الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2011

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 4 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضـــوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقطة)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 1-i$ ، $z_B = -1+i$ ، $z_C = \sqrt{3}(1+i)$

1/ اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A ، z_B ، z_C.

2/ أ/ احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم فسّر هندسيا النتائج المحصل عليها.

ب/ حدّد طبيعة المثلث ABC.

3/ عيّن لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معينا.

4/ T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = (-1+i)z + 1 - 3i$

أ/ عين طبيعة التحول T وعناصره المميزة.

ب/ استنتج طبيعة التحول ToT وعناصره المميزة.

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1 / نعتبر النقط $A(1;0;2)$ ، $B(1;1;4)$ ، $C(-1;1;1)$

أ/ أثبت أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب/ بيّن أن الشعاع $\vec{n}(3;4;-2)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2 / نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) حيث: $(P_1): 3x+4y-2z+1=0$ و $(P_2): 2x-2y-z-1=0$.

أ/ بيّن أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان.

ب/ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2).

جـ/ تحقّق أن النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى (Δ).

د/ احسب المسافتين $d(O;(P_1))$ و $d(O;(P_2))$ واستنتج المسافة $d(O;(\Delta))$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(U_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$$\begin{cases} U_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases} \quad \text{حيث:} \quad \begin{cases} m = PPCM\,(U_3, U_5) \\ d = PGCD\,(U_3, U_5) \end{cases}$$

1/ عيّن الحدين U_3 و U_5 ثم استنتج U_0

2/ اكتب U_n بدلالة n، ثم بيّن أن: 2010 حد من حدود (U_n) وعين رتبته.

3/ عين الحد الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (U_n) يساوي 10080

4/ n عدد طبيعي غير معدوم.

أ) احسب بدلالة n المجموع S حيث: $S = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{2n}$

ب) استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث: $S_1 = U_0 + U_2 + U_4 + ... + U_{2n}$

و $S_2 = U_1 + U_3 + U_5 + ... + U_{2n-1}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (3x + 4)e^x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ أ) احسب f'، f'' ثم برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن:

$f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^x$ حيث: f'، f''، ...، $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f

ب) استنتج حل المعادلة التفاضلية : $y'' = (3x + 16)e^x$

2/ أ) بيّن أن: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسيا

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ أ) اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ω التي فاصلتها $\frac{-10}{3}$.

ب) بين أن ω هي نقطة انعطاف المنحنى (C_f)

ج) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty;0]$.

4/ أ) x عدد حقيقي من المجال $]-\infty;0]$، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^{x} te^t dt$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$.

ب) λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$

احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$، $x = -\frac{4}{3}$ و $x = \lambda$ ، ثم جد $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$

الموضـــوع الثانـــي

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة : $13x-7y=-1 \ldots (E)$ حيث: x و y عددان صحيحان.

حل المعادلة (E).

2) عيّن الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث: $\begin{cases} a\equiv -1[7] \\ a\equiv 0[13] \end{cases}$

3) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13.

4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب، في نظام التعداد ذي الأساس 9، كما يلي : $\overline{\alpha 00\beta 086}$

حيث: α و β عددان طبيعيان ؛ $\alpha\neq 0$.

عيّن α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ ، $C(0;0;3)$ و $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)$

(D) المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1;1;\frac{3}{2}\right)$ و (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C

وشعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{1}{2};1;-3\right)$

1- اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (D) و (Δ) ثم ادرس الوضع النسبي لهما.

2- بين أن: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة G؟

3- عين شعاعا ناظميا $\vec{n}$ للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة له.

4- احسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC).

5- H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D).

أ) جد إحداثيات النقطة H.

ب) استنتج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1/ أ) الشكل المثلثي للعدد المركب $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ هو $-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

ب) $a^{2011}+\bar{a}=0$ حيث: $\bar{a}$ مرافق a

2/ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أ) التحويل T الذي كتابته المركبة: $z'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم

ب) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z-i)=\frac{-\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ذات اللاحقة i وشعاع توجيهه $\vec{u}$ لاحقته $1+i$.

3/ (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=\frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{6}$

أ) $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$

ب) (u_n) متناقصة تماما على N

جـ) (u_n) متباعدة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1/ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+\ln x^2-1$

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$

2/ f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=(1-\frac{1}{x^2})\ln x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ/ بين أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وأن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ (δ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$

- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (δ) ثم جد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln x$ ، ماذا تستنتج ؟
- ارسم (δ) و (C_f).

3/ أ/ x عدد حقيقي من المجال $[1;+\infty[$، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\,dt$

- تحقق أن: $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $[1;+\infty[$.
- استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $[1;+\infty[$.

ب/ α عدد حقيقي أكبر تماما من 1.

احسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=\alpha$ ، ثم احسب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)$

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4.5 نقطة)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.
A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب :
$z_A = 1-i$ ، $z_B = -1+i$ و $z_C = \sqrt{3}(1+i)$.

1) اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة : z_A ، z_B و z_C .

2) أ- احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم فسّر هندسيا النتائج المحصل عليها .
ب- حدّد طبيعة المثلث ABC .

3) عيّن لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معيّنا .

4) T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = (-1+i)z + 1 - 3i$.
أ- عيّن طبيعة التحويل T وعناصره المميزة .
ب- استنتج طبيعة التحويل $T \circ T$ وعناصره المميزة .

التمرين الثاني : (4.5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) نعتبر النقط : $A(1;0;2)$ ، $B(1;1;4)$ و $C(-1;1;1)$.
أ- أثبت أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا .
ب- بيّن أن الشعاع $\vec{n}(3;4;-2)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) حيث :
$(P_1): 3x+4y-2z+1=0$ و $(P_2): 2x-2y-z-1=0$
أ- بيّن أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان .
ب- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) .
جـ- تحقق أن النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى (Δ) .

د- احسب المسافتين $d\left(O\,;(P_1)\right)$ و $d\left(O\,;(P_2)\right)$ واستنتج المسافة $d\left(O\,;(\Delta)\right)$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق :

$\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$ حيث : $\begin{cases} m = PPCM\,(u_3\,;u_5) \\ d = PGCD\,(u_3\,;u_5) \end{cases}$

1) عيّن الحدّين u_3 و u_5 ثم استنتج u_0 .

2) اكتب u_n بدلالة n ، ثم بيّن أن : 2010 حدّ من حدود (u_n) وعيّن رتبته .

3) عيّن الحدّ الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080

4) n عدد طبيعي غير معدوم .

أ- احسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n}$.

ب- استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث :

$S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}$ و $S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1}$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (3x+4)e^x$.

(c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ- احسب f' ، f'' ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$ حيث : f' ، f'' ، ... ، $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f .

ب- استنتج حل المعادلة التفاضلية : $y'' = (3x+16)e^x$

2) أ- بيّن أن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ وفسّر هذه النتيجة هندسيا .

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيّراتها .

3) أ- اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحني (c_f) في النقطة ω التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$.

ب- بيّن أن ω هي نقطة انعطاف للمنحني (c_f) .

جـ- ارسم (Δ) و (c_f) على المجال $]-\infty;0]$.

4) أ- x عدد حقيقي من المجال $]-\infty;0]$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^{x} te^t dt$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$.

ب- λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$.

احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحني (c_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=-\frac{4}{3}$ و $x=\lambda$ ثم جد $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

1) نعتبر المعادلة : (E) ... $13x-7y=-1$ حيث : x و y عددان صحيحان.
حل المعادلة (E) .

2) عيّن الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث : $\begin{cases} a\equiv -1[7] \\ a\equiv 0[13] \end{cases}$

3) ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13 .

4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 9 كما يلي :
$\overline{\alpha 00\beta 086}$ حيث : α و β عددان طبيعيان مع $\alpha\neq 0$.
عيّن α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91 .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط : $A(1;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ ، $C(0;0;3)$ و $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)$

(D) المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1;1;\frac{3}{2}\right)$

و (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C وشعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{1}{2};1;-3\right)$

1) اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (D) و (Δ) ثم ادرس الوضع النسبي لهما

2) بيّن أن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ، ما ذا تستنتج بالنسبة للنقطة G ؟

3) عيّن شعاعا ناظميا $\vec{n}$ للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة له .

4) احسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) .

5) H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D) .

أ- جد إحداثيات النقطة H .

ب- استنتج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D) .

التمرين الثالث : (4 نقطة)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية :

1) أ- الشكل المثلثي للعدد المركب $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ هو $-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

ب- $a^{2011}+\overline{a}=0$ حيث : $\overline{a}$ مرافق a .

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$:

أ- التحويل T الذي كتابته المركبة $z'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم .

ب- مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z-i)=-\frac{\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ذات اللاحقة i وشعاع توجيهه $\vec{w}$ لاحقته $1+i$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ :

$u_0=\frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{6}$.

أ- $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$

ب- (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- (u_n) متباعدة .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

1) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0\,;\,+\infty[$ بـ :

$$g(x)=x^2+\ln x^2-1$$

أ- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكل جدول تغيّراتها .

ب- احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0\,;\,+\infty[$.

2) f الدالة المعرفة على المجال $]0\,;\,+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x$.

و (c_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ- بيّن أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0\,;\,+\infty[$ وأن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيّراتها .

ب- (δ) المنحني الممثل للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0\,;\,+\infty[$.

- ادرس وضعية (c_f) بالنسبة إلى (δ) ثم جد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln x$ ، ما ذا تستنتج؟

- ارسم (δ) و (c_f) .

3) أ- x عدد حقيقي من المجال $[1\,;\,+\infty[$.

باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\,dt$.

- تحقق أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $[1\,;\,+\infty[$

- استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $[1\,;\,+\infty[$.

ب- α عدد حقيقي أكبر تماما من 1 .

احسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (c_f) و (δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=\alpha$ ، ثم احسب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)$.

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1) كتابة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي :

لدينا : $z_A = 1-i$ ومنه : $|z_A| = |1-i| = \sqrt{2}$

وبالتالي : $z_A = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ولدينا : $z_B = -1+i$ ومنه : ومنه : $|z_B| = |-1+i| = \sqrt{2}$

ومنه : $z_B = -1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

(لاحظ أن : $z_B = -1+i = -(1-i) = -z_A$)

ولدينا : $z_C = \sqrt{3}(1+i)$ ومنه : $|z_C| = \left|\sqrt{3}(1+i)\right| = \sqrt{3}\times\sqrt{2} = \sqrt{6}$

ومنه : $z_C = \sqrt{3}(1+i) = \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) أ- حساب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$:

لدينا : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1+i-1+i}{\sqrt{3}+i\sqrt{3}-1+i} = \frac{-2+2i}{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)}$

$$= \frac{-2+2i}{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)} \times \frac{\sqrt{3}-1-i\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}-1-i\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

ومنه : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{4+4i\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

وبالتالي :

$$\begin{cases} \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

التفسير الهندسي للنتائج المحصل عليها :

نعلم أن : $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{AB}{AC}$ وَ $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = (\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB})$

وبالتالي : $\frac{AB}{AC} = 1$ أي : $AB = AC$ وَ $(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

ب- تحديد طبيعة المثلث ABC :

من $AB = AC$ وَ $(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

3) تعيين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معيّنا :

نعلم أن المثلث ABC متقايس الأضلاع ، لكي يكون الرباعي $ACBD$ معيّنا يكفي أن يكون القطران $[AB]$ و $[CD]$ متناصفان في النقطة O

وهذا يعني أن النقطة D هي نظيرة النقطة C بالنسبة إلى O

ومنه : $z_D = -z_C = -\sqrt{3}(1+i)$

4) أ- تعيين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة :

لدينا : $z' = (-1+i)z + 1 - 3i$ وبالتالي فإن العبارة المركبة للتحويل T من الشكل $z' = az + b$ مع $a = -1+i$ و $b = 1 - 3i$ وبما أن : $|a| = \sqrt{2}$ نستنتج أن T هو تشابه مباشر : نسبته $k = |a| = \sqrt{2}$ ، زاويته $\theta = \arg(a) = \frac{3\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة z_Ω حيث :

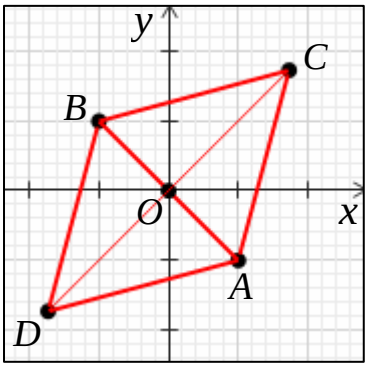
$z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ ومنه : $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1-3i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = 1 - i = z_A$

أي أن مركز التشابه T هو النقطة A .

ب- استنتاج طبيعة التحويل $T \circ T$ وعناصره المميزة :

تذكير : إذا كان $S(\Omega; k; \theta)$ و $S'(\Omega; k'; \theta')$ تشابهين غير مباشرين فإن المركب $S \circ S'$ هو تشابه غير مباشر حيث : $S \circ S' = S''(\Omega; kk'; \theta + \theta')$

وعليه فإن $T \circ T$ هو تشابه غير مباشر مركزه النقطة A ، نسبته $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ وزاويته $\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$.



التمرين الثاني :

1) أ- إثبات أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا :

تذكير : ● A ، B و C تعيّن مستويا معناه : A ، B و C ليست في استقامية .

● A ، B و C ليست في استقامية معناه : الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا .

● $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا معناه : لا يوجد عدد حقيقي t حيث :

$$\overrightarrow{AC} = t\,\overrightarrow{AB}$$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(0\,;1\,;2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\,;1\,;-1)$

واضح أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن مثلا : $\frac{0}{-2} \neq \frac{1}{1}$

ب- تبيان أن $\vec{n}(3\,;4\,;-2)$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$:

لدينا : $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 3\times0+4\times1-2\times2 = 4-4 = 0$ ومنه : $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$

و لدينا : $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 3\times(-2)+4\times1-2\times(-1) = 0$ ومنه : $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$

● استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

$\vec{n}(3\,;4\,;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) وبالتالي فإن معادلته من الشكل : $3x+4y-2z+d=0$ ، وبما أن $A \in (ABC)$ فإن :

$3\times1+4\times0-2\times2+d=0$ ومنه : $d=1$

إذن : معادلة للمستوي (ABC) هي $3x+4y-2z+1=0$

2) أ- تبيان أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان :

$\vec{n}_1(3\,;4\,;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_1)

$\vec{n}_2(2\,;-2\,;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2)

لدينا : $\vec{n}_1\,.\,\vec{n}_2 = 3\times2+4\times(-2)-2\times(-1) = 0$ ومنه : $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

إذن : المستويان (P_1) و (P_2) متعامدان .

ب- تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) :

لدينا : $\begin{cases} 3x+4y-2z+1=0 \\ 2x-2y-z-1=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} z=2x-2y-1 \\ 3x+4y-2z+1=0 \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} z=2x-2y-1 \\ 3x+4y-2(2x-2y-1)+1=0 \end{cases}$

وبعد التبسيط نحصل على الجملة : $\begin{cases} z=2x-2y-1 \\ -x+8y+3=0 \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} x=8y+3 \\ z=2(8y+3)-2y-1=14y+7 \end{cases}$

وبوضع $y=t$ نحصل على الجملة : $\begin{cases} x=8t+3 \\ y=t \\ z=14t+5 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

تمثل هذه الجملة الأخيرة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) . (توجد ثلاثيات أخرى)

جـ- التحقق أن النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى (Δ) :

من الجملة : $\begin{cases} 0=8t+3 \\ 0=t \\ 0=14t+5 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} t=-\frac{3}{8} \\ t=0 \\ t=-\frac{5}{14} \end{cases}$ وهذا مستحيل

نستنتج أن النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى (Δ) .

د- حساب المسافتين $d(O;(P_1))$ و $d(O;(P_2))$:

تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث :

$$\boxed{d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

وباستعمال المساواة المؤطرة نجد :

$$d_1 = d\left(O\,;(P_1)\right) = \frac{|0+0+0+1|}{\sqrt{9+16+4}} = \frac{1}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{29}$$

$$d_2 = d\left(O\,;(P_2)\right) = \frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3}$$

- استنتاج المسافة $d_3 = d\left(O\,;(\Delta)\right)$:

نعلم أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان و (Δ) مستقيم تقاطعهما .

النقطة O لا تنتمي إلى (P_1) ولا تنتمي إلى (P_2) .

المسافة بين النقطة O والمستقيم (Δ) هي الطول OH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (Δ) .

لتكن O' المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (P_2) ، وبالتالي فإن المثلث $OO'H$ قائم في O' ، وحسب مبرهنة فيثاغورث :

$$d_3^{\,2} = OH^2 = d_1^{\,2} + d_2^{\,2} = \left(\frac{\sqrt{29}}{29}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{38}{261}$$

إذن : $d_3 = d\left(O\,;(\Delta)\right) = \sqrt{\frac{38}{261}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{38}{29}}$

التمرين الثالث :

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق :

$$\begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases} \quad \text{حيث :} \quad \begin{cases} m = PPCM\,(u_3\,;u_5) \\ d = PGCD\,(u_3\,;u_5) \end{cases}$$

1) تعيين الحدّين u_3 و u_5 :

تذكير : a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

* إذا كان $PGCD\,(a\,;b) = d$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما بحيث : $a = d \times a'$ و $b = d \times b'$.

* $PGCD\,(a\,;b) \times PPCM\,(a\,;b) = a \times b$ أي $m \times d = a \times b$

لدينا : $m \times d = a \times b$ ومنه : $m \times d = da' \times db'$ إذن : $m = da'b'$

بوضع $u_3 = a$ و $u_5 = b$ تكتب المساواة : $m + d = 42$ كما يلي :

$da'b' + d = 42$ ومنه : $d\,(a'b'+1) = 42$ نستنتج أن : d يقسم 42 ... (1)

ولدينا : u_3 ، u_4 و u_5 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية حسابية

وحسب خاصية الوسط الحسابي لمتتالية حسابية فإن $u_3+u_5=2u_4$

ومنه : $u_3+u_5=30$ وبالتالي : $da'+db'=30$

ومنه : $d\left(a'+b'\right)=42$ ، نستنتج أن : d يقسم 30 ... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : d يقسم $PGCD\left(30;42\right)$ أي : d يقسم 6

ومنه : $d\in\{1;2;3;6\}$

نسمي $\left(E\right)$ الجملة الآتية : $\begin{cases} d\left(a'b'+1\right)=42 \\ d\left(a'+b'\right)=30 \end{cases}$

الحالة 1 : $d=1$

$\left(E\right)$ تكافئ $\begin{cases} a'b'+1=42 \\ a'+b'=30 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a'b'=41 \\ a'+b'=30 \end{cases}$ الجملة مستحيلة

الحالة 2 : $d=2$

$\left(E\right)$ تكافئ $\begin{cases} a'b'+1=21 \\ a'+b'=15 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a'b'=20 \\ a'+b'=15 \end{cases}$ الجملة مستحيلة

الحالة 3 : $d=3$

$\left(E\right)$ تكافئ $\begin{cases} a'b'+1=14 \\ a'+b'=10 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a'b'=13 \\ a'+b'=10 \end{cases}$ الجملة مستحيلة

الحالة 4 : $d=6$

$\left(E\right)$ تكافئ $\begin{cases} a'b'+1=7 \\ a'+b'=5 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a'b'=6 \\ a'+b'=5 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a'=2 \\ b'=3 \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} a=d\times a'=6\times 2=12 \\ b=d\times b'=6\times 3=18 \end{cases}$. إذن : $\begin{cases} u_3=12 \\ u_5=18 \end{cases}$

- استنتاج قيمة u_0 :

أساس المتتالية $\left(u_n\right)$ هو $r=u_5-u_4=18-15=3$

ولدينا : $u_3=u_0+3r$ ومنه : $u_0=u_3-3r=12-3\times 3=3$

إذن : $u_0=3$

2) كتابة u_n بدلالة n : $u_n=u_0+n\times r=3+3n$

- تبيان أن 2010 حدّ من حدود المتتالية $\left(u_n\right)$:

من المساواة : $2010=3+3n$ نجد : $n=669$ وهو عدد طبيعي .

نستنتج أن العدد 2010 هو حدّ من حدود المتتالية $\left(u_n\right)$ ورتبته 670 .

3) تعيين الحدّ الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) هو 10080 :

نفرض أن الحدّ الذي نبحث عنه هو u_p ، وحسب المعطيات فإن

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + u_{p+4} = 10080 \quad \dots (*)$$

لكن : $u_{p+1} = u_p + r$ ، $u_{p+2} = u_p + 2r$ ، $u_{p+3} = u_p + 3r$

و $u_{p+4} = u_p + 4r$

تكتب عندئذ المساواة $(*)$ كما يلي : $5u_p + 10r = 10080$

ومنه : $u_p = \frac{10080 - 10r}{5} = \frac{10080 - 30}{5} = 2010$. إذن : $u_p = 2010$

4) أ- حساب المجموع S_n :

المجموع = $\frac{\text{عدد الحدود}}{2}$ (الحدّ الأول من المجموع + الحدّ الأخير منه)

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2n} = \frac{2n+1}{2}(u_0 + u_{2n})$$

ولدينا : $u_0 = 3$ و $u_{2n} = u_0 + 2n \times r = 3 + 6n$

ومنه : $S_n = 3(n+1)(2n+1)$

ب- استنتاج المجموعين S_1 و S_2 :

S_1 هو مجموع $n+1$ حدّا الأولى من متتالية حسابية حدّها الأول $u_0 = 3$ وأساسها $r' = 2r = 6$.

$$S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_{2n})$$

$$= \frac{n+1}{2}(3 + 3 + 6n) = 3(n+1)^2$$

S_2 هو مجموع n حدّا الأولى من متتالية حسابية حدّها الأول $u_1 = 6$ وأساسها $r' = 2r = 6$

$$S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1} = \frac{n}{2}(u_1 + u_{2n-1})$$

$$= \frac{n}{2}(6 + 6 + 6(n-1)) = 3n(n+1)$$

ملاحظة : يمكن حساب S_1 وبملاحظة أن $S_1 + S_2 = S_n$ نستنتج S_2 .

التمرين الرابع :

1) أ- حساب f' ، f'' :

تذكير : $(uv)' = u'v + v'u$

$$f'(x) = (3x+4)'e^x + (e^x)'(3x+4) = (3x+7)e^x$$

$$f''(x) = (3x+7)'e^x + (e^x)'(3x+7) = (3x+10)e^x$$

- البرهان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ فإن $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$:

نسمي p_n الخاصية " $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$ "

- التحقق من صحة p_1 :

الطرف الأول يساوي $f^{(1)}(x) = f'(x)$

الطرف الثاني يساوي $(3x+3\times1+4)e^x = (3x+7)e^x$

ومنه : الطرف الأول يساوي الطرف الثاني

إذن : p_1 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة أي : $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$

ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $f^{(n+1)}(x) = (3x+3(n+1)+4)e^x$

لدينا : $f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' = \left[(3x+3n+4)e^x\right]'$

$$= (3x+3n+4)'e^x + (e^x)'(3x+3n+4)$$

$$= \cdots = (3x+3(n+1)+4)e^x$$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

- إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ فإن $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$.

ب- استنتاج حل المعادلة التفاضلية $y'' = (3x+16)e^x$:

لدينا : $y'' = (3x+16)e^x$

ومنه $y' = (3x+16-3)e^x + c = (3x+13)e^x + c$ (c ثابت حقيقي)

وبالتالي : $y=(3x+13-3)e^{x}+cx+c'=(3x+10)e^{x}+cx+c'$

حيث c و c' ثابتان حقيقيان .

إذن : حلول المعادلة التفاضلية $y''=(3x+16)e^{x}$ هي الدوال y حيث :

$y=(3x+10)e^{x}+cx+c'$ (c و c' ثابتان حقيقيان)

2) أ- تبيان أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$:

لدينا : $f(x)=(3x+4)e^{x}=3xe^{x}+4e^{x}$

ونعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

التفسير الهندسي للنتيجة : محور الفواصل مستقيم مقارب للمنحني (c_f) بجوار $-\infty$

ب- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

من السؤال 1- أ- وجدنا أن $f'(x)=(3x+7)e^{x}$ وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $(3x+7)$ ومنه النتائج التالية :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

$f'(x)=0$ يكافئ $x=-\frac{7}{3}$

$f'(x)<0$ يكافئ $x<-\frac{7}{3}$

$f'(x)>0$ يكافئ $x>-\frac{7}{3}$

إذن : الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty\ ;\ -\frac{7}{3}\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{7}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

- جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-3e^{-\frac{7}{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(-\frac{7}{3}\right)=-3e^{-\frac{7}{3}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3) أ- كتابة معادلة للمماس (Δ) للمنحني (c_f) في النقطة ω التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$:

تذكير : معادلة مماس المنحني الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي :

$y=f'(a).(x-a)+f(a)$

وعليه فإن معادلة المماس (Δ) هي :

$$y=-3e^{-\frac{10}{3}}\left(x+\frac{10}{3}\right)-6e^{-\frac{10}{3}}=-3e^{-\frac{10}{3}}x-16e^{-\frac{10}{3}}$$

ب- تبيان أن ω هي نقطة انعطاف للمنحني (c_f) :

تذكير : f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I ، x_0 عدد حقيقي من I .

إذا انعدمت الدالة المشتقة f'' عند x_0 مغيّرة إشارتها فإن النقطة $M_0(x_0\,;f(x_0))$ هي نقطة انعطاف للمنحني الممثل للدالة f .

الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و $f''(x)=(3x+10)e^{x}$

$f''(x)=0$ يكافئ $3x+10=0$ ومنه : $x=-\frac{10}{3}$

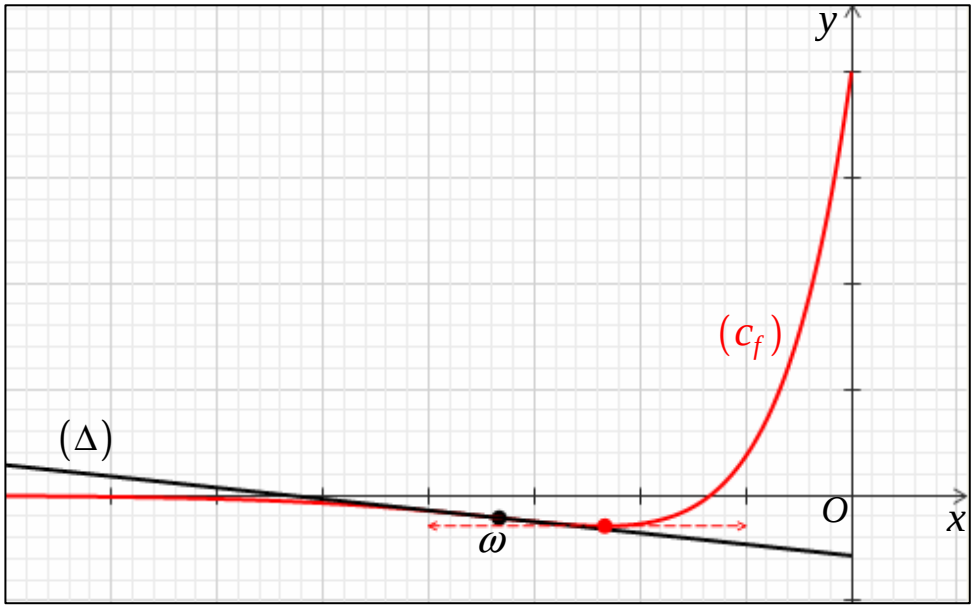
$f''(x)>0$ يكافئ $x>-\frac{10}{3}$

$f''(x)<0$ يكافئ $x<-\frac{10}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{10}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

الدالة f'' تنعدم عند $x_0=-\frac{10}{3}$ مغيّرة إشارتها وبالتالي فإن النقطة ω هي نقطة انعطاف للمنحني (c_f) .

جـ- رسم (Δ) و (c_f) على المجال $]-\infty\,;0]$:



4) أ- حساب $\int_{-1}^{x} te^{t}dt$:

تذكير بطريقة المكاملة بالتجزئة : لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين لهما u' و v' مستمرتان على I .

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I ، لدينا :

$$\boxed{\int_{a}^{b} u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} u'(x)v(x)dx}$$

نضع : $\begin{cases} u(t)=t \\ v'(t)=e^{t} \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=e^{t} \end{cases}$

وبالتالي :

$$\int_{-1}^{x} te^{t}dx = \left[te^{t}\right]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} e^{t}dx$$

$$= \left[(t-1)e^{t}\right]_{-1}^{x} = (x-1)e^{x} + \frac{2}{e}$$

- استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$:

لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$

لدينا : $f(x)=(3x+4)e^{x}=3xe^{x}+4e^{x}$

ومنه : $F(x)=3(x-1)e^{x}+4e^{x}+k=(3x+1)e^{x}+k$

إذن : $F(x)=(3x+1)e^{x}+k$ حيث k ثابت حقيقي .

ب- حساب $A(\lambda)$:

$$A(\lambda)=-\int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} f(x)dx = -\int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}}(3x+4)e^{x}dx =$$

$$=-\left[(3x+1)e^{x}\right]_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} = (3\lambda+1)e^{\lambda} + 3e^{-\frac{4}{3}}$$

إذن : $A(\lambda)=(3\lambda+1)e^{\lambda}+3e^{-\frac{4}{3}}u.a$

- حساب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$:

لدينا : $A(\lambda)=(3\lambda+1)e^{\lambda}+3e^{-\frac{4}{3}}=3\lambda e^{\lambda}+e^{\lambda}+3e^{-\frac{4}{3}}$

ونعلم أن : $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} e^{\lambda}=0$ و $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} 3\lambda e^{\lambda}=0$

ومنه : $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)=3e^{-\frac{4}{3}}$

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1) حل المعادلة (E) :

طريقة أولى : (استعمال مبرهنة غوص)

- تعيين حل خاص للمعادلة (E) :

الثنائية $(x_0\ ;\ y_0)=(1;2)$ حل خاص للمعادلة (E)

- حل المعادلة (E) :

لدينا : $\begin{cases} 13x-7y=-1 \\ 13x_0-7y_0=-1 \end{cases}$ ومنه : $13(x-x_0)-7(y-y_0)=0$

وبالتالي : $13(x-x_0)=7(y-y_0)$ ... $(*)$

من المساواة $(*)$ نستنتج أن 7 يقسم الجداء $13(x-x_0)$

وبما أن 7 و 13 أوليان فيما بينهما وحسب مبرهنة غوص فإن 7 يقسم $x-x_0$

ومنه : $x-x_0=7k$ وبالتالي : $x=7k+1$ وبالتعويض في المعادلة (E)

نجد : $y=13k+2$

إذن : حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $\begin{cases} x=7k+1 \\ y=13k+2 \end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z})$

طريقة ثانية : (استعمال طريقة الموافقة)

تكتب المعادلة (E) باستعمال الموافقة بترديد 7 كما يلي : $13x\equiv-1\ [7]$

ونعلم أن : $13\equiv-1\ [7]$ وبالتالي : $-x\equiv-1\ [7]$ ومنه : $x\equiv1\ [7]$

وعليه : $x=7k+1$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $y=13k+2$

2) تعيين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث $\begin{cases} a\equiv-1[7] \\ a\equiv0[13] \end{cases}$:

لدينا : $\begin{cases} a\equiv-1[7] \\ a\equiv0[13] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a=7\lambda-1 \\ a=13\lambda' \end{cases}$ حيث λ و λ' عددان صحيحان

وبالتالي : $7\lambda-1=13\lambda'$ أي : $13\lambda'-7\lambda=-1$

وحسب السؤال السابق نستنتج أن : $\begin{cases} \lambda'=x=7k+1 \\ \lambda=y=13k+2 \end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z})$

وبالتعويض في $a=7\lambda-1$ أو في $a=13\lambda'$ نجد : $a=91k+13$

إذن : $a=91k+13$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

3) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 7 :

$9^0\equiv 1\,[7]$ ، $9^1\equiv 2\,[7]$ ، $9^2\equiv 4\,[7]$ ، $9^3\equiv 1\,[7]$

نستنتج أن : $9^{3k}\equiv 1\,[7]$ ، $9^{3k+1}\equiv 2\,[7]$ ، $9^{3k+2}\equiv 4\,[7]$

إذن : بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 7 دورية ودورها 3 نلخصها في الجدول الآتي : (في هذا الجدول يدلّ k على عدد طبيعي)

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
البواقي	1	2	4

- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 :

$9^0\equiv 1\,[13]$ ، $9^1\equiv 9\,[13]$ ، $9^2\equiv 3\,[13]$ ، $9^3\equiv 1\,[13]$

نستنتج أن : $9^{3k'}\equiv 1\,[13]$ ، $9^{3k'+1}\equiv 9\,[13]$ ، $9^{3k'+2}\equiv 3\,[13]$

إذن : بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 دورية ودورها 3 نلخصها في الجدول الآتي : (في هذا الجدول يدلّ k' على عدد طبيعي)

n	$3k'$	$3k'+1$	$3k'+2$
البواقي	1	9	3

4) تعيين α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91 :

بما أن $b=\overline{\alpha 00\beta 086}^{9}$ و $\alpha\neq 0$ فإن $1\leq\alpha\leq 8$ و $0\leq\beta\leq 8$

$$b=\overline{\alpha 00\beta 086}^{9}=6+8\times 9+0\times 9^2+\beta\times 9^3+0\times 9^4+0\times 9^5+\alpha\times 9^6$$

$$=6+8\times 9+\beta\times 9^3+\alpha\times 9^6$$

لدينا : $b\equiv 0[91]$ أي : $b\equiv 0[7\times 13]$ ومنه : $\begin{cases} b\equiv 0[7] \\ b\equiv 0[13]\end{cases}$

وباستعمال نتائج السؤال (3) نحصل على الجملة : $\begin{cases}\alpha+\beta\equiv -1[7] \\ \alpha+\beta\equiv 0[13]\end{cases}$

ومنه : $(\alpha;\beta)\in\{(5;8),(6;7),(7;6),(8;5)\}$

ملاحظة : لتعيين α و β ، يمكن الاستعانة بالجدول الآتي :

β \ α	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	9	10	11	12	13	14	15	16

التمرين الثاني :

1) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) :

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (D) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث :

$\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u}$. ومنه التمثيل الوسيطي الآتي : $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=t \\ z=\frac{3}{2}t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t' بحيث :

$\overrightarrow{CM}=t\,\vec{v}$. ومنه التمثيل الوسيطي الآتي : $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t' \\ y=t' \\ z=-3t'+3 \end{cases} \quad (t'\in\mathbb{R})$

- دراسة الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (Δ) :

لدينا : $\vec{u}\left(-1;1;\frac{3}{2}\right)$ و $\vec{v}\left(\frac{1}{2};1;-3\right)$ وبالتالي فإن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا ، وعليه فإن المستقيمين (D) و (Δ) إما من نفس المستوي

ومتقاطعان وإما ليسا من نفس المستوي .

للبحث عن نقط تقاطع (D) و (Δ) نقوم بحل الجملة :

$$\begin{cases} -t+1=\frac{1}{2}t' \\ t=t' \\ \frac{3}{2}t=-3t'+3 \end{cases}$$

بحل الجملة : $\begin{cases} -t+1=\frac{1}{2}t' \\ t=t' \\ \frac{3}{2}t=-3t'+3 \end{cases}$ نجد : $t=t'=\frac{2}{3}$ ومنه : $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3} \\ z=1 \end{cases}$

إذن : $(D)\cap(\Delta)=\left\{G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)\right\}$

2) تبيان أن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$:

لدينا : $\overrightarrow{GA}\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-1\right)$ ، $\overrightarrow{GB}\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};-1\right)$ و $\overrightarrow{GC}\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};2\right)$

وبما أن : $\begin{cases} \frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0 \\ -\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=0 \\ -1-1+2=0 \end{cases}$ فإن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

- الاستنتاج : نستنتج أن النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC .

3) تعيين شعاع ناظمي $\vec{n}$ للمستوي (ABC) وكتابة معادلة ديكارتية له :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;3)$

واضح أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن مثلا : $\frac{-1}{-1}\neq\frac{0}{3}$

وبالتالي فإن النقط A ، B و C ليست في استقامية ، فهي تعيّن مستويا (ABC) .

إذا كان $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) فإن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\vec{n} \\ \overrightarrow{AC}\perp\vec{n} \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n}=0 \\ \overrightarrow{AC}.\vec{n}=0 \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} -a+2b=0 \\ -a+3c=0 \end{cases}$ وبحل هذه الجملة مع

فرض $a=6$ نجد : $\vec{n}(6;3;2)$.

تكون عندئذ معادلة للمستوي (ABC) من الشكل $6x+3y+2z+d=0$

ولدينا : $A\in(ABC)$ ومنه : $6\times1+3\times0+2\times0+d=0$ ينتج : $d=-6$

إذن : معادلة للمستوي (ABC) هي $\boxed{6x+3y+2z-6=0}$

4) حساب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) :

تذكير : المسافة بين النقطة A ذات الإحداثيات $(x_0;y_0;z_0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $d(A;(P))$ حيث :

$$\boxed{d(A;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

وباستعمال المساواة المؤطرة نجد :

$$d(O;(ABC))=\frac{|0+0+0-6|}{\sqrt{36+9+4}}=\frac{6}{\sqrt{49}}=\frac{6}{7}$$

5) أ- إيجاد إحداثيات النقطة H :

نفرض أن إحداثيات النقطة H هي $(x;y;z)$

بما أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D) فإن

$\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{BH}\\ H\in(D)\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}\vec{u}.\overrightarrow{BH}=0\\ H\in(D)\end{cases}$ وبحل الجملة $\begin{cases}-x+(y-2)+\frac{3}{2}z=0\\ x=-t+1\\ y=t\\ z=\frac{3}{2}t\end{cases}$

نجد : $t=\frac{12}{17}$ وبالتعويض في الجملة : $\begin{cases}x=-t+1\\ y=t\\ z=\frac{3}{2}t\end{cases}$

نجد : $H\left(\frac{5}{17};\frac{12}{17};\frac{18}{17}\right)$

ب- استنتاج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D) :

تذكير : $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتان من الفضاء .

$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

المسافة بين النقطة B والمستقيم (D) هي BH .

لدينا : $B\left(0;2;0\right)$ و $H\left(\frac{5}{17};\frac{12}{17};\frac{18}{17}\right)$ ومنه : $BH=\sqrt{\frac{833}{289}}=\frac{7}{17}\sqrt{17}$

التمرين الثالث :

1) أ- خطأ

لدينا : $|a|=\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=1$ و $\arg(a)=\frac{3\pi}{4}$

وبالتالي فإن الشكل المثلثي للعدد المركب a هو $\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$

ب- صحيح

تذكير بدستور موافر : θ عدد حقيقي كيفي و n عدد صحيح .

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

لدينا :

$$a^{2011}=\cos\frac{3\times2011\pi}{4}+i\sin\frac{3\times2011\pi}{4}$$

$$=\cos\left(1508\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(1508\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ولدينا : $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه : $\overline{a}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

وبالتالي : $a^{2011}+\overline{a}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

2) أ- خطأ

العبارة المركبة للتحويل T من الشكل $z'=az$ حيث : $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومن السؤال -1- أ- وجدنا أن : $|a|=\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=1$ و $\arg(a)=\frac{3\pi}{4}$

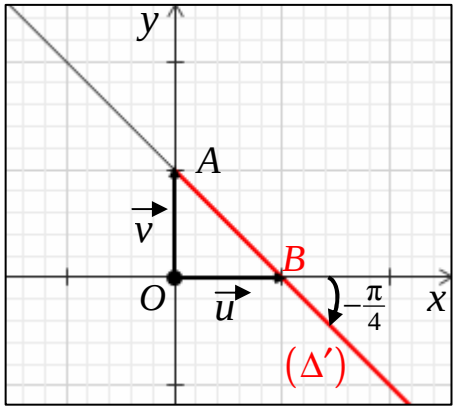
نستنتج أن التحويل T دوران زاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم .

ب- خطأ

تذكير : $\arg(z-i)=\arg(z_M-z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{AM})\ [2\pi]$

$\arg(z-i)=-\frac{\pi}{4}$ معناه : $(\vec{u};\overrightarrow{AM})\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

إذن : مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z-i)=-\frac{\pi}{4}$ هي نصف المستقيم $]AB)$ الذي يشمل النقطة B ذات اللاحقة 1 وشعاع توجيهه $\vec{w}'$ لاحقته $1-i$. (مجموعة النقط M هي نصف مستقيم مفتوح مبدؤه A)



3) أ- صحيح

نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$$

نسمي p_n الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$ "

- التحقق من صحة p_0 :

الطرف الأول يساوي $u_0=\frac{1}{12}$

الطرف الثاني يساوي $-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^0+\frac{2}{3}=-\frac{7}{12}+\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$

ومنه : الطرف الأول يساوي الطرف الثاني وبالتالي فإن p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$

ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $u_{n+1}=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{2}{3}$

لدينا : $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{6}$ ومنه : $u_{n+1}=\frac{3}{4}\left[-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}\right]+\frac{1}{6}$

وبالتالي : $u_{n+1}=-\frac{7}{12}\times\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{2}{3}$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

- إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$

ب- خطأ

من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{2}{3}+\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left[\frac{3}{4}-1\right]=\frac{7}{48}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

وبما أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{7}{48}\left(\frac{3}{4}\right)^n>0$ فإن : $u_{n+1}-u_n>0$

وبالتالي : (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- خطأ

تذكير : إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$ وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

لدينا : $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$ ونعلم أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{2}{3}$ وعليه فإن المتتالية (u_n) متقاربة .

التمرين الرابع :

1) أ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة g :

من أجل كل عدد حقيقي x من $]0\,;\,+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{2(x^2+1)}{x}>0$

وبالتالي فإن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0\,;\,+\infty[$.

- جدول تغيّرات الدالة g :

نعلم أن $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ وَ $\lim_{x\to+\infty} \ln x^2=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

ولدينا : $\lim_{x\to0} \ln x^2=-\infty$ ومنه : $\lim_{x\to0} g(x)=-\infty$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

ب- احسب $g(1)$: $g(1)=0$

- استنتاج إشارة $g(x)$ في المجال $]0\,;\,+\infty[$:
  - $g(x)=0$ يكافئ $x=1$
  - $g(x)<0$ يكافئ $x\in]0\,;1[$
  - $g(x)>0$ يكافئ $x\in]1\,;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) أ- تبيان أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0\,;\,+\infty[$:

الدالة $x\mapsto 1-\frac{1}{x^2}$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ (دالة ناطقة) وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، الدالة $x\mapsto \ln x$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ (دالة لوغاريتمية نيبيرية)

نستنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0\,;\,+\infty[$.

- تبيان أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0\,;\,+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$:

تذكير : $(uv)'=u'v+v'u$

$$f'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)'\times\ln x \;+\; (\ln x)'\times\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{2}{x^3}\times\ln x \;+\; \frac{1}{x}\times\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{2\ln x}{x^3} \;+\; \frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}=\frac{2\ln x+x^2-1}{x^3}$$

ونعلم أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0\,;\,+\infty[$ ، $\ln x^2=2\ln x$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x من $]0\,;\,+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$

- استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ ومنه النتائج الآتية :

- $f'(x)=0$ يكافئ $x=1$
- $f'(x)<0$ يكافئ $x\in\,]0\,;1[$
- $f'(x)>0$ يكافئ $x\in\,]1\,;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0\,;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

- جدول تغيّرات الدالة f :

- لدينا : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\ln x=-\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$

- ولدينا : $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\ln x=\ln x-\dfrac{\ln x}{x^2}$

ونعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1)=0$

ب- دراسة وضعية (c_f) بالنسبة إلى (δ) :

طريقة : لدراسة وضعية المنحني (c_f) بالنسبة إلى المنحني (δ) نقوم بحساب الفرق $f(x)-\ln x$ وندرس إشارته .

لدينا : $f(x)-\ln x=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x-\ln x=-\frac{\ln x}{x^2}$

إشارة الفرق $f(x)-\ln x$ من نفس إشارة $-\ln x$ ومنه النتائج الآتية :

- $f(x)-\ln x=0$ يكافئ $x=1$
- $f(x)-\ln x>0$ يكافئ $x\in]0;1[$
- $f(x)-\ln x<0$ يكافئ $x\in]1;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-\ln x$		$+$	0	$-$	

- إذا كان $x=1$ فإن المنحنيين (c_f) و (δ) يتقاطعان في النقطة $H(1;0)$.
- إذا كان $x\in]0;1[$ فإن (c_f) يقع فوق (δ) .
- إذا كان $x\in]1;+\infty[$ فإن (c_f) يقع تحت (δ) .

- إيجاد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln x$:

نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ (نتائج التزايد المقارن للدالتين $x\mapsto\ln x$ $x\mapsto x$)

ونعلم أيضا أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x}=0\times0=0$

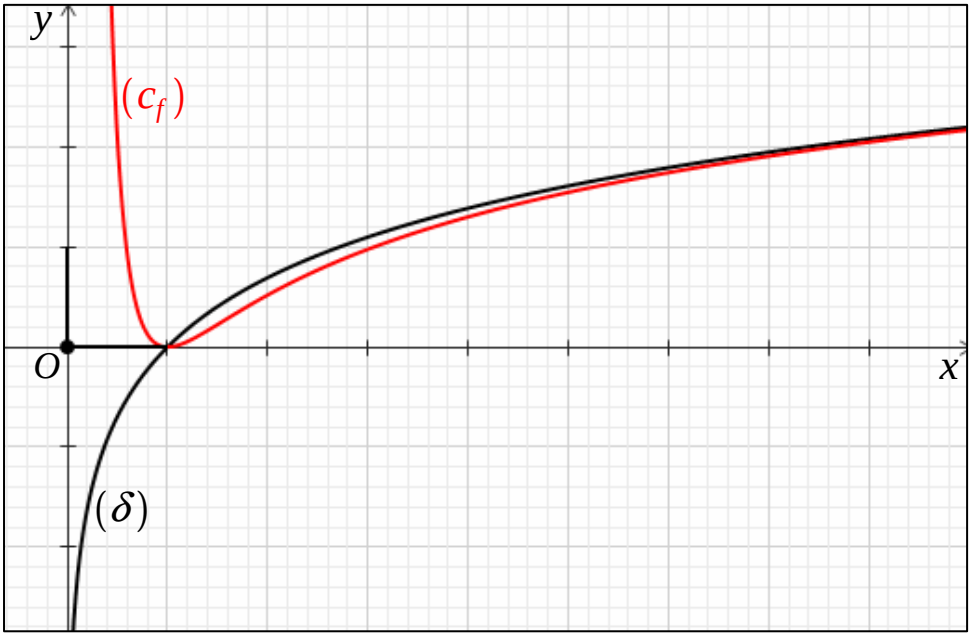
إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln x=0$

الاستنتاج :

من السؤال 2- ب- وجدنا أن : $f(x)-\ln x=-\frac{\ln x}{x^2}$ وَ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$

نستنتج أن المنحني (c_f) مقارب للمنحني (δ) في جوار $+\infty$.

ارسم (δ) و (c_f) :



3) أ- حساب $\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\,dt$:

تذكير بطريقة المكاملة بالتجزئة : لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين لهما u' و v' مستمرتان على I .

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I ، لدينا :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

نضع : $\begin{cases}u(t)=\ln t\\ v'(t)=\frac{1}{t^2}\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}u'(t)=\frac{1}{t}\\ v(t)=-\frac{1}{t}\end{cases}$

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{t^2}\,dt$$

وبالتالي :

$$= \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x - \left[\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

إذن : $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$

- التحقق أن $x \mapsto x\ln x - x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $[1\,;\,+\infty[$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1\,;\,+\infty[$ ، لدينا :

$$(x\ln x - x)' = (x\ln x)' - (x)'$$

$$= (x)' \times \ln x + (\ln x)' \times x - 1$$

$$= \ln x + \frac{1}{x} \times x - 1 = \ln x$$

إذن : $x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $[1\,;\,+\infty[$.

- استنتاج F دالة أصلية للدالة f على المجال $[1\,;\,+\infty[$:

لدينا : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\ln x = \ln x - \frac{1}{x^2}\ln x$

ومنه : $F(x) = x\ln x - x + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} - 1$

ب- حساب $A(\alpha)$:

$$A(\alpha) = \int_1^\alpha [\ln x - f(x)]\,dx = \int_1^\alpha \frac{1}{x^2}\ln x\,dx$$

$$= -\frac{\ln\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1$$

إذن : $A(\alpha) = -\frac{\ln\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1 \quad u.a$

- حساب $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$:

نعلم أن : $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{\ln\alpha}{\alpha} = 0$ وَ $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\alpha} = 0$ ومنه : $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = 1$

الإجابة النموذجية و سلم التنقيط

امتحان شهادة البكالوريا دورة : 2011

المادة : الرياضيات الشعبة: رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
أعداد مركبة وتطبيقاتها الهندسية التشابه	**التمرين الأول** : (04.5 نقطة)		04.5
	1) $z_A=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ ، $z_B=\sqrt{2}e^{\frac{i3\pi}{4}}$ ، $z_C=\sqrt{6}e^{\frac{i\pi}{4}}$	0.5×3	
	2) أ- $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $\left\|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right\|=1$ و $\arg(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A})=\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$	0.25×3	
	التفسير الهندسي : $AB=AC$ و $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{3}$	0.25×2	
	ب) ABC مثلث متقايس الأضلاع	0.25	
	3) $z_D=-\sqrt{3}-\sqrt{3}i$	0.25	
	4) أ- T تشابه مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$	0.25×3	
	ب- ToT تشابه مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{3\pi}{2}$	0.5	
المستقيمات والمستويات في الفضاء تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء	**التمرين الثاني** (04.5 نقطة)		04.5
	1)-أ- $\overrightarrow{AB}$ لا يوازي $\overrightarrow{AC}$ ومنه النقط A ، B و C تعين مستويا.....	0.75	
	ب- $\vec{n}\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\overrightarrow{AC}=0$ و منه $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (ABC)	0.25×2	
	$3x+4y-2z+1=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).....	0.5	
	2)-أ- $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (P_1) و $\vec{n}'(2;-2;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P_2)	0.25×2	
	و $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$ ومنه (P_1) و (P_2) متعامدان.		
	ب- $\begin{cases}x=\frac{4}{7}t+\frac{1}{7}\\y=\frac{1}{14}t-\frac{5}{14}\\z=t\end{cases}$ $/t\in\mathbb{R}$ وكذلك $\begin{cases}x=8t\\y=t-\frac{3}{8}\\z=14t-\frac{1}{4}\end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)	0.25×3	
	ج- التحقق $O\notin(\Delta)$	0.25×2	
	د- $d(O;(P_1))=\frac{\sqrt{29}}{29}$ ، $d(O;(P_2))=\frac{1}{3}$	0.25×2	
	$d(O;(\Delta))=\sqrt{\frac{38}{261}}$.....	0.25×2	

140

محاور الموضوع	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
المتتاليات الحسابية	**التمرين الثالث:** (04 نقاط) 1) $d=6$ ، $U_3=12$ و $U_5=18$ ، $U_0=3$ 2) $U_n=3+3n$ و $2010=3+3\times669$ ورتبته 670 3) $10080=\frac{5}{2}(u_N+u_{N+1})$ ومنه $u_N=2010=u_{669}$ 4) أ) $S=3(n+1)(2n+1)$ ب) $S_1=3(n+1)^2$ و $S_2=3n(n+1)$	0.25×3+0.5 0.75 0.5 0.5 0.5×2	4
دراسة دالة أسية البرهان بالتراجع معادلة المماس حساب المساحات	**التمرين الرابع:** (07 نقاط) 1) أ) $f'(x)=(3x+7)e^x$ ..... $f''(x)=(3x+10)e^x$ ..... البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن: $f^{(n)}(x)=(3x+3n+4)e^x$ ..... ب) $y=(3x+10)e^x+c_1x+c_2$ حيث : $(c_1;c_2)\in\mathbb{R}^2$ ..... 2)-أ- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=3\lim_{x\to-\infty}xe^x+4\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ ..... $y=0$ معادلة المستقيم المقارب لـ (C_f) عند $-\infty$ ..... ب- إشارة f' ، f متزايدة تماما على $\left[\frac{-7}{3};+\infty\right[$ ومتناقصة تماما على $\left]-\infty;\frac{-7}{3}\right]$ جدول التغيرات ..... 3)-أ) معادلة (Δ) : $y=-(3x+16)e^{-\frac{10}{3}}$ ..... ب) إشارة $f''(x)$ ، $\omega\left(-\frac{10}{3};f(-\frac{10}{3})\right)$ نقطة انعطاف ..... ج) رسم (c_f) و (Δ) ..... 4)-أ- $\int_{-1}^{x}te^tdt=(x-1)e^x+\frac{2}{e}$ ..... F دالة أصلية لـ f : $F(x)=(3x+1)e^x+c$ ..... ب- $A(\lambda)=-\int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}}f(x)dx=(3\lambda+1)e^{\lambda}+3e^{-\frac{4}{3}}(ua)$ ..... $\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=3e^{-\frac{4}{3}}\ (ua)$	0.25 0.25 0.75 0.25 0.25 0.25 0.25×3 0.5 0.5 0.25×2 0.75 0.75 0.5 0.5 0.25	07

141

محاور الموضوع	عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
الموافقات نظام التعداد القسمة الاقليدية	**التمرين الأول: (04 نقاط)**		04
	1) $(x,y)=(7k+1,13k+2)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$	0.75	
	2) $a=91k+13$ ، $k\in\mathbb{Z}$	0.75	
	3) بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 7	0.75	
	n: $3k$ — باقي القسمة: 1 ؛ $3k+1$: 2 ؛ $3k+2$: 4		
	بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13	0.75	
	n: $3k$ — باقي القسمة: 1 ؛ $3k+1$: 9 ؛ $3k+2$: 3		
	4) $b=6+8\times9+\beta\times9^3+\alpha\times9^6$ مع $0<\alpha<9$ و $0\le\beta<9$	0.25	
	$b\equiv0[7]$ تكافئ $\alpha+\beta\equiv-1[7]$	0.25	
	$b\equiv0[13]$ تكافئ $\alpha+\beta=0[13]$	0.25	
	ومنه $\alpha+\beta=13$ وعليه : $(\alpha,\beta)\in\{(5,8),(8,5),(6,7),(7,6)\}$	0.25	
التمثيل الوسيطي لمستقيم معادلة مستو مركز ثقل مثلث بعد نقطة عن مستقيم	**التمرين الثاني: (05 نقاط)**		05
	1) $(D):\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=\frac{3}{2}t\end{cases}$ ، $t\in\mathbb{R}$ ، $(\Delta):\begin{cases}x=\frac{1}{2}\lambda\\y=\lambda\\z=3-3\lambda\end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$	0.5×2	
	(D) و (Δ) متقاطعان في النقطة $G(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1)$	0.5	
	2) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$	0.5	
	G مركز ثقل المثلث ABC	0.25	
	3) $\vec{n}\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$ أو $\vec{n}(6;3;2)$	0.5	
	$x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-1=0$ معادلة للمستوى (ABC)	0.5	
	4) المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) تساوي : $\frac{6}{7}$	0.5	
	5) أ- $H(\frac{5}{17};\frac{12}{17};\frac{18}{17})$	0.75	
	ب- المسافة بين B و (D) تساوي : $BH=\frac{\sqrt{833}}{17}=\frac{7}{\sqrt{17}}$	0.5	

142

محاور الموضوع	عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
الأعداد المركبة المتتاليات	**التمرين الثالث:** (04 نقاط)		04
	1/ أ) خطأ، لأن $a=\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$	0.5	
	ب) صحيح لأن: $a^{2011}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\bar{a}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	
	2/ أ- خطأ لأن زاويته هي $\frac{3\pi}{4}$	0.5	
	ب- خطأ لأنه مجموعة النقط M هي نصف مستقيم مفتوح مبدؤه: A	0.5	
	3/ أ) صحيح لأن: $\frac{3}{4}\left[-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}\right]+\frac{1}{6}=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{2}{3}$	0.5	
	ب) خطأ لأن: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n>0$	0.5	
	ج) خطأ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{2}{3}$	0.5	
دالة لوغاريتمية دوال أصلية وحساب المساحات الوضع النسبي	**التمرين الرابع:** (07 نقاط)		07
	1)-أ- $g'(x)=2x+\frac{2}{x}>0$، g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$	0.25×2	
	$\lim\limits_{x\to0^{+}}g(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ ، جدول التغيرات.....	0.25×3	
	ب- $g(1)=0$	0.25	
	إشارة $g(x)$: $g(x)>0$ من أجل $x>1$ و $g(x)<0$ من أجل $0<x<1$	0.5	
	2)-أ- f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق	0.25	
	$f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$	0.5	
	f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;1]$	0.25	
	$\lim\limits_{x\to0^{+}}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، جدول التغيرات	0.25×3	
	ب- $f(x)-\ln x=\frac{-\ln x}{x^2}$ ومنه (C_f) فوق (δ) من أجل $0<x<1$ و (C_f)		
	تحت (δ) من أجل $x>1$	0.25×2	
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln x=0$	0.25	
	نستنتج أن (δ) منحنى مقارب لـ (C_f) في جوار $+\infty$.....	0.25	
	رسم (C_f) و (δ)	0.75	
	3)-أ- $\int_1^x\frac{1}{t^2}\ln t\,dt=-\frac{1}{x}(1+\ln x)+1$	0.5	
	$x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto\ln x$ على $[1;+\infty[$.....	0.25	
	F دالة أصلية للدالة f على المجال $[1;+\infty[$ $F(x)=\frac{(x^2+1)\ln x-x^2+1}{x}$	0.25	
	ب- $A(\alpha)=\int_1^{\alpha}(\ln x-f(x))dx=1-\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}(ua)$	0.25	
	$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)=1\,(ua)$	0.25	