Calculo I

Integração por partes e Integrais impróprias

Prof. Pablo Vargas

Integração por partes

- Utilizada como técnica de simplificação de integrais com um produto entre funções.
- Usada principalmente quando temos produto de funções de tipos diferentes.
  - Ex: (logarítmica, inversa, polinomial, trigonométrica, exponencial...)
  - Melhor ainda quando uma é fácil de integrar e a outra fácil de derivar.

Integração por partes

- Ela é um método de integração que permite a gente "quebrar" a nossa integral em duas partes.

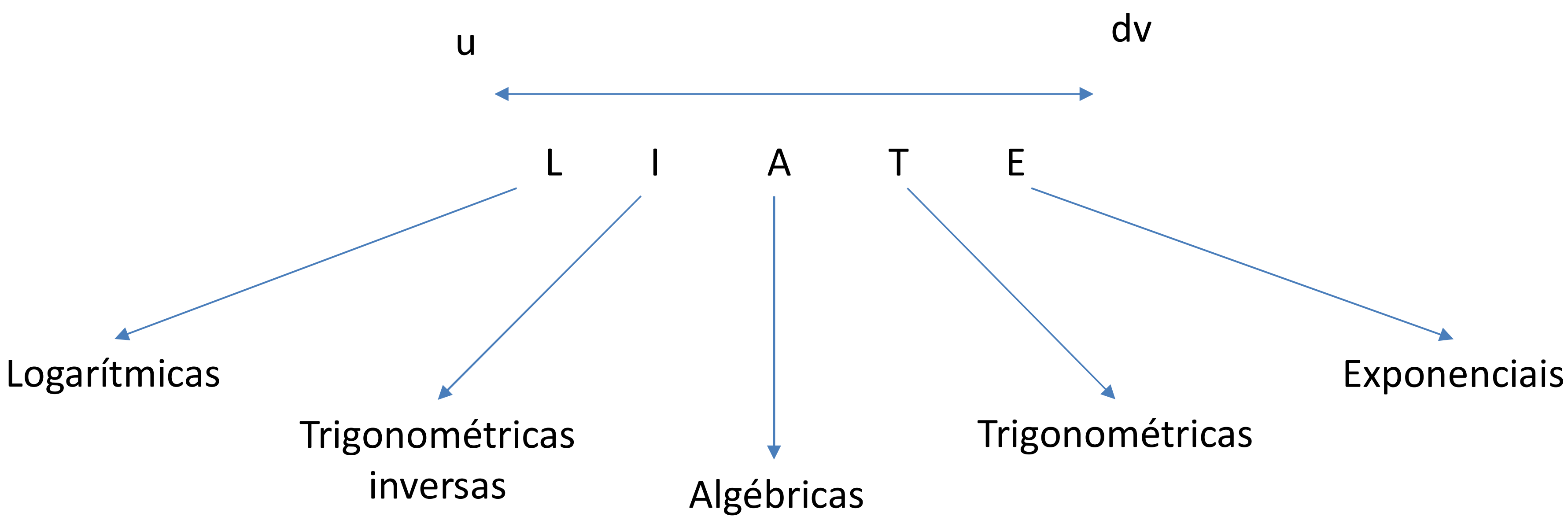
v

$$\int f(x).\,g(x).\,dx = \int u.\,dv = u.\,v - \int v\,.\,du$$

u

Integração por partes

- Uma estratégia para facilitar a utilização da integração por partes é escolha de *u* e *dv*, sendo que....



$$\int u.\,dv = \boxed{u.\,v - \int v\,.\,du}$$

Integração por partes

- Exemplo 1: Calcule $\int x.\cos x.\,dx$
  - 1º passo: escolher u e dv.

$$u = x \text{ e } dv = \cos x.\,dx$$

  - 2º passo: calcular a derivada de u e a integral de dv.

$$\frac{du}{dx} = 1 \rightarrow du = dx \quad \therefore v = \int \cos x.\,dx = sen\ x$$

$$u = x$$
$$du = dx$$
$$v = sen\ x$$
$$dv = \cos x . dx$$

Integração por partes

- Exemplo 1: Calcule $\int x . \cos x . dx$
  - 3º passo: aplicar a formula da integração por partes fazendo a substituição.

$$\int u . dv = u . v - \int v . du$$

$$\int x . \cos x . dx = x . sen\ x - \int sen\ x . dx$$

$$\int x . \cos x . dx = x . sen\ x + cox\ x + C$$

Integração por partes

- Exemplo 2a: Calcule $\int e^x . sen\, x . dx$
  - 1º passo: escolher u e dv.

$$u = e^x \text{ e } dv = sen\, x . dx$$

  - 2º passo: calcular a derivada de u e a integral de dv.

$$\frac{du}{dx} = e^x \rightarrow du = e^x . dx \therefore v = \int sen\, x . dx$$

$$= -\cos x$$

$u = e^x$
$du = e^x.dx$
$v = -\cos x$
$dv = sen.dx$

Integração por partes

- Exemplo 2a: Calcule $\int e^x.sen\,x.dx$
  - 3º passo: aplicar a formula da integração por partes fazendo a substituição.

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$\int e^x.sen\,x.dx = e^x.(-\cos x) - \int e^x.dx\,.(-\cos x)$$

$$\int e^x.sen\,x.dx = -e^x.\cos x + \int \underbrace{e^x}_{u}.\underbrace{\cos x.dx}_{dv}$$

  - Encontramos outra integral com produto de funções ($\int e^x.\cos x.dx$), neste caso devemos aplicar novamente a integração por partes.

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

Integração por partes

- Exemplo 2a: Calcule $\int e^x.sen\, x.dx$
  - Aplicando novamente a integração por partes:

$$\int \underset{u}{e^x}.\underset{dv}{\underline{\cos x.dx}}$$

$$u = e^x \rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \rightarrow du = e^x.dx$$

$$dv = \cos x.dx \rightarrow v = \int \cos x.dx = \underline{sen\, x}$$

$$\int e^x.\cos x.dx = e^x.sen\, x - \int sen\, x\, .e^x.dx$$

Integração por partes

- Exemplo 2a: Calcule $\int e^x . sen\, x . dx$
  - Substituindo a nova integração por partes:

$$\int e^x . sen\, x . dx = -e^x . \cos x + (e^x . sen\, x - \int e^x . sen\, x\; . dx)$$

$$\int e^x . sen\, x . dx + \int e^x . sen\, x\; . dx = -e^x . \cos x + e^x . sen\, x$$

$$2 \int e^x . sen\, x . dx = -e^x . \cos x + e^x . sen\, x$$

$$\int e^x . sen\, x . dx = \frac{-e^x . \cos x + e^x . sen\, x}{2} + C$$

Integração por partes

- Exemplo 2b: Calcule $\int e^x . sen\, x . dx$
  - 1º passo: escolher u e dv.

$$u = sen\, x \text{ e } dv = e^x . dx$$

  - 2º passo: calcular a derivada de u e a integral de dv.

$$\frac{du}{dx} = sen\, x \rightarrow du = \cos x \,. dx \therefore v = \int e^x . dx$$

$$= e^x$$

$$u = sen\ x$$
$$du = \cos x\,.\,dx$$
$$v = e^{x}$$
$$dv = e^{x}.\,dx$$

Integração por partes

- Exemplo 2b: Calcule $\int e^{x}.\,sen\ x.\,dx$
  - 3º passo: aplicar a formula da integração por partes fazendo a substituição.

$$\int u.\,dv = u.\,v - \int v\,.\,du$$

- $\int e^{x}.\,sen\ x.\,dx\ = sen\ x.\,e^{x} - \int e^{x}\,.\cos x\,.\,dx$

$$\int e^{x}.\,sen\ x.\,dx\ = sen\ x.\,e^{x} - \int \underline{e^{x}\,.\cos x\,.\,dx}$$

  - Encontramos outra integral com produto de funções ($\int e^{x}\,.\cos x.\,dx$), neste caso devemos aplicar novamente a integração por partes.

$$\int u.\,dv = u.\,v - \int v\,.\,du$$

Integração por partes

- Exemplo 2b: Calcule $\int e^x.\, sen\ x.\, dx$
  - Aplicando novamente a integração por partes:

$$\int \underbrace{e^x}_{dv}.\underbrace{\cos x}_{u}.\,dx$$

$$u = \cos x \rightarrow \frac{du}{dx} = -sen\ x \rightarrow du = -sen\ x.\,dx$$

$$dv = e^x.\,dx \rightarrow v = \int e^x.\,dx = e^x$$

$$\int e^x.\cos x.\,dx \quad = \cos x.\,e^x - \int e^x.-sen\ x.\,dx$$

$$\int e^x.\cos x.\,dx \quad = \cos x.\,e^x + \int e^x.\,sen\ x.\,dx$$

Integração por partes

- Exemplo 2b: Calcule $\int e^x . sen\, x. dx$
  - Substituindo a nova integração por partes:

$$\int e^x . sen\, x. dx = e^x . sen\, x - \cos x \,.\, e^x + \int e^x . sen\, x. dx$$

$$\int e^x . sen\, x. dx - \int e^x . sen\, x. dx = e^x . sen\, x - \cos x \,.\, e^x$$

$$0 = e^x . sen\, x - \cos x \,.\, e^x$$

Obs: inverter u por dv e dv por u.

Integração por partes (para casa)

- Exercícios: Calcule as integrais abaixo.

$a)\ \int x^2.e^x.dx$

$b)\ \int x.e^{-2x}.dx$

Integração por partes

- Para uma integral com limites de integração, a integração por partes é definida por:

$$\int_a^b f(x).g'(x).dx = \int_a^b uv'.dx = uv|_a^b - \int_a^b u'v.dx$$

$$\int_a^b f(x).g'(x).dx = \int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b v.du$$

$$v' = \frac{dv}{dx}$$
$$dv = v'.dx$$

Integração por partes

- Exemplo 1: $\int_0^4 \underbrace{x}_{u}.\underbrace{e^{-x}.dx}_{dv}$
  - 1º passo: escolher u e dv.

$$\boxed{u} = x \text{ e } \frac{dv}{dx} = \boxed{v'} = e^{-x}.dx$$

  - 2º passo: calcular a derivada de u e a integral de dv.

$$\cancel{\frac{du}{dx} = 1} \rightarrow du = dx \quad \therefore v = \int e^{-x}.dx = \boxed{-e^{-x}}$$

$$\boxed{u' = 1}$$

$u = x$
$u' = 1$
$v = -e^{-x}$
$v' = e^{-x}$

Integração por partes

- Exemplo 1: $\int_0^4 x.e^{-x}.dx$ b a
  - 3º passo: aplicar a formula da integração por partes fazendo a substituição.

$$\int_a^b uv'.dx = uv|_a^b - \int_a^b u'v.dx$$

$$\int_0^4 x.e^{-x}.dx = x.-e^{-x}|_0^4 - \int_0^4 1.-e^{-x}.dx$$

$$= -x.e^{-x}|_0^4 + \int_0^4 e^{-x}.dx$$

Integração por partes

- Exemplo 1: $\int_0^4 x.e^{-x}.dx$
  - 3º passo: aplicar a formula da integração por partes fazendo a substituição.

$$= -x.e^{-x}\Big|_0^4 + \int_0^4 e^{-x}.dx = (-4.e^{-4} - 0) + \int_0^4 e^{-x}.dx$$

$$= -4.e^{-4} - e^{-x}\Big|_0^4 = -4.e^{-4} - (e^{-4} - e^{0})$$

$$= -4.e^{-4} - e^{-4} + 1 = 1 - 5.e^{-4} \cong 0,91$$

Integração por partes

- Exemplo 2: $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}.dx = \int_1^2 \ln x.\frac{1}{x^2}.dx$
  - 1º passo: escolher u e dv.

$$u = \ln x \;\text{ e }\; dv = x^{-2}.dx$$

  - 2º passo: calcular a derivada de u e a integral de dv.

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow du = \frac{dx}{x} \quad \therefore v = \int x^{-2}.dx = -x^{-1}$$

$$u = \ln x$$
$$du = \frac{dx}{x}$$
$$v = -x^{-1}$$
$$dv = x^{-2}.dx$$

Integração por partes

- Exemplo 2: $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}.dx$
  - 3º passo: aplicar a formula da integração por partes fazendo a substituição.

$$\int_a^b f(x).g'(x).dx = \int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b v.du$$

$$\int_1^2 \ln x . x^{-2}.dx = \ln x . -x^{-1}|_1^2 - \int_1^2 -x^{-1}.\frac{dx}{x}$$

$$= -\frac{\ln x}{x}|_1^2 + \int_1^2 x^{-2}.dx$$

Integração por partes

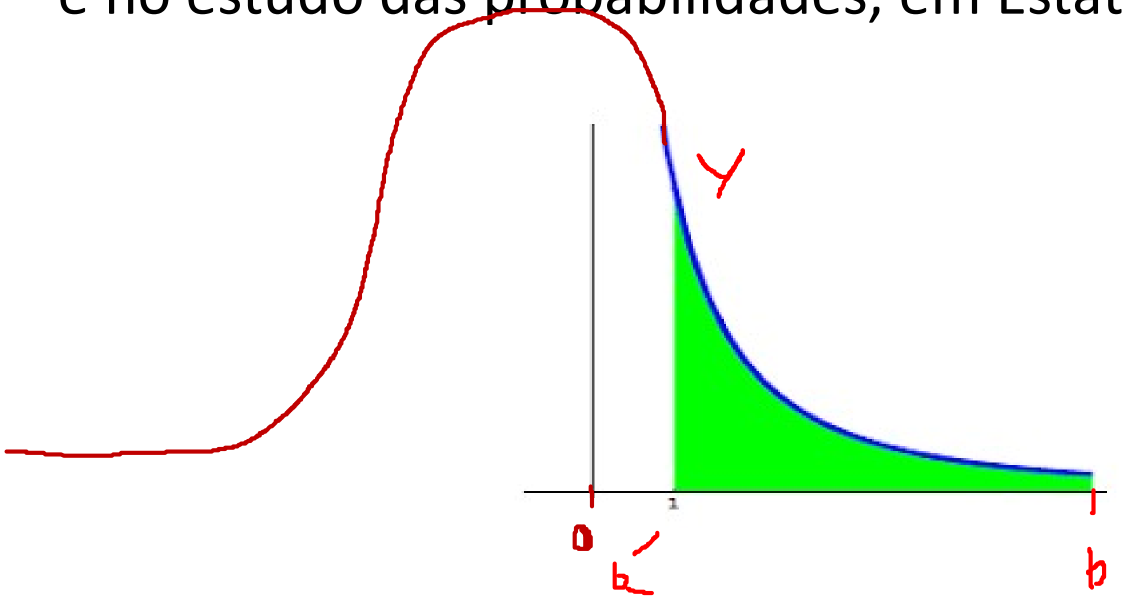
- Exemplo 2: $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}.dx$
  - 3º passo: aplicar a formula da integração por partes fazendo a substituição.

$$= -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 x^{-2}.dx = -\left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 1}{1}\right) + \int_1^2 x^{-2}.dx$$

$$= -\frac{\ln 2}{2} - \left(x^{-1}\Big|_1^2\right) = -\frac{\ln 2}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right) = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \cong 0{,}153$$

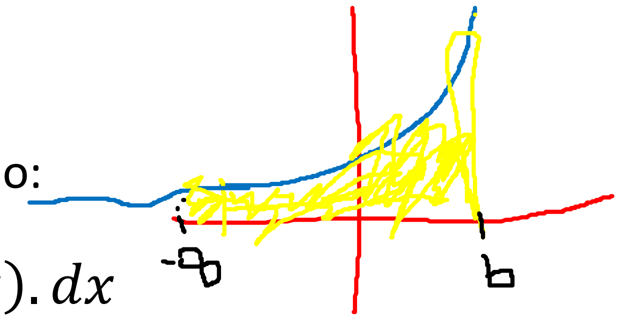
Integrais impróprias

- É quando temos os limites superiores e/ou inferiores tendendo ao $-\infty$ ou $+\infty$.
- As integrais impróprias são de grande utilidade em diversos ramos da Matemática como por exemplo, na solução de equações diferenciais ordinárias via transformadas de Laplace e no estudo das probabilidades, em Estatística.



$$\int_1^{\infty} y \cdot dx$$

Integrais impróprias



- Podemos ter 3 tipos de definições, que são:
  I. Se f é uma função integrável em $[a, +\infty)$, então:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x).dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x).dx$$

  II. Se f é uma função integrável em $(-\infty, b]$, então:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x).dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x).dx$$

  III. Se f é uma função integrável em R, então:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} f(x).dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} f(x).dx$$

Obs: Se nas definições anteriores os limites existirem, as integrais impróprias são ditas convergentes. Caso contrário são ditas divergentes.

Integrais impróprias

Exemplo 1: Calcule a área de $y = \frac{1}{x^2}$ a partir de $x \geq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

- 1º passo: verificar qual dos 3 casos será utilizado. Nesse caso parte do ponto $x = \frac{1}{2}$ até ∞, portanto ...

$$\int_a^{+\infty} f(x).\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x).\,dx$$

x^{-2}

- 2 º passo: fazer a substituição e calcular a integral.

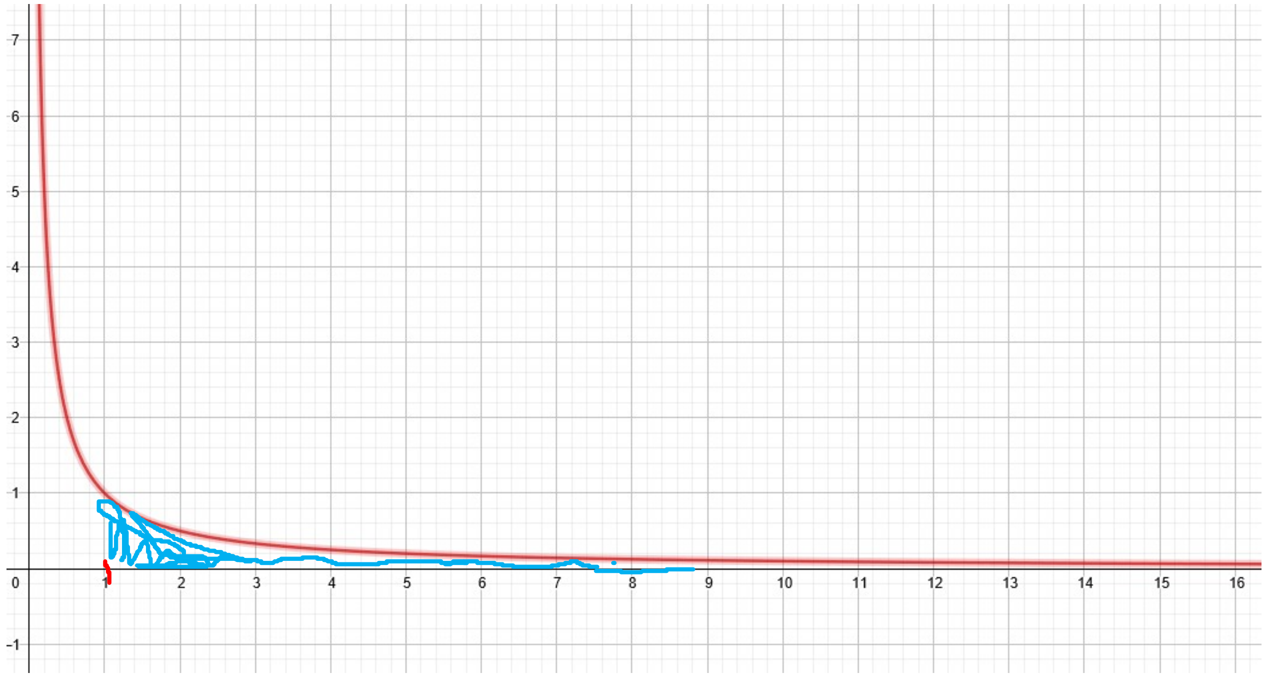
$$\acute{A}rea = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}.\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{b} \frac{1}{x^2}.\,dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{b}$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)\right] = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{b} + 2\right] = \cancel{\lim_{b \to +\infty} -\frac{1}{b}}^{\,0} + \lim_{b \to +\infty} 2 = 2$$

Integral imprópria convergiu

Integrais impróprias

Exemplo 2: é possível definir o número que equivale a área abaixo do gráfico de $y = \frac{1}{x}$ para $x \geq 1$?



Integrais impróprias

Exemplo 2: é possível definir o número que equivale a área abaixo do gráfico de $y = \frac{1}{x}$ para $x \geq 1$?

– 1º passo: verificar qual dos 3 casos será utilizado. Nesse caso parte do ponto $x = 1$ até ∞, portanto ...

$$\int_a^{+\infty} f(x).dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x).dx$$

– 2 º passo: fazer a substituição e calcular a integral.

$$Área = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}.dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x}.dx = \lim_{b \to +\infty} (\ln x)|_1^b$$

$$\lim_{b \to +\infty} \underline{(\ln b - \cancelto{0}{\ln 1})} = \lim_{b \to +\infty} \ln b = \infty$$

Integral imprópria divergiu

Integrais impróprias

Exemplo 3: é possível definir o número que equivale a área abaixo do gráfico de $y = \frac{1}{x}$ para $x \leq -1$? b

– 1º passo: verificar qual dos 3 casos será utilizado. Nesse caso parte do ponto $x = 1$ até $-\infty$, portanto ...

$$\int_{-\infty}^{b} f(x).dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x).dx$$

– 2 º passo: fazer a substituição e calcular a integral.

$$Área = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}.dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{-1} \frac{1}{x}.dx = \lim_{a \to -\infty} (\ln|x|)|_{a}^{-1}$$

$$\lim_{a \to -\infty} (\ln|-1| - \ln|a|) = \lim_{a \to -\infty} (0 - \ln|a|) = -\lim_{a \to -\infty} \ln|-\infty| =$$

$$-(+\infty) = -\infty$$

Integrais impróprias

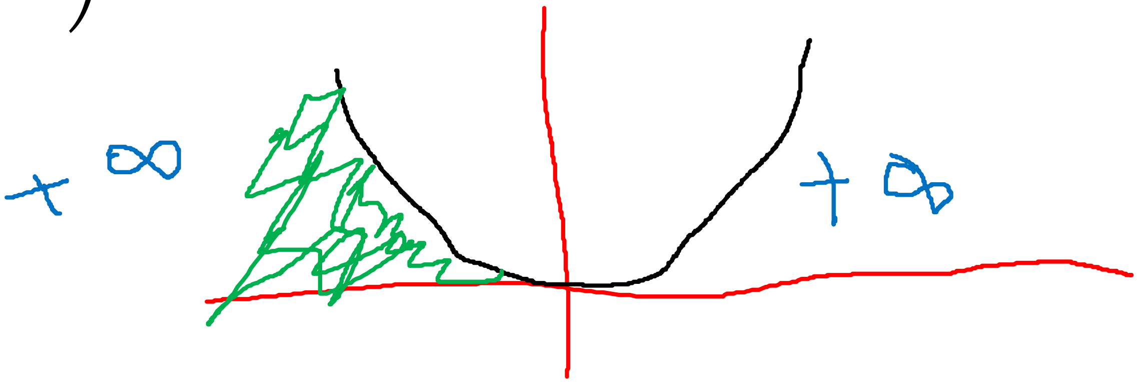
Exemplo 4: Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} x^2.dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} f(x).dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} f(x).dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} x^2.dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} x^2.dx$$

$$\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} x^2.dx = \lim_{a\to-\infty} \frac{x^3}{3} |_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty} \left(\cancel{\frac{0^3}{3}} - \frac{(a)^3}{3}\right)$$

$$= \left(0 - \frac{(-\infty)^3}{3}\right) = -(-\infty) = +\infty$$



Integrais impróprias

Exemplo 4: Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 . dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x). dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} f(x). dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} f(x). dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2. dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} x^2. dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} x^2. dx$$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} x^2. dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{x^3}{3}\Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^3}{3} - \cancel{\frac{0^3}{3}}\right) = \left(\frac{\infty^3}{3}\right)$$

$$= +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2. dx = \infty + \infty = \infty$$

Outras primitivas

I. $\int \frac{1}{x^2+1} . dx = arctg\ x + C = tg^{-1}\ x + C$

II. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . dx = arcsen\ x + C$

Exercícios (para casa)

Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$