2. ESTYMACJA PUNKTOWA

ZADANIE 2.1 (a) Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie prostą próbą losową z rozkładu wykładniczego $Exp(\lambda)$, czyli rozkładu ciągłego o gęstości $f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$, $\lambda > 0$. Wyprowadzić wzór na estymator największej wiarygodności parametru λ.

(b) W celu oszacowania czasu działania pewnych bateryjek, dział kontroli jakości zmierzył czas pracy 8 losowo wybranych bateryjek i otrzymał następujące wyniki (w godz.):

$$423, \ 705, \ 2623, \ 347, \ 620, \ 2719, \ 1035, \ 482.$$

Wiadomo, że czas pracy tych bateryjek ma rozkład wykładniczy $Exp(\lambda)$ z nieznaną $\lambda > 0$. Dla danych zebranych przez dział kontroli jakości, podać wartość estymatora największej wiarygodności parametru λ. Porównać wynik otrzymany przy użyciu wzoru z pkt. (a) z wynikiem otrzymanym przy użyciu funkcji `fitdistr()`.

(c) Dla danych z pkt. (b) wyznaczyć estymator największej wiarygodności dla

(i) średniego czasu działania bateryjki,

(ii) prawdopodobieństwa, że bateryjka będzie działać dłużej niż 1000 godz.

WSKAZÓWKA: Jeśli $X \sim Exp(\lambda)$, to $EX = \frac{1}{\lambda}$ i $P(X > a) = \exp(-\lambda a)$ dla $a > 0$. Przydaje się tu także tw. 1 z teorii dotyczącej estymacji punktowej.

ZADANIE 2.2 Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie prostą próbą losową z rozkładu geometrycznego $Ge(p)$ z nieznanym parametrem $p \in (0, 1)$. Wyznaczyć estymator największej wiarygodności

(a) parametru p,

(b) wartości oczekiwanej X_1,

(c) wariancji X_1.

UWAGI I WSKAZÓWKI: Rozkład geometryczny $Ge(p)$, $p \in (0, 1)$, to rozkład dyskretny o funkcji masy prawdopodobieństwa

$$p_p(x) = p(1-p)^x \quad \text{dla} \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Jeśli $X \sim Ge(p)$, to $EX = \frac{1-p}{p}$ i $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
Rozkład geometryczny ma następującą interpretację. Wykonujemy niezależne doświadczenia, z których każde może zakończyć się sukcesem (z prawdopodobieństwem p) lub porażką. Niech X oznacza liczbę porażek, które poprzedziły pierwszy sukces. Wtedy $X \sim Ge(p)$.

ZADANIE 2.3 Niech $Gamma(a, s)$ oznacza rozkład gamma z parametrem kształtu a i parametrem skali s, tzn. rozkład o gęstości

$$f_{a,s}(x) = \begin{cases} \frac{1}{s^a \Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-x/s) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}, \ a > 0, s > 0,$$

gdzie $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$. Wygenerować $n = 100$ obserwacji z rozkładu $Gamma(2, 1)$.

```
> rgamma(n=100,shape=2,scale=1)
```

Następnie przyjąć, że zapomnieliśmy wartości parametrów rozkładu gamma, z którego wygenerowaliśmy dane i, używając R, oszacować te parametry stosując metodę największej wiarygodności.