

Министерство образования Российской Федерации
ВОСТОЧНО-СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра “Метрология, стандартизация и сертификация”

ОСНОВЫ ПЛАНИРОВАНИЯ
ЭКСПЕРИМЕНТА

Методическое пособие
для студентов специальностей 190800 «Метрология и метрологическое обеспечение» и
072000 «Стандартизация и сертификация (по отраслям пищевой промышленности)»

Составитель: Хамханов К.М.

Улан-Удэ, 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	
1. Основные определения	
2. Параметры оптимизации	
2.1. Требования к параметру оптимизации	
2.2. Задачи с несколькими выходными параметрами	
3. Обобщенный параметр оптимизации	
3.1. Простейшие способы построения обобщенного отклика	
3.2. Шкала желательности	
3.3. Обобщенная функция желательности	
4. Факторы	
4.1. Характеристика факторов	
4.2. Требования к факторам	
4.3. Выбор уровней варьирования факторов и нулевой точки	
5. Выбор моделей	
6. Полный факторный эксперимент	
6.1. Полный факторный эксперимент типа 2^k	
6.2. Свойства полного факторного эксперимента типа 2^k	
6.3. Расчет коэффициентов регрессии.	
7. Дробный факторный эксперимент	
7.1. Минимизация числа опытов	
7.2. Дробная реплика	
7.3. Выбор полуреплик. Генерирующие соотношения и определяющие контрасты	
8. Ошибки измерений критериев оптимизации и факторов	
8.1. Рандомизация	
9. Отсеивающие эксперименты	
9.1. Априорное ранжирование факторов (психологический эксперимент)	
9.2. Метод случайного баланса	
9.3. Неполноблочные планы (учет качественных факторов и экспертные оценки)	
10. Пример планирования эксперимента	
10.1. Выбор факторов	
10.2. Проведение эксперимента	
10.3. Полный факторный эксперимент	
10.4. Поиск оптимума методом крутого восхождения	
10.5. Описание области оптимума	
10.6. Построение графических зависимостей	
Приложения	

ВВЕДЕНИЕ

Традиционные методы исследований связаны с экспериментами, которые требуют больших затрат, сил и средств, т.к. являются «пассивными» - основаны на поочередном варьировании отдельных независимых переменных в условиях, когда остальные стремятся сохранить неизменными.

Эксперименты, как правило, являются многофакторными и связаны с оптимизацией качества материалов, отысканием оптимальных условий проведения технологических процессов, разработкой наиболее рациональных конструкций оборудования и т.д. Системы, которые служат объектом таких исследований, очень часто являются такими сложными, что не поддаются теоретическому изучению в разумные сроки. Поэтому, несмотря на значительный объем выполненных научно-исследовательских работ, из-за отсутствия реальной возможности достаточно полно изучить значительное число объектов исследования, как следствие, многие решения принимаются на основании информации, имеющей случайный характер, и поэтому далеки от оптимальных.

Исходя из выше изложенного возникает необходимость поиска пути, позволяющего вести исследовательскую работу ускоренными темпами и обеспечивающим принятие решений, близких к оптимальным. Этим путем и явились статистические методы планирования эксперимента, предложенные английским статистиком Рональдом Фишером (конец двадцатых годов). Он впервые показал целесообразность одновременного варьирования всеми факторами в противовес широко распространенному однофакторному эксперименту [1].

В начале шестидесятых годов появилось новое направление в планировании эксперимента, связанное с оптимизацией процессов – планирование экстремального эксперимента. Первая работа в этой области была опубликована в 1951 г. Боксом и Уилсоном в Англии [2]. Идея Бокса-Уилсона крайне проста. Экспериментатору предлагается ставить последовательные небольшие серии опытов, в каждой из которых одновременно варьируются по определенным правилам все факторы. Серии организуются таким образом, чтобы после математической обработки предыдущей можно было выбрать условия проведения (т.е. спланировать) следующую серию. Так последовательно, шаг за шагом, достигается область оптимума.

Применение планирования эксперимента делает поведение экспериментатора целенаправленным и организованным, существенно способствует повышению производительности труда и надежности полученных результатов. Важным достоинством является его универсальность, пригодность в огромном большинстве областей исследований.

В нашей стране планирование эксперимента развивается с 1960 г. [3] под руководством В.В.Налимова. Однако даже простая процедура планирования весьма коварна, что обусловлено рядом причин, таких как неверное применение методов планирования, выбор не самого оптимального пути исследования, недостаточность практического опыта, недостаточная математическая подготовленность экспериментатора и т.д.

Цель данной работы – ознакомление читателей с наиболее часто применяемыми и простыми методами планирования эксперимента, выработка навыков практического применения. Более подробно рассмотрена задача оптимизации процессов.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Планирование эксперимента, как и всякий раздел науки, имеет свою терминологию. Для удобства понимания рассмотрим наиболее общие термины.

Эксперимент – целенаправленное воздействие на объект исследования с целью получения достоверной информации.

Большинство научных исследований связано с экспериментом. Он проводится на производстве, в лабораториях, на опытных полях и участках, в клиниках и т.д. Эксперимент может быть физическим, психологическим или модельным. Он может непосредственно проводиться на объекте или на его модели. Модель обычно отличается от объекта масштабом, а иногда природой. Главное требование к модели – достаточно точное описание объекта.

В последнее время наряду с физическими моделями все большее распространение получают абстрактные математические модели. К слову, планирование эксперимента напрямую связано с разработкой и исследованием математической модели объекта исследования.

Планирование эксперимента – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

Здесь существенно следующее:

стремление к минимизации общего числа опытов;

одновременное варьирование всеми переменными, определяющими процесс, по специальным правилам – алгоритмам;

использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора;

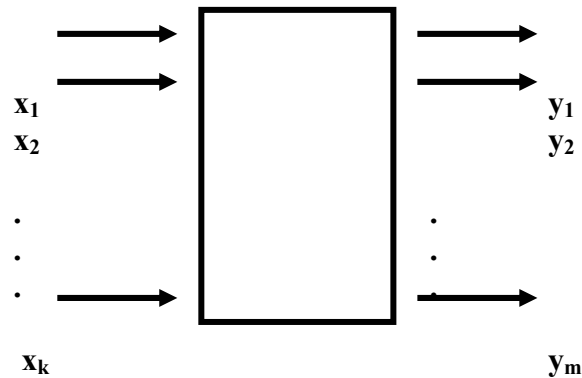
выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии экспериментов.

Задачи, для решения которых может использоваться планирование эксперимента, чрезвычайно разнообразны. К ним относятся: поиск оптимальных условий, построение интерполяционных формул, выбор существенных факторов, оценка и уточнение констант теоретических моделей, выбор наиболее приемлемых из некоторого множества гипотез о механизме явлений, исследование диаграмм состав – свойство и т.д.

Поиск оптимальных условий является одной из наиболее распространенных научно-технических задач. Они возникают в тот момент, когда установлена возможность проведения процесса и необходимо найти наилучшие (оптимальные) условия его реализации. Такие задачи называются *задачами оптимизации*. Процесс их решения называется *процессом оптимизации* или просто *оптимизацией*. Выбор оптимального состава многокомпонентных смесей и сплавов, повышение производительности действующих установок, повышение качества продукции, снижение затрат на ее получение – вот примеры задач оптимизации.

Далее следует понятие – *объект исследования*. Для его описания удобно пользоваться представлением о кибернетической системе, которая схематически изображена на рис.1.1. Иногда такую схему называют «черным ящиком». Стрелки справа изображают численные характеристики целей исследования. Мы их обозначаем буквой *y* и называем *параметрами оптимизации*. В литературе встречаются другие названия: критерий оптимизации, целевая функция, выход «черного ящика» и т.д.

Для проведения эксперимента необходимо иметь возможность воздействовать на наведение «черного ящика». Все способы такого воздействия мы обозначаем буквой *x* и называем *факторами*. Их называют также входами «черного ящика».



При решении задачи будем использовать *математические модели исследования*. Под математической моделью мы понимаем уравнение, связывающее параметр оптимизации с факторами. Это уравнение в общем виде можно записать так:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

где символ φ (), как обычно в математике, заменяет слова: «функция от». Такая функция называется *функцией отклика*.

Каждый фактор может принимать в опыте одно из нескольких значений. Эти значения называются *уровнями*. Для облегчения построения «черного ящика» и эксперимента фактор должен иметь определенное число дискретных уровней. Фиксированный набор уровней факторов определяет одно из возможных состояний «черного ящика». Одновременно это есть условие проведения одного из возможных опытов. Если перебрать все возможные наборы состояний, то получается множество различных состояний «черного ящика». Одновременно это будет число возможных различных опытов.

Число возможных опытов определяют по выражению

$$N = p^k,$$

где N – число опытов;
 p – число уровней;
 k – число факторов.

Реальные объекты обычно обладают огромной сложностью. Так, на первый взгляд, простая система с пятью факторами на пяти уровнях имеет 3125 состояний, а для десяти факторов на четырех уровнях их уже свыше миллиона. В этих случаях выполнение всех опытов практически невозможно. Возникает вопрос: сколько и каких опытов нужно включить в эксперимент, чтобы решить поставленную задачу? Здесь-то и применяется планирование эксперимента.

Выполнение исследований посредством планирования эксперимента требует выполнения некоторых требований. Основными из них являются условия воспроизводимости результатов эксперимента и управляемость эксперимента. Если повторить некоторые опыты через неравные промежутки времени и сравнить результаты, в нашем случае – значения параметра оптимизации, то разброс их значений характеризует воспроизводимость результатов. Если он не превышает некоторой заданной величины, то объект удовлетворяет требованию воспроизводимости результатов. Здесь мы будем рассматривать только такие объекты, где это условие выполняется.

Планирование эксперимента предполагает активное вмешательство в процесс и возможность выбора в каждом опыте тех уровней факторов, которые представляют интерес. Поэтому такой эксперимент называют активным. Объект, на котором возможен активный эксперимент, называется управляемым.

На практике нет абсолютно управляемых объектов, т.к. на них действуют как

управляемые, так и неуправляемые факторы. Неуправляемые факторы влияют на воспроизводимость эксперимента и является причиной ее нарушения. В этих случаях приходится переходить к другим методам исследования.

2. ПАРАМЕТРЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Выбор параметров оптимизации (критериев оптимизации) является одним из главных этапов работы на стадии предварительного изучения объекта исследования, т.к. правильная постановка задачи зависит от правильности выбора параметра оптимизации, являющегося функцией цели.

Под параметром оптимизации понимают характеристику цели, заданную количественно. Параметр оптимизации является реакцией (откликом) на воздействие факторов, которые определяют поведение выбранной системы.

Реальные объекты или процессы, как правило, очень сложны. Они часто требуют одновременного учета нескольких, иногда очень многих, параметров. Каждый объект может характеризоваться всей совокупностью параметров, или любым подмножеством этой совокупности, или одним – единственным параметром оптимизации. В последнем случае прочие характеристики процесса уже не выступают в качестве параметра оптимизации, а служат ограничениями. Другой путь – построение обобщенного параметра оптимизации как некоторой функции от множества исходных.

2.1. ТРЕБОВАНИЯ К ПАРАМЕТРУ ОПТИМИЗАЦИИ

Параметр оптимизации – это признак, по которому оптимизируется процесс. Он должен быть *количественным*, задаваться числом. Множество значений, которые может принимать параметр оптимизации, называется областью его определения. Области определения могут быть непрерывными и дискретными, ограниченными и неограниченными. Например, выход реакции – это параметр оптимизации с непрерывной ограниченной областью определения. Он может изменяться в интервале от 0 до 100%. Число бракованных изделий, число зерен на шлифе сплава, число кровяных телец в пробе крови – вот примеры параметров с дискретной областью определения, ограниченной снизу.

Количественная оценка параметра оптимизации на практике не всегда возможна. В таких случаях пользуются приемом, называемым ранжированием. При этом параметрам оптимизации присваиваются оценки – ранги по заранее выбранной шкале: двухбалльной, пятибалльной и т.д. Ранговый параметр имеет дискретную ограниченную область определения. В простейшем случае область содержит два значения (да, нет; хорошо, плохо). Это может соответствовать, например, годной продукции и браку.

Итак, *первое требование*: параметр оптимизации должен быть *количественным*.

Второе требование: параметр оптимизации должен выражаться *одним числом*. Иногда это получается естественно, как регистрация показания прибора. Например, скорость движения машины определяется числом на спидометре. Часто приходится проводить некоторые вычисления. Так бывает при расчете выхода реакции. В химии часто требуется получать продукт с заданным отношением компонентов, например, $A:B=3:2$. Один из возможных вариантов решения подобных задач состоит в том, чтобы выразить отношение одним числом (1,5) и в качестве параметра оптимизации пользоваться значением отклонений (или квадратов отклонений) от этого числа.

Третье требование, связанное с количественной природой параметра оптимизации – *однозначность* в статистическом смысле. Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно значение параметра оптимизации, при этом обратное неверно: одному и тому же значению параметра могут соответствовать разные наборы значений факторов.

Четвертым, наиболее важным требованием, требованием к параметрам оптимизации является его *возможность действительно эффективной оценки функционирования системы*. Представление об объекте не остается постоянным в ходе исследования. Оно

меняется по мере накопления информации и в зависимости от достигнутых результатов. Это приводит к последовательному подходу при выборе параметра оптимизации. Так, например, на первых стадиях исследования технологических процессов в качестве параметра оптимизации часто используется выход продукта. Однако в дальнейшем, когда возможность повышения выхода исчерпан, начинают интересоваться такими параметрами, как себестоимость, чистота продукта и т.д.

Оценка эффективности функционирования системы может осуществляться как для всей системы в целом, так и оценкой эффективности ряда подсистем, составляющих данную систему. Но при этом необходимо учитывать возможность того, что оптимальность каждой из подсистем по своему параметру оптимизации «не исключает возможность гибели системы в целом». Это означает, что попытка добиться оптимума с учетом некоторого локального или промежуточного параметра оптимизации может оказаться неэффективной или даже привести к браку.

Пятое требование к параметру оптимизации – требование *универсальности* или *полноты*. Под универсальностью параметра оптимизации понимают его способность всесторонне охарактеризовать объект.

В частности, технологические параметры недостаточно универсальны: они не учитывают экономику. Универсальностью обладают, например, обобщенные параметры оптимизации, которые строятся как функции от нескольких частных параметров.

Шестое требование: желательно, чтобы параметр оптимизации имел *физический смысл, был простым и легко вычисляем*.

Требование физического смысла связано с последующей интерпретацией результатов эксперимента. Не представляет труда объяснить, что значит максимум извлечения, максимум содержания ценного компонента. Эти и подобные им технологические параметры оптимизации имеют ясный физический смысл, но иногда для них может не выполняться, например, требование статистической эффективности. Тогда рекомендуется переходить к преобразованию параметра оптимизации. Преобразование, например типа $\arcsin \sqrt{y}$, может сделать параметр оптимизации статистически эффективными (например, дисперсии становятся однородными), но остается неясным: что же значит достигнуть экстремума этой величины?

Второе требование, т.е. простота и легко вычисляемость, также весьма существенны. Для процессов разделения термодинамические параметры оптимизации более универсальны. Однако на практике ими пользуются мало: их расчет довольно труден.

Из приведенных двух требований первое является более существенным, потому что часто удается найти идеальную характеристику системы и сравнить ее с реальной характеристикой.

2.2. ЗАДАЧИ С НЕСКОЛЬКИМИ ВЫХОДНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Задачи с одним выходным параметром имеют очевидные преимущества. Но на практике чаще всего приходится учитывать несколько выходных параметров. Иногда их число довольно велико. Так, например, при производстве резиновых и пластмассовых изделий приходится учитывать физико-механические, технологические, экономические, художественно-эстетические и другие параметры. Математические модели можно построить для каждого из параметров, но одновременно оптимизировать несколько функций невозможно.

Обычно оптимизируется одна функция, наиболее важная с точки зрения исследования, при ограничениях, налагаемых другими функциями. Поэтому из многих выходных параметров выбирается один в качестве параметра оптимизации, а остальные служат ограничениями. Всегда полезно исследовать возможность уменьшения числа выходных параметров. Для этого можно воспользоваться корреляционным анализом.

При этом между всевозможными парами параметров необходимо вычислить коэффициент парной корреляции, который является общепринятой в математической статистике характеристикой связи между двумя случайными величинами. Если обозначить один параметр через y_1 , а другой – через y_2 , и число опытов, в которых они будут измеряться, – через N так, что $u=1,2,\dots,N$, где u – текущий номер опыта, то коэффициент парной корреляции r вычисляется по формуле

$$r_{y_1 y_2} = \frac{\sum_{u=1}^N (y_{1u} - \bar{y}_1)(y_{2u} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{u=1}^N (y_{1u} - \bar{y}_1)^2 \sum_{u=1}^N (y_{2u} - \bar{y}_2)^2}}.$$

Здесь

$$\bar{y}_1 = \sum_{u=1}^N \frac{y_{1u}}{N} \quad \text{и} \quad \bar{y}_2 = \sum_{u=1}^N \frac{y_{2u}}{N}$$

средние арифметические соответственно для y_1 и y_2 .

Значения коэффициента парной корреляции могут лежать в пределах от -1 до $+1$. Если с ростом значения одного параметра возрастает значение другого, у коэффициента будет знак плюс, а если уменьшается, то минус. Чем ближе найденное значение $r_{y_1 y_2}$ к единице, тем сильнее значение одного параметра зависит от того, какое значение принимает другой, т.е. между такими параметрами существует линейная связь, и при изучении процесса можно рассматривать только один из них. Необходимо помнить, что коэффициент парной корреляции как мера тесноты связи имеет четкий математический смысл только при линейной зависимости между параметрами и в случае их нормального распределения.

Для проверки значимости коэффициента парной корреляции нужно сравнить его значение с табличным (критическим) значением r , которое приведено в прил. 6. Для пользования этой таблицей нужно знать число степеней свободы $f = N - 2$ и выбрать определенный уровень значимости, например, равный $0,05$. Такое значение уровня значимости соответствует вероятности верного ответа при проверке гипотезы $p = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$, или 95% . Это значит, что в среднем только в 5% случаев возможна ошибка при проверке гипотезы.

Если экспериментально найденное значение r больше или равно критическому, то гипотеза о корреляционной линейной связи подтверждается, а если меньше, то нет оснований считать, что имеется тесная линейная связь между параметрами.

При высокой значимости коэффициента корреляции любой из двух анализируемых параметров можно исключить из рассмотрения как не содержащий дополнительной информации об объекте исследования. Исключить можно тот параметр, который труднее измерить, или тот, физический смысл которого менее ясен.

3. ОБОБЩЕННЫЙ ПАРАМЕТР ОПТИМИЗАЦИИ

Путь к единому параметру оптимизации часто лежит через обобщение. Уже указывалось, что из многих откликов, определяющих объект, трудно выбрать один, самый важный. Если же это возможно, то попадают в ситуацию, описанную в предыдущей главе. В этой главе рассматриваются более сложные ситуации, где необходимо множество откликов обобщать в единый количественный признак. С таким обобщением связан ряд трудностей.

Каждый отклик имеет свой физический смысл и свою размерность. Чтобы объединить различные отклики, прежде всего приходится ввести для каждого из них некоторую безразмерную шкалу. Шкала должна быть однотипной для всех объединяемых откликов –

это делает их сравнимыми. Выбор шкалы – не простая задача, зависящая от априорной информации об откликах, а также от той точности, с которой определяется обобщенный признак.

После построения для каждого отклика безразмерной шкалы, возникает следующая трудность – выбор правила комбинирования исходных частных откликов в обобщенный показатель. Единого правила не существует. Здесь можно идти различными путями, и выбор пути неформализован. Рассмотрим несколько способов построения обобщенного показателя.

3.1. ПРОСТЕЙШИЕ СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ОТКЛИКА

Пусть исследуемый объект характеризуют n частных откликов $y_u (u = 1, 2, \dots, n)$ и каждый из этих откликов измеряется в N опытах. Тогда y_{ui} – это значение u -го отклика в i -ом опыте ($i = 1, 2, \dots, N$). Каждый из откликов y_u имеет свой физический смысл и, чаще всего, разную размерность. Введем простейшее преобразование: набор данных для каждого y_u поставим в соответствие с самым простым стандартным аналогом – шкалой, на которой имеется только два значения: 0 – брак, неудовлетворительное качество, 1 – годный продукт, удовлетворительное качество. Стандартизовав таким образом шкалу частных откликов приступаем ко второму этапу – их обобщению.

В ситуации, когда каждый преобразованный частный отклик принимает только два значения 0 и 1, желательно чтобы и обобщенный отклик принимал одно из этих двух возможных значений, причем так, чтобы значение 1 имело место, если все частные отклики в этом опыте приняли значение 1. А если хотя бы один из откликов обратился в 0, то и обобщенный отклик будет нулем.

При таких рассуждениях для построения обобщенного отклика удобно воспользоваться формулой

$$Y_i = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^n y_{ui}} ,$$

где Y_i – обобщенный отклик в i -ом опыте;

$\prod_{u=1}^n$ – произведение частных откликов $y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}$.

Корень введен для того, чтобы связать эту формулу с другой, более сложной, которая будет рассмотрена далее. В данном случае ничего не изменится, если написать

$$Y_i = \prod_{u=1}^n y_{ui} .$$

Недостаток этого подхода его грубость и жесткость.

Рассмотрим другой способ получения обобщенного отклика, который может применяться в тех случаях, когда для каждого из частных откликов известен «идеал», к которому нужно стремиться. Существует много способов введения метрики, задающей «близость к идеалу». Здесь понятие «ввести метрику» – значит указать правило определения расстояния между любыми парами объектов из интересующего нас множества.

Дополним предыдущее обозначение еще одним: y_{uo} – наилучшее («идеальное») значение u -го отклика. Тогда $y_{ui} - y_{uo}$ можно рассматривать как некоторую меру близости к идеалу. Однако использовать разность при построении обобщенного отклика невозможно по двум причинам. Она имеет размерность соответствующего отклика, а у каждого из откликов может быть своя размерность, что препятствует их объединению. Отрицательный или

положительный знак разности также создает неудобство. Чтобы перейти к безразмерным значениям, достаточно разность поделить на желаемое значение:

$$\frac{y_{ui} - y_{uo}}{y_{uo}}.$$

Если в некотором опыте все частные отклики совпадут с идеалом, то Y станет равным нулю. Это и есть то значение, к которому нужно стремиться. Чем ближе нулю, тем лучше. Здесь необходимо условиться о том, что считать нижней границей, если верхняя равна нулю.

Среди недостатков такой оценки выделяется нивелировка частных откликов. Все они входят в обобщенный отклик на равных правах. На практике же различные показатели бывают далеко неравноправны. Устранить этот недостаток можно введением некоторого веса a_u

$$Y_i = \sum_{u=1}^N a_u \left(\frac{y_{ui} - y_{uo}}{y_{uo}} \right)^2,$$

причем $\sum_{u=1}^N a_u = 1$ и $a_u > 0$.

Чтобы проранжировать отклики по степени важности и найти соответствующие веса, можно воспользоваться экспертными оценками.

Мы рассмотрели простейшие способы построения обобщенного показателя. Для перехода к более сложным способам нужно научиться фиксировать более тонкие различия на шкале преобразования откликов. Здесь в основном приходится опираться на опыт экспериментатора. Но, чтобы этот опыт разумно употребить в рамках формальных процедур, его тоже нужно формализовать. Наиболее естественный путь такой формализации – введение системы предпочтений экспериментатора на множестве значений каждого частного отклика, получение стандартной шкалы и затем обобщение результатов.

Пользуясь системой предпочтений можно получить более содержательную шкалу вместо шкалы классификации с двумя классами. Пример построения такой шкалы рассмотрен в следующем подразделе.

3.2. ШКАЛА ЖЕЛАТЕЛЬНОСТИ

Одним из наиболее удобных способов построения обобщенного отклика является обобщенная функция желательности Харрингтона. В основе построения этой обобщенной функции лежит идея преобразования натуральных значений частных откликов в безразмерную шкалу желательности или предпочтительности. Шкала желательности относится к психофизическим шкалам. Ее назначение – установление соответствия между физическими и психологическими параметрами. Здесь под физическими параметрами понимаются всевозможные отклики, характеризующие функционирование исследуемого объекта. Среди них могут быть эстетические и даже статистические параметры, а под психологическими параметрами понимаются чисто субъективные оценки экспериментатора желательности того или иного значения отклика.

Чтобы получить шкалу желательности, удобно пользоваться готовыми таблицами соответствия между отношениями предпочтения в эмпирической и числовой системах (табл. 3.1.).

Таблица 3.1

Стандартные отметки на шкале желательности

Желательность	Отметки на шкале желательности
Очень хорошо	1,00-0,80

Хорошо	0,80-0,63
Удовлетворительно	0,63-0,37
Плохо	0,37-0,20
Очень плохо	0,20-0,00

В табл. 3.1. представлены числа, соответствующие некоторым точкам кривой (рис. 3.1), которая задается уравнением $d = e^{-e^{-y}}$ или $d = \exp[-\exp(-y)]$, где \exp – принятое обозначение экспоненты.

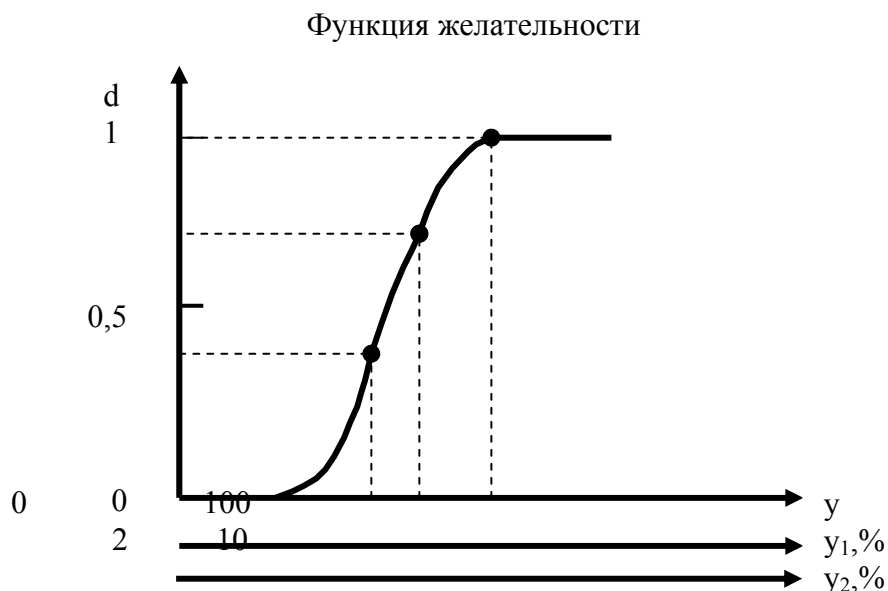


Рис. 3.1.

На оси ординат нанесены значения желательности, изменяющиеся от 0 до 1. По оси абсцисс указаны значения отклика, записанные в условном масштабе. За начало отсчета 0 по этой оси выбрано значение, соответствующее желательности 0,37. Выбор именно этой точки связан с тем, что она является точкой перегиба кривой, что в свою очередь создает определенные удобства при вычислениях.

Кривую желательности обычно используют как номограмму.

Пример 1. Пусть среди откликов будет выход реакции y_1 , естественные границы которого заключены между 0% и 100%. Предположим, что 100% соответствует на шкале желательности единице, а 0% - нулю, тогда на оси абсцисс получаем две точки: 0 и 100 (рис. 3.1). Выбор других точек зависит от ряда обстоятельств, таких, как сложившаяся в начальный момент ситуация, требования к результату, возможности экспериментатора.

В данном случае область хороших результатов (0,80 – 0,63 по шкале желательности) заключены в границы 50-55%. 50% дает нижнюю границу.

Пример 2. Другая картина получается, когда речь идет о синтезе нового вещества, которого до сих пор не удавалось получать в количествах, достаточных для идентификации.

При выходе менее 2% нет способа идентифицировать продукт. Любой выход выше 10% - превосходен (рис.3.1). Здесь выход продукции обозначен через y_2 .

В наших примерах рассмотрены одинаковые отклики – выхода реакции с границами измерения от 0% до 100%. Однако, это не всегда бывает так. Стоит включить такие отклики, как качество материала, и границы станут неопределенными. В этих случаях устанавливаются границы допустимых значений для частных откликов, причем ограничения могут быть односторонними в виде $y_u \geq y_{\min}$ и двусторонними в виде $y_{\min} \leq y_u \leq y_{\max}$. Здесь надо иметь ввиду то, что y_{\min} соответствует отметке на шкале желательности

$d_u = 0,37$, а значение y_{\max} устанавливается на основании опыта и ситуации исследователя.

3.3. ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ ЖЕЛАТЕЛЬНОСТИ

После выбора шкалы желательности и преобразования частных откликов в частные функции желательности приступают к построению обобщенной функции желательности. Обобщают по формуле

$$D = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^n d_u},$$

где D – обобщенная желательность;

d_u - частные желательности.

Способ задания обобщенной функции желательности таков, что если хотя бы одна желательность $d_u = 0$, то обобщенная функция будет равна нулю. С другой стороны $D=1$ только тогда, когда $d_u = 1$. Обобщенная функция весьма чувствительна к малым значениям частных желательностей.

Пример: при установлении пригодности материала с данным набором свойств для использования его в заданных условиях если хотя бы один частный отклик не удовлетворяет требованиям, то материал считается непригодным. Например, если при определенных температурах материал становится хрупким и разрушается, то как бы ни были хороши другие свойства, этот материал не может быть применен по назначению.

Способ задания базовых отметок шкалы желательности, представленный в табл.3.1, один и тот же как и для частных, так и для обобщенных желательностей.

Обобщенная функция желательности является некоторым абстрактным построением, но она обладает такими важными свойствами, как адекватность, статистическая чувствительность, эффективность, причем эти свойства не ниже, чем таковые для любого технологического показателя, им соответствующего.

Обобщенная функция желательности является количественным, однозначным, единым и универсальным показателем качества исследуемого объекта и обладая такими свойствами, как адекватность, эффективность, статистическая чувствительность, и поэтому может использоваться в качестве критерия оптимизации.

4. ФАКТОРЫ

После выбора объекта исследования и параметра оптимизации нужно рассмотреть все факторы, которые могут влиять на процесс. Если какой-либо существенный фактор окажется неучтенным и принимал произвольные значения, не контролируемые экспериментатором, то это значительно увеличит ошибку опыта. При поддержании этого фактора на определенном уровне может быть получено ложное представление об оптимуме, т.к. нет гарантии, что полученный уровень является оптимальным.

С другой стороны большое число факторов увеличивает число опытов и размерность факторного пространства. В разделе 1 указано, что число опытов равно P_k , где p – число уровней, а k – число факторов. Встает вопрос о сокращении числа опытов.

Рекомендации о решении этой проблемы приведены в разделе 7.

Итак, выбор факторов является весьма существенным, т.к. от этого зависит успех оптимизации.

4.1. ХАРАКТЕРИСТИКА ФАКТОРОВ

Фактором называется измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенное значение и влияющая на объект исследования.

Факторы должны иметь область определения, внутри которой задаются его конкретные значения. Область определения может быть непрерывной или дискретной. При планировании эксперимента значения факторов принимаются дискретными, что связано с уровнями факторов. В практических задачах области определения факторов имеют ограничения, которые носят либо принципиальный, либо технический характер.

Факторы разделяются на количественные и качественные.

К количественным относятся те факторы, которые можно измерять, взвешивать и т.д.

Качественные факторы – это различные вещества, технологические способы, приборы, исполнители и т.п.

Хотя к качественным факторам не соответствует числовая шкала, но при планировании эксперимента к ним применяют условную порядковую шкалу в соответствии с уровнями, т.е. производится кодирование. Порядок уровней здесь произволен, но после кодирования он фиксируется.

4.2. ТРЕБОВАНИЯ К ФАКТОРАМ

Факторы должны быть *управляемыми*, это значит, что выбранное нужное значение фактора можно поддерживать постоянным в течение всего опыта. Планировать эксперимент можно только в том случае, если уровни факторов подчиняются воле экспериментатора. Например, экспериментальная установка смонтирована на открытой площадке. Здесь температурой воздуха мы не можем управлять, ее можно только контролировать, и потому при выполнении опытов температуру, как фактор, мы не можем учитывать.

Чтобы точно определить фактор, нужно указать последовательность действий (операций), с помощью которых устанавливаются его конкретные значения. Такое определение называется *операциональным*. Так, если фактором является давление в некотором аппарате, то совершенно необходимо указать, в какой точке и с помощью какого прибора оно измеряется и как оно устанавливается. Введение операционального определения обеспечивает однозначное понимание фактора.

Точность замеров факторов должна быть возможно более высокой. Степень точности определяется диапазоном изменения факторов. В длительных процессах, измеряемых многими часами, минуты можно не учитывать, а в быстрых процессах приходится учитывать доли секунды.

Исследование существенно усложняется, если фактор измеряется с большой ошибкой или значения факторов трудно поддерживать на выбранном уровне (уровень фактора «плывет»), то приходится применять специальные методы исследования, например, конфлюэнтный анализ [4,5].

Факторы должны быть *однозначны*. Трудно управлять фактором, который является функцией других факторов. Но в планировании могут участвовать другие факторы, такие, как соотношения между компонентами, их логарифмы и т.п.

Необходимость введения сложных факторов возникает при желании представить динамические особенности объекта в статической форме. Например, требуется найти оптимальный режим подъема температуры в реакторе. Если относительно температуры известно, что она должна нарастать линейно, то в качестве фактора вместо функции (в данном случае линейной) можно использовать тангенс угла наклона, т.е. градиент.

При планировании эксперимента одновременно изменяют несколько факторов, поэтому необходимо знать требования к совокупности факторов. Прежде всего выдвигается требование *совместимости*. Совместимость факторов означает, что все их комбинации осуществимы и безопасны.

Несовместимость факторов наблюдается на границах областей их определения. Избавиться от нее можно сокращением областей. Положение усложняется, если несовместимость проявляется внутри областей определения. Одно из возможных решений – разбиение на подобласти и решение двух отдельных задач.

При планировании эксперимента важна *независимость* факторов, т.е. возможность установления фактора на любом уровне вне зависимости от уровней других факторов. Если это условие невыполнимо, то невозможно планировать эксперимент.

4.3. ВЫБОР УРОВНЕЙ ВАРЬИРОВАНИЯ ФАКТОРОВ И ОСНОВНОГО УРОВНЯ

Фактор считается заданным, если указаны его название и область определения. В выбранной области определения он может иметь несколько значений, которые соответствуют числу его различных состояний. Выбранные для эксперимента количественные или качественные состояния фактора носят название *уровней фактора*.

В планировании эксперимента значения факторов, соответствующие определенным уровням их варьирования, выражают в кодированных величинах. Под интервалом варьирования фактора подразумевается разность между двумя его значениями, принятая за единицу при кодировании.

При выборе области определения факторов особое внимание уделяют на выбор нулевой точки, или нулевого (основного) уровня. Выбор нулевой точки эквивалентен определению исходного состояния объекта исследования. Оптимизация связана с улучшением состояния объекта по сравнению с состоянием в нулевой точке. Поэтому желательно, чтобы данная точка была в области оптимума или как можно ближе к ней, тогда ускоряется поиск оптимальных решений.

Если проведению эксперимента предшествовали другие исследования по рассматриваемому вопросу, то за нулевую принимается такая точка, которой соответствует наилучшее значение параметра оптимизации, установленного в результате формализации априорной информации. В этом случае нулевыми уровнями факторов являются те значения последних, сочетания которых соответствуют координатам нулевой точки.

Часто при постановке задачи область определения факторов бывает заданной, являясь локализованной областью факторного пространства. Тогда центр этой области принимается за нулевую точку.

Предположим, в некоторой задаче фактор (температура) мог изменяться от 140 до 180°C. Естественно, за нулевой уровень было принято среднее значение фактора, соответствующее 160°C.

После установления нулевой точки выбирают интервалы варьирования факторов. Это связано с определением таких значений факторов, которые в кодированных величинах соответствуют +1 и –1. Интервалы варьирования выбирают с учетом того, что значения факторов, соответствующие уровням +1 и –1, должны быть достаточно отличимы от значения, соответствующему нулевому уровню. Поэтому во всех случаях величина интервала варьирования должна быть больше удвоенной квадратичной ошибки фиксирования данного фактора. С другой стороны, чрезмерное увеличение величины интервалов варьирования нежелательно, т.к. это может привести к снижению эффективности поиска оптимума. А очень малый интервал варьирования уменьшает область эксперимента, что замедляет поиск оптимума.

При выборе интервала варьирования целесообразно учитывать, если это возможно, число уровней варьирования факторов в области эксперимента. От числа уровней зависят объем эксперимента и эффективность оптимизации.

В общем виде зависимость числа опытов от числа уровней факторов имеет вид

$$N = p^k,$$

где N – число опытов;
p – число уровней факторов;
k – число факторов.

Минимальное число уровней, обычно применяемое на первой стадии работы, равно 2. Это верхний и нижний уровни, обозначаемые в кодированных координатах через +1 и -1. Варьирование факторов на двух уровнях используется в отсеивающих экспериментах, на стадии движения в область оптимума и при описании объекта исследования линейными моделями. Но такое число уровней недостаточно для построения моделей второго порядка (ведь фактор принимает только два значения, а через две точки можно провести множество линий различной кривизны).

С увеличением числа уровней повышается чувствительность эксперимента, но одновременно возрастает число опытов. При построении моделей второго порядка необходимы 3, 4 или 5 уровней, причем здесь наличие нечетных уровней указывает на проведение опытов в нулевых (основных) уровнях.

В каждом отдельном случае число уровней выбирают с учетом условий задачи и предполагаемых методов планирования эксперимента.

Здесь необходимо учитывать наличие качественных и дискретных факторов. В экспериментах, связанных с построением линейных моделей, наличие этих факторов, как правило, не вызывают дополнительных трудностей. При планировании второго порядка качественные факторы не применимы, т.к. они не имеют ясного физического смысла для нулевого уровня. Для дискретных факторов часто применяют преобразование измерительных шкал, чтобы обеспечить фиксацию значений факторов на всех уровнях.

5. ВЫБОР МОДЕЛЕЙ

Как уже указывалось в разделе 1, под моделью понимается функция отклика вида

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Выбрать модель – значит выбрать вид этой функции, записать ее уравнение. Тогда останется спланировать и провести эксперимент для оценки численных значений констант (коэффициентов) этого уравнения.

Наглядное, удобное воспринимаемое представление о функции отклика дает ее геометрический аналог – поверхность отклика. В случае многих факторов геометрическая наглядность теряется, т.к. переходит в абстрактное многомерное пространство, где у большинства исследователей нет навыка ориентирования. Приходится переходить на язык алгебры. Потому рассмотрим простые примеры – случаи с двумя факторами.

Пространство, в котором строится поверхность отклика, называется факторным пространством. Оно задается координатными осями, по которым откладываются значения факторов и параметра оптимизации (рис. 5.1).

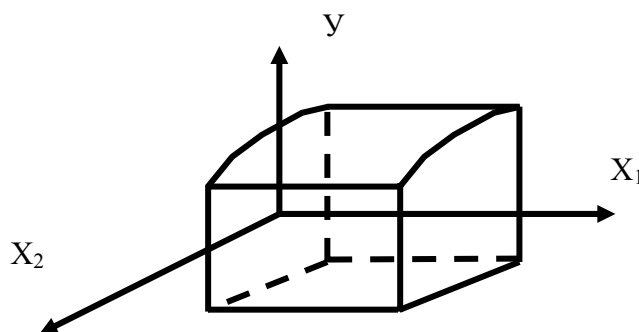


Рис. 5.1.

Для двух факторов можно не переходить к трехмерному пространству, а ограничиться плоскостью. Для этого достаточно произвести сечения поверхности плоскостями, параллельными плоскости x_1x_2 (рис. 5.2) и полученные в сечениях линии спроектировать на эту плоскость. Здесь каждая линия соответствует постоянному значению параметра

оптимизации. Такая линия называется линией равного отклика.

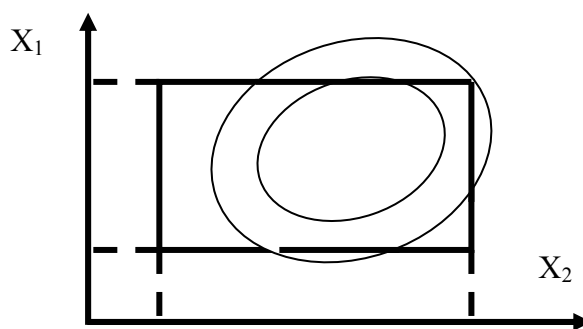


Рис. 5.2.

Получив некоторое представление о модели, рассмотрим требования к ним.

Главное требование к модели – это способность предсказывать направление дальнейших опытов, причем предсказывать с требуемой точностью. Это значит, что предсказанное с помощью модели значение отклика не отличается от фактического больше, чем на некоторую заранее заданную величину. Модель, отвечающая этому требованию, называется *адекватной*. Проверка выполнимости этого требования называется *проверкой адекватности модели* и она выполняется при помощи специальных статистических методов, которые будут рассмотрены позже.

Следующим требованием является простота модели. Но простота – вещь относительная, ее сначала надо сформулировать. При планировании эксперимента принимается, что простыми являются алгебраические полиномы. Наиболее часто применяются приведенные ниже полиномы.

Полином первой степени:

$$y = \varphi_o + \sum_1^k \varphi_i x_i + \sum_1^k \varphi_{ij} x_i x_j$$

Полином второй степени:

$$y = \varphi_o + \sum_1^k \varphi_i x_i + \sum_1^k \varphi_{ij} x_i x_j + \sum_1^k \varphi_{ii} x_i^2 .$$

Полиномы третьей степени:

$$y = \varphi_o + \sum_1^k \varphi_i x_i + \sum_1^k \varphi_{ij} x_i x_j + \sum_1^k \varphi_{ijj} x_i^2 x_j + \\ + \sum_1^k \varphi_{ijj} x_i x_j^2 + \sum_1^k \varphi_{iii} x_i^3 .$$

Здесь в этих уравнениях:

y – значения критерия;

φ_i – линейные коэффициенты;

φ_{ij} – коэффициенты двойного взаимодействия;

x_i – кодированные значения факторов.

Эксперименты при планировании эксперимента нужны для определения численных значений коэффициентов. Чем больше коэффициентов, тем больше нужно опытов. А мы стремимся сократить их число. Следовательно, нужно найти такой полином, который содержит как можно меньше коэффициентов, но удовлетворяет требованиям, предъявляемым к модели.

Полиномы первой степени имеют наименьшее число коэффициентов, кроме этого они

позволяют предсказывать направление наискорейшего улучшения параметра оптимизации. Но полиномы первой степени не эффективны в области близкой к оптимуму. Поэтому при планировании эксперимента на первой стадии исследования используют полиномы первой степени, и когда они станут неэффективными, переходят к полиномам более высоких степеней.

6. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Работу по планированию эксперимента начинают со сбора априорной информации. Анализ этой информации позволяет получить представление о параметре оптимизации, о факторах, о наилучших условиях ведения исследования, о характере поверхности отклика и т.д. Априорную информацию можно получить из литературных источников, из опроса специалистов, путем выполнения однофакторных экспериментов. Последние, к сожалению, не всегда возможно осуществить, т.к. возможность их осуществления ограничена стоимостью опытов, их длительностью. На основе анализа априорной информации делается выбор экспериментальной области факторного пространства, который заключается в выборе основного (нулевого) уровня и интервалов варьирования факторов.

Основной уровень является исходной точкой для построения плана эксперимента, а интервалы варьирования определяют расстояния по осям координат от верхнего и нижнего уровней до основного уровня.

При планировании эксперимента значения факторов кодируются путем линейного преобразования координат факторного пространства с переносом начала координат в нулевую точку и выбором масштабов по осям в единицах интервалов варьирования факторов. Используют здесь соотношение

$$x_i = \frac{C_i - C_{oi}}{\varepsilon},$$

где x_i – кодированное значение фактора (безразмерная величина);

$C_i - C_{oi}$ – натуральные значения фактора (соответственно текущее значение и на нулевом уровне);

ε – натуральное значение интервала варьирования факторов (ΔC).

Получаются значения факторов, равные +1 (верхний уровень) и –1 (нижний уровень).

Расположение экспериментальных точек в факторном пространстве для полного факторного эксперимента при $k=2$ и $k=3$ показана на рис. 6.1. Как видим, точки плана 2^2 задаются координатами вершин квадрата, а точки плана 2^3 – координатами вершин куба. По аналогичному принципу располагаются экспериментальные точки при $k>3$.

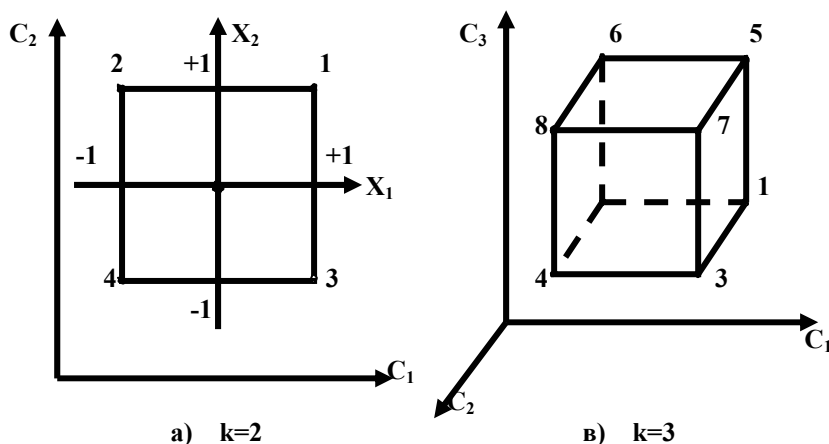


Рис. 6.1.

6.1. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ТИПА 2^k

Первый этап планирования эксперимента для получения линейной модели основан на варьировании на двух уровнях [3,6]. В этом случае, при известном числе факторов, можно найти число опытов, необходимое для реализации всех возможных сочетаний уровней факторов. Формула для расчета числа опытов приводилась в разделе 1 и в этом случае выглядит $N=2^k$.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом (ПФЭ). Если число уровней факторов равно двум, то имеем ПФЭ типа 2^k .

Условия эксперимента удобно записывать в виде таблицы, которую называют матрицей планирования эксперимента.

Таблица 6.1

Матрица планирования эксперимента 2^2

Номер опыта	x_1	x_2	y
1	+1	+1	y_1
2	-1	+1	y_2
3	+1	-1	y_3
4	-1	-1	y_4

Матрица планирования для двух факторов приведена на табл. 6.1.

При заполнении матрицы планирования значения уровней факторов, в целях упрощения, обозначают соответствующими знаками, а цифру 1 опускают. С учетом взаимодействия факторов x_1 и x_2 таблицу 6.1 можно переписать следующим образом:

Таблица 6.2

Матрица планирования

Номер опыта	x_1	x_2	$x_1 x_2$	y
1	+	+	+	y_1
2	-	+	-	y_2
3	+	-	-	y_3
4	-	-	+	y_4

Каждый столбец в матрице планирования называют вектор-столбцом, а каждую строку – вектор-строкой. Таким образом, в табл. 6.1. мы имеем два вектора-столбца независимых переменных и один вектор-столбец параметра оптимизации.

То, что записано в алгебраической форме, можно изобразить графически. В области определения факторов находится точка, соответствующая основному уровню, и проводят через нее новые оси координат, параллельные осям натуральных значений факторов. Далее выбирают масштабы по новым осям так, чтобы интервал варьирования для каждого фактора равнялся единице. Тогда условия проведения опытов будут соответствовать вершинам квадрата, при $k=2$, и вершинам куба, при $k=3$. Центрами этих фигур является основной уровень, а каждая сторона равна двум интервалам (рис. 6.1). Номера вершин квадрата и куба соответствуют номерам опытов в матрице планирования. Площадь, ограниченная этими фигурами, называется областью эксперимента. По аналогичному принципу располагаются экспериментальные точки при $k>3$.

Расположение точек в факторном пространстве
для ПФЭ при $k=2$ и $k=3$

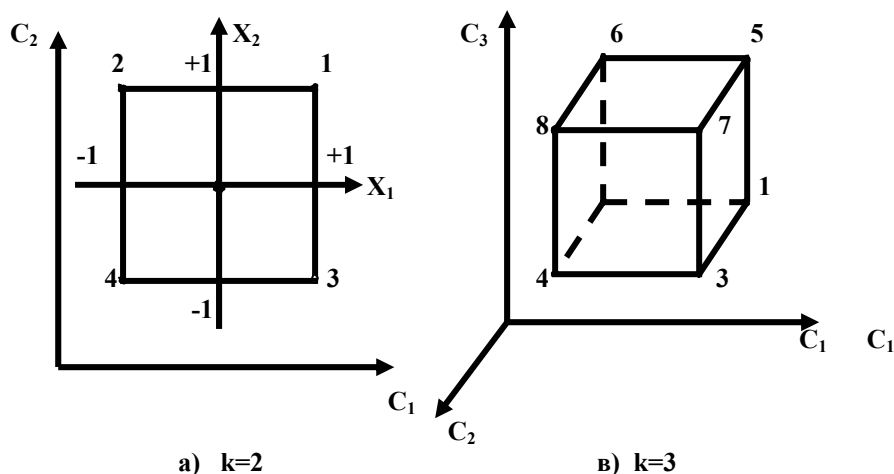


Рис. 6.1.

Если для двух факторов все возможные комбинации уровней легко найти перебором, то с ростом числа факторов возникает необходимость в некотором приеме построения матриц. Обычно используются три приема, основанные на переходе от матриц меньшей размерности к матрицам большей размерности.

Рассмотрим *первый прием*. При добавлении нового фактора каждая комбинация уровней исходного фактора встречается дважды, в сочетании с верхним и нижним уровнями нового фактора. Отсюда естественно появляется прием: записать исходный план для одного уровня нового фактора, а затем повторить его для другого уровня. Этот прием можно применить для матриц любой размерности.

Во *втором приеме* вводится правило перемножения столбцов матрицы. При построчном перемножении уровней исходной матрицы получаем дополнительный столбец произведения $x_1 x_2$, далее повторим исходный план, а у столбца произведений знаки поменяем на обратный. Этот прием применим для построения матриц любой размерности, однако он сложнее, чем первый.

Третий прием основан на чередовании знаков. В первом столбце знаки меняются поочередно, во втором столбце они чередуются через два раза, в третьем – через четыре, в четвертом – через восемь и т.д. по степеням двойки.

Пример построения матриц планирования 2^3 см. табл. 6.2.

Таблица 6.3

Матрица планирования эксперимента 2^3

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	y
1	+	+	+	y_1
2	-	+	+	y_2
3	+	-	+	y_3
4	-	-	+	y_4

5	+	+	-	y ₅
6	-	+	-	y ₆
7	+	-	-	y ₇
8	-	-	-	y ₈

6.2. СВОЙСТВА ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ТИПА 2^k

Полный факторный эксперимент относится к числу планов, которые являются наиболее эффективными при построении линейных моделей. Эффективность, иначе оптимальность, полного факторного эксперимента достигается за счет ниже перечисленных его свойств.

Два свойства следуют непосредственно из построения матрицы. Первое из них – симметричность относительно центра эксперимента – формулируется следующим образом: алгебраическая сумма элементов вектора-столбца каждого фактора равна нулю, или

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = 0,$$

где $i = 1, 2, \dots, k$ – номер фактора,

N – число опытов.

Второе свойство – так называемое условие нормировки – формулируется следующим образом: сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов, или

$$\sum_{j=1}^N x_{ij}^2 = N.$$

Это следствие того, что значения факторов в матрице задаются +1 и –1.

Мы рассмотрели свойства отдельных столбцов матрицы планирования. Рассмотрим свойства совокупности столбцов.

Сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы равна нулю,

или $\sum_{j=1}^N x_{ij} x_{uj} = 0$ при $i \neq u$, а также $i, u = 0, 1, \dots, k$. Это важное свойство называется

ортogonalностью матрицы планирования.

Последнее, четвертое свойство называется ротатабельностью, т.е. точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказаний значений параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

Выполнение этих условий обеспечивает минимальную дисперсию коэффициентов регрессии, но и равенство дисперсии. Это облегчает статистический анализ результатов эксперимента.

6.3. РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ

Построив матрицу планирования осуществляют эксперимент. Получив экспериментальные данные рассчитывают значения коэффициентов регрессии.

Значение свободного члена (θ_0) берут как среднее арифметическое всех значений параметра оптимизации в матрице:

$$\theta_0 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N y_u,$$

где y_u – значения параметра оптимизации в u -м опыте;

N – число опытов в матрице.

Линейные коэффициенты регрессии рассчитывают по формуле

$$b_i = \frac{\sum_1^N x_{iu} y_u}{\sum_1^N x_{iu}^2} = \frac{\sum_1^N x_{iu} y_u}{N},$$

где x_{iu} - кодированное значение фактора x_i в u -м опыте.

Коэффициенты регрессии, характеризующие парное взаимодействие факторов, находят по формуле

$$b_{ij} = \frac{\sum_1^N x_{iu} x_{ju} y_u}{\sum_1^N x_{iu}^2} = \frac{\sum_1^N x_{iu} x_{ju} y_u}{N}.$$

Рассмотрим пример расчета коэффициентов регрессии для планирования 2^2 , матрица планирования которой приведена в табл. 6.2

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}; \\ b_1 &= \frac{+y_1 - y_2 + y_3 - y_4}{4}; \\ b_2 &= \frac{+y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{4}; \\ b_{12} &= \frac{+y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{4}. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение регрессии для $k=3$.

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3,$$

где b_0 - свободный член;

b_1, b_2, b_3 - линейные коэффициенты;

b_{12}, b_{13}, b_{23} - коэффициенты двойного взаимодействия;

b_{123} - коэффициент тройного взаимодействия.

Полное число всех возможных коэффициентов регрессии, включая b_0 , линейные коэффициенты и коэффициенты взаимодействий всех порядков, равно числу опытов полного факторного эксперимента. Чтобы найти число взаимодействий некоторого порядка, можно воспользоваться формулой числа сочетаний

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!},$$

где k - число факторов;

m - число элементов во взаимодействии.

Так, для плана 2^4 число парных взаимодействий равно шести

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Отсюда видно, что с ростом числа факторов число возможных взаимодействий быстро

растет.

Рассмотрим на примере физический смысл взаимодействия. Пусть на некоторый химический процесс влияют два фактора: температура и время реакции.

В области низких температур увеличение времени увеличивает выход продукта. При переходе в область высоких температур эта закономерность нарушается. Здесь необходимо уменьшить время реакции. Это и есть проявление эффекта взаимодействия.

7. ДРОБНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Количество опытов в полном факторном эксперименте значительно превосходит число определяемых линейных коэффициентов. Т.к. наибольшую значимость обычно имеют линейные коэффициенты, а коэффициенты взаимодействий, начиная с тройных и выше, часто не значимы, то получается, что полный факторный эксперимент обладает избыточностью опытов. Было бы заманчивым сократить число опытов за счет той информации, которая не очень существенна при построении линейных моделей. При этом нужно стремиться к тому, чтобы матрица планирования не лишилась своих оптимальных свойств. Сделать это не так просто, но все же возможно. Рассмотрим пути минимизации числа опытов.

7.1. МИНИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА ОПЫТОВ

Еще раз рассмотрим матрицу планирования типа 2^2

Таблица 7.1

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	(x_3) $x_1 x_2$	y
1	+	+	+	+	y_1
2	+	-	+	-	y_2
3	+	+	-	-	y_3
4	+	-	-	+	y_4

Пользуясь таким планированием, можно вычислить четыре коэффициента и представить результаты эксперимента в виде неполного квадратного уравнения

$$y = \vartheta_0 + \vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \vartheta_{12} x_1 x_2.$$

Если имеются основания считать, что в выбранных интервалах варьирования процесс может быть описан линейной моделью, то достаточно определить три коэффициента: $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2$. Остается одна степень свободы. Употребим ее для минимизации числа опытов.

При линейном приближении $\vartheta_{12} \rightarrow 0$ и вектор-столбец $x_1 x_2$ можно использовать для нового фактора x_3 . Поставим этот фактор в скобках над взаимодействием $x_1 x_2$ и посмотрим, каковы будут оценки коэффициентов. Здесь уже не будет тех отдельных оценок, которые были в полном факторном эксперименте. Оценки смешиваются следующим образом:

$$\vartheta_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}; \quad \vartheta_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}; \quad \vartheta_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}.$$

Это не должно нас огорчать. Ведь здесь постулируются линейная модель, следовательно, все парные взаимодействия незначимы. Главное, найдено средство минимизации числа опытов: вместо восьми опытов для изучения трех факторов оказывается можно поставить четыре! При этом матрица планирования не теряет своих оптимальных свойств (ортогональность, ротатабельность и т.п.). Найденное правило можно сформулировать: чтобы сократить число опытов, нужно новому фактору присвоить вектор-столбец матрицы, принадлежащей взаимодействию, которым можно пренебречь. Тогда

значения нового фактора в условиях опытов определяется знаками этого столбца.

Мы рассмотрели самый простой случай. С увеличением числа факторов вопрос о минимизации опытов превращается в сложную задачу, и для деления ее требуется ввести новые определения и понятия.

7.2. ДРОБНАЯ РЕПЛИКА

Поставив четыре опыта для оценки влияния трех факторов, мы воспользовались половиной факторного эксперимента 2^3 , или «полуреplikой». Если бы мы приравняли x_3 к $-x_1x_2$, то получили бы вторую половинную матрицы 2^3 . В этом случае:

$$v_1 \rightarrow \beta_1 - \beta_{23}; \quad v_2 \rightarrow \beta_2 - \beta_{13}; \quad v_3 \rightarrow \beta_3 - \beta_{12}.$$

При реализации обеих полуреplik можно получить отдельные оценки для линейных коэффициентов (эффектов) и коэффициентов взаимодействия, как и в полном факторном эксперименте 2^3 .

Объединение этих двух полуреplik и есть полный факторный эксперимент 2^3 .

Матрица из восьми опытов для четырех факторного планирования будет полуреplikой от полного факторного эксперимента 2^4 , а для пятифакторного планирования – четверть-реplikой от 2^5 . В последнем случае два линейных эффекта приравниваются к эффектам взаимодействия.

Для обозначения дробных реplik, в которых p линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия, удобно пользоваться условными обозначением 2^{k-p} . Так полуреплика от 2^6 запишется в виде 2^{6-1} , а четверть-реплика от 2^5 – в виде 2^{5-2} .

Условные обозначения дробных реplik и количество опытов приведены в таблице 7.2.

Таблица 7.2

Число факторов	Дробная реплика	Условное обозначение	Число опытов	
			для дробной реплики	для полного факторного эксперимента
3	1/2 –реплика от 2^3	2^{3-1}	4	8
4	1/2 –реплика от 2^4	2^{4-1}	8	16
5	1/4 –реплика от 2^5	2^{5-2}	8	32
6	1/8 –реплика от 2^6	2^{6-3}	8	64
7	1/16 –реплика от 2^7	2^{7-4}	8	128
5	1/2 –реплика от 2^5	2^{5-1}	16	32
6	1/4 –реплика от 2^6	2^{6-2}	16	64
7	1/8 –реплика от 2^7	2^{7-3}	16	128
8	1/16 –реплика от 2^8	2^{8-4}	16	256
9	1/32 –реплика от 2^9	2^{9-5}	16	512
10	1/64 –реплика от 2^{10}	2^{10-6}	16	1024
11	1/128 –реплика от 2^{11}	2^{11-7}	16	2048
12	1/256 –реплика от 2^{12}	2^{12-8}	16	4096
13	1/512 –реплика от 2^{13}	2^{13-9}	16	8192
14	1/1024 –реплика от 2^{14}	2^{14-10}	16	16384
15	1/2048 –реплика от 2^{15}	2^{15-11}	16	32768

7.3. ВЫБОР ПОЛУРЕПЛИК. ГЕНЕРИРУЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ КОНТРАСТЫ

При построении полуреplik 2^{3-1} существует две возможности: приравнять x_3 к $+$

$x_1 x_2$ или $k - x_1 x_2$. Поэтому есть только две полуреплики 2^{3-1} (табл. 7.3).

Таблица 7.3

	I. $x_3 = x_1 x_2$			
Номер опыта	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2 x_3$
1	+	+	+	+
2	-	-	+	+
3	+	-	-	+
4	-	+	-	+
Номер опыта	II. $x_3 = -x_1 x_2$			
1	+	+	-	-
2	-	-	-	-
3	+	-	+	-
4	-	+	+	-

Для произведения трех столбцов матрицы I выполняется соотношение $+1 = x_1 x_2 x_3$, а для матрицы II: $-1 = x_1 x_2 x_3$. Это наглядно изображено в табл. 7.3, в первом случае все знаки столбца произведений одинаковы и равны плюс единице, а во втором – минус единице.

Символическое обозначение столбцов, равных $+1$ или -1 , называется *определяющим контрастом*. Контраст помогает определять смешанные эффекты. Для того, чтобы определить, какой эффект смешан с данным, нужно помножить обе части определяющего контраста на столбец, соответствующий данному эффекту. Так, если $1 = x_1 x_2 x_3$, то для x_1 имеем $x_1 = x_1^2 x_2 x_3 = x_2 x_3$, т.к. всегда $x_i^2 = 1$.

Для x_2 находим $x_2 = x_1 x_2^2 x_3 = x_1 x_3$, для x_3 получается $x_3 = x_1 x_2 x_3^2 = x_1 x_2$.

Это значит, что коэффициенты линейного уравнения будут оценками

$$v_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}; \quad v_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}; \quad v_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}.$$

Соотношение, показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект, называется *генерирующим соотношением*.

При выборе полуреплики 2^{4-1} возможно восемь

- 1) $x_4 = x_1 x_2$; 3) $x_4 = x_2 x_3$; 5) $x_4 = x_1 x_3$; 7) $x_4 = x_1 x_2 x_3$;
- 2) $x_4 = -x_1 x_2$; 4) $x_4 = -x_2 x_3$; 6) $x_4 = -x_1 x_3$; 8) $x_4 = -x_1 x_2 x_3$;

Разрешающая способность этих полуреplik различна. Так, реплики с первой по шестое имеют три фактора в определяющем контрасте, седьмая и восьмая по четыре. Реплики семь и восемь имеют максимальную разрешающую способность и называются главными. Разрешающая способность задается системой смешивания данной реплики. Она будет максимальной если линейные эффекты смешаны с эффектами взаимодействия наибольшего порядка.

Рассмотрим полуреплики, заданные определяющими контрастами $1 = x_1 x_2 x_3 x_4$ и $1 = -x_1 x_2 x_3 x_4$. Совместные оценки здесь определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 x_3 x_4, & x_1 &= -x_2 x_3 x_4, \\ x_2 &= x_1 x_3 x_4, & x_2 &= -x_1 x_3 x_4, \\ x_3 &= x_1 x_2 x_4, & x_3 &= -x_1 x_2 x_4, \\ x_4 &= x_1 x_2 x_3, & x_4 &= -x_1 x_2 x_3, \\ x_1 x_2 &= x_3 x_4, & x_1 x_2 &= -x_3 x_4, \\ x_1 x_3 &= x_2 x_4, & x_1 x_3 &= -x_2 x_4, \\ x_1 x_4 &= x_2 x_3, & x_1 x_4 &= -x_2 x_3. \end{aligned}$$

Такой тип смешивания дает возможность оценивать линейные эффекты совместно с тройными эффектами взаимодействий, а двойные взаимодействия – совместно друг с другом. Здесь коэффициенты линейного уравнения будут оценками

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &\rightarrow \beta_1 + \beta_{234}, & \sigma_{12} &\rightarrow \beta_{12} + \beta_{34}, \\
\sigma_2 &\rightarrow \beta_2 + \beta_{134}, & \sigma_{13} &\rightarrow \beta_{13} + \beta_{24}, \\
\sigma_3 &\rightarrow \beta_3 + \beta_{124}, & \sigma_{14} &\rightarrow \beta_{14} + \beta_{23}, \\
\sigma_4 &\rightarrow \beta_4 + \beta_{123},
\end{aligned}$$

Если полуреплики заданы генерирующими соотношениями $x_4 = x_1 x_2$ и $x_4 = -x_1 x_2$, то в этом случае определяющими контрастами являются $1 = x_1 x_2 x_4$ и $1 = -x_1 x_2 x_4$. Некоторые эффекты смешиваем с парными взаимодействиями:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_2 x_4, & x_1 &= -x_2 x_4, \\
x_2 &= x_1 x_4, & x_2 &= -x_1 x_4, \\
x_3 &= x_1 x_2 x_3 x_4, & x_3 &= -x_1 x_2 x_3 x_4, \\
x_4 &= x_1 x_2, & x_4 &= -x_1 x_2, \\
x_1 x_3 &= x_2 x_3 x_4, & x_1 x_3 &= -x_2 x_3 x_4, \\
x_2 x_3 &= x_1 x_3 x_4, & x_2 x_3 &= -x_1 x_3 x_4, \\
x_3 x_4 &= x_1 x_2 x_3, & x_3 x_4 &= -x_1 x_2 x_3.
\end{aligned}$$

Разрешающая способность этих полуреplik ниже, чем у предыдущего примера. Здесь линейный коэффициент фактора x_3 зависит от взаимодействия других факторов:

$$\sigma_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{1234}.$$

Выбор такой полуреплики разумен, если имеется априорная информация о большей значимости тройных взаимодействий по сравнению с парными или о незначимости трех парных взаимодействий $x_2 x_4$, $x_1 x_4$, $x_1 x_2$.

Из изложенного выше видно, что выбор дробной реплики требует много труда и терпения, знания значительной априорной информации, что не всегда возможно.

В связи с ограниченностью объема данной работы здесь не приводятся методы выборы реплик большей дробности. К тому же целью данной работы является ознакомление читателей с методами планирования эксперимента, то дальнейшее рассмотрение дробных реплик нецелесообразно.

8. ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ КРИТЕРИЕВ ОПТИМИЗАЦИИ И ФАКТОРОВ

Одной из важнейших особенностей, связанных с планированием эксперимента, является повышенная требовательность к точности измерения при фиксировании факторов и при оценке значений критериев оптимизации в отдельных опытах. Исследователь должен уметь правильно определять и оценивать ошибки измерений.

Задачей измерения является не только определение значения самой измеряемой величины, но и также и оценка погрешности, допущенной при измерении (ошибки измерения).

Различают несколько видов ошибок измерения: грубые, систематические и случайные.

Грубые ошибки возможны из-за нарушения основных условий измерения (неверные показания прибора и т.д.) или в связи с недосмотром исследователя, его невнимательностью. Результат, содержащий грубую ошибку, называют промахом. Исследователь всегда должен проверить вероятность грубой ошибки, если один из результатов измерений резко отличается от других. Часто промахов можно избежать, если измерения повторяются вторым исследователем, которому неизвестны результаты, полученные первым. Аналогичный эффект достигается, когда тот же исследователь повторяет измерения спустя некоторое время после первых измерений, когда он забыл ранее полученные результаты. При обнаружении грубой ошибки рекомендуется сразу же отбросить соответствующий результат измерения.

Систематические ошибки вызываются воздействием факторов, которые проявляются

одинаково при многократном повторении одних и тех же измерений. Ошибки такого рода имеют место, например, при измерениях прибором с неправильной регулировкой, приведшей к смещению начала отсчета. После выявления систематических ошибок (при измерениях разными приборами или разными методами одних и тех же величин) их можно легко устранить путем введения необходимых поправок.

Различают несколько видов систематических ошибок: поправки (ошибки известной природы и известной величины); ошибки известного происхождения но неизвестной величины; ошибки неизвестного происхождения. Учет поправок обычно не вызывает затруднений. При наличии других видов систематических ошибок задача усложняется, но и здесь затруднений можно избежать, если обеспечиваются условия, при которых систематические ошибки переводятся в случайные, после чего учитывается влияние случайных ошибок. Перевод систематических ошибок в случайные производится методом *рандомизации*, который рассмотрим позже.

При проведении исследований, связанных с планированием эксперимента, до начала обработки экспериментальных данных все возможные грубые и систематические ошибки должны быть выявлены и устранены.

Случайные ошибки – это следствие воздействий, которые неодинаковы при каждом измерении и не могут быть учтены в отдельности. Подобные ошибки связаны с суммарным эффектом влияния многих факторов, например, изменение погодных условий, разница показателей различных партий сырья и т.д.

Случайные ошибки обычно характеризуются определенным законом их распределения. Очень часто распределение случайных величин, в том числе случайных ошибок измерения, подчиняется закону Гаусса, который относится к так называемому нормальному распределению.

При оценке результатов измерений важно знать не только точность, но и надежность результатов. Степень надежности полученного результата можно оценить, если известна его доверительная вероятность. На практике очень часто принимают доверительную вероятность α равную 0,95 (или 95%). При этом доверительные границы для среднего значения результата измерений можно найти по выражению

$$x = \bar{x} \pm \Delta x = \bar{x} \pm 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где \bar{x} – среднее арифметическое случайной величины;

σ – средняя квадратичная ошибка;

n – число повторных измерений.

Величину \bar{x} , которая считается наиболее вероятным значением измеряемой величины, находят по формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

где x_i – измеряемые значения.

Среднюю квадратичную ошибку определяют из выражения

$$\sigma \approx S = +\sqrt{S} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Величина $f = n - 1$ называется степенью свободы, под которым понимается число независимых сравнений или число независимых измерений (общее число измерений минус число наложенных связей). В нашем случае на измерения наложена одна связь (для вычислений требуется знание среднего значения) и поэтому $f = n - 1$.

Вычисления облегчаются при использовании таблицы типа табл. 8.1. [7], в которой приводятся доверительные вероятности α для величины Δx , выраженных в долях средней

квадратичной ошибки $\left(\theta = \frac{\Delta x}{\bar{b}} \right)$.

Таблица 8.1

$\theta = \frac{\Delta x}{\bar{b}}$	3,9	2,6	2,4	2,0	1,65	0,7	0,30	0,15	0,05
a	0,9999	0,990	0,984	0,950	0,90	0,51	0,24	0,12	0,04

До сих пор речь шла о доверительных вероятностях для отдельного измерения x_i . На практике важнее знать о допустимых отклонениях среднего арифметического \bar{x} от истинного значения x . Соответствующие задачи могут быть решены, если Δx определяется из следующего соотношения:

$$\Delta x = \pm \frac{ts}{\sqrt{n}}$$

где t – критерий Стьюдента;
 s – средняя квадратичная ошибка;
 n – число измерений.

Критерий Стьюдента – характеристика, сходная с θ . Этот критерий играет роль θ в тех случаях, когда число измерений, учитываемых при определении средней квадратичной ошибки, не очень велико. Значения критерия Стьюдента при разных a и n приведены в приложении 1.

С учетом последнего выражения доверительные границы для среднего значения результата измерения можно записать в следующем виде:

$$P\left(\bar{x} - \frac{ts}{\sqrt{n}} \leq x \leq \bar{x} + \frac{ts}{\sqrt{n}} \right) = a.$$

8.1. РАНДОМИЗАЦИЯ

Чтобы исключить влияние систематических ошибок, вызванных внешними условиями (переменной температуры, сырья, исполнителей и т.д.), рекомендуется случайная последовательность при постановке опытов, запланированной матрицей. Опыты необходимо рандомизировать во времени. Термин «рандомизация» происходит от английского слова random – случайный.

Рассмотрим пример рандомизации условий эксперимента. В полном факторном эксперименте 2^3 предполагается каждое значение параметра оптимизации определять по двум параллельным опытам. Нужно случайно расположить всего 16 опытов. Для этого используем таблицу случайных чисел. Фрагмент таблицы помещен в приложении 2. В случайном месте таблицы выписываем числа с 1 по 16 с отбрасыванием чисел больше 16 и уже выписанных. В нашем случае, начиная с четвертого столбца, можно получить такую последовательность:

2; 15; 9; 5; 12; 14; 8; 13; 16; 1; 3; 7; 4; 6; 11; 10.

С учетом того, что цифры с 1 по 8 соответствуют первым опытам эксперимента, а с 9 по 16 – повторным, получается, что первым реализуется опыт № 2, вторым – опыт № 7 и т.д. Случайный порядок проведения опытов приведен в таблице 8.2.

Таблица 8.2

Номер опыта в матрице	1	2	3	4	5	6	7	8
--------------------------	---	---	---	---	---	---	---	---

Случайный порядок реализации опытов	3 10	1 16	11 15	5 13	4 8	6 14	2 12	7 9
--	---------	---------	----------	---------	--------	---------	---------	--------

Выбранную случайным образом последовательность опытов не рекомендуется нарушать.

9. ОТСЕИВАЮЩИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Как уже указывалось ранее, при числе факторов $k \geq 7$ возникает необходимость в их сокращении, т.е. отсеивании из-за необходимости выполнения большого числа опытов. Для этой цели разработаны различные методы. Рассмотрим из них некоторые наиболее часто применяемые.

9.1. АПРИОРНОЕ РАНЖИРОВАНИЕ ФАКТОРОВ (ПСИХОЛОГИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ)

На стадии предварительного изучения объекта исследования при формализации априорных сведений иногда полезно проведение психологического эксперимента, заключающегося в объективной обработке данных, полученных в результате опроса специалистов или из исследований, опубликованных в литературе. Такой эксперимент позволяет более правильно спроектировать объект исследования, принять или отвергнуть некоторые предварительные гипотезы, дать сравнительную оценку влияния различных факторов на параметры оптимизации и тем самым правильно отобрать факторы для последующего активного эксперимента, обоснованно исключив некоторые из них из дальнейшего рассмотрения.

Особенность метода априорного ранжирования факторов заключается в том, что факторы ранжируются в порядке убывания вносимого им вклада. Вклад каждого фактора оценивается по величине ранга – места, которое отведено исследователем (специалистом при опросе, экспертом) данному фактору при ранжировании всех факторов с учетом их предполагаемого (количественно неизвестного) влияния на параметры оптимизации. При сборе мнений путем опроса специалистов каждому из них предлагается заполнить анкету, в которой перечислены факторы, их размерность и предполагаемые интервалы варьирования. Заполняя анкету, специалист определяет место факторов в ранжированном ряду. Одновременно он может включить дополнительные факторы или высказать мнение об изменении интервалов варьирования.

Результаты опроса специалистов обрабатываются следующим образом. Сначала определяют сумму рангов по факторам $\left(\sum_1^m a_{ij} \right)$, а затем разность (Δi) между суммой каждого фактора и средней суммой рангов и сумму квадратов отклонений (S):

$$\Delta i = \sum_1^m a_{ij} - \frac{\sum_1^k \sum_1^m a_{ij}}{k} = \sum_1^m a_{ij} - T;$$

$$S = \sum_1^m (\Delta a)^2,$$

где a_{ij} - ранг каждого i -го фактора j -го исследователя (специалиста);

m - число исследователей;

k - число факторов;

T - средняя сумма рангов.

Полученные значения позволяют построить среднюю априорную диаграмму рангов, но

предварительно необходимо оценить степень согласованности мнений всех исследователей с помощью коэффициента конкордации ω :

$$\omega = \frac{12s}{m^2(k^3 - k) - m \sum_1^1 T_j},$$

где $T_j = \sum (t_j^3 - t_j)$, t_j - число одинаковых рангов в j -ом ранжировании.

Использовать коэффициент конкордации можно после оценки его значимости, которая возможна с помощью специальных таблиц или известных статистических распределений. Например, величина $m(k-1)$ имеет χ^2 - распределение с числом степеней свободы $f = k - 1$. Значение χ^2 - критерия определяют по формуле

$$\chi^2 = \frac{12s}{mk(k+1) - \frac{1}{k-1} \sum_1^m T_i}.$$

Гипотеза о наличии согласия может быть принята, если при заданном числе степеней свободы табличное значение χ^2 меньше расчетного (см. приложение 5) для 5%-го уровня значимости.

Оценив согласованность мнений всех исследователей, строят среднюю диаграмму рангов, откладывая по одной оси факторы, а по другой – соответствующие суммы рангов. Чем меньше сумма рангов данного фактора, тем выше его место в диаграмме. С помощью последней оценивается значимость факторов (см. рис. 9.1).

Факторы

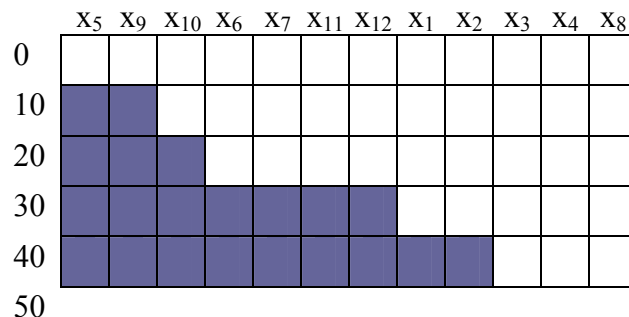


Рис. 9.1.

В случае неравномерного экспоненциального убывания распределения часть факторов можно исключить из дальнейшего рассмотрения, отнеся их влияние к шумовому полю. Если же их распределение равномерное, то в эксперимент рекомендуется включать все факторы.

В ситуациях с очень большим числом факторов, кроме общей согласованности мнений исследователей, рассматривают с помощью χ^2 - распределение и согласованность по каждому фактору в отдельности.

Построение средней априорной диаграммы рангов по известным литературным источникам полезно с той точки зрения, что она по существу является сокращенным литературным обзором по объему исследования.

9.2. МЕТОД СЛУЧАЙНОГО БАЛАНСА

При сравнительно большом числе факторов ($k \geq 7$) отсеивающие эксперименты обязательны, т.к. они позволяют исключить из дальнейшего изучения ряд незначимых факторов уже на первом этапе работы, а следовательно, могут сократить число опытов, существенно упростить изучение факторного пространства и описание поверхности отклика (параметра оптимизации).

Хорошая эффективность отсеивающих экспериментов достигается при применении метода случайного баланса, позволяющего отсеивать небольшое число значимых эффектов на шумовом поле.

Основан метод случайного баланса на том, что если все эффекты, ответственные за объект исследования, расположить в порядке убывания вносимого им вклада в дисперсию параметра оптимизации, то получится ранжированный ряд с убыванием экспоненциального типа. При приближенном воспроизведении с помощью небольшого числа опытов этого ранжированного ряда обычно можно выделить незначимые эффекты, которые относятся к шумовому полю, и несколько существенных эффектов, которые отсеивают, а затем учитывают в дальнейшей работе.

Предполагая, что модель объекта исследования является линейной, а часть эффектов относится к шумовому полю, получают расщепление модели в следующем виде:

$$y = \vartheta_0 + \vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \dots + \vartheta_{k-\ell} x_{k-\ell} + a,$$

$$a = \vartheta_1^1 z_1 + \vartheta_2^1 z_2 + \dots + \vartheta_\ell^1 z_\ell + h,$$

где k – общее число эффектов;

ℓ – число эффектов, отнесенных к шумовому полю;

$k - \ell$ – число значимых эффектов;

h – ошибка опыта.

Далее с помощью регрессионного анализа можно оценить значимые эффекты на шумовом поле, созданном ℓ эффектами по их вкладу в дисперсию $S_{\{a\}}^2$.

При отсеивающих экспериментах методом случайного баланса работа осуществляется в две стадии: сначала по матрице случайного баланса ведут эксперимент с небольшим числом опытов и по диаграмме рассеяния узнают образ экспоненциальной кривой (характеризующей степень влияния факторов на параметр оптимизации), а затем эффекты, отобранные на шумовом поле с помощью диаграмм рассеяния визуально, утоняют посредством вычислений, известных из обычного дисперсионного анализа.

Построению матрицы планирования предшествуют кодирование факторов и выбор их уровней варьирования по всем правилам проведения полного факторного эксперимента.

Для построения матрицы случайного баланса используют случайный механизм (отсюда и название метода). Число опытов выбирают с расчетом, чтобы оно было кратным 2 и превышало число $k+1$, где k – число факторов. Это упрощает работу и позволяет оценить линейные эффекты во всех случаях.

Матрицу, предписывающую условия проведения отдельных опытов, можно строить двумя путями: случайное распределение уровней по столбцам с помощью известных таблиц случайных чисел (чистые случайный баланс); случайное смешивание регулярных дробных реплик факторного эксперимента. Второй путь построения матрицы наиболее распространен. Чистый случайный баланс считается менее эффективным, его рекомендуется применять только в случаях не столь ответственных, или при варьировании факторов на разном числе уровней.

При смешивании дробных реплик можно применять полуреплики. Для одной половины факторов полуреплика используется непосредственно, а для других факторов уровни распределяются случайным выбором строк (по таблице случайных чисел) из той же полуреплики. Факторы распределяются по столбцам таким образом, чтобы в первой части матрицы были факторы, которые согласно априорной информации являются наиболее существенными. В некоторых ситуациях это может сократить последующий эксперимент, поскольку позволяет сразу после анализа результатов переходить к движению по

поверхности отклика.

Когда матрица случайного баланса построена, ее пригодность проверяется специальными приемами. Матрица пригодна, если в ней нет полностью закоррелированных столбцов (знаки в столбцах двух различных эффектов не должны полностью совпадать или не совпадать). Кроме того, в матрице не должно быть столбцов, скалярное произведение которых на любой другой столбец дает столбцы с одинаковыми знаками.

9.3. НЕПОЛНОБЛОЧНЫЕ ПЛАНЫ (УЧЕТ КАЧЕСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ И ЭКСПЕРТНЫЕ ОЦЕНКИ)

На практике часто возникает необходимость в отсеивающем эксперименте в условиях, когда все или некоторые из рассматриваемых факторов являются качественными. В таком случае целесообразно применять неполноблочные планы (блок-схемы). Аналогичные планы используют и при проведении эксперимента в условиях неоднородностей (различие в партиях сырья, исполнителях, машинах, приборах и т.д.), т.е. при отсутствии возможности реализовать все вероятные варианты. Блок-схемы позволяют оценить влияние неоднородностей и снизить ошибку эксперимента, росту которой эти неоднородности способствуют. Наконец, блок-схемы полезны при экспертных оценках (проверка значимости различий сортов и т.п.).

Блоками называются различные источники неоднородностей. В задаче, например, нужно учесть пять блоков, если имеются пять различных партий сырья. Блоки могут содержать разное число элементов, т.е. иметь различные размеры, особенности и т.п. Так, если для каждой из пяти партий сырья применять четыре различных способа переработки, то блоки содержат по четыре элемента.

План называется полноблочным, если в процессе эксперимента в каждом блоке изучают все элементы. Примером полноблочного плана является полный факторный эксперимент. Когда в блоках изучают лишь некоторые их элементы, имеют дело с неполноблочным планом, который экономичнее.

При размещении элементов в неполноблочных планах учитывают правила, определяющие частоту появления элементов и их пар. В связи с этим различают: число блоков – v , число элементов – V , число единиц в блоке – q , число повторений в строке – r , число повторений каждой пары элементов – λ и общее число опытов – N . Ни один из блоков неполноблочного плана не содержит всех элементов.

План, в котором каждый элемент и каждая пара элементов принадлежат к одному и тому же числу блоков, называется сбалансированным планом, или ВJB – схемой (уравновешенной неполной схемой). Такие планы из-за характерных для них свойств уравновешенности позволяют применять одну и ту же стандартную ошибку при сравнении каждой пары элементов. Неполноблочность дает возможность снижать число опытов.

Таким образом, в ВJB – схеме каждый блок B_i содержит одинаковое число элементов q , каждый элемент a_i принадлежит одному и тому же числу блоков (r) и для каждой пары элементов a_i и a_j число блоков, содержащих эту пару, равно λ . При этом обеспечиваются следующие соотношения:

$$N = vq = vr;$$
$$r(q - 1) = \lambda(v - 1).$$

Неполноблочные планы называются симметричными, если $v=v$ и $r=q$; подобные планы называются SBJB – схемы.

При обработке экспериментальных данных, полученных с использованием неполноблочных сбалансированных планов, применяют дисперсионный анализ.

Пример применения данного метода приведен в работе Тихомирова В.Б. [6]

Рассматривается пример, связанный с применением ВУВ-схемы на практике – при экспертной оценке качества продукции. Десять экспертов оценивали качество шести видов

продукции по 14-балльной системе, причем каждый эксперт имел возможность оценить качество трех видов продукции, а каждый вид продукции оценивали пять экспертов.

В случае применения блок-схем в экспертных оценках рекомендуется обеспечить выполнение следующих требований: каждый эксперт оценивает одно и то же число объектов; каждый объект проверяется одинаковым числом экспертов; каждую пару объектов один эксперт должен сравнивать одно и то же число раз. Все эти требования выполняются при использовании сбалансированного неполноблочного плана. В примере использовалась ВІВ-схема со следующими параметрами: $b=10$; $v=6$; $q=3$; $r=5$; $\lambda=2$; $N=vr=bq=30$.

Целью экспертной оценки являлось определение вида продукции оптимального качества (продукция лучшего качества оценивается большим числом баллов) и установление значимых различий между разными видами продукции. Неполноблочный план и результаты экспертной оценки y_{ij} см. в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Элементы (виды продукции)	Блоки (эксперты)										Итоги (T_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	
a_1	2	5	4	7	6	-	-	-	-	-	24
a_2	3	4	-	-	-	3	4	7	-	-	21
a_3	-	-	8	9	-	6	7	-	9	-	39
a_4	-	-	8	-	9	5	-	7	-	9	38
a_5	8	-	-	-	13	-	10	-	12	14	57
a_6	-	10	-	12	-	-	-	11	11	13	57
Итоги (B_j)	13	19	20	28	28	14	21	25	32	36	$G=236$
B_j^2	169	361	400	784	784	196	441	625	1024	1296	$\sum_{j=1}^{10} B_j^2 = 6080$

После подсчета B_j (по блокам) и T_i (по элементам) проводили вычисления, результаты которых приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.2

a_i	T_i	$B_{(i)}$	Q_i	ω_i	T_i^n	\bar{T}_i^n	T_i^2	Q_i^2
a_1	24	108	-36	4	24,3	4,86	576	1296
a_2	21	92	-29	75	26,8	5,36	441	841
a_3	39	115	2	14	40,1	8,02	1521	4
a_4	38	123	-9	-29	35,7	7,14	1444	81
a_5	57	130	41	-7	56,5	11,30	3249	1681
a_6	57	140	31	-57	52,6	10,52	3249	961
Сумма	236	708	0	0	236	47,20	10480	4864

Величина $B_{(i)}$ – сумма итогов по тем блокам, в которых появляется элемент a_i ; в нашем случае это сумма пяти итогов по блокам ($r=5$). В частности, для элемента a_1

$$B_{(1)} = \sum_{j=1}^5 B_j = 13 + 19 + 20 + 28 + 28 = 108.$$

Значения $B_{(i)}$ учитывали при расчете величин Q_i (внутриблочных эффектов элементов), с помощью которых оценивается внутренняя информация по элементам:

$$Q_i = qT_i - B_{(i)} = 3T_i - B_{(i)}.$$

Сумма величин Q_i в матрице должна быть равна нулю: $\sum_{i=1}^6 Q_i = 0$.

Когда определены $T_i, B_{(i)}$ и Q_i , приступают к расчету, необходимому для оценки скорректированных итогов по элементам (T_i'') с учетом межблоковой и внутриблоковой

информации:

$$T_i'' = T_i + \tilde{\mu}\omega_i, \quad (9.1)$$

где ω_i - величина, которая обеспечивает учет блоковых эффектов;

$\tilde{\mu}$ - весовой коэффициент.

Значения ω_i и $\tilde{\mu}$ находят по следующим формулам (для плана без повторных опытов):

$$\begin{aligned} \omega_i &= (v-q)T_i - (v-1)B_{(i)} + (q-1)G; \\ \tilde{\mu} &= \frac{(b-1)(E_b - E_e)}{v(q-1)(b-1)E_b + (v-q)(b-v)E_e}, \end{aligned} \quad (9.2)$$

где $G = \sum_1^v T_i$;

E_b – средний квадрат для блоков, скорректированных от эффектов элементов;

E_e – внутриблоковая ошибка.

Если E_b меньше E_e , то принимают $\tilde{\mu} = 0$. В нашем случае $G = \sum_1^6 T_i = 236$. С учетом этого

$$\omega_i = 3T_i - 5B_{(i)} + 2G.$$

Проверка показывает, что, как и следовало ожидать, $\sum_1^6 \omega_i = 0$.

Величины E_b и E_e , знание которых необходимо для определения $\tilde{\mu}$, находят после дисперсионного анализа, результаты которого приведены в табл. 9.3.

При вычислениях учитывается величина относительной внутриблоковой информации (фактор эффективности), определяемая из соотношения

$$E = \frac{v(q-1)}{q(v-1)}.$$

В нашем случае $E=0,80$.

Таблица 9.3

Источники дисперсии	Сумма квадратов (ss)	Число степеней свободы (f)	Средний квадрат (ss/f)
Блоки (нескорректированные) Блоки (скорректированные)	$ss_{б.н.}=170,2$ $ss_{б.е.}=65,8$	$f_6=b-1=9$ $f_6=b-1=9$	$E_b=7,31$
Элементы (нескорректированные) Элементы (скорректированные)	$ss_{э.н.}=239,5$ $ss_{э.е.}=173,5$	$f_3=v-1=5$ $f_3=v-1=5$	$E_э=34,7$
Внутриблоковая ошибка	$ss_{ош}=6,2$	$f_{ош}=(vr+1)-(b+v)=15$	$E_e=0,42$
ИТОГО	$ss_{общ}=311,5$	$N-1=29$	

Необходимые суммы квадратов рассчитывают следующим образом:

$$\begin{aligned}
SS_{\bar{b},H} &= \frac{\sum_1^b B_j^2}{q} - \frac{G^2}{rv}; \\
SS_{\bar{b},c} &= \frac{\sum_1^b B_j^2}{q} + \frac{\sum_1^v Q_i^2}{q^2 r E} - \frac{\sum_1^v T_i^2}{r}; \\
SS_{\bar{a},H} &= \frac{\sum_1^v T_i^2}{r} - \frac{G^2}{rv}; \\
SS_{\text{ош}} &= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{\sum_1^b B_j^2}{q} - \frac{\sum_1^v Q_i^2}{q^2 r E}; \\
SS_{\text{общ}} &= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{G^2}{rv}; \\
E_b &= \frac{SS_{\bar{b},c}}{f_{\bar{b}}}; \quad E_e = \frac{SS_{\text{ош}}}{f_{\text{ош}}}.
\end{aligned}$$

Теперь, согласно уравнению (9.2), находим $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{\mu} = \frac{9(7,31 - 0,42)}{6 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 7,31 + 3 \cdot 4 \cdot 0,42} = 0,078.$$

Используя уравнение (9.1), определяем значения T_i'' , приведенные в табл. 9.2, а затем вычисляем средние значения оценок по элементам. Формула здесь

$$\bar{T}_i = \frac{T_i''}{r} \cdot T_i''$$

Зная T_i'' , можно найти, если вернуться немного назад, скорректированную сумму квадратов по элементам $SS_{\bar{a},c}$, знание которой необходимо для определения E_a и далее критерия Фишера. С помощью же критерия Фишера проверяется гипотеза об отсутствии различия между элементами.

$$SS_{\bar{a},c} = \frac{\sum (T_i'')^2}{r} - \frac{G^2}{rv} = 173,5.$$

$$E_a = \frac{SS_{\bar{a},c}}{f_{\bar{a}}} = 34,7.$$

При установлении критерия Фишера учитывается величина скорректированной ошибки:

$$E_e' = E_e [1 + (v - q)\tilde{\mu}];$$

$$E_e' = 0,42[1 + (6 - 3)0,078] = 0,52.$$

Расчетное значение критерия Фишера

$$F_{\text{расч.}} = \frac{E_a}{E_e'} = \frac{34,7}{0,52} = 66,7.$$

Табличное значение критерия Фишера при $f_{\bar{a}}=6-1=5$ и $f_{\text{ош}}=vr+1-(b+v)=15$ равно 2,9. Таким образом, можно считать, что различие между некоторыми элементами является значимым ($F_{\text{расч}} > F_{\text{табл}}$).

Далее ведется сравнение отдельных элементов с помощью критерия Фишера, определяемого по формуле

$$F_{расч.} = \frac{(T_i'' - T_{i+1}'')^2}{2rE_e'}$$

Так, при сравнении элементов a_3 и a_4 установлено:

$$F_{расч.} = \frac{(T_3'' - T_4'')^2}{2rE_e'} = \frac{(40,1 - 35,7)^2}{2 \cdot 5 \cdot 0,52} = 3,72.$$

Теперь $F_{расч.} < F_{табл.}$, так как табличное значение критерия (при $f_3=2-1=1$ и $f_{ош}=15$) равно 4,54. Следовательно, можно с 95%-ной доверительной вероятностью считать, что $a_3 = a_4$. Аналогично было установлено, что $a_1 = a_2$ и $a_5 = a_6$. Между остальными парами существуют значимые различия. Лучшим качеством среди рассматриваемых видов продукции характеризуются те, которым соответствуют элементы a_5 и a_6 ($\bar{T}_5'' \approx \bar{T}_6'' \approx 11$).

10. ПРИМЕР ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Рассматривается случай соединения синтетической кожи СК-8 методом ультразвуковой сварки. Параметром оптимизации взята прочность на сдвиг сварного шва. Полученная прочность сравнивалась с прочностью ниточного шва.

Процесс ультразвуковой сварки (УЗС) характеризуется следующими параметрами: амплитудой колебаний рабочего торца инструмента, частотой колебаний, длительностью ультразвукового (УЗ) импульса, статическим давлением инструмента на свариваемые материалы, видом опоры колебательной системы, шириной сварного шва, физико-механическими характеристиками свариваемых материалов и т.д. [8, 9].

10.1. ВЫБОР ФАКТОРОВ

Из анализа литературных источников и по результатам однофакторных экспериментов [10,11] выделены для дальнейшего исследования следующие факторы:

амплитуда колебаний – А;

статическое давление – Р;

длительность ультразвукового импульса (время сварки) – t.

Остальные факторы зафиксированы:

частота колебаний – $f = 21,8$ кГц;

ширина шва – $h = 5$ мм;

опора – полуволновая активная;

материал – синтетическая кожа СК – 8, условно принимается с одинаковой структурой и толщиной.

Значения уровней и интервалов варьирования факторов приведены в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Наименование и обозначение факторов	Уровни варьирования			Интервалы варьирования
	-1	0	+1	
Амплитуда колебаний – x_1 , мкм	65	70	75	5
Статическое давление – x_2 , 10^5 Па	5,5	7	8,5	1,5

Время сварки – x_3 , сек.	0,4	0,45	0,50	0,05
--------------------------------	-----	------	------	------

Изменение амплитуды колебаний обеспечивалось путем замены инструментально-волноводов. Статическое давление создавалось пневмоцилиндром. Время сварки регулировалось электрическим секундомером соединенным с высокочастотным генератором.

10.2. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

В эксперименте использовались образцы стандартного размера 40x50 мм, принятые в обувной промышленности. Размер соединенных образцов составлял 40x90 мм, ширина шва – 5 мм. Ширина сварного шва обеспечивалась шириной рабочего торца инструмента.

Для уменьшения влияния случайных ошибок работа выполнялась в одно время суток и одним исследователем.

Проверка прочности сварного шва производилась на разрывной машине РТ-250.

Число повторных опытов – 5.

Эксперимент выполнялся в три этапа.

Первый этап – проведение полного факторного эксперимента, второй – крутое восхождение к области оптимума и третий – планирование второго порядка для описания области оптимума.

Методика проведения эксперимента, обработка результатов опытов осуществлялось и проводилось в соответствии с работами [3, 6].

10.3. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТА

Проводился эксперимент типа 2^3 , где число факторов $k=3$, число уровней $p=2$, число опытов $N=8$, число повторных опытов $n=5$.

Матрица планирования приведена в табл. 10.2.

Таблица 10.2

Номер опыта	Матрица планирования								Рабочая матрица			Результаты параллельных экспериментов, $Y_{\text{ш}}$ кгс/см	Среднее, \bar{y}_u , кгс/см
	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	Амплитуда колебаний, мкм	Статическое давление, Па 10^5	Длительность УЗ, с		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	+	+	+	-	+	-	-	-	75	8,5	0,4	7,8 8,5 7,7 7,6 8	7,92
2	+	-	+	-	-	+	-	+	65	8,5	0,4	1,8 2,5 2 1,8 1,6	1,94
3	+	+	-	-	-	-	+	+	75	5,5	0,4	5,3 5,7 6,2 5,8 6,2	5,83
4	+	-	-	-	+	+	+	-	65	5,5	0,4	4,3	4,6

													4,2 5 4,9 4,6	
5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	75	8,5	0,5	9,7 10,4 11,4 10,9 10,9	10,46
6	+	-	+	+	-	-	+	-		65	8,5	0,5	4,2 4,4 4,5 4 3,8	4,17
7	+	+	-	+	-	+	-	-		75	5,5	0,5	3,7 3,4 4 3,6 4,1	3,75
8	+	-	-	+	+	-	-	+		65	5,5	0,5	4,1 5,1 4,8 5,1 4,5	4,72

После проведения опытов выполнена статистическая обработка результатов. Сначала определяли ошибки повторных (параллельных) опытов. Среднеквадратичное отклонение определяем по выражению

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2}{n-1},$$

где \bar{y} - среднее арифметическое значение параметра оптимизации из пяти повторных опытов (значения приведены в табл. 10.2).

Данные расчетов сведены в табл. 10.3.

Таблица 10.3

Номер опыта	1	2	3	4	5	6	7	8
S_i^2	0,1265	0,141	0,134	0,125	0,462	0,092	0,086	0,195
S_i	0,3557	0,3755	0,366	0,3535	0,6797	0,3033	0,2933	0,4416

Для определения брака используем критерий Стьюдента

$$\frac{y - \bar{y}}{S} \geq t, \quad \text{или} \quad t_{\text{расч.}} \geq t_{\text{табл.}}$$

где t – критерий Стьюдента, его значение для 5 повторных опытов и доверительной вероятности 0,95 равно 2,78 (см .приложение 1).

Например, для пятого опыта $y_{\min}=9,7$; $y_{\max}=10,9$; $\bar{y}=10,46$. Тогда

$$\frac{10,46 - 9,7}{0,6797} = 1,118$$

$$\frac{10,9 - 10,46}{0,6797} = 0,6473$$

Условие $t_{расч.} \geq t_{табл.}$ не выполняется, следовательно, результаты повторных опытов не можем считать ошибочными.

Дисперсию воспроизводимости рассчитываем по формуле

$$s_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_1^N \sum_1^n (y_i - \bar{y})^2}{N(n-1)} = \frac{\sum_1^N S_i^2}{N}.$$

Из расчета получаем $s_{\{y\}}^2 = 0,159$.

Проверку однородности дисперсий можно выполнять по критериям Фишера и Кохрена.

Пример проверки по критерию Фишера:

$$F_{расч.} = \frac{S_{\max}^2}{S_{\min}^2} = \frac{S_5^2}{S_7^2} = \frac{0,462}{0,086} = 5,372.$$

При числах степеней свободы

$$f_5 = f_7 = n - 1 = 5 - 1 = 4.$$

$$F_{табл.} = 6,4 \text{ (см. приложение 3).}$$

$$F_{расч.} < F_{табл.} \text{ - дисперсии однородны.}$$

Пример проверки по критерию Кохрена:

$$G = \frac{S_{\max}^2}{\sum_1^N S_i^2} = \frac{0,462}{1,3615} = 0,3393$$

Табличное значение критерия Кохрена берем из приложения 4 в зависимости от числа степеней свободы

$$f_1 = n_1 - 1 = 5 - 1 = 4 \text{ и } f_2 = N = 8$$

$$G_{табл.} = 0,396$$

Выполнено условие $G < G_{табл.}$, следовательно, дисперсии однородны.

Уравнение математической модели с учетом парных взаимодействий имеет вид:

$$\hat{y} = \vartheta_0 + \vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \vartheta_3 x_3 + \vartheta_{12} x_1 x_2 + \vartheta_{13} x_1 x_3 + \vartheta_{23} x_2 x_3 + \vartheta_{123} x_1 x_2 x_3. \quad (10.1)$$

Коэффициенты регрессии при полном факторном эксперименте определяют по выражениям:

$$\vartheta_0 = \frac{\sum_1^N \hat{y}_u}{N}; \quad (10.2)$$

$$\theta_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} \hat{y}_u}{N}; \quad (10.3)$$

$$\theta_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} \hat{y}_u}{N}; \quad i \neq j \quad (10.4)$$

$$\theta_{ijk} = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} x_{ku} \hat{y}_u}{N}; \quad i \neq j \neq k. \quad (10.5)$$

Коэффициенты регрессии, рассчитанные по вышеприведенным выражениям, равны:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 5,399; & \theta_{12} &= 1,526; \\ \theta_1 &= 1,591; & \theta_{13} &= -0,261; \\ \theta_2 &= 0,674; & \theta_{23} &= 0,866; \\ \theta_3 &= 0,378; & \theta_{123} &= 0,289. \end{aligned}$$

С учетом значения дисперсии воспроизводимости $s_{\{y\}}^2 = 0,173$ с доверительной вероятностью $\alpha = 0,95$ находим границы доверительных интервалов для коэффициентов регрессии:

$$\Delta \theta_i = \pm \frac{t \cdot S_{\{y\}}}{\sqrt{N}} = \pm \frac{2,78 \cdot 0,416}{\sqrt{8}} = \pm 0,408$$

Сравнивая значения коэффициентов регрессии с границами доверительных интервалов видим, что коэффициенты θ_3, θ_{13} и θ_{123} незначимы. Но, т.к. θ_3 - линейный коэффициент и его величина близка к $\Delta \theta_i$, то решено его не исключать. Теперь уравнение математической модели имеет вид:

$$\hat{y} = 5,399 + 1,591x_1 + 0,674x_2 + 0,378x_3 + 1,526x_1x_2 + 0,866x_2x_3. \quad (10.6)$$

Проверяем адекватность полученного уравнения.

Вычисляем теоретические значения параметра оптимизации \hat{y} , величину ошибки $\Delta y = \bar{y} - \hat{y}$, результаты занесены в табл. 10.4.

Таблица 10.4

Номер опыта	1	2	3	4	5	6	7	8
\hat{y}	7,946	1,712	5,278	5,148	10,434	4,2	3,546	4,172
Δy	-0,026	0,028	0,552	0,548	0,026	-0,03	0,204	0,548
Δy^2	0,00067	0,00078	0,305	0,3003	0,00068	0,0009	0,0416	0,3003

Рассчитаем дисперсию адекватности

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_1^N (\bar{y} - \hat{y})^2}{f} = \frac{\sum_1^N \Delta y_i^2}{f}$$

где $f = N - (k + 1)$ - число степеней свободы.

$$S_{ad}^2 = \frac{0,951}{8 - (3 + 1)} = 0,23775.$$

Адекватной математической модели определяем по критерию Фишера

$$F_{расч.} = \frac{S_{ad}^2}{S_{\{y\}}^2} = \frac{0,23775}{0,173} = 1,374$$

$$F_{табл.} = 6,4$$

$$F_{расч.} \leq F_{табл.}, \text{ следовательно модель адекватна.}$$

Поясним физический смысл полученной математической модели. Полученное соотношение показывает взаимосвязь прочности соединения синтетической кожи СК-8 с такими факторами, как амплитуда колебаний инструмента, статическое давление и время сварки. На параметр оптимизации перечисленные факторы влияют пропорционально, на что указывают линейные эффекты. С увеличением значений факторов прочность соединения должна увеличиваться. Наибольшее влияние оказывает амплитуда колебаний и парное взаимодействие амплитуды колебаний и статического давления. Наименьшее влияние оказывает время сварки, и что особенно интересно, парное взаимодействие амплитуды колебаний и времени сварки оказалось не значимым. Объяснение данного явления следует искать, видимо, в малом интервале варьирования времени сварки – 0,05 с. Но следует заметить, что малый интервал варьирования был выбран экспериментатором сознательно, ибо увеличение интервала до 0,1с приводит в некоторых случаях к непровару или пережогу соединяемых материалов, т.е. к невозможности оценить прочность шва.

Максимальное значение прочности достигнуто при амплитуде колебаний 75 мкм, статическом давлении $8,5 \cdot 10^5$ Па и времени сварки 0,5с и равно 10,46 кг/см.

Однако, из предварительных исследований известно, что может быть достигнута большая прочность соединения и поэтому принято решение с помощью метода крутого восхождения определить максимальное значение прочности соединения.

10.4. ПОИСК ОПТИМУМА МЕТОДОМ КРУТОГО ВОСХОЖДЕНИЯ

Как уже указывалось, увеличение значений факторов должно приводить к улучшению параметра оптимизации.

Матрица планирования при крутом восхождении приведена в табл. 10.5.

Таблица 10.5

Уровень	Факторы			
	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	
Основной	70	7	0,45	
Интервал варьирования	5	1,5	0,05	
Верхний	75	8,5	0,5	
Нижний	65	5,5	0,4	
Опыты	Кодированные значения факторов			Параметр

	x_1	x_2	x_3	оптимизации, $\bar{y}, \text{кгс} / \text{см}$
1	+	+	-	7,92
2	-	+	-	1,94
3	+	-	-	5,83
4	-	-	-	4,6
5	+	+	+	10,46
6	-	+	+	4,17
7	+	-	+	3,75
8	-	-	+	4,72
v_j	1,591	0,674	0,378	
$v_i \times J_i$	7,955	1,011	0,019	
Шаг при изменении \tilde{x}_1 на 5	5	0,849	0,015	
Округление	5	1,0	0,02	
9	75	8	0,47	10,23
10	80	9	0,49	10,09
11	80	10	0,51	7,55
12	80	8	0,43	10,36
13	80	9	0,41	11,34
14	80	10	0,39	12,0
15	80	11	0,37	11,5
16	80	12	0,35	10,5

При выполнении опытов обнаружилось, что при увеличении значений всех факторов прочность сварного шва (параметра оптимизации) уменьшается, вместо ожидаемого возрастания. Обратив внимание на то, что здесь происходит чрезмерная деформация сварного шва, что является следствием перегрева, а также на то, что парное взаимодействие амплитуды колебаний и времени сварки β_{13} имеет отрицательный знак, принято решение вести поиск в сторону уменьшения значений факторов. Кроме этого, из-за невозможности дальнейшего увеличения амплитуды колебаний, обусловленной быстрым выходом из строя волноводов-инструментов, амплитуда колебаний зафиксирована на уровне 80 мкм. Решение о фиксации амплитуды колебаний так же обусловлено тем, что уменьшение его ведет к увеличению длительности сварки, что по технологическим соображениям нежелательно (падает производительность).

В результате дальнейшего поиска найдено максимальное значение прочности, соответствующее 12 кг/см, при амплитуде колебаний 80 мкм, статическом давлении $10 \cdot 10^5 \text{Па}$ и времени сварки 0,39с.

Теперь, после определения оптимума, встает задача по описанию области оптимума.

10.5. ОПИСАНИЕ ОБЛАСТИ ОПТИМУМА

Для описания области оптимума линейная модель не применима. Используем центральное композиционное ротатабельное униформ-планирование второго порядка. Т.к. амплитуда колебаний уже ранее зафиксирована, то переходим к планированию типа 2^2 с центром в точке, где достигнут оптимум.

Уровни и интервалы варьирования факторов приведены в табл.10.6, матрица планирования и результаты эксперимента – в табл.10.7.

После статистической обработки результатов эксперимента, описанных в разделе 10.3, но с учетом особенностей ротатабельного планирования второго порядка, рассчитаны значения коэффициентов регрессии по следующим формулам:

$$b_0 = a_1 \sum_1^N y_u - a_2 \sum_1^k \sum_1^N x_{iu}^2 y_u ;$$

$$b_i = a_3 \sum_1^N x_{iu} y_u ;$$

$$b_{ij} = a_4 \sum_1^{ня} x_{iu} x_{ju} y_u ;$$

$$b_{ii} = a_5 \sum_1^N x_{iu}^2 y_u + a_6 \sum_1^k \sum_1^N x_{iu}^2 y_u - a_7 \sum_1^N y_u ,$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ и a_7 - коэффициенты, значения которых выбирают из табл. 3.22 [6] с учетом числа факторов (k).

Числовые значения коэффициентов:

$$b_0 = 12; \quad b_{12} = -1,065;$$

$$b_1 = -0,011; \quad b_{11} = -1,396;$$

$$b_2 = 0,081; \quad b_{22} = -2,191 .$$

Уравнение математической модели имеет вид:

$$\hat{y} = 12 - 0,011x_1 + 0,081x_2 - 1,065x_1x_2 - 1,396x_1^2 - 2,191x_2^2 .$$

После проверки значимости коэффициентов регрессии и отсеивания незначимых математическая модель принимает вид:

$$\hat{y} = 12 - 1,065x_1x_2 - 1,396x_1^2 - 2,191x_2^2 . \quad (10.7)$$

Проверка на адекватность по критерию Фишера показала, что

$$F_{расч} = \frac{S_{ад}^2}{S_{\{y\}}^2} = \frac{0,727}{0,135} = 5,385;$$

$$F_{табл} = 6,59 .$$

$F_{табл} > F_{расч}$, следовательно, уравнение (10.7) адекватно описывает процесс УЗС кожи СК-8.

10.6. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Для построения сечений поверхности отклика необходимо произвести каноническое преобразование уравнения (10.7).

Таблица 10.6

Наименование и обозначение факторов	Уровни варьирования				
	- 1,414	-1	0	+1	+1,414
Статическое давление, Па 10^5 (x_1)	7,17	8	10	12	12,83
Длительность УЗ импульса, С (x_2)	0,33	0,35	0,40	0,45	0,47

Таблица 10.7

Номер опыта	Матрица планирования		Рабочая матрица		Результаты П опытов	Среднее значение параметра оптимизации \bar{y}	Расчетное значение параметра оптимизации \hat{y}
	x_1	x_2	Статическое давление, Па $\cdot 10^5$	Длительность УЗ импульса, С (x_2)			
1	2	3	4	5	6	7	8
1	+	+	12	0,45	7,5 8,5 8,2 7,8 8	8	7,425
2	-	+	8	0,45	10,5 9,6 9,8 10,3 10,1	10,06	9,563
3	+	-	12	0,35	10,3 10,4 9,4 9,5 10,2	9,96	9,393
4	-	-	8	0,35	8,2 8,5 7,6 7,3 7,2	7,76	7,271
5	-1,414	0	7,17	0,40	8,3 8,9 8,2 9 9,5	8,78	9,214
6	+1,414	0	12,83	0,40	8,4 9 9,2 8,3 8,2	8,62	9,202
7	0	-1,414	10	0,33	7,2 7,8 6,5 7,5 7	7	7,503
8	0	+1,414	10	0,47	7,5 7,4 9,6 6,7 6,9	7,22	7,733
9	0	0	10	0,40	11,5		
10	0	0	10	0,40	11,8		
11	0	0	10	0,40	12	12	12
12	0	0	10	0,40	12,3		
13	0	0	10	0,40	12,4		

Сначала определяем координаты нового центра. Для этого уравнения (10.7) дифференцируем и производные приравниваем нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x_1} = -1,065x_2 - 2,792x_1 = 0; \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} = -1,065x_1 - 4,382x_2 = 0. \end{cases} \quad (10.8)$$

Решив систему уравнения получили координаты точки S

$$x_{1S} = 0,093; \quad x_{2S} = 0,023.$$

После постановки значений x_{1S} и x_{2S} в уравнение (10.7) получили значение критерия оптимизации в новом центре: $Y_S \cong 12 \text{ кгс/см}$, т.е. новый центр практически совпадает со старым.

Итак, получили

$$Y_S = 12 - 1,065x_1x_2 - 1,396x_1^2 - 2,191x_2^2.$$

Следующим шагом является определение угла поворота координат в новом центре по соотношению

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{b_{12}}{b_{11} - b_{22}},$$

где a – угол поворота осей, b_{12} , b_{11} и b_{22} – коэффициенты регрессии рассматриваемого уравнения.

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{-1,065}{-1,396 + 2,191} = -1,3396.$$

Отсюда $2a = -53^\circ 15'$ и $a = -26^\circ 33'$.

Поворот осей происходит по часовой стрелке на угол $26^\circ 33'$, т.к. угол имеет отрицательный знак.

Коэффициенты регрессии в канонической форме определяются из следующих уравнений:

$$B_{11} = b_{11} \cos^2 a + b_{12} \sin a \cos a + b_{22} \sin^2 a;$$

$$B_{22} = b_{11} \sin^2 a + b_{12} \sin a \cos a + b_{22} \cos^2 a;$$

$$B_{12} = 2(b_{22} - b_{11}) \sin a \cos a + b_{12} (\cos^2 a - \sin^2 a) = 0.$$

$$B_{11} = -1,396 \cdot 0,802 - 1,065 \cdot 0,447 \cdot 0,8953 - 2,191 \cdot 0,2 = -1,984;$$

$$B_{22} = -1,396 \cdot 0,2 + 1,065 \cdot 0,447 \cdot 0,8953 - 2,191 \cdot 0,802 = -1,61;$$

$$B_{12} = 2(-2,191 + 1,396) \cdot 0,447 \cdot 0,8953 - 1,065(-0,802 + 0,2) = 0.$$

В итоге получили следующее каноническое уравнение:

$$Y - 12 = -1,984x_1^2 - 1,61x_2^2. \quad (10.9)$$

Проверка подтверждает точность расчетов:

$$-1,396 - 2,191 = -1,984 - 1,61.$$

Канонические коэффициенты регрессии имеют одинаковые знаки, поэтому двумерные сечения представляют собой эллипсы. Для построений линий двумерного сечения использовали уравнение (10.9). Точки кривых сечения находили с помощью стандартного уравнения

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Двумерные сечения поверхности отклика приведены на рис. 10.1. Они отражают влияние факторов x_1 и x_2 на прочность соединения синтетической кожи СК-8 при помощи УЗ. Наибольшая прочность достигнута в точке S ($y=12$ кгс/см) при статическом давлении $10 \cdot 10^5$ Па и длительности УЗ импульса 0,4с. Цифры, отнесенные к кривым на рис. 10.1 даны в кгс/см. Далее идет система эллипсов, характеризующих прочность соединения. Уменьшение прочности соединения при увеличении значений факторов объясняется перегревом и утоньшением материала в зоне сварного шва, а при уменьшении значений факторов – из-за

плохого разогрева материала, что не обеспечивает качественное соединение.

Рис. 10.1 Двумерные сечения поверхности отклика

ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ СТЬЮДЕНТА
(t-КРИТЕРИЯ) ПРИ РАЗЛИЧНОЙ
ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ (α)
ДЛЯ РАЗНОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ (n)

n	α								
	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
2	2,00	1,38	2,0	3,1	6,31	12,71	31,8	63,7	637
3	0,82	1,06	1,3	1,9	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
4	0,77	0,98	1,25	1,6	2,35	3,18	4,54	5,84	12,9
5	0,74	0,94	1,2	1,5	2,13	2,78	3,75	4,60	8,6
6	0,73	0,92	1,2	1,5	2,02	2,57	3,36	4,03	6,9
7	0,72	0,90	1,1	1,4	1,94	2,45	3,14	3,71	6,0
8	0,71	0,90	1,1	1,4	1,90	2,37	3,00	3,50	5,4
9	0,71	0,89	1,1	1,4	1,86	2,31	2,90	3,36	5,0
10	0,70	0,88	1,1	1,4	1,83	2,26	2,82	3,25	4,8
11	0,70	0,88	1,1	1,4	1,81	2,23	2,76	3,17	4,6
12	0,70	0,87	1,1	1,4	1,80	2,20	2,72	3,10	4,5
13	0,70	0,87	1,1	1,4	1,78	2,18	2,68	3,05	4,3
14	0,69	0,87	1,1	1,4	1,77	2,16	2,65	3,30	4,2
15	0,69	0,87	1,1	1,3	1,76	2,15	2,62	2,98	4,1
16	0,69	0,87	1,1	1,3	1,75	2,13	2,60	2,95	4,0
17	0,69	0,86	1,1	1,3	1,75	2,12	2,58	2,92	4,0
18	0,69	0,86	1,1	1,3	1,74	2,11	2,56	2,90	4,0
19	0,69	0,86	1,1	1,3	1,73	2,10	2,55	2,88	3,9
20	0,69	0,86	1,1	1,3	1,73	2,09	2,54	2,85	3,9
30	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
60	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,5
120	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4
∞	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,3

ФРАГМЕНТ ТАБЛИЦЫ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

56 66 25 32 38 64 70 26 27 67 77 40 04 34 63 98 99 89 31 16 12 90 50 28 96
88 40 52 02 29 82 69 34 50 21 74 00 91 27 52 98 72 03 45 65 30 89 71 45 91
87 63 88 23 62 51 07 69 59 02 89 49 14 98 53 41 92 36 07 76 85 37 84 37 47
32 25 21 15 08 82 34 57 57 35 22 03 33 48 84 37 37 29 38 37 89 76 25 09 69
44 61 88 23 13 01 59 47 64 04 99 59 96 20 30 87 31 33 69 45 58 48 00 83 48
94 44 08 67 79 41 61 41 15 60 11 88 83 24 82 24 07 78 61 89 42 58 88 22 16
13 24 40 09 00 65 46 38 61 12 90 62 41 11 59 85 18 42 61 29 88 76 04 21 80
78 27 84 05 99 85 75 67 80 05 57 05 71 70 31 31 99 99 06 96 53 99 25 13 63
42 39 30 02 34 99 46 68 45 15 19 74 15 50 17 44 80 13 86 38 40 45 82 13 44
04 52 43 96 38 13 83 80 72 34 20 84 56 19 49 59 14 85 42 99 71 16 34 33 79
82 85 77 30 16 69 32 46 46 30 84 20 68 72 98 94 62 63 59 44 00 89 06 15 87
38 48 84 88 24 55 46 48 60 06 90 08 83 83 98 40 90 88 25 26 85 74 55 80 85
91 19 05 68 22 58 04 63 21 16 23 38 25 43 32 98 94 65 35 35 16 91 07 12 43
54 81 87 21 31 40 46 17 62 63 99 71 14 12 64 51 68 50 60 78 22 69 51 98 37
65 43 75 12 91 20 36 25 57 92 33 65 95 48 75 00 06 65 25 90 16 29 34 14 43
49 98 71 31 80 59 57 32 43 07 85 06 64 75 27 29 17 06 11 30 68 70 97 87 21
03 98 68 89 39 71 87 32 14 99 42 10 25 37 30 08 27 75 43 97 54 20 69 93 50
56 04 21 34 92 89 81 52 15 12 84 11 12 66 87 48 21 06 86 08 35 39 52 28 09

48 09 36 95 36 20 82 53 32 89 92 68 50 88 17 37 92 02 23 43 63 24 69 80 91
 23 97 10 96 57 74 07 95 26 44 93 08 43 30 41 86 45 74 33 78 84 33 38 76 73
 43 97 55 45 98 35 69 45 96 80 46 36 39 96 33 60 20 73 30 79 17 19 03 47 28
 40 05 08 50 79 89 58 19 86 48 27 98 99 24 08 94 19 15 81 29 82 14 35 88 03
 66 97 10 69 02 25 36 43 71 76 00 67 56 12 69 07 89 55 63 31 50 72 20 33 36
 15 62 38 72 92 03 76 09 30 75 77 80 04 24 54 67 60 10 79 26 21 60 03 48 14
 77 81 15 14 67 55 24 22 20 55 36 93 67 69 37 72 22 43 46 32 56 15 75 25 12
 18 87 05 09 96 45 14 72 41 46 12 67 46 72 02 59 06 17 49 12 73 28 23 52 48
 08 58 53 63 66 13 07 04 48 71 39 07 46 96 40 20 86 79 11 81 74 11 15 23 17
 16 07 79 57 61 42 19 68 15 12 60 21 59 12 07 04 99 88 22 39 75 16 69 13 84

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ ФИШЕРА (F-КРИТЕРИЯ) ПРИ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ 0,95

Число степеней свободы для меньшей дисперсии \ Число степеней свободы дисперсии	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	246,5	249,0	251,8	254,3
2	19,51	19,0	19,6	19,24	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,53	4,44	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,41	3,32	3,28
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,12	3,03	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,51	2,42	2,32	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,01
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,08	1,96	1,84
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,44
100	3,94	3,09	2,60	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,48	1,28
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,00

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ КОХРЕКА

Число дисперсий (N)	Число степеней свободы (f)						
	4	5	6	8	10	36	∞
4	0,640	0,600	-	-	0,495	-	0,250
5	0,544	0,507	0,478	0,439	0,412	0,307	0,200
8	0,396	0,360	0,336	0,304	0,283	0,202	0,125
15	0,242	0,220	0,203	0,182	0,167	0,114	0,067
20	0,192	0,174	0,160	0,142	0,130	0,088	0,050
120	0,042	0,037	0,034	0,029	0,027	0,017	0,008

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

ЗНАЧЕНИЯ χ^2 -КРИТЕРИЯ ДЛЯ УРОВНЯ ЗНАЧИМОСТИ 0,04

Число степеней свободы	1	2	3	4	5	6	7	8
χ^2	3,841	5,991	7,815	9,488	11,070	12,592	14,067	15,507
Число степеней свободы	9	10	11	12	13	14	15	16
χ^2	16,919	18,307	19,675	21,026	22,362	23,685	24,996	26,296
Число степеней свободы	17	18	19	20	21	22	23	24
χ^2	27,587	28,869	30,144	31,410	32,672	33,924	35,172	36,415
Число степеней свободы	25	26	27	28	29	30		
χ^2	37,652	38,885	40,113	41,437	42,557	43,773		

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПАРНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ПРИ $\alpha=0,05$

Число степеней свободы f	Критическое значение r	Число степеней свободы f	Критическое значение r	Число степеней свободы f	Критическое значение r
1	0,997	9	0,602	17	0,456
2	0,950	10	0,576	18	0,444
3	0,878	11	0,553	19	0,433
4	0,811	12	0,532	20	0,423
5	0,754	13	0,514	30	0,349
6	0,707	14	0,497	50	0,273
7	0,666	15	0,482	80	0,217
8	0,632	16	0,468	100	0,195

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. R.A.Fisher. The Design of Experiments. 6-th ed, London, Oliver and Boyd, 1951.
2. G.E.P.Box, K.B.Wilson. On the Experimental Attainment of Optimum Conditions. – J.Roy.Statist.Soc.,Ser.B, 1951,13, №1.
3. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976.
4. Клепиков Н.П., Соколов С.Н. Анализ и планирование экспериментов методом максимума подобия. М.: Наука, 1964.
5. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971.
6. Тихомиров В.Б. Планирование и анализ эксперимента (при проведении исследований в легкой и текстильной промышленности). – М.: Легкая индустрия, 1974.
7. Зейдель А.Н. Элементарные оценки ошибок измерений. – М.: Наука, 1967.
8. Волков С.С., Орлов Ю.Н., Черняк Б.Я. Сварка пластмасс ультразвуком. – М.: Химия, 1974.
9. Хамханов К.М., Зайцев Б.А. Математическая модель ультразвуковой сварки синтетической кожи. – Ленинградский технологический институт им. Ленсовета, Л., 1979 (Рук.деп. в ЦНИИТЭИЛП 16 августа 1979 г., №238-79).
10. Хамханов К.М., Зайцев Б.А. Исследование влияния параметров ультразвуковой сварки на прочность шва. – Ленинградский технологический институт им.Ленсовета, Л., 1979 (Рук.деп. в ЦНИИТЭИЛП 16 августа 1979г., №239-79).
11. Хамханов К.М., Зайцев Б.А. Исследование процесса ультразвуковой сварки материалов верха обуви. – Ленинградский технологический институт им.Ленсовета, Л., 1979 (Рук.деп. в ЦНИИТЭИЛП 12 апреля 1979г., №209-79).

ОСНОВЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

**Методическое пособие
для студентов специальностей 190800 «Метрология и метрологическое обеспечение» и
072000 «Стандартизация и сертификация (по отраслям пищевой промышленности)»**

Составитель: Хамханов К.М.