الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2019

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5)

التمرين الأول:(04 نقاط)

1) حل المعادلة $505x-673y=1.....(E)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

(لاحظ أنّ: $2019=3\times 673$ و $2020=4\times 505$)

2) بيّن أنّه من أجل كلّ ثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإنّ: x و y من نفس الإشارة.

3) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=u_n+505 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0=4 \\ v_{n+1}=v_n+673 \end{cases}$

– اكتب u_α بدلالة α ثم اكتب v_β بدلالة β حيث α و β عددان طبيعيان.

4) أ) عيّن الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم بيّن أنّ هذه الحدود المشتركة تشكّل متتالية حسابية (w_n) يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $X_n=\frac{1}{505}(w_n-2023)$

احسب بدلالة n الجداء $p=X_1.X_2.....X_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1;0;-1)$ ، $B(1;-2;0)$ و $C(1;2;3)$

1) بيّن أنّ المثلث ABC قائم في A.

2) اكتب معادلة للمستوي (Q) الذي يشمل A و $\overrightarrow{AC}$ شعاع ناظمي له.

3) m وسيط حقيقي و (P_m) مستو حيث: $(m-1)x+2y-z-m=0$ معادلة له.

أ) أثبت أنّه عندما يتغير m في $\mathbb{R}$ فإنّ المستوي (P_m) يحوي مستقيما ثابتا (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

– تحقّق أنّ A و C نقطتان من المستقيم (Δ).

ب) تحقّق أنّه مهما كان m من $\mathbb{R}$ فإنّ المستوي (P_m) يعامد المستوي (Q).

4) لتكن $d(m)$ المسافة بين النقطة B و المستوي (P_m).

أ) أثبت أنّ: $d(m)=\dfrac{5}{\sqrt{m^2-2m+6}}$ ثم عيّن قيمة m التي تكون من أجلها $d(m)$ أعظمية واحسبها.

ب) استنتج أنّه إذا كانت $d(m)$ أعظمية فإن النقطة A هي المسقط العمودي للنقطة B على (P_m).

التمرين الثالث: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D

حيث: $z_A=1+i\sqrt{2}$ ، $z_B=i$ ، $z_C=\overline{z_A}$ ، $z_D=\overline{z_B}$ و $z_E=1$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2+1)(z^2-2z+3)=0$

2) **أ)** احسب كلاّ من $|z_A-1|$ ، $|z_B-1|$ و $|z_C-z_E|$ ثم تحقّق أنّ النقط الأربعة A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدّائرة التي يطلب تعيين مركزها و طول نصف قطرها.

ب) بيّن أنّ: $z_B-z_E=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$ ثم استنتج أنّ B هي صورة A بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة.

- ما طبيعة المثلّث ABE ؟

3) عيّن لاحقتي الشّعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AE}$ محدّدا طبيعة الرباعي $ABDE$.

4) $\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ شعاعان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 .

أ) برهن أنّ: ($\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ متعامدان) يكافئ ($z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}.z_2=0$).

ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $(z-z_A)(\overline{z}-z_D)+(z-z_B)(\overline{z}-z_C)=0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x \ , x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $3\ cm$

1) برهن أنّ:

- إذا كان: $x>1$ فإن: $1-x-2x\ln x<0$
- إذا كان: $0<x<1$ فإن: $1-x-2x\ln x>0$

2) **أ)** أثبت أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين ثم اكتب معادلة لنصف المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ : (Δ) و (C_f).

3) **أ)** احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4) أ) اكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) الموازي لـ (Δ).

ب) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $[1;+\infty[$ حلا وحيدا α ثم تحقّق أن: $1,76<\alpha<1,77$.

جـ) اكتب معادلة للمستقيم (d) الذي يوازي (Δ) ويشمل النقطة ذات الإحداثيين $(\alpha;0)$.

- ارسم كلا من (T) ، (Δ) و (d) ثمّ المنحنى (C_f) على المجال $[0;\alpha]$.

5) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $x^2\ln x+m=0$ في المجال $[0;\alpha]$.

6) λ عدد حقيقي حيث: $0<\lambda<1$ ، نعتبر: $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}-x^2\ln x\,dx$

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب $A(\lambda)$ بدلالة λ.

ب) احسب $\lim\limits_{\lambda \xrightarrow{>} 0} A(\lambda)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع على صفحتين (02) (من الصفحة 4 من 5 إلى الصفحة 5 من 5)

التمرين الأول: (04 نقاط)

صندوقان غير شفافين U_1 و U_2 ، يحتوي الصندوق U_1 على 4 كريات حمراء و 3 كريات سوداء ويحتوي الصندوق U_2 على 3 كريات حمراء و كريتين سوداوين (الكريات كلها متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس)

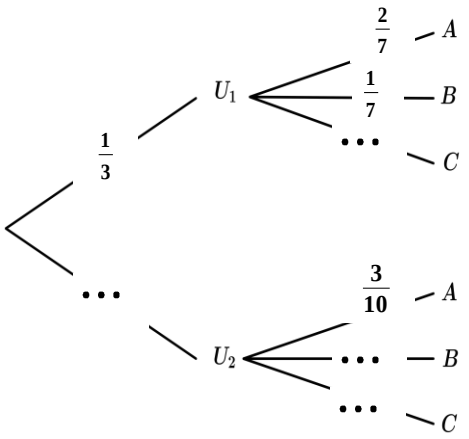
نرمي نردا غير مزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6.

إذا ظهر الرقمان 2 أو 4 نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_1

وفي باقي الحالات نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_2.

نعتبر الأحداث A ، B و C المعرفة بـ : A :"سحب كريتين حمراوين"

B : "سحب كريتين سوداوين" و C:"سحب كريتين من لونين مختلفين"



1) أنقل، وأكمل شجرة الاحتمالات.

2) أُحسب احتمالات الأحداث A ، B و C.

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

3) أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

4) أُحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية حدودها موجبة معرفة بحدها الأول u_1 حيث $u_1 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n،

$u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$.

1) أ) تحقّق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$

ب) استنتج كتابة الحد العام u_n بدلالة n

2) تحقق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n = n(n-2)+1$.

3) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها: $n-2$ يقسم $n-5$.

4) أ) من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ، بيّن أنّ: $PGCD(n-2\,;u_n) = 1$.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) نضع من أجل كل عدد مركب z ، $P(z) = z^4 - 6z^3 + 29z^2 - 24z + 100$

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد مركب z، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$، ثم استنتج أنّه إذا كان z حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فإنّ $\overline{z}$ حل لها.

ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$ علما أنّها تقبل حلا تخيليا صرفا.

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A، B، M و M' التي لاحقاتها على الترتيب: $2i$ ، $3-4i$، z و z' حيث: $z'=\dfrac{-i\,z+4+3i}{z-2i}$ مع $z\neq 2i$.

ولتكن I مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1)\}$ و J مرجح الجملة $\{(A;-2),(B;1)\}$

أ) عيّن اللاحقتين z_I و z_J للنقطتين I و J على الترتيب.

ب) لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $|z'|=2$.

بيّن أن (النقطة M من (E)) يكافئ $(\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{JM}=0)$، ثمّ عيّن (E) وأنشئها.

جـ) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $\arg(z')=2k\pi$ حيث k عدد صحيح.

تحقّق أنّ النقطة D ذات اللاحقة $\frac{9}{2}-\frac{5}{2}i$ تنتمي إلى (Γ)، ثمّ عيّن وأنشئ (Γ).

3) عيّن الشكل الجبري لِلاحقة النقطة G تقاطع المجموعتين (E) و (Γ).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathcal{C}_k)$ التمثيل البياني للدالة f_k في المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) بيّن أنّ كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما.

2) احسب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ وعند $+\infty$. (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k).

3) أ) احسب $f_k'(x)$، ثم حدّد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغير الدالة f_k.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما.

4) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathcal{C}_k)$ و $(\mathcal{C}_{k+1})$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) شكّل جدول تغيرات الدالة f، ثم أرسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلّين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث: $-1,28<\alpha<-1,27$.

ب) عيّن قيّم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا.

3) g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x+1)e^{-2x}$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ ثمّ استنتج دالة أصلية لِـ g على $\mathbb{R}$.

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للإمتحانات و المسابقات

تصحيح مقترح لبكالوريا 2019 — شعبة : رياضيات

التَصْحِيحْ المفصّل للبكالُوريَا الرَّسمية دَورة : جوان 2019 — الموضوع 01

حل التمرين الأول (04 نقاط) (حساب + متتاليات) — التنقيط

1) حل المعادلة (E) : ----------

نلاحظ أنّ $(4;3)$ هي حل خاص للمعادلة (E) ، لدينا : $\begin{cases} 505x-673y=1 \ldots\ldots(1) \\ 505(4)-673(3)=1 \ldots\ldots(2) \end{cases}$ بالطرح (2) من (1) نجد :

$505(x-4)=673(y-3)$ ، بما أنّ 505 و 673 أوليان فيما بينهما يمكن استعمال مبرهنة غوص :

673 يقسم $505(x-4)$ و 673 أولي مع 505 إذن 673 يقسم $(x-4)$ أي : $x-4=673k$ أي : $x=673k+4$

و بالتعويض في (3) نجد : $y=505k+3$ و منه : $S=\{(673k+4;505k+3)\}$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

2) بيان أنّ x و y من نفس الإشارة : ----------

لدينا : $x\times y=(673k+4)(505k+3)$ أي : $x\times y=339865k^2+4039k+12$ ، نحسب Δ_k نجد : $\Delta_k=1$

و منه المعادلة $339865k^2+4039k+12=0$ لا تقبل حلولا صحيحة و تكون إشارتها من إشارة 339865 و عليه سيكون $x\times y>0$ ، إذن : x و y من نفس الإشارة .

3) كتابة عبارتي u_α و v_β بدلالة α و β على الترتيب : ----------

نلاحظ أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) حسابيتين أي أنّ : $u_\alpha=505\alpha+3$ و $v_\beta=673\beta+4$.

4) أ) تعيين الحدود المشتركة (u_n) و (v_n) : ----------

نضع : $u_\alpha=v_\beta$ أي : $505\alpha+3=673\beta+4$ و منه : $505\alpha-673\beta=1$ أي : $\alpha=679k+4$ و $\beta=505k+3$

مع $k\in\mathbb{Z}$ ، بتعويض α و β في عبارتي u_α و v_β نجد : $u_\alpha=339865k+2023$ و $v_\beta=339865k+2023$

و منه الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) هي حدود المتتالية الحسابية (w_n) ذات الأساس 339865 و الحد الأول 2023 أي أنّ : $w_n=339865n+2023$.

ب) حساب الجداء p : ----------

لدينا : $X_n=\frac{1}{500}(w_n-2023)$ أي : $p=\frac{1}{505}(w_1-2023)\times\frac{1}{505}(w_2-2023)\times\ldots\times\frac{1}{505}(w_n-2023)$

أي : $p=\left(\frac{1}{505}\right)^n\left[(w_1-2023)(w_2-2023)\times\ldots\times(w_n-2023)\right]$ ، لدينا : $w_n=339865n+2023$

أي أنّ : $w_n-2023=339865n$ ، إذن : $p=\left(\frac{1}{505}\right)^n\times339865(1)\times339865(2)\times\ldots\times339865(n)$

أي : $p=\left(\frac{1}{505}\right)^n\times(339865)^n\times1\times2\times\ldots\times n$ و منه : $p=\left(\frac{339865}{505}\right)^n\times n!$ إذن : $p=673^n\times n!$.

حل التمرين الثاني (04 نقاط) (الهندسة الفضائية) — التنقيط

1) بيان أن المثلث ABC قائم في A : ----------

بعد حساب الأطوال نجد : $AB=\sqrt{5}$ ، $AC=2\sqrt{5}$ و $BC=5$ أي : $AB^2+AC^2=BC^2$ و منه حسب مبرهنة فيثاغورس فإنّ المثلث ABC قائم في A .

ب) إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) : ----------

لدينا الشعاع $\overrightarrow{AC}(0;2;4)$ ناظمي لـ (Q) أي : $(Q):2y+4z+d=0$ و بما أن : $A\in(Q)$ فسيكون :

$2(0)+4(-1)+d=0$ أي : $d=4$ ، إذن : $(Q):2y+4z+4=0$.

3) أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) : ----------

لدينا : $(P_m):(m-1)x+2y-z-m=0$ أي : $(x-1)m-x+2y-z=0$ أي : $(x-1)m=x-2y+z$

و منه : $\begin{cases} x-1=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ هذه الأخيرة هي معادلة ديكارتية لـ (Δ) و بوضع $z=t$ نتحصل على :

$(\Delta):\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ z=t \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$.

*) نعوض إحداثيات النقطة A في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد : $t=-1$ (ثابت) هذا يعني أنّ : $A\in(\Delta)$.

*) بنفس الطريقة بالنسبة للنقطة C ، نجد : $t=3$ (ثابت) هذا يعني أيضا أنّ : $C\in(\Delta)$.

ب) التحقق من أن المستويين (P_m) و (Q) متعامدان : ----------

لدينا : $\vec{n}_{(Q)}(0;2;4)$ و $\vec{n}_{(P_m)}(m-1;2;-1)$ ، نلاحظ أنّ : $\vec{n}_{(Q)}.\vec{n}_{(P_m)}=0$ و منه سيكون المستويان (P_m) و (Q) متعامدان .

4) أ) حساب $d(m)$ و تعيين قيمة m : ----------

$d(m)=\frac{|(m-1)x_B+2y_B-z_B-m|}{\sqrt{(m-1)^2+4+1}}=\frac{|m-1-4-m|}{\sqrt{m^2-2m+1+5}}=\frac{5}{\sqrt{m^2-2m+6}}$ و هو المطلوب .

*) لنحسب $d'(m)$: $d'(m)=\frac{5-5m}{m^2-2m+6\sqrt{(m^2-2m+6)}}$ و منه إشارة $d'(m)$ من إشارة $5-5m$ أي أنّ :

$d'(m)$ ستكون موجبة على المجال $]-\infty;1]$ و تكون سالبة على المجال $[1;+\infty[$ إذن : $d(m)$ متزايدة على $]-\infty;1]$ و متناقصة على $[1;+\infty[$ و منه من أجل $m=1$ تكون $d(m)$ أعظمية و بالتالي تصبح : $d(1)=\sqrt{5}$.

ب) إستنتاج أن A هي المسقط العمودي لـ B على (P_m) : ----------

لدينا : $d(m)$ أعظمية تعني أنّ : $d(1)=\sqrt{5}$ و من جهة أخرى لدينا : $AB=\sqrt{5}$ و بما أنّ : $A\in(\Delta)$ و نعلم أن : $(\Delta)\subset(P_m)$ فإنّ : $A\in(P_m)$ و منه A هي المسقط العمودي لـ B على (P_m) .

حل التمرين الثالث (05 نقاط) (الأعداد المركبة) — التنقيط

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(z^2+1)(z^2-2z+3)=0$: ----------

أي : $\begin{cases} z^2+1=0 \\ z^2-2z+3=0 \end{cases}$ ، بعد الحساب نجد : $z_0=i$ ، $z_1=-i$ ، $z_2=1-i\sqrt{2}$ و $z_3=1+i\sqrt{2}$

2) أ) الحساب و التحقق : ----------

بعد الحساب نجد أنّ : $|z_A-1|=|z_B-1|=|z_C-z_E|=\sqrt{2}$ و لدينا : $|z_D-1|=\overline{|z_B-1|}=\sqrt{2}$

إذن : النقط D,C,B,A ستكون تنتمي إلى الدائرة التي مركزها E و نصف قطرها $\sqrt{2}$.

ب) بيان صحة المساواة و استنتاج طبيعة التحويل : ----------

لدينا : $z_B-z_E=i-1$ و من جهة أخرى : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)=i-1$.

إذن : $z_B-z_E=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$ لكن : $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right|=1$ أي أنّ : B هي صورة A بالدوران r الذي مركزه E و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

*) لدينا : B هي صورة A بالدوران r هذا يعني : $AE=BE$ و $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{BE})=\frac{\pi}{4}$ من هذا و ذاك نستنتج أنّ المثلث ABE متقايس الضلعين .

3) تحديد طبيعة الرباعي $ABDE$: ----------

لدينا : $z_{\overrightarrow{BD}} = z_D - z_B = -2i$ و $z_{\overrightarrow{AE}} = z_E - z_A = -i\sqrt{2}$ أي أنّ : $\frac{z_D - z_B}{z_E - z_A} = \frac{-2i}{-i\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ و منه

نستنتج أنّ : $\overrightarrow{BD} // \overrightarrow{AE}$ و من جهة أخرى لدينا : $BD \neq AE$ ، إذن : الرباعي $ABDE$ سيكون **شبه منحرف** .

4) أ) البرهان : ------

ط1) $\overrightarrow{w_1}$ يعامد $\overrightarrow{w_2}$ معناه أنّ $\frac{z_1}{z_2}$ تخيلي صرف ، أي : $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = -\frac{z_1}{z_2}$ أي : $\overline{z_1}.z_2 = -z_1.\overline{z_2}$ و منه : $\overline{z_1}.z_2 + z_1.\overline{z_2} = 0$

ط2) لدينا : $\overrightarrow{w_1}$ يعامد $\overrightarrow{w_2}$ معناه أنّ : $\overrightarrow{w_1}.\overrightarrow{w_2} = 0$ أي : $xx' + yy' = 0$ و منه : $\mathrm{Re}\left(z_1.\overline{z_2}\right) = 0$ حيث : $z_1 = x + iy$

و $z_2 = x' + iy'$ و $z_1.\overline{z_2} = xx' + yy' + i\left(x'y + xy'\right)$.

و من جهة أخرى لدينا : $z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2 = 0$ تعني $2\mathrm{Re}\left(z_1.\overline{z_2}\right) = 0$ أي أنّ : $\mathrm{Re}\left(z_1.\overline{z_2}\right) = 0$.

من هذا و ذاك نستنتج أنّ : $\overrightarrow{w_1} \perp \overrightarrow{w_2}$ يكافئ $z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2 = 0$.

ب) تعيين طبيعة مجموعة النقط : ----------

لدينا: $(z - z_A)(\overline{z} - \overline{z_D}) + (z - z_B)(\overline{z} - \overline{z_C}) = 0$ أي : $(z - z_A)(\overline{z} - \overline{z_B}) + (z - z_B)(\overline{z} - \overline{z_A}) = 0$ أي :

$(z - z_A)\overline{(z - z_B)} + (z - z_B)\overline{(z - z_A)} = 0$ إذن من السؤال (أ) نستنتج أنّ : $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$

و منه مجموعة النقط ستكون **الدائرة** التي قطرها $[AB]$.

حل التمرين الرابع (7نقاط) (الدالة اللوغاريتمية) — التنقيط

لدينا : $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1) البرهان : ----------

*) لدينا : من أجل $x > 1$ يكون $1 - x < 0$ و $x \ln x > 0$ أي : $-2x \ln x < 0$ و منه : $1 - x - 2x \ln x < 0$.

*) من أجل $0 < x < 1$ يكون $0 < 1 - x < 1$ و $x \ln x < 0$ أي : $-2x \ln x > 0$ و منه : $1 - x - 2x \ln x > 0$.

2) أ) إثبات قابلية الإشتقاق للدالة f عند يمين 0 : ----------

$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} (1 - x \ln x) = 1$ و منه : الدالة تقبل الإشتقاق عند يمين 0 و $f'(0) = 1$.

*) مما سبق نستنتج أن معادلة نصف المماس للمنحني (C_f) عند مبدأ المعلم تكتب من الشكل $(\Delta) : y = x$ و ذلك من أجل $x > 0$.

ب) دراسة الوضع النشبي لـ (C_f) بالنسبة لـ (Δ) : ----------

لدينا : $f(x) - x = -x^2 \ln x$ و منه الإشارة من إشارة $(-\ln x)$ أي أنّ الوضع النسبي يكون :

*) من أجل : $0 < x < 1$ المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

*) من أجل : $x > 1$ المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) .

3) أ) حساب النهاية : ----------

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x - x^2 \ln x\right] = \lim_{x \to +\infty} x(1 - x \ln x) = -\infty$.

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها : ----------

لدينا : $f'(x) = 1 - \left(2x \ln x + \frac{1}{x}.x^2\right)$ و منه : $f'(x) = 1 - x - 2x \ln x$.

من السؤال (1) نستنتج أنّ الدالة f ستكون متناقصة على $[1;+\infty[$

و متزايدة على $]0;1]$.

***) جدول التغيرات :**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4) أ) كتابة معادلة المماس (T) : ----------

لدينا : (T) يوازي (Δ) أي أنّ : $f'(x_0)=1$ مع $x_0 \neq 0$ أي : $1-x_0-2x_0\ln x_0=1$ أي :

$x_0(-1-2\ln x_0)=0$ و منه : $-1-2\ln x_0=0$ أي : $\ln x_0=-\frac{1}{2}$ و منه : $x_0=e^{-\frac{1}{2}}$.

إذن : معادلة المماس (T) تكتب كما يلي : $y=x+\frac{1}{2e}$.

ب) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد في المجال $[1;+\infty[$: ----------

الدالة f مستمرة و رتيبة (متناقصة) على $[1;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \end{cases}$ أي : $f(1)\times\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)<0$ و منه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;+\infty[$.

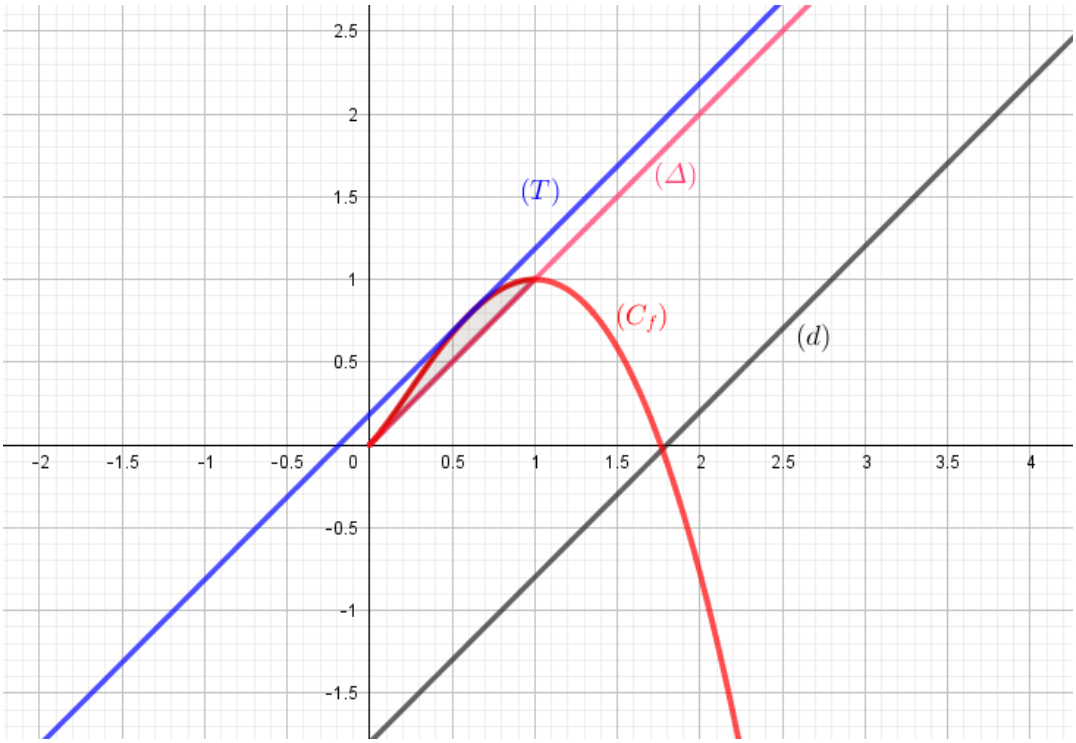
*) لدينا : $\begin{cases} f(1,76)=0,01 \\ f(1,77)=-0,02 \end{cases}$ أي أنّ : $f(1,77)<0<f(1,76)$ و منه سيكون : $1,76<\alpha<1,77$.

ج) كتابة معادلة للمستقيم (d) : ----------

لدينا : (d) يوازي (Δ) هذا يعني أنّ معادلة (d) تكتب من الشكل : $y=x+b$ و بما أنّ (d) يشمل النقطة $(\alpha;0)$

أي : $0=\alpha+b$ و منه : $b=-\alpha$ ، إذن : $(d): y=x-\alpha$.

***) إنشاء كلا من (T) ، (Δ) ، (d) و المنحني (C_f) : ----------**



5) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m : ----------

لدينا : $x^2\ln x+m=0$ ، أي : $-x^2\ln x=m$ أي : $x-x^2\ln x=x+m$ و منه : $f(x)=x+m$

إذن : المناقشة تكون مائلة و موازية للمستقيم (Δ) .

*) إذا كان : $-\alpha<m<0$ فإنّ المعادلة تقبل حل وحيد .

*) إذا كان : $0\leq m<\frac{1}{2e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلين .

*) إذا كان : $m=\frac{1}{2e}$ فإنّ المعادلة تقبل حل وحيد .

*) إذا كان : $m>\frac{1}{2e}$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلول .

6) أ) حساب $A(\lambda)$: ----------

لدينا : $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}\left(-x^{2}\ln x\right)dx=-\left[\frac{x^{3}}{3}\ln x\right]_{\lambda}^{1}+\int_{\lambda}^{1}\left(\frac{1}{3}x^{2}\right)dx$ أي : $A(\lambda)=\frac{\lambda^{3}}{3}\ln\lambda+\frac{1}{3}\left[\frac{x^{3}}{3}\right]_{\lambda}^{1}$

و منه : $A(\lambda)=\frac{1-\lambda^{3}}{9}+\frac{\lambda^{3}}{3}\ln\lambda$ أي : $A(\lambda)=1-\lambda^{3}+3\lambda^{3}\ln\lambda\, cm^{2}$.

ب) حساب العدد $\lim_{\lambda\xrightarrow{>}0}A(\lambda)$ و تفسير النتيجة هندسيا :----------

لدينا : $\lim_{\lambda\xrightarrow{>}0}A(\lambda)=\lim_{\lambda\xrightarrow{>}0}\left(\frac{1-\lambda^{3}}{9}+\frac{\lambda^{3}}{3}\ln\lambda\right)=\frac{1}{9}$ ، لأنّ : $\lim_{\lambda\xrightarrow{>}0}\left(\frac{\lambda^{3}}{3}\ln\lambda\right)=0$.

***) التفسير الهندسي :**

النهاية هي عبارة عن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و نصف المماس (Δ) و المستقيمان اللذان معادلتيهما على الترتيب : $x=0$ و $x=1$.

كتابة الأستـــاذ : بلقاسم عبدالرزاق

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

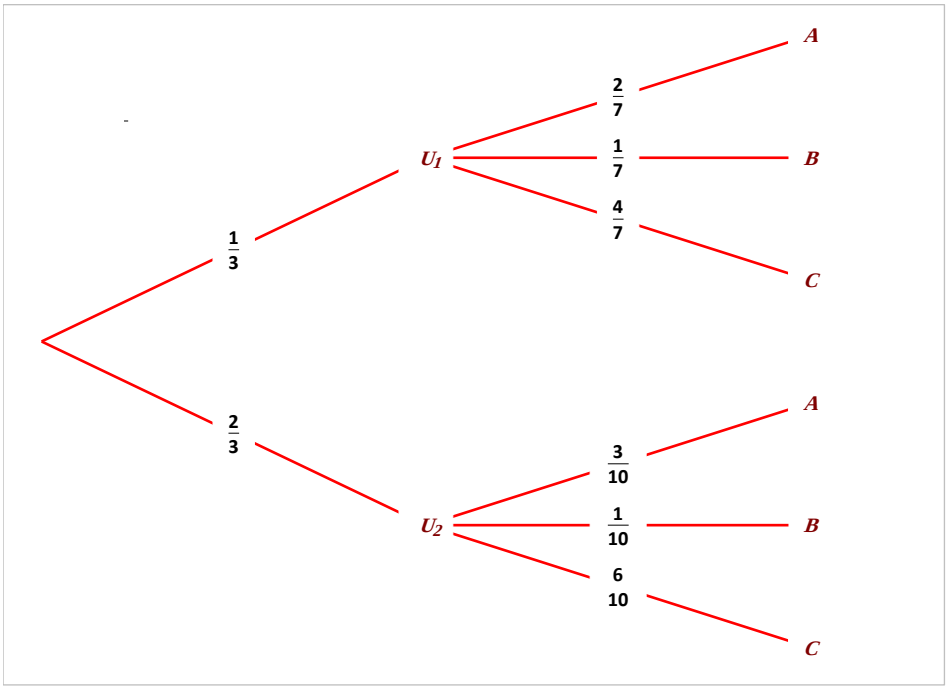
وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للإمتحانات و المسابقات

تصحيح مقترح لبكالوريا 2019 — شعبة : رياضيات

التَصْحِيحْ المفصّل للبكالُوريَا الرَّسمية دَورة : جوان 2019 — الموضوع 02

حل التمرين الأول (04 نقاط) (الإحتمالات) — التنقيط

1) نقل و إكمال شجرة الإحتمالات :----------



2) حساب الإحتمالات : ----------

(* $p(A)=p(A\cap U_1)+p(A\cap U_2)$ أي : $p(A)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}\right)$ و منه : $p(A)=\frac{31}{105}$.

(* $p(B)=p(B\cap U_1)+p(B\cap U_2)$ أي : $p(B)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{10}\right)$ و منه : $p(B)=\frac{4}{35}$.

(* $p(C)=p(C\cap U_1)+p(C\cap U_2)$ أي : $p(C)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\right)$ و منه : $p(C)=\frac{62}{105}$.

3) أ) تعيين قيم المتغير العشوائي : ----------

المتغير العشوائي X يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة و منه : $X\in\{0;1;2\}$.

ب) تعيين قانون الإحتمال :----------

(* $p(X=0)=p(B)=\frac{4}{35}$.

(* $p(X=1)=p(C)=\frac{62}{105}$.

(* $p(X=2)=p(A)=\frac{31}{105}$.

X_i	0	1	2
P_i	$\frac{4}{35}=\frac{12}{105}$	$\frac{62}{105}$	$\frac{31}{105}$

4) حساب الأمل الرياضي :----------

(* $E(X)=\frac{(0\times12)+(1\times62)+(2\times31)}{105}$ أي : $E(X)=\frac{124}{105}$.

حل التمرين الثاني (04 نقاط) (المتتاليات)	التنقيط

لدينا : $u_1=0$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $u_{n+1}=u_n+2\sqrt{u_n}+1$

1) أ) التحقّق : ----------

لدينا : $u_{n+1}=u_n+2\sqrt{u_n}+1$ أي : $u_{n+1}=\left(\sqrt{u_n}+1\right)^2$ و منه : $\sqrt{u_{n+1}}=\sqrt{u_n}+1$ ، إذن : $\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}=1$.

ب) إستنتاج كتابة عبارة الحد العام : ----------

لدينا : $\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}=1$ ، لنضع : $v_n=\sqrt{u_n}$ أي تصبح : $v_{n+1}-v_n=1$ و منه فإنّ (v_n) متتالية حسابية أساسها 1 و حدها الأول $v_1=1$ أي : $v_n=n-1$ أي تكون : $\sqrt{u_n}=n-1$ و منه : $u_n=(n-1)^2$.

2) التحقّق : ----------

لدينا : $u_n=(n-1)^2$ أي : $u_n=n^2-2n+1$ و منه : $u_n=n(n-2)+1$. و هو المطلوب

3) تعيين قيم العدد الطبيعي n : ----------

لدينا : $(n-2)$ يقسم $(n-2)$ أي أنّ : $n-5=k(n-2)...(1)$ و نعلم أنّ : $n-2=1.(n-2)...(2)$ ، بطرح (2) من (1) نجد : $3=(n-2)(1-k)$ و منه : $(n-2)=\{-3;-1;1;3\}$ بعد الحساب نجد : $n\in\{1;3;5\}$.

4) أ) تبيين أنّ $PGCD(n-2;u_n)=1$: ----------

لدينا : $u_n=n(n-2)+1$ أي : $u_n-n(n-2)=1$ و منه حسب **مبرهنة بيزو** يكون : $PGCD(n-2;u_n)=1$.

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n : ----------

لدينا : $PGCD(n-2;u_n)=1$ و $(n-2)(n^2+1)$ قاسم لـ $(n-5)u_n$ يعني أنّ $(n-2)$ قاسم لـ $(n-5)$ أي أنّ : $n\in\{1;3;5\}$ ، لكن من أجل $n=1$ غير محققة ، و منه القيم التي تحقق هي : $n\in\{3;5\}$.

حل التمرين الثالث (05 نقاط) (الأعداد المركبة)	التنقيط

1) أ) بيان أنّ $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$: ----------

لدينا : $P(\overline{z})=\overline{z}^4-6\overline{z}^3+29\overline{z}^2-24\overline{z}+100$ أي : $P(\overline{z})=\overline{z^4-6z^3+29z^2-24z+100}$ ، و منه : $P(\overline{z})=\overline{z}^4-6\overline{z}^3+29\overline{z}^2-24\overline{z}+100$

إذن : $P(\overline{z})=\overline{P(z)}$. و هو المطلوب .

و عليه : إذا كان z حل للمعادلة $P(z)=0$ فإنّ : $\overline{P(z)}=0$ أي : $P(\overline{z})=0$ و منه سيكون $\overline{z}$ حلا للمعادلة $P(z)=0$

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$: ----------

لنضع : $z=i\alpha$ حيث : $\alpha\neq 0$ هذا الأخير حل للمعادلة يعني أنّ : $\overline{z}=-i\alpha$ حل للمعادلة أيضا .

لدينا : $\begin{cases} P(z)=z^4-6z^3+29z^2-24z+100 \;...(1) \\ P(\overline{z})=\overline{z}^4-6\overline{z}^3+29\overline{z}^2-24\overline{z}+100 \;...(2) \end{cases}$ بطرح (1) من (2) نجد :

$\left(z^4-\overline{z}^4\right)-6\left(z^3-\overline{z}^3\right)+29\left(z^2-\overline{z}^2\right)+24\left(z-\overline{z}\right)=0$ بالتعويض نجد : $12\alpha^3 i-48\alpha i=0$ أي :

$12\alpha i\left(\alpha^2-4\right)=0$ و منه : $\alpha=2$ أو $\alpha=-2$ ، إذن الحلين هما : $z_1=2i$ و $z_2=-2i$.

الآن نقوم بتحليل $P(z)$ أي : $P(z)=\left(z^2+4\right)\left(az^2+bz+c\right)$ بعد النشر و التبسيط و المطابقة نجد :

$P(z)=\left(z^2+4\right)\left(z^2-6z+25\right)$ ، الآن نكمل حل المعادلة $P(z)=0$ .....

بعد حساب المميز و تعيين الجذور نجد : $z_3=3-4i$ و $z_4=3+4i$ ، و عليه : $S=\{-2i;2i;3-4i;3+4i\}$.

2) أ) تعيين اللاحقتين z_I و z_J : ----------

*) $z_I=\dfrac{2z_A+z_B}{2+1}$ أي : $z_I=\dfrac{4i+3-4i}{3}$ ، و منه : $z_I=1$.

*) $z_J=\dfrac{-2z_A+z_B}{-2+1}$ أي : $z_J=\dfrac{-4i+3-4i}{-1}$ ، و منه : $z_J=-3+8i$.

ب) التبيين ثم تعيين و إنشاء المجموعة (E) : ----------

لدينا : $M \in (E)$ يعني أنّ : $\left|\frac{-iz+4+3i}{z-2i}\right| = 2$ أي : $|-iz+4+3i| = 2|z-2i|$ ، تصبح :

$|z+4i-3| = 2|z-2i|$ أي : $|z-z_B| = 2|z-z_A|$ و منه : $MB = 2MA$.

هذه الأخيرة تصبح : $MB^2 = 4MA^2$ أي : $MB^2 - 4MA^2 = 0$ أي أنّ : $(\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA}).(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}) = 0$

و منه نجد : $\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{MI} = 0$ و عليه المجموعة (E) ستكون الدائرة التي قطرها $[IJ]$.

ج) التحقّق ثم تعيين و إنشاء المجموعة (Γ) : ----------

*) التحقق أنّ $D \in (\Gamma)$: نعوض z_D في $\frac{-iz+4+3i}{z-2i}$ نجد : $\frac{-iz_D+4+3i}{z_D-2i} = \frac{1}{3}$ و منه : $\arg\left(\frac{1}{3}\right) = 2k\pi$

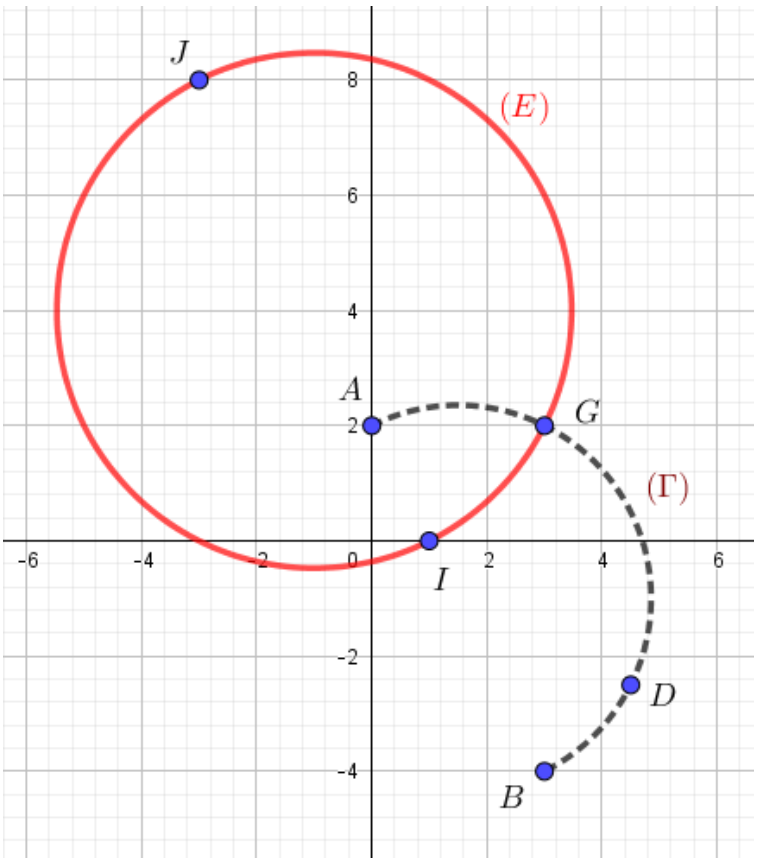
و عليه فإن النقطة D تنتمي إلى المجموعة (Γ) .

*) لدينا : $\arg(z') = 2k\pi$ أي : $\arg\left(\frac{-iz+4+3i}{z-2i}\right) = 2k\pi$ أي : $\arg\left(\frac{-i(z-z_B)}{z-z_A}\right) = 2k\pi$ أي :

$\arg(-i) + \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = 2k\pi$ أي : $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ و منه : $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

و عليه المجموعة (Γ) هي قوس من الدائرة التي قطرها $[AB]$ و الذي يشمل النقطة D باستثناء النقطتين A و B .

*) **الإنشـــاء :**



3) تعيين الشكل الجبري للاحقة النقطة G : ----------

لدينا : $\arg(z') = 2k\pi$ و $|z'| = 2$ أي : $\frac{-iz+4+3i}{z-2i} = 2$ أي : $-iz+4+3i = 2z-4i$ ، أي أنّ :

$-iz-2z = -4i-3i-4$ ، أي : $z(-i-2) = -4-7i$ و منه : $z = \frac{4+7i}{2+i}$ ، بعد كتابة العدد على الشكل الجبري

نجد : $z = 3+2i$ و عليه ستكون : $z_G = 3+2i$.

التنقيط	(الدالة الأسية)	حل التمرين الرابع (7نقاط)

الجزء الأول : $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$.

1) إثبات أن كل المنحنيات (C_k) تمر نقطتين ثابتتين : ----------

لدينا : $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ أي : $f_{k+1}(x)=(x+1)^2e^{-(k+1)x}$ و بما أنّ النقطة ثابتة مهما تغيّر الوسيط k فسيكون ترتيب النقطة ثابت مهما كان k .

أي : $f_{k+1}(x)-f_k(x)=0$ أي : $(x+1)^2e^{-(k+1)x}-(x+1)^2e^{-kx}=0$ و منه : $e^{-kx}(x+1)^2(e^{-x}-1)=0$

و عليه : $\begin{cases}(x+1)^2=0\\(e^{-x}-1)=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=-1\\e^{-x}=1\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}x=-1\\x=0\end{cases}$ إذن : جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين هما $A(-1;0)$ و $B(0;1)$.

2) حساب نهايتي الدالة f_k : ----------

*) لما $k>0$ يكون : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+1)^2e^{-kx}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^{-kx}\right)=+\infty\\\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^2e^{-kx}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-kx}\right)=0\end{cases}$.

*) لما $k=0$ يكون : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+1)^2\right]=+\infty\\\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^2\right]=+\infty\end{cases}$.

*) لما $k<0$: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+1)^2e^{kx}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^{kx}\right)=0\\\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^2e^{kx}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{kx}\right)=+\infty\end{cases}$.

3) أ) حساب $f_k'(x)$ ثم تحديد إتجاه تغيّر الدالة f_k حسب قيم k : ----------

$f_k'(x)=2(x+1)e^{-kx}-k(x+1)^2e^{-kx}$ أي : $f_k'(x)=(x+1)(-kx-k+2)e^{-kx}$.

*) من أجل $k=0$ تكون : $f_0'(x)=2(x+1)$ هذه الأخيرة موجبة على $[-1;+\infty[$ و سالبة على $]-\infty;-1]$ و منه : الدالة f_0 متزايدة على المجال $[-1;+\infty[$ و متناقصة على $]-\infty;1]$.

*) من أجل $k>0$: ندرس إشارة المشتقة أي نحل المعادلة $f_k'(x)=0$ أي : $\begin{cases}x+1=0\\-kx-k+2=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=-1\\x=\dfrac{2-k}{k}\end{cases}$

إذن : لما $x\in\left[-1;\dfrac{2-k}{k}\right]$ تكون $f_k'(x)\geq0$ و عليه الدالة f_k متزايدة على المجال $\left[-1;\dfrac{2-k}{k}\right]$.

لما $x\in]-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{2-k}{k};+\infty\right[$ تكون $f_k'(x)\leq0$ و عليه الدالة f_k متناقصة على كل من المجالين : $]-\infty;-1]$ و $\left[\dfrac{2-k}{k};+\infty\right[$.

*) من أجل $k<0$: بنفس الطريقة السابقة ، لكن :

لما $x\in]-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{2-k}{k};+\infty\right[$ تكون $f_k'(x)\geq0$ و عليه الدالة f_k متوايدة على كل من المجالين : $]-\infty;-1]$ و $\left[\dfrac{2-k}{k};+\infty\right[$.

لما $x\in\left[-1;\dfrac{2-k}{k}\right]$ تكون $f_k'(x)\leq0$ و عليه الدالة f_k متناقصة على المجال $\left[-1;\dfrac{2-k}{k}\right]$.

ب) تشكيل جدول تغيّرات الدالة f_k من أجل $k \in \mathbb{R}_+$: ----------

x	$-\infty$		-1		$\frac{2-k}{k}$		$+\infty$
$f'_k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_k(-1)$	$\nearrow$	$f_k(\frac{2-k}{k})$	$\searrow$	0

4) المناقشة حسب قيم k الوضع النسبي بين المنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) : ----------

ندرس إشارة الفرق نجد : $f_{k+1}(x)-f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}\left[\frac{1-e^x}{e^x}\right]$ ، نلاحظ أنّ إشارة الفرق من إشارة : $1-e^x$

*) الفرق ينعدم عند 0 و -1 أي أنّ المنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) يتقاطعان في النقطتين A و B . (س1)

*) الفرق يكون موجب على $]-\infty;0]$ أي أنّ المنحني (C_{k+1}) يقع فوق المنحني (C_k) .

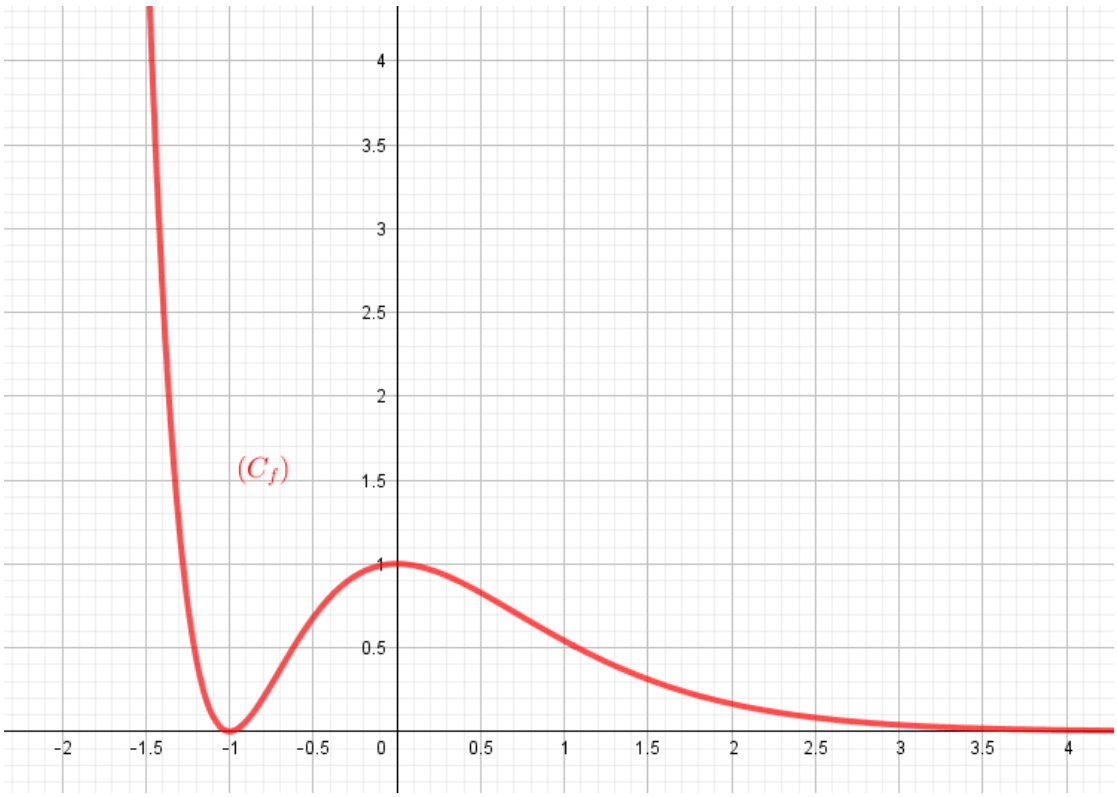
*) الفرق يكون سالب على $[0;+\infty[$ أي أنّ المنحني (C_{k+1}) يقع تحت المنحني (C_k) .

الجزء الثاني : لدينا $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$.

1) تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$: ----------

x	$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{e3}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

*) إنشــاء المنحني (C_f) :



2) أ) بيان أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$: ----------

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و $f(x)=1$ تعني $f(x)-1=0$ ، لنضع : $h(x)=f(x)-1$.

الدالة h مستمرة و متناقصة على المجال $]-\infty,-1]$ و $\begin{cases} h(-1,28)=0.01 \\ h(-1,27)=-0,08 \end{cases}$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن

المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,28<\alpha<-1,27$.

و من جهة أخرى لدينا : $g(0)=f(0)-1$ أي : $h(0)=1-1$ و منه : $h(0)=0$ أي أنّ الحل الآخر معدوم .

ب) تعيين قيم m : ----------

لدينا : $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ أي : $\frac{|x+1|}{e^x}=\frac{|m+1|}{e^m}$ أي : $|x+1|e^{-x}=|m+1|e^{-m}$ أي تصبح :

$(x+1)^2e^{-2x}=(m+1)^2e^{-2m}$ ، إذن : $f(x)=f(m)$ ، حلول هذه الأخيرة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f)

مع المستقيم ذو المعادلة $y=f(m)$ و عليه : قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=f(m)$ حلا

وحيدا و من خلال ملاحظة البيان نجد أنها محققة لما يكون $m\in]-\infty;\alpha[$.

3) لدينا : $g(x)=(x+1)e^{-2x}$.

أ) بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$: ----------

$g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=e^{-2x}-2(x+1)e^{-2x}+2(x+1)e^{-2x}-e^{-2x}$ و منه : $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$.

إذن : من أجل كل عدد حقيقي تكون $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ محقّقة .

*) يمكن الآن إستنتاج دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}$ أي : $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ و عليه تصبح :

$g(x)=-\frac{1}{2}g'(x)+\frac{1}{2}e^{-2x}$ أي أنّ الدالة الأصلية هي : $G(x)=-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c$.

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة حساب مساحة الحيز المستوي : ----------

$$\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\underbrace{(x+1)^2}_{u}\underbrace{e^{-2x}}_{v'}=\left[-\frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}\left[2(x+1)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right]=-\frac{1}{2}+\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-2x}\,dx$$

و منه : $\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=-\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_{-1}^{0}$ أي : $\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^2\right)$

إذن : $\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^2$ و عليه : $\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=-\frac{5}{4}+\frac{e^2}{4}\ (u.a)$.

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

التصحيح المفصل للموضوع الأول:

التمرين الأول :

1) حل المعادلة (E) : $505x-673y=1.....(E)$ لدينا $505(4)-673(3)=1$ و منه $\begin{cases}505x-673y=1\\505(4)-673(3)=1\end{cases}$ بالطرح نجد $505(x-4)=673(y-3.)$ بما أن العددان 505 و 673 أوليان فيما بينهما فحسب مبرهنة غوس 505 قاسم للعدد $(y-3.)$ و العدد 673 قاسم للعدد $(x-4)$.

أي أن $\begin{cases}x-4=673k\\ét\\y-3=505k\end{cases}$ $k\in Z$ يعني أن $\begin{cases}x=4+673k\\ét\\y=3+505k\end{cases}$ $k\in Z$ مجموعة الحلول هي $S=\{(4+673k;3+505k):\ k\in Z\}$

2) لدينا $\begin{cases}x=4+673k\\ét\\y=3+505k\end{cases}$ $k\in Z$

طريقة 1 :إذا كان $x\geq 0$ يعني أن $4+673k\geq 0$ يعني أن $k\geq -\frac{4}{673}$ أي $k\geq 0$

ولدينا $y=3+505k$ فهو عدد موجب .

إذا كان $x\leq 0$ يعني أن $4+673k\leq 0$ يعني أن $k\leq -\frac{4}{673}$ أي $k\leq -1$

ولدينا $y=3+505k$ فهو عدد سالب .

طريقة 2 : $xy=(4+673k)(3+505k)$ و منه $xy=339865k^2+4039k+12$

ندرس إشارة الجداء من أجل كل عدد صحيح k له جذرين هما $k_0=-\frac{4}{673}$ و $k_1=-\frac{3}{505}$ و هما عددان لا يحصران عدد صحيح و منه من أجل كل عدد صحيح k الجداء xy موجب يعني إن للعددين y و x نفس الإشارة

3) $\begin{cases}u_0=3\\ét\\u_{n+1}=u_n+505\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=4\\ét\\v_{n+1}=v_n+673\end{cases}$ المتتاليتان (u_n) و (v_n) حسابيتان و أساسهما على الترتيب 505 و 673 و منه

$u_\alpha=u_0+r\alpha$ أي ان $u_\alpha=3+505\alpha$ و $v_\beta=v_0+r\beta$ أي أن $v_\beta=4+673\beta$

4) أ-تعيين الحدود المشتركة بين المتتاليتان (u_n) و (v_n) : $u_\alpha=v_\beta$ يعني أن $3+505\alpha=4+673\beta$ يعني أن

$505\alpha-673\beta=1$ من ما سبق حل المعادلة (E) نستنتج أن $\begin{cases}\alpha=4+673n\\ét\\\beta=3+505n\end{cases}$ $n\in N$ و الحدود المشتركة هي

$u_{4+673n}=3+505(4+673n)=2023+339865n$ (أو $v_{3+505n}=4+673(3+505n)=2023+339865n$)

أي $w_n=2023+339865n$ و (w_n) متتالية حسابية أساسها 339865 و حدها الأول $w_0=2023$.

ب-لدينا $X_n=\frac{1}{505}(w_n-2023)$ حساب $P=X_1.X_2.....X_n$ لدينا

$X_n=\frac{1}{505}(w_n-2023)=\frac{1}{505}\times 339865n=673n$ و منه

$P=673.(673\times 2).....(673n)=\left(\underbrace{673\times 673.....\times 673}_{n\ \text{مرة}}\right)(1\times 2\times ....\times n)=673^n.\,n!$.

التمرين الثاني

لدينا $A(1;0;-1)$; $B(1;-2;0)$; $C(1;2;3)$.

1) إثبات أن المثلث ABC قائم في A : نحسب $\overrightarrow{AB}(0;-2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(0;2;4)$ و منه $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=0-4+4=0$ و منه محققة .

2) كتابة معادلة المستوي (Q): هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ و $\overrightarrow{AM}(x-1;y;z+1)$ حيث $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}=0$ أي أن $2(y)+4(z+1)=0$ يكافئ $2y+4z+4=0$ يكافئ $(Q): y+2z+2=0$

3) لدينا $(P_m):(m-1)x+2y-z-m=0$

أ. إثبات أن (P_m) يحوي مستقيم ثابت $(m-1)x+2y-z-m=0$ يكافئ $m(x-1)-x+2y-z=0$ مستقلة عن m

يعني أن $\begin{cases} x-1=0 \\ \text{ét} \\ -x+2y-z=0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x=1 \\ \text{ét} \\ 2y-z=1 \end{cases}$ وهو تقاطع مستويين أي انه مستقيم

تمثيله الوسيطي هو $t\in R$: $(\Delta):\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=2t-1 \end{cases}$.

$A\in(\Delta)$ يعني أن $\begin{cases} 1=1 \\ t=0 \\ 2t-1=-1 \end{cases}$ أي أن $t=0$ و منه النقطة تنتمي الى المستقيم .

$C\in(\Delta)$ يعني أن $\begin{cases} 1=1 \\ t=2 \\ 2t-1=3 \end{cases}$ أي أن $t=2$ و منه النقطة تنتمي الى المستقيم .

ب. اثبات تعامد المستويين $(Q):y+2z+2=0$ و $(P_m):(m-1)x+2y-z-m=0$: (Q) شعاعه الناظمي $\vec{n}(0;1;2)$ و (P_m) شعاعه الناظمي $\overrightarrow{n_m}(m-1;2;-1)$

نحسب الجداء السلمي نجد $(m-1)(0)+2\times1-1(2)=0$ يكافئ $0=0$ و منه متعامدان .

4) المسافة بين B و (P_m)

أ. هي $d(m)=\dfrac{|(m-1)(1)+2(-2)-0-m|}{\sqrt{(m-1)^2+2^2+1^2}}=\dfrac{|-5|}{\sqrt{m^2-2m+6}}$ و منه $d(m)=\dfrac{5}{\sqrt{m^2-2m+6}}$

$d(m)$ أعظمية نحسب المشتقة $d'(m)=\dfrac{-5\dfrac{(2m-2)}{2\sqrt{m^2-2m+6}}}{(m^2-2m+6)}=\dfrac{-5(m-1)}{\left(\sqrt{m^2-2m+6}\right)^3}$

إشارتها من إشارة $-(m-1)$ تنعدم عند 1 و تكون سالبة على المجال $[1;+\infty[$ و موجبة على المجال $]-\infty;1]$

و منه $d(m)$ تقبل قيمة حدية كبرى هي $d(1)$ و حسابها : $d(1)=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

ب. $d(m)$ أعظمية يعني أن $m=1$ لدينا $(P_1):2y-z-1=0$ و $\overrightarrow{BA}(0;2-;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_1) و $2(0)-(-1)-1=0$ يعني أن $A(1;0;-1)$ نقطة من المستوي (P_1) و منه فهي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_1)

التمرين الثالث

لدينا $z_A=1+i\sqrt{2}$; $z_B=i$; $z_C=\overline{z_A}$; $z_D=\overline{z_B}$; $z_E=1$.

1. حل المعادلة في $\mathbb{C}$: $(z^2+1)(z^2-2z+3)=0$ يكافئ $(z^2+1)=0$ أو $(z^2-2z+3)=0$ أي أن $z_0=-i$ or $z_1=i$
أو $(z^2-2z+3)=0$ نحل هذه بالمميز $\Delta=-8$ للمعادلة حلين هما $z_2=1+i\sqrt{2}$ و $z_3=1-i\sqrt{2}$.

2. أ.حساب $|z_A-1|=|i\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ و $|z_B-1|=|i-1|=\sqrt{2}$ و $|z_C-z_E|=|1-i\sqrt{2}-1|=|-i\sqrt{2}|=\sqrt{2}$
و منه النقط A ; B ; C تنتمي الى نفس الدائرة التي مركزها E و نصف قطرها $\sqrt{2}$
و نحسب $|z_D-z_E|$: $|z_D-z_E|=|-i-1|=\sqrt{2}$ و منه حتى D تنتمي الى تلك الدائرة التي مركزها E و نصف قطرها $\sqrt{2}$.

ب.إثبات أن $z_B-z_E=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$: لدينا

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1+i\sqrt{2}-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(i\sqrt{2})=i(1+i)=i-1=z_B-z_E$$ محققة

بما أن $z_B-z_E=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$ فإن B صورة A بالدوران لان $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right|=1$ و زاويته

$\arg\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]=\frac{\pi}{4}$ و منه مركزه E .

بما أن $z_B-z_E=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$ و $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right|=1$ فإن $|z_B-z_E|=|z_A-z_E|$ فإن المثلث ABE متساوي الساقين .

3. تعيين لاحقتي الشعاعان $z_{\overrightarrow{BD}}=-2i$ و $z_{\overrightarrow{AE}}=-i\sqrt{2}$ و منه $z_{\overrightarrow{BD}}=\sqrt{2}.z_{\overrightarrow{AE}}$ إذن الرباعي $ABDE$ شبه منحرف .

4. لدينا $\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ لاحقتاهما z_1 , z_2 على الترتيب .

أ. $\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ متعامدان يكافئ أن $\frac{z_2}{z_1}$ عدد تخيلي صرف يكافئ $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=-\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}$ يكافئ $\frac{z_2}{z_1}=-\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$ يكافئ
$z_2.\overline{z_1}=-z_1.\overline{z_2}$ يكافئ $z_2.\overline{z_1}+z_1.\overline{z_2}=0$

ب. تعين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $(z-z_A)(\overline{z}-z_D)+(z-z_B)(\overline{z}-z_C)=0$ يكافئ
$(z-z_A)(\overline{z}-\overline{z_B})+(z-z_B)(\overline{z}-\overline{z_A})=0$ يكافئ $(z-z_A)(\overline{z-z_B})+(z-z_B)(\overline{z-z_A})=0$ يكافئ أن الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ متعامدان مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة ذات القطر $[AB]$.

التمرين الرابع

$\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x : & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ و $\|\overrightarrow{i}\|=\|\overrightarrow{j}\|=3cm$.

1) البرهان :

لما $x>1$ فإن $1-x<0.....(1)$ و $\ln x>0$ و منه $-2x\ln x<0.....(2)$ بجمع $(1)+(2)$ نجد $1-x-2x\ln x<0$.

لما $0<x<1$ فإن $1-x>0.....(3)$ و $\ln x<0$ و منه $-2x\ln x>0.....(4)$ بجمع $(3)+(4)$ نجد $1-x-2x\ln x>0$.

2) أ.إثبات الاشتقاقية عند 0 للدالة f : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} [1 - x\ln x] = 1 = f'(0)$

لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} [-x\ln x] = 0$ باستخدام القيم التزايد المقارن و منه الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين 0 .

معادلة نصف المماس للمنحنى (C_f) على يمين 0 هي $(\Delta) : y = x$.

ب.دراسة وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ) لدينا $f(x) - y = -x^2 \ln x$ إشارته من إشارة $-\ln x$

و منه الفرق سالب على المجال $]1;+\infty[$ أي أن (C_f) يقع تحت (Δ) على هذا المجال .

الفرق موجب على المجال $]0;1[$ أي أن (C_f) يقع فوق (Δ) على هذا المجال .

3) أ.حساب النهاية : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [x - x^2.\ln x] = \lim\limits_{x \to +\infty} x[1 - x.\ln x] = -\infty$.

ب.دراسة اتجاه تغير $f'(x) = 1 - 2x\ln x - \frac{x^2}{x} = 1 - 2x\ln x - x$ أي $f'(x) = 1 - x - 2x\ln x$

من (1) لدينا لما $x > 1$ فإن $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

لما $0 < x < 1$ فإن $f'(x) > 0$. ومنه f متزايدة على المجال $]0;1]$.

جدول تغيرات

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4) أ.كتابة معادلة المماس للمنحنى (C_f) و الموازي للمستقيم (Δ)

و لتكن معادلته $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ له نفس معامل توجيه المستقيم (Δ) أي نحل المعادلة $f'(x) = 1$ أي

$1 - x - 2x\ln x = 1$ أي أن $-x - 2x\ln x = 0$ يعني أن $-x(1 + 2\ln x) = 0$ يكافئ $x = 0$ او $(1 + 2\ln x) = 0$

$(1 + 2\ln x) = 0$ يعني أن $\ln x = -\frac{1}{2}$ و منه $x = e^{-\frac{1}{2}}$ أي $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{1}{2e}$ و منه المعادلة هي $y = \left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{1}{2e}$ أي $(T) : y = x + \frac{1}{2e}$.

ب. بما أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و تأخذ صورها في المجال $]-\infty;1]$ و هو مجال تتغير فيه الإشارة فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[1;+\infty[$.

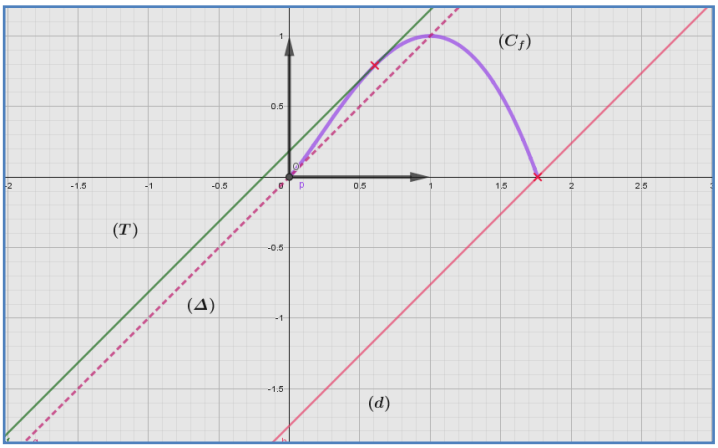
لدينا $f(1,76) = 0,01$ و $f(1,77) = -0,02$ و الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1,76;1,77[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,76 < \alpha < 1,77$.

ج.كتابة معادلة المستقيم (d) الذي يشمل النقطة $(\alpha;0)$

و يوازي (Δ) إذن معادلته من الشكل $y = x + b$ يشمل النقطة ذات الإحداثيات $(\alpha;0)$ يعني $0 = \alpha + b$ و منه $b = -\alpha$

إذن معادلته هي $(d) : y = x - \alpha$

رسم المنحنى (C_f) و المستقيمات (Δ) و (d) و (T)



5) لدينا m عدد حقيقي المناقشة بيانيا للمعادلة

$x^2 \ln x + m = 0$ يكافئ $m = -x^2 \ln x$ و منه

$x+m=x-x^2\ln x$

أي أن $x+m=f(x)$ حلولها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) و المستقيم $(\Delta_m): y=x+m$

المناقشة :

لما $m\in]-\infty;-\alpha[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) غير متقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

لما $m=-\alpha$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة واحد و منه للمعادلة حل وحيد .

لما $m\in]-\alpha;0[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة واحد و منه للمعادلة حل وحيد

لما $m\in\left[0;\frac{1}{2e}\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين و منه للمعادلة حلين .

لما $m=\frac{1}{2e}$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة واحد و منه للمعادلة حل وحيد .

لما $m\in\left]\frac{1}{2e};+\infty\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) غير متقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

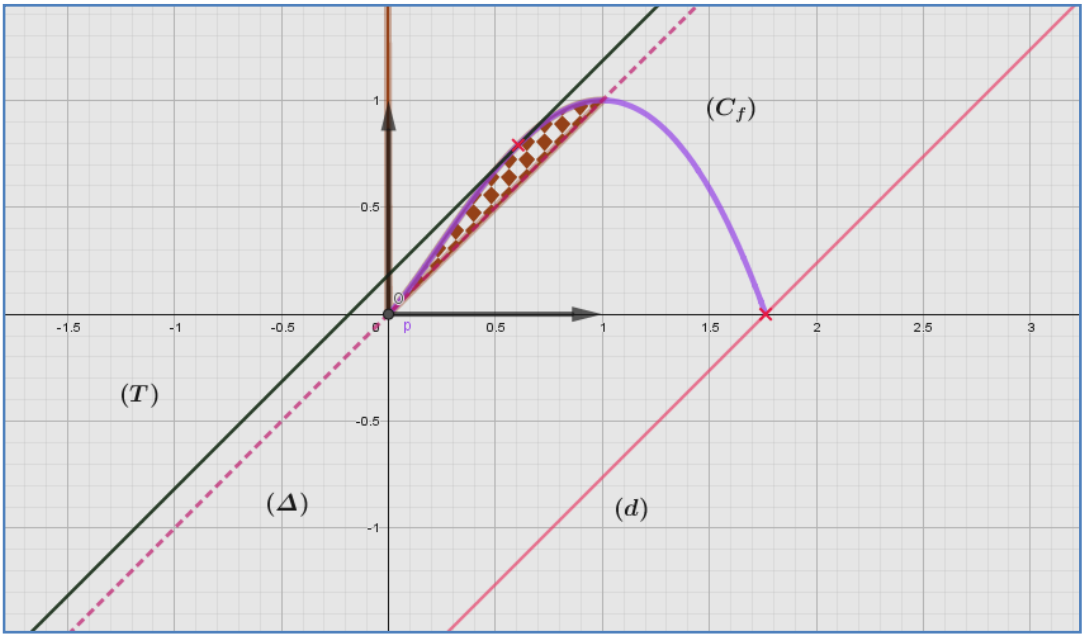
6) λ عدد حقيقي محصور تماما بين العددين 0 و 1 : $A(\lambda)=\int_\lambda^1 -x^2\ln x\,dx$

أ. حساب $A(\lambda)=\left[-\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_\lambda^1+\frac{1}{3}\int_\lambda^1 x^3.\frac{1}{x}dx$ أي

$A(\lambda)=\left[-\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_\lambda^1+\frac{1}{3}\int_\lambda^1 x^2dx=\left[-\frac{1}{3}x^2\ln x+\frac{1}{9}x^3\right]_\lambda^1$ و منه $A(\lambda)=\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\lambda^2.\ln\lambda-\frac{1}{9}\lambda^3$

ب. حساب $\lim\limits_{\lambda\xrightarrow{>}0}A(\lambda)=\frac{1}{9}$ لان $\lim\limits_{\lambda\xrightarrow{>}0}\frac{1}{0}\lambda^2.\ln\lambda=0$ بالتزايد المقارن

التفسير الهندسي : مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $y=x$; $x=0$; $x=1$ هي $\frac{1}{9}\times 3^2=1\,cm^2$.

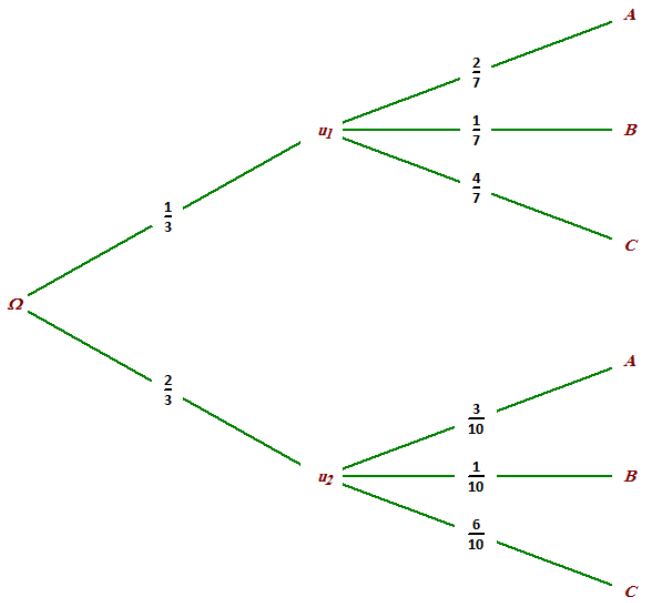


التصحيح المفصل للموضوع الثاني :

التمرين الأول :

1. لدينا $P_{U_2}(B)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$ و $P_{U_2}(A)=\frac{3}{10}$ و منه $P_{U_2}(C)=\frac{6}{10}$

الشجرة للاحتمالات هي :



2. حساب الاحتمالات :

$P(A)=P(A\cap U_1)+P(A\cap U_2)$ * و منه $P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}$ إذن $P(A)=\frac{2}{21}+\frac{1}{5}=\frac{31}{105}$

$P(B)=P(B\cap U_1)+P(B\cap U_2)$ و منه $P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{10}$ إذن $P(B)=\frac{1}{21}+\frac{1}{15}=\frac{12}{105}$

$P(C)=P(C\cap U_1)+P(C\cap U_2)$ و منه $P(C)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{6}{10}$ إذن $P(C)=\frac{4}{21}+\frac{2}{5}=\frac{62}{105}$

3. أ- قيم X هي 0 و 1 و 2

ب- $P(X=1)=\frac{62}{105}$ و $P(X=0)=\frac{12}{105}$ و $P(X=2)=\frac{31}{105}$

قانون الاحتمال

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{12}{105}$	$\frac{62}{105}$	$\frac{31}{105}$

4. حساب الأمل ألرياضياتي $E(X)=\frac{0+62+62}{105}=\frac{124}{105}=1{,}180$.

التمرين الثاني :

و (u_n) متتالية عددية حيث $u_1=0$ و $u_{n+1}=u_n+2\sqrt{u_n}+1$.

1) أ-التحقق : لدينا $u_{n+1}=u_n+2\sqrt{u_n}+1$ يعني أن $u_{n+1}=\left(\sqrt{u_n}+1\right)^2$ و منه $u_{n+1}-\left(\sqrt{u_n}+1\right)^2=0$ يكافئ

$\left[\sqrt{u_{n+1}}-\left(\sqrt{u_n}+1\right)\right]\left[\sqrt{u_{n+1}}+\left(\sqrt{u_n}+1\right)\right]=0$ يكافئ أن $\left[\sqrt{u_{n+1}}-\left(\sqrt{u_n}+1\right)\right]=0$ و يكافئ $\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}=1$

بطريقة أخرى $\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}=1$ يعني $\sqrt{u_{n+1}}=\sqrt{u_n}+1$ أو بالتربيع نجد $u_{n+1}=u_n+2\sqrt{u_n}+1$.

ب-لدينا $\begin{cases}\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}=1\\ \sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n-1}}=1\\ \dots\\ \dots\\ \sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}=1\end{cases}$ بالجمع نجد $\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_1}=\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ مرة}}$ أي أن $\sqrt{u_{n+1}}=n$ و منه $u_{n+1}=n^2$

و منه $u_n=(n-1)^2$ هي العبارة المطلوبة

2) التحقق : $u_n=(n-1)^2$ يكافئ $u_n=n^2-2n+1$ أي أن $u_n=n(n-2)+1$.

3) تعيين قيم n حتى يكون $n-2$ قاسماً $n-5$ أي أن $n-5\equiv 0[n-2]$ أي $-3\equiv 0[n-2]$ أي أن $n-2$ قاسم للعدد -3 : $\begin{cases}n-2=-3\\ n-2=-1\\ n-2=1\\ n-2=3\end{cases}$ أي ان $\begin{cases}n=-1 \text{ مرفوض}\\ n=1\\ n=3\\ n=5\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}n=1\\ n=3\\ n=5\end{cases}$ القيم هي 1 و 3 و 5 .

4) أ-إثبات $p\gcd(n-2;u_n)=1$: بما أن $u_n=n(n-2)+1$ يعني $u_n-n(n-2)=1$ حسب مبرهنة بيزو فإن $p\gcd(n-2;u_n)=1$.

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n : حتى يكون $(n-2)(n^2+1)$ قاسم للعدد $(n-5)u_n$

بما أن $p\gcd(n-2;u_n)=1$ فإن $(n-2)(n^2+1)$ قاسم للعدد $(n-5)u_n$ يعني أن $n-2$ قاسماً $n-5$ و من ما سبق وجدنا قيم للعدد n و هي 1 أو 3 أو 5

لما $n=1$ نجد $(n-2)(n^2+1)=-2$ و $(n-5)u_n=0$ محققة -2 قاسم 0 .

لما $n=3$ نجد $(n-2)(n^2+1)=10$ و $(n-5)u_n=-8$ غير محققة .

لما $n=5$ نجد $(n-2)(n^2+1)=78$ و $(n-5)u_n=0$ محققة 78 قاسم 0 .

القيم المطلوبة للعدد n هي 1 و 5 .

التمرين الثالث

1. لدينا $P(z)=z^4-6z^3+29z^2-24z+100$

أ - لدينا $P(\bar{z})=\bar{z}^4-6\bar{z}^3+29\bar{z}^2-24\bar{z}+100$ أي أن $P(\bar{z})=\overline{z^4-6z^3+29z^2-24z+100}$ و منه $P(\bar{z})=\overline{P(z)}$.

و منه $P(z)=0$ يكافئ أن $\overline{P(z)}=0$ يكافئ $P(\bar{z})=0$ يعني أنه لو كان z للمعادلة $P(z)=0$ فإن $\bar{z}$ حل لهذه المعادلة .

ب -للمعادلة $P(z)=0$ حل تخيلي و لبكن $z_0=\beta i$ حيث β عدد حقيقي

$(\beta i)^4-6(\beta i)^3+29(\beta i)^2-24(\beta i)+100=0$ يكافئ $\beta^4+6\beta^3 i-29\beta^2-24\beta i+100=0$ أي أن

$\beta^4-29\beta^2+100+(6\beta^3-24\beta)i=0$ يكافئ $\beta^4-29\beta^2+100=0$ و $(6\beta^3-24\beta)=0$

و $(6\beta^3-24\beta)=0$ يكافئ $6\beta(\beta^2-4)=0$ يكافئ $\beta=0$ او $\beta=-2$ او $\beta=2$ بالتعويض في المعادلة $\beta^4-29\beta^2+100=0$ نجد أن $2^4-29\times 2^2+100=0$ و $(-2)^4-29\times(-2)^2+100=0$ محققة و منه $\beta=2$ أو $\beta=-2$

$z_0=2i$ و $z_1=-2i$ هما الحلين التخيليان الصرفيان .

نحلل $P(z)$ الى جداء

$P(z)=(z-2i)(z+2i)(z^2+az+b)$ أي أن $P(z)=(z^2+4)(z^2+az+b)$ بالنشر نجد

$P(z)=z^4+az^3+(4+b)z^2+4az+4b$ بالمطابقة نجد $\begin{cases} a=-6 \\ 4+b=29 \\ 4a=-24 \\ 4b=100 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} a=-6 \\ b=25 \end{cases}$ و منه

$P(z)=(z^2+4)(z^2-6z+25)$

$P(z)=0$ يكافئ $(z^2+4)(z^2-6z+25)=0$ يكافئ $z=2i$ و $z=-2i$ او $(z^2-6z+25)=0$ تحل بالمميز

$\Delta=-64$ و منه للمعادلة حلين هما $z=3+8i$ او $z=3-8i$ مجموعة الحلول هي

$S=\{-2i;2i;3-8i;3+8i\}$

2. نعتبر $z_A=2i$; $z_B=3-4i$ و $z'=\dfrac{-iz+4+3i}{z-2i}$ حيث $M(z)$; $M'(z')$ و I مرجح الجملة $\{(A;2);(B;1)\}$ و J مرجح الجملة $\{(A;-2);(B;1)\}$.

أ. تعيين اللاحقتين $z_1=\dfrac{2z_A+z_B}{3}=\dfrac{4i+3-4i}{3}=\dfrac{3}{3}=1$ و $z_2=\dfrac{-2z_A+z_B}{-1}=\dfrac{-4i+3-4i}{-1}=-3+8i$.

ب. مجموعة النقط (E) حيث $(E)=\{M(z):\ |z'|=2\}$

النقطة M تنتمي الى (E) يعني أن $\left|\dfrac{-iz+4+3i}{z-2i}\right|=2$ يكافئ أن $|-iz+4+3i|=2|z-2i|$ يكافئ

$|z+4i-3|=2|z-2i|$ (بالضرب في $|i|$ في الطرف الأيسر)

$|z+4i-3|=2|z-2i|$ يكافئ $MB=2MA$ يكافئ $MB^2=4MA^2$ يكافئ $MB^2-4MA^2=0$ يكافئ

$(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA})(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA})=0$ يكافئ $\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{MI}=0$

مجموعة النقط (E) هي الدائرة ذات القطر $[IJ]$ و إنشائها في أخر التمرين

ج.لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg(z')=2\pi k$ و k عدد صحيح أي أن (z' عدد حقيقي موجب)

التحقق : أن $D\in(\Gamma)$ حيث $z_D=\dfrac{9}{2}-\dfrac{5}{2}i$. بالتعويض في $z'=\dfrac{-iz+4+3i}{z-2i}$ نجد $z'=\dfrac{-i\left(\dfrac{9}{2}-\dfrac{5}{2}i\right)+4+3i}{\dfrac{9}{2}-\dfrac{5}{2}i-2i}$

و منه $z'=\dfrac{-\dfrac{9}{2}i-\dfrac{5}{2}+4+3i}{\dfrac{9}{2}-\dfrac{9}{2}i}$ أي أن $z'=\dfrac{-\dfrac{3}{2}i+\dfrac{3}{2}}{\dfrac{9}{2}-\dfrac{9}{2}i}=\dfrac{-3i+3}{9-9i}$ أي أن $z'=\dfrac{1}{3}$ أي أن $\arg(z')=2\pi k$ و منه

$D\in(\Gamma)$.

$\arg(z')=2\pi k$ يعني أن $\arg\left(\dfrac{-iz+4+3i}{z-2i}\right)=2\pi k$ يكافئ $\arg\left[\left(\dfrac{z+4i-3}{z-2i}\right)(-i)\right]=2\pi k$ يكافئ

$\arg\left[\left(\dfrac{z+4i-3}{z-2i}\right)\right]+\arg(-i)=2\pi k$ يكافئ $\arg\left[\left(\dfrac{z+4i-3}{z-2i}\right)\right]-\dfrac{\pi}{2}=2\pi k$ يكافئ

$\arg\left[\left(\dfrac{z+4i-3}{z-2i}\right)\right]=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ يكافئ $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k:\ k\in Z$ مجموعة النقط (Γ) هي قوس من الدائرة التي

قطرها $[AB]$ و الشامل للنقطة D

المجموعة (Γ) إنشائها في أخر التمرين

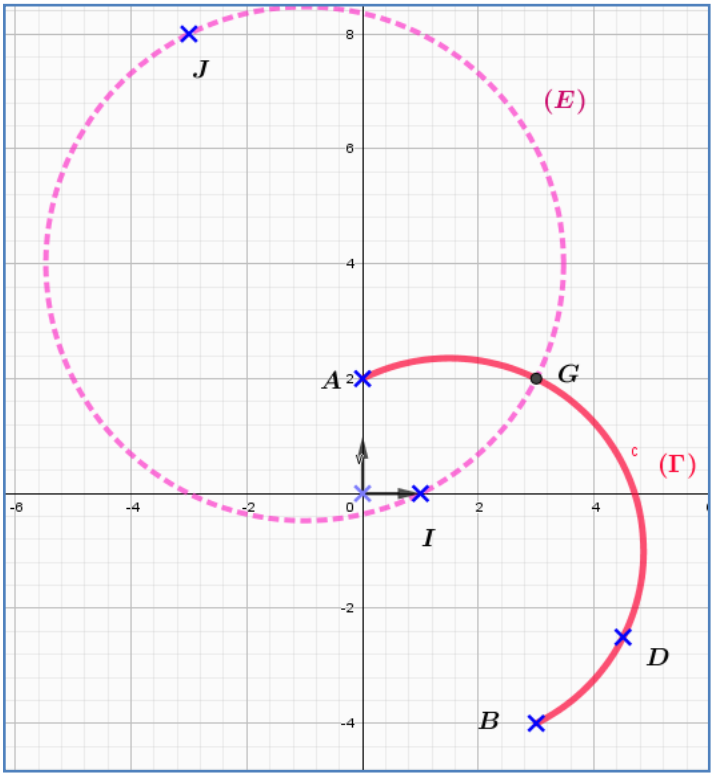
3. تعيين الشكل الجبري لتقاطع (Γ) و (E)

$\arg(z')=2\pi k$ و $|z'|=2$ يعني أن $z'=2$ أي أن $\frac{-iz+4+3i}{z-2i}=2$ يكافئ $-iz+4+3i=2z-4i$ أي أن

$(-i-2)z=-4-7i$ و منه

$$z=\frac{4+7i}{2+i}=\frac{(4+7i)(2-i)}{5}$$

أي $z=3+2i$ إذن $z_G=3+2i$



التمرين الرابع :

I - لدين $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ ا .

1. إثبات أن كل المنحنيات (C_k) تشمل نقطتين ثابتتين يعني إحداثياتها لا تتعلق بالثابت k يعني أن $-kx=0$ أو $(x+1)^2=0$ من أجل كل ثابت حقيقي k يعني أن $x=0$ او $x=-1$ و منه $f_k(0)=(0+1)^2e^{-k.0}=1$ و $f_k(-1)=(-1+1)^2e^{k}=0$ منه المنحنيات (C_k) كلها تشمل $A(0;1)$ و $B(-1;0)$.

2. حساب النهايات :

لما k معدوم : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

لما k حقيقي موجب تماما : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-kx}=0$ بالتزايد المقارن .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-kx}=+\infty$

لما k حقيقي سالب تماما : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-kx}=0$ بالتزايد المقارن .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-kx}=+\infty$.

3. أ. حساب المشتقة $f_k'(x)=2(x+1)e^{-kx}-k(x+1)^2e^{-kx}$ أي أن $f_k'(x)=(x+1)(-kx-k+2)e^{-kx}$

المناقشة :

لما k معدوم : $f_0'(x)=2(x+1)$ موجبة على المجال $[-1;+\infty[$ و منه الدالة f_0 متزايدة على هذا المجال و سالبة على $]-\infty;-1]$ و منه الدالة f_0 متناقصة على هذا المجال

لما k حقيقي موجب تماما : فإن $f_k'(x)=0$ يكافئ $x=-1$ او $x=\frac{-k+2}{k}$ (و $\frac{-k+2}{k}\geq-1$)

و $f_k'(x)\geq0$ يكافئ x ينتمي للمجال $\left[-1;\frac{-k+2}{k}\right]$ و منه f_k متزايدة على هذا المجال

و $f_k'(x)\leq0$ يكافئ x ينتمي الى إحدى المجالين $]-\infty;-1]$ او $\left[\frac{-k+2}{k};+\infty\right[$ و منه f_k متناقصة على هذين المجالين .

لما k حقيقي سالب : فإن $f_k'(x)=0$ يكافئ $x=-1$ او $x=\frac{-k+2}{k}$ (و $\frac{-k+2}{k}\leq-1$)

و $f_k'(x)\geq0$ يكافئ x ينتمي الى إحدى المجالين $\left]-\infty;\frac{-k+2}{k}\right]$ او $[-1;+\infty[$ و منه f_k متزايدة على هذين المجالين .

و $f_k'(x)\leq0$ يكافئ x ينتمي للمجال $\left[\frac{-k+2}{k};-1\right]$ و منه f_k متزايدة على هذا المجال

ب-لما k حقيقي موجب تماما : جدول تغيراتها

x	$-\infty$		-1		$\frac{-k+2}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$+\infty$	↘	$f_k(-1)$	↗	$f_k\left(\frac{-k+2}{k}\right)$	↘	0

4. دراسة الوضع النسبي بين (C_k) و (C_{k+1}) نحسب الفرق

$f_{k+1}(x)-f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}\left[\frac{1}{e^x}-1\right]$ و منه

$f_{k+1}(x)-f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}\left[\frac{1-e^x}{e^x}\right]$ إشارة الفرق من إشارة $1-e^x$

ينعدم عند 0 و (-1) ومنه (C_{k+1}) و (C_k) يتقاطعان عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 0 و (-1) .

و يكون موجب على المجال $]-\infty;0[$ و منه يكون (C_{k+1}) فوق (C_k) على هذا المجال

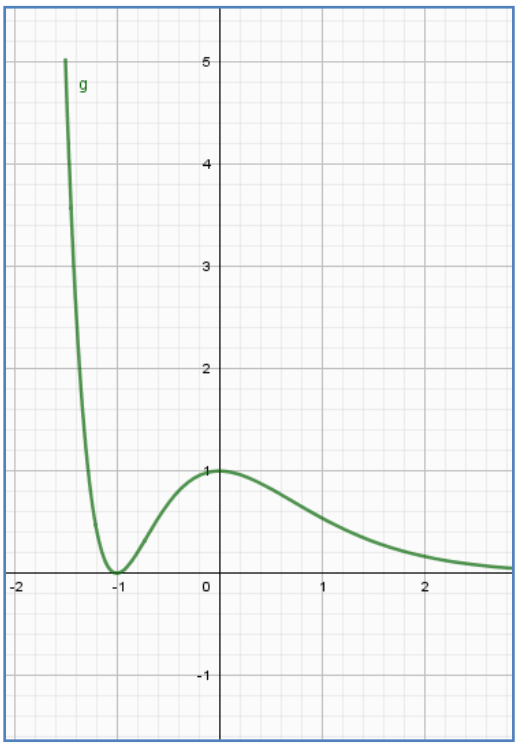
و يكون سالب على المجال $]0;+\infty[$ و منه يكون (C_{k+1}) تحت (C_k) على هذا المجال

II- لتكن $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$

1. جدول تغيرات على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$

x	$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{e^3}{4}$	↘	0	↗	1	↘	0

و الرسم المنحنى (C_f)



2. أ-لدينا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و $f(x)=1$ تكافئ $f(x)-1=0$ نضع $h(x)=f(x)-1$ و نحسب $h(-1{,}28)=0{,}01$ $h(-1{,}27)=-0{,}08$; و h مستمرة و متناقصة على المجال $]-\infty;-1]$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا α حيث $-1{,}28<\alpha<-1{,}27$ و $h(0)=f(0)-1=0$ الحل الأخر معدوم .

ب-تعيين m حتى يكون للمعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حل وحيد

$\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ يعني أن $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|^2=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|^2$ يكافئ $f(x)=f(m)$

من البيان نلاحظ أن المنحنى (C_f) و المستقيم $(\Delta_{;m}): y=f(m)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة لما m تنتمي للمجال $]-\infty;\alpha[$.

3. لدينا $g(x)=(x+1)e^{-2x}$ المعرفة على $\mathbb{R}$

أ - إثبات أن $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ نحسب $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=e^{-2x}-2(x+1)e^{-2x}+2(x+1)e^{-2x}-e^{-2x}=0$ محققة .

و منه $g(x)=-\frac{1}{2}g'(x)+\frac{1}{2}e^{-2x}$ أي أن الدالة الأصلية لدالة g هي G حيث $G(x)=-\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{4}e^{-2x}+c$ و c ثابت حقيقي أي $G(x)=-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c$

ب-حساب التكامل $\int_{-1}^{0} f(x)dx = \left[-\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0}(x+1)e^{-2x}dx = -\frac{1}{2} + \int_{-1}^{0} g(x)dx$ و منه

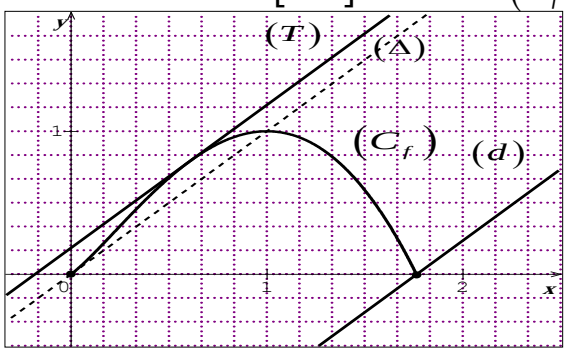
$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(x+1)e^{-2x}dx = -\frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_{-1}^{0}$$

و منه $\int_{-1}^{0} f(x)dx = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^2 = \frac{-5+e^2}{4}$ إذن المساحة هي $\frac{-5+e^2}{4} u.a$

عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول: (04 نقاط)		
1) حل المعادلة في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: الحل الخاص $(x_0;y_0)=(4;3)$ $PGCD(673;505)=1$ ومنه: $(x;y)=(673k+4;505k+3)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$	0.5 0.75 0.75	**02**
2) بيان أن x و y لهما نفس الإشارة: $(673k+4)(505k+3)>0$ محققة من أجل كل $k\in\mathbb{Z}$	0.5	**0.5**
3) كتابة u_α بدلالة α: (u_n) متتالية حسابية، $\alpha\in\mathbb{N}$; $u_\alpha=3+505\alpha$	2×0.25	**01**
- كتابة v_β بدلالة β: (v_n) متتالية حسابية، $\beta\in\mathbb{N}$; $v_\beta=4+673\beta$	2×0.25	
4) أ) تعيين الحدود المشتركة بين (u_n) و (v_n): $u_\alpha=v_\beta$ تكافئ $3+505\alpha=4+673\beta$ ومنه: $505\alpha-673\beta=1$ ومنه: $(\alpha;\beta)=(673k+4;505k+3)$ مع $k\in\mathbb{N}$ $u_\alpha=505\alpha+3$ أي $u_k=339865k+2023$ مع $k\in\mathbb{N}$. اي $w_n=339865n+2023$ وهي حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r=339865$ وحدها الأول 2023 **ب)** $p=X_1.X_2.....X_n=(673)^n n!$	0.25 0.25	**0.5**
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
1) تبيان أن المثلث ABC قائم في A: $\overrightarrow{AB}(0;-2;1)$ ، $\overrightarrow{AC}(0;2;4)$. $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0$ ومنه: ABC قائم في A.	2×0.25 0.5 0.25	**1.25**
2) كتابة معادلة المستوي (Q): $(Q): y+2z+2=0$	0.75	**0.75**
3) أ. إثبات أن (P_m) يشمل مستقيما ثابتا (Δ) مع تعيين تمثيل وسيطي له: $(P_m):(m-1)x+2y-z-m=0$ .....① تكافئ $m(x-1)+(-x+2y-z)=0$ ومنه: $\begin{cases}x-1=0\\-x+2y-z=0\end{cases}$ و ومنه: $\begin{cases}x=1\\z=2y-1\end{cases}$ و إذن: $(\Delta):\begin{cases}x=1\\y=t\\z=2t-1\end{cases}$ و مع $t\in\mathbb{R}$	0.25 0.25	**01**
• التحقق أن A و C نقطتان من (Δ): $A\in(\Delta):\begin{cases}x=1\\y=t=0\\z=2(0)-1=-1\end{cases}$ ، $C\in(\Delta):\begin{cases}x=1\\y=t=2\\z=2(2)-1=3\end{cases}$	0.25	
ب. تبيان أن (P_m) يعامد المستوي (Q): • $\overrightarrow{n_{(P_m)}}(m-1;2;-1)$ و $\overrightarrow{n_{(Q)}}(0;1;2)$ ومنه $\overrightarrow{n_{(P_m)}}\bullet\overrightarrow{n_{(Q)}}=0$	0.25	
4) أ. تبيان أن $d(m)=\dfrac{5}{\sqrt{m^2-2m+6}}$: $d(m)=\dfrac{\lvert(m-1)(1)+2(-2)-0-m\rvert}{\sqrt{(m-1)^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{m^2-2m+6}}$	0.25	**01**

عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
- تعيين قيمة m حتى تكون $d(m)$ أعظمية: $d(m)$ أعظمية من أجل $m=1$ (تقبل أي إجابة صحيحة). ومنه: $d(1)=\sqrt{5}$	0.25 0.25	
ب. استنتاج أنه إذا كان $d(m)$ أعظميا فإن A المسقط العمودي لـ B على (P_m): من أجل $m=1$. $\begin{cases} AB=\sqrt{5}=d(1) \\ A\in(p_m) \text{ و} \end{cases}$ ومنه A المسقط العمودي لـ B	0.25	
التمرين الثالث: (05 نقاط)		
1) - حل المعادلة في $\mathbb{C}$: $(z^2+1)(z^2-2z+3)=0$ .....① ① تكافئ $\begin{cases} z^2+1=0 \\ z^2-2z+3=0 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} z_1=i \;;\; z_2=\overline{z_1} \\ z_3=1+i\sqrt{2} \;;\; z_4=\overline{z_3} \end{cases}$	6×0.25	**1.50**
2) **أ.** حساب $\lvert z_A-1\rvert$ ، $\lvert z_C-1\rvert$ و $\lvert z_D-z_E\rvert$. $\lvert z_A-1\rvert=\sqrt{2}$ ، $\lvert z_C-1\rvert=\sqrt{2}$ و $\lvert z_D-z_E\rvert=\sqrt{2}$	0.75	**1.50**
- استنتاج أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة. لدينا: $\lvert z_A-z_E\rvert=\lvert z_C-z_E\rvert=\lvert z_D-z_E\rvert=\sqrt{2}$ و بما أن B نظيرة C بالنسبة إلى محور الفواصل فإن: $AE=CE=DE=BE=\sqrt{2}$ ومنه: النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها E و طول نصف قطرها $\sqrt{2}$.	0.25 0.25	
ب. تبيان أن $z_B-z_E=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z_A-z_E)$. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z_A-z_E)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(i\sqrt{2})=i-1=z_B-z_E$	0.25	
- الاستنتاج : $z_B-z_E=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z_A-z_E)$ حيث $a=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه B صورة A بدوران مركزه E و زاويته $\frac{\pi}{4}$.	0.5	**0.75**
- طبيعة المثلث ABE : في المثلث ABE لدينا $\begin{cases} AE=BE \\ (\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EB})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$ ومنه المثلث ABE متساوي الساقين رأسه E. (تقبل أي طريقة صحيحة)	0.25	

عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
3) - تعيين $z_{\overrightarrow{BD}}$ و $z_{\overrightarrow{AE}}$: $z_{\overrightarrow{BD}}=-2i$ و $z_{\overrightarrow{AE}}=-i\sqrt{2}$	2×0.25	**0.75**
- تحديد طبيعة الرباعي $ABDE$. لدينا: $\frac{z_{\overrightarrow{AE}}}{z_{\overrightarrow{BD}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\in\mathbb{R}$ ومنه: $\begin{cases}(AE)//(BD)\\ AE\neq BD\end{cases}$ ومنه: الرباعي $ABDE$ شبه منحرف.	0.25	
أ. تبيان أنه $\overrightarrow{w_1}\perp\overrightarrow{w_2}$ يكافئ $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0$ $\overrightarrow{w_1}\perp\overrightarrow{w_2}$ معناه $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0$ لدينا: $z_1\overline{z_2}=-\overline{z_1}z_2$ معناه $\frac{z_1}{z_2}=-\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=-\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$، مع $z_2\neq 0$ أي: $\frac{z_1}{z_2}$ تخيلي صرف أي $\frac{z_1}{z_2}=\alpha i$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ ، أي $\left(\overrightarrow{w_2};\overrightarrow{w_1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. (تقبل أي طريقة أخرى صحيحة) **ملاحظة : إذا كان $\overrightarrow{w_1}=\vec{0}$ أو $\overrightarrow{w_2}=\vec{0}$ فإن التكافؤ صحيح**	0.25	**0.5**
ب. تحديد طبيعة مجموعة النقط $M(z)$. $(z-z_A)(\overline{z}-z_D)+(z-z_B)(\overline{z}-z_C)=0$ معناه $(z-z_A)\overline{(z-z_B)}+(z-z_B)\overline{(z-z_A)}=0$ أي: $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=0$ ومنه مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة ذات القطر $[AB]$.	0.25	
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
1) البرهان أنه من أجل كل $x>1$ فإن $1-x-2x\ln x<0$: * من أجل $x>1$: $\begin{cases}1-x<0\\ -2x\ln x<0\end{cases}$ ومنه: $1-x-2x\ln x<0$.	0.25	**0.5**
– البرهان أنه من أجل كل $0<x<1$ فإن $1-x-2x\ln x>0$: * من أجل $0<x<1$: $\begin{cases}1-x>0\\ -2x\ln x>0\end{cases}$ ومنه: $1-x-2x\ln x>0$.	0.25	
2) أ) إثبات أن f قابلة للاشتقاق عند العدد 0 من اليمين: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1=f'_d(0)$	0.25	**01**
كتابة معادلة نصف المماس (Δ) عند $O(0;0)$: $(\Delta): y=x$	0.25	

عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ): $f(x)-x=-x^2\ln x$ • (C_f) أعلى (Δ) في المجال $[0;1[$. • (C_f) أسفل (Δ) في المجال $]1;+\infty[$. • (C_f) يقطع (Δ) في نقطتين $N(1;1)$ و $O(0;0)$.	0.5	
3) أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)\right]=-\infty$	0.25	**1.50**
ب. دراسة اتجاه تغير f على المجال $[0;+\infty[$: $f'(x)=1-x-2x\ln x$ • f متناقصة تماما على المجال $[0;1]$. • f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.	2×0.5	
• جدول التغيرات.	0.25	
4) أ. كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) الموازي لـ (Δ): $f'(x_0)=1$ ومنه: $x_0=\frac{1}{\sqrt{e}}$ و بالتالي: $(T): y=x+\frac{1}{2}e^{-1}$.	3×0.25	**03**
ب. البرهان أن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]1;+\infty[$: f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times f(1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha\in]1;+\infty[$.	0.5	
• التحقق أن $\alpha\in]1,76;1,77[$: $f(1,76)\times f(1,77)=(0,008)(-0,018)<0$ ومنه: $\alpha\in]1,76;1,77[$.	0.25	
جـ. كتابة معادلة المستقيم (d) الموازي لـ(Δ) و يشمل النقطة ذات الإحداثيين $(\alpha;0)$: $(d): y=x-\alpha$	0.25	
• رسم (Δ)، (d)، (T) و (C_f) على المجال $[0;\alpha]$:  	3×0.25 0.5	

عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
5) المناقشة الوسيطية لعدد حلول المعادلة في المجال $[0;\alpha]$: $x^2\ln x+m=0$ تكافئ $f(x)=x+m$ و $x\neq 0$ • $m\in\left]-\infty;-\alpha\right[\cup\left]\frac{1}{2}e^{-1};+\infty\right[$ ، ليس للمعادلة حل. • $m\in[-\alpha;0]$ ، حل وحيد. • $m\in\left]0;\frac{1}{2}e^{-1}\right[$ ، حلان متمايزان. • $m=\frac{1}{2}e^{-1}$ ، حل مضاعف.	0.25 0.25	**0.50**
6) - حساب $A(\lambda)$ بالتجزئة: $A(\lambda)=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\lambda^3+\frac{1}{3}\lambda^3\ln\lambda$	0.25	**0.50**
- حساب $\lim\limits_{\lambda\xrightarrow{>}0}A(\lambda)$: $\lim\limits_{\lambda\xrightarrow{>}0}A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\xrightarrow{>}0}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\lambda^3+\frac{1}{3}\lambda^3\ln\lambda\right)=\frac{1}{9}$ - التفسير الهندسي: $\lim\limits_{\lambda\xrightarrow{>}0}A(\lambda)=\frac{1}{9}(u.a)=1cm^2$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).	0.25	

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول:(04 نقاط) **1)** إكمال الشجرة **2)** حساب $p(A)$ ، $p(B)$ و $p(C)$ **3)** أ) قيم X هي 0، 1 و 2 . ب)توزيع قانون الاحتمال الأمل الرياضياتي : $E(X)=\frac{124}{105}$	4×0.25 3×0.5 0.5 3×0.25 0.25	**4**
التمرين الثاني:(04 نقاط) **1)** أ) التحقق **ب)** استنتاج كتابة $u_n=(n-1)^2$	01 01	**02**
2) التحقق من أن: $u_n=n(n-2)+1$	01	**01**
3) $n-2$ يقسم 3 و $n-2\in\{-3;-1;1;3\}$ وقيم n المطلوبة هي: 1، 3، 5.	0.5	**0.5**
4) أ) لدينا: $u_n-n(n-2)=1$ تطبيق مبرهنة بيزو وتقبل أي طريقة أخرى سليمة. **ب)** بتطبيق مبرهنة غوص: $n-2$ يقسم $n-5$ قيم n المطلوبة هي: 1، 5.	0.25 0.25	**0.5**
التمرين الثالث:(05 نقاط) **1)** أ) $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$ تبرير الاستنتاج: إذا كان z حلا فإن $\bar{z}$ هو حل كذلك	0.5 0.5	**01**
ب) $P(z)=(z^2+\alpha)(az^2+bz+c)$ أي ($P(\alpha i)=0$ + التحليل) حلول المعادلة هي: $2i$ ، $3-4i$ ، $-2i$ ، $3+4i$	0.75 1	**1.75**
2) أ) حساب $z_I=1$ و $z_J=-3+8i$ **ب)** برهان التكافؤ تعيين (E) و إنشاؤها **ج)** التحقق أن $D\in(\Gamma)$ و تعيين (Γ) و إنشاؤها	0.5x2 0.25 0.25 2x0.25	**2**
3) الشكل الجبري للاحقة النقطة G	0.25	**0.25**

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{12}{105}$	$\frac{62}{105}$	$\frac{31}{105}$

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الرابع:(07 نقاط) I) **1)** المنحنيات (C_k) تمر من النقطتين $(-1;0)$ و $(0;1)$ (تقبل كل الطرائق السليمة)	2x0.5	**01**
2) $k<0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=+\infty$ $k=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=+\infty$ $k>0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=0$	0.5 0.5 0.5	**01.50**
3) أ) حساب $f_k'(x)$ $f_k'(x)=(x+1)(-kx+2-k)e^{-kx}$ الحالة1: $k=0$ إشارة $f_k'(x)$ + اتجاه التغير مقارنة العددين -1 و $\frac{2-k}{k}$ في حالة $k\neq 0$ الحالة2: $k>0$ إشارة $f_k'(x)$ + اتجاه التغير الحالة3: $k<0$ إشارة $f_k'(x)$ + اتجاه التغير	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25	**1.50**
ب) جدول التغيرات لما $k>0$	0.25	**0.25**
4) حساب $f_{k+1}(x)-f_k(x)$ (وضعية المنحنيين) إشارة $f_{k+1}(x)-f_k(x)$: x: $-\infty$ ، -1 ، 0 ، $+\infty$ $f_{k+1}(x)-f_k(x)$: $+$ ، 0 ، $+$ ، 0 ، $-$ تحديد الوضعية	0.25	**0.25**
II) **1)** جدول تغيرات الدالة f ملاحظة : تعطى العلامة الكاملة اذا استعمل التلميذ النتائج السابقة و تجزء العلامة في حالة دراسة تغيرات الدالة من جديد كما يلي (0.25+0.25+0.5) رسم المنحنى (C_f)	01 0.5	**1.50**
2) أ) تحديد الحل $x=0$ من جدول التغيرات تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة لحصر α **ب)** $f(x)=f(m)$ تقبل حلا وحيدا من أجل $m\in\left[-\frac{3}{2};\alpha\right[$	0.25 0.25	**0.50**

0.5	0.25 0.25	**3)** أ) التحقق $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ استنتاج الدالة الأصلية: $x\mapsto -\frac{1}{4}(2x+3)e^{-2x}$ **ب)** $A=\int_{-1}^{0} f(x)dx$ المكاملة بالتجزئة (الأولى) $A=\left(\frac{e^2-5}{4}\right)u.a$