Практическое занятие 10

Экономические характеристики производственных функций

Задание: Вычислить экономические характеристики (предельную производительность, среднюю производительность и эластичность) следующей производственной функции

Вариант	Вид производственной функции
1	$y = x_1^{1,5} x_2^{2,5}$
2	$y = (2,5)^{x_1 x_2}$
3	$y = (x_1^2 + 2,5)x_2$
4	$y = (x_1 + 3,2)^{1,5} x_2$
5	$y = (2,3)^{x_1 + x_2}$
6	$y = \sqrt{(3x_1 + 5)x_2}$
7	$y = x_1^{\frac{1}{2}} + 2,7x_2^{\frac{1}{3}}$
8	$y = \frac{(3x_1 + 1)^{1,5}}{2x_2}$
9	$y = x_1^{3,5}(x_2 + 3)$
10	$y = (3x_1 + 7)^{1,5} x_2$
11	$y = x_1(x_2^{3,5} + 3)$
12	$y = \frac{(3x_1 + 1)^2}{2x_2^{3,5}}$
13	$y = (3x_1^{3,5} + 7)x_2^{2,5}$

14	$y = x_1 \sqrt{x_2 + 3}$
15	$y = \sqrt[3]{x_1} + 3\sqrt[4]{x_2}$
16	$y = \left(x_1^{2,5} + 3,5\right)^{1,5} x_2^{4,5}$

Образец выполнения задания

Вычислить экономические характеристики (предельную производительность, среднюю производительность и эластичность) следующей производственной функции:

$$y = 5x_1^{4,5} x_2^{3,5}$$

1) Вычислим предельную производительность факторов:

$$M_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 5 \cdot 4,5 x_1^{3,5} x_2^{3,5} = 22,5 x_1^{3,5} x_2^{3,5}$$

$$M_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = 5 \cdot 3,5 x_1^{4,5} x_2^{2,5} = 17,5 x_1^{4,5} x_2^{2,5}$$

2) Вычислим среднюю производительность факторов:

$$A_1 = \frac{f(x)}{x_1} = \frac{5x_1^{4,5} x_2^{3,5}}{x_1} = 5x_1^{3,5} x_2^{3,5}$$

$$A_2 = \frac{f(x)}{x_2} = \frac{5x_1^{4,5} x_2^{3,5}}{x_2} = 5x_1^{4,5} x_2^{2,5}$$

3) Вычислим эластичность факторов:

$$E_1 = \frac{M_1}{A_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{f(x)} = \frac{22{,}5 x_1^{3,5} x_2^{3,5}}{5 x_1^{3,5} x_2^{3,5}} = 4{,}5$$

$$E_2 = \frac{M_2}{A_2} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{f(x)} = \frac{17{,}5 x_1^{4,5} x_2^{2,5}}{5 x_1^{4,5} x_2^{2,5}} = 3{,}5$$

Методические указания к выполнению заданий

Пусть $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ - ПФ. Ее первая частная производная $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ $(i = 1{,}2)$ называется ***предельной производительностью*** *i*-го фактора производства (ППФ): $M_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$.

Пусть $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ - ПФ. Отношение предельной производительности M_i *i*-го ресурса к его средней производительности А называется (частной) ***эластичностью*** выпуска по *i*-му ресурсу (по фактору производства) (ЭВФ):

$$E_i = \frac{M_1}{A_1} = \frac{x_1}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad (i = 1{,}2).$$

Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ называется эластичностью производства.

Пусть $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ - ПФ. Дробь $\frac{f(x)}{x_i}$ $(i = 1,2)$ называется ***средней производительностью*** *i*-го ресурса (фактора производства) (СПФ) или средним выпуском по *i*-му ресурсу (фактору производства): $A_i = \frac{f(x)}{x_i}$.

Напомним, что в случае двухфакторной ПФКД $Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ - для средних производительностей $\frac{Y}{K}$ и $\frac{Y}{L}$ основного капитала и труда были использованы соответственно термины ***капиталоотдача и производительность труда***. Эти термины используют и применительно к любым двухфакторным ПФ, у которых $x_1=K$ и $x_2=L$.

Обозначим символами Δx_1 и $\Delta_i(f(x))(\Delta_1 f(x_1, x_2) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2))$; $\Delta f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)$ соответственно, приращение переменной *x*, и соответствующее ей частное приращение ПФ $f(x)$. При малых Δx_i, имеем приближенное равенство $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}(i = 1,2)$.

Следовательно, ППФ (приближенно) показывает, на сколько единиц увеличится объем выпуска *y*, если объем затрат *x* *i*-го ресурса вырастает на одну (достаточно малую) единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса. Здесь предельную величину $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$, (т.е. ППФ) целесообразно интерпретировать, используя близкое к ней отношение малых конечных величин, т.е. $\Delta f(x)$ и Δx_i.

Отмеченное обстоятельство является ключевым для понимания экономического смысла ППФ $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$. С другими предельными величинами следует поступать аналогичным образом.

Задача 1. Для ПФКД $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ найти в явном виде *A*ν *A*2, *M*1 и *M*2.

Решение задачи. Имеем:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}; \quad A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{f(x)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1}$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a^1 A_1; \quad M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2 A_2;$$

$$\frac{M_1}{A_1} = a_1 \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1; \quad \frac{M_2}{A_2} = a_2 \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$

Для ПФ $y = f(x)$ (не только для ПФКД) неравенства $M_1 \le A_1$ (i = 1,2) (т.е. предельная производительность *i*-го ресурса не больше средней производительности этого ресурса) обычно выполняются.

Задача 2. Для ЛПФ $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \ (a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0)$ найти в явном виде A_1, A_2, M_1 иM_2.

Решение задачи. Имеем:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = \frac{a_0}{x_1} + a_1 + a_2 \frac{x_2}{x_1}; \quad A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{f(x)}{x_2} = \frac{a_0}{x_2} + a_1 \frac{x_1}{x_2} + a_2$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_1; \quad M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2;$$

$$\frac{M_1}{A_1} \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1; \quad \frac{M_2}{A_2} \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$

при малом приращении Δx_i имеем приближенное равенство

$$E_i = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right] / \left[\frac{f(x)}{x_1}\right] \approx \left[\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}\right] / \left[\frac{\Delta x_i}{x_i}\right]$$

(крайнее правое выражение есть отношение двух относительных величин $\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}$ и $\frac{\Delta x_i}{x_i}$ постольку E_i (приближенно) показывает, на сколько процентов увеличится выпуск *y*, если затраты i-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса. Пояснение выражения E_i, содержащего предельную величину $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, с помощью выражения, содержащего конечное приближение $\frac{\Delta f(x)}{f(x)}$ предельной величины, является ключевым в понимании экономической сути частной эластичности выпуска по *i*-му ресурсу.

Задача 3. Выписать в явном виде для ПФКД выражения для $E_1, E_2 \; и \; E_x$

Решение задачи. Имеем:

$$E_1 = a_1, E_2 = a_2, \quad E_x = E_1 + E_2 = a_1 + a_2.$$

Задача 4. Для ЛПФ $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \; (a_0 = 0)$ найти $E_1, E_2 \; и \; E_x$.

Решение задачи. Имеем:

$$E_1 = \frac{x_1}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{a_1 x_1}{a_1 x_1 + a_2 x_2}; \quad E_2 = \frac{x_2}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \frac{a_2 x_2}{a_1 x_1 + a_2 x_2};$$

$$E_x = E_1 + E_2 = 1$$