**СХОДИМОСТЬ**

Будем говорить, что разностная схема [(S)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#eqS) *сходится* (к решению φ задачи [(E)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#eqODE) – [(C)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#eqIC)), если

|  |  |
| --- | --- |
| ||φτ – [*P*τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#NotionPt)φ[||τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#NotionNt)→ 0 при τ→0. | (4) |

Сходимость [разностной схемы](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#NotionDS) означает, что при достаточно малом τ значения сеточного (приближенного) решения φτ и точного решения φ мало отличаются. Соотношение [(4)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#eq4) на практике оказывается мало полезным, поскольку на основании его нельзя судить о том насколько малым мы должны выбрать шаг τ, чтобы в узлах сетки точное и приближенное решения отличались друг от друга не более, чем на ε (заранее заданную точность). Если удается доказать, что при достаточно малых τ > 0

|  |  |
| --- | --- |
| ||φτ – [*P*τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#NotionPt)φ[||τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#NotionNt) ≤ *C*τ*k*, | (5) |

где *C* — не зависящая от τ константа, то говорят, что схема [(S)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#eqS) *сходится с порядком k* (или является *схемой k-го порядка* (*сходимости*)). Оценка [(5)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#eq5), если в ней известна (для конкретной задачи [(E)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#eqODE) – [(C)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#eqIC)) константа *C*, позволяет по заранее выбранной точности ε *a priori* выбрать шаг так, чтобы приближенное решение аппроксимировало решение данной (дифференциальной) задачи Коши с точностью ε:

|  |
| --- |
| ||φτ – *P*τφ|| τ ≤ ε; |

|  |
| --- |
| достаточно взять τ ≤ *k*√ε/*C*. |

**АППРОКСИМАЦИЯ**

Явная схема Эйлера обладает двумя важными свойствами, из которых, как будет показано ниже, последует ее сходимость с первым порядком. Во-первых, при достаточно малых τ

|  |  |
| --- | --- |
| ||[*F*τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#NotionDO)([*P*τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#NotionPt)φ)[||τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#NotionNt) ≤ *Ca*τ, | (6) |

где *Ca* — константа, не зависящая от τ, а φ — как обычно, точное решение задачи [(E)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#eqODE) – [(C)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#eqIC). В этом случае говорят, что схема [(S)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#eqS) имеет *первый порядок аппроксимации на решении*. (Если в правой части неравенства [(6)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#eq6) стоит *Ca*τ*k*, то, соответственно, говорят о *схеме k-го порядка аппроксимации* (*на решении*).) Другими словами, неравенство [(6)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#eq6) эквивалентно тому, что ||[*F*τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#NotionDO)([*P*τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#NotionPt)φ)[||τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#NotionNt) = *O*(τ) (в случае схемы *k*-го порядка аппроксимации — *O*(τ*k*)). Тот факт, что разностная схема обладает аппроксимацией на решении, означает, грубо говоря, что при подстановке точного решения дифференциальной задачи в разностную схему мы получаем невязку соответствующего порядка малости по τ. (Было бы идеально, если бы после такой подстановки мы получали в левой части нуль, однако в общем случае конструктивно такие схемы выписать нельзя.)

Часто вместо свойства аппроксимации на решении рассматривают формально более жесткое требование, которое называют *свойством аппроксимации* (в зарубежной литературе — *согласованностью*); именно, говорят, что схема [(S)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#eqS) является *схемой k-го порядка аппроксимации на функции x*, если при достаточно малых τ

|  |
| --- |
| ||[*F*τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#NotionDO)([*P*τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#NotionPt)*x*) – [*P*τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#NotionPt)[*F*](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#eqO)(*x*)[||τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#NotionNt) ≤ *Ca*τ*k*. |

Обычно требуется, чтобы схема обладала свойством аппроксимации на множестве функций из некоторого класса гладкости. Очевидно, *если решения дифференциального уравнения* [*(E)*](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#eqODE) *m раз непрерывно дифференцируемы, а разностная схема обладает* [*k-м порядком аппроксимации*](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#NotionkOAf) *(согласованности) на m раз непрерывно дифференцируемых функциях, то она обладает* [*k-м порядком аппроксимации на решении*](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#NotionkAO)*.*

**УСТОЙЧИВОСТЬ**

Второе важное свойство, которым обладает явная схема Эйлера, называется *устойчивостью* и определяется так: если *z* ∈ [*S*τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#NotionGFS) и, кроме того, ||*z*[||τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#NotionNt) и τ достаточно малы, то уравнение

|  |  |
| --- | --- |
| [*F*τ](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#NotionDO)(*y*) = *z* | (7) |

однозначно разрешимо и существует такая не зависящая от τ и ||*z*||τ константа *Cs*, что

|  |  |
| --- | --- |
| ||*y* – φτ||τ = ||*F*τ–1(*z*)– φτ||τ ≤ *Cs*||*z*||τ. | (8) |

|  |
| --- |
| Устойчивость разностной схемы означает, что малые возмущения *z* в начальных данных и правой части разностной схемы приводят к равномерно малому по τ изменению решения (напомним, что φτ — решение невозмущенной системы, а *F*τ–1(*z*) — возмущенной). Поскольку φτ = *F*τ–1(*z*),неравенство [(8)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#eq8), переписанное в виде ||*F*τ–1(*z*)– *F*τ–1(0)||τ ≤ *Cs*||*z*|| τ, означает, в частности, непрерывность обратного к разностному оператору оператора *F*τ–1в нуле. |

|  |
| --- |
| Устойчивость — очень важное в приложениях свойство разностных схем. При практической реализации на ЭВМ разностных методов возникают, в частности, проблемы, связанные с невозможностью представления точных чисел в компьютере. В результате мы решаем не разностную схему [(S)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#eqS), а несколько отличающееся от [(S)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#eqS) уравнение. Все такие возмущения в разностной схеме, грубо говоря, можно "перенести в правую часть" и, таким образом, считать, что в ЭВМ ищется решение не разностной схемы [(S)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#eqS), но решение возмущенного уравнения [(7)](http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#eq7). Свойство устойчивости разностной схемы гарантирует близость при достаточно малых τ между точным (теоретическим) решением φτ разностной схемы и его практической реализацией *F*τ–1(*z*)(где *z* — суммарный вектор возмущений). Источником возмущений служит не только невозможность точного представления данных в ЭВМ, но и неточность определения физических параметров модели, погрешность измерений и т.п. |