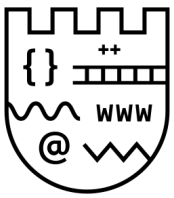


Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Τμήμα Πληροφορικής

Τεχνική αναφορά για NGE-06-03

Κρυπτογραφία 101

Αλέξανδρος Κόρκος
alexkork@csd.auth.gr
3870

Θεσσαλονίκη, 21 Ιουνίου 2023

Περιεχόμενα

Μέρος Ι
Συμμετρική Κρυπτογραφία

1 Σύστημα μετατόπισης

1.1 Εκφώνηση

Το επόμενο κρυπτόγραμμα έχει ληφθεί:

οκηθμφδζθγοθχυκχσφθμφμχγ

Ο αλγόριθμος κρυπτογράφησης είναι ο εξής:

Κάθε γράμμα του αρχικού μας μηνύματος αντικαθίσταται από την αριθμητική του τιμή (α: 1, ..., ω: 24). Ας είναι x_0 μία ρίζα του τριωνύμου $g(x) = x^2 + 3x + 1$. Σε κάθε αριθμό του μηνύματός μου προσθέτω την τιμή του πολυωνύμου $f(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 5x + 4$, στο x_0. Αντικαθιστώ κάθε αριθμό με το αντίστοιχο γράμμα. Βρείτε το αρχικό μήνυμα.

1.2 Λύση

1.2.1 Μαθηματική επίλυση

Από την εκφώνηση, γνωρίζω ότι $g(x_0) = 0$.

Επίσης, θα απλοποιήσω την $f(x)$ μέσω της διαίρεση πολυωνυμικών συναρτήσεων έτσι ώστε να εκμεταλλευτώ την παραπάνω πληροφορία. Συνεπώς:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h(x) = x^3 + 2x + 1 + \frac{3}{x^2 + 3x + 1} \quad (1)$$

Κάνοντας εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας στην (1), προκύπτει:

$$f(x) = (x^3+2x+1)\cdot g(x) + \frac{3}{\cancel{x^2 + 3x + 1}} \cdot \cancel{g(x)} \Rightarrow f(x) = (x^3+2x+1)\cdot g(x)+3 \quad (2)$$

Εξετάζω την συνάρτηση (2) για $x = x_0$:

$$f(x_0) = (x_0^3 + 2x_0 + 1) \cdot \cancel{g(x_0)}^{0} + 3 \Rightarrow f(x_0) = 3 \quad (3)$$

Άρα, όλα τα γράμματα της αλφάβητα έχουν μετατοπιστεί κατά 3 θέσεις.

1.2.2 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Εκτέλεση αρχείου:

```
python > python shift.py
```

Μια απλή υλοποίηση του συστήματος μετατόπισης, δηλαδή της συνάρτησης:

$$D_n(x) = x - n \pmod{24}, n = 3 \tag{4}$$

1.2.3 Συμπέρασμα

Εκτελώντας το αρχείο για το μηνύματος εκφώνησης επιστρέφεται το εξής αποκρυπτογραφημένο μήνυμα:

```
Μηδεις αγεωμετρητος εισιτω
```

όπου ήταν φράση που βρισκόταν στην είσοδο της ακαδημίας του Πλάτωνα [1].

2 Το σύστημα του Vigenere

2.1 Εκφώνηση

Αποκρυπτογραφήστε το κείμενο [2], που κρυπτογραφήθηκε με τον αλγόριθμο του Vigenere.

Υποδ. Για την αποκρυπτογράφηση συστήνουμε να χρησιμοποιήσετε python. Για το μήκος του κλειδιού μπορείτε να χρησιμοποιήσετε έιτε test Kasiski ή την μέθοδο του Friedman.

2.2 Λύση

2.2.1 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Βιβλιοθήκες

- functools
- re

```
python > vegenere.py > file_name
```

[1] Πηγή

Ως όνομα αρχείου δίνεται το αρχείο που θέλουμε να αποκρυπτογραφήσουμε.

Αρχικά, η βασικότερη συνάρτηση είναι η `kasiski`, που υλοποιεί την μέθοδο, σύμφωνα με [2]. Για να επιτευχθεί η frequency analysis, υλοποιείται η συνάρτηση `frequencyAnalysis` που βασίζεται στο άρθρο [1].

2.2.2 Συμπέρασμα

Για να βρεθεί το αποκρυπτογραφημένο μήνυμα, διακρίνεται σε 3 βήματα που περιγράφονται στην συνέχεια.

Εκτελώντας λοιπόν το τεστ Kasiski, βρίσκετε πως το μήκος του κλειδιού είναι 7 χαρακτήρες. Για να φτάσουμε σε αυτό τον αριθμό, δοκιμάσθηκε η ομαδοποίηση του κειμένου με διαφορά πλήθη χαρακτήρων. Για ομαδοποίηση ≥ 5 χαρακτήρων καταλήγουμε στο μήκος κλειδιού $= 7$. Για < 5 καταλήγουμε σε κλειδιά μήκους είτε 1 είτε 2 χαρακτήρων, που δεν αποκρυπτογραφούν το μήνυμα.

Στην συνέχεια, γίνετε ανάλυση συχνότητας γλώσσας (frequency analysis) για μήκος κλειδιού $= 7$. Η λέξη κλειδί στην οποία καταλήγουμε είναι SHANNON.

Τέλος, κάνοντας αποκρυπτογράφηση με λέξη κλειδί SHANNON προκύπτει το παρακάτω απόσπασμα μηνύματος και συμπεραίνετε πως το κλειδί είναι ορθό μιας και το αποκρυπτογραφημένο μήνυμα απαρτίζεται από αγγλικές λέξεις.

```
A VERY SMALL PERCENTAGE OF THE POPULATION PRODUCES THE
GREATEST PROPORTION OF THE IMPORTANT IDEAS THIS IS A KIN
TO AN IDEA PRESENTED BY AN ENGLISH MATHEMATICIAN TURING
THAT THE HUMAN BRAIN IS SOMETHING LIKE A PIECE OF URANIUM
THE HUMAN BRAIN IF IT IS BELOW THE CRITICAL LAP AND YOU
                    SHOOT ONE ...
```

3 Κυκλική κύλιση

3.1 Εκφώνηση

Έστω ένα μήνυμα m, 16-bits. Θεωρούμε την κυκλική κύλιση προς τα αριστερά $\ll \alpha$ κατά α bits. Έστω ότι m κωδικοποιείται στο c σύμφωνα με τον τύπο,

$$c = m \oplus (m \ll 6) \oplus (m \ll 10) \tag{5}$$

Βρείτε τον τύπο αποκωδικοποίησης. Δηλαδή, γράψτε το m ως συνάρτηση του c. Υλοποιήστε κατάλληλο κώδικα για να δείξετε ότι ο τύπος που φτιάξατε είναι σωστός.

[2] Μέθοδος Kasiski

3.2 Λύση

3.2.1 Μαθηματική επίλυση

Γνωρίζω πως:

$$m = \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \dots & m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \end{pmatrix}$$

$$m \ll 6 = \begin{pmatrix} m_6 & m_7 & m_8 & m_9 & m_{10} & \dots & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 & m_0 \end{pmatrix}$$

$$m \ll 10 = \begin{pmatrix} m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \dots & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 & m_0 \end{pmatrix}$$

συνεπώς, έτσι μπορώ να ορίσω τον ”πίνακα” c όπου κάθε σειρά περιλαμβάνει μια πράξη XOR μεταξύ αυτών.

$$c = \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \dots & m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_6 & m_7 & m_8 & m_9 & m_{10} & \dots & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 & m_0 \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \dots & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 & m_0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Για αποκωδικοποιήσουμε το αρχικό μήνυμα, θα πρέπει να φθάσω $c \to m$ μέσω κάποιων πράξεων XOR και Left - Shift. Αρχικά, θα γίνει $c \oplus c \ll 10$ ε.ω. να απαλείψω την πρώτη και τρίτη ”σειρά” του c καθώς θα είναι κοινές και στους δυο ”πίνακες”.

$$c \ll 10 = \begin{pmatrix} m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \dots & m_5 & m_6 & m_7 & m_8 & m_9 \\ m_0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \dots & m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_4 & m_5 & m_6 & m_7 & m_8 & \dots & m_{15} & m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = c \oplus (c \ll 10) \quad (7)$$

$$(7) \Rightarrow c_1 = \begin{pmatrix} m_6 & m_7 & m_8 & m_9 & m_{10} & \dots & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 & m_0 \\ m_4 & m_5 & m_6 & m_7 & m_8 & \dots & m_{15} & m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

Θα απαλείψω στην συνέχεια, την πρώτη σειρά του c_1 κάνοντάς XOR με τον c_1 μετατοπισμένο κατά 2.

$$c_1 \ll 2 = \begin{pmatrix} m_8 & m_9 & m_{10} & m_{11} & m_{12} & \dots & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & m_7 \\ m_6 & m_7 & m_8 & m_9 & m_{10} & \dots & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 & m_0 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = c_1 \oplus (c_1 \ll 2) \quad (8)$$

$$(8) \Rightarrow c_2 = \begin{pmatrix} m_8 & m_9 & m_{10} & m_{11} & m_{12} & \dots & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & m_7 \\ m_4 & m_5 & m_6 & m_7 & m_8 & \dots & m_{15} & m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

Έχοντας τώρα στον "πίνακα" c_2 2 σειρές, μπορώ μια μια μετατοπισμένη έκδοση του c να τον φέρω σε μοναδιαία σειρά.

$$c \ll 14 = \begin{pmatrix} m_{14} & m_{15} & m_0 & m_1 & m_2 & \dots & m_9 & m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_8 & m_9 & m_{10} & m_{11} & m_{12} & \dots & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & m_7 \\ m_4 & m_5 & m_6 & m_7 & m_8 & \dots & m_{15} & m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$c_3 = c_2 \oplus (c \ll 14) \tag{9}$$

$$(9) \Rightarrow c_3 = \begin{pmatrix} m_{14} & m_{15} & m_0 & m_1 & m_2 & \dots & m_9 & m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \end{pmatrix}$$

Τέλος, μπορώ να δω ότι εάν μετατοπίσω τον c_3 κατά 2, θα έχω το m.

$$m = c_3 \ll 2 \tag{10}$$

$$(10) \Rightarrow m = \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \dots & m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \end{pmatrix}$$

3.2.2 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Εκτέλεση αρχείου:

python > cyclic_shift.py

Ο κλειστός τύπος για την εύρεση του μηνύματος είναι

$$m = (((c \oplus (c \ll 10)) \oplus ((c \oplus (c \ll 10)) \ll 2)) \oplus (c \ll 14)) \ll 2$$

Έχουνε δημιουργηθεί τρεις συναρτήσεις. Μια που υλοποιεί την πράξη XOR, μια την πράξη Left - Shift και μια που παράγει τυχαία δυαδικά μηνύματα.

Αφού παραχθεί πρώτα ένα τυχαίο δυαδικό μήνυμα μήκους 16-bits, κρυπτογραφειται με την μέθοδο της εκφώνησης και στην συνέχεια αποκρυπτογραφείται με την μέθοδο που αναπτύχθηκε προηγουμένως.

3.2.3 Συμπέρασμα

Μπορούμε να αποφανθούμε, πως η μέθοδος αποκρυπτογράφησης αποτελεί ένα τρόπο για να βρούμε το αρχικό μήνυμα, καθώς ακολουθώντας διαφορετική συλλογιστική πορεία στις πράξεις μπορούμε και πάλι να βρούμε το αρχικό μήνυμα.

4 Τέλεια ασφάλεια

4.1 Εκφώνηση

Να αποδείξετε ότι, αν στο σύστημα μετατόπισης διαλέγουμε τυχαία τα κλειδιά από το σύνολο $\{0, 1, ..., 23\}$, τότε το σύστημα έχει τέλεια ασφάλεια.

4.2 Λύση

4.2.1 Μαθηματική επίλυση

Για να έχει ένα σύστημα τέλεια ασφάλεια (Perfect Secrecy) θα πρέπει κατά C. Shannon να ισχύει το εξής (με την βοήθεια των σημειώσεων της διάλεξης [2]):

Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{M}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, E, D)$ έχει τέλεια ασφάλεια, αν $\forall (m_1, m_2) \in \mathcal{M}$ και για $c \in \mathcal{C}$ ισχύει:*

$$Pr[k \leftarrow \mathcal{K} : E(m_1, k) = c] = Pr[k \leftarrow \mathcal{K} : E(m_2, k) = c], \forall k \overset{\$}{\leftarrow} \mathcal{K} \tag{11}$$

Θα εξετασθεί για αρχή, τα μηνύματα μήκους ενός χαρακτήρα ($l = 1$).

Απόδειξη. Για κάθε γραμμα m και $c \in C$ όπου $\mathcal{C} = \mathcal{M} = \{$Α, Β, ..., Ω$\}$, υπάρχει μοναδικό $k = c - m \pmod{24}$ τ.ω. $E(m, k) = m + k \pmod{24} = c$. Συνεπώς, για κάθε m, c ισχύει $Pr_{k \leftarrow \mathcal{K}}[k \leftarrow \mathcal{K} : E(m, k) = c] = 1/24$, όπου πληρεί τον ορισμό του C. Shannon. □

Στην συνέχεια θα εξετασθεί για μηνύματα μήκους μεγαλύτερο από 1 ($l > 1$).

Απόδειξη. Έστω $m_1 =$ ΑΒ , $m_2 =$ ΑΩ και $c =$ ΒΓ. Τότε υπάρχει κλειδί $k \in \mathcal{K}$ τ.ω. $E(m_1, k) = c$, για $k = 1$. Ωστόσο, για κάθε $k \in K$ υπάρχει $E(m_2, k) \neq c$ και συνεπώς $Pr_{K \leftarrow \mathcal{K}}[E(m_1, K) = c] = 1/24$, όμως $Pr_{K \leftarrow \mathcal{K}}[E(m_2, K) = c] = 0$ άρα, δεν πληρείτε ο ορισμός C. Shannon. □

4.2.2 Συμπέρασμα

Από τα παραπάνω, καταλήγουμε στο ότι ένα σύστημα μετατόπισης μπορεί να έχει τέλεια ασφάλεια αν-ν το μέγεθος το μηνύματος είναι ίσο με 1.

5 One Time Pad

5.1 Εκφώνηση

Υλοποιήστε τον OTP αφού αρχικά μετατρέψετε το μήνυμα σας σε bit με χρήση του παρακάτω πίνακα. Θα πρέπει να δουλεύει η κρυπτογράφηση

και η αποκρυπτογράφηση. Το μήνυμα δίνεται κανονικά και έσωτερικά μετατρέπεται σε bits. Το κλειδί είναι διαλεγμένο τυχαία και έχει μήκος όσο το μήκος του μηνύματος σας. Το αποτέλεσμα δίνεται όχι σε bits αλλά σε λατινικούς χαρακτήρες.

5.2 Λύση

5.2.1 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Εκτέλεση αρχείου:

```
python otp.py message
```

Τα argument <message> είναι προαιρετικό σε περίπτωση που θέλει ο χρήστης να χρησιμοποιήσει το One Time Pad με κάποιο δικό του μήνυμα.

5.2.2 Συμπέρασμα

Δίνοντας το μήνυμα:

```
MISTAKES ARE AS SERIOUS AS THE RESULTS THEY CAUSE
```

Για κάποια εκτέλεση του κώδικα (καθώς βασίζεται στην ψευδοτυχαιότητα) έχουμε το κρυπτογραφημένο μήνυμα:

```
TR-!W!(UOYPLS)LRNLZSSF?LLXYY)HFSPTPCGOJVS
```

Όπου θα αποκρυπτογραφηθεί ως εξής:

```
MISTAKESAREASSERIOUSASTHERESULTSTHEYCAUSE
```

6 Η αριθμοθεωρητική συνάρτηση Möbius

6.1 Εκφώνηση

Αποδεικνύεται ότι το πλήθος των ανάγωγων πολυωνύμων βαθμού n στο σώμα $\mathbb{F}_2$ είναι

$$N_2(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \cdot 2^{n/d}, \tag{12}$$

όπου

$$\mu(d) = \begin{cases} 1 & d = 1 \\ (-1)^k & d = p_1 p_2 \cdot \cdots_k p_i : \text{πρώτοι} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \tag{13}$$

Με το σύμβολο $d|n$ εννοούμε όλους τους θετικούς διαιρέτες του n. π.χ. αν $n = 30$, τότε

$$\{d|n : 1 \leq d \leq n\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \tag{14}$$

Με χρήση του συστήματος sagemath υπολογίστε το $N_2(10)$.

6.2 Λύση

6.2.1 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

```
python moebius.py n
```

Το argument <n> είναι προαιρετικό σε περίπτωση που θέλει ο χρήστης να υπολογίσει την σχέση 12 με άλλο n, οι προκαθορισμένη τιμή είναι αυτή της εκφώνησης.

Δημιουργήθηκαν τρεις βασικές συναρτήσεις, μια για τον υπολογισμό του (d), μια για τον υπολογισμό του συνόλου $d|n$ και μια για την τιμή $N_2(n)$.

6.2.2 Συμπέρασμα

Η τιμή που υπολογίσθηκε είναι $N_2(10) = 99$.

7 Rivest Cipher 4 (RC4)

7.1 Εκφώνηση

Υλοποιήστε τον RC4. Χρησιμοποιώντας το κλειδί HOUSE κρυπτογραφήστε το μήνυμα (ξαναγράψτε το χωρίς κενά):

```
MISTAKES ARE AS SERIOUS AS THE RESULTS THEY CAUSE
```

Η υλοποίηση σας πρέπει και να αποκρυπτογραφεί σωστά.

7.2 Λύση

7.2.1 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Εκτέλεση αρχείου:

```
python python rc4.py message key
```

Τα arguments <message> και <key> είναι προαιρετικά σε περίπτωση που θέλει ο χρήστης να το RC4 με άλλες τιμές, οι προκαθορισμένες τιμές είναι αυτές που δίνονται στην εκφώνηση.

7.2.2 Συμπέρασμα

Εκτελώντας το αρχείο για τις τιμές της εκφώνησης, επιστρέφεται το εξής κρυπτογραφημένο μήνυμα:

```
IGD!APO-TJUQPDSPMAOZUIAZ(VF(VFGQ.IIWMB(WX
```

Ενώ η αποκρυπτογραφημένη μορφή του παραπάνω μηνύματος είναι:

```
MISTAKESAREASSERIOUSASTHERESULTSTHEYCAUSE
```

8 Διαφορική ομοιομορφία

8.1 Εκφώνηση

Αν Σ ένα σύνολο με |Σ| συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του, υπολογίστε τη διαφορική ομοιομορφία (differential uniformity) του S-box,

$$Diff(S) = \max_{x \in \{0,1\}^6 - \{0\}, y \in \{0,1\}^4} |\{z \in \{0,1\}^6 : S(z \oplus x) \oplus S(z) = y\}| \quad (15)$$

Γενικά, για S-boxes:

$$S : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m \quad (16)$$

ο προηγούμενος ορισμός γράφεται:

$$Diff(S) = \max_{x \in \{0,1\}^n - \{0\}, y \in \{0,1\}^m} |\{z \in \{0,1\}^n : S(z \oplus x) \oplus S(z) = y\}| \quad (17)$$

και ισχύει:

$$Diff(S) \geq \max\{2, 2^{n-m}\} \quad (18)$$

Όσο μικρότερη είναι αυτή η ποσότητα, τόσο πιο ανθεκτικό είναι το S-box στη διαφορική κρυπτανάλυση.

8.2 Λύση

8.2.1 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Βιβλιοθήκες

- matplotlib
- matplotlib.pyplot

Εκτέλεση αρχείου:

```
python sbox.py
```

Το αρχείο, περιέχει ουσιαστικά την υλοποίηση της σχέσης (15). Η υλοποίηση έγινε με βάση το βιβλίο [3] που χρησιμοποιηθεί την συνάρτηση Feistel που περιγράφεται μέσα.

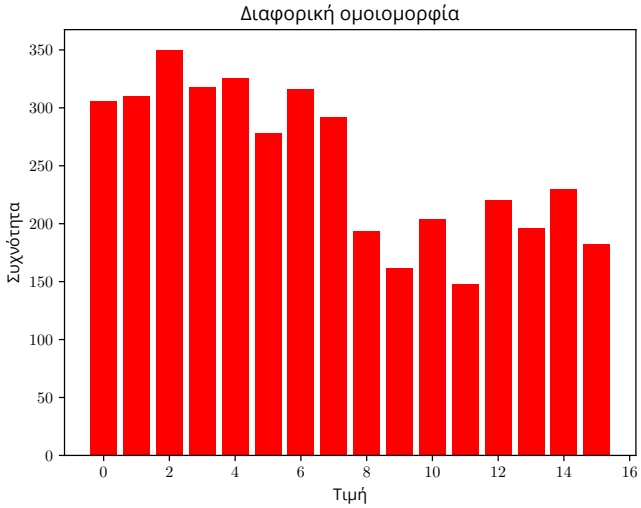
8.2.2 Συμπέρασμα

Για το S-box της εκφώνησης ισχύει: $n = 6, m = 4$. Έτσι η σχέση (18) έχει ως εξής:

$$Diff(S) \geq \max\{2, 2^{n-m}\} = \max\{2, 2^{6-4}\} = \max\{2, 4\} = 4 \Rightarrow Diff(S) \geq 4 \tag{19}$$

Δηλαδή, αναμένεται η διαφορική ομοιομορφία να έχει τιμή τουλάχιστον ίση με 4.

Εκτελώντας τον κώδικα, παράγεται το εξής γράφημα:



Σχήμα 1: Διαφορική ομοιομορφία του S-box (15)

Όπως φαίνεται λοιπόν από το σχήμα 1 η μέγιστη συχνότητα εμφάνισης είναι το 350 για όλες τι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει το x (πλήθος τιμών του x είναι $2^6 - 1 = 63$), δηλαδή $Diff(S) = \max|\{S(z \oplus x) \oplus S(z)\}| = 350$.

9 Avalanche effect

9.1 Εκφώνηση

Εξετάστε αν ισχύει το avalanche effect στο AES-128. Αναλυτικότερα, φτιάξτε αρκετά ζευγάρια (≥ 30) μηνυμάτων (m_1, m_2) που να διαφέρουν σ ένα bit. Εξετάστε σε πόσα bits διαφέρουν τα αντίστοιχα κρυπτομηνύματα. Δοκιμάστε με δύο καταστάσεις λειτουργίας: ECB και CBC (η δεύτερη θέλει και IV block). Τα μήκη των μηνυμάτων που θα χρησιμοποιήσετε να έχουν μήκος διπλάσιο του μήκους ενός block. Δηλαδή για τον AES-128, να είναι μήκους 256-bits.

9.2 Λύση

9.2.1 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Βιβλιοθήκες

- Crypto.Cipher
- bitstring
- statistics

Εκτέλεση αρχείου:

```
python avalanche.py
```

Δοκιμάσθηκαν 200 τυχαία ζευγάρια δυαδικών μηνυμάτων, χρησιμοποιώντας τυχαία δυαδικών κλειδιά μήκους 128-bit αντίστοιχα και για το IV. Για την χρήση του AES, έγινε χρήση της βιβλιοθήκης Crypto όπου εξετάσθηκαν και οι δυο λειτουργίες.

9.2.2 Συμπέρασμα

Έπειτα από αρκετές προσομοιώσεις, οι μέσοι όροι διαφορών στα ζεύγη των μηνυμάτων έχουν ως εξής: για ECB 64-bit και για CBC 128-bit. Αυτό σημαίνει πως στην λειτουργία ECB η αλλαγή ενός bit επιφέρει αλλαγή στο $\approx 25\%$ του μηνύματος άρα, δεν παρουσιάζεται το avalanche effect σε αυτή την λειτουργία. Αντιθέτως, στην λειτουργία CBC αλλάζει το $\approx 50\%$ του μηνύματος που σημαίνει ότι υπάρχει το avalanche effect.

10 Capture The Flag

10.1 Εκφώνηση

Μπορείτε να ανοίξετε το secure.zip?

10.2 Λύση

`be121740bf988b2225a313fa1f107ca1`

10.3 Πορεία

- `aHR0cHM6Ly9jcnlwdG9sb2d5LmNzZC5hdXRoLmdyOjgwODAvaG9tZS9wdWIvMTUv`
- `https://cryptology.csd.auth.gr:8080/home/pub/15/`
- `#heretic!`
- `https://tinyurl.com/26ru4359`
- `f1f5e44313a1b684f1f7e8eddec4fcb0`

Μέρος II
Κρυπτογραφία Δημοσίου Κλειδιού

11 Diffie-Hellman

11.1 Εκφώνηση

Εφαρμόστε το πρωτόκολλο ανταλλαγής Diffie-Hellman για $g = 3, p = 101, a = 77, b = 91$. Δηλ., πρέπει να υπολογίσετε το κοινό κλειδί. Θα χρειαστεί να υλοποιηθεί Αλγόριθμος (7.2.2) από [3, σελ. 82].

11.2 Λύση

11.2.1 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Βιβλιοθήκες

- fpow (ορισμένη από τον συντάκτη)

Εκτέλεση αρχείου:

`python` `diffie_hellman.py`

Αποτελεί μια απλή εφαρμογή του πρωτοκόλλου Diffie-Hellman, κάνοντας χρήση της γρήγορης ύψωσης σε δύναμη που θα δούμε και στην επόμενη άσκηση.

11.2.2 Συμπέρασμα

Το κοινό κλειδί είναι 66.

12 Γρήγορη ύψωση σε δύναμή

12.1 Εκφώνηση

Υλοποιήστε σε όποια γλώσσα προγραμματισμού θέλετε τον Αλγόριθμο (7.2.2) από [3, σελ. 82] και κατόπιν υπολογίστε τη δύναμη $5^{77} \pmod{19}$.

12.2 Λύση

12.2.1 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Βιβλιοθήκες

- math

Εκτέλεση αρχείου:

```
python fpow.py
```

Ακολουθήθηκε η υλοποίηση ένα προς ένα, από [3] στην σελίδα 82.

12.2.2 Συμπέρασμα

Η εκτέλεση της γρήγορης ύψωση σε δύναμη για τις δεδομένες τιμές επιστρέφει την τιμή 9, που εύκολα επαληθεύεται ως ορθή.

13 Πρώτοι αριθμοί

13.1 Εκφώνηση

Να αποδείξετε ότι ο n-οστος πρώτος που ικανοποιεί την ανισότητα

$$p_n < 2^{2^n} \tag{20}$$

13.2 Λύση

13.2.1 Μαθηματική επίλυση

Υποθέτουμε ότι $p_i \leq 2^{2^i} \forall i \leq n$. Στην συνέχεια, το $p_1 p_2 ... p_n + 1$ δεν διαιρείται από κανένα από τους πρώτους αριθμούς $p_1, ..., p_n$, έτσι

$$p_{n+1} \leq \prod_{i=1}^{n} p_i + 1 \tag{21}$$

Αντικαθιστώντας τις προηγούμενες ανισώσεις για το p_i και χρησιμοποιώντας $\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2$, έχουμε

$$p_{n+1} \leq (\prod_{i=1}^{n} 2^{2^i}) + 1 = (2^{\sum_{i=1}^{n} 2^i}) + 1 = 2^{2^{n+1}-2} + 1 \leq 2^{2^{n+1}} \tag{22}$$

14 Ιδιότητες του gcd

14.1 Εκφώνηση

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Αν $\gcd(a, b) = 1$, τότε

- $\forall c \in \mathbb{Z}$ ισχύει $\gcd(ac, b) = \gcd(c, b)$
- $\gcd(a + b, a - b) \in \{1, 2\}$. Ειδικότερα, ν.α.ο αν a, b περιττοί θετικοί ακέραιοι $\gcd(a + b, a - b) = 2$
- $\gcd(2^a - 1, 2^b - 1) = 1$
- $\gcd(M_p, M_q) = 1$ όπου $M_p = 2^p - 1, M_q = 2^q - 1$ Mersenne ακέραιοι (p, q πρώτοι με $p \neq q$).

14.2 Λύση

14.2.1 Μαθηματική επίλυση

Πρόταση. *$\forall c \in \mathbb{Z}$ ισχύει* $\gcd(ac, b) = \gcd(c, b)$

Απόδειξη. Έστω ότι $d_1 = \gcd(c, b)$ και $d_2 = \gcd(ac, b)$. Τότε έχουμε $cx_1 + by_1 = d_1, acx_2 + by_2 = d_2$ και $ax + by = 1$ από Bezout. Αρχικά πολλαπλασιάζουμε την $ax + by = 1$ με το d_1 για να δείξουμε $d_2 | d_1$.

$$\begin{aligned} & d_1(ax + by = 1) \\ \Rightarrow\ & ax(cx_1 + by_1) + bd_1y = d_1 \\ \Rightarrow\ & ac(xx_1) + b(axy_1 + d_1y) = d_1 \end{aligned} \tag{23}$$

Εφόσον ισχύει ότι $d_2 = \gcd(ac, b)$ τότε διαίρει κάθε ακέραιο γραμμικό συνδυασμό των ac και b και άρα έχουμε $d_2 | d_1$.

Με παρόμοιο τρόπο, θα πολλαπλασιάσουμε το $ax + by = 1$ με το d_2 και έχουμε

$$\begin{aligned} & d_2(ax+by=1) \\ \Rightarrow\ & ax(acx_2+by_2)+bd_2y=d_2 \\ \Rightarrow\ & c(a^2xx_2)+b(axy_2+d_2y)=d_2 \end{aligned} \tag{24}$$

Ομοίως με πριν ισχύει ότι $d_1=\gcd(c,b)$, τότε διαίρει κάθε ακέραιο γραμμικό συνδυασμό των ac και b άρα έχουμε $d_1|d_2$.

Τελικά, επειδή έχουμε $d_1|d_2, d_2|d_1$ και d_1 και d_2 είναι μη-αρνητικοί (αφού είναι το $\gcd$ δύο ακεραίων), καταλήγουμε ότι $d_1=d_2$.

Επομένως, ο $\gcd(ac,b)=\gcd(c,b)$. □

Πρόταση. $\gcd(a+b,a-b)\in\{1,2\}$

Απόδειξη. Έστω d κοινός διαιρέτης των $a+b$ και $a-b$, τότε ο d διαιρεί και το άθροισμα και την διαφορά τους

$$d|(a+b)$$

$$d|(a-b)$$

$$d|(a+b)+(a-b)=2a$$

$$d|(a+b)-(a-b)=2b$$

Άρα, έχουμε

$$d|\gcd(2a+2b)=2\cancelto{1}{\gcd(a,b)}\Rightarrow d|2 \tag{25}$$

που σημαίνει ότι το $d\in\{1,2\}$. □

Πρόταση. *Ν.α.ο αν a,b περιττοί θετικοί ακέραιοι* $\gcd(a+b,a-b)=2$

Απόδειξη. Έχουμε a,b περιττούς, που γράφονται ως εξής

$$a=2k_1+1, k_1\in\mathbb{Z}$$

$$b=2k_2+1, k_2\in\mathbb{Z}$$

Επίσης, είναι γνωστό πως το άθροισμα και η διαφορά δυο περιττών αριθμών είναι άρτιος αριθμός.

Αφού πρόκειται για δυο άρτιος αριθμούς, τότε και οι διαιρέτες τους θα είναι άρτιοι.

Παραπάνω, αποδείξαμε πως αν d διαιρέτης, τότε $d\in\{1,2\}$ όπου μόνο για $d=2$ άρτιος. □

Πρόταση. $\gcd(2^a-1,2^b-1)=1$

Απόδειξη. Έστω $p = \gcd(a, b)$ τότε $p = ax + by$ με $x, y \in \mathbb{Z}$.

Αν, $d = \gcd(2^a - 1, 2^b - 1)$ τότε $2^a \equiv 1 \pmod d$ και $2^b \equiv 1(\pmod d)$ έτσι έχουμε

$$2^p = 2^{ax+by} = (2^a)^x (2^b)^y \equiv 1 \pmod d \tag{26}$$

Συνεπώς $d|2^p - 1$. Από την άλλη, αν $p|a$ τότε $2^p - 1|2^a - 1$ άρα $2^p - 1$ κοινός παράγοντάς.

Τελικά, $\gcd(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\cancelto{1}{\gcd(a,b)}} - 1 \Rightarrow \gcd(2^a - 1, 2^b - 1) = 1$ □

Πρόταση. $\gcd(M_p, M_q) = 1$ *όπου* $M_p = 2^p - 1, M_q = 2^q - 1$

Απόδειξη. Παρατηρείται ότι εάν αντικαταστήσω στην προηγουμένη απόδειξή με M_p, M_q ισχύει η παραπάνω σχέση. □

15 Ακόμα ένα πρόβλημα με gcd

15.1 Εκφώνηση

Έστω a, b, c ακέραιοι και $\delta = a^2 - 4bc^2 \neq 0$. Ν.α.ο. $\gcd(\delta, 4c^2)$ είναι τετράγωνο.

15.2 Λύση

15.2.1 Μαθηματική επίλυση

Η λύση είναι αυτούσια από [4] του συναδέλφου κατά την διάρκεια εκπόνησης τούτης εργασίας.

Απόδειξη. Ισχύει γενικά πως

$$\gcd(a^n, b^n) = [\gcd(a, b)]^n, \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Αυτό φαίνεται από τις πρωτογενείς αναλύσεις των a, b:

$$a = p_1^{e_{11}} p_2^{e_{12}} p_3^{e_{13}}$$

$$b = p_1^{e_{11}} p_2^{e_{12}} p_3^{e_{13}}$$

$$\Rightarrow \gcd(a, b) = p_1^{\min(e_{11}, e_{21})} p_2^{\min(e_{12}, e_{22})} p_3^{\min(e_{13}, e_{23})} \tag{27}$$

Υψώνοντας σε κοινή δύναμη έχουμε:

$$a^n = (p_1^{e_{11}} p_2^{e_{12}} p_3^{e_{13}} ...)^n = p_1^{ne_{11}} p_2^{ne_{12}} p_3^{ne_{13}} ...$$

$$b^n = (p_1^{e_{11}} p_2^{e_{12}} p_3^{e_{13}} ...)^n = p_1^{ne_{11}} p_2^{ne_{12}} p_3^{ne_{13}} ...$$

$$\begin{aligned} \gcd(a^n, b^n) = \\ p_1^{\min(ne_{11}, ne_{21})} p_2^{\min(ne_{12}, ne_{22})} p_3^{\min(ne_{13}, ne_{23})} = \\ p_1^{n\min(e_{11}, e_{21})} p_2^{n\min(e_{12}, e_{22})} p_3^{n\min(e_{13}, e_{23})} = \\ (p_1^{\min(e_{11}, e_{21})} p_2^{\min(e_{12}, e_{22})} p_3^{\min(e_{13}, e_{23})})^n \end{aligned} \tag{28}$$

Άρα, $\gcd(a^n, b^n) = [\gcd(a, b)]^n$.
Είναι επίσης τετριμμένο πως

$$\gcd(a + mb, b) = \gcd(a, b), \forall a, b, m \in \mathbb{Z}$$

Γνωρίζοντας τα παραπάνω, έχουμε

$$\gcd(a, 2c) = d \gcd(a^2, 4c^2) = d^2 \wedge d^2 | a^2 4bc^2 \Rightarrow \gcd(\delta, 4c^2) = d^2$$

□

16 Ιδιότητα των περιττών ακέραιων

16.1 Εκφώνηση

Επαληθεύστε πειραματικά ότι για όλους τους περιττούς ακέραιους $< 2^{20}$ ισχύει

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{e^\gamma}{2} \ln \ln n + \frac{0.74}{\ln \ln n} \tag{29}$$

16.2 Λύση

16.2.1 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Βιβλιοθήκες

- collections
- concurrent.futures
- trial_division (ορισμένη από τον συντάκτη)
- os
- math

Εκτέλεση αρχείου:

```
python sum.py
```

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος των θετικών διαιρετών του κάθε αριθμού n, έγινε χρήση της δοκιμαστικής διαίρεσης ε.ω. να βρεθούνε για κάθε n οι διαιρέτες του.

Στην συνέχεια υπολογίστηκε ο τύπος

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

όπου p_i οι πρώτοι διαιρέτες και a_i η μεγαλύτερη δύναμη του p_i.

Για να εξετασθούν οι περιττοί αριθμοί γρήγορα, έγινε υλοποίηση που εκτελείτε σε παραλληλία χρησιμοποιώντας τους ελεύθερους διαθέσιμους πυρήνες του επεξεργαστή.

16.2.2 Συμπέρασμα

Εκτελώντας το πρόγραμμα καταλήγουμε στο ότι η υπόθεση της εκφώνησης ισχύει.

17 Carmichael

17.1 Εκφώνηση

Ν.α.ο οι αριθμοί $9999109081, 655313092675200603148 1761$ είναι αριθμοί Carmichael. Μπορείτε να βρείτε κάποιον μεγαλύτερο; Υποδ. Να γίνει χρήση του κριτηρίου Korselt.

17.2 Λύση

17.2.1 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Βιβλιοθήκες

- sympy.ntheory
- fermat (ορισμένη από τον συντάκτη)

Εκτέλεση αρχείου:

```
python carmichael.py
```

Μιας και δεν είναι ο στόχος της άσκησης η παραγοντοποίηση ενός αριθμού, χρησιμοποιήθηκε για λόγους επιτάχυνσης εκτέλεσης του προγράμματος η μέθοδος `factorint` της `sympy.ntheory`. Αφού βρεθούν οι παράγοντες του αριθμού, εξετάζεται μέσω συναρτήσεων εάν υπάρχει κάποιος παράγοντας που εμφανίζεται περισσότερες από μια φορά, εάν όλοι οι παράγοντες μειωμένοι κατά την μονάδα διαιρούν τον αριθμό μειωμένο κατά την μονάδα και τέλος εάν ο αριθμός αποτελεί σύνθετο αριθμό.

Για την διαπίστωση εάν ο αριθμός είναι σύνθετος, χρησιμοποιήθηκε το τεστ του Fermat, οποίος επιστρέφει αποτελέσματα όχι με βεβαιότητά άλλα με κάποια πιθανότητα καθώς βασίζεται στη τυχαιότητα. Αυτό σημαίνει, πως για να αποφανθούμε στο εάν οι αριθμοί είναι σύνθετοι ή πρώτοι έπρεπε να εκτελεσθεί το τεστ αρκετές φορές.

17.2.2 Συμπέρασμα

Και οι δυο δοσμένοι αριθμοί, πληρούν τις συνθήκες του Korselt άρα είναι αριθμοί Carmichael.

18 Τεστ του Fermat

18.1 Εκφώνηση

Ικανοποιούν το τεστ ου Fermat οι αριθμοί

$$835335 \cdot 2^{39014} \pm 1;$$

18.2 Λύση

Βιβλιοθήκες

- gmpy2

Εκτέλεση αρχείου:

```
python fermat.py
```

Η υλοποίηση ακολουθεί τον αλγόριθμο που δίνεται από το βιβλίο [3, σελ. 122], προσθέτοντας τον έλεγχο για το εάν ο αριθμός είναι άρτιος δεν μπορεί ναι είναι και πρώτος.

18.2.1 Συμπέρασμα

Εκτελώντας τον κώδικα, επιστρέφεται ως και οι δυο αριθμοί είναι πρώτοι αριθμοί.

19 Trial Division

19.1 Εκφώνηση

Να υλοποιήσετε τον αλγόριθμο δοκιμαστικής διαίρεσης και να παραγοντοποιήσετε τους αριθμούς $2^{62} - 1, 2^{102} - 1$.

19.2 Λύση

19.2.1 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Εκτέλεση αρχείου:

```
python trial_division.py
```

Ακολουθήθηκε πιστά ο αλγόριθμος δόθηκε στο βιβλίο [3] στην σελιδα 134.

19.2.2 Συμπέρασμα

Οι αριθμοί παραγοντοποιούνται ως εξης

$$2^{62} - 1 = \{3, 3, 3, 3, 7, 19, 73, 87211, 67240192\}$$

και για

$$2^{102} - 1 = \{3, 3, 3, 3, 7, 19, 73, 87211, 262657, 281474976710656\}$$

20 Αλγόριθμος του Lehman

20.1 Εκφώνηση

Να υλοποιήσετε τον αλγόριθμο του Lehman. Κατόπιν, διαλέξτε ένα τυχαίο ακέραιο με 100 bits. Θεωρούμε επιτυχία, αν ο αλγόριθμος σας παραγοντοποιήσει τον τυχαίο ακέραιο σε λιγότερο από 10 δευτερόλεπτα στον Η/Υ. Εκτελέσετε το προηγούμενο πείραμα 100 φορές. Ποιο το ποσοστό επιτυχίας;

20.2 Λύση

Βιβλιοθήκες

- gmpy2
- sympy
- multiprocessing

Εκτέλεση αρχείου:

```
python lehman.py
```

Υλοποιήθηκε ο αλγόριθμος όπως παρουσιάζεται στο [3, σελ. 136]. Για να επιτευχθεί υψηλότερη ταχύτητα, μέσω συνάρτησης της sympy, επιστρέφονται όλοι οι πρώτοι μέχρι ένα σημείο για να εξετασθούν από την δοκιμαστική διαίρεση για το εάν είναι διαιρέτης του αριθμού. Επιπλέον, για να εκτελεσθούν οι 1000 δοκιμές σε πλαίσιο 10 δευτερολέπτων χρησιμοποιήθηκαν νήματα.

20.2.1 Συμπέρασμα

Επειδή βαδιζόμαστε στην τυχαιότητα στην διαλογή των αριθμών τα αποτελέσματα ποικίλουν. Ωστόσο, καταλήγουμε σε ένα αποτέλεσμα επιτυχίας $\approx 90\%$.

21 Αλγόριθμος του Pollard

21.1 Εκφώνηση

Σε αυτή την άσκησή θα δούμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του Pollard για παραγοντοποιήση. Θεωρούμε ένα φυσικό N και ζητάμε ένα διαιρέτη του. Έστω $f(x) = (x^2 + 1) \mod N$ και ας είναι το x_0 τυχαία τιμή από το $\{2, 3, ..., N - 1\}$. Η γραμμή 6 στον Αλγόριθμο (10.2.2) θα είναι

$$1 < \gcd(|x - y|, N) < N.$$

Υλοποιήστε τον αλγόριθμο και βρείτε ένα διαιρέτη του αριθμού $N = 2^{257} - 1$.

21.2 Λύση

21.2.1 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Εκτέλεση αρχείου:

`python` `pollard.py`

Ακολουθήθηκε πιστά ο αλγόριθμος δόθηκε στο βιβλίο [3, σελ. 150], προσθέτοντας την συνθήκη της εκφώνησης.

21.2.2 Συμπέρασμα

Για $N = 2^{257} - 1$, ο αλγόριθμος του Pollard επιστρέφει 535006138814359.

22 RSA

22.1 Εκφώνηση

Δίνεται το δημόσιο κλειδί $(N, e) = (11413, 19)$. Βρείτε το ιδιωτικό κλειδί και κατόπιν αποκρυπτογραφήστε το μήνυμα

$$C = (3203 \quad 909 \quad 3143 \quad 5255 \quad 5343 \quad 3203 \quad 909 \quad 9958 \quad 5278 \quad 5343 \quad 9958 \quad 5278$$
$$4674 \quad 909 \quad 9958 \quad 792 \quad 909 \quad 4132 \quad 3143 \quad 9958 \quad 3203 \quad 5343 \quad 792 \quad 3143 \quad 4443)$$

Υποθέστε ότι τα γράμματα στο αρχικό μήνυμα m, αναπαρίστανται από τις ASCII τιμές τους (δουλέψτε block by block το C). Υποδ. Παραγοντοποιήστε N, κατόπιν υπολογίστε το $\phi(N)$.

22.2 Λύση

22.2.1 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Βιβλιοθήκες

- gmpy2
- numpy
- fpow

Εκτέλεση αρχείου:

```
python rsa.py
```

Για να προχωρήσουμε σε αποκρυπτογράφηση του C, θα πρέπει για κάθε block του μηνύματος να λυθεί η εξίσωση

$$m_i = c_i^d \mod N, \forall c_i \in C \tag{30}$$

όπου το N ήδη γνωστό ενώ, το d θα πρέπει να βρεθεί. Για την εύρεση του d, θα πρέπει να γίνει παραγοντοποίηση του N χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Fermat [5] δηλ. να βρεθούν p, q ε.ω. $N = p \cdot q$ και στην συνέχεια να υπολογισθεί η $\phi(N) = (p-1)\cdot(q-1)$. Τέλος, θα πρέπει να λυθεί η εξίσωση

$$e \cdot d \equiv 1 \mod \phi(N) \Rightarrow d = e^{-1} \mod \phi(N) \tag{31}$$

Υπολογίζοντας την παραπάνω σχέση μέσω κατάλληλων συναρτήσεων, προκύπτει ότι $d = 1179$.

22.2.2 Συμπέρασμα

Εκτελώντας την σχέση (30) για κάθε block, επιστρέφεται το μήνυμα

```
welcowe to the real world
```

23 Wiener Attack

23.1 Εκφώνηση

Ας θεωρήσουμε $(N, e) = (194749497518847283, 50736902528669041)$ και το κρυπτογραφημένο κείμενο C, που έχει προκύψει από το Textbook RSA και έπειτα κωδικοποιήθηκε. Εφαρμοστέ την επίθεση Wiener, για να βρείτε το κλειδί d. Υποθέτουμε ότι στο αρχικό κείμενο m κάθε χαρακτήρας έχει αντικατασταθεί από την ASCII τιμή του. Τέλος, βρείτε το αρχικό m.

23.2 Λύση

23.2.1 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Βιβλιοθήκες

- gmpy2
- base64
- re

Εκτέλεση αρχείου:

```
python wiener.py
```

Η επίθεση του Wiener, επιδιώκει να βρει το d κάνοντας χρήση συνεχών κλασμάτων. Αρχικά, υπολογίζω για αρχή το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα του $\frac{e}{N}$. Στην συνέχεια, βρίσκω όλα τα ανάγωγα κλάσματα $\frac{N_i}{D_i}$ που λέγονται συγκλίνοντα κλάσματα. Στην συνέχεια υπολογίζονται ϕ_i, p, q κάνοντας χρήση των ανάγωγων κλασμάτων και τέλος η εξίσωση $x^2 - ((N_i - \phi_i + 1)x + N_i = 0$. Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία, ευρίσκεται ότι $d = 20881$.

Για να προχωρήσουμε στην αποκρυπτογράφηση του μηνύματος, θα πρέπει πρώτα να αποκωδικοποιηθεί με την χρήση της μεθόδου Base64.

23.2.2 Συμπέρασμα

Εκτελώντας λοιπόν την επίθεσή του Wiener, το αρχικό μήνυμα είναι

```
Just because you are a character doesn't mean that you
                    have character
```

24 Naive RSA

24.1 Εκφώνηση

Δίνεται ότι δημόσιο κλειδί μιας (naive) ψηφιακής υπογραφής RSA, $(N, e) = 9899, 839)$. Αν η ψηφιακή υπογραφή του μηνύματος $m = 3$ είναι $s = 301$, μπορείτε να επαληθεύσετε ότι είναι σωστή η ψηφιακή υπογραφή;

24.2 Λύση

24.2.1 Λεπτομέρειες για την υλοποίηση

Βιβλιοθήκες

- fpow

Εκτέλεση αρχείου:

```
python signature.py
```

Για να γίνει επαλήθευση της υπογραφής θα πρέπει να ισχύει

$$a = m, \text{ όπου } a = s^e \mod N. \tag{32}$$

24.2.2 Συμπέρασμα

Για τις τιμές της εκφώνησης, δεν μπορεί να επαληθευτεί η υπογραφή.

25 gpg

25.1 Εκφώνηση

Στείλτε ένα κρυπτογραφημένο μήνυμα στον συγγραφέα (το δημόσιο κλειδί που έχει αναγνωριστικό 0xEB1185F82713D6DF). Από το δημόσιο κλειδί το αναγνωριστικό προκύπτει (σε bash) αν δώσουμε τον παρακάτω κώδικα

```
$gpg --list-packets pk.asc | awk '/keyid:/{ print $2 }'
```

Listing 1: gpg κώδικας σε bash

25.2 Λύση

25.2.1 Συμπέρασμα

d41d8cd98f00b204e9800998ecf8427e

Αναφορές

[1] T. M. Doctor, "Five ways to crack a vigenère cipher," 2020. https://www.cipherchallenge.org/wp-content/uploads/2020/12/Five-ways-to-crack-a-Vigenere-cipher.pdf.

[2] S. Jarecki, "Crypto overview, perfect secrecy, one-time pad." Cryptology Course, Lecure Slides, 2004. https://www.ics.uci.edu/%7Estasio/fall04/lect1.pdf.

[3] Κ. Δραζιώτης, *Εισαγωγή στην Κρυπτογραφία*. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις, 2022. https://dx.doi.org/10.57713/kallipos-17.

[4] Α. Κύδρος, "Κρυπτογραφία Δημοσίου Κλειδιού." Cryptology Course Assignment, 2023. https://github.com/asimakiskydros/University-Projects/blob/main/Cryptography/project%20%232/latex/project_2_3881.pdf.

[5] H. Böck, "Fermat factorization in the wild." Cryptology ePrint Archive, Paper 2023/026, 2023. https://eprint.iacr.org/2023/026.