Нелинейная регрессия

Линейное уравнение регрессии

- В общем случае линейное уравнение выглядит так, что каждый объясняющий элемент, за исключением постоянной величины, записан в виде произведения переменной и коэффициента:

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots$$

Примеры нелинейной регрессии

Следующие уравнения являются нелинейными:

$$y = \alpha + \frac{\beta}{x}$$

$$y = \alpha x^{\beta}$$

Типы нелинейности

Нелинейность может быть:

- По переменным

- По параметрам

Нелинейность по переменным

- Нелинейность по переменным можно обойти путем введения новых переменных:
- Например, если:

$$y = \alpha + \beta_1 x_1^2 + \beta_2 \sqrt{x_2}$$

- то можно ввести следующие переменные:

$$z_1 = x_1^2, z_2 = \sqrt{x_2}$$

- и получить линейное уравнение:

$$y = \alpha + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2$$

Примеры нелинейной регрессии по независимым переменным

Полиномы разных степеней

Парабола:

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \varepsilon$$

Замена:

$$x = x_1, x^2 = x_2$$

Линейный вид:

$$y = \alpha + \beta x_1 + \gamma x_2 + \varepsilon$$

Примеры нелинейной регрессии по независимым переменным

Гиперболa

Модель: $$y = \alpha + \frac{\beta}{x} + \varepsilon$$

Замена: $$t = \frac{1}{x}$$

Линейный вид: $$y = \alpha + \beta t + \varepsilon$$

Примеры нелинейной регрессии по оцениваемым параметрам

Степенная модель

Модель:

$$y = \alpha \cdot x^{\beta} \cdot \varepsilon$$

Логарифмируем обе части равенства:

$$\ln y = \ln \alpha + \beta \ln x + \ln \varepsilon$$

Примеры нелинейной регрессии по оцениваемым параметрам

Степенная модель

Замена:

$$\ln y = z, \alpha_1 = \ln \alpha,$$
$$t = \ln x, \varepsilon_1 = \ln \varepsilon$$

Линейный вид:

$$z = \alpha_1 + \beta_1 t + \varepsilon_1$$

Примеры нелинейной регрессии по оцениваемым параметрам

Обратная модель

Модель: $$y = \frac{1}{\alpha + \beta x + \varepsilon}$$

Обращаем обе части равенства:

$$\frac{1}{y} = \alpha + \beta x + \varepsilon$$

Примеры нелинейной регрессии по оцениваемым параметрам

Экспоненциальная модель

Модель: $$y = e^{\alpha+\beta x} \cdot \varepsilon$$

Логарифмируем обе части равенства:

$$\ln y = \alpha + \beta x + \ln \varepsilon$$

Примеры нелинейной регрессии по оцениваемым параметрам

Показательная модель

Модель: $$y = \alpha \cdot \beta^{x} \cdot \varepsilon$$

Логарифмируем обе части равенства:

$$\ln y = \ln \alpha + x \ln \beta + \ln \varepsilon$$

Пример

Кривая Энгеля была построена для расходов на питание в США за период с 1989 по 2013 г., однако вместо линейной функции в данном случае использовалась нелинейная

$$y = \alpha x^{\beta}$$

приведенная к линейному виду путем взятия логарифмов (здесь x – располагаемый личный доход).

Преобразованное выражение имеет вид:

$$\log \hat{y} = 1,20 + 0,55 \log x$$

Выполнив обратные преобразования, получим:

$$\hat{y} = e^{1,20} x^{0,55} = 3,32 x^{0,55}$$

Анализ результатов

Полученный результат предполагает, что эластичность спроса на продукты питания по доходу составляет 0,55, что означает, что увеличение личного располагаемого дохода на 1% приведет к увеличению расходов на питание на 0,55%. Коэффициент 3,32 не имеет простого толкования. Он помогает прогнозировать значения при заданных значениях , приводя их к единому масштабу

Корреляция для нелинейной регрессии

$$R = \sqrt{1 - \frac{\Sigma(y - \hat{y}_x)^2}{\Sigma(y - \bar{y})^2}}$$

$$0 \le R \le 1,$$

Чем ближе *R* к единице, тем теснее связь рассматриваемых признаков

Признаки качественной модели

1. ***Простота модели*** (из примерно одинаково отражающих реальность моделей, выбирается та, которая содержит меньше объясняющих переменных).
2. ***Единственность*** (для любых данных коэффициенты модели должны вычисляться однозначно).
3. ***Максимальное соответствие*** (модель тем лучше, чем больше скорректированный коэффициент детерминации).
4. ***Согласованность с теорией*** (уравнение регрессии должно соответствовать теоретическим предпосылкам).
5. ***Прогнозные качества*** (прогнозы, полученные на основе модели, должны подтверждаться реальностью).

Вопросы для самопроверки

- Какие вы знаете виды нелинейных моделей?
- Какие вы знаете нелинейные методы оценивания?
- Основные способы линеаризации моделей.