Глава 5. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

5.1. Понятие производственной функции одной переменной

Производственная функция – это функция, независимая переменная которой принимает значения объемов затрачиваемого или используемого ресурса (фактора производства), а зависимая переменная – значения объемов выпускаемой продукции

$$y = f(x) \qquad (1)$$

В формуле (1) $x(x \geq 0)$ и $y(y \geq 0)$ - числовые величины, т.е. $y = f(x)$ есть функция одной переменной x. В связи с этим производственная функция (П.Ф.) f называется одноресурсной или однофакторной ПФ, ее область определения – множество неотрицательных действительных чисел (т.е. $x \geq 0$). Запись $y = f(x)$ означает, что если ресурс затрачивается или используется в количестве x единиц, то продукция выпускается в количестве $y = f(x)$ единиц. Символ f (знак функции) – является характеристикой производной системы, преобразующей ресурс в выпуск. Символ f связывает между собой независимую переменную x с зависимой переменной y. В микроэкономической теории принято считать, что y – это максимально возможный объем выпускаемой продукции, если ресурс затрачивается или используется в количестве x единиц. В макроэкономике такое понимание не совсем корректно: возможно, при другом распределении ресурсов между структурными единицами экономики выпуск мог бы быть и большим. В этом случае ПФ – это статистически устойчивая связь между затратами ресурса и выпуском. Более правильной является символика $y = f(x, a)$, где a –вектор параметров ПФ.

Пример 1. Возьмем ПФ в виде $f(x) = ax^6$, где x – величина затрачиваемого ресурса (например, рабочего времени), $f(x)$ - объем выпускаемой продукции (например, число готовых к отправке холодильников). Величины *a* и *b* – параметры ПФ *f*. Здесь *a* и *b* – положительные числа и число $b \leq 1$, вектор параметров есть двумерный вектор (*a, b*).

График производной функции $f(x) = ax^6$ изображен на рис. 5.1. На графике видно, что с ростом величины затрачиваемого ресурса *x* объем

выпуска *y* растет, однако при этом каждая дополнительная единица ресурса дает все меньший прирост объема *y* выпускаемой продукции. Отмеченное обстоятельство (рост объема *y* и уменьшение прироста объема *y* с ростом величины *x*) отражает фундаментальное положение экономической теории (хорошо подтверждаемое практикой), называемое законом убывающей эффективности. ПФ $f(x) = ax^6$ является типичным представителем широкого класса однофакторных ПФ.

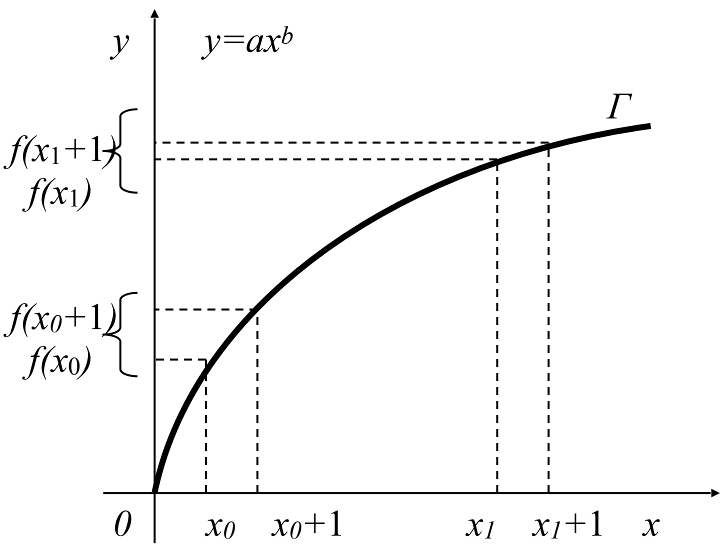


Рис. 5.1.

ПФ могут иметь разные области использования. Сначала остановимся на микроэкономическом уровне. ПФ $f(x) = ax^6$, рассмотренная выше, может быть использована для описания взаимосвязи между величиной затрачиваемого или используемого ресурса *x* в течении года на отдельном предприятии (фирме) и годовым выпуском продукции *y* этого предприятия (фирмы). В роли производственной системы здесь выступает отдельное предприятие (фирма) – имеем микроэкономическую ПФ (МИПФ). На макроэкономическом уровне в роли производственной системы может выступать также отрасль, межотраслевой производственный комплекс. МИПФ строятся и используются в основном для решения задач анализа и планирования, а также задач прогнозирования.

ПФ может быть использована для описания взаимосвязи между годовыми затратами труда в масштабе региона или страны в целом и годовым конечным выпуском продукции (или доходом) этого региона или страны в целом. Здесь в роли производственной системы выступает регион или страна в целом (точнее хозяйственная система региона или страны) – имеем макроэкономический уровень и макроэкономическую ПФ (МАПФ). МАПФ строятся и активно используются для решения всех трех типов задач (анализа, планирования и прогнозирования).

На микроэкономическом уровне затраты и выпуск могут быть измерены в человеко-часах (объем человеко-часов -натуральный показатель) или в у.е. выплаченной заработной платы (ее величина – стоимостной показатель); выпуск продукции может быть представлен в штуках или в других натуральных единицах (тоннах, метрах и т.п.) или в виде своей стоимости.

На макроэкономическом уровне затраты и выпуск измеряются, как правило, в стоимостных показателях и представляют собой стоимостные (ценностные) агрегаты, т.е. суммарные величины произведений объемов затрачиваемых (или используемых) ресурсов и выпускаемых продуктов на их цены.

Производственная функция нескольких переменных – это функция, независимые переменные $x_1,\ldots,x_n$ которых принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (число переменных n равно числу ресурсов), а значение функции имеет смысл величин объемов выпуска:

$$y = f(x) = f(x_1,\ldots,x_n) \qquad (2)$$

В формуле (2) y ($y \geq 0$) – скалярная, x – векторная величина, $x_1,\ldots,x_n$ координаты вектора x, т.е. $f(x_1,\ldots,x_n)$ есть числовая функция нескольких (многих) переменных $x_1,...,x_n$. В связи с этим ПФ $f(x_1,...,x_n)$ называют многоресурсной или многофакторной ПФ. Более правильной является такая символика $f(x_1,...,x_n,a)$, где *a* – вектор параметров ПФ.

ПФ $y = f(x_1, x_2)$ называется статической, если ее параметры и ее характеристика *f* не зависят от времени *t*, хотя объемы ресурсов и объем выпуска могут зависеть от времени *t*, т.е. могут иметь представление в виде временных рядов:

$$x_1(0), x_1(1),..., x_1(T); \quad x_2(0), x_2(1),..., x_2(T); \quad y(0), y(1),..., y(T); y(t) = f(x_1(t), x_2(t)).$$

Здесь *t* – номер года, $t = 0, 1, ..., T,\ t = 0$ - базовый год временного промежутка, охватывающего годы 1, 2, …*T*.

Пример 2. Для моделирования отдельного региона или страны в целом (т.е. для решения задач на микроэкономическом, а также и на макроэкономическом уровне) часто используется ПФ вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, где a_0, a_1, a_2 параметры ПФ. Это положительные постоянные (часто a_1 и a_2 таковы, что $a_1 + a_2 = 1$). ПФ только что приведенного вида называется ПФ Кобба-Дугласа (ПФКД) по имени двух американских экономистов, предложивших ее использовать в 1929 г. ПФКД активно применяется для решения разнообразных теоретических и прикладных задач благодаря своей структурной простоте. ПФКД принадлежит к классу так называемых *мультипликативных* ПФ (МПФ). В приложениях ПФКД $x_1=K$ равно объему используемого основного капитала (объем используемых основных фондов – в отечественной терминологии), $x_2=L$ – затратам живого труда, тогда ПФКД приобретает вид, часто используемый в литературе: $Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$.

Если число работников и их квалификация остаются неизменными, а число обслуживаемых ими станков (которое уже достаточно велико) увеличивается, например, в два раза, то это естественно не приведет к двойному росту объема выпуска. Отметим, что если $a_1 + a_2 < 1$, то графиком ПФКД является поверхность, которая напоминает выпуклую вверх «горку», крутизна которой падает, если точка (x_1, x_2) перемещается на «северо-восток» по плоскости Ox_1x_2.

Пример 3. Линейная ПФ (ЛПФ) имеет вид: $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ (двухфакторная) и $y = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n$ (многофакторная). ЛПФ принадлежит к классу так называемых аддитивных ПФ (АПФ). Переход от мультипликативной ЛПФ к аддитивной осуществляется с помощью операции логарифмирования. Для двухфакторной мультипликативной ПФ

$y = a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2}$ этот переход имеет вид: $\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2$.

Полагая $\ln y = w, \quad \ln x_1 = v_1 \quad u \quad \ln x_2 = v_2$ получаем аддитивную ПФ $w = \ln a_0 + a_1v_1 + a_2v_2$.

Выполняя обратный переход, из аддитивной ПФ получим мультипликативную ПФ.

Если сумма показателей степеней в ПФ Кобба-Дугласа $y = a_0K^{a_1}L^{a_2}$ равна единице, то ее можно записать в несколько другой форме:

$$\frac{Y}{L} = \frac{a_0K^{a_1}L^{a_1}}{L} = \frac{a_0K^{a_1}}{L^{1-a_1}} = \frac{a_0K^{a_1}}{L^{a_1}} = a_0\left[\frac{K}{L}\right]^{a_1}, \ m.e. \ \frac{Y}{L} = a_0\left[\frac{K}{L}\right]^{a_1}$$

Дроби $\frac{Y}{L} = z$ и $\frac{K}{L} = k$ называются соответственно производительностью труда и капиталовооруженностью труда. Используя новые символы, получим $z = a_0k^{a_1}$, т.е. из двухфакторной ПФКД получим формально однофакторную ПФКД. В связи с тем, что $0 < a < 1$, из последней формулы следует что производительность труда z растет медленнее его капиталовооруженности. Однако этот вывод справедлив для случая статической ПФКД в рамках существующих технологии и ресурсов.

5.2. Формальные свойства производственных функций

Производственная функция $f(x_1, x_2)$ как формальная конструкция определена в неотрицательном октанте двумерной плоскости, т.е. определена при $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. ПФ должна удовлетворять ряду (для каждой конкретной ПФ - своему) свойств:

1. $f(0,0) = 0;$

1". $f(0,x_2) = f(x_1, 0) = 0;$

2.

$$x(1) \geq x(0)\ \left(x(1) \neq x(0)\right) \Rightarrow f\left(x(1)\right) > f\left(x(k) = \left(x_1(k), x_2(k), k = 0,1\right)\right)$$

2". $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} > 0\ (i = 1,2),\ x = (x_1, x_2);$

3. $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1{}^2} \leq 0 \quad (i = 1,2), x = (x_1, x_2)$;

3". $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \geq 0\ x = (x_1, x_2);$

4. $f(tx_1, tx_2) = t^p f(x_1, x_2).$

Свойство 1 означает, что без ресурсов нет выпуска. Свойство 1" означает, что при отсутствии хотя бы одного из ресурсов нет выпуска.

Свойство 2 означает, что с ростом затрат хотя бы одного ресурса объем выпуска растет. Свойство 2" (первая частная производная ПФ $\left[\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right]$ положительна) означает, что с ростом затрат одного ресурса при неизменном количестве другого ресурса объем выпуска растет. Упорядоченная пара (x_1, x_2)

чисел x_1 и x_2 для краткости здесь и далее обозначается символом x, т.е. $x = (x_1, x_2)$.

Свойство 3 (вторая частная производная ПФ $\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right]$ неположительная) означает, что с ростом затрат одного (*i*-го) ресурса при неизменном количестве другого ресурса величина прироста выпуска на каждую дополнительную единицу *i*-го ресурса не растет (закон убывающей эффективности). Свойство 3" означает, что при росте одного ресурса предельная эффективность другого ресурса возрастает. Если выполнены условия 3-3", то график ПФ есть поверхность, расположенная в неотрицательном ортанте $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y \geq 0$ *x1* трехмерного пространства Ox_1x_2y выпуклая вверх. Вообще геометрический образ ПФ должен прежде всего ассоциироваться с выпуклой горкой, крутизна которой убывает, если точка (x_1, x_2) уходит в плоскости Ox_1x_2 на «северо-восток».

Свойство 4 означает, что ПФ является однородной функцией (ОФ) степени $p > 0$. При $p > 1$ с ростом масштаба производства в t раз (число $t > 1$), т.е. с переходом от вектора x к вектору tx, объем выпуска возрастает в t^p $(> t)$ раз, т.е. имеем рост эффективности производства от роста масштаба производства. При $p < 1$ имеем падение эффективности производства от роста масштаба производства. При $p=1$ имеем постоянную эффективность производства при росте его масштаба (или

имеем независимость удельного выпуска от масштаба производства – в английской терминологии constant returns to scale).

Для ПФКД $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} (a_1 + a_2 = 1)$ свойства 1-4 выполняются.

Для ЛПФ $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} (a_0 > 0, a_1 > 0,\ a_2 > 0)$ свойства 1 и 1" (при $a_0=0$) и свойство 4 не выполняются.

Множество (линия) lq уровня $q = f(x_1, x_2)$ ($0<q$ – действительное число) ПФ $y = f(x_1, x_2)$ называется *изоквантой* ПФ. Иными словами, линия уровня q - это множество точек, в котором ПФ постоянна и равна q.

Различные наборы (v_1, v_2) и (w_1, w_2) затрачиваемых (используемых) ресурсов, принадлежащие одной и той же изокванте / (т.е. $q = f(v_1, v_2) = f(w_1, w_2)$), дают один и тот же объем выпуска q. Изокванта есть линия, расположенная в неотрицательном ортанте $\left\{ (x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \right\}$ двумерной плоскости Ox_1x_2.

5.3. Предельные (маржинальные) и средние значения производственной функции

Пусть $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ - ПФ. Дробь $\dfrac{f(x)}{x_i}$ $(i = 1,2)$ называется средней производительностью i-го ресурса (фактора производства) (СПФ) или средним выпуском по i-му ресурсу (фактору производства): $A_i = \dfrac{f(x)}{x_i}$.

Напомним, что в случае двухфакторной ПФКД $Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ - для средних производительностей $\dfrac{K}{Y}$ и $\dfrac{L}{Y}$ основного капитала и труда были использованы соответственно термины капиталоотдача и производительность труда. Эти термины используют и применительно к любым двухфакторным ПФ, у которых $x_1=K$ и $x_2=L$.

Пусть $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ - ПФ.

Ее первая частная производная $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ $(i = 1,2)$ называется предельной (маржинальной) производительностью i-го ресурса (фактора производства) (ППФ) или предельным выпуском по i-му ресурсу (фактору производства):

$M_i = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$. Обозначим символами Δx_1 и

$$\Delta_i(f(x))(\Delta_1 f(x_1, x_2) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2));$$

$\Delta f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)$ соответственно, приращение переменной *x*, и соответствующее ей частное приращение ПФ $f(x)$. При малых Δx_i, имеем приближенное равенство $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} (i = 1,2)$.

Следовательно, ППФ (приближенно) показывает, на сколько единиц увеличится объем выпуска *y*, если объем затрат *x* *i*-го ресурса вырастает на одну (достаточно малую) единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса. Здесь предельную величину $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}$, (т.е. ППФ) целесообразно интерпретировать, используя близкое к ней отношение малых конечных величин, т.е. $\Delta f(x)$ и Δx_i.

Отмеченное обстоятельство является ключевым для понимания экономического смысла ППФ $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$. С другими предельными величинами следует поступать аналогичным образом.

Задача 1. Для ПФКД $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ найти в явном виде A_1, A_2, M_1 и M_2.

Решение задачи. Имеем:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2};\ A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{f(x)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1}$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a^1 A_1;\ M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2 A_2;$$

$$\frac{M_1}{A_1} = a_1 \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1; \quad \frac{M_2}{A_2} = a_2 \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$

Для ПФ $y = f(x)$ (не только для ПФКД) неравенства $M_1 \leq A_1$ (i = 1,2) (т.е. предельная производительность *i*-го ресурса не больше средней производительности этого ресурса) обычно выполняются.

Задача 2. Для ЛПФ $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ $\left(a_0 > 0, a_1 > 0,\ a_2 > 0\right)$ найти в явном виде A_1, A_2, M_1 и M_2.

Решение задачи. Имеем:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = \frac{a_0}{x_1} + a_1 + a_2\frac{x_2}{x_1};$$

$$A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{f(x)}{x_2} = \frac{a_0}{x_2} + a_1\frac{x_1}{x_2} + a_2$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_1;\ M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2;$$

$$\frac{M_1}{A_1} \leq 1 \Rightarrow M_1 \leq A_1;\ \frac{M_2}{A_2} \leq 1 \Rightarrow M_2 \leq A_2.$$

Пусть $y = f(x)$ - ПФ, $x = \left(x_1, x_2\right)$. Отношение предельной производительности M_i, *i*-го ресурса к его средней производительности A называется (частной) эластичностью выпуска по *i*-му ресурсу (по фактору производства) (ЭВФ):

$$E_i = \frac{M_1}{A_1} = \frac{x_1}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\ (i = 1,2).$$

Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ называется эластичностью производства. Поскольку при малом приращении Δx_i имеем приближенное равенство

$$E_i = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right] / \left[\frac{f(x)}{x_1}\right] \approx \left[\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}\right] / \left[\frac{\Delta x_i}{x_i}\right]$$

(крайнее правое выражение есть отношение двух относительных величин $\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}$ и $\frac{\Delta x_i}{x_i}$ постольку E_i (приближенно) показывает, на сколько процентов увеличится выпуск y, если затраты i-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса. Пояснение выражения E_i, содержащего предельную величину $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, с помощью выражения, содержащего конечное приближение $\frac{\Delta f(x)}{f(x)}$

предельной величины, является ключевым в понимании экономической сути частной эластичности выпуска по i-му ресурсу.

Задача 3. Выписать в явном виде для ПФКД выражения для E_1, E_2 *и* E_x

Решение задачи. Имеем:

$$E_1 = a_1,\ E_2 = a_2, E_x = E_1 + E_2 = a_1 + a_2.$$

Задача 4. Для ЛПФ $y = a_1x_1 + a_2x_2 \ \left(a_0 = 0\right)$ выражения для E_1, E_2 *и* E_x.

Решение задачи. Имеем:

$$E_1 = \frac{x_1}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{a_1x_1}{a_1x_1 + a_2x_2}; \quad E_2 = \frac{x_2}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \frac{a_2x_2}{a_1x_1 + a_2x_2};$$

$$E_x = E_1 + E_2 = 1$$

Пусть $y = f(x)$ - ПФ, $x = (x_1, x_2)$. Предельной нормой замены (замещения) i-го ресурса (фактора производства) j-м (аббревиатура: ПНЗФ и символика: R_{ij}*)* называется выражение:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} \quad (i, j = 1{,}2) \qquad (3)$$

при постоянной y.

Обратим внимание на то, что i - номер заменяемого ресурса, j -номер замещающего ресурса. Используется также термин: предельная технологическая норма замены (замещения) i-го ресурса (фактора производства) j -м ресурсом (фактором производства). Приведем более краткий (но менее точный) термин: (предельная) норма замены (замещения) ресурсов.

Пусть выпуск y является постоянным (т.е. все наборы затрачиваемых ресурсов расположены на одной изокванте), тогда первый полный дифференциал dy ПФ $y=f(x)$ тождественно равен нулю:

$$0 = dy = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} dx_2$$

(здесь dx_1, dx_2 - дифференциалы переменных x_1, x_2), откуда, выражая первый дифференциал dx_j, получим ($i \neq j$)

$$dx_j = -\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}} dx_i \quad (i, j = 1,2) \tag{4}$$

откуда, поделив на dx_i, получим

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}} \quad (i, j = 1,2) \tag{5}$$

На основании (3), (4) и (5) имеем:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}} > 0 \ (i \neq j, i = 1,2) \tag{6}$$

Непосредственно проверяется, что для двухфакторной ПФ справедливо равенство:

$R_{12} = \frac{E_1}{E_2}\frac{x_2}{x_1}$т.е. (предельная) норма замены первого ресурса вторым равна отношению эластичностей выпуска по первому и второму ресурсам, умноженному на отношение объема второго ресурса к объему первого ресурса.

Если $x_1 = K, x_2 = L$, то отношение — $\frac{x_1}{x_2} = \frac{K}{L}$ называется капитало-вооруженностью труда. В этом случае (предельная) норма замены основного капитала трудом равна отношению эластичностей выпуска по основному капиталу и труду, поделенному на капитал вооруженность труда.

Пусть ПФ - двухфакторная. При постоянном выпуске y и малых приращениях Δx_1 и Δx_2, имеем приближенное равенство

$$R_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1} \approx -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \qquad (7)$$

Задача 5. Для ПФКД $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ выписать в явном виде выражения R_{12} и R_{21}. Решение задачи. Имеем:

$$R_{12} = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right] / \left[\frac{\partial y}{\partial x_2}\right] = \frac{a_1}{a_2}; \quad R_{21} = \left[\frac{\partial y}{\partial x_2}\right] / \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right] = \frac{a_2}{a_1}\frac{x_1}{x_2}.$$

Задача 6. Для ПФ $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$, выписать в явном виде выражения R_{12} и R_{21}.

Решение задачи. Имеем:

$$R_{12} = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right] / \left[\frac{\partial y}{\partial x_2}\right] = \frac{a_1}{a_2}; \quad R_{21} = \left[\frac{\partial y}{\partial x_2}\right] / \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right] = \frac{a_2}{a_1}.$$

5.4. Анализ спроса и предложения

Целью эконометрических моделей является изучение основных зависимостей процесса воспроизводства. Это означает, что отдельные проблемы, связанные со спросом и предложением, могут быть исследованы с помощью этих моделей. Предложение определяется сферой материального производства и может быть изучено на основе производственных функций.

Спрос, напротив, определяется в сфере конечного потребления и зависит от величины дохода, уровня цен и т.п.

Функция спроса выражает зависимость спроса от экономических (доходы, цены) и внеэкономических (потребительские привычки) факторов. Функция спроса могут быть *макроэкономическими,* если они охватывают всю сферу потребления, и *микроэкономическими,* описывающими спрос индивидуальных потребителей. При разработке функций учитываются демографические и социальные аспекты.

Впервые определение функции спроса дал французский экономист А.Курно. Его функция спроса D показывала зависимость спроса от цены *p,* т.е.

$$D = f(p)\,. \qquad (5.4.1)$$

Функция убывает с ростом p (цены). Аналогично была определена и функция предложения

$$S = \varphi(p). \qquad (5.4.2)$$

Общий для обеих функций фактор p оказывает в них противоположное влияние, и кривые предложения и спроса движутся в противоположных направлениях. Точка их пересечения определяет $\bar{p}$, называемое рыночной или равновесной ценой (рис. 5.1).

Мы анализируем его, чтобы найти ответ на вопрос, является ли распределение ресурсов эффективным в условиях рыночного равновесия и достигает ли общая выгода своего максимального значения. Когда на рынке существует равновесие, равновесная цена определяет продавцов и покупателей, которые участвуют в рынке. На рынке товар покупается такими покупателями, если они оценивают товар выше его рыночной цены (отрезок, представленный сечением SA на кривой спроса); люди, которые оценивают продукт ниже его цены (доля, представленная сечением AE), отказываются покупать его. Точно так же производители, чьи затраты ниже, чем стоимость продукта (представленная сечением DA), производят и продают продукт;

фирмы, издержки которых выше рыночной цены (представленной сечением АГ), отказываются его производить.

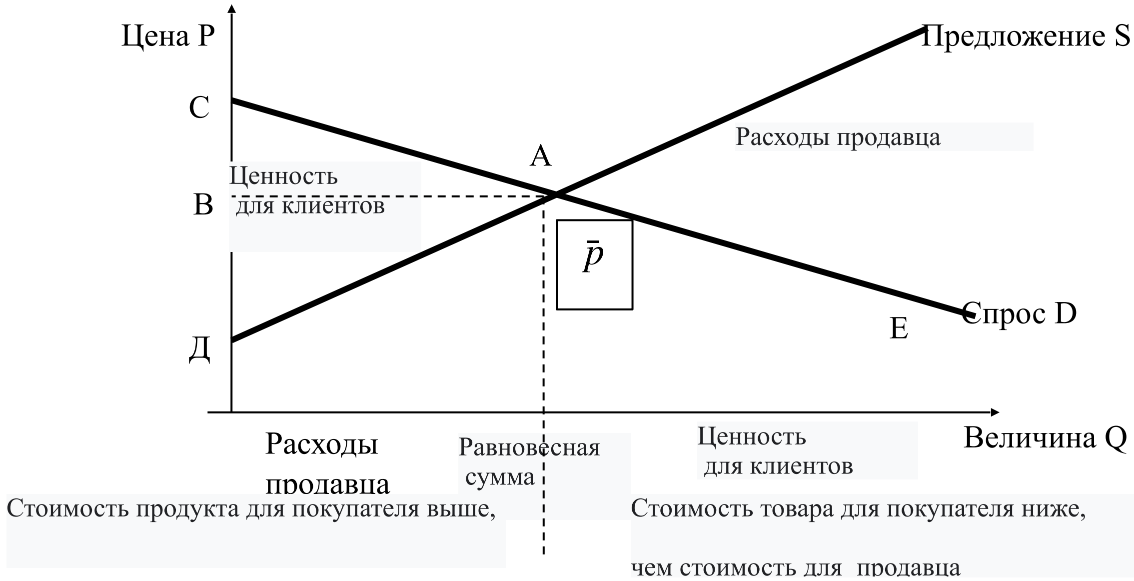


рис. 5.1.

Часто товары классифицируют по степени реакции спроса на них в зависимости от изменения цен. В этом случае говорят, что товары обладают более высокой или низкой *эластичностью* спроса.

Существуют факторы, а также их комбинации, относительно которых имеет смысл изучать эластичность спроса. Чаще всего рассматривается эластичность спроса по следующим трем факторам:

а) эластичность спроса по цене (обычно с отрицательным знаком);

б) эластичность спроса по доходу (обычно с положительным знаком);

в) перекрестная эластичность. Эта эластичность спроса данного вида товаров в зависимости от цены другого вида товаров (может быть как положительной, так и отрицательной).

Рассмотрим на следующем примере определение эластичности спроса. Предположим, что цена товара, равная в начальный момент времени $p = 10$, выросла на 2 денежные единицы, т.е. $\Delta p = 2$, относительное изменение цены тогда составит:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{2}{10} \cdot 100 = 20\% .$$

Пусть цене $p = 10$ соответствовала величина спроса $d = 100$, и пусть при новой цене $p_1 = p + \Delta p = 12$ спрос определяется величиной $d_1 = 90$. Тогда $\Delta d = d_1 - d = -10$, а относительное изменение:

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{-10}{100} \cdot 100 = -\,10\%\,.$$

Коэффициент эластичность, вычисляемый как отношение относительных величин приростов спроса и цены, составит:

$$E_{d.p} = \frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta p}{p} = \frac{-10}{100} : \frac{2}{10} = -\,\frac{1}{2}\,. \quad (5.4.3)$$

Таким образом, коэффициент эластичности спроса по цене показывает, что при изменении цены на 1% величина спроса изменится на 0,5%.

Аналогично можно определить эластичность предложения по цене:

$$E_{S.p} = \frac{\Delta S}{S} : \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta S p}{\Delta p S}. \quad (5.4.5)$$

В реальной экономике вид зависимостей меняется со временем вследствие непрерывной модификации структуры спроса, производства, влияния социальных и экономических факторов и т.д. Это означает, что точки равновесия кривых спроса, предложения и доходов непрерывно сдвигаются. В

связи с этим возникает необходимость введения фактора времени в функции предложения и спроса:

$$D_t = f(p_t); \quad (5.4.6)$$

$$S_t = \phi(p_{t-1})\,. \quad (5.4.7)$$

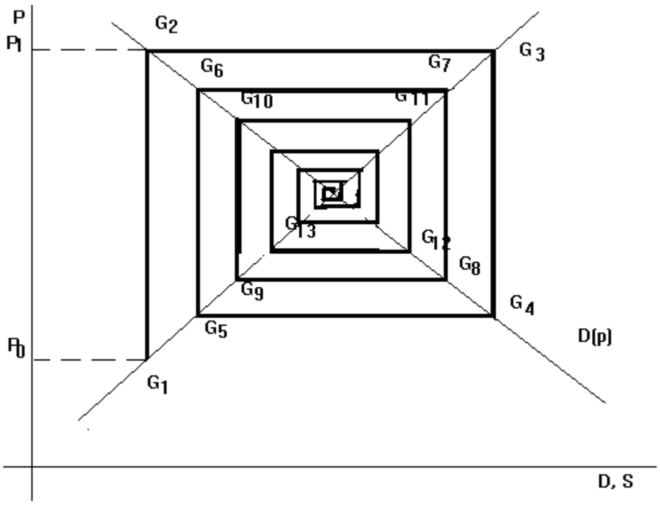


рис. 5.2

Данный вид модели называется *паутинообразной* (рис. 5.2).

В экономической теории важным является понятие равновесия, то есть такого состояния объекта, которое он сохраняет при отсутствии внешних воздействий. Задачи экономической динамики включают как описание процессов выхода к состоянию равновесия, так и процессов трансформации самого этого состояния под воздействием внешних сил.

Эта модель позволяет исследовать устойчивость цен и объемов товаров на рынке, описываемом традиционными кривыми спроса и предложения при наличии запаздывания во времени (лага).

Пусть производители (например, фермерская хозяйства) определяют предложение товара в текущем периоде на основе цен, установившихся в предшествующем периоде, то есть $Q^s(t) = S_t(p_{t-1})$.

Таким образом, в функцию предложения вклинивается временной лаг продолжительностью в одну единицу времени. Действительно, решение об объеме производства принимается с учетом текущих цен, производственный цикл имеет определенную продолжительность, и соответствующее этому решению предложение появится на рынке по окончании данного цикла (как показана на рис.5.2.).

Кривая спроса характеризует зависимость объема спроса на товар от цены товара в данном периоде, то есть $Q^D(t) = D_1(p_1)$. Таким образом, динамику цены можно описать системой уравнений

$$\left\{ Q_t^s = S_t(p_{t-1}), \qquad Q_t^D = D_t(p_t), \qquad Q_t^d = Q_t^S \right\}$$

или одним уравнением

$$D_t(p_t) = S_t(p_{t-1}) \qquad (5.4.8)$$

Из этого уравнения можно найти значение цены p^t в текущий момент времени по известному значению p_{t-1} в предшествующий момент времени. Схема решения очень проста:

$$Q_0 \to p_0 = D^{-1}(Q_0) \to Q_1 = S(p_0) \to p_1 = D^{-1}(Q_1) \to Q_2 = S(p_1) \to \ldots$$

(где D^{-1} – обратная функция спроса).

В качестве частного случая рассмотрим паутинообразную модель, в которой функции спроса и предложения линейны:

$$S(p) = A + \mathrm{B}p_{t-1}, \quad D(p) = C - Ep_t, S(p) = D(p). \qquad (5.4.9)$$

Здесь $\hat{A} > 0$, так как функция предложения возрастающая; $\mathring{A} > 0$, так как функция спроса убывающая; $C > A > 0$, то есть $D(0) > C(0) > 0$ (считаем, что при нулевой цене спрос превышает предложение). Уравнение, описывающее динамику такой системы, имеет вид

$$D(p_t) = S(p_{t-1}), или C - Ep_t = A + Bp_{t-1}.$$

Найдем сначала равновесную цену $p*$ и равновесный объем производства $Q*$. Они должны удовлетворять уравнениям

$$Q* = C - Ep* = A + Bp*,$$

Откуда

$$p* = \frac{C - A}{B + E} и Q* = \frac{BC + AE}{B + E}.$$

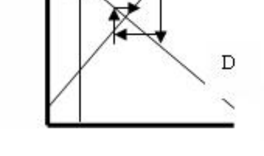


Рис.5.3. *а*

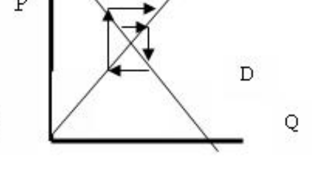


Рис.5.3.б

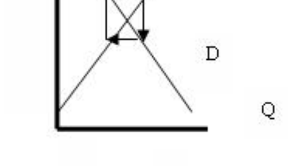


Рис.5.3.в

Далее необходимо исследовать поведения цен и объемов производства в том случае, если начальная точка не совпадает с равновесной точкой. Вначале эту задачу можно решить графически, получив рисунок типа «паутины», подтверждающий ее название. Задав первое первоначальное количество товара и цену, не совпадающие с точкой равновесия, будем последовательно наносить точки в соответствии с процедурой расчета по модели, соединяя их горизонтальными или вертикальными прямыми линиями. Из графического анализа можно получить следующие результаты. Если кривая предложения наклонена круче, чем кривая спроса, то равновесие на таком рынке будет устойчивым (см. рис.5.3.а). Если кривая спроса наклонена круче, чем кривая предложения, то равновесие на рынке будет неустойчивым (см. рис.5.3. б). Наконец, при равном наклоне кривых спроса и предложения цены на рынке будут испытывать регулярные колебания с постоянной амплитудой см. рис.5.3.в). Теперь перейдем к формальному анализу модели. Выражая p_t через p_{t-1}, имеем следующее рекуррентное соотношение $p_t = \dfrac{C-A}{E} - \dfrac{B}{E}$. Последовательно применяя это соотношение, находим

$$p_1 = \frac{C-A}{E} - \frac{B}{E} \cdot p_0; p_2 = \frac{C-A}{E} - \frac{B}{E} \cdot \left[\frac{C-A}{E} - \frac{B}{E}\right] \cdot p_0$$

Или в общем виде

$$p_1 = \frac{C-A}{E} \cdot \left[1 - \frac{B}{E} + \left[\frac{B}{E}\right]^2 + \ldots + (-1)^{t-1}\left[\frac{B}{E}\right]^{t-1}\right] + (-1)^t\left[\frac{B}{E}\right]^t \cdot p_0$$

Выражение в скобках есть сумма геометрической прогрессии:

$$S_n = a_1 \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Для паутинообразной модели $q = -\frac{B}{E}$, $a_1 = \frac{C-A}{E}$. Отсюда получаем выражение для цены p_t в произвольный момент времени *t*.

$$p_t = \frac{C-A}{E} \cdot \frac{1-(-1)^t\left[\frac{B}{E}\right]^t}{1+\frac{B}{E}} + (-1)^t\left[\frac{B}{E}\right]^t \cdot p_{0.} \qquad (10)$$

(5.4.10)

Очевидно при $\frac{B}{E} < 1 \left[\frac{B}{E}\right]^t \to 0$ и $p_t \to \frac{C-A}{E} = p^*$, то есть при более крутом наклоне кривой предложения, чем кривой спроса, равновесие является устойчивым. Если $\frac{B}{E} > 1$, то есть более крутой является кривая спроса, то $\left[\frac{B}{E}\right]^t \to \infty$ и процесс расходится (равновесие неустойчиво). При $\frac{B}{E} = 1$, то есть при B=E, значение p_t чередуется вокруг равновесного значения.

Итак, определяющим моментом для устойчивости системы является менее сильная, сглаживающая реакция на изменения цены той функции, которая имеет временной лаг (здесь – функция предложения).

В реальности при $\frac{B}{E} > 1$ бесконечно возрастающих колебаний, конечно, не будет, так как при больших отклонениях от равновесия линейное приближение становится нереалистичным. В более реалистической нелинейной модели устанавливаются нелинейные колебания большой, но конечной амплитуды, которые являются прообразом экономических циклов подъемов и спада производства.

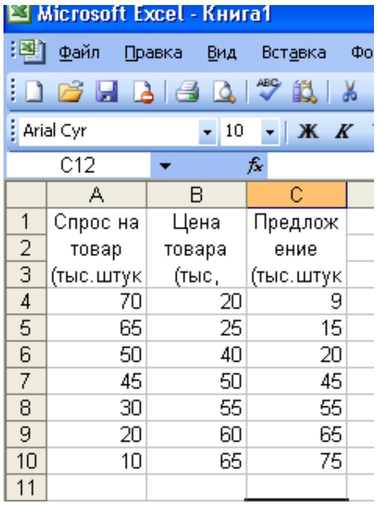
Самостоятельно предлагается рассмотреть следующую задачу: предположим, что временной лаг, равный 1, присутствует не в функции предложения, а в функции спроса:

$$S_t = A + B \cdot p; D_t = C - E \cdot p_{t-1}; S_t = D_t.$$

Каким станет условие сходимости к равновесной точке? Изобразите этот процесс графически.

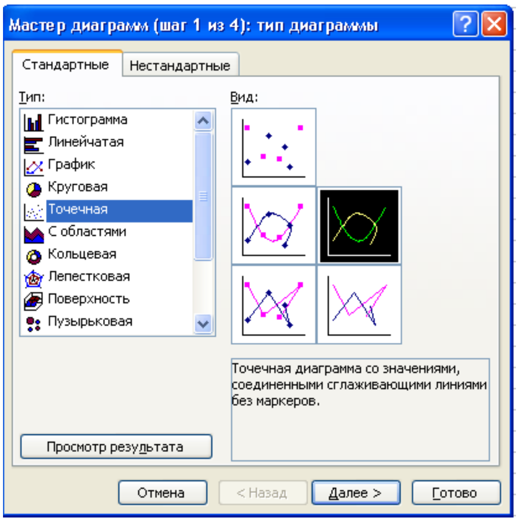
Методические указание для построения графика спроса и предложения в MS Excel

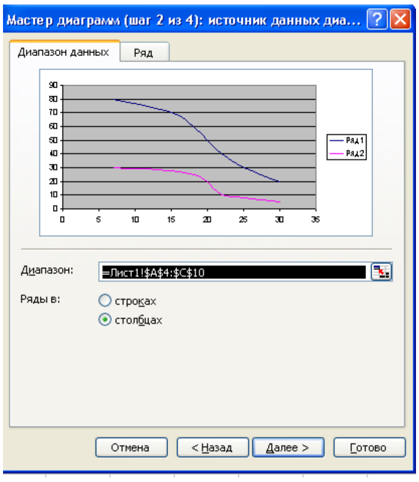
Последовательность построения графика спроса и предложения покажем в программе MS Excel:



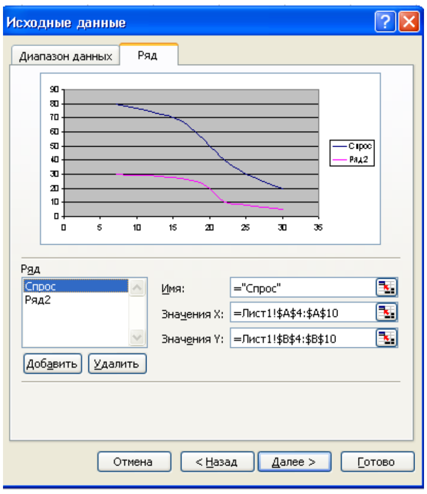
	A	B	C
1	Спрос на	Цена	Предлож
2	товар	товара	ение
3	(тыс.штук	(тыс,	(тыс.штук
4	70	20	9
5	65	25	15
6	50	40	20
7	45	50	45
8	30	55	55
9	20	60	65
10	10	65	75
11			

Выделяем ячейки A4:C10, из панели инструментов нажимаем кнопку  мастера диаграмм, тогда получим диалоговое окно. Построение диаграммы состоит из 4-х шагов. Первый шаг заключается в выборе Типа диаграммы. Из этого окно выбираем Точечная и нажимаем кнопку Далее.

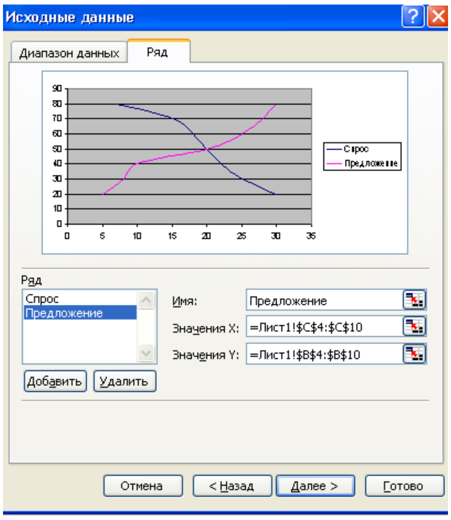




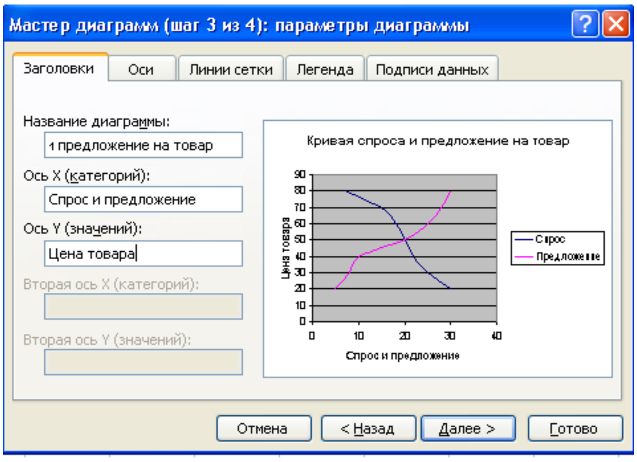
На втором шаге выбираем Ряд, чтобы заменить размещение кривых в оси координат. В разделе Ряд1 размещаем спрос: в разделе Значение X вводим A4: A10, в раздел Значение У вводим B4:B10.



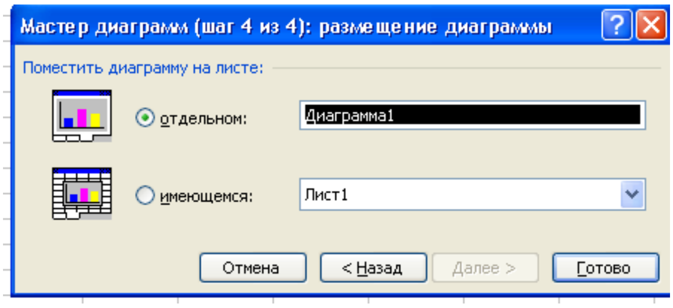
В Ряд2 таким же образом разместим предложение.



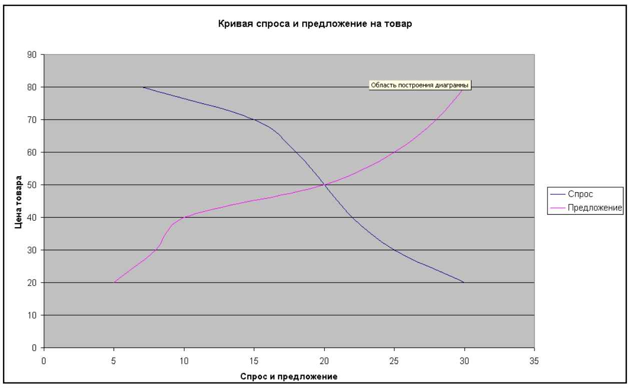
И нажимаем кнопку Далее. В новом окно в разделе Заголовок заполняем заголовки оси X и У.



После этого нажимаем кнопку Далее.



В этом окне мы отмечаем пункт размещения диаграммы на отдельном листе и нажимаем кнопку *Готово*, тогда получим следующий результат:



Опорные слова

Производственная функция, фактора производства, одноресурсный, однофакторный, независимая переменная, зависимая переменная, многофакторный, мультипликативных, однородная функция, изоквант, маржинальный, средние значения, аддитивный, предельная норма замены, взаимодополняемость, взаимозаменяемость, производительность труда, Кобба-Дугласа, статика, динамика, экономическая динамика, непрерывная время, дискретная время, темп роста, прироста, равновесия, паутинообразная модель**,** функция предложения, функция спроса, кривая спрос, кривая предложения, временный лаг, равновесная точка, сходимость, равновесная цена.

Контрольные вопросы

1. Как определяется (средняя) производительность труда и капиталовооруженность (фондовооруженность) труда? Какие возможны варианты взаимосвязи между ними в случае производственной функции Кобба-Дугласа?
2. Назовите основные свойства, которыми должна обладать производственная функция. Приведите примеры производственных функций, которые обладают всеми основными свойствами.
3. Анализ производства и издержек.
4. Производственные функции и их типы.
5. Свойства производственных функций и их виды.

6. Производственная функция Кобба – Дугласа.
7. Функции издержек.
8. Эконометрический анализ спроса и предложения.
9. Что такое изокванта? В чем ее экономический смысл? Как определяется (средняя) производительность капитала (капиталоотдача)?
10. Дайте содержательную интерпретацию (частной) эластичности выпуска по i-му ресурсу.