Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Τμήμα Πληροφορικής

Προαιρετική εργασία για NGE-06-01

Η σειρά Fourier σε Python

Αλέξανδρος Κόρκος
alexkork@csd.auth.gr
3870

Θεσσαλονίκη, 16 Ιουνίου 2023

Η γενική μορφή της σειράς Fourier για μια συνάρτηση f που είναι περιοδική (με περίοδο $2p$) στο διάστημα $[-p, p]$, είναι

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{p}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{p}) \tag{1}$$

όπου

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx \tag{2}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{p})dx, n \geq 1 \tag{3}$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{p})dx, n \geq 1. \tag{4}$$

Η υλοποίησή των παραπάνω σχέσεων, φαίνεται παρακάτω

```python
def fourier_series(x_values: ndarray, func: Callable, p: float = pi, limit: int = 30) -> list[float]:
    def cos_term(x: float, n: float) -> Callable:
        return func(x) * cos((n * pi * x) / p)

    def sin_term(x: float, n: float) -> Callable:
        return func(x) * sin((n * pi * x) / p)

    def a0() -> float:
        return 1 / p * quad(func, -p, p)[0]

    def an(n: int) -> float:
        return 1 / p * quad(cos_term, -p, p, args=(n,))[0]

    def bn(n: int) -> float:
        return 1 / p * quad(sin_term, -p, p, args=(n,))[0]

    a0 = a0()
    a = [an(n) for n in range(limit)]
    b = [bn(n) for n in range(limit)]
    fs = [a0 / 2 + sum(a[n] * cos(n * pi * x / p) + b[n] * sin(n * pi * x / p) for n in range(1, limit)) for x in x_values]

    return fs
```

Κώδικας 1: Υπολογισμός της σειράς Fourier

συγκεκριμένα, τα ορίσματα έχουν ως εξής:

- x_values, είναι όλα τα x που ανήκουν στο $[-p, p]$ με μια συγκεκριμένη απόσταση,
- func, η συνάρτηση της οποίας θα υπολογιστεί η σειρά Fourier,
- p, η περίοδος,

- `limit`, ο αριθμός των όρων της σειράς που υπολογίζονται.

Ας υπολογίσουμε αρχικά την σειρά Fourier της

$$f(x) = \pi, 0 < x \leq \pi \tag{5}$$

που συγκλίνει σημειακά προς την περιττή επέκταση της συνάρτησης f στο $[\pi, \pi]$.

Η περιττή επέκταση της συνάρτησης είναι

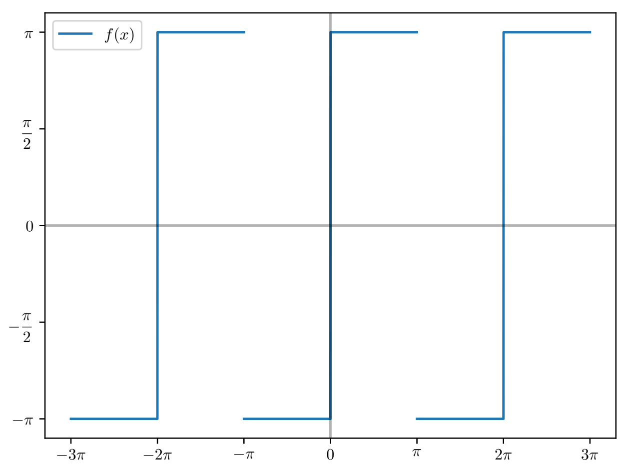
$$f_\pi(x) = \begin{cases} -\pi, & x \in [-\pi, 0) \\ 0, & x = 0 \\ \pi, & x \in (0, \pi] \end{cases} \tag{6}$$

όπου είναι περιοδική, με περίοδο το διάστημα που δίνεται.

```python
def f(x: float) -> float:
    if -pi <= x < 0:
        return -pi
    elif 0 < x <= pi:
        return pi
    return 0
```

Κώδικας 2: Υλοποίηση της συνάρτησης 6 σε Python

Δηλαδή η περίοδος της είναι π και για διάστημα τριών περιόδων η περιοδική επέκταση είναι



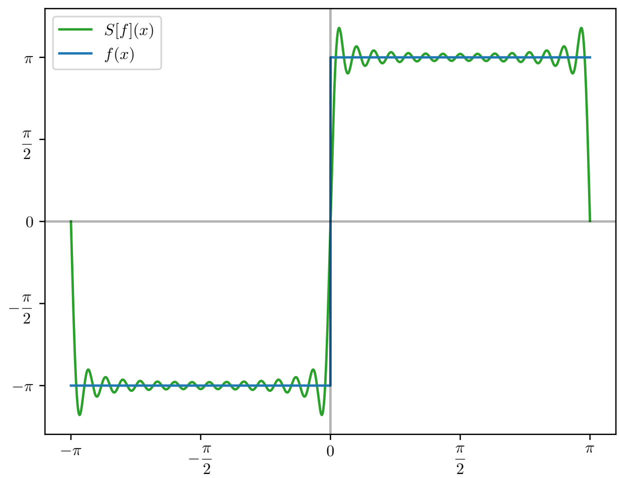
Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της f στο $[-3\pi, 3\pi]$

Στην συνέχεια, υπολογίζονται οι συντελεστές της σειράς Fourier αλλά και τα μερικά αθροίσματα της σειράς.

```
x = arange(-pi, pi, 0.001)
y = fourier_series(x, f)
```

Κώδικας 3: Υπολογισμός της σειράς Fourier της συνάρτησης 6

Παραλληλίζω την γραφική παράσταση της f με την $S[f](x)$ για να επιβεβαιώσω ότι πραγματικά συγκλίνουν στις "μορφές".



Σχήμα 2: Η f και η σειρά Fourier της f

Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα (2), η δυο συναρτήσεις ταυτίζονται για $x \in (-\pi, \pi)$. Όταν το $x = -\pi$ ή $x = \pi$ δηλ. στα σημεία της ασυνέχειας παρουσιάζονται μεγάλες ταλαντώσεις, παρατηρείται δηλαδή το φαινόμενο Gibbs.

Ας εξετάσουμε και τη σειρά Fourier της συνάρτησης

$$g(x) = \begin{cases} \cos(x), & 0 < x \leq \pi \\ 0, & \pi < x \leq 0. \end{cases} \tag{7}$$

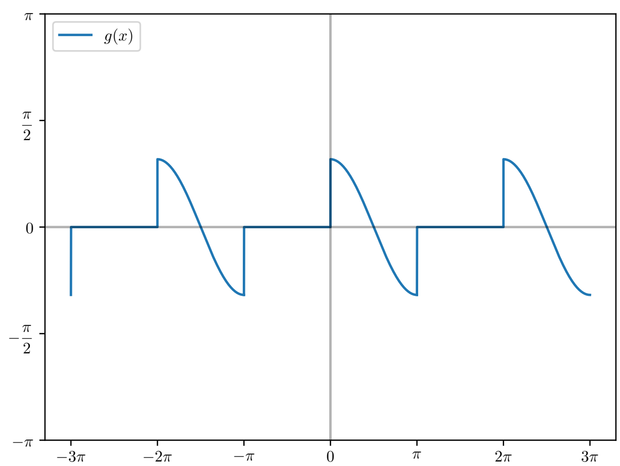
Η επέκταση της g στο $[-\pi, \pi]$ είναι

$$\tilde{g} = \begin{cases} \cos(x), & x \in (0, \pi] \text{ ή } x = -\pi \\ 0, & x \in (\pi, 0]. \end{cases} \tag{8}$$

```python
def g(x: float) -> float:
    if -pi < x <= 0:
        return 0
    elif 0 < x <= pi or x == -pi:
        return cos(x)
```

Κώδικας 4: Υλοποίηση της συνάρτησης 8 σε Python

Η περίοδος της f είναι 2π και για διάστημα τριών περιόδων η επέκταση της είναι



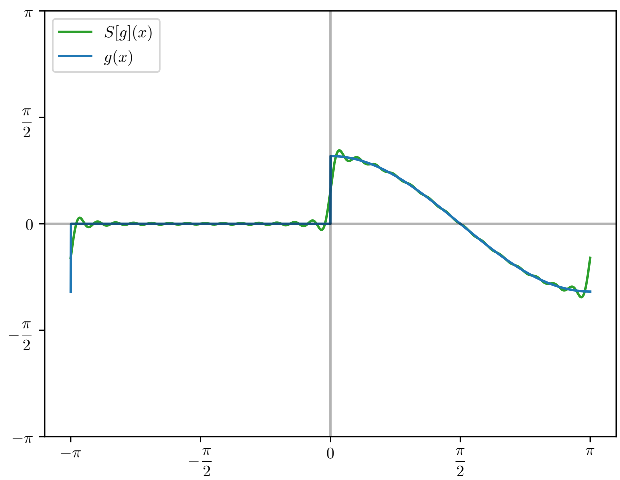
Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της f στο $[-3\pi, 3\pi]$

Όπως και προηγουμένως, υπολογίζονται οι συντελεστές της σειράς Fourier αλλά και τα μερικά αθροίσματα της σειράς.

```python
x = arange(-pi, pi, 0.001)
y = fourier_series(x, g)
```

Κώδικας 5: Υπολογισμός της σειράς Fourier της συνάρτησης 8

Επιπλέον, παραλληλίζω την γραφική παράσταση της f με την $S[f](x)$ και παρατηρώ και πάλι το φαινόμενο Gibbs στα σημεία της ασυνέχειας.



Σχήμα 4: Η g και η σειρά Fourier της g