Практическое занятие 3

Решить следующие задачи:

1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, зная закон ее распределения:

X	6+к	3+к	1+к
P	0,2	0,3	0,5

2. Известны дисперсии двух независимых случайных величин: $D(X) = 4$, $D(Y) = 3$. Найти дисперсию суммы и разности этих величин.

3. Дисперсия случайной величины *X* равна 5. Найти дисперсию следующих величин: а) $X - 1$; б) $-2X$; в) $3X + 6$.

4. Случайная величина *X* принимает только два значения: +С и -С, каждое с вероятностью 0,5. Найти дисперсию этой величины.

5. Найти дисперсию случайной величины, зная закон ее распределения

X	0,1	2	10	20
P	0,4	0,2	0,15	0,25

6. Случайная величина задана законом распределения

X	2	4	8
P	0,1	0,5	0,4

Найти среднее квадратическое отклонение этой величины.

Методические указания к выполнению заданий

Случайная величина

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Пример 1. Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2,..., 100.

Пример 2. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть случайная величина. Действительно, расстояние зависит не только от установки прицела, но и от многих других причин (силы и направления ветра, температуры и т. д.), которые не могут быть полностью учтены. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (a,b).

Будем далее обозначать случайные величины прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения – соответствующими строчными буквами x, y, z. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так: x_1 , x_2, x_3.

Дискретные и непрерывные случайные величины

Вернемся к примерам, приведенным выше. В первом из них случайная величина X могла принять одно из следующих возможных значений: 0, 1, 2, ..., 100. Эти значения отделены одно от другого промежутками, в которых нет возможных значений X. Таким образом, в этом примере случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения. Во втором примере случайная величина могла принять любое из значений промежутка (a, b). Здесь нельзя отделить одно возможное значение от другого промежутком, не содержащим возможных значений случайной величины.

Уже из сказанного можно заключить о целесообразности различать случайные величины, принимающие лишь отдельные, изолированные значения, и случайные величины, возможные значения которых сплошь заполняют некоторый промежуток.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

На первый взгляд может показаться, что для задания дискретной случайной величины достаточно перечислить все ее возможные значения. В действительности это не так: случайные величины могут иметь одинаковые перечни возможных значений, а вероятности их — различные. Поэтому для задания дискретной случайной величины недостаточно перечислить все возможные ее значения, нужно еще указать их вероятности.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая — их вероятности:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, заключаем, что события $X = x_1$, $X = x_2$, …, $X = x_n$ образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий, т. е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 .$$

Пример 1. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 млн.сум и десять выигрышей по 1 млн.сум. Найти закон распределения случайной величины *X* — стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение.

Напишем искомый закон распределения:

X	50	1	0
P	0,01	0,1	0,89

Контроль: 0,01+0,1+0,89=1.

Числовые характеристики ДСВ

Математическим ожиданием ДСВ называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины X:

X	3	5	2
P	0,1	0,6	0,3

$M(X) = 3*0,1 + 5*0,6 + 2*0,3 = 3,9.$

Пример 2. Найти математическое ожидание случайной величины X:

X	2	5	8
P	0,2	0,5	0,3

$M(X) = 2*0,2 + 5*0,5 + 8*0,3 = 5,3.$

Вероятностный смысл математического ожидания таков: *математическое ожидание приближенно равно* (тем точнее, чем больше число испытаний) ***среднему арифметическому*** *наблюдаемых значений случайной величины.*

Дисперсия дискретной случайной величины

Легко указать такие случайные величины, которые имеют одинаковые математические ожидания, но различные возможные значения. Например:

X	-0,01	0,01
P	0,5	0,5

M(X) = -0,01*0,5 + 0,01*0,5 = 0.

Y	-100	100
P	0,5	0,5

M(Y) = -100*0,5 + 100*0,5 = 0.

Дисперсией ДСВ называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

Дисперсия это **оценка рассеяния** возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения.

Формула для вычисления дисперсии:

$$D(X) = M(X^2) - M[(X)]^2$$

Пример 1. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

M(X) = 2*0,1 + 3*0,6 + 5*0,3 = 3,5

X^2	4	9	25
P	0,1	0,6	0,3

$M(X^2)$ = 4*0,1 + 9*0,6 + 25*0,3 = 13,3

$D(X) = M(X^2) – [M(X)]^2 = 13,3 - (3,5)^2 = 1,05$.

Среднее квадратическое отклонение

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Пример:

Дисперсия случайной величины равна D(X) = 1,05. Найти среднее квадратическое отклонение.

Решение:

D(X) = 1,05

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1{,}05} = 1{,}02$$

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Так как среднее квадратическое отклонение (СКО) равно квадратному корню из дисперсии, то размерность СКО совпадает с размерностью *X*. Поэтому в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратическое отклонение, а не дисперсию.