الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2018

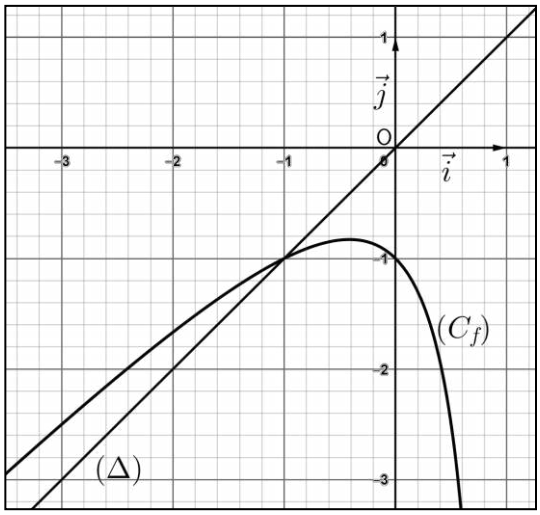
الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 6 إلى الصفحة 3 من 6)



التمرين الأول: (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0=-3$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (أنظر الشكل المقابل).

1) أعد رسم الشكل على ورقة الاجابة ثم مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل، أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3\leqslant u_n<-1$.

3) **أ.** بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}+1\geqslant\frac{3}{4}(u_n+1)$.

ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n+1\geqslant-2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) نضع $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leqslant(u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1)<0$

واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقطتين $A(1;1;3)$ و $B(1;0;2)$.

1) أ) بيّن أنّ النقط O ، A و B ليست في استقامية.

ب) تحقق أنّ $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (OAB) ثم عيّن معادلة ديكارتية له.

2) لتكن (Δ) مجموعة النقط M من الفضاء التي احداثياتها $(x;y;z)$ وتحقق المعادلة التالية:

$$(2x+2y+6z-11)^2+(2x+4z-5)^2=0$$

ـ بيّن أنّ المجموعة (Δ) هي تقاطع المستويين المحوريين للقطعتين $[OA]$ و $[OB]$، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمجموعة (Δ).

3) لتكن M نقطة كيفية من الفضاء

ـ برهن صحة التكافؤ التالي: $\left(M\in(\Delta)\right)$ يكافئ $(OM=AM=BM)$ ثم استنتج إحداثيات النقطة Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAB .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، θ عدد حقيقي من المجال $]-\pi;\pi]$

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$(z^2-2z+2)(z^2-2(\sin\theta)z+1)=0$$

II. A ، B ، C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب

$z_A=-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ ، $z_B=1-i$ ، $z_C=\sin\theta+i\cos\theta$ و $z_D=\overline{z_C}$ (يرمز $\overline{z}_c$ الى مرافق z_c)

1) اكتب الأعداد z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسي.

2) E نقطة من المستوي لاحقتها z_E حيث $z_E=\dfrac{z_A}{z_B}$.

ـ بيّن أن النقط C ، D و E تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A و زاويته $\dfrac{\pi}{4}$ ونسبته $(2\sqrt{2}-2)$.

ـ عيّن قيمة θ حتى تكون النقطة B صورة النقطة C بالتشابه المباشر S .

4) نضع $\theta=\dfrac{-3\pi}{4}$.عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيليا صرفا.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $[0;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x+1-\dfrac{1}{\ln x}\ ;\quad x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\} \\ f(0)=1 \end{cases}$

(يرمز بـ ln الى اللوغاريتم النيبيري)

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ/ بيّن أنّ f مستمرة عند 0 بقيم أكبر.

ب/ احسب $\lim\limits_{h\overset{>}{\to}0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)$.

ب/ ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلاً (Δ) يطلب تعيين معادلة له ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ).

4) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ω فاصلتها α حيث $1{,}49<\alpha<1{,}5$

ثم بيّن أنّ معادلة المماس للمنحني (C_f) في النقطة ω تكتب على الشكل $y=\left(\alpha+3+\dfrac{1}{\alpha}\right)(x-\alpha)$

5) ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

6) h الدالة العددية المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $h(x)=1-x+x\ln x$.

أ/ بيّن أنّ الدالة h متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $[1;+\infty[$.

ب/ بيّن أنّه من أجل كل $x>1$: $f(x)-x+\dfrac{1}{x\ln x}=\dfrac{h(x)}{x\ln x}$

و استنتج أنه من أجل $x>1$: $x-\dfrac{1}{x\ln x}<f(x)<x+1$.

7) $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز من المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=\alpha$ و $x=\mathrm{e}$.(e هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

- بيّن أنّ $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-\alpha^2)-\ln(\alpha+1)<\mathcal{A}<\frac{1}{2}(\mathrm{e}-\alpha)(\mathrm{e}+\alpha+2)$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على (03) صفحات (من الصفحة 4 من 6 إلى الصفحة 6 من 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) α و β عددان طبيعيان بحيث: $\begin{cases}\alpha+\beta=4035\\ \alpha-\beta=1\end{cases}$

ـ عيّن العددين α و β، ثم بيّن أنّ العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.

2) عيّن كل الثنائيات الصحيحة (x,y) التي تحقق المعادلة : $1009x-2017y=1$

3) عيّن الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة: $\begin{cases}a\equiv 2019[2017]\\ a\equiv 2019[1009]\end{cases}$.

4) أ) n عدد طبيعي، ادرس تبعا لقيم n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9.

ب) L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي : $L=\underbrace{\overline{111...1}}_{\text{2018 مرة}}$

ـ عيّن باقي القسمة الاقليدية للعدد L 42 على 9.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي:

خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1،1،2،2،2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3−،2،3 وكرية بيضاء مرقمة بـ:1−

نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد.

1) احسب احتمال الحوادث التالية:

A : "الحصول على أربع كريات من نفس اللون".

B : "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر".

C : "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم".

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X ثم عرّف قانون احتماله .

ب) احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

ج) احسب احتمال الحادثة :" $X^2-X>0$ " .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) m عدد حقيقي ، نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2+(m+1)z+(2m-1)=0.....(E)$$

ـ عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين مركبين غير حقيقيين.

2) نضع $m=3$، حل المعادلة (E).

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ النقط A ، B ، C و E التي لاحقاتها $z_A=-2+i$ ، $z_B=-2-i$ ، $z_C=\alpha$ و $z_E=\sqrt{3}$ ، حيث α عدد حقيقي و $\alpha>-2$.

- بيّن أنّ قيمة α التي يكون من أجلها المثلث ABC متقايس الأضلاع هي $(-2+\sqrt{3})$.
- نضع في كل ما يأتي $z_C=-2+\sqrt{3}$:

4) اكتب العدد المركب: $\dfrac{z_C-z_E}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسي ثم استنتج أن :

أ) المستقيمان (AB) و (EC) متعامدان.

ب) النقط A ، B و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

5) ليكن r الدوران الذي يحوّل النقطة B إلى C و يحوّل C إلى A ، عبارته المركبة هي:

$z'=az+\left(\dfrac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ حيث a عدد مركب.

أ) احسب العدد المركب a ثم استنتج زاوية الدوران r.

ب) تحقق أنّ النقطة G مركز ثقل المثلث ABC هي مركز الدوران r.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$.

1) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ ،

واستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2) بيَن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.9<\alpha<1$ ،

و استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-\frac{1}{x}}-x)=-1$ (يمكن وضع $t=-\dfrac{1}{x}$) ثم استنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ وادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

ب) تَحقّق أن $f(x)-x=(1+x)\,h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4) ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha)\simeq 1.73$).

5) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n حيث: $u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$.

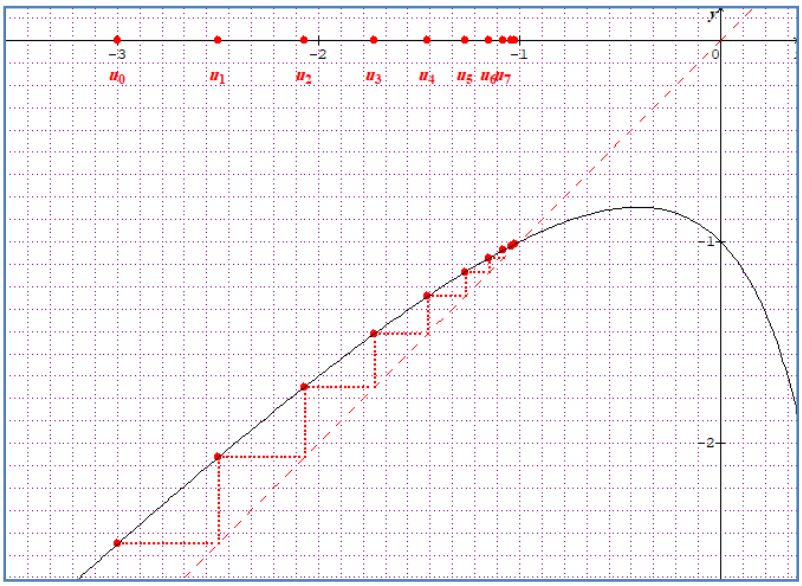
أ) اكتب u_n بدلالة n ثم بيّن أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_1.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right).$$

انتهى الموضوع الثاني

التمرين الأول :



1) إعادة الرسم :

من التمثيل البياني نلاحظ أن المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد -1 فهي متقاربة .

2) البرهان بالتراجع $-3 \le u_n < -1$

لدينا $-3 \le u_0 < -1$ محققة لأن $-3 \le -3 < -1$

نفرض أن $-3 \le u_n < -1$ و لنبرهن أن $-3 \le u_{n+1} < -1$.

$-3 \le u_n < -1$ و الدالة f متزايدة على المجال $[-3;-1]$ و و منه

$f(-3) \le f(u_n) < f(-1)$ أي أن

$-\frac{5}{2} \le u_{n+1} < -1$ بما أن $-3 \le -\frac{5}{2}$ و منه

$-3 \le u_{n+1} < -1$ و منه محققة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $-3 \le u_n < -1$.

3) أ-إثبات أن $u_{n+1}+1 \ge \frac{3}{4}(u_n+1)$: لدينا $u_{n+1}+1 = \frac{u_n^2+1}{u_n-1}+1 = \frac{u_n^2+u_n}{u_n-1} = \frac{u_n}{u_n-1}(u_n+1) = \left[1+\frac{1}{u_n-1}\right](u_n+1)$ و

$-3 \le u_n < -1$.....(1) و منه $-4 \le u_n - 1 < -2$ بالقلب نجد $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{u_n-1} < -\frac{1}{4}$.....(2) لأن دالة مقلوب متناقصة على

المجال $[-4;-2]$ و منه بإضافة 1 نجد $\frac{1}{2} \le 1+\frac{1}{u_n-1} < \frac{3}{4}$ و و $-2 \le u_n+1 < 0$ بالضرب في (u_n+1) إذن

$\left[1+\frac{1}{u_n+1}\right](u_n+1) > \frac{3}{4}(u_n+1)$ أي أن $(u_{n+1}+1) > \frac{3}{4}(u_n+1)$ و منه $(u_{n+1}+1) \ge \frac{3}{4}(u_n+1)$

ب-استنتاج : من ما سبق $(u_n+1) \ge \frac{3}{4}(u_{n-1}+1)$ و منه $(u_n+1) \ge \left(\frac{3}{4}\right)^2(u_{n-2}+1)$ و هكذا نجد $(u_n+1) \ge \left(\frac{3}{4}\right)^n(u_{n-n}+1)$

أي أن $(u_n+1) \ge \left(\frac{3}{4}\right)^n(u_0+1)$ بالتعويض نجد $(u_n+1) \ge -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

بما أن $0 \ge (u_n+1) \ge -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ و $\lim\left[-2\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = 0$ نستنتج بالحصر أن $\lim(u_n+1) = 0$ و منه $\lim u_n = -1$

4) إثبات أن $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right] \le (u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1) \le 0$: لدينا $-2\left(\frac{3}{4}\right)^n \le u_n+1 \le 0$ و منه

$-2\left(\frac{3}{4}\right)^0 - 2\left(\frac{3}{4}\right) - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - .... - 2\left(\frac{3}{4}\right)^n \le (u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1) \le 0$ مجموعة حدود متتابعة من متتالية

هندسية و منه $-2\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{4}-1} \le (u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1) \le 0$ أي أن

$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\le(u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\le 0$ و هو المطلوب

و منه $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\le S_n+(n+1)\le 0$ إذن $S_n\le-(n+1)$ و $\lim[-(n+1)]=-\infty$ بالمقارن نستنتج أن $\lim S_n=-\infty$

التمرين الثاني

1) أ-إثبات أن النقط O ; A ; B ليست في استقامية لدينا $\overrightarrow{OA}(1;1;3)$ و $\overrightarrow{OB}(1;0;2)$ و $\frac{1}{1}\neq 0$ و منه النقط O ; A ; B ليست في استقامية .

ب- التحقق $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (OAB) نحسب الجداءات السلمية $\overrightarrow{OA}.\vec{n}=2+1-3=0$ و $\overrightarrow{OB}.\vec{n}=2+0-2=0$ و منه محققة .

المعادلة الديكارتية $2x+y-z+d=0$ و $B\in(OAB)$ يعني أن $2(1)+(0)-2+d=0$ و منه $d=0$ إذن $2x+y-z=0$ هي المعادلة الديكارتية للمستوي (OAB).

2) إثبات مجموعة النقط هي تقاطع المستويين المحوريين للقطعتين $[OA]$, $[OB]$: لدينا

$(2x+2y+6z-11)^2+(2x+4z-5)^2=0$ يكافئ $\begin{cases}2x+4z-5=0\\ \text{و}\\ 2x+2y+6z-11=0\end{cases}$ و هي تقاطع مستويين .

نلاحظ أن $\overrightarrow{OA}(1;1;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي ذو المعادلة $2x+2y+6z-11=0$ يكافئ $x+y+3z-\frac{11}{2}=0$ و منتصف القطعة المستقيمة $[OA]$ الذي إحداثياته $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ ينتمي لهذا المستوي لأن $2\left(\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)+6\left(\frac{3}{2}\right)-11=0$ يعني $1+1+9-11=0$ محققة و منه هذا المستوي هو محور للقطعة المستقيمة $[OA]$

نلاحظ أن $\overrightarrow{OB}(1;0;2)$ هو شعاع ناظمي للمستوي ذو المعادلة $2x-4z-5=0$ يكافئ $x-2z-\frac{5}{2}=0$ و منتصف القطعة المستقيمة $[OB]$ الذي إحداثياته $\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ ينتمي لهذا المستوي لأن $2\left(\frac{1}{2}\right)+4(1)-5=0$ يعني $1+4-5=0$ محققة و منه هذا المستوي هو محور للقطعة المستقيمة $[OB]$.

التمثيل الوسيطي $\begin{cases}2x+4z-5=0\\2x+2y+6z-11=0\\z=t\end{cases}$ يعني $\begin{cases}x=-2t+\frac{5}{2}\\2x+2y+6z-11=0\\z=t\end{cases}$ و منه $\begin{cases}x=-2t+\frac{5}{2}\\-4t+5+2y+6t-11=0\\z=t\end{cases}$ إذن

$\begin{cases}x=-2t+\frac{5}{2}\\y=-t+3\\z=t\end{cases}$: $t\in IR$ هو التمثيل الوسطي للمستقيم (Δ)

3) البرهان : $M\in(\Delta)$ يكافئ أن $\begin{cases}MO=MA\\MO=MB\end{cases}$ لان M تنتمي إلى نقطة تقاطع محوري القطعتين $[OA]$ و $[OB]$ يكافئ $MO=MA=MB$.

مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAB هي نقطة تقاطع المحاور في هذا المثلث و منه هي نقطة تقاطع (Δ) و المستوي (OAB)

$$\begin{cases} x=-2t+\frac{5}{2} \\ y=-t+3 \\ z=t \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$ و منه $2\left(-2t+\frac{5}{2}\right)-t+3-t=0$ إي أن $-6t+8=0$ و منه $t=\frac{4}{3}$ بالتعويض في التمثيل الوسيطي نجد

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{6} \\ y=\frac{5}{3} \\ z=\frac{4}{3} \end{cases}$$ و منه $\Omega\left(-\frac{1}{6};\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right)$

التمرين الثالث :

I - حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $(z^2-2z+2)(z^2-2\sin\theta.z+1)=0$ يكافئ $\begin{cases} z^2-2z+2=0 \\ z^2-2\sin\theta.z+1=0 \end{cases}$ و منه

نحسب مميز المعادلة الأولى و هو $\Delta=-4$ إذن للمعادلة حلين هما $\begin{cases} z_1=1+i \\ z_2=1-i \end{cases}$

نحسب مميز المعادلة الثانية و هو $\Delta=4\sin^2\theta-4=-4\cos^2\theta$ إذن للمعادلة حلين هما $\begin{cases} z_3=\sin\theta+i\cos\theta \\ z_4=\sin\theta-i\cos\theta \end{cases}$

و منه للمعادلة الأصلية أربع حلول السابقة الذكر .

II - النقط ذات اللواحق التالية : $z_A=-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$; $z_B=1-i$; $z_C=\sin\theta+i\cos\theta$; $z_D=\overline{z_C}$.

1) الكتابة على الشكل ألأسي : $z_A=-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\left[\frac{5\pi}{4}+\pi\right]}=\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_B=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و

$z_C=\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ و منه $z_C=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ و $z_D=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$.

2) لدينا $z_E=\frac{z_A}{z_B}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}=e^{i\frac{10\pi}{4}}=e^{i\frac{5\pi}{2}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $z_C=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ و $z_D=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ و منه

$|z_D|=|z_C|=|z_E|=1$ و منه النقط $E;D;C$ تنتمي إلى الدائرة المثلثة التي مركزها O و نصف قطرها 1.

3) التشابه S الذي مركزه A و نسبته $(2\sqrt{2}-2)$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$

لدينا $S(C)=B$ يعني $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=(2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $z_C=\frac{z_B-z_A}{(2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{\pi}{4}}}+z_A$ و $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=1+i$

أي $z_C=-\frac{2i}{(2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{\pi}{4}}}+1+i$ و منه $z_C=-\frac{2i}{(2\sqrt{2}-2)}e^{-i\frac{\pi}{4}}+1+i$ يعني $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{-\sqrt{2}i-\sqrt{2}}{(2\sqrt{2}-2)}+1+i$ و

منه $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{(\sqrt{2}-2)}{(2\sqrt{2}-2)}(1+i)$ يكافئ $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{(\sqrt{2}-2)\sqrt{2}}{(2\sqrt{2}-2)}e^{\frac{\pi}{4}i}$ أي أن $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{(2-2\sqrt{2})}{(2\sqrt{2}-2)}e^{\frac{\pi}{4}i}$

و منه $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\left(-2+2\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{2}-2\right)}e^{\frac{5\pi}{4}i}$ أي $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=e^{\frac{5\pi}{4}i}$ و منه $\frac{\pi}{2}-\theta\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]$ يكافئ $-\theta\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$ و منه

$\theta\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

4) نضع $\theta=-\frac{3\pi}{4}$ و منه $z_D=e^{-\frac{5\pi}{4}i}$ يكافئ $z_D^n=e^{-\frac{5\pi}{4}ni}$ تخيلي صرف يعني أن $-\frac{5n}{4}\pi\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ يكافئ

$-\frac{5n}{4}\equiv\frac{1}{2}[1]$ يكافئ $-5n\equiv2[4]$ يكافئ $-n\equiv2[4]$ يكافئ $n\equiv-2[4]$ يكافئ $n\equiv2[4]$ و منه

$n=2+4k\ :\ k\in\mathbb{N}$

التمرين الرابع :

لدينا $f(x)=x+1-\frac{1}{\ln(x)}$ و $f(0)=1$

1) أ-إثبات استمرارية الدالة عند 0 لدينا : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[x+1-\frac{1}{\ln(x)}\right]=1=f(0)$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln(x)=-\infty$ و منه محققة .

ب-حساب النهاية $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\left[1-\frac{1}{h\ln(h)}\right]=+\infty=\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\left[\frac{h.-\frac{1}{\ln(h)}}{h.}\right]=\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ لأن $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}h\ln(h)=0^-$

و تفسيرها الهندسي هو أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازي لحامل محور التراتيب عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

2) أ- حساب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]=0$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left[x+1-\frac{1}{\ln(x)}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left[x+1-\frac{1}{\ln(x)}\right]=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\ln(x)=0^+$ و

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\ln(x)=0^-$.

ب-دراسة اتجاه تغير الدالة : المشتقة

$f'(x)=1+\frac{1}{x[\ln(x)]^2}$ و هي موجبة على المجالين $]1;+\infty[$; $]0;1[$ و الدالة متزيدة على المجالين $]1;+\infty[$; $]0;1[$.

جدول تغيراتها

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=$ منه $(\Delta): y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

دراسة الوضعية $[f(x)-(x+1)]=\left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]$ و هي موجبة على المجال $]0;1[$ و سالبة على المجال $]1;+\infty[$ و منه (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]0;1[$ و تقع تحته على المجال $]1;+\infty[$.

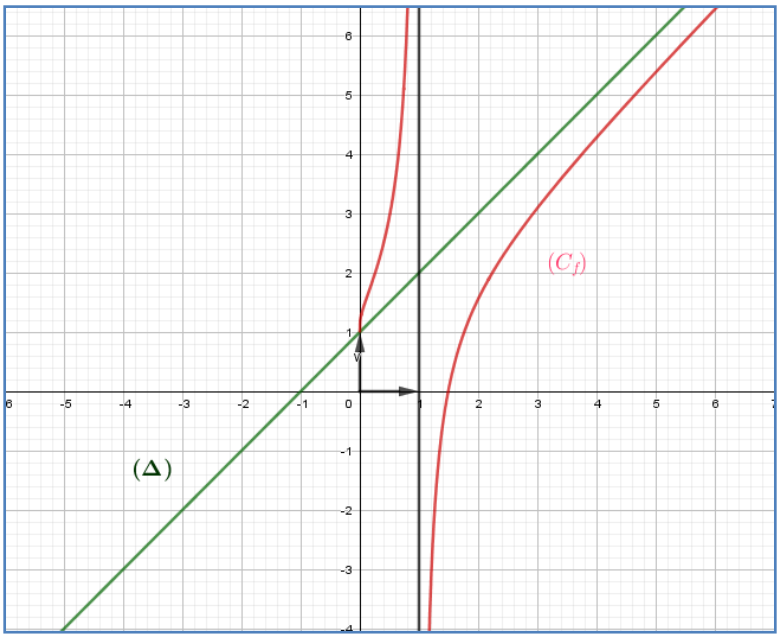
4) إثبات أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات α حيث $1{,}49<\alpha<1{,}5$

لدينا $f(1{,}49)=-0{,}07$ و $f(1{,}5)=0{,}03$ و الدالة مستمرة و متزايدة على $]1;+\infty[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α.

معادلة المماس عندها هي من الشكل $y=f'(\alpha)(x-\alpha)$ بتعويض المشتقة نجد $y=\left[1+\frac{1}{\alpha(\ln(\alpha))^2}\right](x-\alpha)$ بما أن

$f(\alpha)=0$ و منه $\alpha+1-\frac{1}{\ln(\alpha)}=0$ أي أن $\frac{1}{\ln(\alpha)}=\alpha+1$ و منه المعادلة $y=\left[1+\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}\right](x-\alpha)$ يعني أن

$y=\left[1+\frac{\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha}\right](x-\alpha)$ و منه $y=\left[\alpha+3+\frac{1}{\alpha}\right](x-\alpha)$ و هو المطلوب .



5) رسم المنحنى (C_f) :

6) لدينا $h(x)=1-x+x.\ln(x)$

أ - المشتقة $h'(x)=-1+\ln(x)+1=\ln(x)$

و هي موجبة على $[1;+\infty[$ إذن الدالة h متزايدة على هذا المجال .

لدينا $h(1)=0$ و و هي قيمة حدية صغرى و هي دالة متزايدة إذن h دالة موجبة على المجال $[1;+\infty[$.

ب -لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$:

$$f(x)-x+\frac{1}{x\ln(x)}=1-\frac{1}{\ln(x)}+\frac{1}{x\ln(x)}=\frac{x\ln(x)-x+1}{x\ln(x)}=\frac{h(x)}{x\ln(x)}$$

و منه إذا كان $x\in]1;+\infty[$ فإن $f(x)-x+\frac{1}{x\ln(x)}>0$ إذن $f(x)>x-\frac{1}{x\ln(x)}.....(1)$

إذا كان $x\in]1;+\infty[$ فإن $f(x)-x-1=-\frac{1}{\ln(x)}$ عدد سالب تماما إذن $f(x)<x+1.....(2)$

من (1) و(2) نجد أنه لما $x\in]1;+\infty[$ فإن $x-\frac{1}{x\ln(x)}<f(x)<x+1$

7- مساحة الحيز المطلوبة هي $A=u.a.\int_\alpha^e f(x)dx$ و $x-\frac{1}{x\ln(x)}<f(x)<x+1$ على المجال $[\alpha;e]$ و منه

$\int_\alpha^e\left(x-\frac{1}{x\ln(x)}\right)dx<\int_\alpha^e f(x)dx<\int_\alpha^e(x+1)dx$ و منه $\left[\frac{1}{2}x^2-\ln|\ln(x)|\right]_\alpha^e<A<\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_\alpha^e$ أي أن

$\frac{1}{2}(e^2-\alpha^2)+\ln(|\ln(\alpha)|)<A<\frac{1}{2}e^2+e-\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha$ أي أن

$\frac{1}{2}(e^2-\alpha^2)+\ln(|\ln(\alpha)|)<A<\frac{1}{2}(e^2-\alpha^2)+e-\alpha$ أي أن

و منه نجد $\frac{1}{2}\left(e^2-\alpha^2\right)+\ln\left(\left|\ln(\alpha)\right|\right)<A<\frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha)+\frac{2(e-\alpha)}{2}$

$$\frac{1}{2}\left(e^2-\alpha^2\right)+\ln\left(\left|\ln(\alpha)\right|\right)<A<\frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)$$

انتهى تصحيح الموضوع الأول

الأستاذ جواليل أحمد أسامة – ثانوية الشيخ أمود تمنغست 2018

التمرين الأول :

1) لدينا $\begin{cases}\alpha+\beta=4035\\ \alpha-\beta=1\end{cases}$ بالجمع نجد $2\alpha=4036$ و منه $\alpha=2018$ بالتعويض نجد $2018-\beta=1$ و منه $\beta=2017$

و منه $\frac{\alpha}{2}=1009$ و $\beta=2017$ بما أن $2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\beta=1$ فحسب نظرية بيزو العددان $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما .

2) لدينا $2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\beta=1$ أي أن $1009(2)-2017(1)=1.....(1)$ و $1009x-2017y=1....(2)$ بطرح (1) من (2) نجد

$1009(x-2)=2017(y-1)$ بما أن 2017 و 1009 أوليان فيما بينهما نجد 2017 قاسم للعدد $(x-2)$ و 1009 قاسم للعدد

$(y-1)$ أي أن $k\in Z$: $\begin{cases}x-2=2017k\\ y-1=1009k\end{cases}$ و منه $k\in Z$: $\begin{cases}x=2+2017k\\ y=1+1009k\end{cases}$ مجموعة الحلول هي

$S=\{(2+2017k;1+1009k):k\in Z\}$.

3) تعيين العدد a حيث $\begin{cases}a\equiv 2019[2017]\\ a\equiv 2019[1009]\end{cases}$ يعني أن $\begin{cases}a\equiv 2019+2017x_1\\ a\equiv 2019+1009y_1\end{cases}$ حيث x_1 و y_1 عددان صحيحان و منه بالطرح

نجد $2017x_1=1009y_1$ بما أن 1009 و 2017 أوليان فيما بينهما فإن 2017 قاسم للعدد y_1 و 1009 قاسم للعدد x_1

أي أن $x_1=1009k'$ و $y_1=2017k'$ إذن $a=1009\times 2017k'$ و k' عدد صحيح و منه $a=2035153k'$: $k'\in Z$.

4) أ-دراسة بواقي قسمة 7^n على 9

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$7^n\equiv$	1	7	4	$[9]$

ب-لدينا $L=\overline{\underbrace{111...1}_{2018\text{ مرة}}}^{7}$ يعني أن $L=1+7+7^2+....+7^{2017}$ و منه $L=\frac{7^{2018}-1}{7-1}=\frac{1}{6}\left(7^{2018}-1\right)$ إذن

$42L=7\left(7^{2018}-1\right)=7^{2019}-7$ إيجاد باقي القسمة بما أن $2019=3(673)$ فإن $7^{2019}\equiv 1[9]$ و $-7\equiv 2[9]$ بالجمع نجد

$42L\equiv 3[9]$ الباقي المطلوب هو 3 .

التمرين الثاني

1) حساب الاحتمالات

عدد الحالات الممكنة الكلية $C_9^4=126$.

$P(A)=\frac{C_5^4}{126}=\frac{5}{126}$ و $P(B)=\frac{C_1^1\times C_8^3+C_8^4}{126}=\frac{126}{126}=1$

الكريات مجموع أرقامها معدوم $\{-3;-1;2;2\}$ و $\{-3;-1;1;3\}$ و لدينا أربع كرات تحمل الرقم 2 و كرة تحمل الرقم -1 و

كرة تحمل الرقم -3 و كرتين تحملان الرقم 1 و كرة وحيدة تحمل الرقم 3 منه

$P(C)=\frac{C_1^1\times C_1^1\times C_4^2+C_1^1\times C_1^1\times C_2^1\times C_1^1}{126}=\frac{6+2}{126}=\frac{8}{126}=\frac{4}{63}$.

2) أ-قيم المتغير X هي 0 و 1 و 2 و 3 .

قانون الاحتمال

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{C_6^4}{126}=\frac{15}{126}$	$\frac{C_3^1\times C_6^3}{126}=\frac{60}{126}$	$\frac{C_3^2\times C_6^2}{126}=\frac{45}{126}$	$\frac{C_3^3\times C_6^1}{126}=\frac{6}{126}$

ب-حساب الأمل ألرياضياتي : $E(X)=0\left(\frac{15}{126}\right)+1\left(\frac{60}{126}\right)+2\left(\frac{45}{126}\right)+3\left(\frac{6}{126}\right)=\frac{60+90+18}{126}$ و منه

$E(X)=\frac{168}{126}=\frac{4}{3}$.

ج-حساب احتمال الحادثة $X^2-X>0$ أي أن $X=2$ أو $X=3$ و منه $P(X^2-X>0)=P(X=2)+P(X=3)$ أي

أن $P(X^2-X>0)=\frac{45+6}{126}=\frac{51}{126}=\frac{17}{42}$.

التمرين الثالث :

1) المعادلة $z^2+(m+1)z+(2m-1)=0$: نحسب المميز $\Delta_m=(m+1)^2-4(2m-1)=m^2-6m+5$ المميز يقبل جذرين هما 1 و 5 و منه حتى تقبل المعادلة حلين تخيلين صرفيين يجب أن يكون المميز سالب تماما أي أن $m\in]1\,;\,5[$.

2) نضع $m=3$ و منه $\Delta_3=-4$ للمعادلة حلين هما $z_1=2-2i$ و $z_2=2+2i$

3) لدينا $z_A=-2+i$ و $z_B=-2-i$ و $z_C=\alpha$ و $z_E=\sqrt{3}$

حتى يكون المثلث ABC متقايس الأضلاع

يجب أن يكون $|z_A-z_B|=|z_C-z_B|=|z_C-z_A|$ يعني $|2i|=|\alpha+2+i|=|\alpha+2-i|$ بما $|\alpha+2+i|=|\alpha+2-i|$ محققة

نجد أن $|2i|=|\alpha+2+i|$ كافي

طريقة 1 :

بالتربيع نجد $|2i|^2=|\alpha+2+i|^2$ و منه $4=(\alpha+2)^2+1$ يعني أن $\alpha^2+4\alpha+1=0$ نحسب المميز

$\Delta=16-4=12=(2\sqrt{3})^2$

و منه $\alpha=-2-\sqrt{3}$ (هو مرفوض) آو $\alpha=-2+\sqrt{3}$ هو الحل المقبول

الطريقة 2 : بتعويض قيمة $\alpha=-2+\sqrt{3}$ نجد $|2i|=|-2+\sqrt{3}+2+i|$ يكافئ $|2i|=|\sqrt{3}+i|$ محققة لان طويلة العددين هو 2

4) كتابة العدد $\frac{z_C-z_E}{z_A-z_B}$ على الشكل ألأسي $\frac{z_C-z_E}{z_A-z_B}=\frac{-2}{2i}=i$ و منه $\frac{z_C-z_E}{z_A-z_B}=e^{\frac{\pi}{2}i}$

أ - و منه $\arg\left(\frac{z_C-z_E}{z_A-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}$ يعني أن $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{EC})=\frac{\pi}{2}$ و منه المستقيمان (BA) و (EC) متعامدان .

ب -النقط $A\,;\,B\,;\,E$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها ذو اللاحقة $z_w=x+iy$ يعني أن $wA=wB=wE$ يعني

$|x+2+i(y-1)|=|x+2+i(y+1)|=|x-\sqrt{3}+iy|$ يكافئ

$(x+2)^2+(y-1)^2=(x+2)^2+(y+1)^2=(x-\sqrt{3})^2+y^2$ يكافئ

$\begin{cases}(x+2)^2+(y-1)^2=(x+2)^2+(y+1)^2\\(x+2)^2+(y+1)^2=(x-\sqrt{3})^2+y^2\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}y=0\\x^2+4x+5=x^2-2x\sqrt{3}+3\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}y=0\\(2\sqrt{3}+4)x=-2\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}y=0\\x=-2+\sqrt{3}\end{cases}$ و منه مركز الدائرة (γ) هي نفسها النقطة C حيث $z_C=-2+\sqrt{3}$

و نصف قطرها هو $CA=|z_C-z_A|=|\sqrt{3}-i|=2$

5) لدينا $r: z'=az+\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$

أ - حساب a : $a=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_C}$ أي أن $a=\frac{-2+\sqrt{3}+2-i}{-2-i+2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i}$ و منه $a=\frac{(\sqrt{3}-i)^2}{-4}=\frac{2-2\sqrt{3}}{-4}$ إذن

$a=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

زاوية الدوران هي $\arg(a)=\theta$ حيث $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ و $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و منه $\theta=\frac{2\pi}{3}$ و هي زاوية الدوران .

ب-التحقق $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{-6+\sqrt{3}}{3}$ تكون G هي مركز الدوران يعني $r(G)=G$ أي أن

$z_G=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_G+\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ أي أن

$\frac{-6+\sqrt{3}}{3}=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-6+\sqrt{3}}{3}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ أي أن

$\frac{-6+\sqrt{3}}{3}=\left(\frac{-6+\sqrt{3}}{3}\right)\left[\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{3}{2}+i\left(\frac{3}{-6+\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)\right]$ و منه

$\frac{-6+\sqrt{3}}{3}=\left(\frac{-6+\sqrt{3}}{3}\right)\left[\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{3}{2}+i\left(\frac{\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}+1}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)\right]$ و منه

$\frac{-6+\sqrt{3}}{3}=\left(\frac{-6+\sqrt{3}}{3}\right)\left[\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ و منه محققة .

التمرين الربع :

I - لدينا $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$

1) المشتقة : $g'(x)=(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}$ و منه $g'(x)=\frac{1}{x^2}(1+x+2x^2+2x^3)e^{-\frac{1}{x}}$ أي أن

$g'(x)=\frac{1}{x^2}[(1+x)+2x^2(1+x)]e^{-\frac{1}{x}}$ و منه $g'(x)=\frac{(1+x)(1+2x^2)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ و هو المطلوب .

إشارة المشتقة من إشارة $1+x$: و هي موجبة على $]0;+\infty[$ إذن الدالة g متزايدة تماما على هذا المجال .

2) إثبات أن للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد الدالة g متزايدة تماما و مستمرة على $]0;+\infty[$ و $g(1)=0,1$ و $g(0,9)=-0,1$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة السابقة تقبل حلا و حيداً α حيث $0,9<\alpha<1$.

إشارة $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$-$	0	$+$	

II - لدينا $f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

1) أ-حساب النهايات : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[e^{-\frac{1}{x}}\right]=1$

$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=+\infty$ لأن $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{1}{x}\right]=+\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[e^{-\frac{1}{x}}\right]=0$.

ب-إثبات المشتقة $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$ و منه $f'(x)=\frac{1}{x^2}\left[-1+(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}\right]$ إذن

$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ إشارتها من إشارة $g(x)$ و منه f متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]0;\alpha]$.

جدول تغيراتها

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

2) إثبات النهاية

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

بوضع $t=-\frac{1}{x}$ نجد $\lim_{x\to+\infty} t=0$ و منه

$\lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{-t}$ باستخدام العدد المشتق نضع $k(t)=e^t$ و $k(0)=1$ و منه نجد أن $k'(t)=e^t$ و منه

$k'(0)=1$

$\lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-\lim_{t\to0}\frac{k(t)-k(0)}{t-0}=-k'(0)=-1$ و هو المطلوب .

لدينا $f(x)-x=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x$ و منه $f(x)-x=\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}+\left(x\,e^{-\frac{1}{x}}-x\right)$ النهاية

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}+\left(x\,e^{-\frac{1}{x}}-x\right)\right]=1-1=0$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[e^{-\frac{1}{x}}\right]=1$ و

$\lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$ و منه (Δ) مستقيم مقارب جهة $+\infty$ للمنحنى (C_f) .

3) لدينا $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$

أ - حساب النهاية $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right]=-1+1=0$

المشتقة $h'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{\left(-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)}{x^2}$ إشارتها من إشارة $-1+e^{-\frac{1}{x}}$

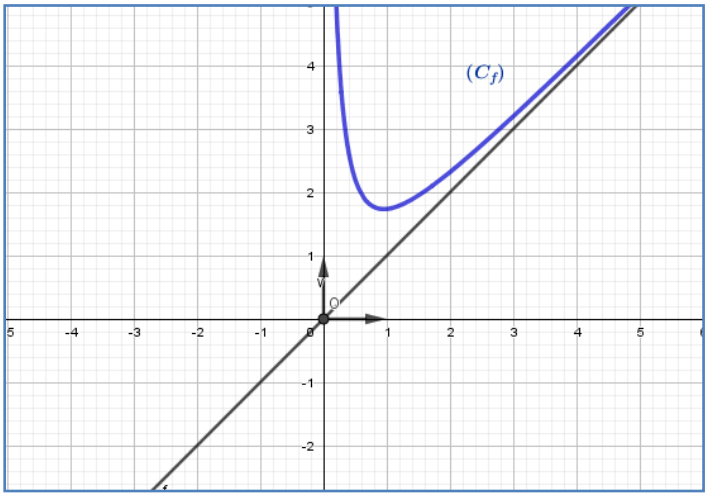
$-1+e^{-\frac{1}{x}}<0$ يكافئ $e^{-\frac{1}{x}}<1$ أي أن $-\frac{1}{x}<0$ محققة و منه الدالة h متناقصة على $]0;+\infty[$

بما أن $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$ و الدالة h متناقصة على $]0;+\infty[$ فإن h موجبة على المجال $]0;+\infty[$ ..

ب -التحقق : $[f(x)-x]=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x=(1+x)e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1-x^2}{x}$ و منه $[f(x)-x]=(1+x)\left[e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1-x}{x}\right]$ إذن

$$[f(x)-x]=(1+x)\left[e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}-1\right]=(1+x).h(x)$$

بما أن h موجبة على المجال $]0;+\infty[$ فإن $[f(x)-x]$ موجبة على $]0;+\infty[$ إذن (C_f) يقع فوق (Δ) على $]0;+\infty[$.



4) رسم المنحنى (C_f) و المستقيم المقارب (Δ)

5) المتتالية (u_n) معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة كما يلي $u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$.

أ - كتابة عبارة الحد العام

$u_n=\frac{n}{n+1}\left[n+\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-n}\right]-\frac{n^2}{n+1}$ و منه

$u_n=\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-n}$ إذن $u_n=e^{-n}$

بما أن $u_n=e^{-n}$ أي أن $u_n=\left(\frac{1}{e}\right)^n$ فإن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\left(\frac{1}{e}\right)$ و حدها الأول $u_1=\left(\frac{1}{e}\right)$.

ب -حساب المجموع $S_n=\left[\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right]+....+\left[\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right]$ لدينا $u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$

و منه $u_n+\frac{n^2}{n+1}=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)$ أي أن $u_n+\frac{n^2}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}$ يعني أن

$u_n+\frac{n^2-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}$ يكافئ $u_n+n-1=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}$ و منه المجموع يصبح

$S_n=[u_1+1-1]+[u_2+2-1]+....+[u_n+n-1]$ مجموع متتاليتين حسابية و هندسية

$S_n=u_1\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n-1}{\frac{1}{e}-1}+\frac{n}{2}(0+n-1)$ و منه $S_n=\left(\frac{1}{e}\right)\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n-1}{\frac{1}{e}-1}+\frac{n}{2}(n-1)$ إذن; $S_n=\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n-1}{1-e}+\frac{n}{2}(n-1)$ و

منه $S_n=\frac{1-e^n}{e^n-e^{1+n}}+\frac{n}{2}(n-1)$ و هو المطلوب .

الأستاذ جواليل أحمد أسامة – ثانوية الشيخ أمود تمنغست 2018

ثانوية العقيد سي الحواس بسكرة

بكالوريا دورة جوان 2018

المـــادة: رياضيات

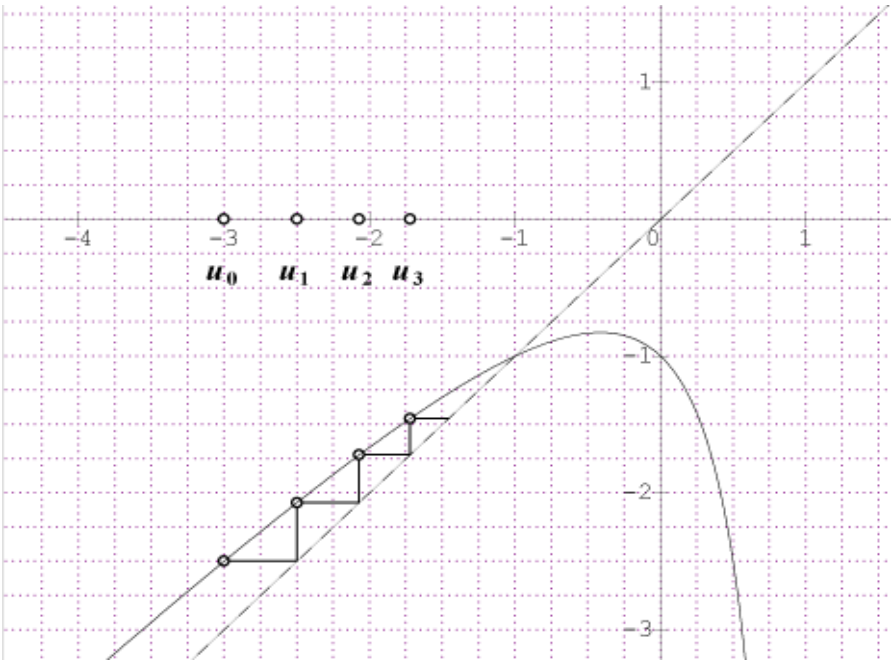
الشعبة: رياضيات

تصحيح مفصل لإختبار مادة الرياضيات

تصحيح الموضوع الأول:

تصحيح التمرين الأول:

1) إعادة رسم الشكل وتمثيل عليه الحدود الأربع الأولى:



- التخمين: من خلال الشكل يتضح لنا أنها متتالية متزايدة تماما ومتقاربة نحو 1- أي متقاربة نحو فاصلة نقطة التقاطع مع المنصف الأول.

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $-3 \le u_n \prec -1$:

* الخاصية الإبتدائية: من أجل **n=0** نجد $-3 \le u_0 = -3 \prec -1$ إذن هذه الخاصية محققة من أجل **n=0**.

* الخاصية الوراثية: نفرض أن الخاصية محققة من أجل كل عدد طبيعي **p** أي $-3 \le u_p \prec -1$ ونبرهن على صحتها من أجل **p+1** أي لنبرهن أن $-3 \le u_{p+1} \prec -1$:

لنا الدالة **f** متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ أي تحفظ الترتيب أي مهما كان العنصران x_1 و x_2 من المجال $]-\infty;-1[$ فإن $x_1 \le x \prec x_2$ يكافيء $f(x_1) \le f(x) \prec f(x_2)$ .....(1)

لنا $u_{p+1} = f(u_p)$ و حسب الشكل $f(-1) = -1$ و $f(-3) = -2,5$ .....(2)

و حسب فرضية التراجع $-3 \le u_p \prec -1$ .....(3)

من (1) و (2) و (3) نجد $f(-3) \le f(u_p) \prec f(-1)$ أي $-2,5 \le u_{p+1} \prec -1$ أي $-3 \le -2,5 \le u_{p+1} \prec -1$ ومنه فإن الخاصية محققة من أجل **p+1**.

- الإستنتاج: من خلال ما سبق نستنتج أنه مهما كان العدد الطبيعي **n** فإن : $-3 \le u_n \prec -1$.

3) أ) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي **n** فإن : $u_{n+1} + 1 \ge \frac{3}{4}(u_n + 1)$:

لنا $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1} = \frac{u_n^2 - 1 + 2}{u_n - 1} = u_n + 1 + \frac{2}{u_n - 1}$

و

$$u_{n+1} + 1 - \frac{3}{4}(u_n + 1) = u_n + 1 + \frac{2}{u_n - 1} + 1 - \frac{3}{4}(u_n + 1)$$

$$= \frac{(u_n + 3)(u_n + 1)}{4(u_n - 1)} = \left(\frac{u_n + 1}{u_n - 1}\right)\left(\frac{u_n + 3}{4}\right) \ge 0$$

ذلك لأن $-3 \le u_n \prec -1$ إذن $u_n + 3 \ge 0$ و $u_n + 1 \le 0$ وأيضا $u_n - 1 \le 0$

إذن $u_{n+1} + 1 - \frac{3}{4}(u_n + 1) \ge 0$ ومنه $\boxed{u_{n+1} + 1 \ge \frac{3}{4}(u_n + 1)}$.

ب) إستنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي **n** فإن : $u_n + 1 \ge -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$:

وجدنا سابقا أن : $u_{n+1} + 1 \ge \frac{3}{4}(u_n + 1)$ وهذا يعني $u_1 + 1 \ge \frac{3}{4}(u_0 + 1)$ و $u_2 + 1 \ge \frac{3}{4}(u_1 + 1)$ و $u_3 + 1 \ge \frac{3}{4}(u_2 + 1)$ و .... و $u_{n-1} + 1 \ge \frac{3}{4}(u_{n-2} + 1)$ $u_n + 1 \ge \frac{3}{4}(u_{n-1} + 1)$ وحسب الخاصية

$a \geq \frac{3}{4} b$ و $b \geq \frac{3}{4} c$ تعطي لنا $a \geq \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} c$ نجد $u_n + 1 \geq \underbrace{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{3}{4}}_{n\ fois} (u_0 + 1)$ أي

$\boxed{u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n}$ وهو المطلوب.

لنا $u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ووجدنا سابقا أن $-2 \leq u_n + 1 \prec 0$ أي $-2\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq u_n + 1 \prec 0$ وحسب

مبرهنة النهاية بالمقارنة أو بالحصر نجد $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[-2\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \leq \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + 1) \prec 0$ ومنه

$0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + 1) \prec 0$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + 1) = 0$ ومنه $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1}$ وهو المطلوب.

4) نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$:

* تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي **n** فإن: $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right] \leq (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \ldots + (u_n + 1) \prec 0$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي **n** : $u_n \prec -1$ أي $u_n + 1 \prec 0$ ومنه $u_0 + 1 \prec 0$ و $u_1 + 1 \prec 0$ و ...و

$u_n + 1 \prec 0$ و مجموع أعدا سالبة عدد سالب إذا $(u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \ldots + (u_n + 1) < 0$ .....(1)

ووجدنا سابقا أن $u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ أي $u_0 + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^0$ و $u_1 + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^1$ و ....و

$u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ بالجمع طرف إلى طرف نجد :

$$(u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \ldots + (u_n + 1) \geq -2\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$$

و $\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$ هو مجموع **n+1** حد لمتتالية هندسة حدها الأول **1** وأساسها $\frac{3}{4}$ فنجد

$\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)} = 4\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$ بالتعويض نجد

أي $(u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\geq -8\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$

$$(u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\geq 8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right] \quad \text{.....} \quad (2)$$

من **(1)** و **(2)** نستنتج أن $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq (u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\prec 0$ وهو المطلوب.

- لدينا $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq (u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\prec 0$ ومنه

$$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq u_0+u_1+u_2+...+u_n+\underbrace{1+1+...+1}_{n+1\ fois}\prec 0$$ أي

$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\leq S_n+n+1\prec 0$ ومنه $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]-n-1\leq S_n\prec -n-1$

وبإدخال النهاية نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]-n-1\right]\leq \lim\limits_{n\to+\infty}S_n\prec \lim\limits_{n\to+\infty}(-n-1)$ فنجد

$-\infty\leq \lim\limits_{n\to+\infty}S_n\prec -\infty$ ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\infty}$.

تصحيح التمرين الثاني:

1) تبيين أن النقط **O** ، **A** و **B** ليست في إستقامية:

$\overrightarrow{OA}(1;1;3)$ ، $\overrightarrow{OB}(1;0;2)$ نلاحظ أن $\frac{1}{1}\neq\frac{0}{1}\neq\frac{2}{3}$ إذن الشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ غير مرتبطين خطيا ومنه فالنقط **O** ، **A** و **B** ليست في إستقامية.

ب) $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (OAB) معناه: $\vec{n}.\overrightarrow{OA}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{OB}=0$:

$\vec{n}.\overrightarrow{OA}=2\times1+1\times1+(-1)\times3=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{OB}=2\times1+1\times0+(-1)\times2=0$ إذن $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (OAB) .

معادلة المستوي (OAB) تكتب من الشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث **a** و **b** و **c** هي إحداثيات الشعاع الناظمي.

ومنه نجد $2x+y-z+d=0$ وحيث النقطة **O** تنتمي إليه إذن نجد $2\times0+0-0+d=0$ ومنه **d=0**

اذن معادلة (OAB) هي $\boxed{2x+y-z=0}$.

2) (Δ) هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق: $(2x+2y+6z-11)^2+(2x+4z-5)^2=0$.

$(2x+2y+6z-11)^2+(2x+4z-5)^2=0$ معناه: $\begin{cases}2x+2y+6z-11=0\\ \text{و}\\ 2x+4z-5=0\end{cases}$

المستوي المحوري للقطعة $[OA]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $OM=AM$ أي

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2}$ ومنه

$x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2$ ومنه نجد $\boxed{2x+2y+6z-11=0}$

و المستوي المحوري للقطعة $[OB]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $OM=BM$ أي

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-2)^2}$ ومنه

$x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+y^2+(z-2)^2$ ومنه نجد $\boxed{2x+4z-5=0}$

وتقاطع هاذين المحورين هو حل للجملة : $\begin{cases}2x+2y+6z-11=0\\ 2x+4z-5=0\end{cases}$ والتي هي المجموعة (Δ) .

- تعيين تمثيل وسيطي للمجموعة (Δ) :

لنا $\begin{cases}2x+2y+6z-11=0\\ 2x+4z-5=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x+y+3z-\frac{11}{2}=0\\ x+2z-\frac{5}{2}=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}-2z+\frac{5}{2}+y+3z-\frac{11}{2}=0\\ x=-2z+\frac{5}{2}\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}y+z-3=0\\ x=-2z+\frac{5}{2}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}y=-z-3\\ x=-2z+\frac{5}{2}\end{cases}$ ومنه

$\begin{cases} y=-z-3 \\ x=-2(-z-3)+\frac{5}{2}=2z+6+\frac{5}{2}=2z+\frac{17}{2} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} y=-z-3 \\ x=2z+\frac{17}{2} \end{cases}$ بوضع **z=t** حيث $t\in\mathbb{R}$

نجد $\boxed{\begin{cases} x=2t+\frac{17}{2} \\ y=-t-3 \\ z=t \end{cases}}$ وهو التمثيل الوسيطي للمجموعة (Δ)

3) برهان صحة التكافؤ التالي: $[M\in(\Delta)]$ يكافيء $(OM=AM=BM)$:

* لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) ومنه فهي نقطة تنتمي إلى كل من المستويين المحورين للقطعتين $[OA]$ و $[OB]$ وحسب تعريف محور قطعة مستقيمة نجد : $\begin{cases} OM=AM \\ OM=BM \end{cases}$ إذن $(OM=AM=BM)$.

* وبطريقة عكسية نجد أيضا $(OM=AM=BM)$ معناه $(OM=AM)$ وهنا مجموعة النقط **M** هي نقاط من المستوي المحوري للقطعة $[OA]$ وكذلك $(OM=BM)$ ومجموعة النقط هي كذلك نقاط من المستوي المحوري للقطعة $[OB]$

إذن $(OM=AM=BM)$ معناه النقط **M** هي النقط المشتركة بين المستويين المحورين وهي المجموعة (Δ).

- بما أن مركز الدائرة المحيطة بالمثلث **OAB** تعريفا هي نقطة تقاطع محاوره ولدينا هنا محورين متوفرين وهما للقطعتين $[OA]$ و $[OB]$ إذن هي احد نقاط تقاطع هاذين المحورين أي هي نقطة من المجموعة (Δ) وهي أيضا تنتمي الى المستوي المحدد بهذا المثلث إذن هي أيضا نقطة من المستوي (OAB) الذي معادلته $\boxed{2x+y-z=0}$:

وعليه $\Omega\in(\Delta)$ ومنه: $\begin{cases} x_\Omega=2t+\frac{17}{2} \\ y_\Omega=-t-3 \\ z_\Omega=t \end{cases}$ **(1)**.....

وأيضا $\Omega\in(OAB)$ ومنه: $2x_\Omega+y_\Omega-z_\Omega=0$ **(2)**.....

بتعويض (1) في (2) نجد $2\left(2t+\frac{17}{2}\right)+(-t-3)-(t)=0$ ومنه $4t+17-t-3-t=0$ ومنه

نجد $\boxed{t=-2}$

بالتعويض في (1) نجد: $\begin{cases} x_\Omega=-4+\frac{17}{2}=\frac{9}{2} \\ y_\Omega=2-3=-1 \\ z_\Omega=-2 \end{cases}$ أي $\boxed{\Omega\left(\frac{9}{2};-1;-2\right)}$.

تصحيح التمرين الثالث:

I) حل المعادلة: $\left(z^2-2z+2\right)\left(z^2-2(\sin\theta)z+1\right)=0$.

$\left(z^2-2z+2\right)\left(z^2-2(\sin\theta)z+1\right)=0$ ومنه إما $z^2-2z+2=0$:

$\Delta=4-8=-4=4i^2=(2i)^2\rightarrow\boxed{\sqrt{\Delta}=2i}$ ومنه $z_1=\frac{2+2i}{2}=\boxed{1+i}$ و

$z_2=\frac{2-2i}{2}=\boxed{1-i}$.

أو : $z^2-2(\sin\theta)z+1=0$:

$$\Delta=4\sin^2\theta-4=4\left(\sin^2\theta-1\right)=4\left(-\cos^2\theta\right)=4i^2\cos^2\theta=(2i\cos\theta)^2$$

$$\rightarrow\boxed{\sqrt{\Delta}=2|\cos\theta|i}=\begin{cases} 2i\cos\theta:\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ -2i\cos\theta:\theta\in\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right] \end{cases}$$

وفي كلتا الحالتين المعادلة $z^2-2(\sin\theta)z+1=0$ تقبل حلين مترافقين هما:

$z_3=\frac{2\sin\theta+2i\cos\theta}{2}=\boxed{\sin\theta+i\cos\theta}$ و $z_3=\frac{2\sin\theta-2i\cos\theta}{2}=\boxed{\sin\theta-i\cos\theta}$

إذن من خلال ما تقدم نجد أن للمعادلة $\left(z^2-2z+2\right)\left(z^2-2(\sin\theta)z+1\right)=0$ أربع حلول وهي :

$\boxed{\{1+i;1-i;\sin\theta+i\cos\theta;\sin\theta-i\cos\theta\}}$.

II) 1) كتابة الأعداد على الشكل الأسي:

$$z_A=-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\pi}e^{i\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\left(\pi+\frac{5\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\left(\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)}=\boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$ ،

$$z_B=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\boxed{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$ ،

$$z_C=\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\boxed{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}$$ ، $z_D=\overline{z_C}=\boxed{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}$.

2) تبيين أن النقط C ، D و E تنتمي إلى دائرة وتعيين مركزها ونصف قطرها:

لنا $z_E=\frac{z_A}{z_B}\to|z_E|=\left|\frac{z_A}{z_B}\right|=\frac{|z_A|}{|z_B|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1\to\boxed{OE=1}$ وأيضا لنا

$|z_D|=|z_C|=1\to\boxed{OD=OC=1}$ إذن نجد : $\boxed{OE=OD=OC=1}$ وهذا يعني أن النقط C ، D و E تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها r=1.

3) S هو التشابه المباشر الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $2\sqrt{2}-2$:

B صورة C بالتشابه S معناه:

$$\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\to e^{-i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{\pi}{4}}=\left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\to e^{-i\frac{\pi}{2}}-1=\left(2-\sqrt{2}\right)\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\to -i-1=\left(2-\sqrt{2}\right)\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}-1-i\right)$$

$$\to -i-1=\left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}-\left(2-\sqrt{2}\right)(1+i)$$

$$\to \left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=-i-1+\left(2-\sqrt{2}\right)(1+i)$$

$$\to \left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\left(1-\sqrt{2}\right)(1+i)$$

$$\left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\left(\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\to e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=e^{i\frac{5\pi}{4}}\to\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{5\pi}{4}+2k\pi\to\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}-2k\pi=\boxed{-\frac{3\pi}{4}+2k'\pi}$$

4) $(z_D)^n = \left[e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^n = e^{in\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = \boxed{e^{-in\left(\frac{5\pi}{2}\right)}}$ ويكون تخيليا صرفا إذا كان

$\cos\left(-n\frac{5\pi}{2}\right)=0 \to -n\frac{5\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \to \boxed{-5n=1+2k} / k\in\mathbb{Z}$ أي يجب أن يكون **5n-**

فردي وبما أن 5 فردي إذن يجب أن يكون **n** فرديا أي $\boxed{n=2k'+1} / k'\in\mathbb{N}$.

تصحيح التمرين الرابع:

f الدالة المعرفة على $[0;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x+1-\frac{1}{\ln x}; x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\} \\ f(0)=1 \end{cases}$

1) أ) تبيين أن **f** مستمرة عند **0** بقيم أكبر:

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+1-\frac{1}{\ln x}\right)=0+1-\frac{1}{-\infty}=1=f(0)$ إذن **f** مستمرة عند **0**.

ب) $\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{h-\frac{1}{\ln h}}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}1-\frac{1}{h\ln h}=1-\frac{1}{0^-}=+\infty$

والتفسير الهندسي أن المنحني يقبل على يمين **0** نصف مماس عمودي على حامل محور الفواصل.

2) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{1}{\ln x}\right)=+\infty+1-\frac{1}{+\infty}=+\infty$ ،

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x+1-\frac{1}{\ln x}\right)=1+1-\frac{1}{0^+}=-\infty$ ،

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(x+1-\frac{1}{\ln x}\right)=1+1-\frac{1}{0^-}=+\infty$.

ب) إتجاه تغير **f** وجدول تغيراتها:

$f'(x)=1+\frac{1}{x[\ln x]^2}\succ 0$ إذن **f** متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
f'(x)	+	||	+
f(x)	1 ↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3) الدالة مكتوبة بالشكل $f(x)=ax+b+g(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$ إذن حسب الدرس فإذ المستقيم (Δ) دو المعادلة $y=x+1$ مفارب مائل بجوال $+\infty$.

4) الدالة f مستمرة على مجموعة تعريفها وبالتالي فهي مستمرة على $[0.49;0.5]$ و لنا $f(1.49)\approx -0.07$ و $f(1.5)\approx 0.03$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل على الأقل في هذا المجال وبما أن الدالة رتيبة تماما على هذا المجال فان هذا الحل وحيد وبالتالي فالمنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة w فاصلتها α في هذا المجال.

معادلة المماس عند هذه النقطة أي عند $(\alpha;0)$:

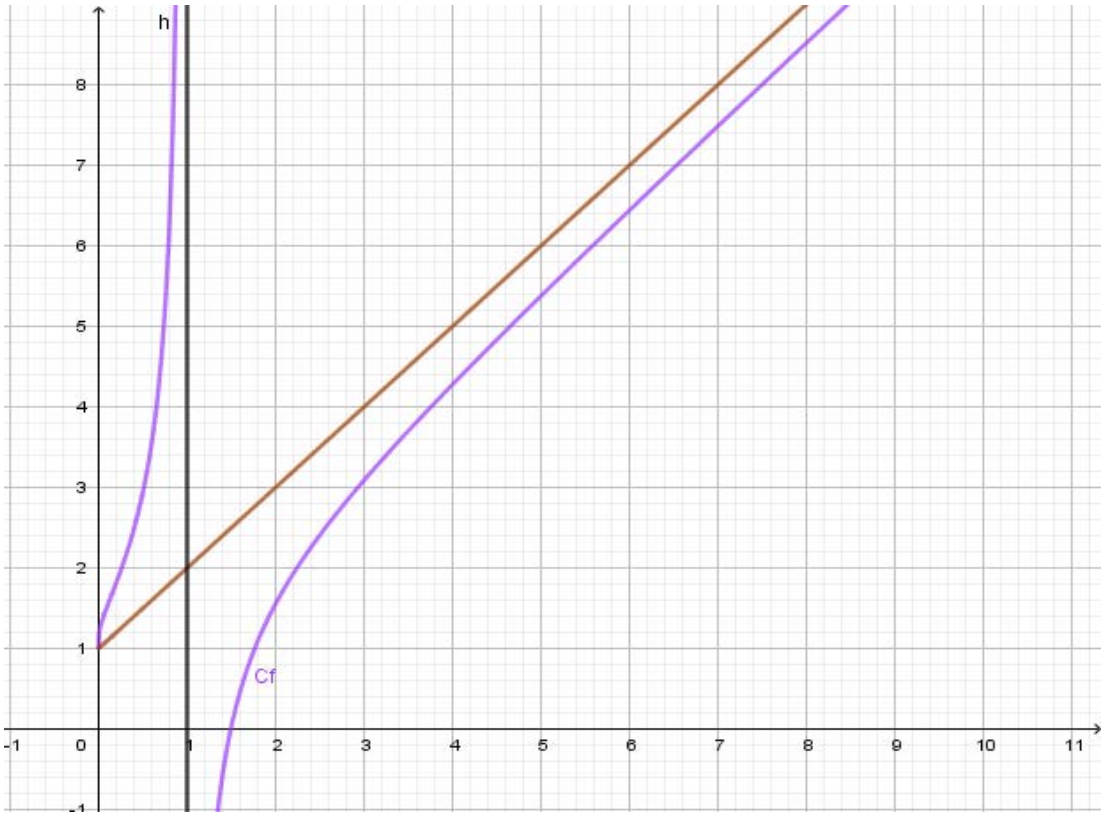
$$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)=\left(1+\frac{1}{\alpha[\ln\alpha]^2}\right)(x-\alpha)+f(\alpha)$$

وبما أن $f(\alpha)=0$ نجد بالتعويض في الدالة $\ln\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$ فاصبح المعادلة

$$y=\left(1+\frac{1}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^2}\right)(x-\alpha)\to y=\left(1+\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}\right)(x-\alpha)$$ أي

$$\boxed{y=\left(\alpha+3+\frac{1}{\alpha}\right)(x-\alpha)}$$.

5) رسم (Δ) و (C_f) :



6) أ) $h'(x) = -1 + \ln x + 1 = \boxed{\ln x}$ وهي موجبة على $[1;+\infty[$ وتنعدم عند قيمة واحدة فقط وبالتالي فالدالة **h** متزايدة تماما على هذا المجال.

إذن $h(1) = 0$ والدالة متزايدة وهذا يعني ان جميع قيمها موجبة إذن إشارتها هي +.

ب)

$$f(x) - x + \frac{1}{x\ln x} = x + 1 - \frac{1}{\ln x} - x + \frac{1}{x\ln x} = 1 - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{x\ln x} = \frac{x\ln x - x + 1}{x\ln x} = \boxed{\frac{h(x)}{x\ln x}}$$

وهو مقدار موجب تماما على المجال $]1;+\infty[$ إذن $f(x) - x + \frac{1}{x\ln x} \succ 0$

ومنه $\boxed{f(x) \succ x - \frac{1}{x\ln x}}$ .....(1)

ومن الرسم نستنتج أن المنحني يقع تحت المقارب في المجال $]1;+\infty[$ ومنه $\boxed{f(x) \prec x + 1}$ .....(2)

من (1) و (2) نجد $\boxed{x - \frac{1}{x\ln x} \prec f(x) \prec x + 1}$.

7) تبيين أن $\frac{1}{2}\left(e^2-\alpha^2\right)-\ln\left(\alpha+1\right)\prec A\prec\frac{1}{2}\left(e-\alpha\right)\left(e+\alpha+2\right)$:

وجدنا سابقا $x-\frac{1}{x\ln x}\prec f(x)\prec x+1$ والدالة موجبة تماما على المجال $[\alpha;e]$ إذن حسب خواص التكامل

نجد $\int_\alpha^e\left(x-\frac{1}{x\ln x}\right)dx\prec\int_\alpha^e f(x)dx\prec\int_\alpha^e\left(x+1\right)dx$ ومنه

$$\int_\alpha^e\left(x-\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)dx\prec\int_\alpha^e f(x)dx\prec\left[\frac{x^2}{2}+x+k\right]_\alpha^e$$ ومنه

$\left[\frac{x^2}{2}-\ln(\ln x)+k'\right]_\alpha^e\prec\int_\alpha^e f(x)dx\prec\left[\frac{x^2}{2}+x+k\right]_\alpha^e$. (توضيح: حيث $\ln x\succ 0$ على $[\alpha;e]$ و

$\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{\ln' x}{\ln x}\to\frac{u'(x)}{u(x)}\to\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\ln\left(u(x)\right)+k$ ومنه الدالة الأصلية للدالة $x\to\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$ هي

الدالة $x\to\ln\left(\ln x\right)$).

ومنه نجد

$$\left(\frac{e^2}{2}-\ln(\ln e)+k'\right)-\left(\frac{\alpha^2}{2}-\ln(\ln\alpha)+k'\right)\prec\int_\alpha^e f(x)dx\prec\left(\frac{e^2}{2}+e+k\right)-\left(\frac{\alpha^2}{2}+\alpha+k\right)$$

وجدنا سابقا $\ln\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$ ومنه نجد

$\frac{e^2-\alpha^2}{2}+\ln\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\prec\int_\alpha^e f(x)dx\prec\frac{\left(e-\alpha\right)\left(e+\alpha\right)}{2}+\left(e-\alpha\right)$ ومنه

$\frac{e^2-\alpha^2}{2}-\ln\left(\alpha+1\right)\prec\int_\alpha^e f(x)dx\prec\left(e-\alpha\right)\left[\frac{\left(e+\alpha\right)}{2}+1\right]$ وأخيرا نجد

$$\boxed{\frac{e^2-\alpha^2}{2}-\ln\left(\alpha+1\right)\prec\int_\alpha^e f(x)dx\prec\frac{1}{2}\left(e-\alpha\right)\left(e+\alpha+2\right)}$$

تصحيح الموضوع الثاني:

تصحيح التمرين الأول:

1) تعيين العددين α و β :

لنا $\begin{cases}\alpha+\beta=4035\\ \alpha-\beta=1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}2\alpha=4036\\ \beta=\alpha-1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\alpha=2018\\ \beta=2017\end{cases}$.

- تبيين أن $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما:

لنا $\frac{\alpha}{2}=\frac{2018}{2}=1009$ ولدينا $\alpha-\beta=1$ ومنه $2\frac{\alpha}{2}-\beta=1$ ومنه
$2(1009)+(-1)(2017)=1$ ومنه حسب مبرهنة بيزو نستنتج أن **1009** و **2017** أوليان فيما بينهما أي
$\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما .

2) تعيين كل الثنائيات الصحيحة (x,y) التي تحقق المعادلة : $1009x-2017y=1$ .....(1)

وجدنا سابقا $2(1009)+(-1)(2017)=1$ أي $(1009)(2)-(2017)(1)=1$ .....(2)

بالطرح نجد $1009(x-2)=2017(y-1)$

1009 يقسم $1009(x-2)$ فهو يقسم $2017(y-1)$ وبما أن 1009 أولي مع 2017 إذن حسب مبرهنة غوص نجد **1009** يقسم $y-1$ إذن يوجد عدد صحيح **k** حيث $y-1=1009k$ ومنه
$\boxed{y=1009k+1}$.

بالتعويض في المعادلة (1) نجد $1009x-2017(1009k+1)=1$ ومنه
$1009x=2035153k+2017+1$ أي $\boxed{x=2017k+2}$

إذن الثنائيات الصحيحة (x,y) التي تحقق المعادلة : $1009x-2017y=1$ هي
$(x,y)=(2017k+2,1009k+1)$ حيث **k** عدد صحيح.

3) تعيين الأعداد الصحيحة **a** التي تحقق : $\begin{cases}a\equiv 2019[2017]\\ a\equiv 2019[1009]\end{cases}$.

$\begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 2017p + 2019 \\ a = 1009q + 2019 \end{cases}$ ومنه $2017p + 2019 = 1009q + 2019$

ومنه $2017p = 1009q$ نجد 2017 يقسم 1009q ولكن 2017 أولي مع 1009 وعليه 2017 يقسم q

وهذا حسب مبرهنة غوص ومنه يوجد عدد صحيح k' حيث q=2017k' .

بالتعويض نجد $a = 1009(2017k') + 2019$ ومنه $\boxed{a = 2035153k' + 2019}$.

4) أ) دراسة تبعا لقيم n بواقي قسمة 7^n على 9:

$7^0 \equiv 1[9]$; $7^1 \equiv 7[9]$

$7^2 \equiv 4[9]$; $7^3 \equiv 1[9]$ ومنه فإن البواقي تلخص في الجدول التالي:

قيم n	3k	3k+1	3k+2
الباقي	1	7	4

ب) تعيين باقي قسمة العدد 42L على 9:

$$L = \underbrace{\overline{111...1}}_{2018\ fois} = 1\times 7^{2017} + 1\times 7^{2016} + 1\times 7^{2015} + ... + 1\times 7^0$$

لنا

$$= 7^0 + 7^1 + 7^2 + ... + 7^{2017} = 7^0 \frac{7^{2018} - 1}{7 - 1} = \boxed{\frac{7^{2018} - 1}{6}}$$

ومنه $42L = 42\frac{7^{2018} - 1}{6} = 7\left(7^{2018} - 1\right) = \boxed{7^{2019} - 7}$

لنا 2019=3*673 ومنه حسب الجدول السابق نجد $7^{2019} \equiv 1[9]$

ولنا $7 \equiv 7[9]$ بالطرح نجد $7^{2019} - 7 \equiv 1 - 7[9]$ ومنه $7^{2019} - 7 \equiv -6[9]$ ومنه حسب خواص الموافقة

نجد $\boxed{7^{2019} - 7 \equiv 3[9]}$ إذن باقي قسمة 42L على 9 هو 3.

تصحيح التمرين الثاني:

1) حساب إحتمال الحوادث التالية:

عندما نسحب 4 كريات في آن واحد نجد العدد الكلي للإمكانيات هو $C_9^4 = \frac{9!}{4! \times 5!} = \boxed{126}$.

A: "الحصول على أربع كريات من نفس اللون" يعني يجب أن تكون كلها حمراء ومنه $P(A)=\frac{C_5^4}{126}=\boxed{\frac{5}{126}}$.

B:" الحصول على كرية بيضاء على الأكثر" معناه إما واحدة بيضاء وثلاث من اللونين الآخرين أو الأربع كريات كلها مختلطة بين الأحمر والأخضر ومنه $P(B)=\frac{C_1^1\times C_8^3+C_8^4}{126}=\frac{56+70}{126}=\boxed{1}$.

C:" الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم" أي يجب أن نتحصل على $2;2;-1;-3$ ومنه

$$P(C)=\frac{C_4^2\times C_1^1\times C_1^1}{126}=\frac{6}{126}=\boxed{\frac{1}{21}}$$.

2)أ) X هو عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس : لدينا تسعة كريات من بينها 3 كريات خضراء ومنه عندما نسحب أربع كريان فإما يتبقى 3 خضراء أو 2 خضراء أو 1 خضراء أو 0 خضراء أي $X=\{0;1;2;3\}$.

إذن $P(X=0)=\frac{C_3^3\times C_6^1}{126}=\frac{6}{126}=\boxed{\frac{1}{21}}$ ، $P(X=1)=\frac{C_3^2\times C_6^2}{126}=\frac{45}{126}=\boxed{\frac{5}{14}}$

$P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_6^3}{126}=\frac{60}{126}=\boxed{\frac{10}{21}}$ ، $P(X=3)=\frac{C_6^4}{126}=\frac{15}{126}=\boxed{\frac{5}{42}}$

وقانون إحتماله معرف في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/21	5/14	10/21	5/42

ب) حساب الأمل الرياضياتي E(X):

$$E(X)=0\times\frac{1}{21}+1\times\frac{5}{14}+2\times\frac{10}{21}+3\times\frac{5}{42}$$
$$=\frac{5}{14}+\frac{20}{21}+\frac{5}{14}=\frac{10}{14}+\frac{20}{21}=\frac{5}{7}+\frac{20}{21}=\boxed{\frac{35}{21}}$$

ج) حساب إحتمال الحادثة $X^2-X>0$:

$X^2-X\succ 0$ معناه $X(X-1)\succ 0$ أي يجب أن يكون $X=\{2;3\}$ ومنه

$$P(X^2-X\succ 0)=P(X=2)+P(X=3)$$
$$=\frac{10}{21}+\frac{5}{42}=\boxed{\frac{25}{42}}$$

تصحيح التمرين الثالث:

$$z^2+(m+1)z+(2m-1)=0.....(E)$$

1) تعيين قيم العدد الحقيقي m حتى تقبل المعادلة (E) حلين غير حقيقيين:

تقبل المعادلة (E) حلين غير حقيقيين إذا وفقط إذا كان مميزها سالب تماما:

$$\Delta=(m+1)^2-4(2m-1)=m^2+2m+1-8m+4=\boxed{m^2-6m+5}$$

ويكون دلتا سالب تماما أي عكس إشارة معامل m^2 إذا كان مميزه موجب وقيم m تقع داخل مجال الجذرين :

$$\Delta_1=(-6)^2-4\times5=36-20=16\succ0$$

وعليه عبارة المميز التي هي كثير حدود من الدرجة الثانية مميزه موجب تماما فهو يقبل جذرين هما :

$$m_2=\frac{6-4}{2}=1 \text{ و } m_1=\frac{6+4}{2}=5$$

إذن يكون المميز سالبا تماما إذا كان $\boxed{m\in]1;5[}$.

2) حل المعادلة (E) بوضع m=3: نجد $\Delta=3^2-6\times3+5=9-18+5=-4\rightarrow\sqrt{\Delta}=2i$ ومنه

$z_1=\frac{-4+2i}{2}=\boxed{-2+i}$ ، $z_2=\frac{-4-2i}{2}=\boxed{-2-i}$.

3) $z_A=-2+i$ ، $z_B=-2-i$ ، $z_C=\alpha$ ، $z_E=\sqrt{3}$ حيث α عدد حقيقي و $\alpha\succ-2$.

$AB=|z_B-z_A|=|-2-i+2-i|=|-2i|=2$ ، $AC=|z_C-z_A|=|\alpha+2-i|=\sqrt{(\alpha+2)^2+1}$ ،

$BC=|z_C-z_B|=|\alpha+2+i|=\sqrt{(\alpha+2)^2+1}$.

ABC مثلث متقايس الأضلاع معناه $\sqrt{(\alpha+2)^2+1}=2$ ومنه $(\alpha+2)^2+1=4$ ومنه

$(\alpha+2)^2-3=0$ أي $(\alpha+2+\sqrt{3})(\alpha+2-\sqrt{3})=0$ ومنه إما $\alpha=-2+\sqrt{3}$ أو

$\alpha=-2-\sqrt{3}$ ولكن $\alpha=-2-\sqrt{3}\prec-2$ وهذا مرفوض حسب الشرط ولكن $\alpha=-2+\sqrt{3}\succ-2$

وهو مقبول إذن يكون المثلث ABC متقايس الأضلاع إذا كان $\boxed{\alpha=-2+\sqrt{3}}$.

4) نضع $z_C=-2+\sqrt{3}$: $\frac{z_C-z_E}{z_A-z_B}=\frac{-2+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-2+i+2+i}=\frac{-2}{2i}=\frac{-1}{i}=i=\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}}}$

أ) $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{EC}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$ أي المستقيمان (BA) و (EC) متعامدان.

ب) لنا المثلث ABC متقايس الأضلاع أي AB=AC=BC هذا من جهة ومن جهة أخرى وجدنا $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = i$

أي $\left|\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}\right| = |i| = 1$ أي AB=CE إذن نستنتج أن AC=BC=EC أي ان النقط A ، B و E تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة C ونصف قطرها r=CE=AB=2 .

5) حساب a: العبارة المركبة لهذا الدوران هي $z' = az + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$

بحول B إلى C معناه : $z_C = az_B + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ ومنه

$-2+\sqrt{3} = a(-2-i) + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ ومنه

$-4+2\sqrt{3} = -4a - 2ai + \sqrt{3} - 6 + 2\sqrt{3}i - i$ ومنه $a(4+2i) = -\sqrt{3} - 2 + i\left(2\sqrt{3}-1\right)$

ومنه

$$a = \frac{-\sqrt{3}-2+i\left(2\sqrt{3}-1\right)}{4+2i} = \frac{\left[-\sqrt{3}-2+i\left(2\sqrt{3}-1\right)\right](4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}i-8+4i+8\sqrt{3}i-4i+4\sqrt{3}-2}{16+4} = \frac{-10+10\sqrt{3}i}{20} = \boxed{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

زاوية هذا الدوران هي عمدة للعدد a ومنه

$$\theta = \arg a \to \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \to \theta = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \boxed{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi} \,/\, k \in \mathbb{Z}$$

ب) لتكن النقطة G هي مركز هذا الدوران: تعريفا هذه النقطة هي النقطة الصامدة بواسطة هذا الدوران أي

$$z_G = \frac{b}{1-a} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\sqrt{3}-6+i\left(2\sqrt{3}-1\right)}{3-\sqrt{3}i} = \frac{\left[\sqrt{3}-6+i\left(2\sqrt{3}-1\right)\right]\left(3+\sqrt{3}i\right)}{\left(3-\sqrt{3}i\right)\left(3+\sqrt{3}i\right)}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-18+6\sqrt{3}i-3i+3i-6\sqrt{3}i-6+\sqrt{3}}{12} = \frac{4\sqrt{3}-24}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{3}-6}{3}}$$

نحن نعلم أن لاحقة مركز ثقل مثلث متقايس الأضلاع ABC هي $z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3} = \frac{-2+i-2-i-2+\sqrt{3}}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}-6}{3}}$.

إذن نستنتج أن مركز هذا الدوران هو فعلا مركز ثقل المثلث ABC .

تصحيح التمرين الرابع:

I) 1) تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإن: $g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

لنا $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$ ومنه

$$g'(x)=\left[(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1\right]'=(1+x+x^2)'e^{-\frac{1}{x}}+\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'(1+x+x^2)$$

$$=(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}(1+x+x^2)=\frac{x^2(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}(1+x+x^2)}{x^2}$$

$$=\frac{x^2+2x^3+1+x+x^2}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{2x^3+2x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{2x^2(x+1)+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

$$=\boxed{\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}$$

- إستنتاج إتجاه تغير g: وجدنا $g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\left[\frac{(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right](x+1)$

بما أنه مهما كان x من $]0;+\infty[$ فإن $\frac{(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\succ 0$ وأيضا x+1 موجب تماما على هذا المجال إذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن $g'(x)\succ 0$ أي الدالة g متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

2) $g(1)=3e^{-1}-1=\frac{3}{e}-1\succ 0$ و

$$g(0,9)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1=2,71\times 0,32-1\approx -0,13\prec 0$$

إذن بما أن الدالة g مستمرة على المجال $]0,9;1[$ و $g(0,9)\times g(1)\prec 0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن للمعادلة g(x)=0 حل على الأقل في المجال $]0,9;1[$ وبما أن الدالة g متزايدة تماما على هذا المجال فإن هذا الحل وحيد وهو α .

إستنتاج إشارة g(x): نستنتج إن g(x) سالب تماما في المجال $]0;\alpha[$ وموجب تماما غي المجال $]\alpha;+\infty[$.

II) $f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=+\infty+1\times e^{-\infty}=\boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=0+(+\infty)\times e^{0}=\boxed{+\infty}$

ب) تبيين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

لنا $f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$ ومنه

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right)'=-\frac{1}{x^2}+e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{-1+x^2e^{-\frac{1}{x}}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}=\frac{(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1}{x^2}=\boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

ومنه نستنتج أن إشارة f'(x) من إشارة g(x) أي في المجال $]0;\alpha[$ تكون المشتقة سالبة تماما أي الدالة f متناقصة تماما وفي المجال $]\alpha;+\infty[$ تكون الدالة f متزايدة تماما.

جدول التغيرات:

x	0		α		1		$+\infty$
f'(x)	‖	-	0		+		
f(x)	‖ $+\infty$	↘	f(α)	↗		↗	$+\infty$

2) تبيين أن: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$.

بوضع $t=-\frac{1}{x}$ ومنه $x=-\frac{1}{t}$ ولما $x\to+\infty$ فإن $t\to 0$ فنجد:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{t}e^{t}+\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{-(e^t-1)}{t}\right)=-\lim_{t\to 0}\left(\frac{e^t-1}{t}\right)=-1$$

Y=x مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$ معناه: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}+\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)\right]=0+1-1=0$$

أي أن المستقيم ذو المعادلة **y=x** مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

3) $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ) $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)=0-1+1=0$.

- **دراسة إتجاه تغير الدالة h:**

$$h'(x)=\left(\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)$$

إذن إشارة **h'(x)** من نفس إشارة $e^{-\frac{1}{x}}-1$

h'(x)<0 معناه $e^{-\frac{1}{x}}-1\prec 0$ أي $e^{-\frac{1}{x}}\prec 1\to e^{-\frac{1}{x}}\prec e^{0}\to -\frac{1}{x}\prec 0$ إذن الدالة **h** متناقصة تماما

$$\to x\succ 0\to \boxed{x\in\left]0;+\infty\right[}$$

على المجال المعطى أي على مجموعة تعريفها.

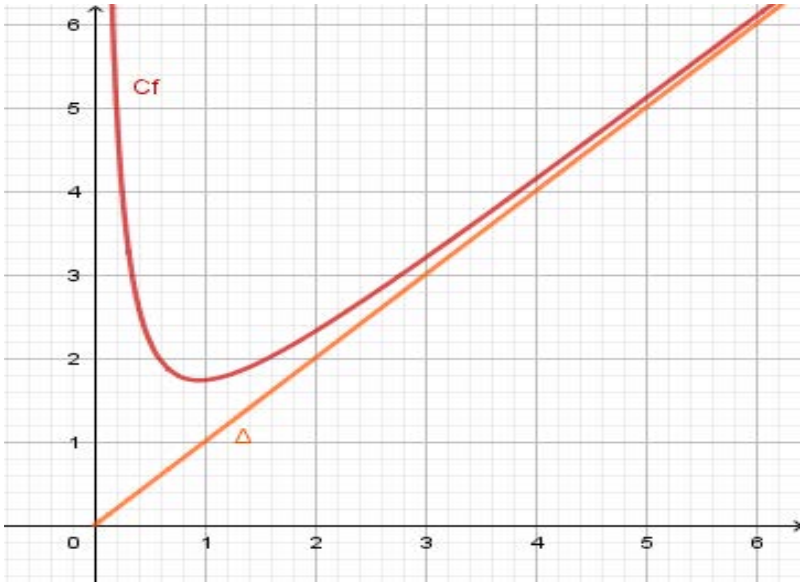
الدالة **f** متناقصة تماما على مجموعة تعريفها ولنا $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$ وعليه نستنتج أن المنحني الممثل لها يقع فوق محور الفواصل بشكل تام ومنه مهما كان **x** من $\left]0;+\infty\right[$ فإن **h(x)>0** .

ب)

$$f(x)-x=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x=\frac{1}{x}-x+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1-x^2}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}=\frac{(1-x)(1+x)}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$
$$=(1+x)\left[\frac{1-x}{x}+e^{-\frac{1}{x}}\right]=(1+x)\left[\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right]=\boxed{(1+x)h(x)}$$

نستنتج أن $f(x)-x\succ 0$ إذن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

4) رسم (Δ) و (C_f) :



5) أ) كتابة u_n بدلالة n:

$$u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}\left[\frac{1}{\frac{1}{n}} + \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{\frac{1}{n}}}\right] - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1}\left[n + \left(\frac{n+1}{n}\right)e^{-n}\right] - \frac{n^2}{n+1}$$

$$= \frac{n^2}{n+1} + e^{-n} - \frac{n^2}{n+1}$$

$$= \boxed{e^{-n}}$$

- تبيين أن (u_n) متتالية هندسية وتعيين أساسها q و حدها الأول u_1 :

لنا $u_n = e^{-n}$ ومنه $u_{n+1} = e^{-n-1} = e^{-n} \times e^{-1} = \frac{1}{e}e^{-n} = \boxed{\frac{1}{e}u_n}$ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{1}{e}}$ و حدها الأول $u_1 = e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$.

- حساب بدلالة n المجموع S_n :

لنا $u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$ ومنه $\boxed{\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)=u_n+\frac{n^2}{n+1}}$

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(u_1+\frac{1^2}{1+1}-\frac{1}{1+1}\right)+\left(u_2+\frac{2^2}{2+1}-\frac{1}{2+1}\right)+\left(u_3+\frac{3^2}{3+1}-\frac{1}{3+1}\right)+\ldots+\left(u_n+\frac{n^2}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(u_1+\frac{1^2-1}{1+1}\right)+\left(u_2+\frac{2^2-1}{2+1}\right)+\left(u_3+\frac{3^2-1}{3+1}\right)+\ldots+\left(u_n+\frac{n^2-1}{n+1}\right)$$

$$=\left(u_1+\frac{(1-1)(1+1)}{1+1}\right)+\left(u_2+\frac{(2-1)(2+1)}{2+1}\right)+\left(u_3+\frac{(3-1)(3+1)}{3+1}\right)+\ldots+\left(u_n+\frac{(n-1)(n+1)}{n+1}\right)$$

$$=\left(u_1+(1-1)\right)+\left(u_2+(2-1)\right)+\left(u_3+(3-1)\right)+\ldots+\left(u_n+(n-1)\right)$$

$$=(u_1+0)+(u_2+1)+(u_3+2)+\ldots+\left(u_n+(n-1)\right)$$

$$=(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n)+\left(1+2+3+\ldots+(n-1)\right)$$

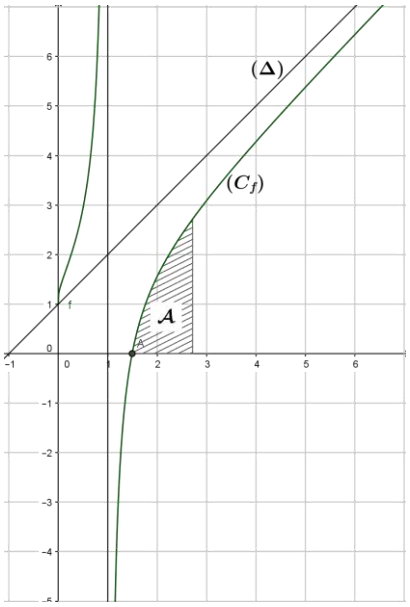
$$=\left(\frac{1}{e}\times\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\frac{1}{e}}\right)+\frac{n-1}{2}(1+n-1)=\left(\frac{1}{e}\times\frac{1-\frac{1}{e^n}}{\frac{e-1}{e}}\right)+\frac{n(n-1)}{2}=\left(\frac{1}{e}\times\frac{\frac{e^n-1}{e^n}}{\frac{e-1}{e}}\right)+\frac{n(n-1)}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{e}\times\frac{e^n-1}{e^n}\times\frac{e}{e-1}\right)+\frac{n(n-1)}{2}=\left(\frac{e^n-1}{(e-1)e^n}\right)+\frac{n(n-1)}{2}=\boxed{\frac{1-e^{-n}}{e-1}+\frac{n(n-1)}{2}}$$

الأستاذ: جمال بورنان

عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول:(04 نقاط) **1)** تمثيل الحدود	01	1.75
ـ التخمين : (u_n) المتتالية متزايدة تماما ومتقاربة نحو (-1)	0.75	
2) البرهان أنّ $-3 \leqslant u_n < -1$	01	01
3) أ/ تبيان أنّ $u_{n+1}+1 \geqslant \frac{3}{4}(u_n+1)$.	0.25	0.75
ب/ استنتاج أنّ $u_n+1 \geqslant -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$	0.25	
ـ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$	0.25	
4) ـ اثبات أنّ $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right] \leqslant (u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1) < 0$	0,25	0.5
ـ مما سبق نجد $S_n < -n-1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$	0.25	
التمرين الثاني: (04 نقاط) 1) أ) $\overrightarrow{OA}(1;1;3)$ ، $\overrightarrow{OB}(1;0;2)$ لدينا $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$ إذن $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ غير مرتبطان خطيا. ب) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ يعني $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (OAB) $(OAB): 2x+y-z=0$	01 0.75 0.75	2.5
2) - $M \in (\Delta)$ يكافئ $\begin{cases} 2x+2y+6z-11=0 \\ 2x+4z-5=0 \end{cases}$ $(p_1): 2x+4z-5=0$ المستوي المحوري لـ $[OB]$ $(p_2): 2x+2y+6z-11=0$ المستوي المحوري لـ $[OA]$ ومنه $(\Delta)=(p_1)\cap(p_2)$	0,5	01
ـ التمثيل الوسيطي $(\Delta): \begin{cases} x=\frac{5}{2}-2t \\ y=3-t \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$	0,5	

3) – $M\in(\Delta)$ يكافئ : $M\in(P_1)$ و $M\in(P_2)$ يكافئ : $OM=BM$ و $OM=AM$. يكافئ : $OM=BM=AM$ – Ω مركز الدائرة (C) يكافئ ($\Omega\in(OAB)$ و $\Omega A=\Omega B=\Omega O$) يكافئ ($\Omega\in(OAB)$ و $\Omega\in(\Delta)$) $\Omega\left(-\frac{1}{6};\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right)$.	0.25 0.25	0, 5
التمرين الثالث (05 نقاط): **I.** مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{1+i\,;1-i\,;\sin\theta+i\cos\theta\,;\sin\theta-i\cos\theta\}$	1 ,5	1 ,5
II. 1) $z_A=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ ؛ $z_B=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ؛ $z_C=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ ؛ $z_D=e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$	0,5 0,25 0,25 0,25	1,25
2) $z_E=e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\lvert z_c\rvert=\lvert z_D\rvert=\lvert z_E\rvert=1$ أي النقط C ، D و E تنتمي إلى الدائرة التي مركزها مبدأ المعلم O و طول نصف قطرها 1 .	0,5 0.75 0.25	1 ,5
3) $z_B-z_A=(2\sqrt{2}-2)\,e^{i\frac{\pi}{4}}(z_C-z_A)$ إذن $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=e^{i\frac{5\pi}{4}}$ و منه $\theta=\frac{-3\pi}{4}$	0,5	0,5
4) $\frac{3\pi}{4}n=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي $n\equiv2[4]$ و منه $n=4k+2$; $k\in\mathbb{Z}$	0,25	0,25
التمرين الرابع:(07 نقاط): 1) أ/ f مستمرة عند 0 من اليمين.	0,25	0.75
ب/ $\lim\limits_{h\overset{>}{\to}0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=+\infty$ و منه (C_f) يقبل نصف مماس عمودي.	0,5	
2) أ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=-\infty$	0,75	2,5
ب/ $f'(x)=1+\frac{1}{x(\ln x)^2}$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $]0;1[$ وعلى $]1;+\infty[$	0,5 0,5	

	0,75	x: 0 ‖ 1 ‖ $+\infty$ $f'(x)$: $+$ ‖ $+$ $f(x)$: $0 \nearrow +\infty$ ‖ $-\infty \nearrow +\infty$
0.75	0,25	3) $y=x+1$ هي معادلة للمستقيم (Δ) المقارب المائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$
	0,5	- الوضع النسبي : في المجال $]0;1[$ يكون المنحني (C_f) أعلى (Δ) و في المجال $]1;+\infty[$ يكون المنحني (C_f) أسفل (Δ)
01	0,5	4) - $f(\alpha)=0$ حيث $1.49<\alpha<1.5$ (مبرهنة القيم المتوسطة)
	0,5	- معادلة المماس في النقطة ω : $y=\left(\alpha+3+\frac{1}{\alpha}\right)(x-\alpha)$
0.75	0,75	5) 
01	0,5	6) أ/ $h'(x)=\ln x$ و منه h متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ و $h(1)=0$ اذن $h(x)\geq 0$
	0,25	ب/ $f(x)-x+\frac{1}{x\ln x}=\frac{h(x)}{x\ln x}$
	0,25	- استنتاج أنّ: $x-\frac{1}{x\ln x}<f(x)<x+1$
0,25	0,25	7) لدينا: $\int_{\alpha}^{e}(x-\frac{1}{x\ln x})dx<\mathcal{A}<\int_{\alpha}^{e}(x+1)dx$ و منه : $\frac{1}{2}(e^2-\alpha^2)-\ln(\alpha+1)<\mathcal{A}<\frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)$

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول: (04 نقاط) 1- $\beta=2017$ و $\alpha=2018$ ..... $p\gcd(\beta,\frac{\alpha}{2})=1$	2x0.5 0.5	1.5
2- $(x,y)=(2017k+2,1009k+1)/k\in\square$	2x0.5	1
3- $a=2035153k+2019$ مع $k\in\square$	0.5	0.5
4- أ. دور بواقي القسمة هو 3 و البواقي هي 1،7،4 ..... ب. $42L=7^{2019}-7$، ـ باقي القسمة هو 3.....	0.75 0.25	1
التمرين الثاني: (04 نقاط) 1- $p(A)=\frac{5}{126}$ ، $p(B)=1$ ، $p(C)=\frac{8}{126}$	0.25x3	0.75
2- أ) $X\in\{0,1,2,3\}$ ..... قانون احتمال ..... $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} X_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p(X_i) & \frac{6}{126} & \frac{45}{126} & \frac{60}{126} & \frac{15}{126} \end{array}$ ب) $E(X)=\frac{210}{126}=\frac{5}{3}$ ..... جـ) $p(X^2-X>0)=\frac{75}{126}=\frac{25}{42}$	0.5 4x0.5 0.5 0.25	3.25
التمرين الثالث: (05 نقاط) 1) $m\in]1,5[$	0.5	0.5
2) $s=\{-2+i,-2-i\}$	2x0.5	1
3) ـ $\alpha=-2+\sqrt{3}$	0.5	0.5
4) كتابة العدد $\frac{z_C-z_E}{z_A-z_B}=e^{i\frac{\pi}{2}}$. أ) $(AB)\perp(EC)$ ب) $CA=CB=CE$ (Γ).دائرة مركزها C و نصف قطرها 2	0.5 0.75 0.25	1.5

5) أ) $a=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، وزاويته $\frac{2\pi}{3}$. ب) لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC هي $-2+\frac{\sqrt{3}}{3}$ و بما ان $r(G)=G$ اذن G مركز الدوران	0.5x2 0.5	1.5
التمرين الرابع (07 نقاط): I) 1) لدينا $g'(x)=\frac{(2x^3+2x^2+x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$. - بيان أنّ: $g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$. - اتجاه تغير : g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.	0.5 0.25	0.75
2) المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $0,9<\alpha<1$. - **اشارة** $g(x)$	0.5 0.5	1
II) 1)أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$. ب) اثبات أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ - استنتاج اتجاه التغير - جدول التغيرات	0.25x2 0.75 0.25 0.25	1.75
2) تبيان أن : $\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{t\to+\infty}-\frac{e^t-1}{t}=-1$ - استنتاج أن $y=x$ معادلة للمستقيم المقارب المائل لـ (C_f)	0.5 0.25	0.75
3) أ) $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$ - $h'(x)=\frac{1}{x^2}\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)$. h متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ - اذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $h(x)>0$	0.25 0.25 0.25	0.75
ب) التحقق أن : $f(x)-x=(1+x)h(x)$ - استنتاج الوضع النسبي : (C_f) فوق (Δ)	0.25 0.25	0.5
4) الرسم (Δ) و (C_f)	0.75	0.75

5) أ) $u_n = \mathrm{e}^{-n}$ ، (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{\mathrm{e}}$ و $u_1 = \frac{1}{\mathrm{e}}$ ب) لدينا: $\frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = u_n + (n-1)$ ومنه $s_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + (0 + 1 + \cdots + (n-1))$ أي $s_n = \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}-1} + \frac{n}{2}(n-1)$	0.5 0.25	0.75