

Pendule inversé: Modèle linéaire

Compte-rendue TP1

Abdellah KOUTIT

Septembre 2022

Introduction

Lors de ce TP, nous allons nous intéresser au modèle linéaire d'un pendule inverse fixé sur un chariot dont la barre pivote librement autour d'un axe du chariot perpendiculaire au plan. Le chariot est soumis à une force u . On note:

- θ , l'angle entre l'axe vertical et la barre
- p , la position du chariot.
- m , la masse de la barre, supposée concentrée en son centre de gravité situé à la distance L du point de rotation.
- M , la masse du chariot.

Les frottements sont supposés négligeables dans l'étude de la rotation de la barre et dans celle de la translation du chariot.

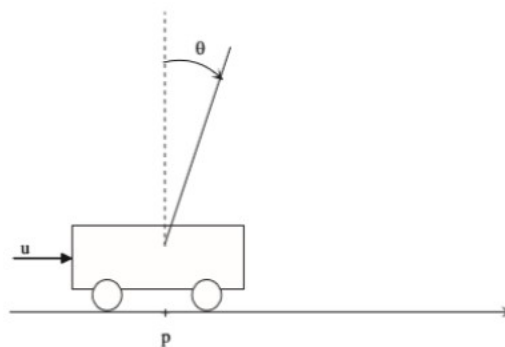


Figure 1: Schéma du pendule inverse

1 Linéarisation

On étudie ici le mouvement du système "chariot+barre" autour d'une position d'équilibre $\theta = 0$, p (p quelconque). On linéarise les équations du mouvement données dans l'énoncé au premier ordre ($\sin(\theta) = \theta$, $\cos(\theta) = 1$, $\theta^2 = \dot{\theta}^2 = 0$), on trouve donc:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{p} \\ \ddot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (\frac{m+M}{ML})g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (-\frac{mg}{M}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{ML} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{p} \\ \ddot{p} \end{bmatrix} .u$$

On trouve après application numérique ($m = 0.5\text{kg}$; $M = 5\text{kg}$; $L = 1\text{m}$; $g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$)

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{p} \\ \ddot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10.78 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.98 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{p} \\ \ddot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} .u$$

L'équation de sortie s'écrit sous la forme:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{p} \\ \ddot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .u$$

En utilisant matlab on trouve le vecteur de pôles :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.2833 \\ -3.2833 \end{bmatrix}$$

2 Loi de commande par retour d'état

on suppose que l'on a accès à tous les états

A l'aide de matlab on calcule la matrice de commandabilité Cmd puis son rang, on trouve que le système est commandable donc on peut stabiliser la barre autour de la position instable $\theta = 0$.

Par un retour d'état F on peut placer où l'on veut les pôles du système par le biais de la commandabilité, Alors en désirant l'ensemble des pôles demandés dans le TP on trouve la matrice F sous la forme:

$$F = [152.0633 \quad 42.2449 \quad 8.1633 \quad 12.2449]$$

On construit alors le schéma Simulink de la boucle fermée avec la commande $u = Fx + v$

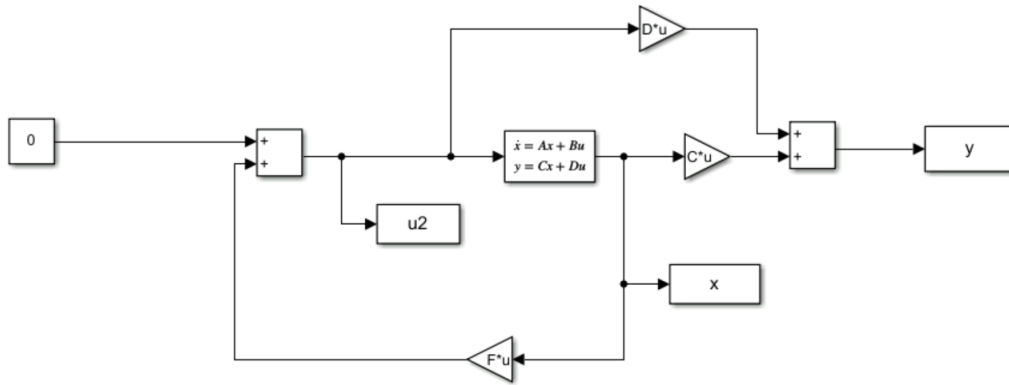


Figure 2: Schéma Simulink de la boucle fermée

On trace la réponse de $x(t)$ et de $u(t)$ en régime libre ($v = 0$) pour les conditions initiales suivantes : $\theta(0) = 0.1\text{rd}$; $\dot{\theta}(0) = 0\text{rd.s}^{-1}$; $p(0) = 0.1\text{m}$; $\dot{p}(0) = 0\text{m.s}^{-1}$

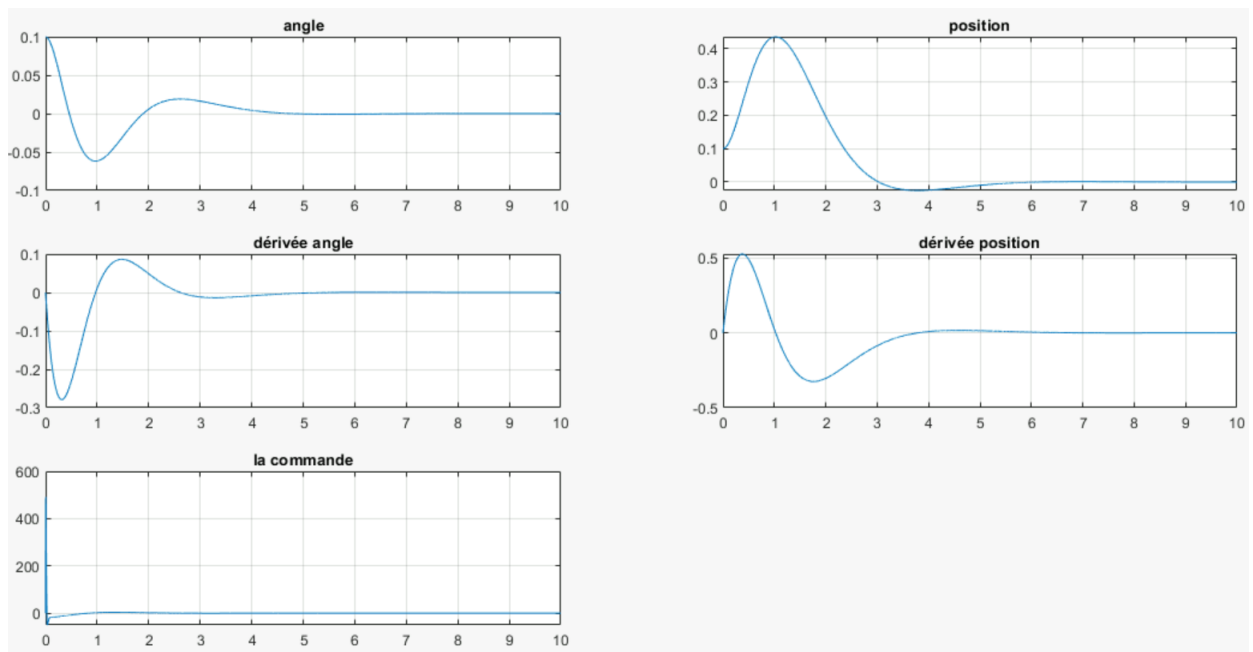


Figure 3: Réponse de $x(t)$ et de $u(t)$ en régime libre

3 Observateur: Loi de commande par retour d'état reconstruit

3.1 Sans utiliser l'état reconstruit dans la commande

A l'aide de matlab on calcule la matrice d'observabilité Obs puis son rang, on trouve que le système est observable. donc on procède à simuler le système par différents observateur.

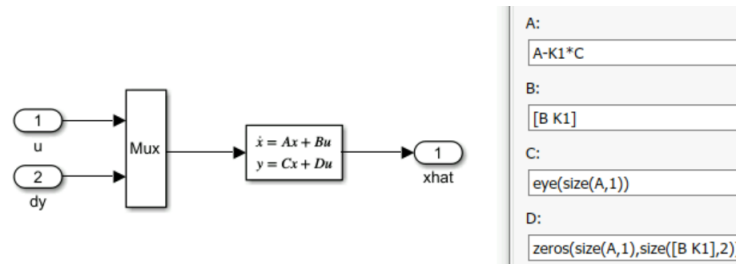


Figure 4: Schéma Simulink Observateur

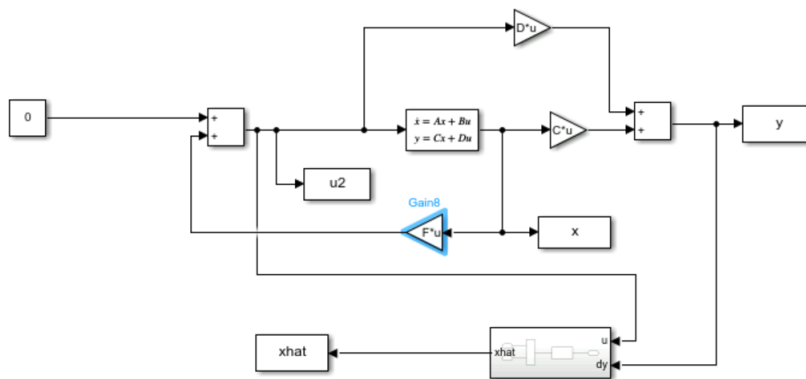


Figure 5: Schéma Simulink Observateur sans état reconstruit

On trace alors xhat pour K1(rapide) et K2(assez rapide) et x:

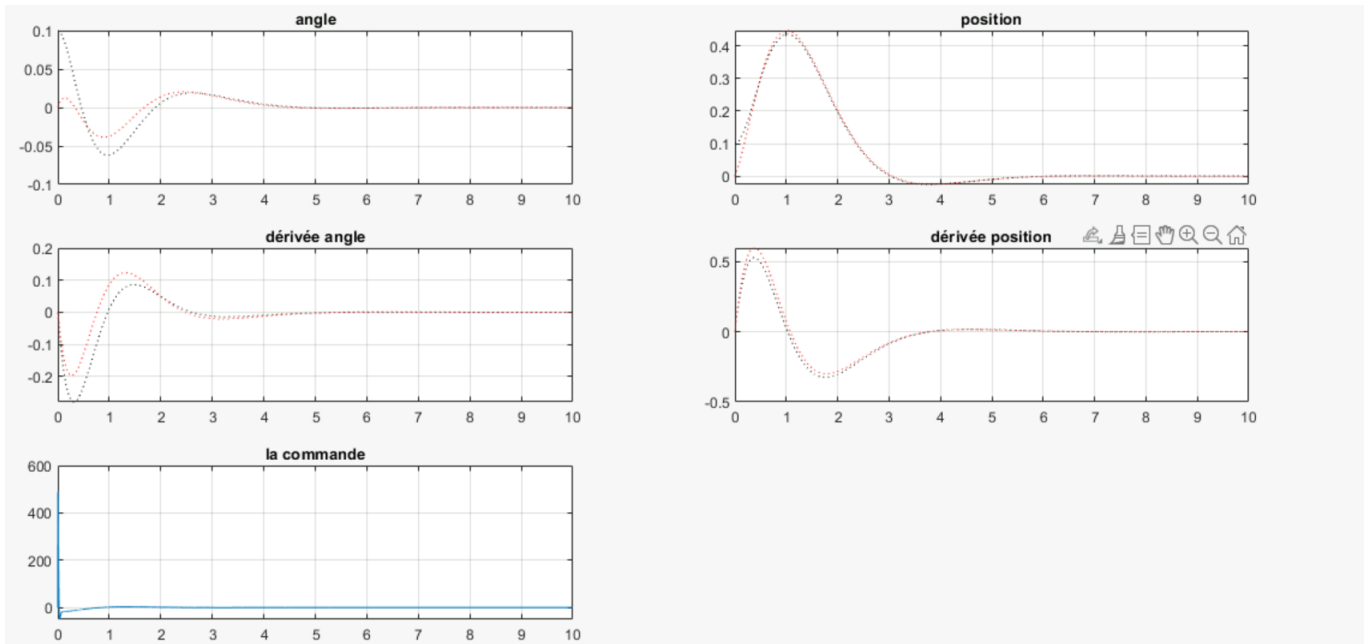


Figure 6: Pôles aussi rapides

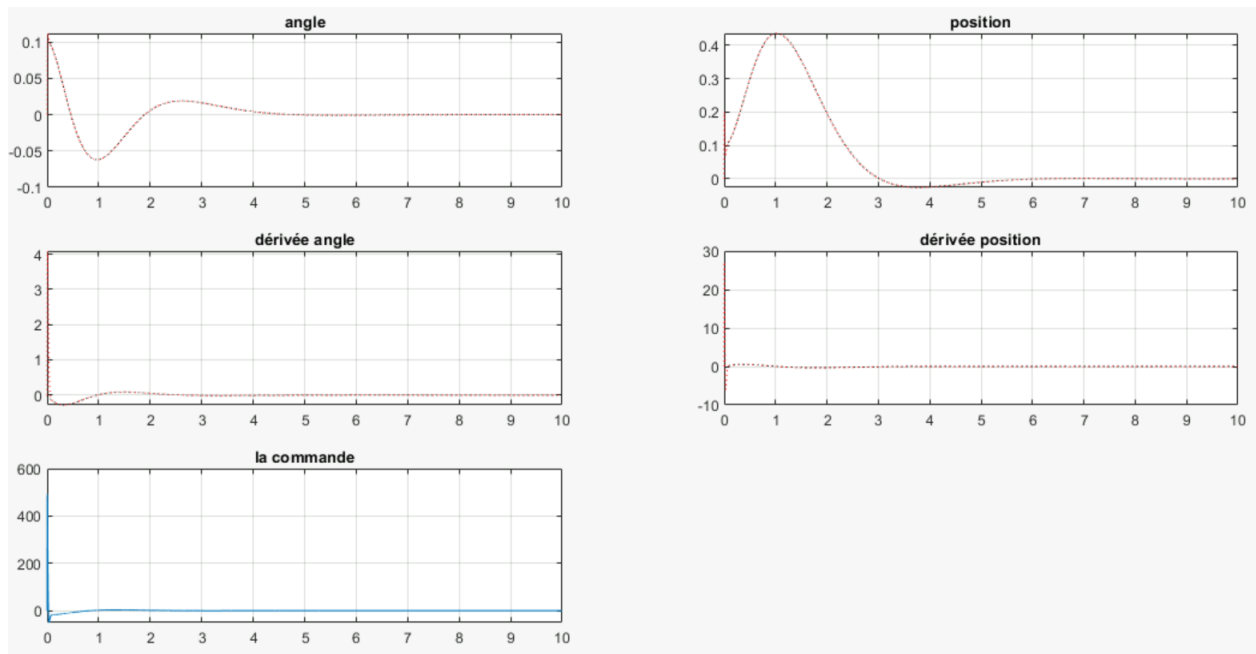


Figure 7: Pôles plus rapide

Dans ce cas, pour les pôles plus rapides, l'état reconstruit atteint très rapidement les mêmes valeurs que l'état mesuré, tandis que pour les pôles aussi rapides que ceux de commande, l'état reconstruit prend un peu plus de temps mais finit par devenir identique à l'état mesuré.

3.2 Utiliser l'état reconstruit dans la commande

On boucle maintenant le retour d'état avec l'état reconstruit.

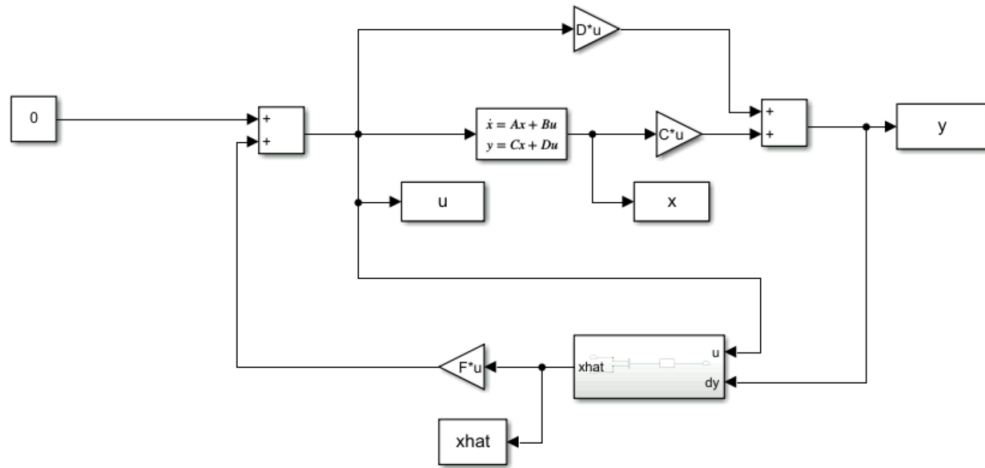


Figure 8: Schéma Simulink en bouclant l'état reconstruit

On trace les réponses correspondantes: (x, bleu), (\hat{x}_1 , rouge), (\hat{x}_2 , noir)

On remarque que la réponse aussi rapide \hat{x}_2 tend vers x après certaines oscillation.

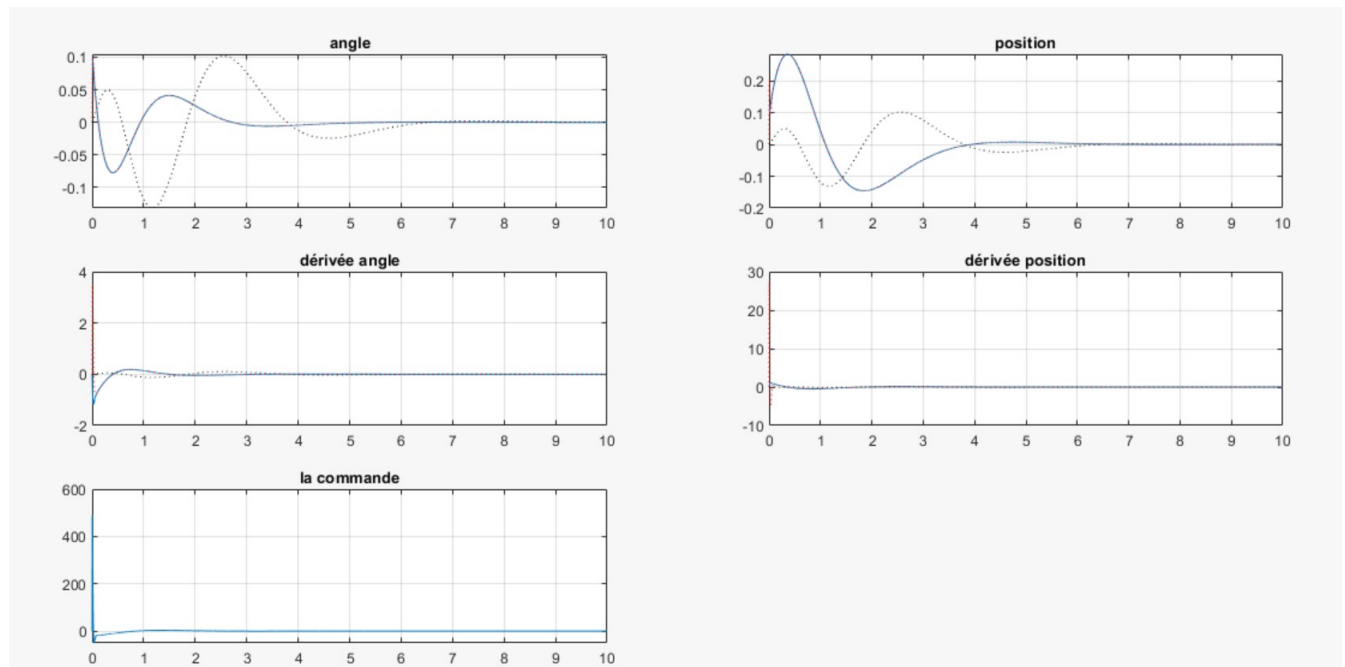


Figure 9: Schéma Simulink en bouclant l'état reconstruit

4 Animation

On change l'observateur précédant -pour inclure à l'intérieur la matrice F - dans le schéma simulink de l'animation du pendule :

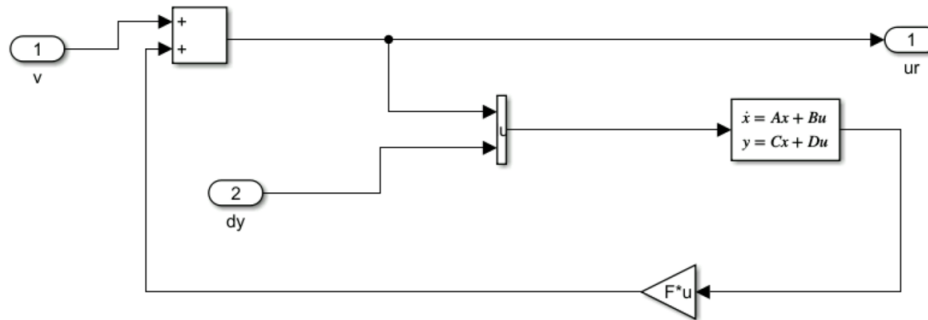
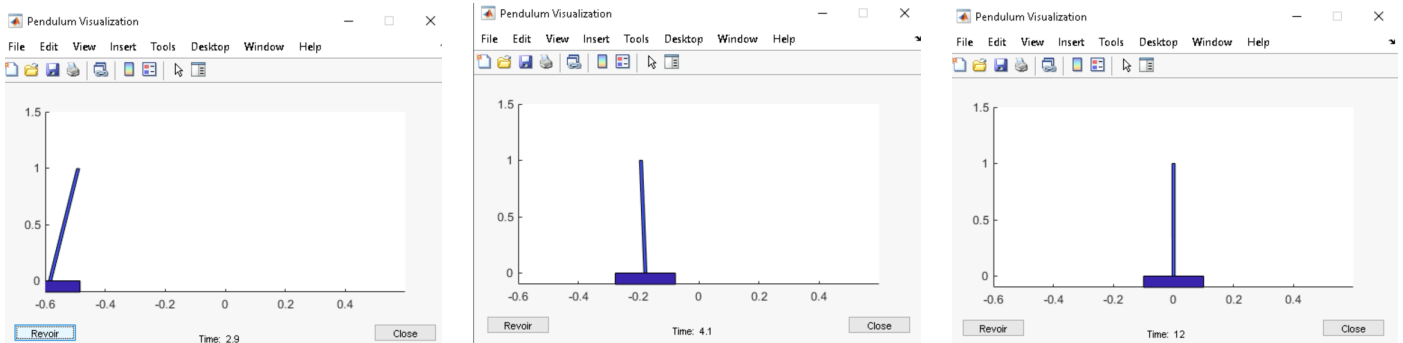


Figure 10: Schéma Simulink Observateur



On n'observe pas de différence entre les modèles linéaire et non-linéaire fournis, ce qui est cohérent : les angles étant effectivement petits, la linéarisation est une bonne approximation et donne une animation similaire. On observe ainsi la différence de rapidité en changeant les matrices $K1$ et $K2$.