ML

1 Теоретическое д/з

№17

x_1	4	0	-1	3	4
x_2	2	-3	-2	1	2
x_3	3	2	2	1	-3

1 шаг

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^{(i)} = (2, 0, 1)$$

$$X_c = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

№17

2 шаг

$$C = X_c^T \cdot X_c = \begin{pmatrix} 22 & 21 & -9 \\ 21 & 22 & -9 \\ -9 & -9 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{N-1} \cdot C = \frac{1}{4} C = \begin{pmatrix} \frac{22}{4} & \frac{21}{4} & -\frac{9}{4} \\ \frac{21}{4} & \frac{22}{4} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{22}{4} \end{pmatrix}$$

выборочная матрица ковариации

3 шаг

$$|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 22-\lambda & 21 & -9 \\ 21 & 22-\lambda & -9 \\ -9 & -9 & 22-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 65\lambda + 784) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda-16)(\lambda-49) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 16 \quad \lambda_3 = 49$$

собст. вектора: $\lambda_1 = 1$

$$\begin{cases} 21x + 21y - 9z = 0 \\ 21x + 21y - 9z = 0 \\ -9x - 9y + 21z = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 16$

$$\begin{cases} 6x + 21y - 9z = 0 \\ 21x + 6y - 9z = 0 \\ -9x - 9y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_2 = \frac{\sqrt{11}}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

для $\lambda_3 = 49$:

$$\begin{cases} -27x + 21y - 9z = 0 \\ 21x - 27y - 9z = 0 \\ -9x - 9y - 27z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_3 = \frac{\sqrt{22}}{22}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{N-1}\lambda_1 &= \frac{1}{4} \\ \frac{1}{N-1}\lambda_2 &= 4 \\ \frac{1}{N-1}\lambda_3 &= 12{,}25 \end{aligned}\right\}$$ дисперсии по главным компонентам

векторы V_1, V_2, V_3 – главные компоненты

№35

① $E((Y-c)^2 | X=x) = E(Y^2 - 2Yc + c^2 | X=x) =$

$= E(Y^2 | X=x) - 2c\,E(Y|X=x) + c^2 +$

$+ E(Y|X=x)^2 - E(Y|X=x)^2 =$

$= (c - E(Y|X=x))^2 + D(Y|X=x)$

min E достигается при $c = E(Y|X=x)$

② Найдем средний риск при

$f^*(y) = E(Y|X=x)$

$R(f^*) = \int\limits_x \int\limits_y (y - f^*(x))^2 p(y|X=x)\,dy\,p(x)dx =$

$= \int\limits_X E((Y - f^*(x))^2 | X=x)\,p(x)dx =$

$= \int\limits_X E((Y - E(Y|X=x))^2 | X=x)\,p(x)dx =$

$= \int\limits_X D(Y|X=x)\,p(x)dx = E_x(D_y(Y|X=x))$

№36

Док-ть, что $\operatorname{argmin} E(|Y-c| \mid X=x) = med(Y|X=x)$

① $E(|Y-c| \mid X=x) = \int\limits_{y} |y-c| \, f_y(x) \, dx =$

$= \int\limits_{-\infty}^{c} (c-y) f_y(x) dx + \int\limits_{c}^{+\infty} (y-c) f_y(x) dx =$

$= \int\limits_{-\infty}^{c} c f_y(x) dx - \int\limits_{-\infty}^{c} y f_y(x) dx + \int\limits_{c}^{+\infty} y f_y(x) dx -$

$- \int\limits_{c}^{+\infty} c f_y(x) dx$

② продифференцируем по c.

$$\frac{d E(|Y-c| \mid X=x)}{dc} = \int\limits_{-\infty}^{c} f_y(x) dx - \int\limits_{c}^{+\infty} f_y(x) dx = 0$$

Нужно взять c, чтобы $F_y(c) = 0{,}5$, а это значит, что $c = median(Y|X=x)$

№37

Как должна выглядеть ф-ция потерь $L(y', y)$ -? чтобы оптимальной была $f^*(x) = \text{mode}(y|X=x)$

---

1. $R(f^*) = \int\limits_x \int\limits_y L(y, f^*(x))\, p(y|X=x)\, p(x)\, dx\, dy$

$R(f^*) \to \min\limits_f$

Известно, что $f^*(x) = \text{mode}(y|X=x) \Rightarrow$

$\Rightarrow p(f|X=x) \to \max$

без ограничения общности зафиксируем $\exists\ X = X_0$

2. Тогда: если $f^*(X_0) = \text{mode}(y|X_0)$, то

$$p(f^*|X_0) = \max p(y|X_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$-p(f^*|X_0) = \min_f(-p(f|X_0))$$

DATA / DATE
ПН ВТ СР ЧТ ПТ СБ ВС
MON TUE WED THU FRI SAT SUN

$$\int_{Y} L(y,f)\cdot p(y|x_0)\,dy = -p(f|x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_{Y} -L(y,f)\cdot p(y|x_0)\,dy = p(f|x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$L(y,f) = -\delta(y-f) \text{ — ф-ция Дирака}$$

Т.к $L(y,f) \geq 0$ и $\delta(y-f) \geq 0$, то введем $C_0 = const \geq \delta(y-f)$

$$\Updownarrow$$

$$L(y,f) = C_0 - \delta(y-f)$$

③ В итоге получим:

$$R(f) = E_y\left(L(y,f)|x_0\right) = \int_{Y} L(y,f)\,p(y|x_0)\,dy =$$

$$= C_0 \underbrace{\int_{Y} p(y|x_0)\,dy}_{=1} - \underbrace{\int_{Y} \delta(y-f)\,p(y|x_0)\,dy}_{= p(f|x_0),\ \text{т.к ф-ция Дирака}} =$$

$$= C_0 - p(f|x_0) \to \min_{f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(f|x_0) \to \max \Rightarrow f^{*} = mode(y|x_0)$$

Ответ: $L(y,f) = C_0 - \delta(y-f)$, где $C_0 \geq \delta(y-f)$

№4.1

$W_k = v_0 + L(v_1, v_2, \dots, v_k)$

$\sum\limits_{i=1}^{N} dist^2(x^{(i)}, W_k) \to \min$, док-ть, что $v_0 = \bar{x}$

$v_0 = \arg\min \sum\limits_{i=1}^{N} dist^2(x^{(i)}, W_0)$.

$\exists\ D = \sum\limits_{i=1}^{N} dist^2(x^{(i)}, W_0) = \sum\limits_{i=1}^{N} \|x^{(i)} - v_0\|^2 =$

$= \sum\limits_{i=1}^{N} (x^{(i)} - v_0)^2$

Найдем min для D:

$\frac{\partial D}{\partial v_0} = -2 \sum\limits_{i=1}^{N} (x^{(i)} - v_0) = 0 = \sum\limits_{i=1}^{N} (x^{(i)} - v_0) = 0$

$\Leftarrow$

$v_0 = \frac{1}{N}(x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(n)}) =$

$= \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{n} x^{(i)} = \bar{x}$

Убедимся, что экстремум это (·) min

$\frac{\partial^2 D}{\partial v_0^2} = 2 \sum\limits_{i=1}^{N} 1 = 2n > 0 \Rightarrow v_0 = \bar{x}$ это (·) миним