



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Automatizálási és Alkalmazott Informatikai Tanszék

Pályatervezési és mozgásirányítási algoritmusok fejlesztése mobil robotokhoz

Készítette

Csorvási Gábor, Nagy Ákos

Konzulens

Kiss Domokos

2014. október 22.

Tartalomjegyzék

Kivonat	3
Abstract	5
1. Bevezetés	7
1.1. Problémafelvetés	7
1.2. Pályatervezés elmélete	7
1.2.1. Alapvető fogalmak	7
1.2.2. Pályatervezők osztályozása	10
2. A C*CS, $c\bar{c}S$ algoritmus	12
2.1. Reeds-Shepp lokális pályák	12
2.2. C*CS lokális pályák	13
2.3. C*CS approximációs módszer	13
2.3.1. Globális tervező	14
2.3.2. Lokális tervező alkalmazása	14
2.4. $c\bar{c}S$	17
2.5. Eredmények	18
3. Az RTR algoritmus	19
3.1. RRT algoritmus	19
3.2. RTR algoritmus	20
3.2.1. Mintavételezés	21
3.2.2. Csomópont kiválasztás	21
3.2.3. Kiterjesztés	22
3.2.4. Útvonal meghatározása, optimalizálása	24
3.3. Eredmények	25
4. Pálya időparaméterezése	28
4.1. Jelölések	29
4.2. Differenciális robotmodell	30
4.2.1. Korlátozások	30
4.2.2. Geometriai sebességprofil	32
4.2.3. Újramintavételezés	35

4.3. Autószerű robotmodell	40
4.3.1. Korlátozások	42
4.3.2. Geometriai sebességprofil	42
5. Pályakövető szabályozás	44
5.1. Differenciális robotmodell	44
5.1.1. Egy helyben fordulás	44
5.1.2. Pályakövetés	46
5.2. Autószerű robotmodell	49
5.2.1. Virtuális vonalkövező szabályozás	49
6. Algoritmusok megvalósítása	52
6.1. Szimuláció - V-REP	52
6.1.1. Szerver program	52
6.1.2. Kliens programok	53
6.2. Szimulációs eredmények	55
6.2.1. Differenciális robot	55
6.2.2. Autószerű robot	57
6.3. Eredmények valós robotokon	59
6.3.1. Differenciális robot	59
6.3.2. Autószerű robot	61
7. Összegzés	62
Köszönetnyilvánítás	63
Irodalomjegyzék	65

Kivonat

A mobil robotok manapság egyre inkább feltörekvőben vannak. Már nem csak az ipar fedezi fel őket, hanem lassan a minden napjai életünk részévé válnak. Azonban még rengeteg elméleti és gyakorlati kérdés vár megoldásra, hogy az ilyen robotokkal rendszeresen találkozzunk. A mobil robotika egyik legalapvetőbb kérdése az akadályok jelenlétében történő mozgástervezés és mozgásvéghajtás. A dolgozatban ezt a kérdéskört járjuk körül, foglalkozunk a globális és lokális geometriai pályatervezéssel, pályamenti sebességprofil kialakításával, valamint pályakövető szabályozással. Ezeket két, síkban mozgó, kerekeken guruló robotmodellre alkalmazzuk, mind szimulált, mind valós környezetben.

A dolgozatban bemutatjuk a leggyakrabban használt pályatervezési algoritmusokat, és az ezekhez kapcsolódó előnyöket és problémákat. Külön kitérünk az általunk vizsgált (differenciális és autószerű) robotmodellekknél felmerülő kinematikai korlátozásokra, és ezek hatásaira a pályatervezésben. Egy approximációs pályatervezési megközelítést mutatunk be a dolgozatunkban, amely egy globális és egy lokális tervező algoritmus együttes használatán alapszik.

Az általunk alkalmazott RTR (Rotate-Translate-Rotate) globális tervező a szakiroda-lomból jól ismert RRT (Rapidly Exploring Random Trees) eljárásom alapul. Az RTR lényege, hogy a kiindulási és a cél konfigurációból két topológiai fát épít, és amennyiben ezek elérik egymást, a keresett pálya könnyedén előállítható. A pálya forgásokból (R) és transzlációs mozgásokból (T) áll, így a differenciális robotok számára közvetlenül is végre-hajtható pályát eredményez. További lényeges tulajdonsága, hogy figyelembe veszi a robot pontos alakját. Ez hatékony tervezést tesz lehetővé szűk folyosókat tartalmazó környezet esetén is, szemben az elterjedtebb, a robot alakját körrel helyettesítő módszerekkel.

A megtervezett geometriai pálya még nem tartalmaz információt a mozgás időparamétere-rezésére (a robot sebességére, gyorsulására vagy szögsebességére) nézve. Ezért bemutatunk egy általunk kifejlesztett algoritmust a pályamenti sebességprofil meghatározására. Ezt a profilt a robot maximális sebessége, maximális gyorsulása, maximális szögsebessége és a robot kerekeinek maximális gyorsulása alapján számoljuk ki. Az így kialakuló pályát ezután újramintavételezzük, hogy időben egyenletes mintavételű pálya álljon rendelkezésre a pályakövető szabályozás számára.

A pályakövető algoritmus a robot pályamenti sebességét és a szögsebességét függetle-nül szabályozza. A szétsatolt rendszer sebesség és szögsebesség beavatkozó jeleit a robot kinematikai egyenletei alapján átalakítjuk keréksebesség beavatkozó jelekre. A sebesség-szabályozási kört a robot kerekeinél található PI szabályozók valósítják meg. A szögsebesség-

szabályozás egy mozgás közbeni orientáció korrekciót hajt végre, amelynek alapját a robot későbbi előírt pozíciói képezik.

A fent leírt algoritmusokat differenciális robotmodellt feltételezve alakítottuk ki. A dolgozatban bemutatjuk azokat a módosításokat, illetve kiegészítéseket, amelyek lehetővé teszik a pályatervezést és követést autószerű (kormányzott) robotok esetében is. Ennek keretében bemutatjuk a C*CS lokális pályatervező algoritmust, amely az RTR algoritmussal együtt alkalmazva olyan pályát eredményez, amely figyelembe veszi az autó minimális fordulási sugarát.

Az algoritmusokat a V-REP robotszimulációs környezetben implementáltuk és teszteltük, majd működésüket két valós roboton is vizsgáltuk.

Abstract

The research and application of mobile robots is nowadays increasingly widespread. Beyond industrial applications they are getting popular in personal usage as well. However, there are a lot of theoretical and practical issues to be resolved. One of the most fundamental aspects of mobile robotics is motion planning and control in environment populated with obstacles. In this paper we discuss global and local geometric path planning, velocity profile generation and motion control along the path. We simulated the investigated methods and tested with differential and car-like robots.

In this paper we present the most commonly used path planning algorithms, and their benefits and disadvantages. We discuss the kinematic constraints for the tested (differential and car-like) robot models and the consequences of these constraints. We present an approximation method for path planning, which is based on a global and a local planner algorithm.

We use the RTR (Rotate-Translate-Rotate) global path planner algorithm, which is based on the well-known RRT (Rapidly Exploring Random Trees) method. The RTR builds two search trees starting from the initial and the goal configuration. If these paths reach each other, the solution can be obtained easily. The path consists of rotation (R) and translation (T) motion primitives, so the path is directly applicable for differential drive robots. Furthermore, the RTR-planner takes the precise shape of the robot into account, which makes possible to find a path in an environment with narrow corridors. This is advantageous compared to other methods which assume circular robot shape.

The path generated by the RTR-planner does not contain any information about the robot's velocity, acceleration and angular velocity. Therefore, we present an algorithm developed to determine the velocity profile. The profile is based on parameters such as the robot's maximum velocity, maximum acceleration, maximum angular velocity along the path and the maximum acceleration of the robot's wheels. After velocity profile generation the geometric path needs to be re-sampled to obtain a path having uniform time-sampling for the motion controller.

The path following algorithm controls the robot translational and angular velocity in two independent control loops. The translational and angular velocity control signals of the decoupled system are converted to wheel velocity control signals based on the robot kinematic equations. The velocity control loops implemented on both wheel by a PI controllers. The angular velocity controller is based on orientation error between the current robot configuration and a future path point.

The algorithms described above are developed primarily for differential robots, but can be extended for car-like robots as well. In this context we introduce the C*CS local path planner method, which takes into account the minimal turning radius of the car and can be applied together with the RTR planner in order to obtain a feasible path for this robot class.

We have implemented and tested the algorithms in V-REP robot simulation framework and with real robots as well.

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Problémafelvetés

A helyváltoztatásra képes, úgynevezett mobil robotok esetében alapvető szituáció, hogy a robotnak a feladata véghajtásához el kell jutnia egy adott célpontba. Ehhez önmagának kell az adott környezetben megterveznie a pályát és emberi beavatkozás nélkül kell sikeresen eljutnia a kívánt célpontba. A probléma nagyságrendileg nehezebb amikor a robot környezetében akadályok is találhatóak.

Célunk azon megközelítések és módszerek áttekintése, amelyek megoldást nyújtanak az autonóm pályatervezés kérdésére. Néhány módszert részletesebben is ismertetünk, ezeket szimulátoron és valós robotokon is implementáltuk, illetve teszteltük. A pályatervezéshez szorosan kapcsoló téma a mozgásirányítás, amivel szintén foglalkoznunk kell, hogy valós környezetben ténylegesen használható eljárásokat kapunk.

1.2. Pályatervezés elmélete

Az elmúlt időszakban a pályatervezéssel kapcsolatban igen sok kutatás foglalkozott. Ahhoz, hogy ezeket az algoritmusokat ismertessük, be kell vezetnünk néhány alapvető fogalmat.

1.2.1. Alapvető fogalmak

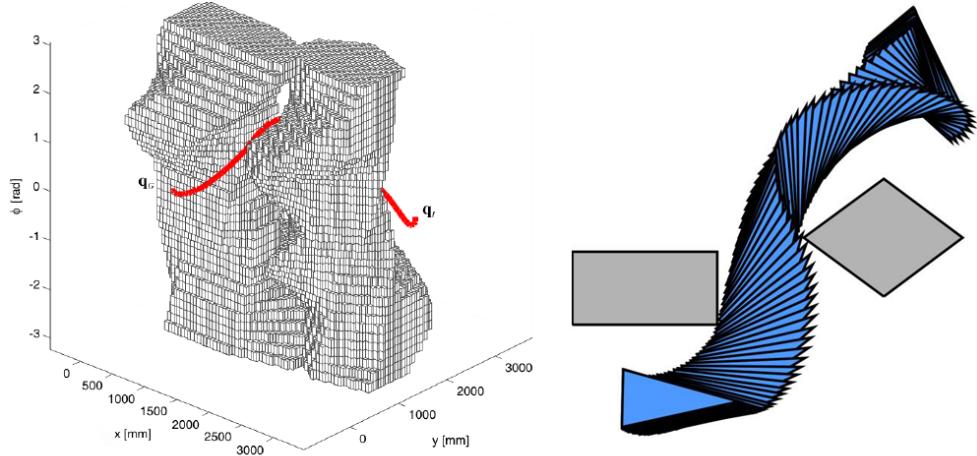
A pályatervezés során a robot pillanatnyi állapotát a *konfigurációjával* írhatjuk le. Síkban mozgó robotok esetében a konfiguráció a következőket tartalmazza [13]:

$$q = (x, y, \theta), \quad (1.1)$$

ahol q a robot konfigurációja, x, y határozza meg a robot pozíóját a síkon és θ határozza meg a robot orientációját.

Egy lehetséges környezetben a robot összes állapotát, a *konfigurációs tér* adja meg, amit C -vel jelölünk. A konfigurációs tér azon részhalmazát, amely esetében a robot a környezetben található akadályokkal nem ütközik, *szabad (konfigurációs) térnek* nevezünk (C_{free}). E halmaz komplementere azokat a konfigurációkat tartalmazza, amelyek esetén

a robot ütközne az akadályokkal ($C_{obs} = C \setminus C_{obs}$). A konfigurációs teret az 1.1. ábrán szemléltetjük.



1.1. ábra. Konfigurációs tér szemléltetése egy adott útvonal során. A konfigurációs térben a piros vonal a robot útját a célpontja felé.[4]

A korlátozások ismerete alapvető fontosságú a pályatervezés és mozgásirányítás során. A környezetben elhelyezkedő akadályokat *globális korlátozásoknak* tekintjük, a robothoz kapcsolódó korlátozásokat pedig *lokális korlátozásoknak* [13]. A lokális korlátozásokat a robot konfigurációs változóinak differenciál-egyenletével írhatjuk le, ezért gyakran nevezik őket *differenciális korlátozásoknak* is. Differenciális korlátozások vonatkozhatnak sebesség (kinematikai) és gyorsulás mennyiségre is (dinamikai korlát).

Dolgozatunkban kinematikai korlátozásokkal fogunk foglalkozni, dinamikai korlátokkal nem.

Egy autó esetén mindenki számára egyértelmű, hogy csak bizonyos íveken tudunk mozogni, egy adott konfigurációból nem tudunk a konfigurációs tér bármely irányába elmozdulni, habár a szabad tér bármely konfigurációjába eljuthatunk. Autónál emiatt nem olyan egyszerű például a párhuzamosan parkolás. Azokat a robotokat, amelyek ehhez hasonló korlátozásokkal rendelkeznek, *anholonom rendszereknek* nevezzük. Az anholonom korlátozásról akkor beszélünk, ha a korlátozás olyan differenciál-egyenlettel írható le, amely nem integrálható.

Az általunk vizsgált két robot típus, az *autószerű robotok* és a *differenciális robotok* is anholonom rendszerek. Viszont léteznek olyan robotok, amelyek nem rendelkeznek anholonom korlátozásokkal (holonom rendszerek), ilyenek például az omnidirekcionális robotok. Egy omnidirekcionális robot képes bármilyen konfigurációból a tér bármely irányába elmozdulni.

Robotmodellek

Differenciális robotot egy közös tengelyen lévő két kerék segítségével mozgatjuk, így a differenciális meghajtásra utal a differenciális robot elnevezés. A mozgás kinematikai leírását az (1.2) egyenletek adják meg.

$$v = \frac{v_r + v_l}{2} \quad (1.2)$$

$$\omega = \frac{v_r - v_l}{W},$$

ahol v a robot sebessége, v_r a robot jobb kerekének sebessége, v_l a robot bal kerekének sebessége, ω a robot szögsebessége és W a robot kerekei közti távolság. Innen a robot egyenletei:

$$\dot{x} = v \cos \theta \quad (1.3)$$

$$\dot{y} = v \sin \theta$$

$$\dot{\theta} = \omega,$$

Ezt a robot típust gyakran alkalmazzák, mivel egyszerű felépítésű és anholonom mivolta ellenére könnyedén irányítható. Ahogyan az (1.2). egyenletekből is következik a robot képes egy helyben megfordulni, ami sok esetben előnyös, például párhuzamos parkolás esetén.

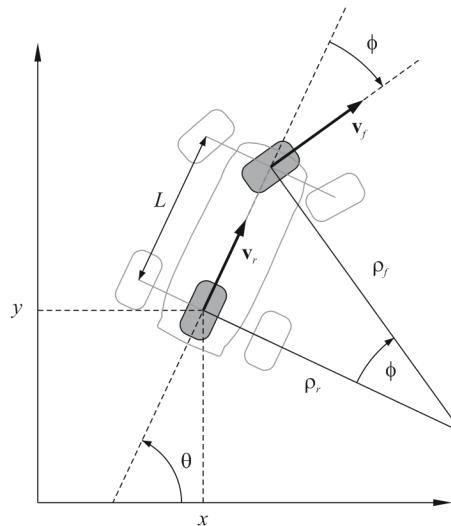
Az általunk vizsgált másik robot típust, az autószerű robotokat mindenki jól ismeri és elterjedtsége megkérőjelezhetetlen. Az autószerű robot kinematikai leírása a következő:

$$\dot{x} = v_r \cos \theta \quad (1.4)$$

$$\dot{y} = v_r \sin \theta$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_r}{L} \tan \phi,$$

ahol L az első és hátsó tengelyek távolsága, ϕ a kormányszög, v pedig a hátsó tengely középpontjának tangenciális sebessége, amelyet a robot referencia pontjának nevezünk.



1.2. ábra. Autószerű robot modellje.

1.2.2. Pályatervezők osztályozása

Mielőtt belekezdenénk az általunk megvizsgált pályatervező algoritmusok részletesebb ismertetésébe, tekintsük át az irodalomban használatos módszereket.

Geometriai tervezés szerinti csoportosítás

A pályatervezők geometriai módszerei szerint alapvetően két csoportot különböztetünk meg: a *globális tervezők* és a *reaktív tervezők* csoportját [13].

A globális tervezők esetében a konfigurációs tér egészét figyelembe vesszük a tervezéskor, míg a reaktív tervezők csupán a robot környezetében lévő szűkebb tér ismeretére építenek. A globális tervezők előnye, hogy képesek akár optimális megoldást is találni, míg a reaktív tervezők egy lokális minimumhelyen ragadhatnak, nem garantálható, hogy a robot eljut a célponthoz. A globális tervezés hátránya azonban a lényegesen nagyobb futási idő, ezért gyakran változó vagy ismeretlen környezet esetén előnyösebb lehet a reaktív tervezők használata.

A reaktív tervezők esetében a robot alakját körrel szokták közelíteni, ezzel is egyszerűsítve a tervezés folyamatát. Ezzel szemben globális algoritmusok a robot pontos alakját figyelembe veszik, aminek nagy jelentősége van szűk folyosókat tartalmazó pálya esetén. Az általunk bemutatott algoritmusok esetén mi is figyelembe vesszük a robot pontos alakját.

A globális tervezők esetén megkülönböztetünk mintavételes és kombinatorikus módszereket[9]. A mintavételes módszerek a konfigurációs teret véletlenszerűen mintavételezik és ez alapján próbálnak utat keresni a célpontba. Ellenben a kombinatorikus módszerek a környezet pontos geometriai modellje alapján terveznek utat. Ennek az előnye a mintavételes módszerrel szemben, hogy meg lehet mondani mondani, hogy létezik-e egyáltalán megoldás az adott környezetben. A mintavételes tervezők esetén viszont nem tudjuk ezt eldöntenı.

A globális tervezők sok esetben topologikus gráfokat (speciális esetben fákat) használnak a konfigurációs tér struktúrájának leírásához.[3], [8]. Az általunk bemutatott egyik globális tervező, az RTR algoritmus is ezt a megközelítést alkalmazza. A gráfok (ill. fák) csomópontjai a konfigurációs térből vett minták, élei pedig az ezeket összekötő ütközésmentes pályaszakaszok.

Léteznek még más módszerek a pályatervezésre, ilyenek például a reaktív algoritmusok, és a kombinatorikus tervező eljárások is. A dolgozatunknak nem témája a reaktív tervezés, de a későbbiekben látunk példát egy kombinatorikus tervezőre.

Irányított rendszer szerinti csoportosítás

A robotok, mint irányított rendszerek esetén megkülönböztetjük az anholonom és holonom rendszereket a pályatervezők csoportosítása esetén is. Anholonom rendszerek esetén önmagában a robot állapotváltoztatása sem triviális feladat. Azokat az eljárásokat, amelyek képesek egy anholonom rendszert egy kezdő konfigurációból egy cél konfigurációba eljuttatni az akadályok figyelembe vétele nélkül, *lokális tervezőknek* hívjuk [9].

Gyakran már a globális tervező figyelembe veszi a robot korlátozásait és ennek megfelelő geometriai primitíveket használ vagy esetleg egy lokális tervezőt használ minden állapot-

változtatásra.

Az általunk vizsgált RTR tervező egyenessel és egy helyben fordulással dolgozik. Ezek a mozgásprimitívek ideálisak egy differenciális robot számára, így az RTR pályatervező által tervezett pályát módosítás nélkül végre tudja hajtani egy differenciális robot.

A globális tervező által megtervezett pályát közelíthetjük egy lokális tervezővel, ha az anholonom robotunk közvetlenül nem tudná lekövetni a globális tervező pályáját. Ezt az eljárást, approximációs módszernek nevezik. A 2. fejezetben bemutatunk egy lokális tervezőt, amely képes egy előzetes út alapján olyan utat generálni, amely egy autószerű robot számára végrehajtható. Az előzetes pályát valamilyen globális tervező szolgáltatja, a mi esetünkben két globális tervezőt is megvizsgálunk erre a cérla.

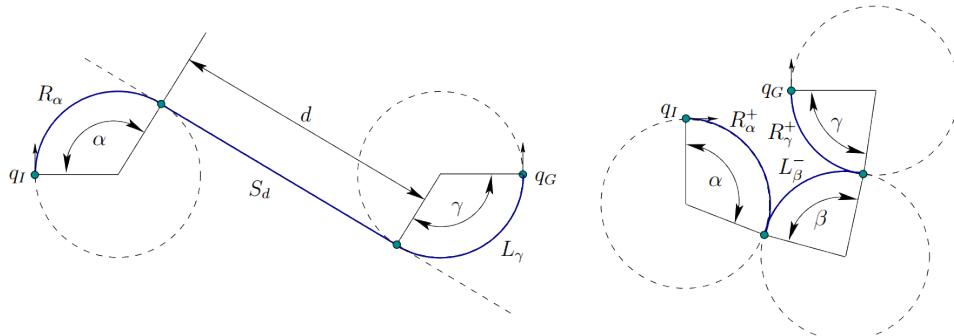
2. fejezet

A C*CS, $c\bar{c}S$ algoritmus

A C*CS és a $c\bar{c}S$ algoritmus is Kiss Domokos munkája[5]. Az algoritmusok elsődlegesen autószerű robotok számára terveznek pályát, de az így tervezett pálya egy differenciális robot számára is végrehajtható. Feladatunk az algoritmus implementálása volt C++ nyelven, majd annak tesztelése szimulációs, illetve valós környezetben. A fejezetet az algoritmus ismertetésével kezdjük, majd kitérünk az implementációs problémákra, és az elért eredményekre.

2.1. Reeds-Shepp lokális pályák

Az anholonom rendszerek irányítása akadályuktól mentes környezetben is egy igen bonyolult feladat. Sok esetben nem adható meg általános algoritmus, csak néhány speciális rendszer esetén. Szerencsére ilyen rendszerek közé tartoznak a differenciális robotok, az autószerű robotok, amelyek csak előre mozoghatnak (Dubins autó), és azok amelyek előre és hátra is képesek mozogni.



2.1. ábra. Dubins és Reeds-Shepp megoldások [9]

Az utóbbi típusú robotokat hívjuk Reeds-Shepp autóknak, melyeknél bizonyított, hogy bármely kezdő- és célkonfiguráció közt a legrövidebb utat megtalálhatjuk 48 lehetséges megoldás közül, amelyből kettő látható a 2.1 ábrán. Ezek a megoldások maximum öt egyenes vagy körív kombinációjából állhatnak, és a pályák maximum két csúcsot tartalmazhatnak, azaz ennyiszer lehet irányt változtatni a végrehajtás közben [10]. A megoldások száma

egyéb megkötések árán tovább csökkenthető.

Mint látható akadályoktól mentes környezetben találhatunk optimális útvonalat, de ennek hátránya, hogy minden minimális sugarú pályákat feltételez, mely egy valós esetben nem életszerű, illetve a pályák lehetnek igen bonyolultak is. De ha elvetjük az optimalitás igényét, amit egyébként is meg kell tennünk, ha egy globális tervező részeként alkalmazzuk a módszert, akkor a lehetséges megoldásokon jelentős mértékben egyszerűsíthetünk.

2.2. C*CS lokális pályák

A lokális tervezők bármely kezdő- és célkonfiguráció páros esetén megoldást kell nyújtanak, de megfelelő koordináta-rendszer választásával egyszerűsíthetünk a számításokon. Tegyük fel hogy egy ilyen választás mellett adódott $q_I = (x_I, y_I, \theta_I)$ kezdő és $q_G = (0, 0, 0)$ célkonfiguráció. Ha eltekintünk a minimális fordulási sugár korlátozásától, és feltesszük, hogy $\theta_I \neq 0$, akkor könnyen belátható, hogy egy kör és egy egyenes segítségével elérhető a célkonfiguráció. Először egy érintő körön elfordulunk a $\tilde{q}_G = (\tilde{x}_G, 0, 0)$ köztes célkonfigurációba, majd egy egyenes mentén végighaladunk a célig. Az ehhez tartozó kör sugarát a következő egyenlet segítségével számíthatjuk:

$$\rho_{I,\tilde{G}} = \frac{y_I}{1 - \cos \theta_I} \quad (2.1)$$

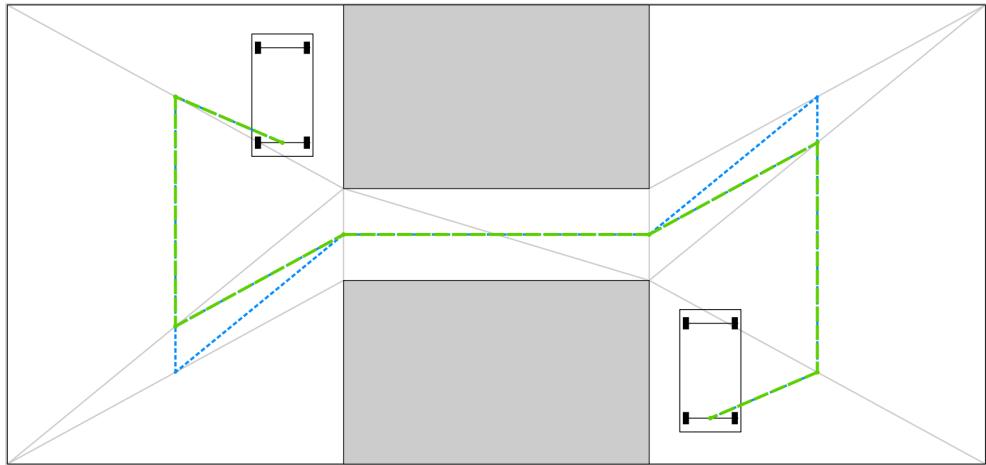
Ha a kiadódó sugár kisebb mint a minimálisan megengedett ($|\rho_{I,\tilde{G}}| < \rho_{min}$), vagy igaz, hogy $\theta_I = 0$, akkor egy egyenes vagy egy kör segítségével egy köztes kezdőkonfigurációba ($\tilde{q}_I = (\tilde{x}_I, \tilde{y}_I, \tilde{\theta}_I)$) kell eljutnunk, ahol biztosított, hogy $\tilde{\theta}_I \neq 0$ és, hogy $\rho_{\tilde{I},\tilde{G}} \geq \rho_{min}$. Megjegyzendő, hogy az első szakasz nem lehet egyenes, ha $\theta_I = 0, \theta_I = \pi$ vagy $|y_I| < 2\rho_{min}$. Bizonyított, hogy \tilde{q}_I megválasztása végtelen sokféleképpen lehetséges [5].

Hogy egyszerűsítsük a szakaszok jelölését, a továbbiakban az egyes szakaszokra S és C betűk segítségével hivatkozunk. Az előzőek alapján egy konfiguráció párba SCS , vagy CCS segítségével eljuthatunk. Könnyen belátható, hogy ha egy C esetén a sugárral a végtelenbe tartunk, akkor a kiválasztott szakaszunk az egyeneshez tart. Az olyan speciális köríveket, amelyek sugara végtelen is lehet, C^* -gal jelöljük. Innen a módszer neve a C^*CS .

2.3. C*CS approximációs módszer

Az általunk használt algoritmus egy approximációs módszert alkot, mely egy előzetes globális pályát rekurzív módon felbont kisebb szakaszokra, majd ezekre próbál illeszteni egy-egy fentebb bemutatott C*CS pályát.¹ A végeredményül elkészült, az algoritmus által visszatadott pálya autószerű robotok számára könnyedén lekövethető, mivel elsődlegesen ezek számára lett kialakítva. Ennek ellenére a megoldást természetesen egy differenciális robot is képes lekövetni, mivel az nem rendelkezik korlátozással a forduló kör sugarát illetően.

¹Bár a lokális tervező algoritmus neve a C*CS, de a végeredményben kialakult pálya összességében is körök és egyenesek kombinációjából áll, így ez a név ráragadt az approximációs módszerre is. A későbbiekben, ahol ez félreértésre adhat okot, ott ezt külön tisztázzuk.



2.2. ábra. Globális tervező: cella dekompozíció, gráf készítés, útvonal keresés

2.3.1. Globális tervező

Az előzetes pálya bármilyen globális tervező eredménye lehet. Elsődleges célja egy mankó nyújtása a későbbi tervező számára. A végső megoldásnak nem feltétele, hogy az előzetes pálya akár egyetlen pontját is tartalmazza.

Mi erre a célra egy celladekompozíciót alapuló algoritmust használtunk. Ez az eljárás a környezetet háromszögekre bontja, majd ezeknek a háromszögeknek az oldalfelező pontjait összekötve gráfot alkot. Ebbe beszűrja a kezdő- és célkonfigurációt, majd ezeket összeköti a legközelebb álló néhány ponttal. Az éleket a pontok egymástól való távolságával súlyozzuk, majd ebben a gráfban a Dijkstra-algoritmus[15] segítségével megkeressük a legrövidebb utat.

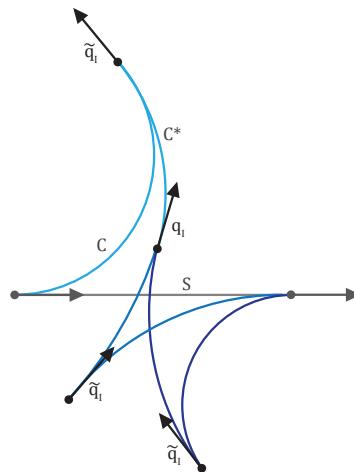
Ennek a megoldásnak az előnye, hogy a szabad terület közepén alkot pályát, így ha az autó ezt a pályát követi, akkor bármilyen irányú manőverezésre lesz lehetősége, ha a pálya ezt megengedi. További előnye, hogy ez egy kombinatorikus eljárás, így véges időn belül képes megmondani, hogy létezik-e megoldás. Az eljárás egyik fő hibája, hogy a háromszögelés miatt, csak sokszögekkel leírható akadályokkal képes dolgozni, és még ebben a formájában nem veszi figyelembe az autó kiterjedését. Ezen könnyen lehet segíteni, ha figyelembe vesszük az oldalfelező pontok közötti szakaszok távolságát az akadályuktól, és ha a pálya- és az akadályél túl közel vannak egymáshoz, akkor töröljük az élt a gráfból. Sajnos az eljárás negatívumokkal is bír, amiről a fejezet végén még szót ejtünk.

2.3.2. Lokális tervező alkalmazása

Ha a globális tervező tudott visszaadni megoldást, akkor az algoritmus tovább folytatódik a következőképpen: Az előzetes pálya két konfigurációját választjuk ki, és a fentebb említett C*CS pályákat keresünk közöttük. Az eljárás először a pálya két végpontja között keres útvonalat, ami egyszerű esetekben akár rögtön megoldásra is vezethet, felgyorsítva az algoritmus működését. Ha ez a keresés nem járt sikerrel, akkor az előzetes pályát megfelezi az algoritmus, és az első konfiguráció valamint az új célkonfiguráció között keres megoldást. Ezt egészen addig ismétli, míg van köztes konfigurációs pont, ha elfogyott, további pontokat

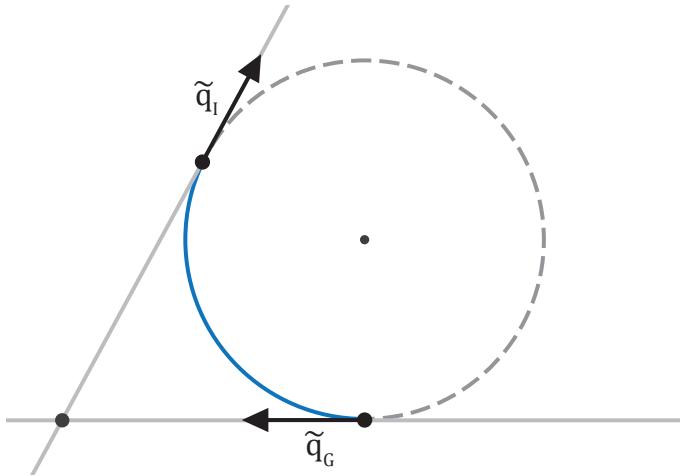
illeszt a pályába.

Az előzőekben említettük, hogy a C*CS végtelen sok megoldást nyújt. Lokális esetben ez nem előnyös tulajdonság, de akadályok jelenlétében már előnyként tekinthetünk rá, mivel így sokkal nagyobb valószínűsséggel találhatunk végrehajtható pályát. Természetesen az összes megoldást nincs lehetőségünk kipróbálni, így valamilyen mintavételező eljárással kell megoldanunk ezt a problémát.



2.3. ábra. q_I megválasztása

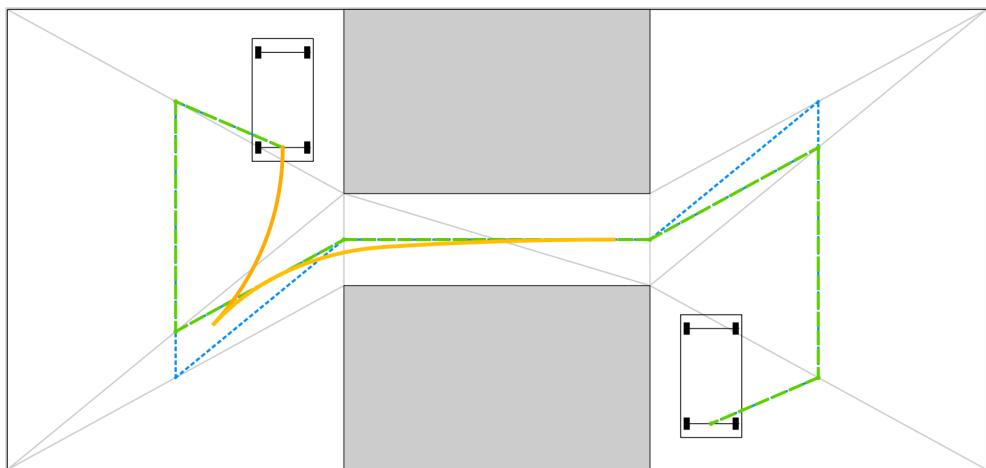
A végtelen sok megoldást a \tilde{q}_I kiválasztásának szabadsága okozza. Erre egy példa láttható a 2.3 ábrán. Ezért az algoritmus összegyűji azokat a konfigurációkat, melyeket a q_I konfigurációból ütközés nélkül elérhetünk. Ehhez a környezetet fel kell osszuk egységnyi távolságokra, mivel így véges sok lehetőséget kapunk. A kiszámítás ideje természetesen függ a választott távolságegységtől és a környezet méretétől. Az eredmények azt mutatják, hogy a teljes algoritmus futásának ez a leghosszabb része, ami nem meglepő, mivel a körívek kiszámítása komplex művelet, és ezt egy adott pont esetén a robot testének minden csúcsára ki kell számoljuk, hogy ütközést tudjunk detektálni. A művelet hatékonyságán több módon lehet javítani, például nagyobb távolságegység megválasztásával. Másik javítási lehetőség, ha előre elkészítünk egy foglaltsági mátrixot, ami megmondja az adott pont akadályon belül van-e, így ezekre a pontokra nem kell a számítást elvégezni. Mivel az így kapott körívek egy adott kezdőkonfigurációhoz tartoznak, további javítási lehetőség lehet, ha az approximációs lépésekben inkább a célkonfiguráció pontját mozgatjuk, így nem kell újra és újra kiszámolni a köríven elérhető sokaságot.



2.4. ábra. Középső körív számítása érintő körrel

Az algoritmus további részében a 2.2 pontban látott módon, a hátralévő körív, és egyenes szakasz kiszámítása a feladat. Egy irányított kör esetén ez két lehetséges pályát jelent, amint az látható a 2.4 ábrán. Ezek után nem elég csak a körívek végrehajthatóságát ellenőriznünk, hanem meg kell nézni ezt a hátralévő egyenes szakaszokra is. Ugyan a globális pálya tervezésekor ellenőriztük ezeket, de az érintő körök keresésekor nem volt feltétel, hogy az érintési pontok ezeken a szakaszokon belül helyezkedjenek el, ezért ellenőriznünk kell a teljes szakaszon a végrehajthatóságot.

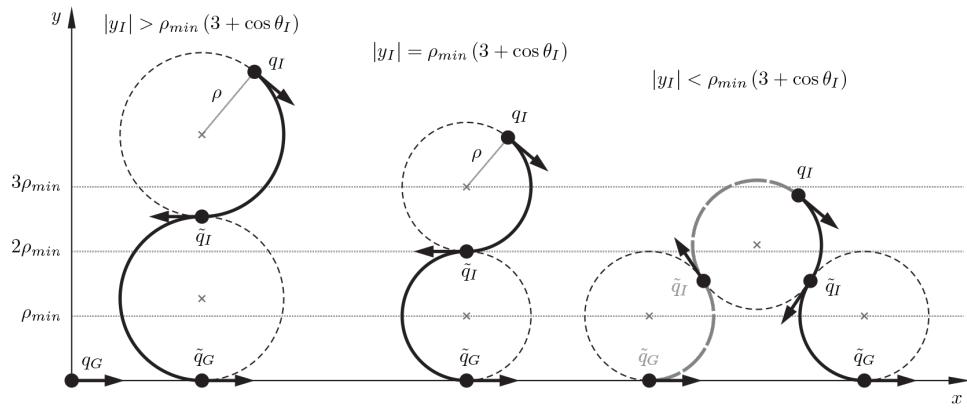
Végül az így keletkező végrehajtható pályák sokasága közül ki kell választanunk egyet. Ezt többféleképpen megtehetjük. Talán a legkézenfekvőbb a legrövidebb megoldás kikeresése és beillesztése az előzetes pályába. Itt érdemes megemlíteni, hogy a végeredmény akkor fog igazán hasonlítani a valósághoz, ha lecsökkentjük a tolatások számát, mivel az emberek nagy többsége nem szeret tolatva közlekedni. Hogy ezt megtehessük, az algoritmus opcionálisan elfogad egy súlytényezőt, mellyel a tolató szakaszok „hosszát” tudjuk megnövelni.



2.5. ábra. A *C*CS* algoritmus működés közben

2.4. $c\bar{c}S$

Ha az előzőekben látottak nem vezetnek megoldásra, tehát nincs olyan C*CS pálya, mely végrehajtható lenne, akkor egy kisebb szakaszt kell választanunk a globális pályából. Ezt viszont nem tehetjük meg végtelenséggel. Az egyik ok például az, hogy a globális pálya szakaszok nem bonthatók több részre, mert ha ki is választunk egy pontot a szakasz közepéről, akkor is ugyan arra az egyenesre próbálnánk meg érintő köröket találni. Persze kereshetünk különböző megoldásokat az újabb konfigurációk kiválasztására, de ezek a megoldások önmagukban nem elegendők. Valahogy biztosítanunk kell azt, hogy az algoritmusunk konvergáljon a megoldás felé, amihez olyan lokális tervezőre van szükségünk, mely teljesíti a topológiai feltételt. Ha ezt biztosítani tudjuk, akkor az approximációs algoritmusunk teljes lesz. A teljesség itt azt jelenti, hogy az algoritmus minden esetben megoldással tér vissza, mikor a globális tervező érvényes pályát ad vissza. Tehát a körívekkel való közelítés nem csökkenti a megoldás létezésének esélyét.



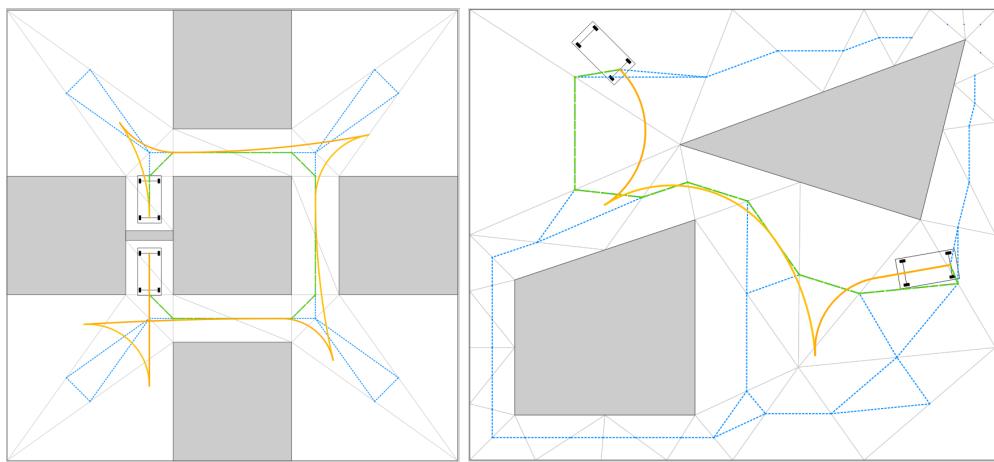
2.6. ábra. A $c\bar{c}S$ algoritmus megoldásai különböző y_I esetén[5]

Olyan esetekben, amikor a globális pályát tovább kellene bontanunk, átváltunk a $c\bar{c}S$ algoritmusra, mely a topológiai feltételt teljesíti [5]. Ez az algoritmus a C*CS algoritmus egy módosított változata, mely csak egy megoldást ad egy konfiguráció párra. Az eljárás lényege, hogy az első két kör sugara megegyező, de ellentétes előjelű, tehát a másik irányba kell forgassuk a kormányt. A komplementer jelölés jelzi az előjel változását. Ahogy a 2.6 ábrán látható, ha q_I túl közel van a q_G egyeneséhez, akkor a körök egymás mellett elcsúsznak, és két megoldást is adnak.

Bár a $c\bar{c}S$ egy megoldást ad, a végrehajtásakor több lehetséges megoldást is „eldob”. A módszer implementációját úgy készítettük el, hogy minden ilyen megoldást ellenőrizzen, ha esetleg a legrövidebb nem lenne végrehajtható, akkor válasszon másikat. Jogosan felmerülhet a kérdés, hogy ha ez az algoritmus minden esetben nyújt megoldást, akkor miért nem ezt használjuk a C*CS helyett? Bár valóban a $c\bar{c}S$ minden esetben nyújt megoldást, a C*CS több lehetséges megoldás közül választ, így a gyakorlatban természetesebb pályákat ad eredményül.

2.5. Eredmények

A tervező algoritmus futása közben nagy mennyiségű lebegőpontos számítást végez, de ezen felül viszonylag nagy memóriaigényű is, és sok iterációs szakasza van. Az algoritmus egy implementált változata rendelkezésre állt MATLAB script formátumban, de ez elsődlegesen demonstrációs célt szolgált. Ettől a nyelvtől azt várnánk, hogy a lebegőpontos számításokat gyorsan képes elvégezni, de a feladatot rendkívül lassan hajtotta végre. Ennek elsődleges oka valószínűleg az interpretált működés. Az ilyen algoritmusokra nem ez a legalkalmasabb nyelv, ezért is merült fel elsődlegesen egy gépközeli nyelv használata. A legnagyobb tapasztalatunk a C++ nyelvvel kapcsolatban volt, és grafikus számítások során is ezt a nyelvet szokták használni a hatékonysága miatt.



2.7. ábra. A C^*CS algoritmus megoldása különféle környezetekben

Pontos méréseket nem végeztünk, de nagyságrendileg százszoros gyorsulást sikerült elérnünk, és a legbonyolultabb környezetben is egy másodpercen belül sikerült megoldást találnia az algoritmusnak². Ez egy igen nagy előrelépés, így valószínű, hogy egy kisebb teljesítményű beágyazott számítógépen is elfogadható időn belül végez.

A fejlesztés során odafigyeltük, hogy hol lehetne gyorsítani, módosítani a működésen. Ahol ez egyszerűen megvalósítható volt, ott ezeket elvégeztük, de maradtak további fejlesztési lehetőségek is a programban.

Az esetek nagy többségében a celladekompozíciós eljárással tervezett globális pálya jó eredménnyel szolgál, de néhány speciális esetben lehetséges, hogy olyan pályával tér vissza, melyet egy autóval képtelenség lekövetni. Ilyen eset például két, egymásra merőleges, autó szélességű folyosó, ahol az elfordulásra nincs hely, de ezt a globális tervező nem veszi észre. Egy másik problémás eset a párhuzamos parkolás, ahol bár úgy tűnik végrehajtható lenne, de a globális tervezés során kialakult konfigurációk ezt nem teszik lehetővé. A következő fejezetben bemutatunk egy másik globális tervezőt, mely ezeket a problémákat megoldja.

²Intel Core 2 Duo E8400 @ 3.0Ghz, 4Gb RAM

3. fejezet

Az RTR algoritmus

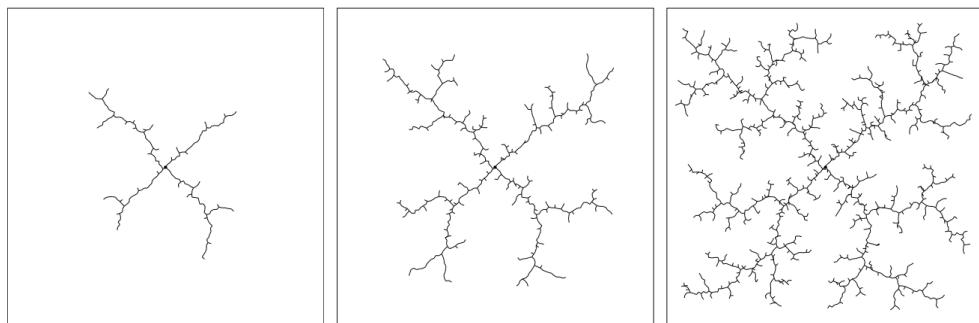
Az RTR (Rotate-Translate-Rotate) algoritmust Kiss Domokos dolgozta ki [6]. A mi feladatunk az algoritmus implementálása volt C++ nyelven, majd az algoritmus tesztelése szimulációs környezetben és valós roboton.

Az algoritmus az irodalomból gyakran használt RRT algoritmuson alapszik, ezért ennek a bemutatásával kezdjük a fejezetet.

3.1. RRT algoritmus

Az RRT (Rapidly Exploring Random Trees) algoritmus lényege, hogy a kezdeti konfigurációból egy fát építünk a szabadon bejárható konfigurációs térben [8]. A fa csomópontjaiban konfigurációk találhatóak és a fa terjesztését úgy irányítjuk, hogy a kívánt célkonfiguráció felé tartson. Ha a fa ténylegesen eléri a célkonfigurációt, akkor az utat a kezdeti konfigurációból a célkonfigurációba már könnyedén megkaphatjuk.

Létezik olyan változata az RRT algoritmusnak, ahol nemcsak a kezdeti konfigurációból építünk fát, hanem a célkonfigurációból vagy akár több köztes pontból is.



3.1. ábra. Az RRT algoritmus három különböző iterációjánál [8].

A fa építés úgy kezdődik, hogy véletlen konfigurációkat veszünk a környezetből (q_{rand}). Ezt hívják *mintavételezési szakasznak*. Ezután meghatározzuk, hogy a fában melyik konfiguráció van a legközelebb a mintavételezett konfigurációhoz (q_{near}). Ez a *csomópont kiválasztó szakasz*. Előfordulhat, hogy csak a fa csomópontjaiból választunk konfigurációkat, de gyakran nemcsak ezeket választjuk, hanem a fa csúcspontjai közötti élek egy köztes

konfigurációját.

A következő lépésben megpróbáljuk a q_{rand} és a q_{near} konfigurációkat interpolációval összekötni (*összekötő szakasz*). Itt több variációja is létezik az RRT algoritmusnak. Előfordul, hogy q_{near} konfigurációból csak egy bizonyos fix Δq értékkal közelítünk q_{rand} felé. A másik esetben addig terjesztjük a fát amíg el nem érjük q_{rand} konfigurációt vagy amíg nem ütközik a robot. Ebben az esetben a kapott konfiguráció a legmesszebb található ütközésmentes konfiguráció lesz q_{rand} irányában. Az újonnan kapott konfigurációt végül hozzáadjuk a fához.

Anholonom rendszerek esetén is használható az RRT eljárás. Ekkor az összekötésnél egyszerű interpolációt nem lehet alkalmazni, mert az azt feltételezné, hogy a robot minden irányba szabadon képes mozogni. Ehelyett az összekötést egy lokális tervező segítségével kell megoldani vagy egyszerűbb esetben itt is használható az a módszer, hogy csak egy adott Δq értékkel közelítünk q_{rand} irányába. Ehhez megfelelő beavatkozó jelet (Δu) kell választanunk, amit Δt ideig alkalmazva elérhető Δq állapotváltozás.

Az előbb ismertetett fázisok alkotják a fa terjesztésének egy lépését. Több fa esetén természetesen mindegyiknél végre kell hajtani a fázisokat. A terjesztést addig kell folytatni, amíg el nem érjük a kívánt konfigurációt, vagy több fa esetében, amíg a fák nem kapcsolhatók össze.

3.2. RTR algoritmus

Ha differenciális robotnál használunk valamelyen Δu beavatkozójelet az összekötő fázisban, akkor a fa csúcspontjai között görbék lesznek. Ez nehézséget okozhat, ha olyan *csomópont-választó eljárást* alkalmazunk, ami köztes konfigurációt ad vissza. Természetesen alkalmazhatjuk azt az eljárást, hogy csak az élek végpontjait választjuk ki, köztük nem interpolálunk. Ehhez viszont kis távolságú élek szükségesek, ami növeli a fa csomópontjainak számát és ezzel összefüggésben a csomópont kiválasztások számát is.

Lehetőségünk van differenciális robotnál is lokális tervezőt alkalmazni két konfiguráció közti állapotváltozásra. A legegyszerűbb lokális tervező három lépésből áll:

- Egy helyben fordulás a kívánt konfiguráció irányába (R).
- Mozgás egyenes pályán a cél pozícióba (T).
- Egy helyben fordulás a célkonfiguráció irányába (R).

Ennek a tervezőnek az az előnye, hogy a fa élei egyenes pályák lesznek, így egyszerűen tudjuk meghatározni a köztes konfigurációkat.

A jelenleg ismertetett módon alkalmazva az RRT algoritmust szűk folyosók esetében rendkívül nehezen találna megoldást az eljárás, abban az esetben is ha mind a kezdeti-, mind a célkonfigurációból növesztünk egy-egy fát. A problémát az okozza, hogy az *összekötés fázisa* gyakran nem ad eredményt ezért a fák nem nőnek megfelelően. Ennek az az oka, hogy a lokális tervező használatakor, fal vagy egyéb akadályok közelében az első egy helyben fordulásnál már ütközne a robot. Mivel az összeköttetés fázisa addig tart, amíg

nem érjük el q_{rand} -ot vagy amíg nem ütközik a robot, így a fa további terjesztése nélkül választunk új q_{rand} értéket. A lokális tervező második lépése eredményezné a fa tényleges terjesztését.

Az RTR algoritmus felhasználva az RRT eljárás előnyös tulajdonságait igyekszik az előbbi problémára egy lehetséges megoldást bemutatni. Mind a kezdeti, mind a célkonfigurációból növeszt egy-egy fát, az összekötő fázisban a fent ismertetett lokális tervezőt alkalmazza. Az RRT eljárás minden állomásán fázisa módosításra kerül az RTR tervező esetében.

Az RTR algoritmusnál alkalmazott fa struktúrában, az RRT-hez hasonlóan a csomópontokban konfigurációk találhatóak, az élek pedig transzlációs mozgást (TCI - Translation Configuration Interval) vagy egy helyben fordulást írnak le (Rotational Configuration Interval). Egy adott TCI vagy RCI leírható két konfigurációval és TCI esetén a köztük lévő távolsággal, míg RCI esetén a köztük lévő szögtávolsággal. Természetesen RCI esetén a két konfiguráció pozíciója megegyezik, TCI esetén pedig a két konfiguráció irányára egyezik meg. Fontos megjegyezni, hogy minden két élét egzakt módon írjuk le mintavételezés nélkül.

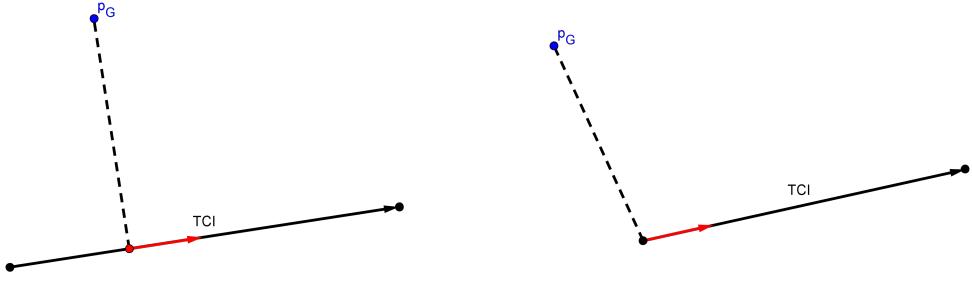
3.2.1. Mintavételezés

A mintavételezés fázisában különbséget jelent az eredeti RRT algoritmushoz képest, hogy nálunk a q_{rand} -nak megfelelő véletlen minta nem egy konfiguráció lesz, hanem egy pozíció a térben (p_G). Ezt a pozíciót tekintethetjük egy folytonos, egy dimenziós konfigurációs listának, amelynek bármelyik eleme megfelelő célkonfiguráció lehet.

A mintavételezést kiegészíthetjük a pálya háromszög cellafelbontásából kapott mintákkal. Ezek a minták az akadályoktól távolabbi találhatóak és szűk folyosók esetén is segítenek terjeszteni a fákat. A celladekompozíciót a következő fejezetben tárgyaljuk.

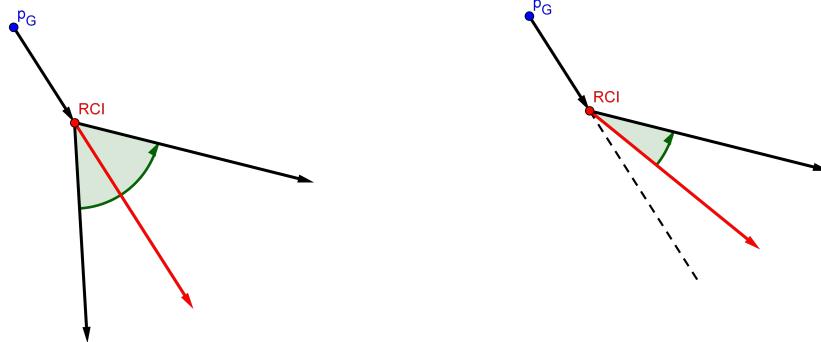
3.2.2. Csomópont kiválasztás

Mivel a mintavételezésnél pozíciót használunk és nem konfigurációt, ezért a *csomópont kiválasztás* egyszerűbb lesz. Az eljárás lényege, hogy az adott p_G esetén végigmegyünk a fa élein és meghatározzuk a legkisebb távolságát a p_G pont és az adott él között. TCI él esetében ez távolságot jelent, RCI esetében pedig szögtávolságot. Így minden egyes élnél kapunk egy konfigurációt, amely esetében a távolság a p_G -től minimális. A kapott konfigurációk közül azt választjuk, amelyiknél legkisebb a távolság p_G -hez képest, ha így több megoldást is kapunk, akkor pedig azt a konfigurációt választjuk, amelynél a szögtávolság a legkisebb. Így egyértelműen meghatároztuk q_{near} -t.



3.2. ábra. Csomópont kiválasztás TCI esetén. A bal oldali ábra esetén köztes konfigurációt kapunk, míg a jobb oldali ábrán nem.

Egy adott TCI és p_G esetén a legkisebb távolsághoz tartozó konfigurációt a következőképpen határozzuk meg (3.2. ábra). Kiszámoljuk a p_G pont merőleges vetületét a TCI-t alkotó egyenesre, ezután meghatározzuk, hogy a vetület a TCI-n, mint szakaszon belül található-e. Ha a szakaszon belül található a vetület, akkor egy köztes konfiguráció van legközelebb p_G -hez. A köztes konfiguráció pozíciója a vetület, orientációja pedig a TCI orientációja. Ha a szakaszon kívül található a vetület, akkor a TCI közelebbi konfigurációja lesz a legkisebb távolságú konfiguráció.



3.3. ábra. Csomópont kiválasztás RCI esetén. A bal oldali ábra esetén köztes konfigurációt kapunk, míg a jobb oldali ábrán nem.

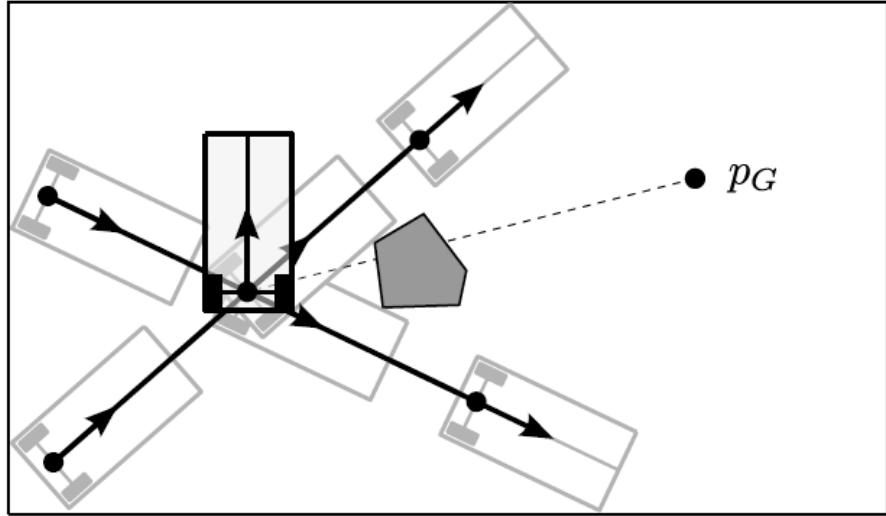
RCI esetén a legkisebb (szög)távolságú konfiguráció kiválasztása a 3.3. ábrán látható. Először kiszámoljuk a p_G pont és az RCI pozíójának irányát. Ha a kapott irány az RCI (szög)tartományába beleesik, akkor köztes konfigurációról van szó (bal oldali ábra) és ekkor a legközelebbi konfiguráció az RCI pozíciója és az előbb kiszámolt orientáció lesz. Abban az esetben, amikor a kapott irány nem esik bele az RCI tartományába, akkor az RCI irányban közelebbi konfigurációt választjuk (jobb oldali ábra).

3.2.3. Kiterjesztés

Az RTR algoritmus ezen fázisa különbözik leginkább az eredeti RRT algoritmustól. Küllönbség, hogy a transzlációs szakasz esetében nemcsak előre, hanem hátra is kiterjesztjük a fát. Ezenkívül a kiterjesztés nem p_G -ig történik, hanem mindenképpen addig, amíg nem

ütközik a robot. Ez minden két irányra érvényes. Fontos megjegyezni, hogy a kiterjesztés során az RTR lokális tervező első két elemét használjuk fel (RT), tehát a második forgatást nem hajtjuk végre.

Lényeges különbség az is, ahogyan a két algoritmus az ütközést kezeli. Az RTR tervező esetén ütközés esetén különbséget kell tenni, hogy transzlációs vagy forgatási fázisban történt ütközés. Amennyiben transzlációs fázisban történt ütközés az adott iterációnak vége lesz, hiszen a fát már kiterjesztettük. Ugyanez történne az RRT eljárásnál is.



3.4. ábra. A kiterjesztés folyamata./6/

Amennyiben forgatás közben történik ütközés a helyzet bonyolultabb, mivel ilyenkor nem sikerült kiterjeszteni még a fát. Ekkor az ütközési orientációt előre és hátra terjesztjük ki a fát. Ezután a célorientációt megróbáljuk másik körüljárás szerint elérni. Függetlenül attól, hogy sikerült-e a második forgatással elérni a célkonfigurációt vagy ütközött a robot, ebben az állapotban megint kiterjesztjük a fát előre és hátra is. Amennyiben ütközés történt megint az ütközési orientációt alkalmazzuk a kiterjesztést, különben pedig a célkonfiguráció irányában terjesztjük ki a fát. A folyamat a 3.4. ábrán látható.

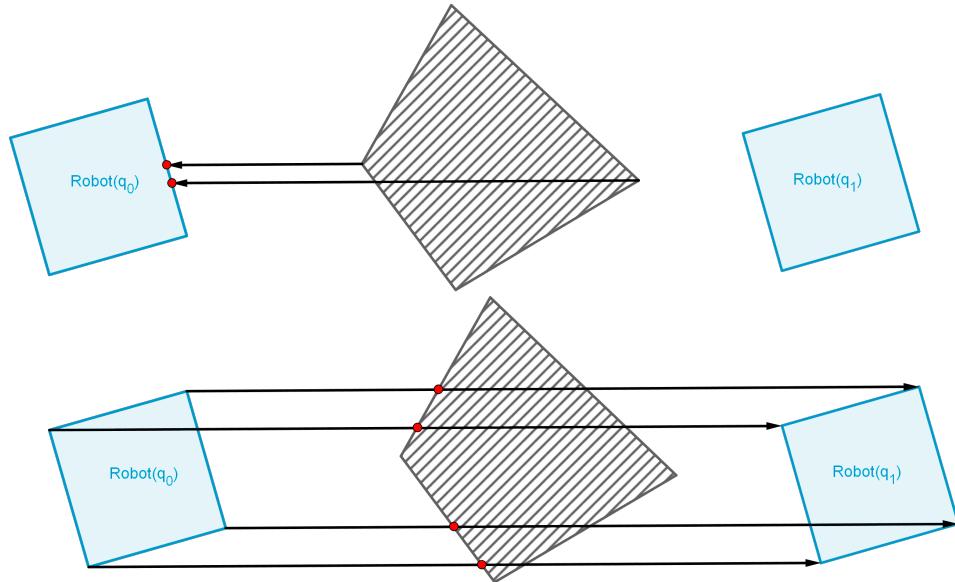
A fa terjesztésnél alapvetően két célunk van, egyszerűbb, hogy a célkonfiguráció felé haladjunk, másrészről pedig, hogy minél nagyobb szabad területet bejárunk.

Ütközésdetektálás transzlációs kiterjesztés esetén

A robot transzlációs kiterjesztése előre- és hátrafelé is a következők szerint történik. minden egyes akadály esetén, beleértve a pályát határoló téglalapot is végigmegyünk a robot alakját leíró polygon összes csúcsponján. Adott csúcspon esetén megvizsgáljuk, hogy a kiterjesztés irányában metszi-e a vizsgált akadály oldalát, és ha igen, akkor eltároljuk az ütközésig megtehető távolságot. Ezután megvizsgáljuk, hogy az adott akadály csúcsponjai a mozgás során metszik-e a robot éleit, és szintén eltároljuk az ütközésig lévő távolságot. A minimális távolság a letárolt távolságok minimuma lesz.

A fent leírtaknál minden esetben egy egyenes és egy szakasz metszetét kell kiszámítanunk, majd megvizsgálni, hogy a metszéspont a mozgás irányában található-e. A szakasz a

robot vagy az akadály egyik éle, az egyenes pedig az akadály vagy a robot egyik csúcspontja a transzláció irányában. A 3.5. ábra mutatja a kiterjesztést egy adott akadály és a robot között.



3.5. ábra. Transzlációs kiterjesztés esetében az ütközésvizsgálat.

Ütközésdetektálás forgatás esetén

A forgatás közbeni ütközésvizsgálat hasonlóképpen történik, mint transzlációnál. Itt is végigmegyünk az összes akadályon és mindeneknél megvizsgáljuk a robot összes élét és csúcspontját. Itt is két irányban ellenőrzünk, a robot éleit és az akadály csúcspontjait, valamint az akadály éleit és a robot csúcspontjait vizsgáljuk. A kapott szögfordulások közül a minimális elfordulás felét használjuk fel később.

Különbséget jelent, hogy itt egy körív és egy szakasz közti metszéspontot kell számolnunk. A szakasz a robot vagy akadály egyik éle. A körivet pedig úgy kapjuk meg, hogy a robot vagy akadály csúcspontját a robot pozíciója körül elforgatjuk az adott forgási szöggel.

3.2.4. Útvonal meghatározása, optimalizálása

Az RTR algoritmus sikeres futásához szükséges, hogy a kezdő és a célkonfigurációból terjesztett fák kapcsolódjanak egymáshoz. Ezért minden iteráció végén ellenőrizzük, hogy a legutóbb felvett TCI-k és a másik fa között létesíthető-e ütközésmentes kapcsolat egy RCI segítségével. Ha ez lehetséges, akkor a metszéspontból vissza kell mennünk a fák kezdőpontjáig, és így megkapjuk a keresett útvonalat a kezdő konfigurációból a célkonfigurációig. A kapott útvonalat egy TCI-ket és RCI-ket tartalmazó listaként képzelhetjük el.

Egy TCI és egy fa összekapcsolásának vizsgálata során a fát Breadth-First szélességi keresés segítségével járjuk be [15]. Az algoritmus egy FIFO szerkezetű tárolót használ, amely kezdetben a fa forrásainak gyerekeit tartalmazza. Ezután kivesszük a tárolóból az első elemet és ha az TCI, akkor megvizsgáljuk, hogy összevonható-e a vizsgált TCI-vel. Ha összevonható, akkor befejeztük a vizsgálatot, ha nem akkor pedig a TCI gyerekeit berakjuk

a tárolóba. Ha RCI volt a kivett elem, akkor egyszerűen a gyerekeit berakjuk a tárolóba. Az algoritmust addig futtatjuk, amíg a tároló nem ürül ki vagy nem találtunk összevonható TCI-ket. Abban az esetben ha üres lesz a tároló, a vizsgált TCI és a fa nem vonható össze.

Azt megállapítani, hogy két TCI összevonható-e egyszerűen eldönthetjük. Fogjuk a két TCI által leírt szakaszokat és megnézzük, hogy van-e metszéspontjuk. Ha nincsen, akkor biztosak lehetünk benne, hogy nem vonhatóak össze. Ha van metszéspontjuk, meg kell vizsgálnunk, hogy a metszéspontból találunk-e egy RCI-t, amely a két szakasz között ütközésmentes mozgást biztosít. Itt ugyanúgy járhatunk el, ahogy a kiterjesztés fázásában tettük a 3.2.3. részben. Ha nem sikerül ütközésmentes forgatást találnunk, ellentétes körüljárás szerint is megpróbálunk RCI-t keresni, ha így sem találunk akkor a két TCI nem összevonható.

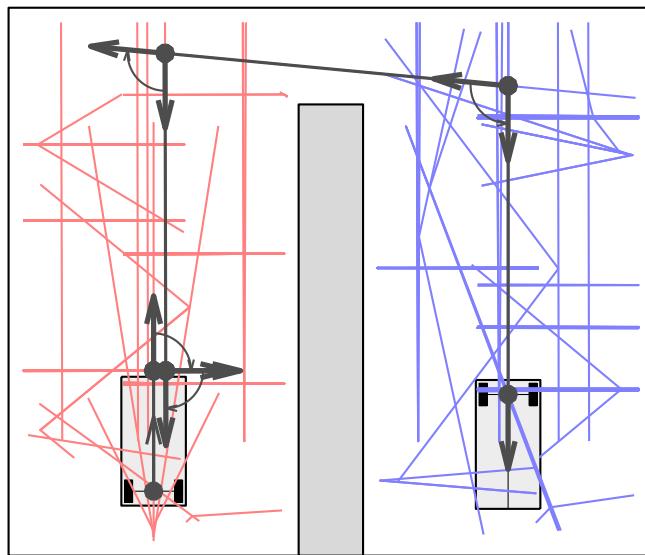
Abban az esetben ha több útvonalat is találnánk a két fa között, akkor azt az útvonalat választjuk, amelyik a legkevesebb konfigurációból áll. Ha több ilyen út is van, akkor azok közül a legrövidebb távolságú útvonalat választjuk.

Miután megkaptuk az útvonalat még további optimalizációt végezhetünk el rajta. Az első módszer lényege, hogy az egymás után következő több TCI-t, egy TCI-vel helyettesítjük. Ezt minden esetben megtehetjük, hiszen ha a TCI-k között nincsen RCI, akkor azoknak a TCI-k iránya nem változik, egy egyenesen helyezkednek el.

A második lehetőség, hogy az összes TCI-t a kapott útvonalban kiterjesztjük, majd az így létrehozott kiterjesztett útvonal segítségével optimalizálunk. Felmerülhet, hogy miért van értelme kiterjeszteni a TCI-okat, hiszen ezeket úgy hoztuk létre, hogy nem p_G pozícióig történik a terjesztés, hanem amíg a robot nem ütközik. Azonban a *csomópont kiválasztásnál* köztes konfigurációkat is kiválasztunk, és így olyan TCI-k jönnek létre, amelyek nincsenek ütközésig terjesztve. Ezután végigmegyünk a kiterjesztett útvonalon, és minden TCI esetében a kiterjesztett pálya végéről elindulva olyan TCI-kat keresünk, amelyeket össze lehet vonni. Két TCI-ról a fent ismertetett módon döntjük el, hogy összevonhatók-e. Ezzel a módszerrel a véleges útvonal hossza jelentősen csökkenhető.

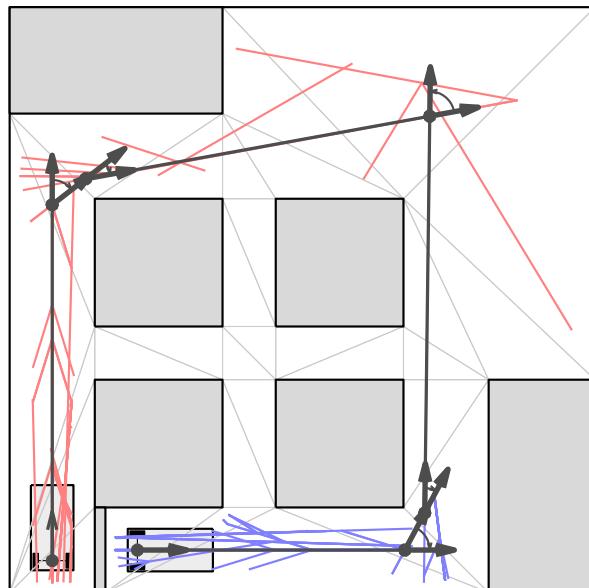
3.3. Eredmények

A dolgozatban ismertetük az RTR globális pályatervező algoritmust. A 3.6. ábrán látható az algoritmus által tervezett pálya és a két konfigurációs pontból terjesztett fa is. Szimulációs eredmények alapján belátható, hogy az RTR tervező főleg szűk folyosókat tartalmazó pályák esetében jobb eredményt ad, mint az egyszerű RRT eljárás [6].



3.6. ábra. Az RTR algoritmus által megtervezett útvonal egy akadály esetén.

Bonyolultabb környezet esetén felerősödik a véletlen mintavételezés szerepe, az egymás utáni futtatások között nagyobb eltérés mutatkozhat. A 3.7. ábrán látható útvonalat 35 iteráció után találta meg az RTR tervező, de előfordult, hogy egy hasonló úthoz 130 iterációra volt szüksége ugyanennél a pályánál.



3.7. ábra. Az RTR algoritmus által megtervezett útvonal bonyolultabb környezet esetén.

Az algoritmus megvalósítását C++ nyelven végeztük el. Az implementáláshoz rendelkezésünkre állt az RTR tervező MATLAB környezetben megvalósított programkódja. Az általunk megvalósított natív program legalább két nagyságrenddel gyorsabb futási idővel rendelkezik a MATLAB kódhoz képest. Ez elsősorban az interpretált MATLAB script és a natív C++ kód közti különbséget mutatja.

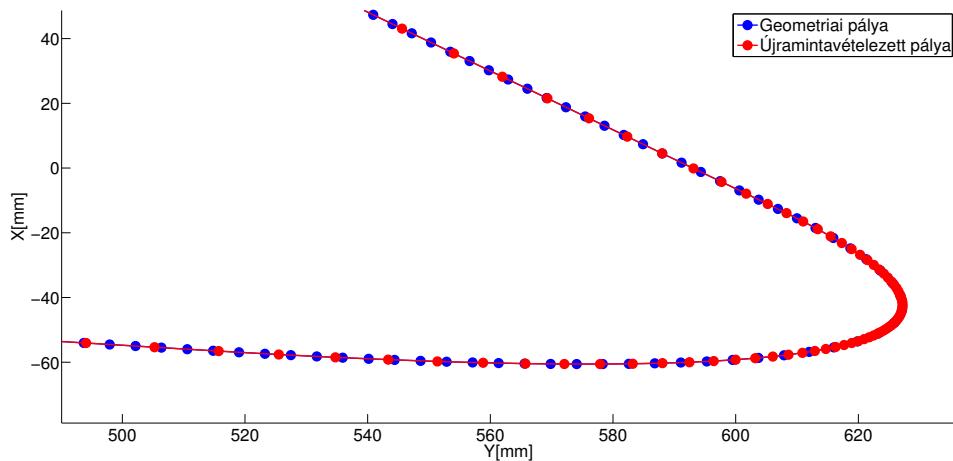
Az implementálás során, ahol úgy ítéltük meg, módosítottunk az eredeti algoritmuson a rövidebb futási idő érdekében. Ezek habár csak apróbb változásokat jelentettek, de mivel az érintett programrészek egy iterációban akár többször is lefutnak, így egy bonyolultabb pályán, ahol akár több száz iteráció szükséges, jelentős lehet a javulás. Ilyen apróbb módosítást tettünk a különböző geometriai elemek közötti metszetéspont számításánál és az iterációk végén található eljárásban, amely a két fát próbálja összekötni.

4. fejezet

Pálya időparaméterezése

A pályatervező által elkészített ütközésmentes pálya nem tartalmaz semmilyen idővel kapcsolatos információt. Ebben a fejezetben a pálya pontjaihoz sebesség értékeket rendelünk hozzá. Ezt a többlet információt a pályakövető algoritmus használja fel, hogy mozgás során a robot kinematikai korlátai ne okozzanak problémát. Tehát az időparaméterezés elősorban a robot korlátait használja fel, de arra is alkalmas, hogy meghatározzuk a pálya bejárásának idejét.

Az időparaméterezés két fő lépésből áll. Elsőként a kapott geometriai pályához sebesség értékeket rendelünk hozzá, majd ezután újramintavételezzük a pályát. Az újramintavételezés után a pálya időben egyenletes lesz, tehát az egymást követő pályapontok között azonos idő telik el. A mintavételezés idejét a pályakövető algoritmus mintavételi ideje határozza meg. A geometriai pályát általában távolságban egyenletesen mintavételezzük, de ez nem kötelező feltétel az időparaméterezéshez.



4.1. ábra. A pálya időparaméterezése.

A szakirodalomban nem sok időparaméterezéssel kapcsolatos munka található. Egy hasonló megközelítést Christoph Sprunk munkájában találhatunk [14]. A legfontosabb eltérés, hogy Sprunk külön korlátozza a robot tangenciális és centripetális gyorsulását, míg mi a robot kerekeinek eredő gyorsulását korlátozzuk. Ez a megoldás a valóságot jobban közelíti,

hiszen attól, hogy a gyorsulás két komponense a korlátok alatt marad, nem biztos, hogy az eredő gyorsulás sem haladja meg a korlátot.

Az időparaméterezés során nem használjuk ki az előző fejezetekben bemutatott pályatervező által tervezett pálya speciális tulajdonságait, a célunk egy olyan algoritmus készítése, amely tetszőleges geometriai pályából képes sebesség információval ellátott, időben egyenletes mintavételű pályát készíteni. Emiatt nem építhetünk a pályatervező által használt geometriai elemekre (körív, egyenes) és ezek speciális tulajdonságaira.

Az egyik legalapvetőbb tulajdonságuk az lenne, hogy a görbületüket analitikusan ki tudnánk számolni (ami a konkrét elemek esetében ráadásul triviális). Általános esetben azonban nem tudjuk a pálya görbületét analitikusan kiszámolni, így görbület becslést kell alkalmaznunk. A szakirodalomban sok cikket találhatunk görbület becslésről, főleg képfeldolgozással kapcsolatos témaiban, azonban dolgozatunknak nem ez a téma. Az algoritmus fejlesztésekor több becslőt is kipróbáltunk, ezeket úgy teszteltük, hogy olyan pályát adtunk meg nekik, amelynek a görbülete analitikusan is számolható, így össze tudtuk hasonlítani az ideális megoldással a becslést. Ez alapján választottunk egy eljárást [7]. Természetesen abban az esetben, ha a pályatervező rendelkezik már a pálya görbületével, az időparaméterező algoritmus azt fogja használni a becslés helyett.

4.1. Jelölések

Ebben a fejezetben a 4.1. táblázatban megadott jelöléseket fogjuk használni. Azokban az esetekben, ahol fontos megkülönböztetni a geometriai pályát és az (újra)mintavételezett pályát, ott a felső indexben található \mathbf{g} betű a geometriai pályát jelöli, az \mathbf{s} betű pedig a mintavételezett pályát. A pálya pontjait 1-től számozzuk.

$$\begin{aligned}
 \Delta t(k) &: \text{A } k \text{ és a } k+1 \text{ pontok között eltelt idő} \\
 t(k) &: \text{A } k. \text{ pontban az addig eltelt idő} \\
 \Delta s(k) &: \text{A } k \text{ és a } k+1 \text{ pontok között megtett távolság} \\
 s(k) &: \text{A } k. \text{ pontban az addig megtett távolság} \\
 v(k) &: \text{A } k. \text{ pontban a robot sebességének nagysága} \\
 \omega(k) &: \text{A } k. \text{ pontban a robot szögsebességének nagysága} \\
 a_t(k) &: \text{A } k. \text{ pontban a robot tangenciális gyorsulásának nagysága} \\
 c(k) &: \text{A } k. \text{ pontban a görbület nagysága} \\
 N &: \text{A pálya pontjainak száma} \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

Azokban az esetekben, amikor a robot kerekére vonatkozó mennyiségekről beszélünk, külön jelöljük, hogy bal (l) vagy jobb (r) kerékről van szó. Ezenkívül a kereknél megkülönböztetjük, hogy tangenciális (a_t), centripetális (a_c) vagy eredő (a_e) gyorsulásról beszélünk.

Fontos megjegyezni, hogy a $\Delta s(k)$ távolságot úgy kell értelmezni, hogy a $k.$ és $k+1.$

pont között egy körív található, és az ezen mért távolság lesz $\Delta s(k)$. A körívet a $c(k)$ görbület határozza meg. Ha nem köríveket használnánk, hanem egyenessel kötnénk össze a pályapontokat, akkor a görbületnek szükségszerűen 0-nak kellene lennie.

4.2. Differenciális robotmodell

Mivel a fejezetben később még többször szükség lesz rá a (1.2) egyenletet írjuk át úgy, hogy a kerekek sebességeit fejezzük ki akár a szögsebesség, akár a pálya adott görbülete alapján:

$$\begin{aligned} v_l(k) &= v(k) - \frac{W \cdot \omega(k)}{2} = v(k) \cdot p_l(k) \\ v_r(k) &= v(k) + \frac{W \cdot \omega(k)}{2} = v(k) \cdot p_r(k), \end{aligned} \quad (4.2)$$

ahol

$$\begin{aligned} p_l(k) &= 1 - \frac{W \cdot c(k)}{2} \\ p_r(k) &= 1 + \frac{W \cdot c(k)}{2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

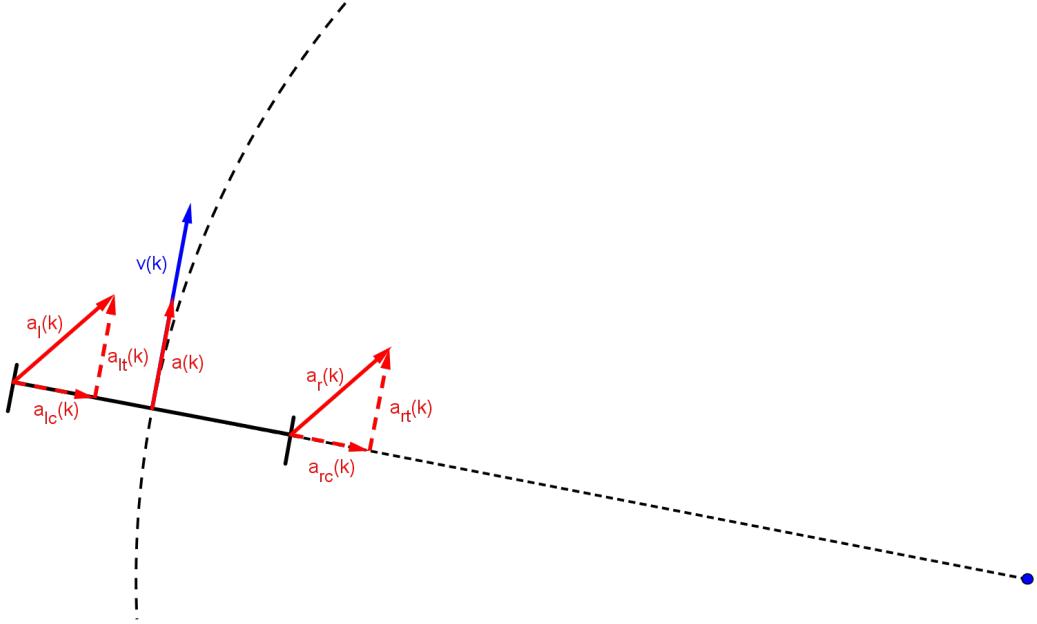
és felhasználtuk, hogy $v(k) \cdot c(k) = \omega(k)$.

4.2.1. Korlátozások

A robot mozgását általános esetben a 4.2. ábra mutatja be. Az időparaméterezés során figyelembe vesszük a robot pályamenti sebességét és szögsebességét valamint a robot kerekeinek tangenciális és eredő gyorsulását. Adott robot esetében ezekre a mennyiségekre határozunk meg korlátozásokat:

$$\begin{aligned} v^{max} &: \text{A robot pályamenti sebesség korlátja} \\ \omega^{max} &: \text{A robot szögsebesség korlátja} \\ a_{lt}^{max} &: \text{A robot bal kerekének tangenciális gyorsulás korlátja} \\ a_{rt}^{max} &: \text{A robot jobb kerekének tangenciális gyorsulás korlátja} \\ a_l^{max} &: \text{A robot bal kerekének eredő gyorsulás korlátja} \\ a_r^{max} &: \text{A robot jobb kerekének eredő gyorsulás korlátja} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Mivel a robot kerekeinek tangenciális gyorsulásából már adódik a robot tangenciális gyorsulása is, így a robot gyorsulását nem szükséges külön korlátozni.



4.2. ábra. Differenciális hajtású robot mozgása köríven.

$$a_t^{max} = \frac{a_{lt}^{max} + a_{rt}^{max}}{2} \quad (4.5)$$

Ugyanez a helyzet a kerekek sebességkorlátjával, ami meghatározható a robot sebesség és szögsebesség korlátaiból.

$$v_l^{max} = v^{max} - \frac{W \cdot \omega^{max}}{2} \quad (4.6)$$

$$v_r^{max} = v^{max} + \frac{W \cdot \omega^{max}}{2} \quad (4.7)$$

A kerekek maximális eredő gyorsulását a maximális tapadási súrlódási együttható ($\mu_{tap_{max}}$) határozza meg, amelynél a robot kerekei még nem csúsznak meg. A maximális gyorsulás és a tapadási együttható között a következő egyszerű összefüggés áll fent:

$$a_{max} = \mu_{tap_{max}} \cdot g, \quad (4.8)$$

ahol g a nehézségi gyorsulás

Írjuk fel a 4.2. ábra alapján a robot kerekeinek gyorsulását:

$$a(k) = \sqrt{a_c(k)^2 + a_t(k)^2} \leq g \cdot \mu_{tap_{max}}, \quad (4.9)$$

ahol $a_c(k)$ a kerék centripetális gyorsulása, $a_t(k)$ a kerék tangenciális gyorsulása

(4.9) egyenletben azzal a feltevéssel élünk, hogy a robot kerekei és a talaj között a tapadási súrlódási együttható állandó és nem függ az erő irányától. Az általunk használt differenciális robotnál ez a közelítés megengedhető, mivel a gumikerekek homogénnek tekinthetők. Ha barázdákat tartalmaznak, akkor már nagyobb eltérést okozna ez a közelítés.

Fontos megjegyezni, hogy a kerékgyorsulás korlátokat lassulásnál is alkalmazzuk. Tehát a kerék gyorsulásának abszolút értékét korlátozzák ezek a korlátozások. Így azt tesszük fel, hogy a kerekek viselkedése gyorsulás és lassulás esetében megegyezik. A robot sebességénél viszont nem engedünk negatív értékeket, a robot végig előre haladhat. A tervező viszont megadhat olyan pályát ahol tolatnia kell a robotnak, vagy egy helyben megfordulnia, de ezt a pályatervező algoritmus kezeli.

4.2.2. Geometriai sebességprofil

Első lépésként a geometriai pályapontokhoz rendelünk a korlátoknak megfelelő sebességeket és a későbbiekben ezt a sebességprofilt használjuk fel a pálya újramintavételezéséhez.

A pályamenti sebességeket úgy határozzuk meg, hogy a robot pályamenti gyorsulása a lehető legnagyobb legyen. (4.5) egyenlet alapján ezt megtehetjük úgy, hogy a robot kerekeinek tangenciális gyorsulását maximalizáljuk. Több hatás miatt nem tudjuk a kerekek gyorsulását folyamatosan növelni.

Egyrészt a robot sebesség és szögsebesség korlátját nem sérthetjük meg. Ebből a két korlátból a pálya minden pontjára kiszámolhatunk egy maximális sebességet függetlenül az előző pályapont sebességétől:

$$v^{max}(k) = \min \left(v^{max}, \frac{\omega^{max}}{c(k)} \right) \quad (4.10)$$

Valamint a kerekek centripetális gyorsulása nem haladhatja meg az előírt eredő gyorsuláskorlátot, különben a robot kereke megcsúszna. A pálya adott k . pontjában a kerekek centripetális gyorsulását a következőképpen számolhatjuk ki:

$$\begin{aligned} a_{lc}(k) &= (v(k) \cdot p_l(k))^2 \cdot c(k) \\ a_{rc}(k) &= (v(k) \cdot p_r(k))^2 \cdot c(k) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Fontos megjegyezni, hogy mivel a robot gyorsulását határozzuk meg a k . pontban, így a $v(k)$ már rendelkezésünkre áll a $k - 1$. pontban számított gyorsulásból. Amennyiben a kiszámolt centripetális gyorsulások már önmagukban is meghaladják az előírt eredő gyorsuláskorlátot, úgy $v(k)$ értékét addig kell csökkenteni, hogy a centripetális gyorsulás az eredő gyorsuláskorlátot már ne haladja meg. Ezután a kerekek tangenciális gyorsulását (4.12) egyenlet alapján határozhatjuk meg.

$$a_{lt}(k) = \min \left(\sqrt{(a_l^{max})^2 - a_{lc}(k)^2}, a_{lt}^{max} \right) \quad (4.12)$$

$$a_{rt}(k) = \min \left(\sqrt{(a_r^{max})^2 - a_{rc}(k)^2}, a_{rt}^{max} \right) \quad (4.13)$$

Eddig a két kerék gyorsulását teljesen függetlenül tárgyaltuk, azonban minden két gyorsulást nem választhatjuk meg szabadon, mert a pálya görbülete meghatározza a köztük lévő arányt. Ezt a következőképpen láthatjuk be ((4.2) alapján következik, hogy a sebességek aránya is ugyanez lesz):

$$a_{lt}(k) = \beta(k) \cdot (r(k) - \frac{W}{2}) \quad (4.14)$$

$$a_{rt}(k) = \beta(k) \cdot (r(k) + \frac{W}{2}) \quad (4.15)$$

$$\frac{a_{lt}(k)}{a_{rt}(k)} = \frac{r(k) - \frac{W}{2}}{r(k) + \frac{W}{2}} = \frac{p_l(k)}{p_r(k)}, \quad (4.16)$$

ahol $\beta(k)$ a robot szögggyorsulása, $r(k)$ a pálya görbületi sugara a robot középpontjához viszonyítva.

(4.16) és (4.12) egyenletek alapján 2-2 lehetséges kerék gyorsulást tudunk számolni. Ezek közül azt a gyorsulás párt fogjuk választani, amelyiknek egyik eleme sem sérti a (4.12) egyenletek által meghatározott korlátokat.

Miután kiszámoltuk, hogy az adott pályapontnál mekkora legyen a robot kerekeinek tangenciális gyorsulása már könnyedén számolható a robot gyorsulása és sebessége:

$$a_t(k) = \frac{a_{lt}(k) + a_{rt}(k)}{2} \quad (4.17)$$

$$v(k+1) = \min \left(v^{max}(k+1), \sqrt{v(k) + 2 \cdot a_t(k) \cdot \Delta s_c(k)} \right) \quad (4.18)$$

Profil visszaterjesztés

Két esetben előfordulhat, hogy az előző pályaponthoz meghatározott sebességértéket módosítani kell. Egyszerűbb, ha a centripetalis gyorsulás önmagában meghaladja a megengedhető maximális gyorsulást, akkor az előző pályaponthoz tartozó sebességet minden képp csökkenjen kell. Másrészt a (4.18) egyenlet esetében előfordulhat, hogy a robot gyorsulás korlátját megséríti, és így módosítani kell az előző ponthoz tartozó sebességet. Ez például a pálya végpontjában fordulhat elő, ahol előírjuk, hogy a robot álljon meg, tehát $v^{max}(N) = 0$. Ha nem terjesztenénk vissza a profilt, akkor az utolsó pontnál lévő félezés meghaladhatja az előírt korlátot, hiszen az előző pontokban nem tudtuk, hogy meg kell állni a robotnak.

Mindkét esetben ugyanazt az eljárást alkalmazhatjuk a visszaterjesztéshez. Azért beszélünk visszaterjesztésről, mivel addig kell visszafelé haladni a pályán, amíg minden korlátot betartunk.

Kezdetnek kiszámoljuk, hogy a megváltozott sebesség következtében hogyan alakulnak a kerekek tangenciális gyorsulásai. (4.19) egyenletben felhasználjuk a (4.2). egyenlet összefüggését a robot és kerék sebesség kapcsolatára.

$$\begin{aligned} a_{lt}(k) &= \frac{v_l(k+1)^2 - v_l(k)^2}{2 \cdot \Delta s_l(k)} = \frac{v(k+1)^2 - v(k)^2}{2 \cdot \Delta s_l(k)} \cdot p_l(k)^2 \\ a_{rt}(k) &= \frac{v_r(k+1)^2 - v_r(k)^2}{2 \cdot \Delta s_l(k)} = \frac{v(k+1)^2 - v(k)^2}{2 \cdot \Delta s_r(k)} \cdot p_r(k)^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Amennyiben a kapott tangenciális gyorsulások megsértik a tangenciális vagy eredő gyorsulásra vonatkozó korlátokat, kiszámoljuk, hogy mekkora robotsebesség esetében teljesülnének a korlátok. Ezt minden kerék esetén megtesszük, és a szigorúbb sebesség korlátot fogjuk választani, mint robotsebesség. Ezt az eljárást mindaddig megtesszük visszafelé a pályán, amíg azt nem kapjuk, hogy egyik kerék sem sérti meg a korlátokat.

Most vizsgáljuk meg, hogy ha a kerékgyorsulás egy adott korlátot megsért, akkor hogyan kapjuk meg belőle azt a robotsebességet, amely esetében még nem sértjük meg a korlátot. Először tekintsük a tangenciális gyorsulásra vonatkozó korlátot. (4.19) egyenletet fejezzük ki $v(k)$ -ra minden kerék esetén:

$$\begin{aligned} v_l^t(k) &= \sqrt{v(k+1)^2 + \frac{2 \cdot a_{lt}^{max} \Delta s_l(k)}{p_l(k)^2}} \\ v_r^t(k) &= \sqrt{v(k+1)^2 + \frac{2 \cdot a_{rt}^{max} \Delta s_r(k)}{p_r(k)^2}}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

ahol a $v_l^t(k)$, $v_r^t(k)$ jelölések arra utalnak, hogy a sebességek a tangenciális korlátból adódnak a bal és jobb kerék esetén.

Az eredő gyorsulásra vonatkozó korlát esetén pedig a (4.21) összefüggést használhatjuk. Ehhez felhasználjuk a (4.11) egyenletet (az egyszerűség kedvéért most elhagyjuk a kereket azonosító indexet, a két kerék esetén ugyanúgy történik a számítás):

$$a_t(k) = \frac{v(k+1)^2 - v^e(k)^2}{2 \cdot \Delta s(k)} \cdot p(k)^2 = \sqrt{(a^{max})^2 - (a_c^{max})^2} \quad (4.21)$$

$$= \sqrt{(a^{max})^2 - ((v^e(k) \cdot p(k))^2 \cdot c(k))^2} \quad (4.22)$$

ahol a $v^e(k)$ jelölés arra utal, hogy a sebesség az eredő gyorsulásra vonatkozó korlátból adódik. A (4.21) egyenletet kifejezhetjük $v^e(k)$ -re. Ekkor egy negyedfokú egyenletet kapunk, ami a következőképpen épül fel:

$$d(k) = \frac{p(k)^4}{4 \cdot \Delta s(k)^2} + c(k) \cdot p(k)^2 \quad (4.23)$$

$$e(k) = -\frac{2 \cdot v(k+1)^2 \cdot p(k)^4}{4 \cdot \Delta s(k)^2}$$

$$f(k) = \frac{v(k+1)^4 \cdot p(k)^4}{4 \cdot \Delta s(k)^2} - a_{max}^2$$

$$0 = v^c(k)^4 \cdot d(k) + v^c(k)^2 \cdot e(k) + f(k) \quad (4.24)$$

A (4.24) egyenlet valós, pozitív megoldásait keressük. Felmerülhet a kérdés, hogy mi garantálja, hogy minden lesz ilyen megoldás. A Viète-formula felírásával belátható, hogy minden pozitív megoldása van az egyenletnek, a másodfokú egyenlet diszkriminánsának felírásával pedig, hogy lesz valós megoldás. Amennyiben több pozitív valós megoldása van az egyenletnek, akkor a legnagyobb megoldást választjuk.

Miután meghatároztuk $v^e(k)$ és $v^t(k)$ értékeit minden kérékre, $v(k)$ értéke ezek közül a legkisebb lesz, hiszen így biztosíthatjuk, hogy a robot egyik kereke sem fogja megsérteni a két gyorsulás korlátot.

A visszaterjesztés során a sebesség és szögsebesség korlátokkal nem kell foglalkoznunk, hiszen minden esetben, mikor módosítjuk a sebességet, csökkentjük az értékét.

4.2.3. Újramintavételezés

Miután elkészítettük a geometriai pályához tartozó sebességprofilt, létrehozzuk a véleges pályát, amit majd a pályakövető egység bemenetként megkap. Ez a véleges pálya már időben egyenletesen lesz mintavételezve (mintavételezett pálya).

Először számoljuk ki az eltelt időt a geometriai pálya mentén, amelynek alapja, hogy két pályapont között a robot állandó gyorsulással halad.

$$\Delta t^g(k) = \frac{2\Delta s^g(k)}{v^g(k) + v^g(k+1)} \quad (4.25)$$

$$t^g(k+1) = t^g(k) + \Delta t^g(k) \quad (4.26)$$

A következő lépésben meghatározzuk, hogy az újramintavételezett pályánk hány pontból álljon. Ezt könnyedén megtehetjük, hiszen adott számunkra a kívánt mintavételi idő(t_s). Így a következő képlet adódik a mintavételezett pálya pontjainak számára:

$$N^s = \lceil t^g(N^g)/t_s \rceil + 1 \quad (4.27)$$

A pontok számába beleérjük a kezdő és végpontot is. A (4.27). egyenletből következik, hogy amennyiben $t(N^g)$ és t_s nem egymás többszörösei, a mintavételezett pálya utolsó pontjához olyan időpont tartozik, amely nagyobb mint $t(N^g)$. A pálya végpontját még a későbbiekben tárgyaljuk, akkor visszatérünk erre az eltérésre is.

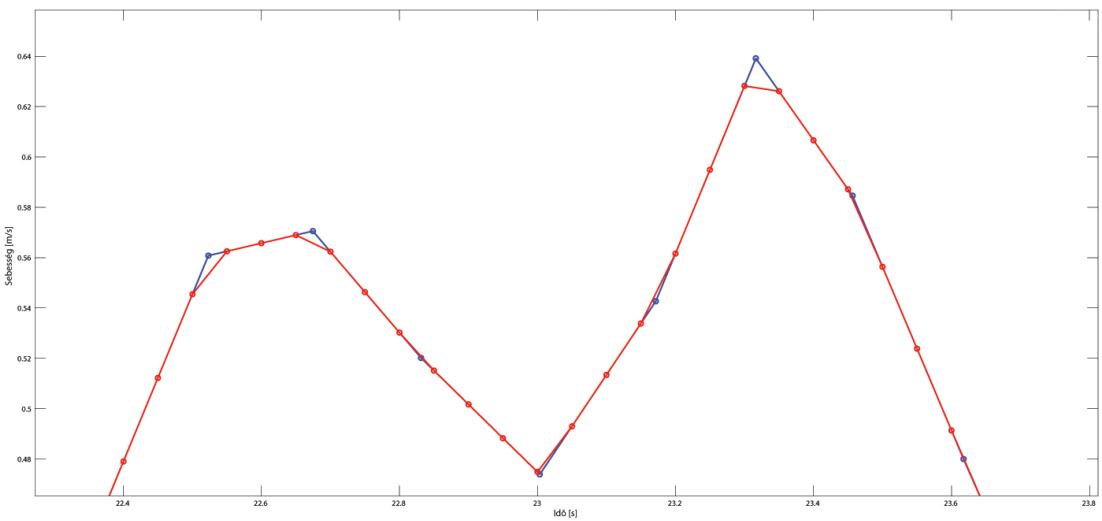
Most pedig meghatározzuk a mintavételezett pálya pontjaiban a sebességet. Ezt a geometriai pálya alapján tesszük, figyelembe véve, hogy a mintavételezett pálya esetén is két pont között állandó gyorsulást feltételezünk. A számítás egy egyszerű lineáris interpolációt valósít meg:

$$v^s(k) = v^g(j) + v^g(j+1) \cdot it(k) \quad (4.28)$$

$$it(k) = \frac{t^s(k) - t^g(j)}{t^g(j+1) - t^g(j)}, \quad (4.29)$$

ahol j jelöli a legkisebb indexet amelyre teljesül, hogy $t^s(k) < t^g(j)$

A lineáris interpoláció miatt teljesül az a feltétel, hogy két pont között állandó gyorsulással mozogjon a robot.



4.3. ábra. A geometriai (kék) és mintavételezett(piros) sebességprofil.

A kiszámított sebességprofil alapján könnyedén adódik a megtett út is:

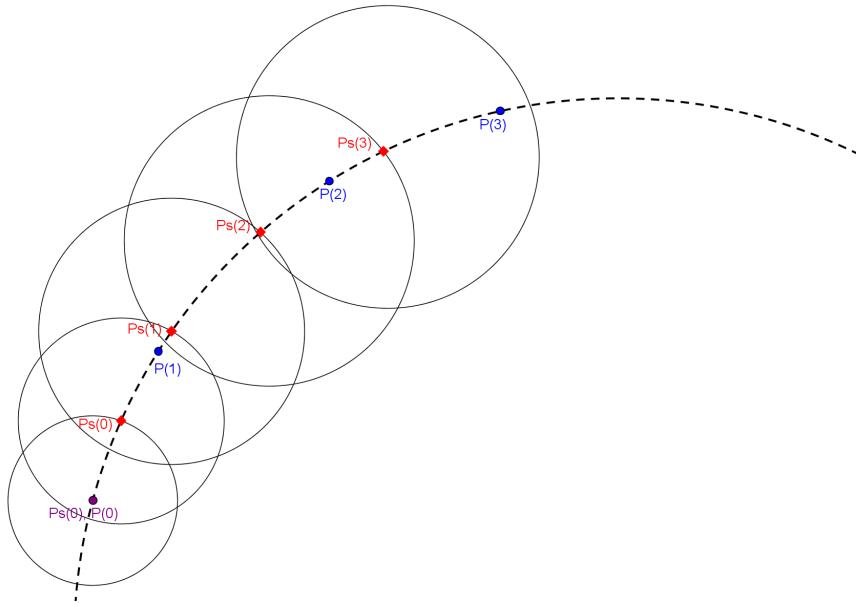
$$\Delta s^s(k) = \frac{v^s(k) + v^s(k+1)}{2} \cdot t_s \quad (4.30)$$

$$s^{s+1}(k) = s^s(k) + \Delta s^s(k) \quad (4.31)$$

Így már rendelkezésünkre áll a robot kívánt sebessége, a megtett út, valamint az idő a mintavételezett pálya összes pontjában. Már csupán a pályapontjainak koordinátáit kell ezek alapján meghatároznunk.

Mivel ismerjük a pályapontok közötti távolságot ($\Delta s^s(k)$), iteratív eljárással az előző pályapont koordinátái alapján az aktuális pontról tudjuk, hogy egy körön helyezkedik el. További feltételünk, hogy a pont az eredeti, geometriai pályán rajta legyen. Ha vesszük a geometriai pálya pontjai közötti görbületből adódó köríveket, akkor az ívek és a kör metszéspontjai közül kell kiválasztanunk a keresett pontot. A kiválasztás egyszerű, ha meg-

jegyezzük, hogy az előző pontnál melyik szakasz alapján találtuk meg a pontot, így csak attól a szakasztól kezdve kell keresni a metszéspontokat. Az algoritmus menete látható a 4.4. ábrán. minden vizsgált szakasznál arra kell figyelni, hogy a metszéspont a szakasz határpontjai között helyezkedjen el. Az első szakasz vizsgálatánál még az is fontos, hogy az előző pont előtti metszéspontot ne vegyük figyelembe. Az ábrán a $Ps(1)$ pontban ezért nem választhatjuk a másik metszéspontot. A legelső mintavételezett pontot a geometriai pálya első pontjába helyezzük el.



4.4. ábra. A mintavételezett pontok meghatározása. $P(x)$ a geometriai pálya pontjait jelöli, $Ps(y)$ pedig a keletkező mintavételezett pályát.

Mintavételezett pálya végpontja

Az lenne az optimális eset, ha a mintavételezett pálya utolsó pontja egybeesne az eredeti pálya végpontjával, ahogyan a kezdőpontjaik ténylegesen egybeesnek. Alapvetően úgy hoztuk létre a mintavételezett pályát, hogy az a geometriai pálya sebességprofiljának megfeleljen, ez viszont nem garantálja az előző feltétel teljesülését.

Három hatás azt eredményezi, hogy nem fog teljesülni ez a feltétel a pálya utolsó pontjára:

1. Ahogy már említettük korábban, nem biztos, hogy a két pályát ugyanannyi idő alatt járja be a robot. Ez maximum t_s időkülönbséget okozhat, és minden esetben távolabbi végpontot eredményez, mint az eredeti végpont.
2. A mintavételezett pálya sebességprofiljának elkészítésekor nem tökéletesen követi az eredeti sebességet a robot a mintavételezésből adódóan. Ez látszik a 4.3. ábrán is. A hiba megegyezik a két görbe alatti terület közötti különbséggel, ami okozhat távolabbi és közelebbi végpontot is.

3. A harmadik hiba a koordináták meghatározásánál keletkezik. Ez a hatás is minden távolabbi végpontot okoz.

A legtöbb esetben célszerű, ha a végpontok egybeesnek, így ezt a mintavételezett pálya meghatározásánál biztosítanunk kell. Ha egyszerűen az utolsó pályapontot az eredeti pálya végpontjába tesszük, nem biztos, hogy betartjuk a robot gyorsulás korlátait, így más módszerhez kell folyamodnunk.

Az általunk használt algoritmus lényege, hogy a sebességprofilnak egy részét egy adott sebességgel eltoljuk úgy, hogy a két pálya végpontja pontosan egybeessen. Az eltolás mértékét (Δv_{corr}) a következő képlettel kapjuk meg:

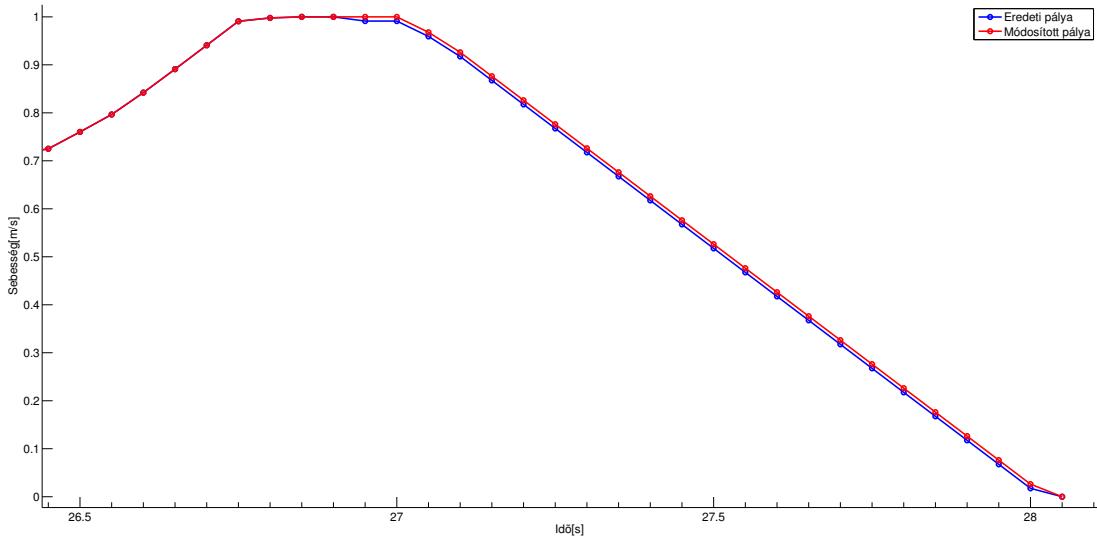
$$\Delta v_{corr} = \frac{\Delta s_{corr}}{t_s \cdot n}, \quad (4.32)$$

ahol Δs_{corr} a mintavételezett és a geometriai pálya végpontjai közötti távolság előjelesen. Ha a mintavételezett pálya utolsó pontja van távolabb, akkor negatív a távolság, különben pozitív. n pedig azoknak a sebességpontoknak a száma, amiket eltolunk.

A (4.32) egyenlet egyszerűen belátható, ha felírjuk az eltolásból adódó területkülönbséget. A Δs_{corr} útkülönbséget azért kell előjelesen megadnunk, hogy minden esetben használható legyen az algoritmus, akkor is, ha a mintavételezett pálya végpontja van távolabb és akkor is ha a geometriai pályáé.

A továbbiakban meghatározzuk azokat a sebességpontokat, amelyeket Δv_{corr} sebességgel eltolunk. Mivel a megváltozott sebességponthoz tartozó koordinátákat újra ki kell számolnunk, így minél kevesebb pontot szeretnénk eltolni a sebességprofilon. Viszont a sebesség és gyorsulás korlátokat be kell tartanunk, így nem tolhatunk el tetszőlegesen kevés pontot.

Vizsgáljuk külön a két alapesetet Δs_{corr} előjele alapján. Kezdjük azzal az esettel amikor Δs_{corr} negatív, tehát a mintavételezett pálya végpontja van távolabb (4.5. ábra). Ekkor a módosítandó szakasz kezdő pontjához tartozó gyorsulásnak pozitívnak kell lennie, hiszen mi csökkenteni fogjuk a soron következő pont sebességét, és ha a gyorsulás pozitív vagy nulla, akkor csökken a robot gyorsulása a szakasz kezdőpontjában. Ha a gyorsulás negatív lenne a kezdőpontban, akkor könnyedén előfordulhat olyan eset, hogy a sebességcsökkentés után megszegjük a gyorsulás korlátot.

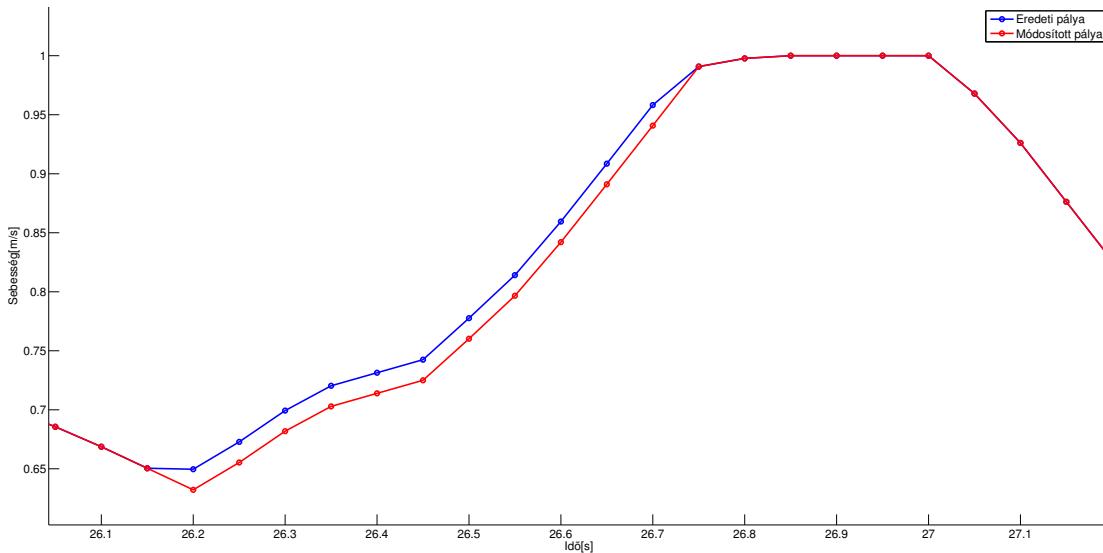


4.5. ábra. A módosított mintavételezett sebességprofil ha Δs_{corr} negatív.

A szakasz végpontjánál pedig negatív gyorsulás szükséges, hiszen a következő pont gyorsulása meg fog nőni a módosítás hatására, és ha pozitív lenne a gyorsulás, a gyorsulásra vonatkozó korlátunkat könnyedén megszegnénk.

Tehát a legegyesűbb esetben a szakasz kezdőpontja a pálya végén található lassító szakasz eleje, mielőtt lassítani kezd a robot és a végpontja a pálya utolsó előtti pontja. Ennek a szakasznak a pontjait fogjuk a (4.32). egyenletből adódó Δv_{corr} sebességgel csökkenteni, és így a robot pontosan a geometriai pálya végpontjában áll meg.

A másik eset, amikor Δs_{corr} pozitív, tehát a mintavételezett pálya végpontja messzebb van a geometriai pálya végpontjához képest. Ekkor mivel meg fogjuk növelni a szakasz sebességét pont fordítva kell szakaszt választanunk, a kezdőpontjánál negatív gyorsulás szükséges, a végpontjánál pedig pozitív. Így kerülhető el leginkább a gyorsulás korlát megszegése. Itt pedig egy megfelelő szakasz a pályán található utolsó gyorsító rész.



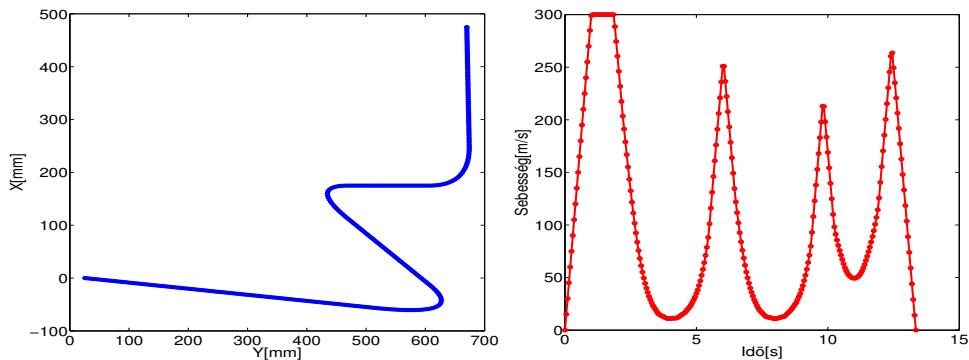
4.6. ábra. A módosított mintavételezett sebességprofil ha Δs_{corr} pozitív.

Abban az esetben ha valamiért az előbb leírt triviális szakaszok mégsem jók, másik szakaszt kell választanunk. Első lépésként válasszunk ki egy megfelelő végpontot a keresendő szakaszhoz. Ha Δs_{corr} negatív akkor megfelelő választás a pálya utolsó előtti pontja, ha pozitív, akkor pedig a pálya utolsó olyan pontja, ahol a gyorsulás pozitív. Ezután keresünk ehhez a kiválasztott végponthoz egy kezdőpontot, de most már vegyük figyelembe a robot korlátozásait és természetesen azt, hogy az útkülönbség az előírt Δs_{corr} legyen. Miután megkaptuk a kezdőpontot is, akkor még ellenőriznünk kell, hogy a végpontnál a robot korlátozásait nem sértjük-e meg. Ezt az első lépésben nem tudtuk megtenni, mivel nem ismertük a végpontot, így Δv_{corr} értékét sem. Ha a végpont megséríti a korlátokat, új végpontot kell keresnünk és ahhoz új kezdőpontot. Ezt addig kell folytatnunk, amíg a robot korlátozásait betartjuk.

Miután a módosított sebességprofil elkészült a szakasz elejétől kezdve újra kell számolnunk a mintavételezett pálya koordinátáit. Ez teljesen ugyanúgy történik, ahogyan már egyszer megkaptuk a mintavételezett pályát. Azért volt fontos, hogy a lehető legkevesebb sebességpontot toljuk el, hogy a koordináták újraszámlálását is kevesebb pontnál kelljen megtenni.

Habár a fenti iteratív eljárás hosszadalmasnak tűnik, vegyük figyelembe, hogy általában kis távolságot kell kompenzálnunk, amihez kis sebessékgülönbség tartozik. Ebből adódóan nagy valószínűséggel a triviális szakasz is megfelelő lesz számunkra.

Szintén fontos megjegyezni, hogy mivel a tárgyalta három hatás elsősorban negatív Δs_{corr} -t eredményezz, így a gyakorlatban ez az eset fordul elő. A gyakorlatot tekintve még említendő, hogy a Δs_{corr} nagyságrendje igencsak csekély a pálya teljes hosszához képest, nehezen elképzelhető akárcsak 1%-ot meghaladó arány a teljes pálya hosszához képest.



4.7. ábra. A pálya és a mintavételezett sebesség profil differenciális robot esetén.

4.3. Autószerű robotmodell

Ebben a részben áttekintjük a különbségeket az időparaméterezésben, ha autószerű robotnál szeretnénk a módszert alkalmazni. A lényeges különbségek a modellben és a korlátozásokban mutatkoznak. Ezek csak a geometriai sebességprofil alkotásakor mutatkoznak meg, a további lépések teljesen megegyeznek a fentebb részletezettel.

A korlátozások meghatározásához szükségünk lenne az autó összes kerekének sebessé-

gére, de könnyen belátható, hogy az egyes kerekek sebessékgülönbsége a megtett utak különbségéből adódik, mely arányos a hozzájuk tartozó elfordulási sugárral. Ezek után elegendő felírnunk ezeket a sugarakat, illetve ezek arányát. Az 1.2. ábrán látható, hogy egy ilyen robot esetén kerékpár modellt, feltételezve ezek a sugarak hogyan származtathatók.

(1.4) harmadik egyenletéből könnyen adódik, hogy a referenciaPont által bezárt kör sugara

$$\rho = \frac{L}{\tan \phi} \quad (4.33)$$

alapján számolható, innen a hátsó kerekek által bezárt kör sugara a következőképpen adódik:

$$\begin{aligned} \rho_{rl} &= \rho - \frac{d}{2} \\ \rho_{rr} &= \rho + \frac{d}{2}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

ahol a d az egy tengelyen található kerekek távolsága. Bár (4.33) alapján a sugár lehet negatív, de a profilozás során ezt nem használjuk ki, ezért a továbbiakban az egyenleteket is minden pozitív sugárra írjuk fel.

Ahhoz, hogy fordulás közben ne csúszzanak meg oldalirányba az első kerekek, a két oldali keréknél különböző szögben kell állnia. Ezt nevezzük Ackermann-hajtásnak. Ez a különbség csak a különböző fordulókörrel áll összefüggésben, és a következőképpen számolható a kormányszögből:

$$\begin{aligned} \phi_r &= \arctan \left(\frac{L}{\rho - \frac{d}{2}} \right) \\ \phi_l &= \arctan \left(\frac{L}{\rho + \frac{d}{2}} \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Ezek a kormányszögek befolyásolják az első kerekek fordulási sugarát is, amit a következőképpen tesznek:

$$\begin{aligned} \rho_{fl} &= \frac{\rho - \frac{d}{2}}{\cos \phi_l} \\ \rho_{fr} &= \frac{\rho + \frac{d}{2}}{\cos \phi_r} \end{aligned} \quad (4.36)$$

4.3.1. Korlátozások

Az autószerű robot esetén is nagyon hasonló korlátozásokkal kell számolnunk, mint egy differenciális robot esetén, viszont némelyek egy másikból származtathatók:

$$\begin{aligned} v^{max} &: \text{A robot pályamenti sebesség korlátja} \\ \phi^{max} &: \text{A robot maximális kormányszöge} \\ a_{wheel}^{max} &: \text{A robot bármely kerekének eredő gyorsulás korlátja} \end{aligned} \quad (4.37)$$

A differenciális robotnál használt ω^{max} helyett itt ϕ^{max} szerepel, mivel ez egy fizikai korlátja az autónak, de ez szükség esetén egyszerűen átszámítható a maximális sebesség ismeretében. A gyorsulások közül csak a a^{max} jelent igazi korlátozást, mivel egy egyenes pályán haladva a centripetális gyorsulás értéke nulla, így ebben az esetben ez megegyezik a tangenciális gyorsulással. Körpálya esetén pedig (4.9) alapján származtatható.

Jelentős különbség, hogy ebben az esetben nem határozzuk meg a maximális sebességet minden kerékre, mivel ez túlbonyolítaná a számításokat, de szerencsére erre nincs is szükség. Mivel a különböző keréksebességek a sugarak arányaiból számíthatók, így nekünk elegendő minden csak a legnagyobb sugárral számolni. Ez (4.34) és (4.36) egyenletek alapján látható, hogy pozitív sugár esetén a bal, míg negatív esetén a jobb oldali első keréknél a legnagyobb, az algoritmus során, ezért csak a sugár abszolút értékével számolunk.

Az autószerű robot esetén is azzal a feltételezéssel élünk, hogy a kerekek tapadási tényezője irányfüggetlen, bár ez a feltételezés egy valós autónál már nem feltétlen állja meg a helyét, de az általunk használt robotautó kerekei esetén ez igen jó közelítést mutat.

4.3.2. Geometriai sebességprofil

A sebességprofil meghatározása teljesen analóg módon történik az eddig látottakkal. Meghatározzuk a maximális sebességet, majd az aktuális sebességből kiszámítjuk a centripetális gyorsulás értékét a leginkább terhelt kerék esetén. Ha ez nem sérti meg a korlátokat akkor ebből számítható a terhelt kerék tangenciális gyorsulása, majd abból a kerék sebessége. Innen már egy egyszerű arányosságból adódik a robot sebessége is a következő időpontban.

A profil visszaterjesztés ugyancsak hasonlóan működik, mint a differenciális robot esetén, kivéve, hogy a 4.19 egyenletet ebben az esetben csak a legnagyobb sugáron mozgó kerékre írjuk fel. Másik változás, hogy a megtett utat is a sugarak arányából származtatjuk, így a következő egyenlet adódik:

$$a_t(k) = \frac{v(k+1)^2 - v(k)^2}{2 \cdot \Delta s(k)} = \frac{v(k+1)^2 - v(k)^2}{2 \cdot \Delta s(k)} \cdot p(k), \quad (4.38)$$

ahol $p(k)$ a maximális sugáron mozgó kerék és a referenciaPont sugarának aránya.

Innen átrendezve és kifejezve $v^c(k)$ -t, a következőt kapjuk:

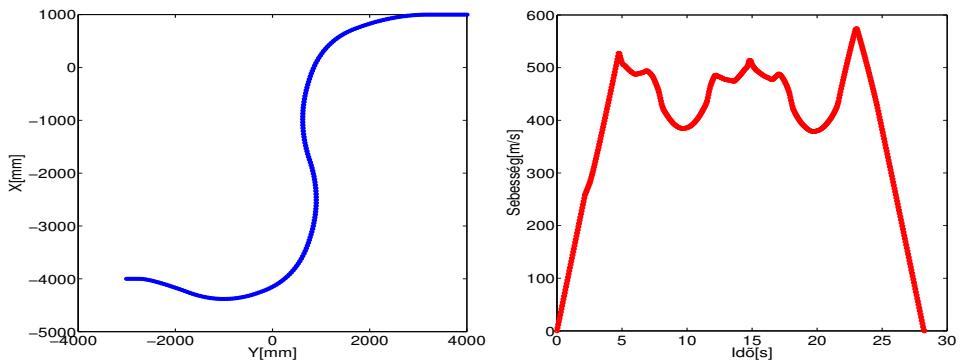
$$d(k) = \frac{p(k)^2}{4 \cdot \Delta s(k)^2} + c(k) \cdot p(k)^2 \quad (4.39)$$

$$e(k) = -\frac{2 \cdot v(k+1)^2 \cdot p(k)^2}{4 \cdot \Delta s(k)^2}$$

$$f(k) = \frac{v(k+1)^4 \cdot p(k)^2}{4 \cdot \Delta s(k)^2} - a_{max}^2$$

$$0 = v^c(k)^4 \cdot d(k) + v^c(k)^2 \cdot e(k) + f(k) \quad (4.40)$$

Ez a módosítás nem érinti az egyenlet megoldhatóságát, hiszen a két egyenlet ekvivalens, csak a távolság kerékre átszámítása máskor történik meg.



4.8. ábra. A pálya és a mintavételezett sebesség profil

5. fejezet

Pályakövető szabályozás

5.1. Differenciális robotmodell

A differenciális robot esetében a követendő pályát szegmensekre bontjuk fel. Egy szegmensten belül a robot megállás nélkül halad előre vagy hátra a pálya mentén. Ebből következik, hogy egy szegmens a haladás irányából és a pálya időben egyenletesen mintavételezett pontjaiból áll. Két szegmens között a robot egy helyben fordul a következő szegmens irányába. Az előbb leírtak alapján két alapvető mozgás primitívvel dolgozunk: egy helyben fordulás adott irányba és pályakövetés.

5.1.1. Egy helyben fordulás

Az egy helyben fordulásnál nem szabad megsérteni a robot maximális szögsebesség (ω^{max}) és szögggyorsulás (β^{max}) korlátját. Habár a 4.2.1. részben nem soroltuk fel a β^{max} -ot mint korlátot, azonban az eddig meghatározott korlátokból következik a szögggyorsulás korlát is:

$$\begin{aligned}\beta(i) &= \frac{a_{rt}(i) - a_{lt}(i)}{W} \\ \beta^{max} &= \frac{{a_{rt}}^{max} + {a_{lt}}^{max}}{W},\end{aligned}\tag{5.1}$$

ahol kihasználtuk, hogy a lassuláskorlát abszolútértéke megegyezik a gyorsuláskorlát abszolútértékével. Az i index időpontot jelöl szemben, az előző fejezetben használt k indexsel, amely pályaponthoz tartozott.

Mielőtt a robot elkezdené a forgást, megvizsgáljuk, hogy melyik körüljárás szerint érdekes fordulni, azt az irányt választjuk, amerre kisebb a szögkülönbség.

Alapvetően a fordulás a maximális szögggyorsulással történik, ha ez nem sérti a maximális szögsebességre vonatkozó korlátot. Ezenkívül azt szeretnénk, hogy a robot a fordulás végén pontosan a kívánt irányba álljon, akkor nem lenne szerencsés ha túl fordulna, és utána ezt kellene kompenzálnunk. Ezért a legfontosabb kérdés, hogy mikor kell elkezdenünk a szögsebességet csökkenteni, hogy a robot a korlátozás betartása mellett a kívánt irányban álljon meg.

A kérdés megválaszolásához kövessük végig az alábbi gondolatmenetet. Jelenleg a i .

időpontban vagyunk és meghatároztunk egy $\omega(i)$ szögsebességet a korlátoknak megfelelően. Ekkor a következő időpontban a robot iránya:

$$\theta(i+1) = \theta(i) + \omega(i) \cdot \Delta t, \quad (5.2)$$

ahol $\theta(i+1)$ a robot orientációja $i+1$. időpontban.

Vizsgáljuk meg, hogy mi történne ha a következő mintavételkor ($i+1$). időpontban a maximális szöggysorsulással elkezdenénk lassítani a fordulást:

$$\begin{aligned} \omega(i+1) &= \omega(i) - \beta^{max} \cdot \Delta t \\ \theta(i+2) &= \theta(i) + \omega(i) \cdot \Delta t + (\omega(i) - \beta^{max} \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \\ &= \theta(i) + 2 \cdot \omega(i) \cdot \Delta t - \beta^{max} \cdot \Delta t^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Általános esetben $\theta(i+n)$ értéke a következő szerint alakul, felhasználva a számtani sorozat összegképletét:

$$\theta(i+n) = \theta(i) + n \cdot \omega(i) \cdot \Delta t - n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \beta^{max} \cdot \Delta t^2 \quad (5.4)$$

Az is tudjuk, hogy mekkora a szögsebessége értéke $i+n$. időpontban:

$$\omega(i+n) = \omega(i) - n \cdot \beta^{max} \cdot \Delta t \quad (5.5)$$

Mi arra az állapotra vagyunk kíváncsiak, amikor a robot megállt, tehát amikor $\omega(i+n) = 0$. Ezt az (5.5) képlet alapján könnyedén megkapjuk ügyelve arra, hogy n egész szám:

$$n = \lceil \frac{\omega(i)}{\beta^{max} \cdot \Delta t} \rceil \quad (5.6)$$

Tehát az i . időpontban (felhasználva (5.4) és (5.6) egyenleteket) meg tudjuk határozni, hogy ha a következő mintavételkor elkezdünk maximális szöggysorsulással lassítani, akkor a forgás kívánt orientációját meghaladjuk-e. Amennyiben meghaladnánk, akkor nem adjuk ki az $\omega(i)$ beavatkozójelet, hanem már az i . időpontban elkezdünk lassítani.

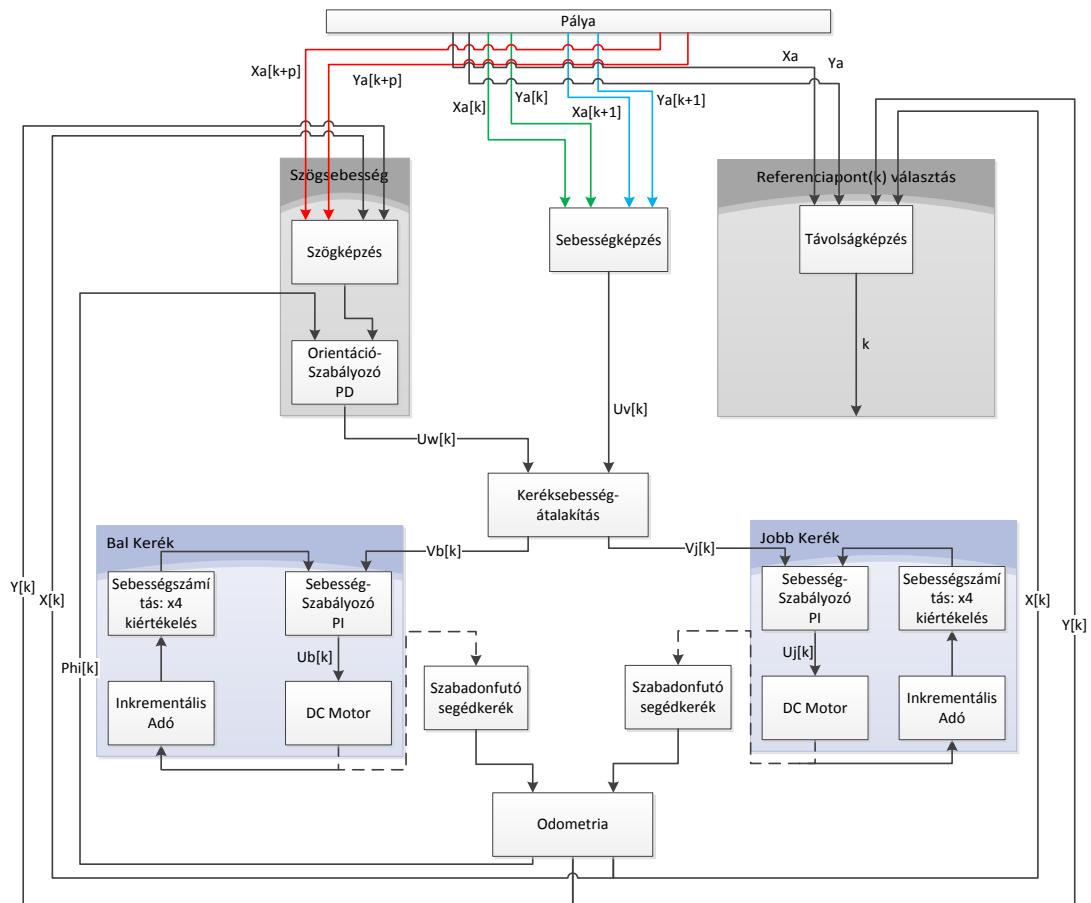
A lassítás közben minden mintavételkor újra megvizsgáljuk, hogy szükséges-e tovább lassítani. Előfordulhat, hogy azt kapjuk, hogy már nem kell. Ilyenkor viszont már nem kezdünk el maximális szöggysorsulással gyorsítani, hanem az előző mintavételkor használt szögsebességgel ismét beavatkozunk (0 szöggysorsulással).

Tehát az egy helyben fordulás szögsebesség-idő profilja alapvetően trapéz alakú, de a lefutó ágán vízszintes szakaszok is lehetnek.

5.1.2. Pályakövetés

A pályakövetés alapja, hogy szétcsatolt sebesség és szögsebesség-szabályozást hajtunk végre. A szétcsatolás következménye, hogy egyszerű, lineáris szabályozókat használhatunk a pályakövetés során. A pályakövetés felépítése az 5.1. ábrán látható.

Az egy helyben fordulásnál szögsebesség beavatkozójelet határozunk meg, míg a pályakövetésnél szögsebesség és sebesség beavatkozójelet. Az algoritmus végén ezeket az értékeket átszámoljuk keréksebességekre a (4.2) egyenlet alapján, tehát közvetlenül keréksebességek lesznek a beavatkozójeleink. Ez az 5.1. ábra középen látható *Keréksebesség-átalakítás* néven.



5.1. ábra. A pályakövetés áttekintő blokk diagramja.

Az 5.1. ábrán látható még két szabadonfutó segédkerék, ezeknek a pozíció visszacsatolása a szerepük. A pozíció visszacsatolás odometria segítségével történik, de jelenlegi dolgozunknak ez nem téma.

Sebességszabályozás

Alacsony szinten, a keréksebességeknél történik a sebességszabályozás. Az általunk használt valós robot két hajtott kerékkel rendelkezik, minden kerék esetén egy-egy DC motor

gondoskodik a robot mozgatásáról. A DC motorok tengelyéhez egy-egy inkrementális adó csatlakozik, amely biztosítja a sebességszabályozás számára a visszacsatolást. Ahogyan a feszültségvezérelt egyenáramú motorok esetében gyakran lenni szokott, mi is PI szabályozókat használunk sebességszabályozásra.

A PI szabályozók esetében gyakran előforduló probléma az elintegrálódás [2]. Az elintegrálódás a rendszerben lévő beavatkozószerv telítései miatt lép fel, kiküszöbölése történhet többféleképpen szabályozó típustól függően. Esetünkben az integrátor visszaállításával előzzük meg az elintegrálódást.

Az általunk implementált sebességszabályozók figyelembe veszik a motor és az áttételek nemlinearitását is. Ehhez felvettük minden kerék esetén a rendszer karakteristikáját, tehát, hogy adott feszültség mekkora sebességet ér el a kerék. Ennek a karakterisztikának az inverzét beépítettük a rendszer modelljébe, így elméletileg a nemlinearitást kiejtettük.

Referenciapont-választás

A sebességszabályozók számára a sebesség alapjelet a pálya biztosítja, hiszen az időparaméterezés során olyan pálya készült, amely időben egyenletesen mintavételezett, és így a pályapontok közötti távolságból a robot sebessége kiszámolható.

Már csak azt kell előntenünk, hogy a pálya melyik pontjához tartozó sebesség alapjelet alkalmazzuk az adott mintavételnél. Ezt hívjuk *referenciapont-választásnak*. Az eljárás első közelítésben igen egyszerű, a pálya pontjai közül a robot pozíciójához legközelebbi pályapontot választjuk referenciapontnak, és így már egyértelműen adódik a sebesség alapjelünk is.

A fejlesztés egy korai stádiumában felmerült, hogy ezt a referenciapontot ne így határoz-zuk meg, hanem folyamatosan léptessük a pálya mentén. Ezzel kvázi előírtuk, hogy a robot adott időpontban a pálya mely pontjában tartózkodjon. Mivel nem biztos, hogy a robot ténylegesen a kívánt pozícióban található, egy külön szabályozó segítségével korrigáltuk a pályába kódolt sebesség alapjelet, hogy a robot elérje a referenciapontot.

Amennyiben nem ideális modellt használtunk, a megoldás nem műköött, a rendszer instabillá vált. Később beláttuk, hogy a megoldás problémája az volt, hogy egrészt előírtuk a robot számára, hogy mekkora sebességgel haladjon a pálya mentén és a referenciaponton keresztül pedig, hogy hol tartózkodjon az adott időpontban. Ez már azért sem lehetséges, mivel, ha a robot a referenciaponthoz képest lemaradásban van (általában ez történik), akkor a sebességalapjel korrekció növelné a sebességet, pedig azt már alapból úgy írtuk elő, hogy a lehető leggyorsabban haladjon a robot a pálya mentén. Tehát az alapjelmódosító szabályozóval arra kényszerítenénk a rendszert, hogy szegje meg a saját korlátozásait.

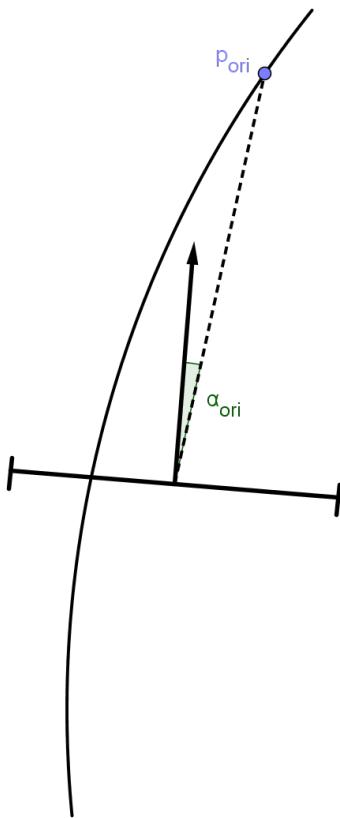
A végeleges megoldásnál ezzel szemben a referenciapontot alakítjuk a robothoz, nem pedig fordítva. Ez azt jelenti, hogy nem írjuk elő, hogy a robot a pályát mennyi idő alatt járja be, csak azt, hogy a pálya adott pontjában mekkora sebességgel avatkozzunk be.

A pályakövető algoritmusnál lényeges szempont a futási idő, mivel valós roboton is működnie kell. Ezért a referenciapont meghatározásánál nem megyünk végig a pálya összes pontján. A legközelebbi pont keresését az előző iterációban használt referenciapontnál kezdjük, és csak egy bizonyos számú pontot vizsgálunk meg. Ha a robot korlátai megfelelően

lettek beállítva, akkor az egymás utáni referenciaPontok között körülbelül egy pályapont különbségnek kell lennie. Ezért teljesen felesleges a pálya összes pontját megvizsgálnunk.

Orientációsabályozás

Az orientációsabályozás feladata szögsebesség alapjel biztosítása a pályakövetés során. Az orientációsabályozáshoz felhasználjuk a robot aktuális pozíóját és a pálya egy pontját (p_{ori}). A szabályozó alapjelét a robot pozíciója és p_{ori} pont közötti irány és a robot aktuális orientációjának különbsége adja meg (α_{ori} az 5.2. ábrán). A konkréttel orientációsabályozó egy PD szabályozó.



5.2. ábra. Az orientáció-szabályozás referenciaPontja.

Fontos kérdés, hogy a pálya mely pontját válasszuk az alapjelszámoláshoz. mindenépp a sebességsabályozónál használt referenciaPontnál távolabbi pontot keresünk, hiszen ez a pont van a robothoz legközelebb és nem akarjuk, hogy az orientáció szabályzás a pályán visszafelé irányítsa a robotot.

Alapvetően két megközelítést alkalmazhatunk. Egyrészt használhatunk konstans távolságú előretekintést, ekkor minden a referenciaPonttól egy adott távolságra lévő pályapontot használunk az orientációsabályozáshoz. A másik megközelítésnél pedig konstans idejű előretekintést alkalmazunk. Ennél a módszernél a referenciaPonthoz képest adott mintavételel előbbre lévő pályapont lesz p_{ori} .

Az algoritmust úgy készítettük el, hogy minden módszert lehet alkalmazni, akár egy-

szerre a kettőt is a következő módon. A konstans távolságú előretekintéssel elérhető, hogy a robothoz ne kerüljön túlságosan közel p_{ori} , a konstans idejű előretekintés pedig lehetővé teszi, hogy egyenes részeken, ahol nagyobb sebességgel mozog a robot távolabb tekintsünk.

5.2. Autószerű robotmodell

Ahogy láttuk a differenciális robot esetén, a pályakövetés problémáját szétbontottuk a pályába kódolt sebességszabályozásra és orientációs szabályozásra. Az autószerű robotok esetén is hasonló módon járhatunk el. Mégis van néhány lényeges különbség a két robottípus között. Míg a differenciális robot esetén a két kerék sebességével, addig az autószerű robot esetén a robot referencia pontjának tangenciális sebességével és a kormányszöggel tudunk beavatkozni.

Ez az alsóbb szabályozási szinteken az következő különbségeket jelenti: A differenciális robot esetén a szabályozó a pályából meghatározott sebesség és szögsebesség alapelet szétválasztja keréksebességekre, mivel itt ez képzi a szabályozás beavatkozó jelét. Az autószerű robot esetén nincs szükség a szétválasztásra, a sebességet közvetlenül átadjuk az alsóbb szintű sebességszabályozásnak, a kiszámított kormányszöget, pedig már a beavatkozó szervnek adjuk vissza.

5.2.1. Virtuális vonalkövező szabályozás

A fentiekből látható, hogy a felsőbb szinten lévő sebességszabályozás módosítására nincs szükség, teljesen megegyező módon működhet minden két robot esetén. Az orientációs szabályozás esetén már jelentős különbségek mutatkoznak. Egy autószerű robot esetén nem hasznos a szögsebesség kiadása, mivel a beavatkozó jelünk a kormányszög. Természetesen a két mennyisége származtatható egymásból.

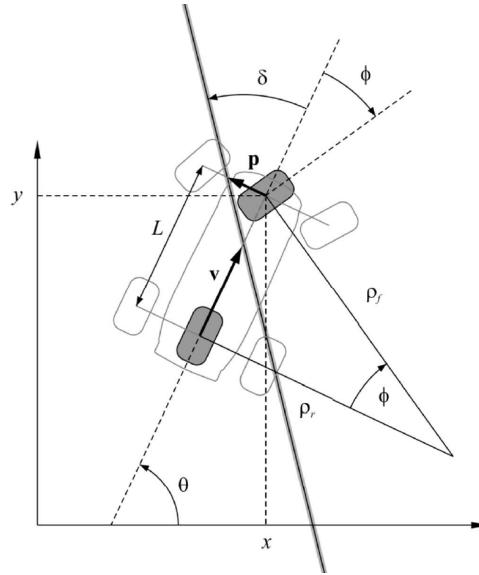
Az orientációs szabályozás alapötlete a differenciális robotnál egy előretekintési távolság meghatározása volt, mely alapján számítunk egy szöghibát, majd ebből szögsebesség beavatkozó jelet. A vonalkövető autók rendszermodelljénél és szabályozásánál azzal a feltételezéssel élünk, hogy az autó első keréktengelye alatt egy keresztirányú, egydimenziós vonalszenzor helyezkedik el. A jelenlegi esetben a pályakövető szabályozás elvét egy ehhez hasonló „virtuális szenzor” segítségével fogalmazzuk meg. Ez a módszer nagyon hasonló a RobonAUT [1] versenyen is látott vonalkövető autók szabályozására, azzal az előnnyel, hogy itt sokkal pontosabban ismert a „vonal” helye és orientációja. Így módosul (1.4) egyenlete:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_r \frac{\cos(\theta + \phi)}{\cos \phi} \\ \dot{y} &= v_r \frac{\sin(\theta + \phi)}{\cos \phi} \\ \dot{\theta} &= v_r \frac{\tan \phi}{L}\end{aligned}\tag{5.7}$$

ahol, a jelölések megegyeznek az 1.4 esetén használtakkal, de a továbbiakban a sebességet egyszerűen csak v -vel jelöljük. Ezen egyenletek és az 5.3 ábra alapján modellezésével a

következő modellt kapjuk: [1]

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= -v \frac{\tan \phi}{L} \\ \dot{p} &= v \cdot \tan \delta - v \cdot \tan \phi - v \cdot \frac{p}{L} \tan \delta \tan \phi\end{aligned}\quad (5.8)$$



5.3. ábra. Ferde vonal és robot modellje [1]

Látható, hogy ez a rendszer nem lineáris, de a szabályzótervezés során nekünk egy lineáris rendszerre van szükségünk, így a fenti egyenletet linearizálni kell. Mivel az a célunk, hogy a robot a vonalon helyezkedjen el, és azzal párhuzamosan, így a munkapont, amely körül szeretnénk a linearizálást elvégezni a $p = 0$, $\phi = 0$ és a $\delta = 0$. Így a következő egyenletekkel számolhatunk:

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= -\frac{v}{L} \phi \\ \dot{p} &= v(\delta - \phi - 0)\end{aligned}\quad (5.9)$$

A linearizálás egyszerű, mert a tangens 0 környezetében jól közelíthető az argumentumával. Látható, hogy a \dot{p} esetén az utolsó tagot elhanyagoljuk, mivel a két kis szög szorzata annyira kis számot eredményez, hogy elhagyható. Ha ezt kicsit más formában írjuk fel, rögtön megkapjuk a linearizált rendszer állapot terjesztését:

$$\begin{aligned} x &= [\delta \quad p]^T \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -v/L \\ -v \end{bmatrix} \phi \\ p &= [0 \quad 1]x + 0 \cdot \phi \end{aligned} \tag{5.10}$$

Egy valós vonalkövető autóval ellentétben, mi viszonylag pontosan meg tudjuk határozni a rendszer állapotváltozóit. Így célszerű közvetlenül ezek visszacsatolása, amelynek szabadon megválaszthatóak a visszacsatolt rendszer pólusai. Ezt érdemes úgy megtenni, hogy minimálisra csökkentsük a tüllendülést. Ha a rendszer válaszát kéttárolós lengőtaggal közelítjük, akkor annak átviteli függvénye a következő:

$$W(s) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 s + s^2} \tag{5.11}$$

ahonnan a pólusok:

$$s_{1,2} = -\omega_0\xi \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \tag{5.12}$$

ahol ω_0 a rendszer csillapítatlan sajátfrekvenciája és ξ a csillapítási tényező. Ha tüllen-dülés mentes rendszert szeretnénk, akkor a $\xi = 1$ kell válasszuk. Az ω_0 megválasztása a kívánt beállási időtől függ.

Az algoritmust úgy készítették el, hogy az inicializálási fázisban a kívánt pólusoknak megfelelően, az Ackermann-képlet segítségével kiszámítja az erősítési tényezőket, és később ezt használja fel a szabályozási fázisban. Az eredmények azt mutatták, hogy az így készült szabályozóval a szimulációban a robot trajektóriája a kanyarokat levágta. Ez az eredmény egyáltalán nem meglepő, mivel a szabályozást úgy írtuk fel, hogy az autó eleje kövesse a pályát, de a pályatervezés során a robot referencia pontjának pályáját terveztük meg. Szerencsére ezt egyszerűen orvosolhatjuk, ha a mintavételezett pálya minden pontját eltoljuk az autó hosszával.

6. fejezet

Algoritmusok megvalósítása

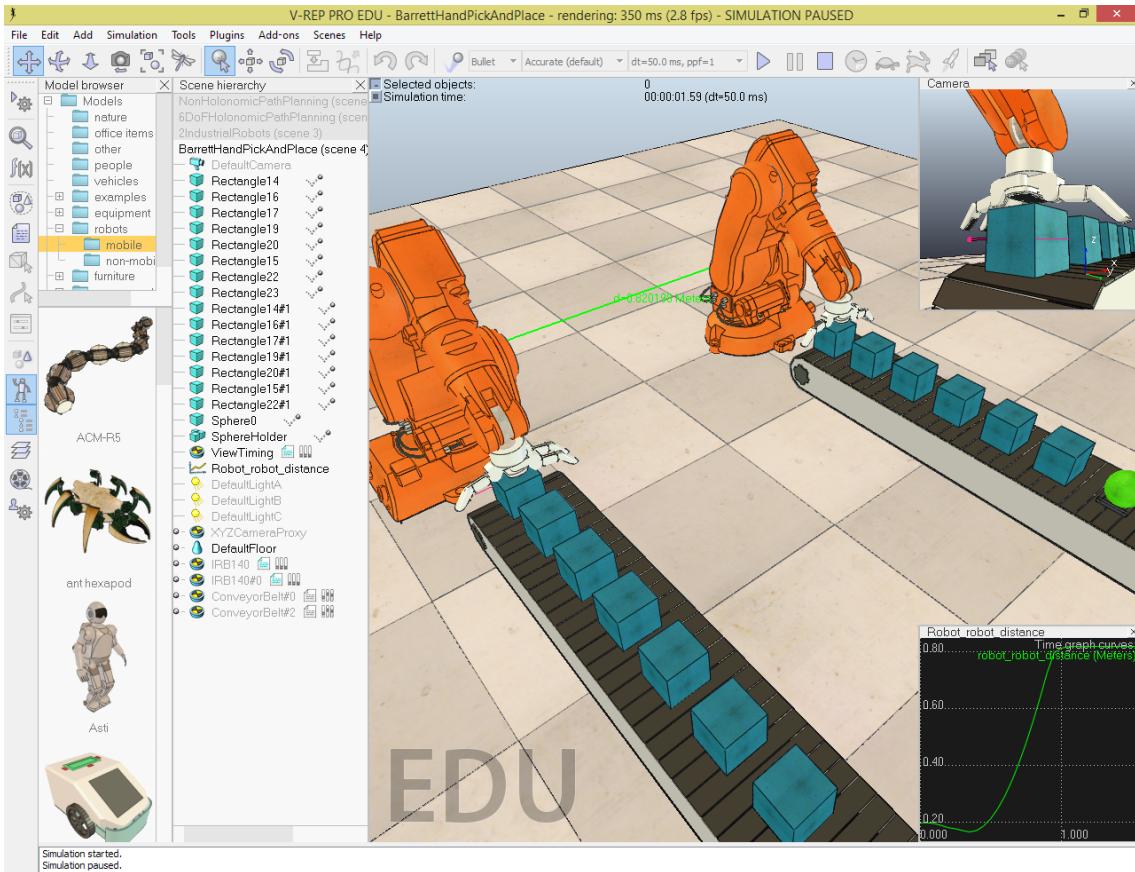
Ebben a fejezetben az algoritmusok megvalósításáról, és az azokhoz használt eszközökről beszélünk. Bemutatjuk a használt szimulációs környezetet, és a köré készült programok működését, majd leírjuk a szimulátorban és a valós robotokon elért eredményeinket.

6.1. Szimuláció - V-REP

A robotok mozgásának szimulálására a V-REP robotszimulátort használtuk. A program a Coppelia Robotics terméke[12], amely oktatási célból ingyenesen letölthető és használható. Nagyon széleskörűen használható program, a robotika minden ágában. Tesztelhető benne ipari szerelőrobotok működése, ahogyan az a 6.1 ábrán is látható, felhasználható ilyen robotok programozásának oktatására is, de a mobil robotok területén is kifejezetten praktikus eszköz. Jól dokumentált, sok oktató anyaggal, példaprogramokkal együtt. Folyamatosan frissítik és új funkciókkal bővítik a programot.

6.1.1. Szerver program

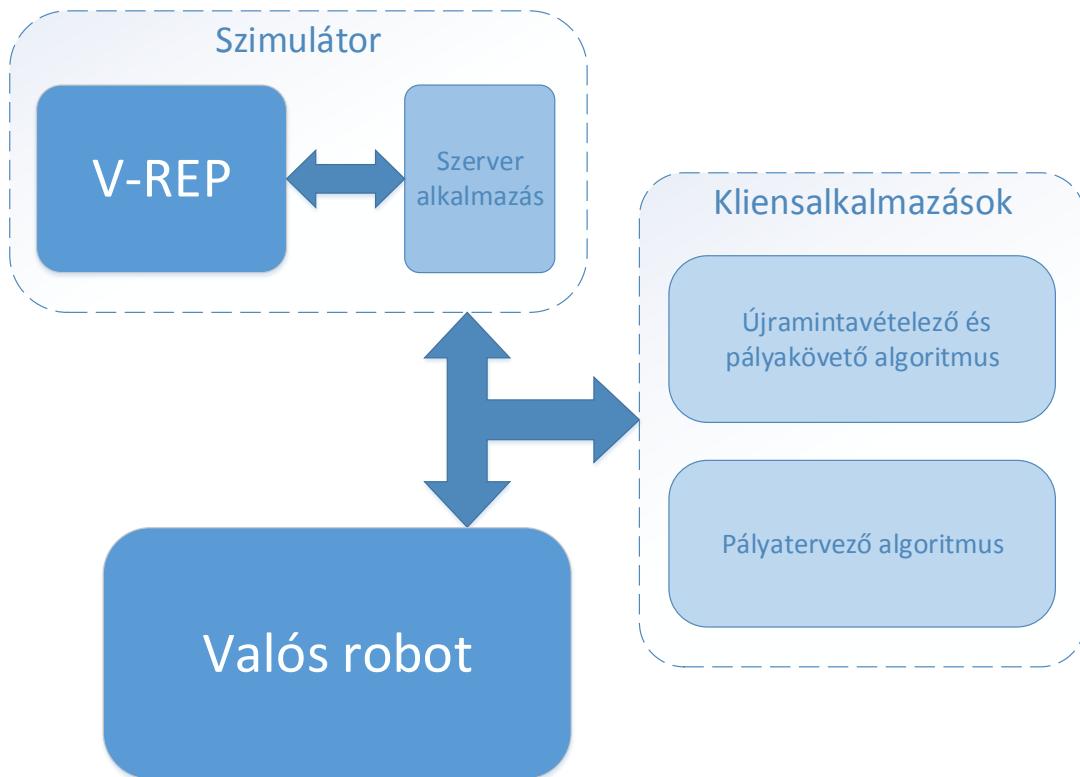
Több módon is kiegészíthető a program működése. A megoldásunkban egy szerver programot hoztunk létre, mely kommunikál a V-REP egy lua szkriptjével, majd a kapott üzenet alapján mozgatja a szimulált robotot. A szerver nem csak a szimulátorral áll kapcsolatban, hanem hozzá csatlakozhatnak a különböző egyéb algoritmusok, ahogy az a 6.2 ábrán is látható. A fejlesztés során próbáltuk a szimulációt a robot típusától függetlené tenni, ezt a következőképpen valósítottuk meg: A szimuláció indulásakor a lua szkript elküldi a szimuláció módját, és a hozzá tartozó paramétereket. Innen a szerver alkalmazás eldönti milyen paraméterek és egyéb adatok érkezhetnek, illetve, hogy melyik kliensre kell várjon. Ha a kapcsolat létrejött a kliens alkalmazással, akkor az a paramétereknek megfelelően végzi a feladatát, majd az eredményt a szerver alkalmazáson keresztül elküldi a szimulátoroknak. Ez a struktúra első ránézésre igen bonyolultnak tűnik, de ez a módszer biztosítja, hogy a szimulátort egyszerűen lecserélhessük egy valós robotra. A szerver működése teljes mértékben transzparens, a későbbiekben ennek működését a szimulátor részének vesszük.



6.1. ábra. A V-REP szimulációs program

6.1.2. Kliens programok

A különböző kliensprogramok más-más paramétereket várnak, ezt biztosítja a szerver alkalmazás. Az időparaméterező és a pályakövető szabályozás teszteléséhez készült egy kliens, mely a szimulátortól fogad egy előre elkészített pályát, majd ezt újramintavételezi. Az így készült pályát visszaküldi a szimulátornak, ami kirajzolja az új pályát, majd elküldi a robot aktuális pozíóját. Innen átveszi átveszi a működést a pályakövető algoritmus, a kapott pozíciót feldolgozza és ez alapján az előző fejezetben részletezett módon kiszámítja a beavatkozó jeleket, amit visszaküld a szimulátornak. A szimulátor és a pályakövető alkalmazás működése szinkronizálva van, azaz megvárják egymást a következő lépéssel.



6.2. ábra. Az elkészült keretrendszer blokkvázlata

A másik elkészült kliens alkalmazásunk a pályatervező program. Ez nem vár pályára a szimulátortól, csak az előre meghatározott környezet nevére. Itt kompromisszumot kellett kötnünk, mivel a szimulátor speciális fájlformátumot tud csak kezelni, ezért közös fájlokkel dolgozik a két program, de a pályatervező más forrásból is elfogad pályát, így továbbra is lecserélhető marad a szimulátor. A pályatervezés után a működése teljesen megegyezik a pályakövető kliensprogramnál leírtakkal, azzal a különbséggel, hogy a pályát itt a tervező szolgáltatja.

Azért választottuk a C++ nyelvet az implementáláshoz, hogy a valós roboton, beágyazott rendszerben is könnyedén használható legyen. A beágyazott környezet miatt igyekeztünk kerülni bármiféle olyan külső szoftvercsomag használatát, aminek a használata problémás lehet a valós roboton.

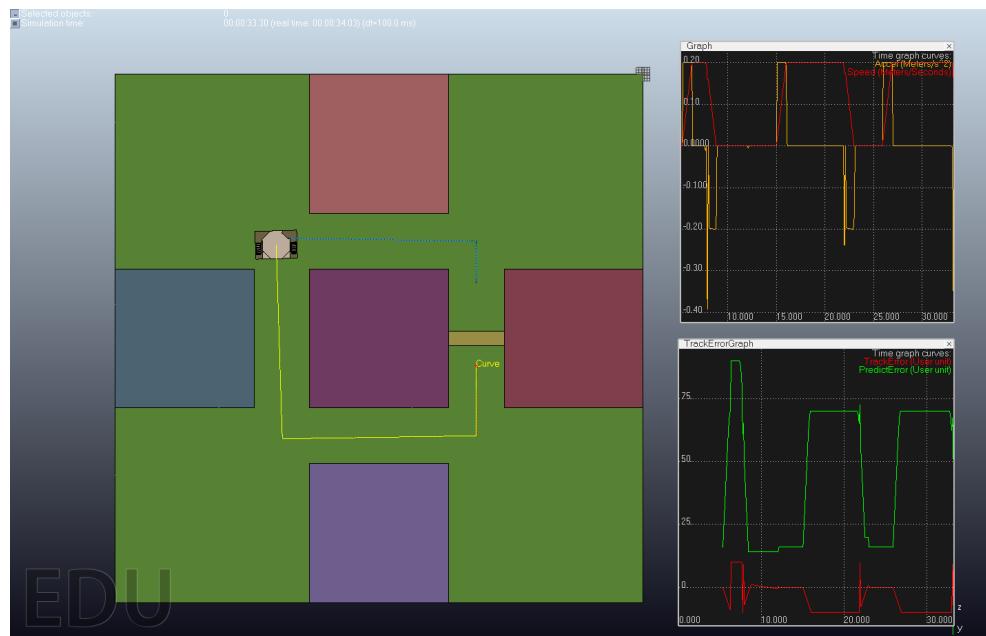
E mellett a fejlesztés során igen fontos volt az objektum-orientált szemléletmód, mivel így biztosítható a legjobban a modularitás, és a későbbi egyszerű fejlesztés, módosítás. Az implementálás során egyéb előnyös tulajdonságát is ki tudtuk használni, ezek közül a legjelentősebb az újrafelhasználhatóság volt. A programozás előrehaladtával a fejlesztés sebessége is nőtt, mivel az előzőleg elkészített kódrészleteket egyszerűen újra tudtuk használni.

6.2. Szimulációs eredmények

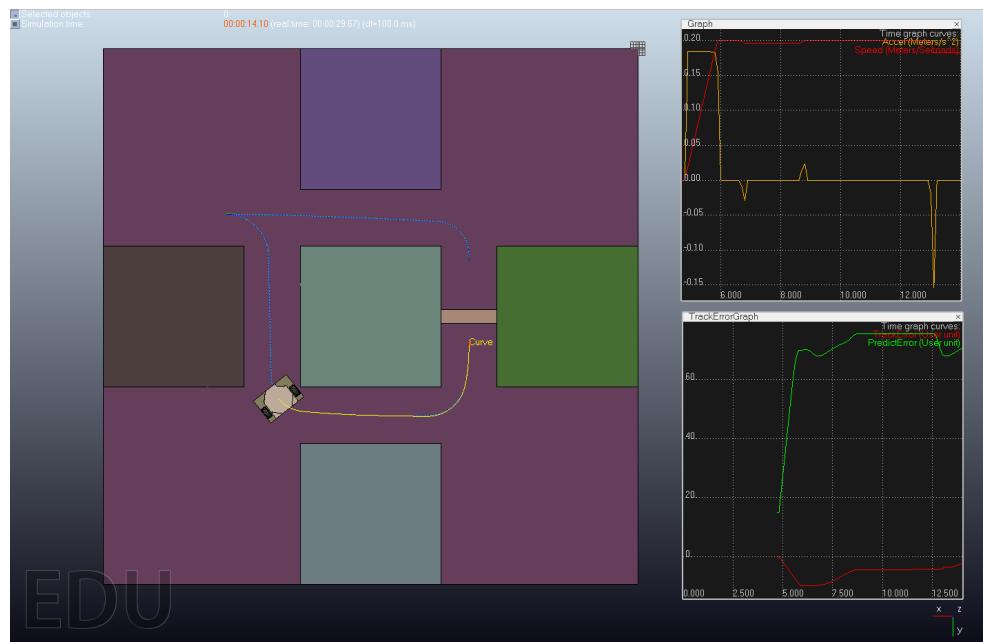
Az általunk ismertetett algoritmusok szimulációs környezetben a várakozásainknak megfelelően működtek. Az eredmények a következő ábrákon láthatók. A képek a V-REP szimulátorról készültek, az akadályokat és a pálya határait színes polygonok jelzik, a pályatervező által generált pályát kék színnel jelölik, míg a robot által bezárt pályát sárgával. A robot alatt található polygon jelzi a tervezés során ténylegesen figyelembe vett robot polygonját.

6.2.1. Differenciális robot

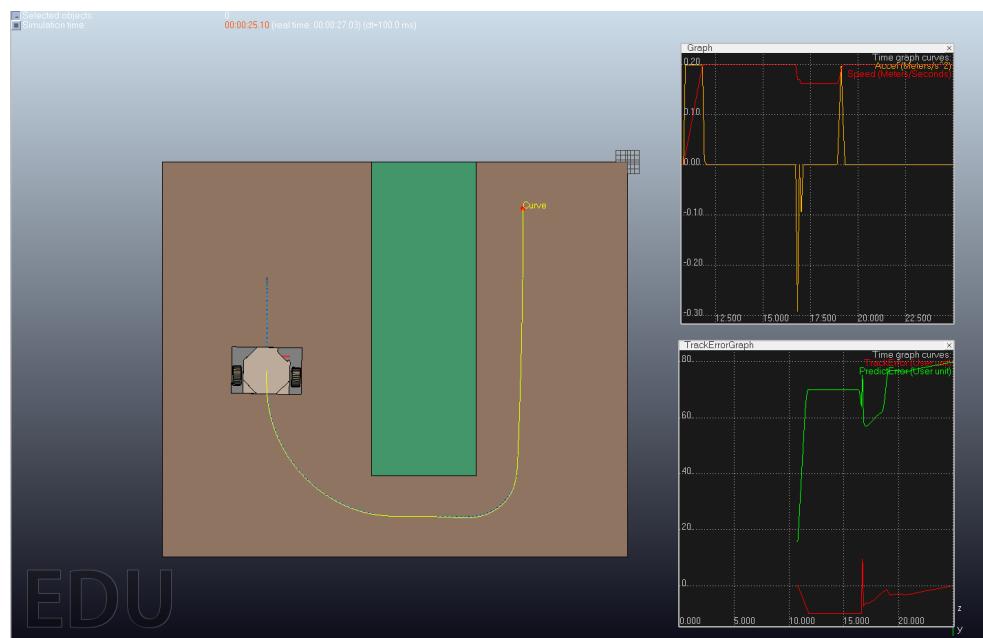
A differenciális robot szimulációjánál a képek jobb oldalán található két grafikon. A felső grafikon a robot sebességét (piros) és gyorsulását mutatja (sárga), az alsó grafikon a referenciaPonttól vett távolságot (piros) és az orientációs referenciaPonttól vett távolságot láthatjuk (zöld). A felső grafikonon m/s és m^2/s mértékegységekben szerepelnek a mennyiségek, míg az alsó grafikonon mm -ben.



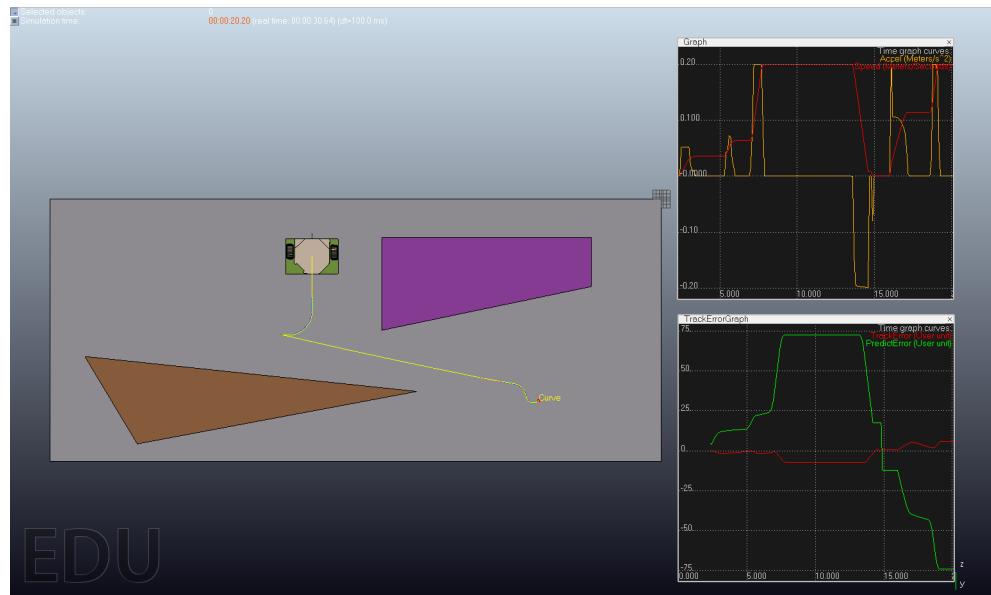
6.3. ábra. Ez a pálya differenciális robot esetében viszonylag egyszerűen teljesíthető, mivel a robot képes egy helyben fordulni. A pályát az RTR tervező generálta.



6.4. ábra. Az előző pálya RTR és C*CS tervező együttes használatával.



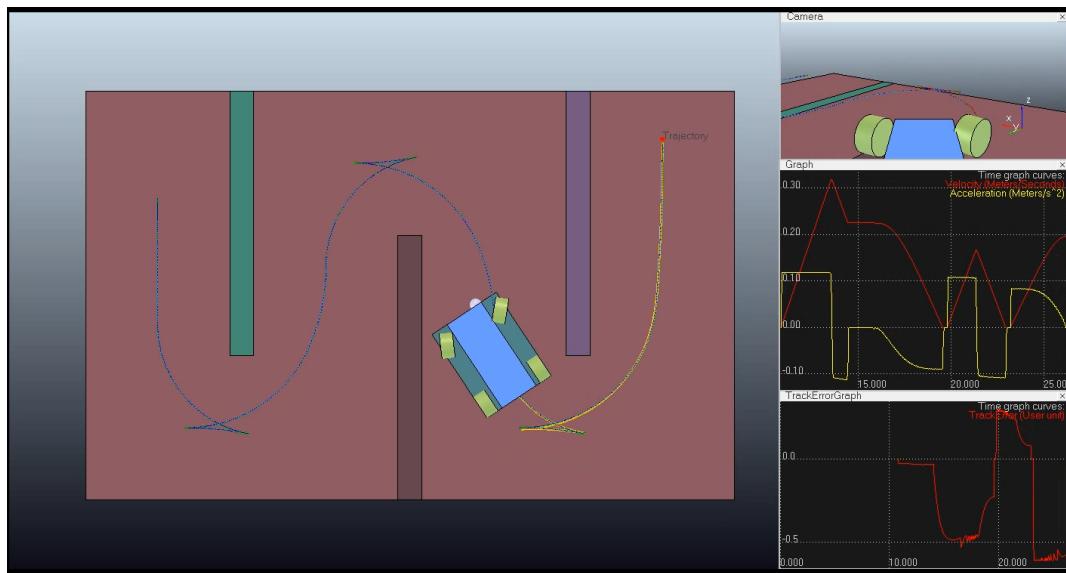
6.5. ábra. Itt is szép megoldást eredményezett az RTR és C*CS tervezők közös használta.



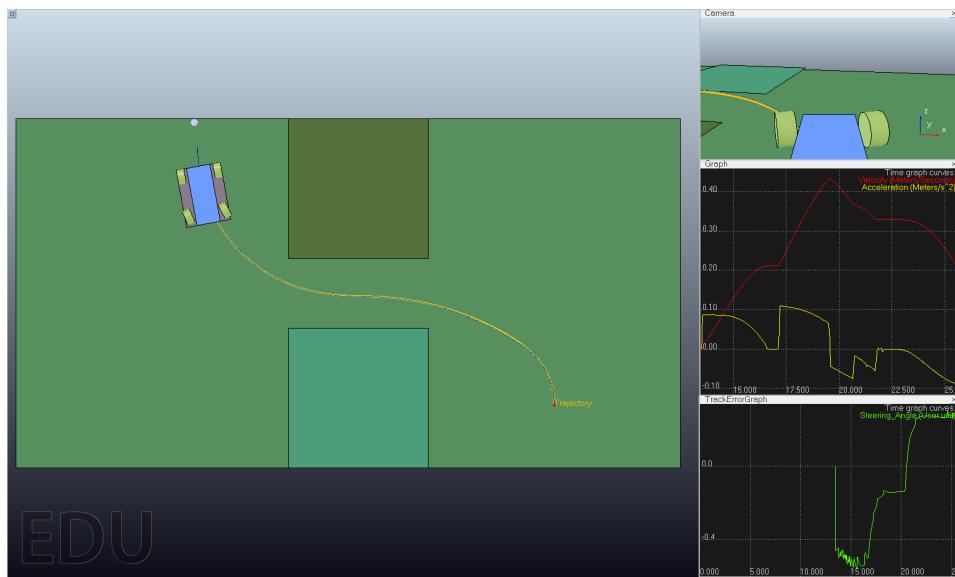
6.6. ábra. Más alakú akadályok sem jelentenek problémát.

6.2.2. Autószerű robot

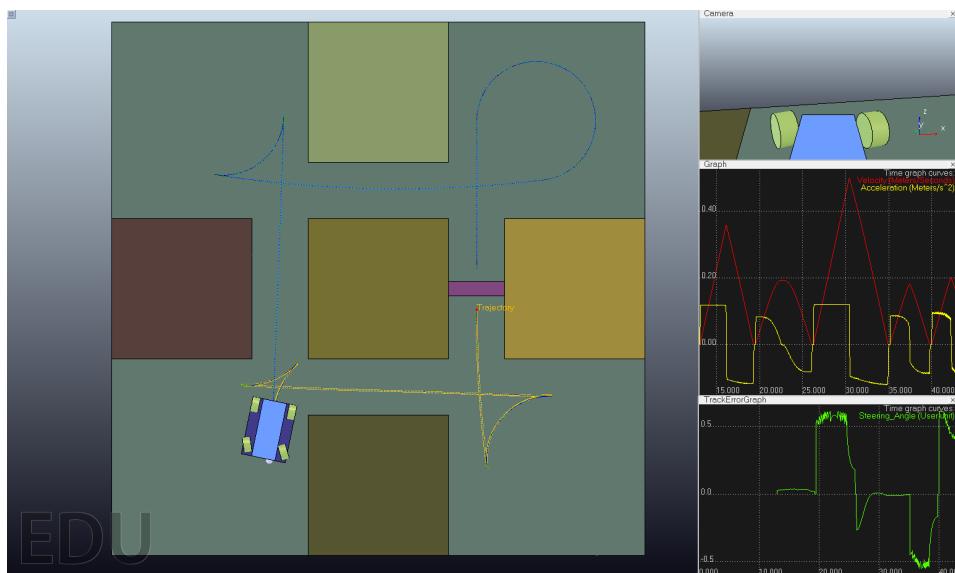
A robottautó szimulálásakor jobb oldalt középen a sebesség és a gyorsulás profil látható, alatta pedig a kormányszög értéke. A felső grafikon itt is m/s és m^2/s mértékegységben szerepelnek a mennyiségek, míg a kormányszög radiánban. A grafikonok felett az autó elejére szerelt kamera képét látjuk.



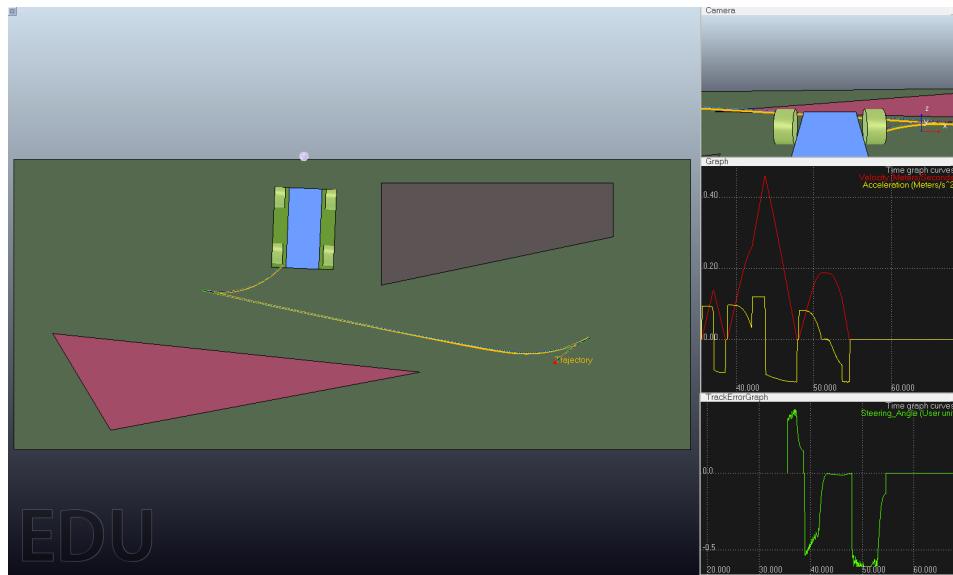
6.7. ábra. Szlalom szűk folyosókon.



6.8. ábra. A 2.5. ábrán látható pálya RTR globális tervező esetén.



6.9. ábra. Ezt a pályát láttuk már differenciális robot esetén is, de autóval végrehajtani sokkal nehezebb.

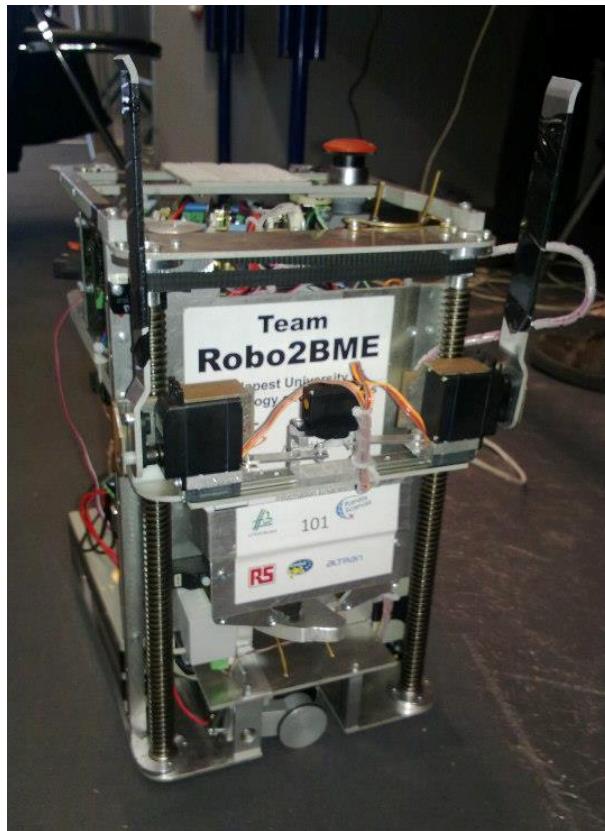


6.10. ábra. Ez a pálya autó esetén sem kihívás.

6.3. Eredmények valós robotokon

6.3.1. Differenciális robot

Az algoritmusokat az Eurobot 2013 nemzetközi robotversenyre elkészített differenciális roboton teszteltük. A robot alsó szintű vezérlése elosztott modulokkal történik, az egyik ilyen modul felelős a robot mozgatásáért. A modulok CAN buszon kommunikálnak egymással.

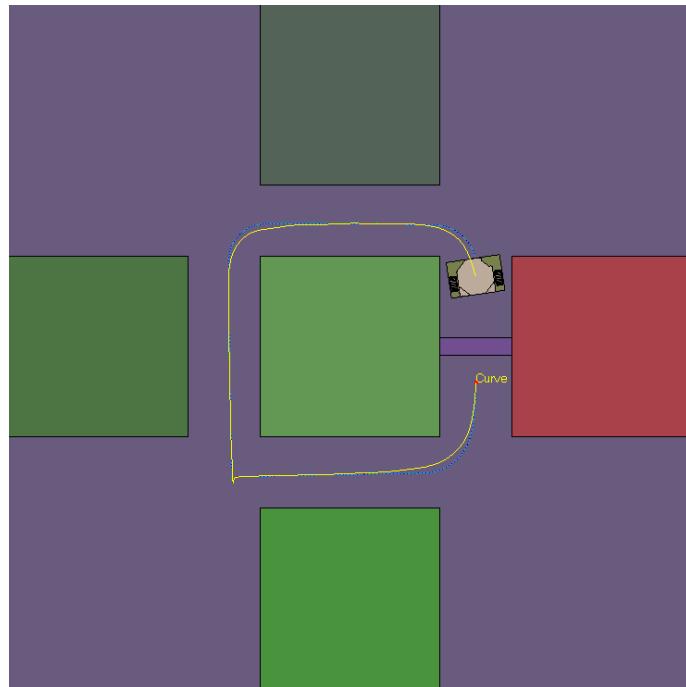


6.11. ábra. A dolgozatban használt valós differenciális robot.

A pályakövető algoritmust az alsó szintű modulon található DSP jelfeldolgozó processzoron implementáltuk. Míg a pályatervezést és az időparaméterezést felső szintű programban valósítottuk meg. A felső szintű vezérlőprogram akár laptopról, akár beágyazott rendszerről is futhat. Mindkét esetben TCP/IP kapcsolaton keresztül érjük el a robot alsó szintű moduljait. Az általunk elkészített pályatervező és időparaméterező algoritmusokat a vezérlőprogramba illesztettük be.

A robot felső szintű programja képes a V-REP szimulátor felé adatokat küldeni, valamint a V-REP-ben lehetőség van a valós roboton futó algoritmusok beállítására, hangolására, ahogyan szimuláció esetében is. A V-REP-nek a robot pozícióját küldjük el a mozgás során és megtervezett, időparaméterezett pályát a pályakövetés előtt.

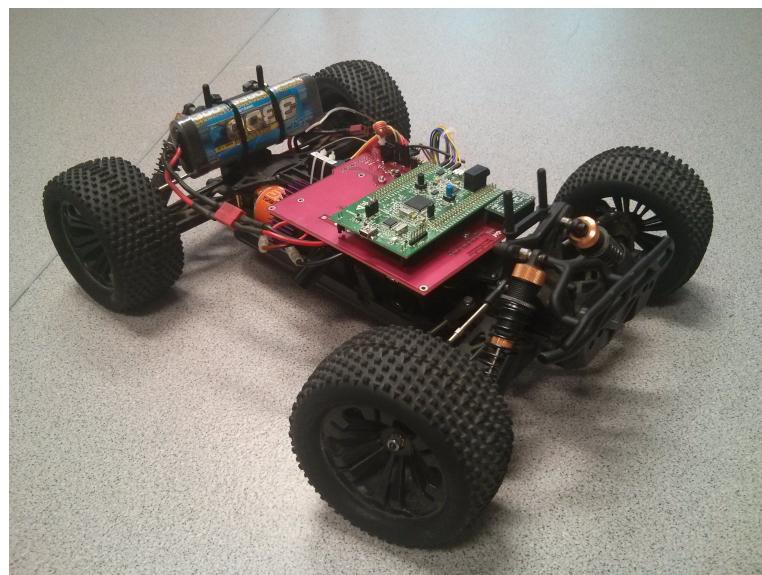
A pályakövető algoritmus tesztelése valós roboton még folyamatban van, de alapvetően a szimulátorban kipróbált eljárás valós környezetben is működőképes, ahogyan ez a 6.12. ábrán is látható.



6.12. ábra. A valós robot által bezárt pálya(sárga) és a robot által megtervezett pálya(kék).

6.3.2. Autószerű robot

A robotautó hardverét is elkészítettük. Az autó elsődleges célja különböző pályatervezési és pályakövetési algoritmusok kipróbálása. A fejlesztés a dolgozat írásának idejében is zajlik, remélhetőleg minél hamarabb kipróbálhatjuk valós környezetben is az ismertetett algoritmusokat. A robot fel lett készítve különböző szenzoradatok fogadására, ez teszi lehetővé, hogy a következő RobonAUT [11] versenyen Safety Car-ként üzemeljen.



6.13. ábra. Az elkészült robotautó

7. fejezet

Összegzés

A dolgozatban bemutattunk az RTR globális és a C*CS lokális pályatervező algoritmust. Mindkét algoritmust C++ nyelven implementáltuk és a működésüket szimulált környezetben ellenőriztük. A két eljárás együttes használatát is bemutattuk differenciális és autószerű robotok esetében is.

Ismertettük az általunk kifejlesztett időparaméterező algoritmust, amely a robot korlátait figyelembe véve képes időben egyenletes pályát generálni. Az időparaméterezést is minden típusú robothoz elkészítettük és a dolgozatban kiemeltük a köztük lévő különbségeket. Lényeges tulajdonsága az algoritmusunknak, hogy tetszőleges geometriai pályához képes sebességprofilt készíteni.

Az időparaméterezést a pályakövető algoritmus használja fel, amit szintén mi fejlesztünk ki. A pályakövetés különbözik az autószerű és a differenciális robot esetén, de itt is közösek az alapok. Hiszen minden esetben szétcsatolt sebesség- és orientációs bázis történik.

Az említett algoritmusok szimulációjához V-REP robotsimulátort alkalmaztunk, amihez kialakítottuk a megfelelő szoftvereket. Akár valós robot esetében is láthatjuk a robot állapotát a szimulátorban, ahogyan a pályakövetés paramétereit is megadhatjuk a szimulátorból.

Differenciális robot esetében valós környezetben is működőképes a pályatervezés és a pályakövetés. Jelenleg a pályakövető algoritmus tesztelése folyik, reményeink szerint az algoritmusokat a következő Eurobot versenyen is használni tudjuk majd.

A robotautó elektronikáját elkészítettük, így hamarosan ennél a robot típusnál is tesztelhetjük a pályakövető algoritmusunkat. Későbbiekben szeretnénk az autót felhasználni más pályakövető és mozgásirányító algoritmusok teszteléséhez is.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnénk köszönetet mondani Kiss Domokosnak a folyamatos konzultációkért, tanácsaiért és iránymutatásaiért. Ezenkívül Kolumbán Sándornak a szabályozástechnikai segítségéért és mindenki másnak, aki segítette munkánkat.

Irodalomjegyzék

- [1] Kiss Domokos – Kolumbán Sándor: *Segédlet a RobonAUT verseny szabályozástechnikai szemináriumához*. 2014.
- [2] Bézi István: *Robotirányítás rendszerteknikája 3. fejezet*. 2013.
- [3] L. E. Kavraki – P. Svetska – J.-C. Latombe – M. H. Overmars: Probabilistic roadmaps for path planning in high-dimensional configuration spaces. 12. évf. (1996), 566–580. p.
- [4] D. Kiss – G. Tevesz: A model predictive navigation approach considering mobile robot shape and dynamics. *Periodica Polytechnica - Electrical Engineering*, 56. évf. (2012), 43–50. p.
- [5] D. Kiss – G. Tevesz: A steering method for the kinematic car using C*CS paths. In *Proceedings of the 2014 15th International Carpathian Control Conference (ICCC)* (konferenciaanyag). Velké Karlovice, Czech Republic, 2013. May, 227–232. p. ISBN ISBN: 978-1-4799-3527-7.
- [6] D. Kiss – G. Tevesz: The RTR path planner for differential drive robots. In *Proceedings of the 16th International Workshop on Computer Science and Information Technologies CSIT'2014* (konferenciaanyag). Sheffield, England, 2014. September.
- [7] Dirk-Jan Kroon: 2d line curvature and normals. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32696-2d-line-curvature-and-normals/content/LineCurvature2D.m>.
- [8] S. M. LaValle: Rapidly-exploring random trees: A new tool for path planning. Jelentés, 1998, Computer Science Dept., Iowa State University.
- [9] S. M. LaValle: *Planning Algorithms*. Cambridge, U.K., 2006, Cambridge University Press. Available online at <http://planning.cs.uiuc.edu/>.
- [10] J. A. Reeds – L. A. Shepp: *Optimal paths for a car that goes both forward and backwards*. 1990, Pacific Journal of Mathematics.
- [11] Robonaut. <http://www.robonaut.hu/>.
- [12] Coppelia Robotics: V-rep. <http://www.coppeliarobotics.com/>.
- [13] Bruno Siciliano – Oussama Khatib: *Handbook of Robotics*. 2008, Springer.

- [14] Christoph Sprunk: *Planning Motion Trajectories for Mobile Robots Using Splines*. 2008, Albert-Ludwigs-Universitat Freiburg.
- [15] Katona Gyula Y. – Recski András – Szabó Csaba: *A számítástudomány alapjai*. 2. javított kiadás. kiad. 2001, Typotex.