5$

$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 + 3.(x_1 + \Delta x) - 5 = {x_1}^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 + 3x_1 + 3\Delta x - 5$

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{{x_1}^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 + 3x_1 + 3\Delta x - 5 - ({x_1}^2 + 3x_1 - 5)}{\Delta x} =$$

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_1^2} + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 + \cancel{3x_1} + 3\Delta x - \cancel{5} - \cancel{x_1^2} - \cancel{3x_1} + \cancel{5})}{\Delta x} =$$

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\cancel{\Delta x} + \Delta x^{\cancel{2}\,1} + 3\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x_1 + \Delta x + 3 = 2x_1 + 3$$

Coeficiente Angular da Reta Tangente

- **Exemplo 3:** qual a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 + 3x - 5$ no ponto B=(0,-5).

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$f(x_1) = {x_1}^2 + 3x_1 - 5$

$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 + 3.(x_1 + \Delta x) - 5 = {x_1}^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 + 3x_1 + 3\Delta x - 5$

$m_t = 2x_1 + 3$

$m_t = 2.0 + 3 = 3$

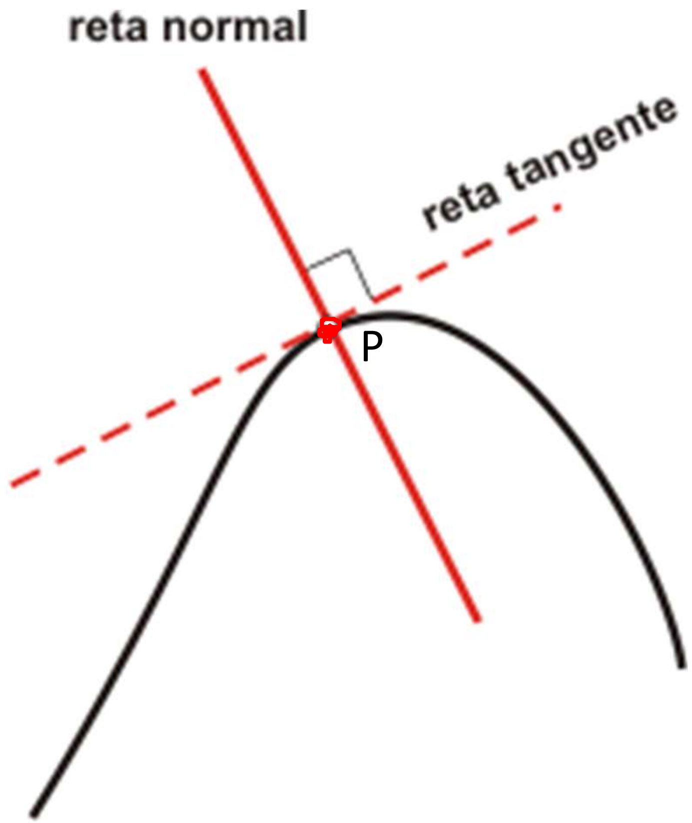
$y - (-5) = 3(x - 0)$

$y + 5 = 3x$

$y = 3x - 5$

Reta Normal

- ...uma reta perpendicular a reta tangente, em um certo ponto P de uma curva.



Reta Normal

- **Coeficiente Angular da Reta Normal**: se duas retas não verticais t e n são perpendiculares, seus coeficientes angulares $m_t\ e\ m_n$ satisfazem...

$$m_t . m_n = -1 \leftrightarrow m_t = -\frac{1}{m_n} \leftrightarrow \boxed{m_n = -\frac{1}{m_t}}$$

Reta Normal

- **Exemplo 1:** qual a equação da reta normal ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 8$ no ponto $x = 2$?

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$f(x_1) = x_1^2 - 8$

$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 - 8$

$= x_1^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 - 8$

Reta Normal

- **Exemplo 1:** qual a equação da reta normal ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 8$ no ponto $x = 2$?

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 - 8 - (x_1^2 - 8)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_1^2} + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 \cancel{-8} \cancel{-x_1^2} \cancel{+8}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1 \cancel{\Delta x} + \Delta x^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 2x_1 + \cancel{\Delta x}^{0} = 2x_1$$

$$m_t(2) = 2.2 = 4 \leftrightarrow m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{4}$$

Reta Normal

$$m_n = -\frac{1}{4}$$
$$P = (2, f(2)) = (2, -4)$$

- **Exemplo 1:** qual a equação da reta normal ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 8$ no ponto P onde $x = 2$? P(2,f(2))=P(2,-4)

x_1 y_1

Equação da Reta Normal:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-4) = -\frac{1}{4}(x - 2)$$
$$y + 4 = -\frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$
$$y = -\frac{x}{4} + \frac{1}{2} - 4$$
$$\boxed{y = -\frac{x}{4} - \frac{7}{2}}$$

$$m_t = 4$$
$$P = (2, f(2)) = (2, -4)$$

Reta Normal

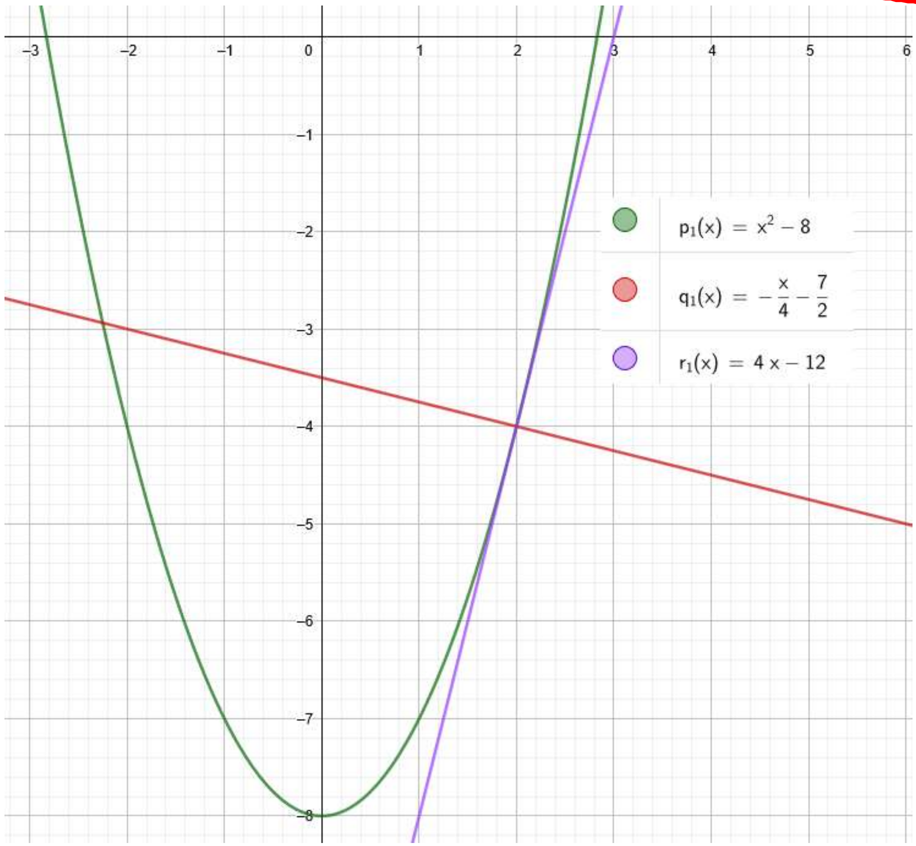
- **Exemplo 1:** qual a equação da reta normal ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 8$ no ponto $x = 2$?

Equação da Reta Tangente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-4) = 4(x - 2)$$
$$y + 4 = 4x - 8$$
$$y = 4x - 12$$

Reta Normal

- **Exemplo 1:** qual a equação da reta normal ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 8$ no ponto $x = 2$?



Derivada $f'(x)$

- Vimos anteriormente como definir o declive da reta tangente a uma curva $y = f(x)$, num ponto de abcissa $x = a$. Esse declive é o limite da razão incremental com $\Delta x \to 0$, isto é,

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Ela é chamada a derivada da função f no ponto $x = a$ e é indicada com o símbolo $f'(a)$. Portanto, considerado "a" como uma variável x, então:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$f(x) = 1$

Derivada

- ...uma função $y = f(x)$ é derivável ou diferenciável se houver a derivada em todos os pontos de seu domínio e dada por:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

- Toda função derivável num ponto $x = x_1$ é contínua nesse ponto.
- Se uma função é constante, então sua derivada é 0.
- Outras notações: $Dxf(x), DxY, \frac{dy}{dx}$

Derivada

- **Exemplo:** encontre $f'(2)$, sendo $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$f(2)$=$2.2^2 - 3.2 + 5 = 7$

$f(2 + \Delta x)$=$2(2 + \Delta x)^2 - 3(2 + \Delta x) + 5 = 2(4 + 4\Delta x + \Delta x^2) - 6 - 3\Delta x + 5 = 8 + 8\Delta x + 2\Delta x^2 - 6 - 3\Delta x + 5 = 2\Delta x^2 + 5\Delta x + 7$

Derivada

- **Exemplo:** encontre $f'(2)$ sendo $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x^2 + 5\Delta x \cancel{+7} \cancel{-7}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x^{\cancel{2}} + 5\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 2\Delta x + 5 = \underline{5}$$

Exercício

- Encontre $f'(3), f'(-2)$ sendo $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Exercício

- Encontre $f'(3), f'(-2)$sendo $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

$f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 5$

$= 2(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 3x - 3\Delta x + 5$

$= 2x^2 + 4x\Delta x + \Delta x^2 - 3x - 3\Delta x + 5$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + \Delta x^2 - 3x - 3\Delta x + 5 \; - (2x^2 - 3x + 5\,)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{2x^2} + 4x\Delta x + \Delta x^2 \cancel{- 3x} - 3\Delta x \cancel{+ 5} \cancel{- 2x^2} \cancel{+ 3x} \cancel{- 5}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 4x + \cancel{\Delta x} - 3 = 4x - 3$$

Exercício

- Encontre $f'(3), f'(-2)$ sendo $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = 4x - 3$$
$$f'(3) = 4.3 - 3 = 9$$
$$f'(-2) = 4.(-2) - 3 = -11$$

Derivadas Laterais

- Derivada Lateral à Direita $\boxed{(f'_{+}):}$ se $y = f(x)$ está definida em x_1, denotado por f'_{+} é definida por:

$$f'_{+}(x_1) = \lim_{\Delta x \to \boxed{0^{+}}} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Obs: Limite deve existir.

Derivadas Laterais

- Derivada Lateral à Esquerda (f'_-): se $y = f(x)$ está definida em x_1, denotado por f'_- é definida por:

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Obs: Limite deve existir.

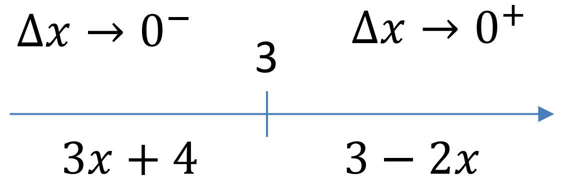
Derivadas Laterais

- Teorema: uma **função será derivável** em um ponto **se existirem derivadas laterais** nesse ponto e se essas derivadas laterais **forem iguais**.

$$f'(x) \leftrightarrow f'_{+}(x)=f'_{-}(x)$$

Derivadas Laterais

- Exemplo: seja f a função definida abaixo, encontre $f'_{+}(3)$ e $f'_{-}(3)$



$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & se\ x < 3 \\ 3 - 2x & se\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$f'_{+}(3) = \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$f(3) = 3 - 2.3 = -3$$

$$f(3 + \Delta x) = 3 - 2(3 + \Delta x) = 3 - 6 - 2\Delta x = -2\Delta x - 3$$

Derivadas Laterais

- Exemplo: seja f a função definida abaixo, encontre $f'_+(3)$ e $f'_-(3)$

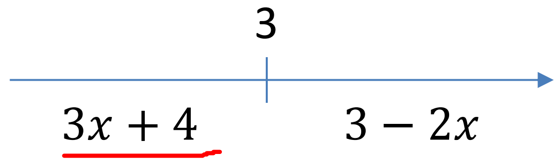
$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & se\ x < 3 \\ 3 - 2x & se\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$f'_+(3) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-2\Delta x \cancel{-3} \cancel{-(-3)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = -2$$

Derivadas Laterais

- Exemplo: seja f a função definida abaixo, encontre $f'_{+}(3)$ e $f'_{-}(3)$



$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & se\ x < 3 \\ 3 - 2x & se\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$f'_{-}(3) = \lim_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$f(3) = 3 - 2.3 = -3$$

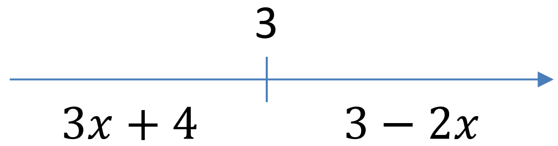
$$f(3 + \Delta x) = 3(3 + \Delta x) + 4 = 9 + 3\Delta x + 4$$

$$= 13 + 3\Delta x$$

Derivadas Laterais

- Exemplo: seja f a função definida abaixo, encontre $f'_+(3)$ e $f'_-(3)$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & se\ x < 3 \\ 3 - 2x & se\ x \geq 3 \end{cases}$$



$$f'_-(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{13 + 3\Delta x \; - (-3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{16 + 3\Delta \cancel{x}}{\Delta \cancel{x}}$$

$$= \nexists$$

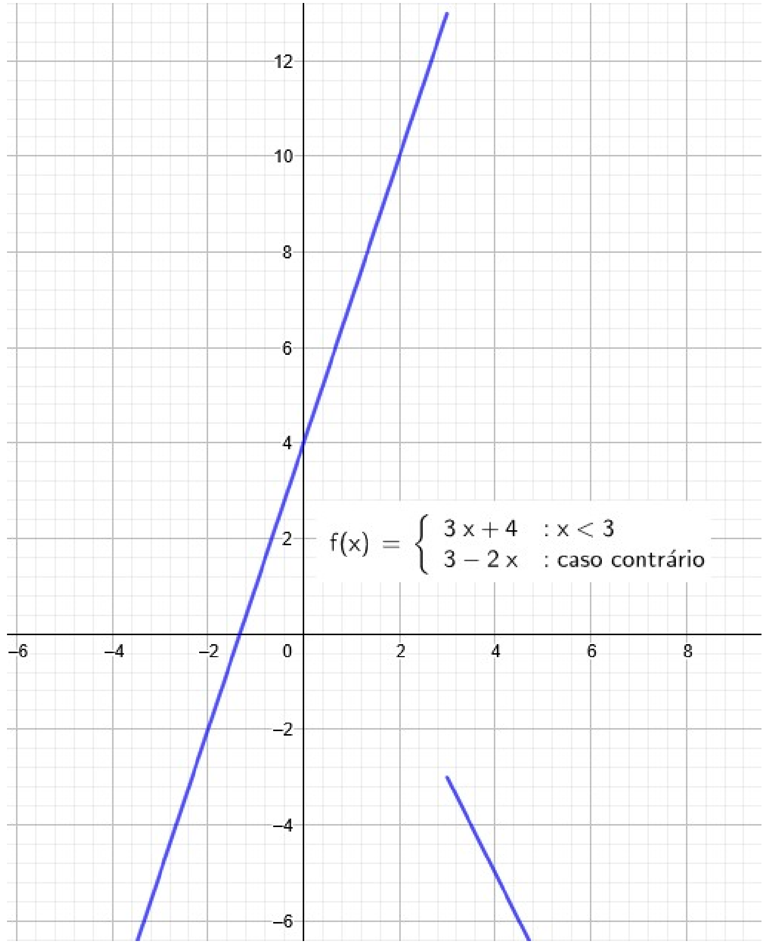
Limite não existe. Portanto, derivada $f'(3)$ não existe.

$$f'_+(3) \neq f'_-(3)$$

Derivadas Laterais

- Exemplo: seja f a função definida abaixo, encontre $f'_+(3)$ e $f'_-(3)$

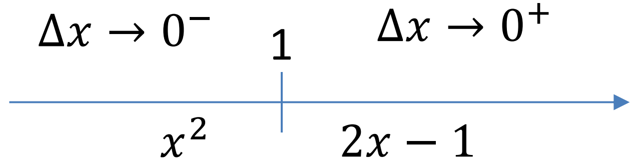
$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & se\ x < 3 \\ 3 - 2x & se\ x \geq 3 \end{cases}$$



Derivadas Laterais

- Exercícios:

a) seja f a função definida abaixo, encontre $f'(1)$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x < 1 \\ 2x - 1 & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

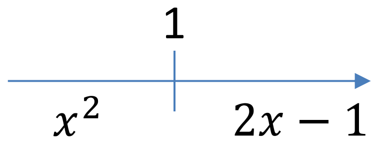
$$f'_{\pm}(1) = \lim_{\Delta x \to 0^{\pm}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivadas Laterais

- Exercícios:

a) seja f a função definida abaixo, encontre $f'(1)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x < 1 \\ 2x - 1 & se\ x \geq 1 \end{cases}$$



$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$f(1) = 2x - 1 = 2.1 - 1 = 1$$

$$f(1 + \Delta x) = 2.(1 + \Delta x) - 1 = 2 + 2\Delta x - 1 = 2\Delta x + 1$$

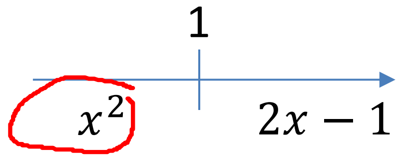
$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2\Delta x \cancel{+1} \cancel{-1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = 2$$

Derivadas Laterais

- Exercícios:

a) seja f a função definida abaixo, encontre $f'(1)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x < 1 \\ 2x - 1 & se\ x \geq 1 \end{cases}$$



$$f'_{-}(1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$f(1) = 2x - 1 = 2.1 - 1 = 1$$

$$f(1+\Delta x) = (1+\Delta x)^2 = \Delta x^2 + 2\Delta x + 1$$

$$f'_{-}(1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x \cancel{+1} \cancel{-1}}{\Delta x} =$$

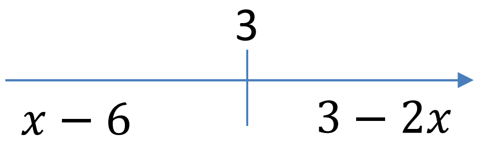
$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x^{\cancel{2}\,1} + 2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \Delta x + 2 = 2$$

$$f'(1) \leftrightarrow f'_{+}(1) = f'_{-}(1)$$

Derivadas Laterais

- Exercícios:

b) seja f a função definida abaixo, encontre $f'(3)$



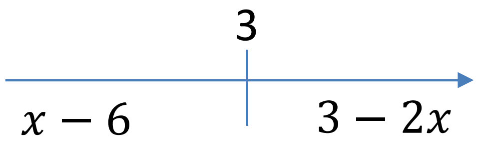
$$f(x) = \begin{cases} x-6 & se\ x < 3 \\ 3-2x & se\ x \geq 3 \end{cases}$$

Derivadas Laterais

- Exercícios:

b) seja f a função definida abaixo, encontre $f'(3)$

$$f(x) = \begin{cases} x - 6 & se\ x < 3 \\ 3 - 2x & se\ x \geq 3 \end{cases}$$



$$f'_{+}(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

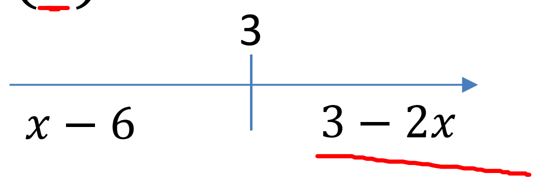
$$f'_{-}(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

Derivadas Laterais

- Exercícios:

b) seja f a função definida abaixo, encontre $f'(3)$

$$f(x) = \begin{cases} x-6 & se\ x<3 \\ 3-2x & se\ x \geq 3 \end{cases}$$



$$f'_+(3) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$f(3) = 3 - 2x = 3 - 2.3 = -3$$

$$f(3+\Delta x) = 3 - 2(3+\Delta x) = 3 - 6 - 2\Delta x = -2\Delta x - 3$$

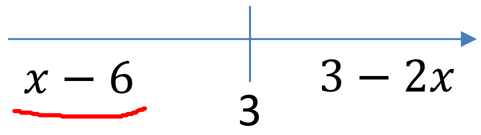
$$f'_+(3) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-2\Delta x \cancel{-3}\ \cancel{-(-3)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = -2$$

Derivadas Laterais

- Exercícios:

b) seja f a função definida abaixo, encontre $f'(3)$

$$f(x) = \begin{cases} x - 6 & se\ x < 3 \\ 3 - 2x & se\ x \geq 3 \end{cases}$$



$$f'_{-}(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$f(3) = 3 - 2x = 3 - 2.3 = -3$$

$$f(3 + \Delta x) = 3 + \Delta x - 6 = \Delta x - 3$$

$$f'_{-}(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x \cancel{- 3} \cancel{- (-3)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = 1$$

$$f'(3) \leftrightarrow f'_{+}(3) \neq f'_{-}(3)$$

$$f'(3) = \nexists$$

Regras de Derivação (Retorno 10:10)

- ...facilitam o cálculo das derivadas.
- Considerando f e g como funções contínuas no ponto x, algumas regras podem ser utilizadas para simplificar o cálculo das derivadas que são:
  - Potência: $(x^n)' = n.x^{n-1}$
  - Soma/Subtração: $(f \pm g)' = f' \pm g'$
  - Produto por constante: $(Cf)' = C.f'$
  - Produto: $(fg)' = f'.g + f.g'$
  - Quociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$
  - Exponencial: $(e^x)' = e^x$

Potência: $(x^n)' = n.x^{n-1}$
Soma/Subtração: $(f \pm g)' = f' \pm g'$
Produto por constante: $(Cf)' = C.f'$
Produto: $(fg)' = f'.g + f.g'$
Quociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$
Exponencial: $(e^x)' = e^x$

Regras de Derivação

$f \times g$

- Exemplo: Calcule a derivada da função y $= \frac{1}{x}(x^2 + e^x)$

Produto: $(fg)' = f'.g + f.g'$

$$f(x) = \frac{1}{x} \therefore f'(x) = (x^{-1})' = -1.x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$g(x) = (x^2 + e^x) \therefore g'(x) = (x^2)' + (e^x)' = 2x + e^x$$

$$(fg)' = -\frac{1}{x^2}.(x^2 + e^x) + \frac{1}{x}.(2x + e^x) =$$

$$-1 - \frac{e^x}{x^2} + 2 + \frac{e^x}{x} = 1 - \frac{e^x}{x^2} + \frac{e^x}{x}$$

Regras de Derivação

- Exemplo: Calcule a derivada da função $y = \frac{x^2-1}{x^3+1}$

$x^2-1 \rightarrow f$

$x^3+1 \rightarrow g$

$y' = 1$

Quociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g-f.g'}{g^2}$

$f(x) = x^2 - 1 \therefore f'(x) = (x^2)' - (1)' = 2x$

$g(x) = x^3 + 1 \therefore g'(x) = (x^3)' + (1)' = 3x^2$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{2x\,.(x^3 + 1) - (x^2-1).3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

Regras de Derivação

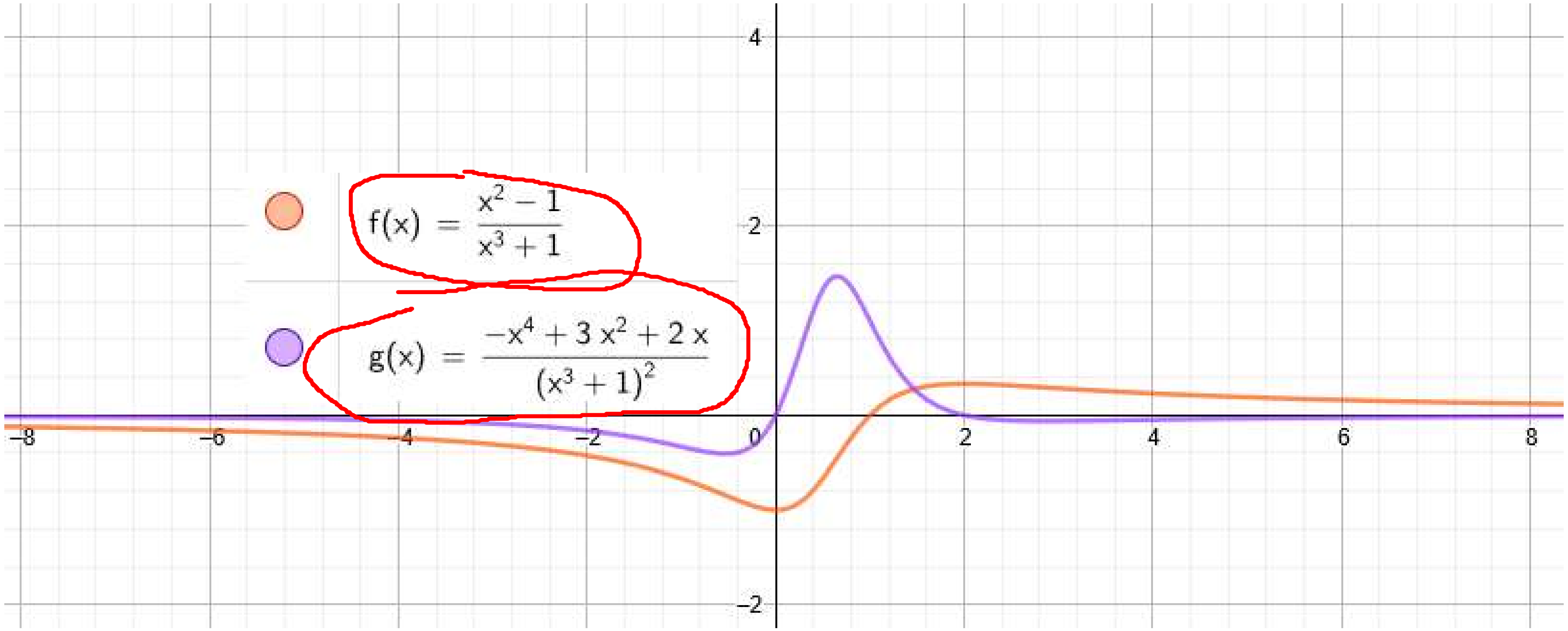
- Exemplo: Calcule a derivada da função $y = \frac{x^2-1}{x^3+1}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{2x\,.\,(x^3+1) - [(x^2-1).\,3x^2]}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2x^4} + 2x - \cancel{3x^4} + 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^3+1)^2}$$

Regras de Derivação

- Exemplo: Calcule a derivada da função $y = \dfrac{x^2-1}{x^3+1}$



Regras de Derivação

- Derivada das funções trigonométricas:
  - *I.* $(sen\ x)' = \cos x$
  - *II.* $(\cos x)' = -sen\ x$
  - *III.* $(tg\ x)' = sec^2 x$
  - *IV.* $(cotg\ x)' = -cossec^2 x$
  - *V.* $(sec^2 x)' = \sec x . tg\ x$
  - *VI.* $(cossec\ x)' = -cossec\ x . cotg\ x$

Regras de Derivação

$$\overset{f}{x^2}.\overset{g}{\cos x}$$

- Exemplo: calcule a derivada de $y = x^2.\cos x$
  - Produto: $(fg)' = f'.g + f.g'$

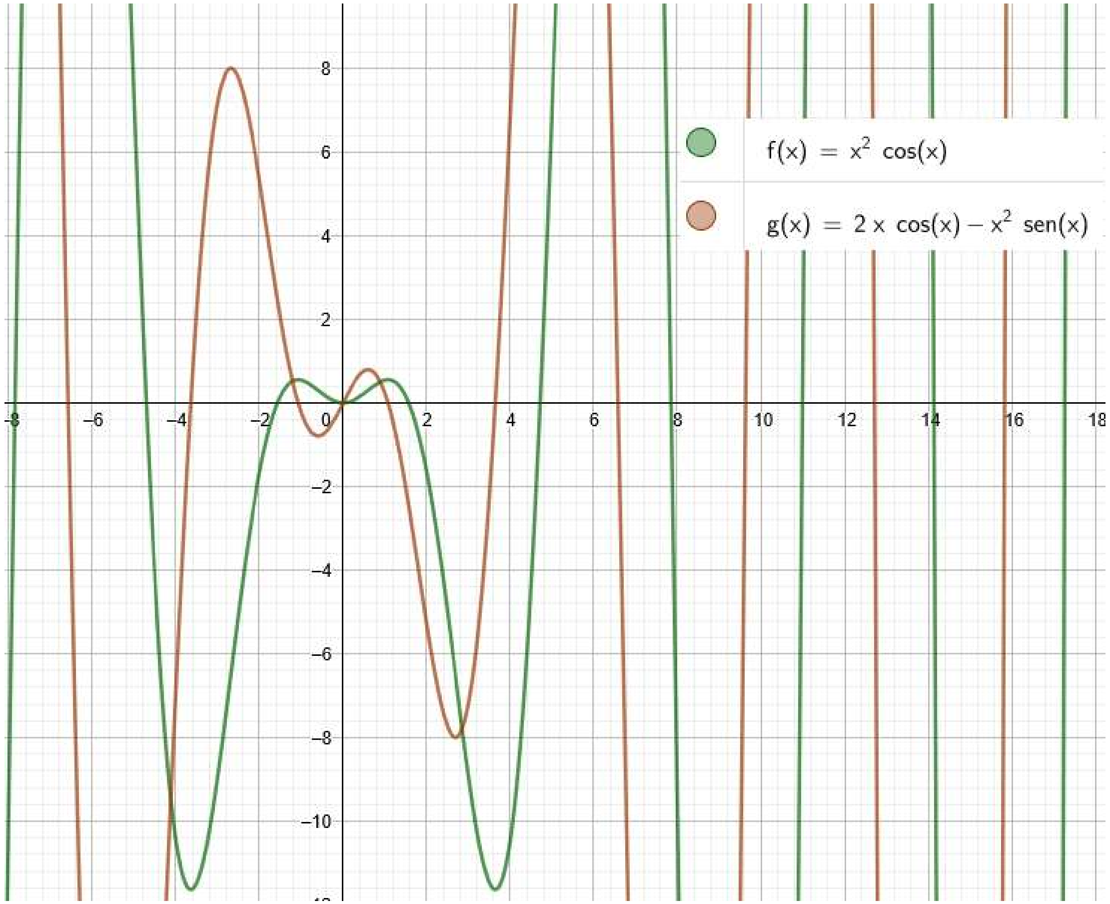
$f(x) = x^2 \therefore f'(x) = 2x$

$g(x) = \cos x \therefore g'(x) = -sen\ x$

$$(fg)' = 2x.\cos x + x^2.(-sen\ x)$$
$$= 2x.\cos x - x^2.sen\ x$$

Regras de Derivação

- Exemplo: calcule a derivada de $y = x^2 . \cos x$



Regras de Derivação

- Exemplo: calcule a derivada de $y =$ $x^3 . sen\, x . \cos x$

f g

Produto: $(fg)' = f'.g + f.g'$

$f(x) = x^3 \therefore f'(x) = 3x^2$

$g(x) = sen\, x . \cos x$

$g'(x) = (sen\, x)' . \cos x + sen\, x . (\cos x)'$

$= cos^2 x - sen^2 x$

$(fg)' = 3x^2 . sen\, x . \cos x + x^3 . (cos^2 x - sen^2 x)$

Potência: $(x^n)' = n.x^{n-1}$
Soma/Subtração: $(f \pm g)' = f' \pm g'$
Produto por constante: $(Cf)' = C.f'$
Produto: $(fg)' = f'.g + f.g'$
Quociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$
Exponencial: $(e^x)' = e^x$

Regras de Derivação

I. $(sen\ x)' = \cos x$
II. $(\cos x)' = -sen\ x$
III. $(tg\ x)' = sec^2 x$
IV. $(cotg\ x)' = -cossec^2 x$
V. $(sec^2 x)' = \sec x . tg\ x$
VI. $(cossec\ x)' = -cossec\ x . cotg\ x$

f

- Exemplo: calcule a derivada de $y = \frac{2x^3.\cos x}{x^3 - 1}$

g

Quociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \boxed{\frac{f'.g - f.g'}{g^2}}$

$f(x) = 2x^3.\cos x$

$f'(x) = (2x^3)'.\cos x + 2x^3.(\cos x)' = 6x^2.\cos x - 2x^3.\text{sen } x$

$g(x) = x^3 - 1 \therefore g'(x) = 3x^2$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{(6x^2.\cos x - 2x^3.\text{sen } x).(x^3 - 1) - 2x^3.\cos x.3x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

$$= \frac{(6x^2.\cos x - 2x^3.\text{sen } x).(x^3 - 1) - 6x^5.\cos x}{(x^3 - 1)^2}$$

Regras de Derivação

- **Regra da cadeia**: utilizada para resolver derivadas com funções compostas.

$$h(x) = f\big(g(x)\big) \therefore h'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

  – Ou ainda, com a notação de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$g(x) = x^2 + 1$$
$$fog(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Regras de Derivação

- Exemplo 1: Seja calcular a derivada da função $y = \sqrt{x^2 + 1}$
  - Com a introdução de uma variável intermediária u, temos:

$$y = \sqrt{u} \therefore u = x^2 + 1$$

  - Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = \frac{d(\sqrt{u})}{du} . \frac{d(x^2 + 1)}{dx} = \frac{d(u^{\frac{1}{2}})}{du} . \frac{d(x^2 + \cancel{1})}{dx} \quad 0$$

$$= \frac{1}{2} . u^{\frac{1}{2} - 1} . 2x = \frac{1}{2} . u^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} . 2x$$

  - Ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 1}} . \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Regras de Derivação

- Exemplo 2: Seja calcular a derivada da função $y = \cos(x^2 + 1)$

$$y = \cos(u) \;\therefore\; u = x^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = \frac{d(\cos(u))}{du} . \frac{d(x^2 + \cancel{1})}{dx} = -sen\, u . 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x . sen\, (x^2 + 1)$$

Potência: $(x^n)' = n.x^{n-1}$
Soma/Subtração: $(f \pm g)' = f' \pm g'$
Produto por constante: $(Cf)' = C.f'$
Produto: $(fg)' = f'.g + f.g'$
Quociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$
Exponencial: $(e^x)' = e^x$

Regras de Derivação

- Exemplo 3: Seja calcular a derivada da função $y = e^{x^2}$

$$y = e^u \therefore u = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = \frac{d(e^u)}{du} . \frac{d(x^2)}{dx} = e^u . 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2} . 2x$$

Regras de Derivação

- Exemplo 4: Seja calcular a derivada da função $y = e^{5-7x}$

$$y = e^u \therefore u = 5 - 7x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}} = \frac{d(e^u)}{du} \cdot \frac{d(\cancel{5} - 7x)}{dx} = e^u \cdot -7$$

$$\frac{dy}{dx} = -7 \cdot e^{5-7x}$$

Regras de Derivação

$\frac{1}{v} = v^{-1}$

$\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$

- Exemplo 5: Seja calcular a derivada da função $y = \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}$

$$y = \frac{1}{v} \therefore v = \sqrt{u} \therefore u = x^4 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d(\frac{1}{v})}{dv} \cdot \frac{d(\sqrt{u})}{du} \cdot \frac{d(x^4+1)}{dx} = \frac{-1}{v^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 4x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(\sqrt{u})^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^4+1}} \cdot \cancel{4}x^3 = \frac{-1}{(x^4+1)} \cdot \frac{1}{(x^4+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot 2x^3$$

$$= \frac{-2x^3}{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Regras de Derivação

- Exercícios: calcule as derivadas abaixo.

$a)\ y = 6\left(\frac{1}{2}x^4\right) - 9$

Regras de Derivação

- Exercícios: calcule as derivadas abaixo.

a) $y = 6\left(\frac{1}{2}x^4\right) - 9$

$$y = \frac{6}{2}x^4 - 9$$

$$y' = \left(\frac{6}{2}x^4\right)' - (9)' = \frac{6}{2}.(x^4)' - 0 = 3.4x^3$$

$$= 12x^3$$

Regras de Derivação

- Exercícios: calcule as derivadas abaixo.

$b)\ y = sen\,(3x + 1)$

Regras de Derivação

- Exercícios: calcule as derivadas abaixo.

$b)\ y = sen\ (3x + 1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

$$y = sen\ (u) \therefore u = 3x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(sen\ (u))}{du} . \frac{d(3x + 1\ )}{dx} = \cos u . 3$$

$$= 3 . \cos(3x + 1)$$

Regras de Derivação

- Exercícios: calcule as derivadas abaixo.

$c)\ y = (1 - \frac{x}{7})^{-7}$

Regras de Derivação

- Exercícios: calcule as derivadas abaixo.

$c)\ \ y = (1 - \frac{x}{7})^{-7}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

$$y = u^{-7} \ \ \therefore u = 1 - \frac{x}{7}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u^{-7})}{du} . \frac{d\left(1 - \frac{x}{7}\right)}{dx} = -7. u^{-7-1} . \left(0 - \frac{1}{7}(x)'\right) =$$

$$-\cancel{7}. u^{-8} . \frac{-1}{\cancel{7}} = u^{-8} = (1 - \frac{x}{7})^{-8}$$

Regras de Derivação

- Derivada da Função Logaritmo Neperiano.

I. $(\ln u)' = \frac{1}{u} . \frac{du}{dx} \qquad (para\ u > 0)$

II. $(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \qquad (para\ x \neq 0)$

Regras de Derivação

- Derivada da a^u e $\log_a u$
  - Regra: se a>0 e "u" é uma função derivável de x, então a^u é uma função derivável de x e:

I. $$(a^u)' = a^u . \ln a . \frac{du}{dx}$$

II. $$(\log_a u)' = \frac{1}{u . \ln a} . \frac{du}{dx} \quad (para\ a > 0\ e\ a \neq 1)$$

Regras de Derivação

- Exemplo 1: calcule a derivada de $y = \ln 2x$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} . \frac{du}{dx}$$

$$u = 2x$$

$$(\ln 2x)' = \frac{1}{2x} . \frac{d(2x)}{dx} = \frac{1}{\cancel{2}x} . \cancel{2} = \frac{1}{x}$$

Regras de Derivação

- Exemplo 2: calcule a derivada de $y = \ln(x^2 + 3)$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} . \frac{du}{dx}$$

$$u = x^2 + 3$$

$$(\ln(x^2+3))' = \frac{1}{x^2+3} . \frac{d(x^2 + \cancel{3}^{\,0})}{dx} = \frac{1}{x^2+3} . 2x$$

$$= \frac{2x}{x^2+3}$$

Regras de Derivação

- Exemplo 3: calcule a derivada de $y = 3^x$

$$(a^u)' = a^u . \ln a . \frac{du}{dx}$$

$$u = x$$

$$(3^x)' = 3^x . \ln 3 . \frac{d(x)}{dx} = 3^x . \ln 3 . 1 = 3^x . \ln 3$$

Regras de Derivação

- Exemplo 4: calcule a derivada de $y = 2^{\boxed{1-2x}}$

$$(a^u)' = a^u . \ln a . \frac{du}{dx}$$

$$u = \boxed{1 - 2x}$$

$$(2^{1-2x})' = 2^{1-2x} . \ln 2 . \frac{d(\cancel{1} - 2x)}{dx}$$

$$= 2^{1-2x} . \ln 2 . \underline{(-2)} = -2.2^{1-2x} . \ln 2$$

Regras de Derivação

- Exemplo 5: calcule a derivada de $y = \log_{\boxed{2}} \boxed{5x}$

u

a

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u.\ln a} \cdot \boxed{\frac{du}{dx}}$$

$$u = \boxed{5x}$$

$$(\log_2 5x)' = \frac{1}{5x.\ln 2} \cdot \frac{d(5x)}{dx} = \frac{1}{\cancel{5}x.\ln 2} \cdot \cancel{5}$$

$$= \boxed{\frac{1}{x.\ln 2}}$$

Derivadas de Segunda Ordem e Superior

- ...é simplesmente a derivada da derivada da função.
- A ordem determinara quantas derivações serão feitas.

$$f''(x) = \boxed{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = \mathrm{y}''$$

$$= \mathrm{D}^2(f)(x)$$

Derivadas de Segunda Ordem e Superior

- Exemplo: calcule as $y', y'', y''', \frac{d^4y}{dx^4}$ de $y = x^3 - 3x^2 + 2$

$$\boxed{y' = 3x^2 - 6x}$$

$$\boxed{y'' = 6x - 6}$$

$$y''' = 6$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

Derivadas de Segunda Ordem e Superior

- Exercícios: calcule as y'' das funções abaixo.

$a)\ y = (1 + \frac{1}{x})^3$

Derivadas de Segunda Ordem e Superior

$\frac{1}{x} = x^{-1}$

- Exercícios: calcule as y'' das funções abaixo.

a) $y = (1 + \frac{1}{x})^3$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}}$$

$$y = \mathrm{u}^3 \therefore u = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\mathrm{u}^3)}{du} . \frac{d(\cancel{1} + \frac{1}{x})}{dx} = 3\mathrm{u}^2 . \left(0 - \frac{1}{\mathrm{x}^2}\right) = 3\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 . \left(-\frac{1}{\mathrm{x}^2}\right)$$

$$3.\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) . -\frac{1}{x^2} = \left(3 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}\right) . \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{3}{x^4}$$

$$= -3x^{-2} - 6x^{-3} - 3x^{-4}$$

Potência: $(x^n)' = n.x^{n-1}$
Soma/Subtração: $(f \pm g)' = f' \pm g'$
Produto por constante: $(Cf)' = C.f'$
Produto: $(fg)' = f'.g + f.g'$
Quociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$
Exponencial: $(e^x)' = e^x$

Derivadas de Segunda Ordem e Superior

- Exercícios: calcule as y'' das funções abaixo.

$a)\ y = (1 + \frac{1}{x})^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

$$y' = -3x^{-2} - 6x^{-3} - 3x^{-4}$$

$$y'' = (-3x^{-2} - 6x^{-3} - 3x^{-4})'$$

$$= (-3x^{-2})' - (6x^{-3})' - (3x^{-4})'$$

$$= -3(x^{-2})' - 6(x^{-3})' - 3(x^{-4})'$$

$$= 6(x^{-3}) \quad + 18(x^{-4}) \quad + 12(x^{-5})$$

Derivadas de Segunda Ordem e Superior

- Exercícios: calcule as y'' das funções abaixo.

$b)\ y = x.(2x+1)^4$