Dimensionnement d'un mécanisme 2R
Compte-rendue TP

Abdellah KOUTIT

Janvier 2023

Introduction

L'objectif de ce TP est de d´déterminer les paramètres de conception optimaux d'un m´mécanisme 2R représenté sur la Figure 1 vis-'a-vis d'un cahier des charges donné .
— l_1 la longueur du premier corps.
— l_2 la longueur du second corps du mécanisme 2R.
— θ_1 et θ_2 sont les variables articulaires motorisées du mécanisme.
— k_1 et k_2 sont les raideurs articulaires.

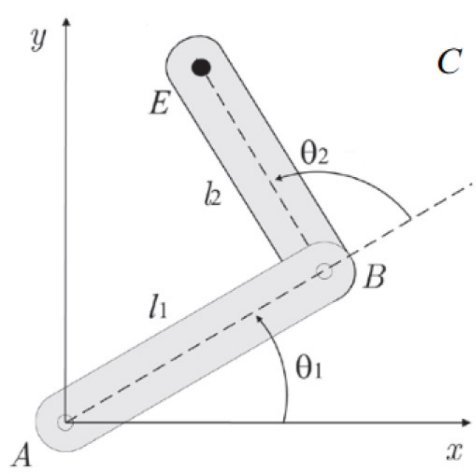

Figure 1: Schéma du mécanisme 2R

1 Modèle géométrique direct:

$$x = l_1 cos(\theta_1) + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y = l_1 sin(\theta_1) + l_2 sin(\theta_1 + \theta_2)$$

2 Modèle géométrique indirect:

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 cos(\theta_2)$$
$$\implies cos(\theta_2) = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 + l_2^2}{2 l_1 l_2}$$
$$\implies \theta_2 = cos^{-1}(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 + l_2^2}{2 l_1 l_2})$$

soit:

$$B_1 = l_1 + l_2 cos(\theta_2)$$
$$B_2 = l_2 sin(\theta_2)$$

On déduit donc θ_1:

$$cos(\theta_1) = \frac{x.B_1 - y.B_2}{l_1^2 + l_2^2}$$
$$\implies \theta_1 = cos^{-1}(\frac{x.B_1 - y.B_2}{l_1^2 + l_2^2})$$

3 Matrice jacobienne cinématique:

$$\dot{x} = -l_1 sin(\theta_1).\dot{\theta}_1 - l_2 sin(\theta_1 + \theta_2).(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$
$$\dot{y} = l_1 cos(\theta_1).\dot{\theta}_1 - l_2 cos(\theta_1 + \theta_2).(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

donc:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 sin(\theta_1 - l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) & l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 cos(\theta_1) + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\implies J(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} -l_1 sin(\theta_1) - l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) & l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 cos(\theta_1) + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

4 Configuration isotrope

La relation entre l_1 et l_2 est :

$$J^T.J = k.I_2 \implies l_1 = l_2\sqrt{2}$$

5 Matrice de raideur

$$K = J^{-T} \times \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \times J$$

6 Problème de conception :

6.1 Hypothèses:

En première approche, on souhaite simplifier un peu le problème. Nous allons donc faire un certain nombre d'hypothèses, réduisant ainsi la quantité de paramètres.

- Nous supposons que le mécanisme doit atteindre une configuration isotrope.($l_1 = l_2\sqrt{2}$)
- Nous faisons l'hypothèse que les deux bras seront de même section(carré) et de même matériau (b la largeur des deux bras) .
- les paramètres ($\rho et E et I$) du matériau ne seront pas à optimiser ce qui est normal.

6.2 Variables d'optimisation

x=[x(1) x(2) x(3) x(4)]

- x(1) = l_1
- x(2) = b
- x(3) = x_c (abscisse centre de l'espace de travail)
- x(4) = y_c (ordonné centre de l'espace de travail)

6.3 Fonction objectif:

On souhaite minimiser la masse du robot 2R don la fonction à optimiser sera :

$$f(x) = \rho \times l_1 \times b^2 \times (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$f(x) = \rho \times x(1) \times x(2)^2 \times (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$$

6.4 Contraintes:

- C(1) et C(2) traduisent le fait que l'espace de travail est atteignable par le robot donc le carré doit appartenir à l'anneau de rayons $l_1 + l_2$ et $l_1 - l_2$:

- C(1+2k)=$-10^{-4} + \frac{100}{||K||}$ représentent les contraintes de raideur au bord de l'espace de travail .
- C(2+2k) = $\frac{-1}{cond(J)} + 0.2$ représentent les contraintes de dextérité au bord du carré.

6.5 Résultats:

Pour l'acier (E=210 Gpa , ρ=7850 kg/m^3) on a trouvé:

```
%Acier
    x =

    0.6565    0.0376    0.7671    0.0000
%     l1         d          xc         yc

>> m=obj(x)
    m =

   12.4126
```

le choix du matériau pour la fin d'étude : Aluminium (E=70 Gpa , ρ=2800 kg/m^3)

```
%Aluminium
x =

    0.6565    0.0494    0.7671    0.0000
%     l1         d          xc         yc
m =

    7.6686
```

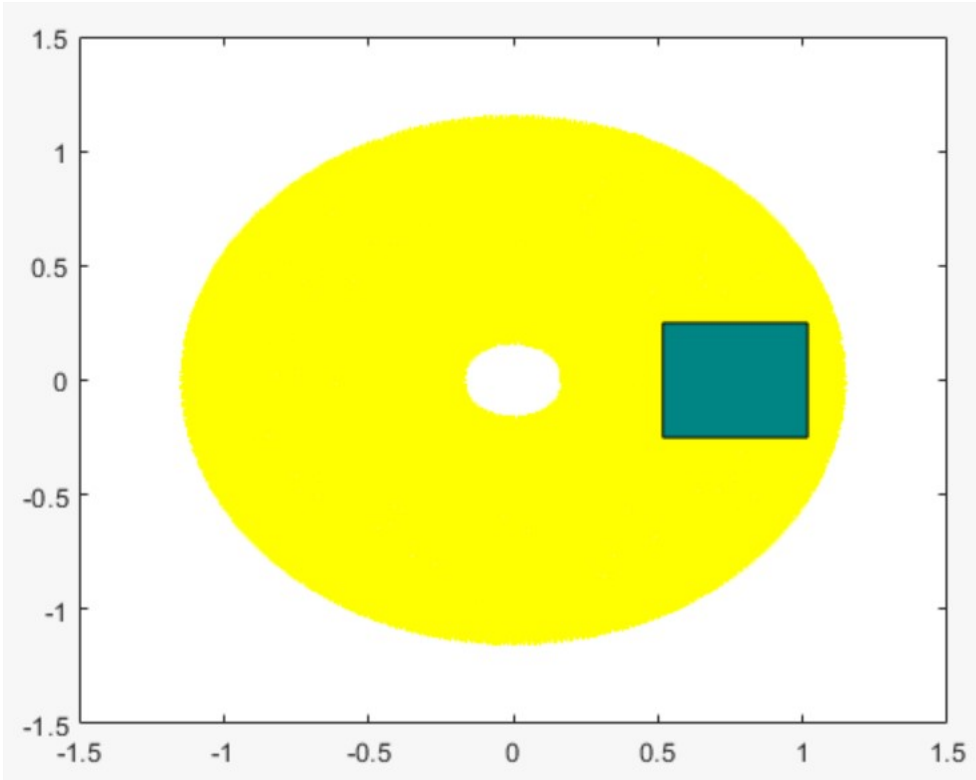

Figure 2: Solution

7 Validation

On vérifie bien que l'espace trouvé est bien optimal en fonction des contraintes posées dans **nonlcon.m**:

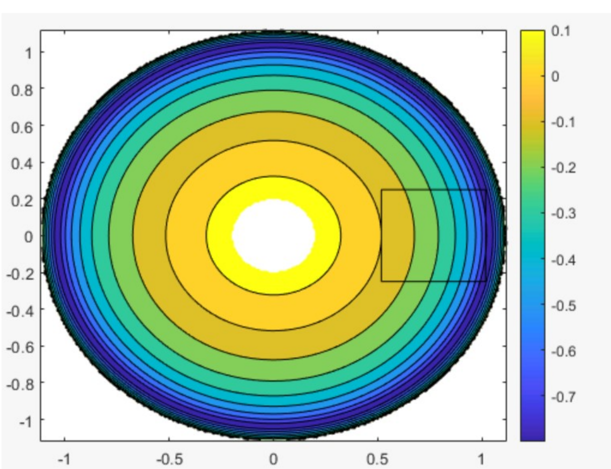

Figure 3: Dextérité sur l'espace atteignable

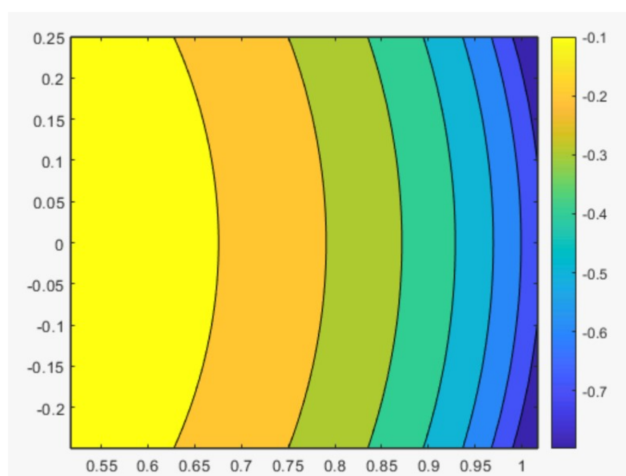

Figure 4: Dextérité sur l'espace de travail

On voit très bien que la contrainte à l'intérieur de l'espace de travail trouvé est négative.
On remarque ainsi que la contrainte de dextérité est décroissante en fonction de la distance au centre et qu'elle représente une circulaire, ce qui veut dire que la position du carré en fonction seulement de cette contrainte est invariante par rotation.

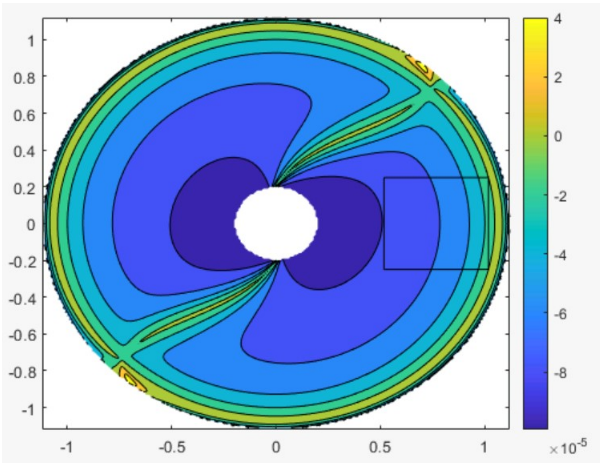

Figure 5: Raideur sur l'espace atteignable

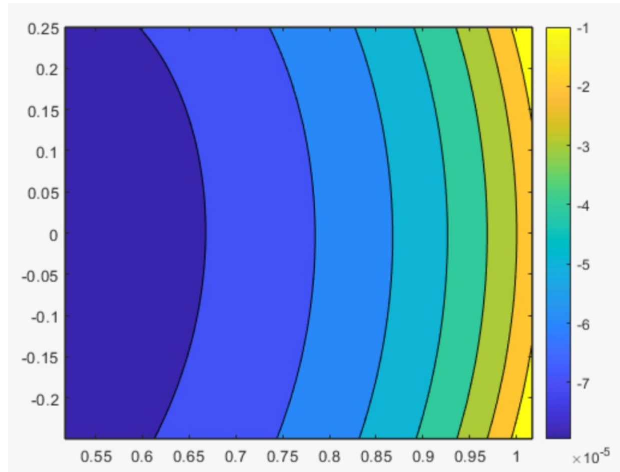

Figure 6: Raideur sur l'espace de travail

La contrainte de raideur est bien négative à l'intérieur de l'espace du travail.
Dans ce cas on a plus de symétrie circulaire et on remarque qu'il existe que deux positions possible du carré qui minimise la masse .