



PESQUISA OPERACIONAL

Professor Dr. Fernando Pereira Calderaro

UNICESUMAR

Av. Guedner, 1610 - Jardim Aclimação
Cep 87050-900 - MARINGÁ - PARANÁ
unicesumar.edu.br
44 3027.6360

UNICESUMAR EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

NEAD - Núcleo de Educação a Distância
Bloco 4 - MARINGÁ - PARANÁ
unicesumar.edu.br
0800 600 6360

as imagens utilizadas neste
livro foram obtidas a partir
do site SHUTTERSTOCK.COM

FICHA CATALOGRÁFICA

C397 **CENTRO UNIVERSITÁRIO DE MARINGÁ.** Núcleo de Educação a Distância; **CALDERARO**, Fernando Pereira.

Pesquisa Operacional. Fernando Pereira Calderaro.
Maringá-Pr.: UníCesumar, 2017. Reimpresso em 2019.
208 p.

"Graduação - EaD".

1. Pesquisa. 2. Operacional. 3. EaD. I. Título.

ISBN 978-85-459-0843-2

CDD - 22 ed. 658
CIP - NBR 12899 - AACR/2

Ficha catalográfica elaborada pelo bibliotecário
João Vivaldo de Souza - CRB-8 - 6828

Impresso por:

Reitor

Wilson de Matos Silva

Vice-Reitor

Wilson de Matos Silva Filho

Pró-Reitor Executivo de EAD

William Victor Kendrick de Matos Silva

Pró-Reitor de Ensino de EAD

Janes Fidélis Tomelin

Presidente da Mantenedora

Cláudio Ferdinandi

NEAD - Núcleo de Educação a Distância**Diretoria Executiva**

Chrystiano Mincoff

James Prestes

Tiago Stachon

Diretoria de Graduação e Pós-graduação

Kátia Coelho

Diretoria de Permanência

Leonardo Spaine

Diretoria de Design Educacional

Débora Leite

Head de Produção de Conteúdos

Celso Luiz Braga de Souza Filho

Head de Curadoria e Inovação

Tania Cristiane Yoshie Fukushima

Gerência de Produção de Conteúdo

Diogo Ribeiro Garcia

Gerência de Projetos Especiais

Daniel Fuverki Hey

Gerência de Processos Acadêmicos

Taessa Penha Shiraishi Vieira

Gerência de Curadoria

Giovana Costa Alfredo

Supervisão do Núcleo de Produção de Materiais

Nádila Toledo

Supervisão Operacional de Ensino

Luiz Arthur Sanglard

Coordenador de Conteúdo

Marcia Pappa

Designer Educacional

Agnaldo Ventura

Projeto Gráfico

Jaime de Marchi Junior

José Jhonny Coelho

Arte Capa

Arthur Cantareli Silva

Ilustração Capa

Bruno Pardinho

Editoração

Robson Yūiti Saito

Qualidade Textual

Hellyery Agda

Ivy Mariel Valsecchi

Ilustração

Marta Kakitani



Professor
Wilson de Matos Silva
Reitor

Em um mundo global e dinâmico, nós trabalhamos com princípios éticos e profissionalismo, não só para oferecer uma educação de qualidade, mas, acima de tudo, para gerar uma conversão integral das pessoas ao conhecimento. Baseamo-nos em 4 pilares: intelectual, profissional, emocional e espiritual.

Iniciamos a Unicesumar em 1990, com dois cursos de graduação e 180 alunos. Hoje, temos mais de 100 mil estudantes espalhados em todo o Brasil: nos quatro campi presenciais (Maringá, Curitiba, Ponta Grossa e Londrina) e em mais de 300 polos EAD no país, com dezenas de cursos de graduação e pós-graduação. Produzimos e revisamos 500 livros e distribuímos mais de 500 mil exemplares por ano. Somos reconhecidos pelo MEC como uma instituição de excelência, com IGC 4 em 7 anos consecutivos. Estamos entre os 10 maiores grupos educacionais do Brasil.

A rapidez do mundo moderno exige dos educadores soluções inteligentes para as necessidades de todos. Para continuar relevante, a instituição de educação precisa ter pelo menos três virtudes: inovação, coragem e compromisso com a qualidade. Por isso, desenvolvemos, para os cursos de Engenharia, metodologias ativas, as quais visam reunir o melhor do ensino presencial e a distância.

Tudo isso para honrarmos a nossa missão que é promover a educação de qualidade nas diferentes áreas do conhecimento, formando profissionais cidadãos que contribuam para o desenvolvimento de uma sociedade justa e solidária.

Vamos juntos!



Janes Fidélis Tomelin

Pró-Reitor de Ensino de EaD

Kátia Solange Coelho

Diretoria de Graduação e Pós

Débora do Nascimento Leite

Diretoria de Design Educacional

Leonardo Spaine

Diretoria de Permanência

Seja bem-vindo(a), caro(a) acadêmico(a)! Você está iniciando um processo de transformação, pois quando investimos em nossa formação, seja ela pessoal ou profissional, nos transformamos e, consequentemente, transformamos também a sociedade na qual estamos inseridos. De que forma o fazemos? Criando oportunidades e/ou estabelecendo mudanças capazes de alcançar um nível de desenvolvimento compatível com os desafios que surgem no mundo contemporâneo.

O Centro Universitário Cesumar mediante o Núcleo de Educação a Distância, o(a) acompanhará durante todo este processo, pois conforme Freire (1996): “Os homens se educam juntos, na transformação do mundo”.

Os materiais produzidos oferecem linguagem dialógica e encontram-se integrados à proposta pedagógica, contribuindo no processo educacional, complementando sua formação profissional, desenvolvendo competências e habilidades, e aplicando conceitos teóricos em situação de realidade, de maneira a inseri-lo no mercado de trabalho. Ou seja, estes materiais têm como principal objetivo “provocar uma aproximação entre você e o conteúdo”, desta forma possibilita o desenvolvimento da autonomia em busca dos conhecimentos necessários para a sua formação pessoal e profissional.

Portanto, nossa distância nesse processo de crescimento e construção do conhecimento deve ser apenas geográfica. Utilize os diversos recursos pedagógicos que o Centro Universitário Cesumar lhe possibilita. Ou seja, acesse regularmente o Studeo, que é o seu Ambiente Virtual de Aprendizagem, interaja nos fóruns e enquetes, assista às aulas ao vivo e participe das discussões. Além disso, lembre-se que existe uma equipe de professores e tutores que se encontra disponível para sanar suas dúvidas e auxiliá-lo(a) em seu processo de aprendizagem, possibilitando-lhe trilhar com tranquilidade e segurança sua trajetória acadêmica.

Professor Dr. Fernando Pereira Calderaro

Doutorado em Desenvolvimento de Processos pela Universidade Estadual de Maringá (UEM/2016), com linha de pesquisa em modelagem matemática de bioprocessos. Mestrado em Desenvolvimento de Processos pela UEM (2012). Graduação em Engenharia Química pela UEM (2009). Atualmente é docente de cursos de graduação do Centro Universitário Maringá (Unicesumar). Atuou na área de pintura da Faurecia Automotive do Brasil na unidade de Quatro Barras (PR), e no setor de inovação e desenvolvimento da Ajinomoto do Brasil, unidade de Laranjal Paulista (SP). Atuou também como professor e coordenador do curso técnico de Análise e Produção de Açúcar e Álcool da Escola Técnica de Araçatuba (SP), e como professor do curso de Tecnólogo em Biocombustíveis da Faculdade Prof. Fernando Amaral de Almeida Prado – (FATEC/ Araçatuba/SP).

Para informações mais detalhadas sobre sua atuação profissional, pesquisas e publicações, acesse seu currículo, disponível no endereço a seguir:

<http://lattes.cnpq.br/1761642443360771>

PESQUISA OPERACIONAL

SEJA BEM-VINDO(A)!

Olá, caro(a) aluno(a). Seja bem-vindo à disciplina de Pesquisa Operacional. Preparei esse material especialmente para que você entenda a importância e a utilidade dessa área do conhecimento, que já fez e continua fazendo a diferença para muitas empresas.

A Pesquisa Operacional é uma disciplina presente nos cursos de Engenharia, Administração e Economia, sendo de grande importância na tomada de decisão. É imprescindível que as empresas utilizem todas as técnicas disponíveis para analisar a melhor opção dentre várias e possam, assim, aproveitar uma oportunidade ou ultrapassar uma crise.

Essa área do conhecimento une técnicas de análise matemática para determinar a melhor opção em um dado momento, mas sem deixar de lado a sensibilidade da equipe ou do profissional que deve tomar a decisão final, ou seja, você utilizará técnicas matemáticas para encontrar a melhor resposta e, depois, fará a análise com base em sua experiência profissional. Portanto, você verá que, nem sempre, a solução ótima é a ideal.

É importante ressaltar que a disciplina de Pesquisa Operacional é muito ampla e nenhum curso de graduação teria condições de apresentar as inúmeras técnicas e condições de resolução de problemas. Por isso, trago para vocês os pontos principais, que são muito úteis e servirão de base para que você se aprofunde no assunto, que eu tenho certeza que te cativará a cada instante.

Serão abordados três assuntos principais: a Programação Linear resolvida pelo Método Simplex, a Teoria dos Jogos e a Teoria das Filas. O livro é dividido em cinco unidades, sendo os assuntos distribuídos da seguinte forma: nas três primeiras unidades será abordada a Programação Linear, que é, sem dúvida, a maior ferramenta criada para a resolução de problemas de otimização de processo. Na Unidade I, você aprenderá um pouco sobre modelagem matemática e a sua aplicação na Pesquisa Operacional. Na Unidade II, você resolverá com você problemas de programação linear com o uso do Método Simplex de forma manual. Já na Unidade III, será fundamental o uso do Excel®, pois apresentarei problemas mais complexos, que serão resolvidos de maneira simples com essa ferramenta de cálculo.

Na Unidade IV, serão abordados assuntos referentes à Teoria dos Jogos e sobre como ela pode ser utilizada para a análise de diferentes cenários de concorrência empresarial, bem como para auxiliar no processo de tomada de decisão. Com os conhecimentos repassados na Unidade V, você poderá avaliar o comportamento de um processo, e também verificar a melhor opção de compra de uma máquina por meio da Teoria das Filas.

Todos os assuntos abordados nas cinco unidades deste livro oferecem conhecimentos para análise de um processo e tomada de decisões, ou seja, o que fazer e como fazer. É para responder a essas perguntas que a Pesquisa Operacional foi criada e desenvolvida após a II Guerra Mundial.

Ótimo curso e um grande abraço.

SUMÁRIO

UNIDADE I

INTRODUÇÃO À PESQUISA OPERACIONAL E À PROGRAMAÇÃO LINEAR

-
- 15 Introdução
 - 16 Origens e Definições
 - 19 O Processo de Tomada de Decisão
 - 26 Noções Gerais Sobre Modelo E Modelagem Em Pesquisa Operacional
 - 30 Formulação Matemática de um Modelo Geral em Programação Linear
 - 42 Considerações Finais
 - 47 Referências
 - 48 Gabarito
-

UNIDADE II

PROGRAMAÇÃO LINEAR E MÉTODO SIMPLEX

-
- 53 Introdução
 - 54 Noções Sobre Álgebra Linear
 - 60 Método *Simplex* na Forma Tabular
 - 73 Especiais do Método *Simplex*: Problema da Solução Básica Inicial
 - 83 Outros Casos Especiais do Método *Simplex*
 - 86 Análise do Dual e do Primal
 - 88 Considerações Finais
 - 94 Referências
 - 95 Gabarito
-



SUMÁRIO

■ UNIDADE III

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR: PLANILHA SOLVER

-
- 99 Introdução
 - 100 Resolvendo Problemas de Maximização com o *Solver*
 - 115 Resolvendo Problemas de Minimização com o Solver
 - 121 Análise de Pós-Otimização
 - 124 Análise de Pós-Otimização com o Solver
 - 137 Considerações Finais
 - 143 Referências
 - 144 Gabarito
-

■ UNIDADE IV

TEORIA DOS JOGOS E ESTRATÉGIA EMPRESARIAL

-
- 149 Introdução
 - 150 Histórico, Definições e Importância da Teoria dos Jogos
 - 155 Tipos de Jogos e Suas Representações
 - 161 Jogos Simultâneos – Equilíbrio de *Nash*
 - 166 Formulação de Estratégia Via Teoria dos Jogos
 - 169 Considerações Finais
 - 175 Referências
 - 176 Gabarito
-



SUMÁRIO

UNIDADE V

INTRODUÇÃO À TEORIA DAS FILAS

-
- 179 Introdução
 - 180 Breves Conceitos Estatísticos
 - 182 Características dos Sistemas de Filas
 - 190 Modelo de Filas: Sistema de Um Canal, Uma Fila e com População Infinita – Mm/1/∞/Fifo
 - 195 Minimização do Custo Total do Sistema de Filas
 - 199 Considerações Finais
 - 204 Referências
 - 205 Gabarito
-

208 CONCLUSÃO



INTRODUÇÃO À PESQUISA OPERACIONAL E À PROGRAMAÇÃO LINEAR

UNIDADE

I

Objetivos de Aprendizagem

- Assimilar as origens e definições da Pesquisa Operacional.
- Compreender a importância da Pesquisa Operacional na tomada de decisões.
- Entender como elaborar um modelo matemático a partir das informações disponíveis.

Plano de Estudo

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- Origens e definições
- O processo de tomada de decisão
- Noções gerais sobre modelo e modelagem em Pesquisa Operacional
- Formulação matemática de um modelo geral em Programação Linear

INTRODUÇÃO

Olá, caro(a) aluno(a). Seja bem-vindo à primeira unidade do livro de Pesquisa Operacional. Você iniciará seus estudos com o entendimento das origens dessa disciplina tão importante. Você verá que a finalidade principal dessa pesquisa é auxiliar nos processos de tomada de decisão, sendo fundamental para o planejamento da produção, pois é possível distribuir os recursos fundamentais, como matérias-primas, entre os produtos que você deseja produzir para vender.

Você aprenderá também que a Pesquisa Operacional se aplica à área financeira, de projetos, logística e de transportes, o que permite a análise de uma quantidade muito grande de situações e problemas. A sistemática de tomada de decisão também será apresentada para que você tenha uma sequência de atividades que o auxilie a trabalhar com um problema e prepará-lo para que seja resolvido com as técnicas de Pesquisa Operacional.

Ainda nesta unidade, você terá um breve encontro com a modelagem matemática aplicada aos problemas mais comuns em Pesquisa Operacional. Serão apresentadas as hipóteses que fundamentam os modelos de Programação Linear, bem como a linguagem simbólica utilizada para representá-los.

A elaboração do modelo, inclusive, faz parte do processo de tomada de decisão: portanto, essa etapa será abordada com mais detalhes, mostrando-se fundamental para a solução e a descrição correta do problema.

Você entenderá como definir as variáveis de decisão do problema e como relacioná-las para elaborar a função objetivo e as equações que representam as restrições do sistema em estudo.

A unidade será encerrada com as formas de descrição dos modelos de Programação Linear para a otimização de um processo, tanto para a maximização quanto para a minimização. Você ainda terá a oportunidade de acompanhar a elaboração de dois modelos nos exemplos apresentados na Unidade I.



ORIGENS E DEFINIÇÕES

Iniciaremos nossos estudos em Pesquisa Operacional conhecendo as origens dessa área da engenharia. Apresento alguns tópicos introdutórios para que você possa ter uma ideia da importância histórica da área. Depois, será o momento de aprender algumas definições que o ajudarão a entender melhor cada etapa do livro.

HISTÓRICO

Posso dizer a você que sou muito curioso. Gosto de estudar e quando inicio um assunto novo, procuro entendê-lo como um todo, partindo de suas origens. Por esse motivo, trago esse tópico em que apresento as origens e algumas definições sobre a Pesquisa Operacional.

Na Segunda Guerra Mundial (1939 – 1945), a disputa entre os Aliados e o Eixo foi árdua, com muitos esforços de guerra empregados no conflito, sendo que diversas indústrias na Europa deixaram de produzir bens de consumo para a população com o objetivo de produzir armamento para seus exércitos.

Foi nesse contexto que surgiu o termo pesquisa operacional, que tem origem no inglês *operational research*. Segundo Hillier e Lieberman (2013), todos os exércitos

na Segunda Guerra buscaram meios de economizar recursos e fazer os melhores ataques possíveis. Foi com essa intenção que os comandos militares britânico e norte-americano convocaram um grande número de cientistas para que resolvessem os problemas táticos e estratégicos. Então, com as pesquisas sobre operações militares realizadas pelos cientistas, o termo pesquisa operacional passou a ser utilizado.

Para Longaray (2014), o ponto de partida para a criação da Pesquisa Operacional foi a invenção do radar em 1934 por Robert Watson-Watt, ao trabalhar com ondas de rádio. E em 1938, A. P. Rowe utilizou o termo para designar a equipe de trabalho de Watson-Watt. Devido à importância do grupo, o Comitê de Estudos de Defesa Aérea Britânico passou a chamá-lo de Seção de Pesquisa Operacional.



REFLITA

Caro(a) aluno(a), observe que muitas tecnologias foram desenvolvidas durante a Primeira e a Segunda Guerra Mundial. Precisamos evoluir sem destruir.

Os primeiros grupos de Pesquisa Operacional utilizavam muito a imaginação para a resolução de problemas complexos, como a utilização adequada do radar, melhor maneira de utilizar as aeronaves (a maioria delas tinha problemas de autonomia e não atingia grandes distâncias), reduzir o número de cargueiros afundados pelos submarinos alemães (os aviões de escolta no início da guerra apresentavam baixa autonomia), e tentar aumentar a acuidade dos bombardeios sobre as cidades alemãs.

A função primordial desses grupos era reunir o máximo de informações possíveis, analisá-las, e construir modelos que pudessem representar o problema em questão para fazer as recomendações ao comando de guerra (LONGARAY, 2014). É válido ressaltar que essas ações foram fundamentais na guerra, para que os Aliados conseguissem reverter a superioridade militar dos exércitos do Eixo.

Ao final da Segunda Guerra Mundial, as indústrias precisavam retomar seu processo produtivo lidando com a escassez de insumos e matéria-prima, além de terem que reerguer suas paredes destruídas pelos bombardeios. Esse cenário criou um campo fértil de trabalho para os cientistas envolvidos nas operações

militares, que perceberam que os problemas enfrentados pelas empresas eram semelhantes aos dos exércitos, mas em um contexto diferente.

Foi a partir da década de 50 que a Pesquisa Operacional passou a ser utilizada nas empresas, órgãos governamentais, e que também começou a integrar o currículo das Universidades (LONGARAY, 2014). Hillier e Lieberman (2013), e Marins (2011), apontam dois fatores principais para o rápido crescimento da Pesquisa Operacional. O primeiro é o desenvolvimento de técnicas mais específicas como o Método *Simplex*, desenvolvido por George Dantzig, em 1947, e as tradicionais ferramentas como a Programação Linear e a Teoria das Filas. O segundo fator foi a revolução computacional, com o surgimento de computadores com capacidade de processamento de dados maior, o que permite que cálculos complexos sejam resolvidos em menor tempo.

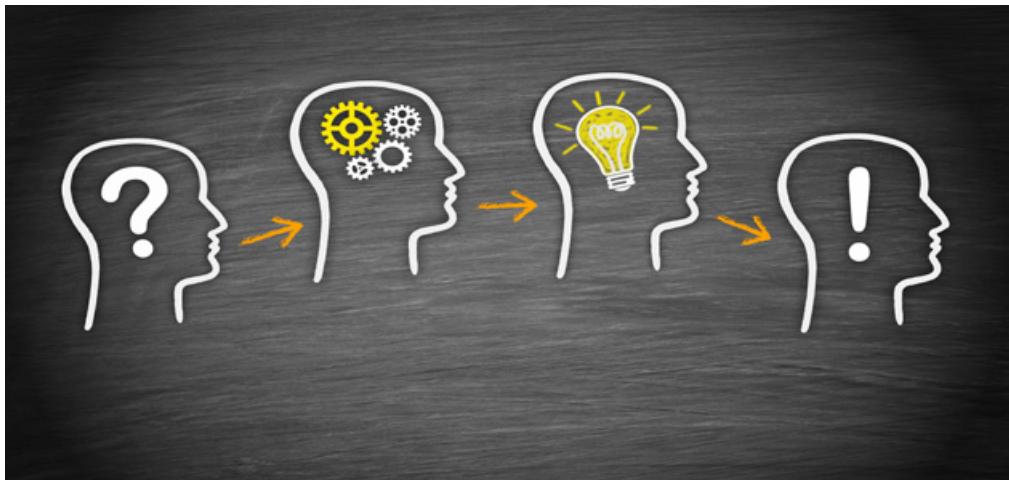
AFINAL, O QUE É A PESQUISA OPERACIONAL?

Você já viu as origens da Pesquisa Operacional. Então, que tal conhecê-la melhor?

De um modo geral, trata-se de uma área do conhecimento aplicada na solução de problemas que envolvem a condução ou a coordenação das operações ou atividades de uma empresa, sendo utilizada atualmente em manufatura, transportes, área médica e hospitalar, serviços militares, serviços públicos e até mesmo no setor financeiro (HILLIER; LIEBERMAN, 2013). É comum associar a Pesquisa Operacional à Programação Linear, mas ela não se restringe a essa técnica. Nos próximos capítulos, você também verá a Teoria dos Jogos e a Teoria das Filas. A amplitude dessa área do conhecimento é tão grande, que envolve diversas outras técnicas de resolução de problemas.

Entretanto, não se esqueça que a Pesquisa Operacional é uma das engrenagens para o desenvolvimento de um processo ou produto, que deve ser associada a outros mecanismos, a exemplo do gerenciamento, inovação, projeto, planejamento, estratégia e, por quê não, do marketing.

Devido à grandeza do campo da Pesquisa Operacional, fique livre para buscar novos conhecimentos!!



O PROCESSO DE TOMADA DE DECISÃO

Com certeza você teve que tomar alguma decisão em sua vida e, na maioria das vezes, há várias opções que precisam ser levadas em consideração para que se possa escolher aquela que lhe favoreça, pelo menos naquele momento. Algumas decisões podem afetar apenas você. Porém, outras podem envolver mais pessoas, principalmente as que estão ao seu redor, como familiares e amigos.

Na carreira profissional, você também precisa tomar decisões, independentemente do cargo que ocupa e, quanto mais alto o cargo, maiores são as responsabilidades e os riscos que se corre ao decidir tomar uma atitude. Por esse motivo, a Pesquisa Operacional serve de instrumento para ajudar na escolha da melhor opção para a empresa, o que pode afetar todos os funcionários e até mesmo o mercado consumidor ou a concorrência.

Esse processo não é tão simples. Segundo Lachtermacher (2007), quando você precisa escolher uma alternativa entre várias conflitantes ou concorrentes, há dois caminhos a seguir: o primeiro é usar a intuição e a experiência e escolher a melhor alternativa com base em sua vivência dentro ou fora da empresa. O segundo caminho é elaborar um modelo da situação, e realizar exaustivas simulações de vários cenários que contemplem as alternativas que você deve escolher. Há alguns anos, a primeira opção era a escolhida, pois não havia técnicas matemáticas suficientes nem avanço computacional que permitisse a elaboração de modelos mais sofisticados que fossem resolvidos facilmente. Além disso, a carência de dados e informações dos processos produtivos das empresas também atrapalhava muito.

Porém, atualmente, a quantidade de informação disponível geralmente é grande e até mesmo um computador simples é capaz de rodar um software de cálculo que possa ser utilizado para a resolução de um problema matemático. De modo geral, o processo de tomada de decisão pode ser resumido como apresentado na Figura 1:

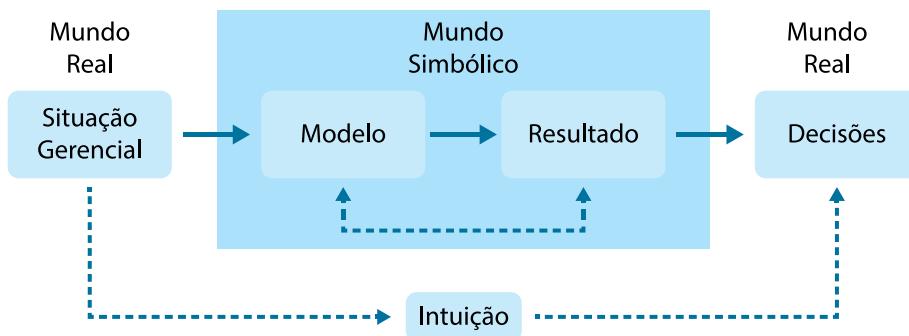


Figura 1 - Processo de tomada de decisão
Fonte: adaptada de Lachtermacher (2007).

Observe que não basta elaborar o modelo e encontrar uma resposta matemática para ele. É importante aplicar os conhecimentos adquiridos com o tempo e utilizar a experiência para tomar a decisão final.

É fundamental que você, aluno(a), tenha ciência de que é preciso primeiro juntar informações, analisá-las e depurá-las, ou seja, eliminar as que não serão úteis, para então elaborar um modelo, testá-lo, obter as respostas do modelo e assim decidir que caminho tomar.

Quando se aplica a Pesquisa Operacional, essas etapas de tomada de decisão devem ser bem claras e definidas. Silva et al. (2010), apresentam uma boa descrição dessas etapas, conforme apresentado na Figura 2:

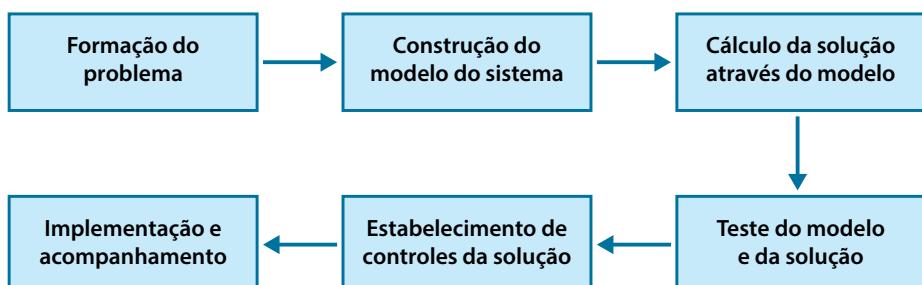


Figura 2 - Fases de um estudo em Pesquisa Operacional
Fonte: adaptada de Silva et al. (2010).

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Essa sem dúvida é a etapa mais importante da tomada de decisão, pois não há como resolver um problema corretamente se ele estiver errado (HILLIER; LIEBERMAN, 2013). É necessário que todos os envolvidos na solução do problema troquem informações, coletem dados e os analisem, excluindo aqueles que não serão úteis. Normalmente, o problema não tem um enunciado completo, ou seja, ele é formado por ideias e afirmações que devem ser unidas para formar algo comprehensível.

Por exemplo, suponha que você precise viajar entre duas cidades e que disponha de duas rotas, uma mais curta, com pedágio, e outra cerca de 10km mais longa e sem pedágio. Se esse for o seu problema, você deve descrevê-lo corretamente para que possa escolher a melhor alternativa. Há vários fatores que podem ser considerados:

- Você está com o tanque cheio e sem dinheiro para o pedágio.
- Você está com o tanque cheio e com dinheiro para o pedágio.
- Você precisa chegar mais rápido.
- Você não tem pressa para chegar ao destino.
- A estrada mais longa é esburacada e provavelmente você demorará 40 minutos a mais na viagem.

Essas são algumas situações que você poderia analisar para escolher a melhor rota para aquele dia. Note que, ao analisar se você tem combustível suficiente para a viagem ou dinheiro para pagar o pedágio, você está colocando restrições ao seu problema, pois se você não tiver dinheiro para o pedágio, restará apenas um caminho a escolher. Por outro lado, se você tiver o dinheiro do pedágio, mas não tiver pressa para chegar ao destino, poderá também escolher a rota mais longa.

No processo de formulação do problema, as restrições devem ser consideradas. No caso de uma indústria, por exemplo, leva-se em conta a quantidade de matéria-prima ou mão de obra disponível. Se for o caso de uma aplicação financeira, uma das restrições poderia ser a quantidade de dinheiro que você tem para aplicar. Portanto, nessa etapa, concentre-se em descrever com o máximo de detalhes o seu problema e os fatores envolvidos nesse problema.

CONSTRUÇÃO DO MODELO DO SISTEMA

Segundo Marins (2011), o modelo é uma representação simplificada de algo real e tem grande utilidade, pois estabelece uma relação entre as variáveis e determina as mais importantes para o problema, além de apontar os dados relevantes e permitir a visualização de vários cenários sem afetar o funcionamento do sistema estudado.

Os modelos apresentam diversas formas e classificações. Pode-se citar os modelos físicos, como as maquetes de um edifício, os modelos analógicos, como os organogramas, e os modelos matemáticos. São justamente os modelos matemáticos os utilizados para representar os problemas em Pesquisa Operacional, pois neles você pode colocar as variáveis de decisão ou controladas, e as variáveis não controladas, como as restrições impostas ao seu problema.

É nessa etapa que você transforma o problema descrito na forma de um texto corrido em uma relação matemática que poderá envolver diversas técnicas do cálculo e de otimização para a resolução do problema.

Ainda neste capítulo, você verá mais detalhes sobre os modelos utilizados em Pesquisa Operacional e como montá-los.

CÁLCULO DA SOLUÇÃO POR MEIO DO MODELO

Essa etapa da tomada de decisão é caracterizada pelo método utilizado para resolver o modelo. Taha (2008), afirma que não existe apenas uma técnica para resolver todos os tipos de modelos matemáticos, mas o que determina qual técnica deve ser utilizada é justamente o grau de complexidade do modelo.

Dentre as técnicas existentes, pode-se dizer que a Programação Linear é a mais utilizada, sendo aplicada quando as equações que compõem o modelo são lineares. A programação inteira é aplicada quando as variáveis assumem valores inteiros. Já a programação dinâmica é útil quando você pode decompor o problema em situações mais simples, o que facilita a resolução.

Uma grande vantagem dessas técnicas para a resolução de problemas de pesquisa operacional é que elas são construídas como algoritmos, que são regras fixas determinadas pelo usuário do modelo para resolver o problema, o que permite que o modelo seja resolvido inúmeras vezes em processos iterativos e que se alcance, assim, a melhor resposta.



REFLITA

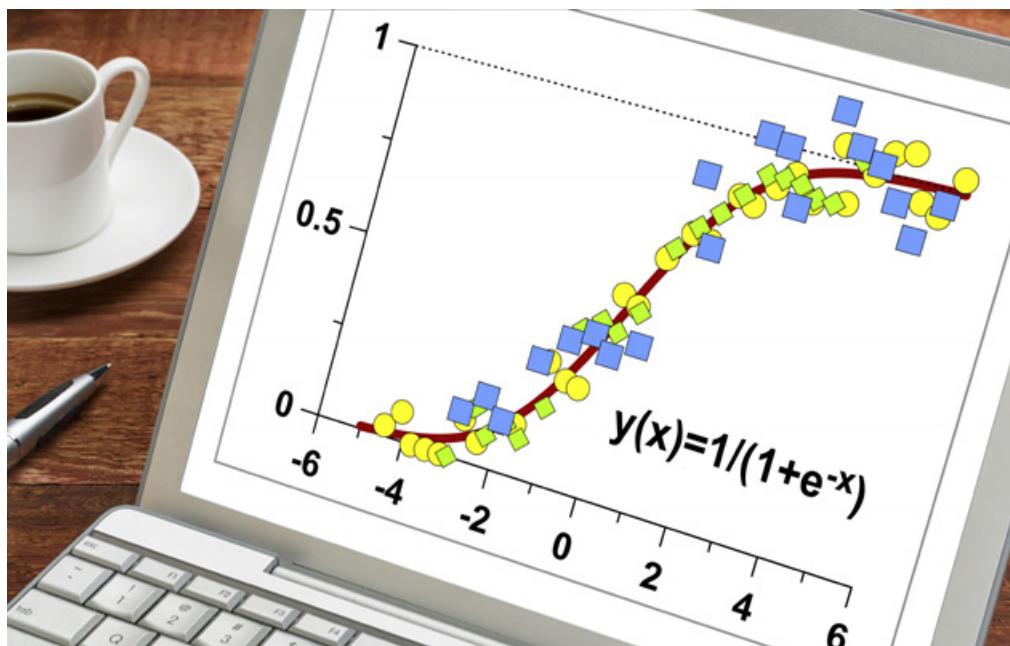
O conceito de melhor resposta é relativo. Você verá ao longo dessa disciplina e de sua graduação que, nem sempre, a resposta ótima do modelo é a melhor para o problema estudado.

(Fernando Augusto da Silva Marins)

Outro fator relevante na solução de modelos matemáticos é a disponibilidade de softwares que já tenham algoritmos clássicos instalados, o que permite a resolução de problemas complexos com facilidade e segurança. Alguns exemplos são o *Solver* do Excel®, que, inclusive, será tema da Unidade III inclusive, o LINDO® e o CPLEX®, que são úteis para resolver problemas de Programação Linear e não linear, além do PROMODEL® e do ARENA®, aplicados para a simulação dos modelos analisados.

TESTE DO MODELO

Silva et al. (2010), lembram que, além de resolver o modelo, é muito importante testá-lo com dados históricos do problema, se houver. Dessa maneira, você pode comparar a resposta do modelo com o que realmente ocorreu, observando o desvio entre a resposta e o valor real. Caso o desvio seja muito alto e inaceitável, o modelo deve ser reformulado e novamente resolvido para ser testado. Se os desvios forem pequenos, o modelo pode representar o problema e, então, será utilizado para simulações.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.510 de 19 de fevereiro de 1998.

ESTABELECIMENTO DE CONTROLES DA SOLUÇÃO

Sendo o modelo construído com base nos dados de uma situação problema, é inevitável que seja feita uma constante verificação dos dados do problema, para que, caso haja alguma modificação, uma nova solução seja testada ou até mesmo um novo modelo seja elaborado (SILVA et al. 2010).

Por exemplo, se você elaborou um problema para determinar a quantidade de matéria-prima a ser utilizada na elaboração de uma liga de aço com 1% de carbono e, durante o processo, modificou a composição para 2% de carbono, o modelo deve ser refeito.

IMPLEMENTAÇÃO E ACOMPANHAMENTO

É nesse ponto que a decisão deve ser tomada. Com base na elaboração do problema, a criação do modelo, sua resposta e análise, o responsável por tomar a decisão deve escolher qual solução adotar e, então, o modelo deve ser implementado (MARINS, 2011).

Para uma aplicação de sucesso do modelo, toda a equipe envolvida no estudo deve participar para treinar e acompanhar as pessoas que vão executar as ações. Assim, é possível observar se há necessidade de corrigir algum desvio do modelo que possa persistir ao ser aplicado às condições reais de um processo produtivo. Todas as fases do estudo devem ser bem documentadas para que haja reproduzibilidade, além de facilitar mudanças do modelo ao longo do tempo (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

Caro(a) aluno(a), é muito importante entender que esse processo não é estático, ou seja, quando você define um problema e elabora um modelo, esse modelo é válido para o problema que você quer resolver, nas condições estabelecidas para o mesmo. Se houver qualquer alteração no problema, o modelo deve ser corrigido para que seja mantida a validade.



SAIBA MAIS

Em 1996, a Samsung Electronics Corp. iniciou um estudo de Pesquisa Operacional para tornar mais eficiente seu processo de manufatura de semicondutores. Esse estudo foi finalizado em 2001, ou seja, cinco anos depois, o que se deve, principalmente, ao tempo gasto para treinamento dos funcionários. Ao todo, mais de três mil funcionários passaram pelo treinamento, sendo conquistados aos poucos a confiança e apoio de todos para a implementação das novas mudanças operacionais. Esse processo paciencioso rendeu à Samsung receitas de mais de US\$ 1 bilhão na época da implementação, e a empresa passou da fabricante menos eficiente do setor de semicondutores para a mais eficiente.

Fonte: adaptado de Hillier e Lieberman (2013).



NOÇÕES GERAIS SOBRE MODELO E MODELAGEM EM PESQUISA OPERACIONAL

Agora, eu e você nos dedicaremos sobre o assunto modelos e modelagem com foco na Pesquisa Operacional. Trata-se de algo muito importante, pois, conforme visto no tópico anterior, os modelos são utilizados para representar os problemas matematicamente. Por esse motivo, é fundamental saber construir esses modelos para então resolvê-los. Vamos lá!!

COMPLEXIDADE DOS MODELOS

Como conversamos anteriormente, os modelos são representações da realidade. Portanto, são idealizações, já que a realidade é muito complexa para que consigamos uma representação exata com a utilização de letras e números. É evidente que para o modelo ser utilizado, ele deve representar com certa fidelidade o problema a ser resolvido. Portanto, mesmo que o modelo não seja perfeito, deve ser útil.

Quanto maior o modelo, mais parâmetros ele possui e mais exato ele é. Porém, maior é a sua complexidade, e a dificuldade em resolvê-lo também aumenta. Se o modelo for muito simples, com poucos parâmetros, ele pode se distanciar da

realidade, sem representá-la adequadamente. Assim, um ponto de equilíbrio deve ser encontrado para que se obtenha o modelo mais simples possível com a melhor representação de seu problema.

SAIBA MAIS



Parâmetros são constantes que podem mudar de valor, mudando-se o problema. Variáveis são quantidades que podem assumir valores diferentes dentro de um mesmo problema.

Fonte: o autor.

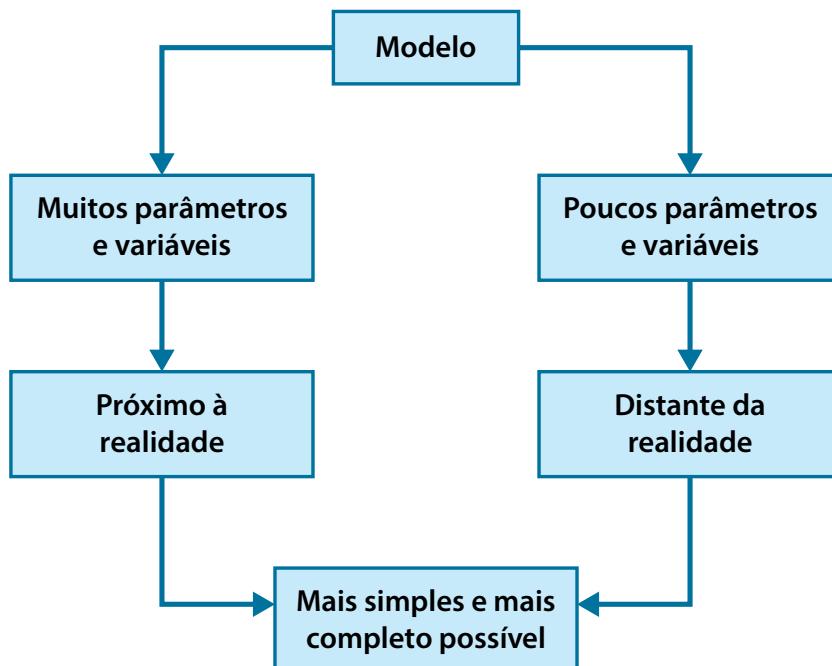


Figura 3 - Complexidade dos modelos

Fonte: o autor.

Alguns princípios podem ser seguidos na construção de um modelo. Longaray (2013) apresenta uma lista bem interessante. Observe:

- a. **Não faça um modelo complicado se um simples for suficiente:** isso diminui o esforço computacional durante a solução de seu modelo, facilitando também o entendimento do modelo caso outra pessoa precise modificá-lo no futuro.
- b. **O modelo não depende da técnica de solução, mas a técnica a ser aplicada depende do modelo:** você não deve elaborar o modelo escolhendo a técnica de solução primeiro. O correto é construir o modelo respeitando a complexidade do seu problema e então selecionar a melhor técnica para resolvê-lo.
- c. **Os parâmetros e as variáveis do modelo devem ter alguma relação com o cenário analisado:** isso parece óbvio, mas alguns modelos podem apresentar parâmetros que não têm significado físico. Portanto, esses parâmetros devem ser substituídos ou o modelo se distanciará da realidade.
- d. **O modelo deve ser validado antes de ser utilizado:** é importante realizar a verificação do modelo com dados históricos para que se possa garantir que o desvio da resposta seja pequeno em relação ao real.
- e. **O modelo não é soberano, a realidade é:** todo modelo em Pesquisa Operacional serve de ferramenta para a resolução de um problema. Se ao final do processo de modelagem e solução do modelo a resposta estiver muito longe da realidade, o mesmo deve ser abandonado e um novo modelo deve ser criado. Se a experiência do grupo decisor apontar para uma resposta que não seja aquela apresentada pelo modelo, o grupo deve pesar o que é mais válido no momento, pois são poucos os modelos que conseguem absorver mudanças rápidas de cenários (econômicas e políticas, por exemplo).
- f. **Os modelos na maioria das vezes são específicos para uma situação:** cada modelo tem sua limitação de aplicação. Um mesmo modelo até pode servir para problemas diferentes, mas isso precisa ser verificado antes de se adotar um modelo pronto.
- g. **O processo de desenvolvimento de um modelo gera conhecimento adquirido para quem o faz:** desenvolver um modelo é mais do que criar uma equação ou um conjunto de equações. É um aprendizado sobre o problema que se quer resolver. O senso analítico utilizado para criar o modelo auxilia no desenvolvimento de conhecimento.
- h. **Modelos não podem substituir os tomadores de decisão:** assim como no item e, o modelo é uma ferramenta, sendo que toda e qualquer resposta que ele fornece deve ser analisada criticamente pelos tomadores de decisão antes de ser implementada.

$$a(x) + b = 0$$

ESTRUTURA E TIPOS DE MODELOS EM PESQUISA OPERACIONAL

Longaray (2014), define que a estrutura elementar dos modelos matemáticos utilizados em Pesquisa Operacional é composta pela função objetivo e pelas equações de restrição. A função objetivo é uma função matemática que indica onde se quer chegar, ou seja, qual o resultado desejado para o problema. As equações de restrição são as relações matemáticas entre as variáveis do problema e as limitações que fazem parte do processo decisório.

Para criar as equações do modelo, são utilizadas as variáveis do processo, que podem ser controláveis e não controláveis. As variáveis controláveis são aquelas que podem ser modificadas de acordo com os objetivos do decisor, e as variáveis não controláveis são as que não podem ser modificadas pelo analista, mas que influenciam o resultado final.

Por exemplo, suponha que você queira modelar a produtividade de uma lavoura de milho. Você pode estabelecer como objetivo uma produção mínima da cultura tendo como variáveis controladas a quantidade de sementes, a quantidade de hectares disponíveis e de fertilizante. Porém, não é possível controlar a quantidade de chuva durante o plantio. Nesse caso, a quantidade de chuva seria uma variável não controlável e que pode afetar seu objetivo, que é a produção final da lavoura.

Uma das restrições desse problema poderia ser a disponibilidade de água da região para a irrigação. Note que o problema foi descrito. Entretanto, mais adiante, os problemas começarão a assumir a forma matemática. Costuma-se subdividir os modelos utilizados em pesquisa operacional em dois tipos: o de otimização e o de simulação. O modelo de otimização é o mais utilizado, principalmente com

a programação linear, e tem como objetivo encontrar a melhor resposta possível para a decisão que deve ser tomada. Geralmente, esse modelo é aplicado em problemas de maximização ou minimização. Se você quer aumentar seus lucros ou sua receita, então o problema é de maximização. Se você quer reduzir os custos de produção, então o seu problema é de minimização.

O modelo de simulação estabelece um conjunto de respostas que representa um sistema físico operado em diferentes situações. Ao pensar novamente na lavoura de milho, podemos verificar que, se você elaborar um modelo para a produtividade da cultura e variar a quantidade de terra disponível, a quantidade de sementes plantadas, a dosagem do fertilizante, e até mesmo a disponibilidade de água, você poderá encontrar diferentes produções em cada caso e obter diversos cenários de produção, de maneira que se possa trabalhar para aumentar a quantidade colhida baseada nessas simulações.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE UM MODELO GERAL EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

Todo estudo de Pesquisa Operacional tem início com um modelo de otimização, pois é ele que vai representar as condições atuais do seu processo. Você já viu que um modelo de otimização é composto basicamente pela função objetivo e pelas equações de restrição, sendo que cada uma dessas relações matemáticas é formadas pelas variáveis do problema.

Objetivo principal de uma otimização é encontrar a melhor resposta possível, isto é, o ponto ótimo do problema estudado. Quando se utilizam técnicas matemáticas para resolver um problema de otimização, o cálculo retornará apenas uma resposta no final, que é considerada a melhor de todas. Mas vale lembrar que nem sempre o ótimo é o viável. Por esse motivo, há a necessidade de uma análise crítica sobre a resposta encontrada antes de tomar a decisão final.

De acordo com Lachtermacher (2007), os problemas de otimização são utilizados principalmente nos seguintes casos:



- a. Determinação do mix e escalonamento da produção:** utilizado para definir a quantidade de cada produto que deve ser fabricada em um processo, bem como analisar o total de matérias-primas usadas na fabricação.



- b. Roteamento e logística:** alguns problemas de otimização são aplicados em transportes para que seja definida a melhor rota dos veículos, podendo-se escolher a mais rápida ou a que consuma menos combustível.



- c. Planejamento financeiro e carteiras de investimento:** é possível também estabelecer um problema de otimização para investimento em ativos, ao trabalhar com os valores pagos pelos ativos e o retorno que cada um fornecerá após um determinado tempo de aplicação.



- d. Análise de projetos:** você também pode avaliar um projeto por meio da otimização, comparando o desempenho de duas máquinas que se quer comprar, ou também de dois processos distintos para a fabricação de um mesmo produto. Você pode considerar os custos de implantação e o retorno, bem como a produtividade que cada projeto pode lhe oferecer.



- e. Alocação de recursos e designação de equipes:** ao avaliar o desempenho de funcionários em cada função exercida ou o tempo gasto para uma atividade com mais ou menos pessoas envolvidas, você pode determinar a melhor opção para executar uma atividade, ao considerar os salários pagos para os funcionários e sua produtividade. Também é possível analisar a ociosidade de equipamentos e pessoas, e redistribuir suas funções ao longo de um dia de trabalho.

AS VARIÁVEIS DE DECISÃO

Em um problema de otimização com Programação Linear, deve-se, em primeiro lugar, definir quais são as variáveis de decisão, ou seja, aquelas cujos valores se deseja encontrar. Tudo estará em torno das variáveis de decisão: tanto a função objetivo quanto as equações de restrição são escritas utilizando essas variáveis e os parâmetros relacionados a elas (LONGARAY, 2014).

Se você tomar café da manhã em uma padaria sabendo que a xícara de café custa R\$0,75 e o pão de queijo sai a R\$1,50 a unidade, você pode determinar quanto vai gastar nesse café da manhã. Nessa situação do cotidiano, você tem duas variáveis de decisão, que são a xícara de café e o pão de queijo, pois você pode escolher a quantidade a ser comprada: uma xícara de café e dois pães de queijo, por exemplo.

É comum na Programação Linear que se definam as variáveis de decisão com a letra “x”, e um número subscrito que defina o índice da variável. Portanto, de maneira genérica, essas variáveis são representadas por:

$$x_n$$

Na análise do café da manhã, há duas variáveis de decisão. Então, elas podem ser representadas por:

$$\begin{aligned} \text{xícara de café} &= x_1 \\ \text{pão de queijo} &= x_2 \end{aligned}$$

Se $x_1 = 1$, quer dizer que você comprou uma xícara de café. Se $x_2 = 2$, então você comprou dois pães de queijo. Se você quiser inverter e dizer que x_1 é o pão de queijo e que x_2 é a xícara de café, não há problema. Apenas defina isso no início da sua otimização.

Os valores da xícara de café e do pão de queijo são os parâmetros do problema, ou seja, são constantes que apresentam um valor fixo para cada problema. Se o preço de qualquer uma das mercadorias se modificar, sua otimização também deverá ser alterada.

Ao juntar as informações das variáveis de decisão e dos parâmetros, você pode escrever uma equação que represente o quanto você vai gastar com o café da manhã. Veja:

$$\text{Gasto} = 0,75 \cdot \text{xícara de café} + 1,50 \cdot \text{pão de queijo}$$

Ou

$$\text{Gasto} = 0,75 \cdot x_1 + 1,5 \cdot x_2$$

Note que o ponto (•) indica o sinal de multiplicação.

Com essa equação, você pode determinar quantos reais serão gastos com a compra de uma xícara de café e de dois pães de queijo:

$$\text{Gasto} = 0,75 \cdot 1 + 1,5 \cdot 2 = 0,75 + 3 = 3,75$$

Portanto, você vai gastar R\$3,75 no café da manhã.

AS RESTRIÇÕES DO PROBLEMA

Todo fator que limite a otimização do meu objetivo é uma restrição do problema. Longaray (2014) apresenta dois tipos de restrições: as de limite superior e as de limite inferior. Uma restrição de limite superior é um valor máximo que se possa utilizar (ou fabricar), e uma restrição de limite inferior é um valor mínimo que seja preciso usar (ou fabricar).

As restrições mais comuns são as limitações de matérias-primas, mão-de-obra, recursos financeiros ou tecnológicos, tempo e demanda de produtos acabados.

De modo geral, as restrições podem ser representadas como equações de igualdade, ou inequações de maior (>), maior-igual (\geq), ou menor (<) e menor-igual (\leq). Todas as restrições também são escritas como função das variáveis de decisão. Portanto, se houver duas variáveis x_1 e x_2 , as restrições podem assumir a forma genérica:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1$$

Ou

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \leq b_1 \text{ (restrição de limite superior)}$$

Ou

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \geq b_1 \text{ (restrição de limite inferior)}$$

Sendo a_{11} , a_{12} e b_1 os parâmetros do problema.

Voltando ao seu café da manhã: se você tiver apenas R\$10,00 e a padaria não aceitar cartão de crédito, você terá que comprar uma quantidade de xícaras de café e de pães de queijo que não ultrapasse esse valor. Então, essa restrição poderia ser representada da seguinte forma:

$$0,75 \cdot \text{xícara de café} + 1,50 \cdot \text{pão de queijo} \leq 10$$

Ou

$$0,75 \cdot x_1 + 1,5 \cdot x_2 \leq 10$$

Assim você determina quais serão os valores de x_1 e x_2 .

Supondo que a padaria não faça vendas menores do que R\$5,00, você deverá comprar uma quantidade de xícaras de café e de pães de queijo que totalize um valor maior do que R\$5,00. Dessa forma, você descreveria sua restrição como:

$$0,75 \cdot \text{xícara de café} + 1,50 \cdot \text{pão de queijo} \geq 5$$

Ou

$$0,75 \cdot x_1 + 1,5 \cdot x_2 \geq 5$$

E assim você também determina quais serão os valores de x_1 e x_2 .

Um ponto muito importante em processos de otimização com Programação Linear para os sistemas que serão trabalhados é que as variáveis de decisão não poderão assumir valores negativos. Porém, em alguns casos, elas podem até ser iguais a 0. Assim, devem ser acrescentadas as restrições de não negatividade ao

problema, que consideram as variáveis de decisão maior ou igual a 0. Portanto, você também deve acrescentar as seguintes restrições ao seu problema do café da manhã:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Isso quer dizer que você pode optar por comprar apenas xícaras de café ou apenas pães de queijo, mas não é possível comprar -2 xícaras de café, ou seja, não são admitidos valores negativos para as quantidades de xícaras de café e para os pães de queijo.

A FUNÇÃO OBJETIVO (F.O.) NA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Essa nada mais é do que uma equação que representa o objetivo do problema. Em otimização, são duas as opções: maximizar ou minimizar a resposta da função objetivo. Essa função também é escrita como uma relação entre as variáveis de decisão e os parâmetros do problema.

A forma geral de uma função objetivo de maximização com duas variáveis de decisão é dada por:

$$\max(Z) = c_{11} \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2$$

Para uma função objetivo de minimização, com duas variáveis de decisão a função objetivo é representada por:

$$\min(Z) = c_{11} \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2$$

Sendo c_{11} e c_{12} os parâmetros da função objetivo, e Z o resultado da otimização da função objetivo.

Em praticamente todas as situações de aplicação da Programação Linear para Pesquisa Operacional, os lucros e receitas são maximizados e os custos minimizados.

HIPÓTESES DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Todos os modelos desenvolvidos em programação linear estão sujeitos a algumas hipóteses para que se possa atingir os resultados desejados (LONGARAY, 2014). São elas:

- **Hipótese da proporcionalidade:** presume-se que a contribuição de cada atividade no valor da função objetivo (Z) é proporcional ao nível de atividade de cada variável de decisão.
- **Hipótese da aditividade:** todas as funções elaboradas em Programação Linear são resultado da soma das contribuições de cada atividade do problema. Da mesma forma, as atividades do modelo são independentes entre si.
- **Hipótese da divisibilidade:** as variáveis de decisão podem assumir valores fracionários (não inteiros), desde que atendam às restrições de não negatividade e às condições do problema.
- **Hipótese da certeza:** os parâmetros dos modelos, ou seja, os valores a_{ij} (das restrições), c_{ij} (da função objetivo) e b_i (lado direito das restrições), são considerados constantes conhecidas.

Essas hipóteses servem para fundamentar a elaboração dos modelos de Programação Linear. Mas, na prática, durante a solução dos exemplos e exercícios, elas serão utilizadas naturalmente.

O MODELO EM SI

Ao avaliar seu problema e escolher as variáveis de decisão, determinar as restrições e o objetivo, o modelo pode ser construído como um conjunto de equações. Considerando-se ainda duas variáveis de decisão x_1 e x_2 , com duas inequações que representam as restrições do problema, você pode representar um modelo de maximização da seguinte forma:

$$\max(Z) = c_{11} \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2$$

Sujeito às restrições:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2 &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + c_{22} \cdot x_2 &\geq b_2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Sendo $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, c_{11}, c_{12}, b_1$ e b_2 os parâmetros do problema.

Se o problema for de minimização, a representação genérica é muito parecida, sendo estabelecida da seguinte maneira:

$$\min(Z) = c_{11} \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2$$

Sujeito às restrições:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2 &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + c_{22} \cdot x_2 &\geq b_2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Os sinais de igualdade ($=$) e desigualdade ($<$, $>$, \geq ou \leq), utilizados nas restrições, dependem do problema abordado. Ao resolver um problema de otimização, você está em busca de uma solução. Segundo Hillier e Lieberman (2013), uma solução é qualquer valor encontrado para as variáveis de decisão, independentemente de elas serem aceitáveis ou não.

Já uma solução viável é aquela que apresenta um resultado com todas as restrições do problema sendo satisfeitas. A solução ótima é uma solução viável que apresenta o valor mais favorável para a função objetivo.

Com o conhecimento adquirido até o momento, você já pode começar a praticar, elaborando modelos de otimização. Preparei dois exemplos. No primeiro, você verá a montagem de um problema de maximização e, no segundo, será a vez de um problema de minimização.

Exemplo 1 (maximização): uma empresa de móveis produz dois tipos de escrivaninha para computador. O modelo Oxford apresenta uma gaveta e apoio alto para impressora, e o modelo *London* apresenta quatro gavetas sem apoio para impressora. Sabe-se que as duas são produzidas em mdf, sendo que o modelo Oxford consome 4m² de mdf, e o modelo *London* 3m² de mdf. O tempo de fabricação do modelo Oxford é de 12h e do modelo *London* é de 16h. Você quer fazer uma otimização desse setor da produção para maximizar o lucro mensal. A empresa vende para as lojas o modelo *London* com um lucro de R\$230,00, e o modelo Oxford com lucro de R\$270,00. Durante o mês, a empresa tem disponibilidade de 192h de trabalho e uma quantidade de matéria-prima para fabricação das escrivaninhas de 80m² de mdf.

Elabore o modelo de maximização dos lucros para uma Programação Linear.

Inicialmente, você deve determinar quais são as variáveis de decisão. Para selecionar as variáveis, anote seu objetivo. No caso, é buscar o maior lucro. Como você determina o lucro? Vendendo as escrivaninhas. Então, o preço de venda está associado à quantidade de cada modelo de escrivaninha fabricado e vendido. Portanto, as variáveis de decisão serão justamente as quantidades de escrivaninha do modelo Oxford e do modelo *London* que você vai produzir e vender. Note que aqui se considera a fabricação atrelada às vendas. Basta agora representar essas variáveis na notação da programação linear. Veja:

$$x_1 = \text{quantidade de escrivaninhas do modelo Oxford}$$

$$x_2 = \text{quantidade de escrivaninhas do modelo London}$$

Estabelecidas as variáveis de decisão, você pode escrever a função objetivo, que será uma função lucro. Como o lucro depende dos preços de venda, a função objetivo será uma relação entre esses valores e as quantidades das escrivaninhas, que são as variáveis de decisão. Observe:

$$\max(Z) = 270 \cdot x_1 + 230 \cdot x_2$$

As restrições do problema são as suas limitações. Para produzir as escrivaninhas, você consome matéria-prima (mdf) e mão-de-obra (aqui descrita como horas disponíveis). Então, você tem duas restrições, que devem ser representadas em duas equações (ou inequações) diferentes.

A primeira restrição (R1), pode ser quanto à disponibilidade de mdf. Você sabe quanto utiliza de mdf para cada escrivaninha e também sabe o total disponível no mês. Portanto, a quantidade produzida de cada escrivaninha vai ser limitada pela disponibilidade da matéria-prima.

Há um máximo de mdf que você pode utilizar. Por isso, toda quantidade consumida na fabricação deve ser menor ou igual ao máximo disponível. Traduzindo para a linguagem matemática, temos:

$$R_1: 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 80$$

A segunda restrição estabelece uma relação entre as horas utilizadas para a produção de cada modelo de escrivaninha e o total de horas disponíveis no mês. Assim como na restrição anterior, a quantidade utilizada para a fabricação das escrivaninhas não pode exceder o total de horas disponíveis, tendo que ser menor ou igual à disponibilidade. Matematicamente, a restrição pode ser escrita como:

$$R_2: 12 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 \leq 192$$

Caso não haja mais informações, basta acrescentar as restrições de não negatividade, pois não há possibilidade de produzir uma quantidade negativa de qualquer modelo de escrivaninha:

$$R_3: x_1 \geq 0$$

$$R_4: x_2 \geq 0$$

Dessa forma, a representação final do modelo é dada por:

$$\max(Z) = 270 \cdot x_1 + 230 \cdot x_2$$

Sujeito à:

$$R_1: 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 80$$

$$R_2: 12 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 \leq 192$$

$$R_3: x_1 \geq 0$$

$$R_4: x_2 \geq 0$$

Você terá a oportunidade de resolver esse modelo na Unidade II, por meio do Método *Simplex* tabular, e na Unidade III com o *Solver do Excel*.

Exemplo 2 (minimização): uma indústria automotiva produz dois modelos de carros flex com motor 1.6: em uma de suas unidades o Ceres e o Vulcano. Você, como gerente de produção, quer estimar a melhor maneira de produzi-los com custos reduzidos, tendo por base um mês de produção. O modelo Ceres é mais robusto e completo, com um custo total de produção de R\$35000,00. Já o modelo Vulcano é mais simples e básico, com custo total de R\$28000,00. Ambos utilizam a mesma linha de montagem, sendo que o modelo Ceres demora 22h/unidade para ser montado, e cada unidade do modelo Vulcano fica pronto em 14h. A fábrica trabalha em dois turnos por dia, todos os dias da semana, e tem uma disponibilidade total de 480h para montagem em um mês. A fábrica precisa entregar para a concessionária pelo menos 10 veículos ao mês. **Elabore um modelo de minimização de custos para uma Programação Linear.**

Para esse exemplo, o objetivo é produzir com o menor custo possível. O que determinará o custo de produção é justamente o gasto para produzir cada modelo e a quantidade produzida de cada um. Portanto, as variáveis de decisão são as quantidades produzidas de veículos dos modelos Ceres e Vulcano. Veja:

$$x_1 = \text{quantidade de escrivaninhas do modelo Ceres}$$

$$x_2 = \text{quantidade de escrivaninhas do modelo Vulcano}$$

Assim, a função objetivo assumirá a seguinte forma:

$$\min(Z) = 35000 \cdot x_1 + 28000 \cdot x_2$$

Para definir as restrições, é necessário encontrar as limitações do problema. Neste exemplo, tem-se o total de horas disponíveis para a montagem dos dois modelos. Então, uma das restrições será a de que a quantidade total de horas utilizadas na linha de montagem do Ceres e do Vulcano não poderá exceder as 480h disponíveis. A primeira restrição pode assumir a seguinte forma:

$$R_1: 22 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2 \leq 480$$

Outro ponto importante é que a fábrica precisa entregar para a concessionária no mínimo 10 veículos. Como não há especificação de qual seja o modelo, presume-se que a soma das quantidades produzidas deva ser de no mínimo 10 unidades de cada um. Assim, a segunda restrição assume a seguinte forma:

$$R_2: x_1 + x_2 \geq 10$$

Não há mais informações acerca da produção. Por isso, você pode completar as restrições do problema acrescentando as de não negatividade para as variáveis de decisão. Veja:

$$R_3: x_1 \geq 0$$

$$R_4: x_2 \geq 0$$

A representação final do modelo fica então:

$$\min(Z) = 35000 \cdot x_1 + 28000 \cdot x_2$$

Sujeito à:

$$R_1: 22 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2 \leq 480$$

$$R_2: x_1 + x_2 \geq 10$$

$$R_3: x_1 \geq 0$$

$$R_4: x_2 \geq 0$$

Assim como no exemplo 1, você resolverá esse modelo com o Método *Simplex* tabular na Unidade II.

Depois de conhecer a breve história da Pesquisa Operacional, sua importância para a sociedade e as etapas do processo de tomada de decisão, você aprendeu como elaborar modelos para serem utilizados na resolução de problemas. Agora, você está pronto para avançar à Unidade II e aprender a resolver esses modelos. Aguardo você lá!!

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta unidade, estudamos os conceitos básicos da Pesquisa Operacional, com o entendimento de suas origens a partir da Segunda Guerra Mundial. Você deve ter notado que as palavras decisão e problema aparecem muitas vezes no texto. Por esse motivo, quero que você tenha em mente que a Pesquisa Operacional surgiu justamente para auxiliar as pessoas na tomada de decisões, principalmente quando se deparam com algum problema. É claro que essa pesquisa também pode ser utilizada quando há uma oportunidade. Assim, é possível analisar a situação favorável e escolher o melhor caminho a seguir.

Para elaborar um bom modelo, é necessário descrever corretamente o problema, selecionar as variáveis de decisão e identificar as restrições do processo estudado. Lembre-se de que o melhor modelo é aquele mais simples possível que possa representar adequadamente o seu problema. Gostaria que você não esquecesse que os modelos de otimização são utilizados para encontrar uma solução ótima, que não é necessariamente a mais viável. Sempre que se trabalha com modelos matemáticos, devem ser analisadas todas as respostas, tomar a decisão com base em suas experiências, e acrescentar um caráter qualitativo à resposta final do modelo.

Com os dois exemplos apresentados na Unidade I, você viu que não é tão complicado elaborar os modelos de Programação Linear, tanto para um problema de maximização quanto para um problema de minimização. Basta tomar o cuidado de escolher corretamente as variáveis de decisão.

Para representar as restrições do problema, atente para o sinal da equação: se vai ser de igualdade (=) ou desigualdade, podendo ser maior ou igual (\geq), e menor ou igual (\leq).

Na Unidade II, você notará que o tipo de sinal das restrições influencia diretamente no método de resolução do modelo de Programação Linear quando utilizamos o Método *Simplex* na forma tabular, que será apresentado.

ATIVIDADES



1. A Pesquisa Operacional é uma área das ciências administrativas engajada na busca de respostas para a solução de problemas. Ela ganhou destaque no meio empresarial após a Segunda Guerra Mundial e encontrou diversos adeptos ao redor do mundo. **Descreva como a Pesquisa Operacional pode auxiliar as empresas na tomada de decisões futuras.**
2. O processo de tomada de decisão envolve algumas etapas para que seja bem executado. **Escreva sucintamente sobre a importância de cada etapa.**
3. No processo de modelagem, fazem parte da estrutura do modelo as variáveis de decisão, a função objetivo e as restrições do problema. **Comente o que é cada uma delas.**
4. Um sapateiro utiliza couro, cola e linha para fabricar cintos e botas masculinas. Suponha que os mesmos materiais são utilizados para ambas as peças e que, para a produção de cintos ele consome 0,12m² de couro, 25mL de cola e 0,5 carretel de linha, utilizando para a produção de botas 1m² de couro, 150mL de cola e 4 carretéis de linha. A disponibilidade que ele tem na semana é de 3m² de couro, 1L de cola e 25 carretéis de linha. **Elabore um modelo de Programação Linear para maximizar os lucros, sendo que o cinto é vendido a R\$75,00 e a bota a R\$120,00, além de que, na semana, ele deve produzir pelo menos 3 cintos.**
5. Uma alfaiataria produz dois tipos de ternos masculinos com tecido externo de linho e forro de poliéster. O modelo com corte italiano consome cerca de 4m de linho e 3,5m de poliéster. Já o modelo com corte inglês necessita de cerca de 4,8m de linho e 4,3m de poliéster. A disponibilidade mensal de linho é de 40m, e de poliéster é de 35m. O custo de produção de um terno com corte italiano é de R\$135,00, e o custo de produção de um terno com corte inglês é de R\$95,00. **Elabore um modelo de programação linear para minimizar os custos de produção mensal, sabendo que pelo menos 4 ternos do modelo italiano devem ser produzidos.**



Separei para você um artigo bem interessante que trata da aplicação da Pesquisa Operacional na área de logística. Leia o excerto do artigo e, caso haja interesse, você pode encontrar a referência completa na seção de Referências ao final da Unidade I. As referências apresentadas durante o texto encontram-se no artigo original.

Com a concorrência internacional e o constante aumento da complexidade do ambiente em que operam as empresas, a gestão da cadeia de suprimentos global tem se tornado uma tarefa cada vez mais importante (RUDBERG; WEST, 2008). Entretanto, gerir cadeias de suprimento globais é incontestavelmente mais difícil do que gerir cadeias de suprimento domésticas (ou internas). Ambas lidam com fatores econômicos, como taxa de juros, preços de mercado, custos de produção e transporte. Mas valores específicos são dependentes dos países envolvidos na cadeia e, portanto, é mais complexo prever esses aspectos em uma escala global (SCHMIDT; WILHELM, 2000). Enquanto a cadeia de suprimentos doméstica trata de projetos em um único país, a cadeia de suprimentos global envolve regras de comércio internacional e questões financeiras, permitindo que fornecedores, plantas e centros de distribuição (CD), estejam localizados em vários países (VIDAL; GOETSCHALCKX, 1997).

Um aspecto fundamental da cadeia de suprimentos global é que ela não avalia os custos e os lucros objetivados por uma única organização, mas de todos os envolvidos na gestão da cadeia (MENTZER; STANK; MYERS, 2007). Assim, Bassett e Gardner (2010), e Tsiakis e Papageorgiou (2008), afirmam que projetar uma cadeia de suprimentos global não é tarefa fácil, pois envolve, por exemplo: a) a seleção de instalações de possíveis plantas em diferentes países e continentes para cada etapa da produção e distribuição, que podem incluir decisões de investimento de capital em novas instalações ou expansões, de fechamento das instalações existentes e de seleção dos fornecedores externos; b) decisões sobre quais produtos fazer e distribuir em cada facilidade; c) decisões sobre quais mercados servir; e d) seleção das rotas da rede por meio das quais os produtos devem passar para chegar ao seu destino final.

Dada a amplitude dos aspectos envolvidos, Fandel e Stammen (2004) ressaltam que a capacidade de definir e resolver modelos de otimização da cadeia de suprimentos global torna-se uma tarefa importante do planejamento estratégico das organizações.

A integração de decisões da cadeia de suprimentos global de nível estratégico e operacional desponta como uma potencial fonte de investigação. Somente o trabalho de Das e Sengupta (2009), aliou esses dois níveis para a tomada de decisão. Ao se trabalhar com modelos integrados, pode-se desenvolver planos de ação que abarquem decisões de nível macro, como por exemplo, aquelas relacionadas às incertezas decorrentes de regulamentos governamentais, questões internacionais, localização e seleção de instalações; e de nível micro, como distribuição e transporte do produto acabado aos clientes. Esse aspecto também é ressaltado por Meixell e Gargeya (2005), que afirmam que, embora o desempenho da cadeia de suprimentos global tenha ampliado o seu escopo, a comunidade acadêmica ainda não deu a devida atenção a objetivos alternativos.



Nesse mesmo sentido, observou-se que poucos trabalhos integram decisões internas (p.ex.: variáveis de quantidade de produto acabado e localização de instalações) e externas (ex. variáveis de aquisição de matéria-prima e seleção de fornecedores). Visto que fornecedores são atores atuantes na cadeia, é interessante que se adicionem objetivos ou restrições para avaliar características como quantidade mínima de fornecedores, restrições orçamentárias, preferências geográficas de localização de fornecedores, entre outras, propiciando um desenho mais realista da cadeia global.

Outro fator bastante relevante é a investigação de cenários práticos. O desafio é decidir sobre quais recursos do ambiente real modelar, a fim de reproduzir com maior fidelidade o cenário investigado e manter o problema tratável. O uso de dados e cenários reais é uma necessidade e uma oportunidade que desponta para futuros modelos de projeto da cadeia de suprimentos global. Entretanto, ao assumir cenários reais, tem-se um aumento considerável na complexidade do problema, o que poderia impossibilitar a resolução através de métodos de solução exatos, sistemática mais amplamente adotada. Problemas de grande complexidade, segundo Shapiro (2007), só podem ser resolvidos com rigorosos programas matemáticos eficientemente combinados com métodos (meta) heurísticos. Assim, métodos de solução computacional especializados (heurísticas/meta-heurísticas) poderiam ser desenvolvidos para aprimorar a busca de soluções.

Finalmente, cabe ressaltar a necessidade do desenvolvimento de ferramentas de mapeamento de dados, visto que, conforme Papapostolou, Kondili e Kaldellis (2011), a principal dificuldade para validar os modelos de otimização da cadeia de suprimentos global é a obtenção dos dados quantitativos relativos aos vários parâmetros definidos. Dentre todos os artigos analisados, somente Creazza, Dallari e Rossi (2012), fornecem orientações metodológicas para a obtenção e o processamento dos dados necessários para a configuração e execução do modelo proposto.

Fonte: Visentini e Borenstein (2014, p. 369-387).

MATERIAL COMPLEMENTAR



LIVRO

Engenheiros da vitória. Os responsáveis pela reviravolta na Segunda Guerra Mundial.

Paul Kennedy

Editora: Companhia das Letras

Sinopse: em janeiro de 1943, Franklin Delano Roosevelt e Winston Churchill se reuniram em Casablanca, no Marrocos, e estabeleceram os objetivos dos Aliados para virar a maré da guerra: a derrota da Blietzkrieg nazista; o controle das rotas marítimas no Atlântico e do espaço aéreo na Europa ocidental e central; o transplante do teatro de batalha para a Europa continental; o fim do imperialismo japonês no Pacífico. Cerca de um ano depois do encontro, a maioria dessas metas havia sido cumprida. O distanciamento histórico torna difícil entender a dimensão dessa conquista, mas o fato é que, no momento da reunião, o Eixo ainda parecia invencível. Apoiado em impressionante repertório de fontes, Paul Kennedy - autor de Ascensão e queda das grandes potências -, se propõe a esclarecer exatamente como se pavimentou o caminho para a vitória. Ao contrário das histórias clássicas da Segunda Guerra, que privilegiam os líderes políticos e militares, em Engenheiros da vitória, Kennedy procura iluminar o esforço daqueles que chama de "solucionadores de problemas": cientistas, engenheiros, soldados, homens de negócios que foram responsáveis por tornar possível a grande estratégia estabelecida em Casablanca. Entre as muitas histórias narradas, estão a invenção do Magnetron, um radar em miniatura, tão pequeno como um prato de sopa, que podia ser facilmente instalado em aviões e navios de combate menores; a construção do Hedgehog, um morteiro múltiplo de granadas de curta distância que diminuía o tempo do disparo contra o inimigo; ou a instalação de turbinas Rolls Royce nos aviões P-51 Mustang, criando jatos mais velozes que os da Luftwaffe. Com grande habilidade narrativa, Kennedy conduz o leitor para os bastidores dessas decisões e descobertas, e nos revela o verdadeiro "motor" do esforço de guerra.



REFERÊNCIAS

- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2013.
- LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na tomada de decisões**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- LONGARAY, A. A. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: Editora Saravia, 2014.
- MARINS, F. A. S. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2011.
- SILVA, E. M. et al. **Pesquisa Operacional para os cursos de administração e engenharia**. São Paulo: Editora Atlas, 2010.
- TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional**. São Paulo: Pearson, 2008.
- VISENTINI, M. S.; BORENSTEIN, D. Modelagem do projeto da cadeia de suprimentos global: considerações teóricas e perspectivas futuras. In: **Gestão da Produção**, São Carlos, v. 21, n. 2, p. 369-387, 2014.



GABARITO

- 1) A Pesquisa Operacional exige que as empresas conheçam adequadamente o problema a ser resolvido e o representem corretamente, transformando-o para a linguagem matemática, que é o modelo. Ao resolver o modelo, há uma solução ótima que também deve ser analisada pela empresa para verificar se ela é viável. Por esse motivo, todo o processo de construção, desenvolvimento e solução de um problema de Pesquisa Operacional envolve muito raciocínio, o que permite que as empresas possam aprender cada vez mais sobre o problema analisado. Isso gera experiência, bem como um conjunto de dados que poderão ser explorados no futuro para a resolução de problemas semelhantes aos já analisados, além de que, em alguns casos, um modelo já estruturado poderá ser apenas modificado para que seja aplicável a outro problema.
- 2) Formulação do problema: o problema deve ser bem descrito para que não faltam elementos para a elaboração do modelo.
Construção do modelo do sistema: o modelo deve ser o mais simples possível, mas deve ter relação forte com o problema em estudo.
Cálculo da solução através do modelo: utilizar o método adequado para resolver o modelo é fundamental, pois permite encontrar melhores resultados.
Teste da solução e do modelo: o modelo deve ser resolvido com dados históricos para que o erro entre a resposta do modelo e a realidade seja avaliado.
Estabelecimento de controles da solução: qualquer alteração de dados do problema deve repercutir em mudanças no modelo.
Implementação e acompanhamento: tomada a decisão, a resposta do modelo poderá ser aplicada ao problema e esse deve sempre ser renovado conforme se torne obsoleto.
- 3) Variáveis de decisão: representam o que se quer calcular. Geralmente definem as quantidades que devem ser produzidas, compradas e escolhidas, etc.
Função objetivo: é a equação que define o objetivo do problema, como aumentar lucros ou reduzir custos.
Restrições: são as equações ou inequações que apresentam todas as limitações do problema, geralmente representadas pela quantidade de matéria-prima, mão-de-obra e recursos disponíveis, etc.
- 4) Variáveis de decisão:

$$\begin{aligned}x_1 &= \text{cintos de couro} \\x_2 &= \text{botas de couro}\end{aligned}$$



GABARITO

Função objetivo:

$$\max(Z) = 75 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2$$

Sujeito às restrições:

$$R_1: 0,12 \cdot x_1 + x_2 \leq 3$$

$$R_2: 25 \cdot x_1 + 150 \cdot x_2 \leq 1000$$

$$R_3: 0,5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 25$$

$$R_4: x_1 \geq 3$$

$$R_5: x_1 \geq 0$$

$$R_6: x_2 \geq 0$$

Sendo:

R_1 a restrição para quantidade de couro (em m²).

R_2 a restrição para quantidade de cola (em mL).

R_3 a restrição para quantidade de linha (em unidades de carretéis).

R_4 a restrição para produção mínima de cintos (em unidades de cintos).

R_5 e R_6 as restrições de não negatividade.

5) Variáveis de decisão:

x_1 = Quantidade de ternos no modelo italiano.

x_2 = Quantidade de ternos no modelo inglês.

Função objetivo:

$$\min(Z) = 135 \cdot x_1 + 95 \cdot x_2$$

Sujeito às restrições:

$$R_1: 4 \cdot x_1 + 4,8 \cdot x_2 \geq 40$$

$$R_2: 3,5 \cdot x_1 + 4,3 \cdot x_2 \geq 35$$

$$R_3: x_1 \geq 4$$

$$R_4: x_1 \geq 0$$



GABARITO

$$R_5: x_2 \geq 0$$

Sendo:

R_1 a restrição para quantidade de linho (em m).

R_2 a restrição para quantidade de poliéster (em m).

R_3 a restrição para a produção mínima de ternos do modelo italiano (em unidades de ternos).

R_4 e R_5 as restrições de não negatividade.



PROGRAMAÇÃO LINEAR E MÉTODO SIMPLEX

UNIDADE



Objetivos de Aprendizagem

- Relembrar conceitos básicos de espaço vetorial.
- Resolver o Método *Simplex* utilizando a forma tabular.
- Conhecer alguns casos especiais de resolução do Método *Simplex*.
- Analisar o *Simplex* pelo primal e pelo dual.

Plano de Estudo

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- Noções sobre álgebra linear
- Método *simplex* na forma tabular
- Casos especiais do Método *Simplex*: problema da solução básica inicial
- Outros casos especiais do Método *Simplex*
- Análise do dual e do primal

INTRODUÇÃO

Olá, caro(a) aluno(a). Na Unidade I, você conheceu as origens da Pesquisa Operacional como uma área importante para a gestão de empresas, acompanhou a sequência de ações necessárias para o processo de tomada de decisão, bem como a construção de modelos de Programação Linear com fins de otimização.

Na Unidade II, será apresentado o Método *Simplex*, que é utilizado para a resolução dos modelos de Programação Linear. Esse método pode ser apresentado na forma gráfica, algébrica e computacional. Nesta unidade, você aprenderá a forma algébrica, também chamada de tabular. Serão resolvidos problemas de maximização e de minimização e, assim, você também poderá notar que, dependendo do sinal das restrições ($=$, \leq ou \geq), o Método *Simplex* tabular exige procedimentos diferentes para que se encontre uma resposta para o problema.

A forma tabular do Método *Simplex* exige certo conhecimento de álgebra linear, principalmente quanto à solução de sistemas de equação com o uso de combinação linear. Por esse motivo, iniciaremos a Unidade II com o estudo de alguns conceitos básicos de álgebra linear, a exemplo dos sistemas de equações lineares, além da forma matricial dessas equações e como resolvê-las por combinação linear.

Também serão apresentados alguns casos especiais do Método *Simplex*, já que o próprio problema de minimização exige algumas modificações na estrutura do modelo para que ele seja resolvido, pois a escolha da solução básica inicial dependerá dos sinais da desigualdade do sistema de equações. Você também verá como resolver um problema com o Método *Simplex* tabular quando há empate na variável de entrada ou na variável de saída do problema, bem como casos em que há múltiplas soluções ou em que elas são limitadas.

Outro assunto abordado é a análise do primal e do dual. Então, você perceberá que os modelos desenvolvidos para a Programação Linear apresentam uma simetria, podendo ser representados de forma diferente, o que dá origem a novas interpretações do mesmo, e pode ser útil tanto para que se resolva um problema quanto para a melhoria das análises efetuadas.

NOÇÕES SOBRE ÁLGEBRA LINEAR

A álgebra linear é uma área da matemática que utiliza a representação na forma de vetores e matrizes para a resolução de problemas. Geralmente, você pode colocar uma equação ou um conjunto de equações na forma matricial, e então resolver as equações utilizando apenas os coeficientes (números que multiplicam as variáveis), para encontrar a solução do seu sistema de equações.

MAS POR QUE ÁLGEBRA LINEAR?

Não se assuste, aluno(a). O livro trata do conteúdo de Pesquisa Operacional, mas não poderíamos deixar de lado uma breve revisão da álgebra linear, principalmente de combinação linear.

Programação Linear é pautada na elaboração de um conjunto de equações lineares que, para serem resolvidas, formam um sistema de equações cujo principal método de solução é o *Simplex*, que é uma aplicação da álgebra linear.

Antes de qualquer coisa, gostaria de deixar bem claro que existem muitos softwares que apresentam um pacote computacional para resolver problemas como o Método *Simplex*. Porém, é de suma importância que você saiba o que o software está fazendo para que entenda a resposta e saiba se está utilizando o método matemático correto.

EQUAÇÕES LINEARES E SEUS SISTEMAS

Segundo Steinbruch e Winterle (1997), as equações lineares apresentam o seguinte formato:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$$

Sendo a_1, a_2, \dots, a_n os coeficientes constantes da equação, x_1, x_2, \dots, x_n as variáveis da equação, e b sendo o termo independente, note a semelhança dessa equação

geral com as apresentadas na Unidade I para a função objetivo e para as restrições do problema de Programação Linear.

São os valores das variáveis que satisfazem a igualdade que formam a solução da equação. São exemplos de equações lineares:

$$2 \cdot x = 5$$

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 7$$

$$27 \cdot x_1 - 12 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 = 150$$

Observe que a primeira equação apresenta apenas uma variável (tanto é que ela nem recebeu índice na representação), sendo fácil de resolver. Basta isolar X e encontra-se a solução dessa equação como $X=5/2$. Porém, a segunda equação apresenta duas variáveis e a terceira três variáveis, o que impossibilita que se encontre uma solução diretamente. A quantidade de variáveis de uma equação linear pode ser enorme, dependendo do problema que ela representa.

Quando se trabalha com equações de número de variáveis maior do que uma, há a necessidade de que seja formado um sistema de equações lineares que apresente um número de equação pelo menos igual ao número de variáveis (Axler, 2016). Portanto, se você tem duas variáveis, então necessita de duas equações para encontrar uma solução. Se há três variáveis, são necessárias três equações para encontrar uma solução e, assim, fica formado um sistema de equações lineares.

De acordo com Axler (2016), um sistema de equações lineares é um conjunto de equações e uma solução para esse sistema inclui valores para as variáveis do sistema que satisfaçam todas as equações simultaneamente.

Por esse motivo, quando você elaborou os modelos de Programação Linear na Unidade I, você escreveu a função objetivo e as equações de restrição. Você pode perceber que o número de equações de restrição, tanto no problema de maximização quanto no de minimização, foram iguais à quantidade de variáveis (duas) do problema.

As restrições de não negatividade ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$) não contam como equações para resolver o problema, e a função objetivo será utilizada para a otimização do processo. Então, lembre-se que, quando for elaborar um modelo de Programação Linear, a quantidade de equações de restrição deve ser no mínimo igual ao número de variáveis de decisão do seu problema.

Um sistema de equações lineares pode ser representado por:

$$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 13$$

$$6 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 = 27$$

Esse sistema apresenta duas variáveis (x_1 e x_2) e duas equações, podendo ser resolvido. Mas dizer que o sistema pode ser resolvido não quer dizer que ele apresente solução. É preciso que isso fique bem claro para você. É óbvio que, ao elaborar um modelo de Programação Linear, há a necessidade de se encontrar uma solução e, por esse motivo, se durante o processo de resolução do modelo não houver solução, o modelo deve ser refeito ou o problema reestruturado com novas variáveis ou equações de restrição.

Para resolver o sistema de equações apresentado, é possível utilizar o método de eliminação de *Gauss*, que consiste em multiplicar os coeficientes das equações e eliminar as variáveis de algumas delas para facilitar a determinação da solução.



SAIBA MAIS

O método e eliminação de *Gauss* foi publicado em livro no ano de 1809. Porém, o mesmo método já havia sido usado em um livro chinês publicado 1600 anos antes.

Fonte: adaptado de Axler (2016).

Por exemplo, para o sistema apresentado, há duas equações com duas variáveis cada e, por *Gauss*, pode-se multiplicar a primeira equação por (-3):

$$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 13 \times (-3)$$

Ficando:

$$-6 \cdot x_1 - 15 \cdot x_2 = -39$$

E somá-la à segunda equação, eliminando a variável x_1 da segunda equação:

$$\begin{array}{r} -6 \cdot x_1 - 15 \cdot x_2 = -39 \\ + \\ \hline \end{array}$$

$$6 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 = 27$$

A segunda equação passa a ter a forma:

$$-6 \cdot x_2 = -12$$

E o novo sistema fica:

$$\begin{array}{r} 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 13 \\ -6 \cdot x_2 = -12 \\ \hline \end{array}$$

Para resolvê-lo, basta agora escolher a segunda equação e isolar x_2 :

$$x_2 = \frac{-12}{-6} = 2$$

Sabendo que $x_2 = 2$, selecionamos a primeira equação e substituímos x_2 para depois isolar x_1 :

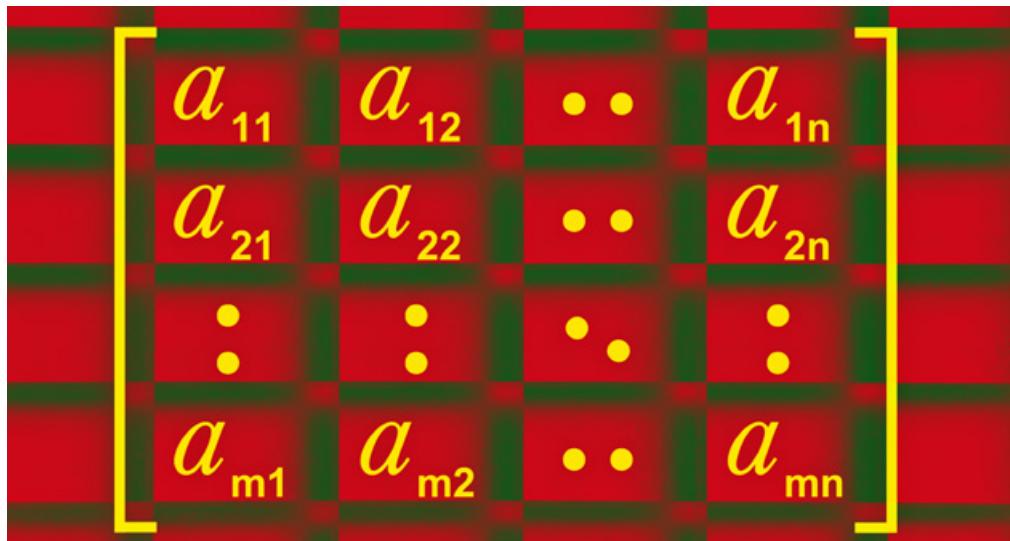
$$2 \cdot x_1 + 5 \cdot 2 = 13$$

$$2 \cdot x_1 + 10 = 13$$

$$2 \cdot x_1 = 13 - 10$$

$$x_1 = 13/2$$

A solução para esse sistema é $x_1=3/2$ e $x_2=2$.



REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

De acordo com a definição de Axler (2016), uma matriz é um arranjo de números em formato retangular, geralmente delimitada por colchetes. As linhas horizontais de uma matriz são chamadas de linhas, e as linhas verticais de uma matriz são chamadas de colunas. Uma representação de matriz pode ser a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 2 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Essa matriz apresenta duas linhas e três colunas. Por isso, podemos dizer que ela é uma matriz 2×3 . A primeira linha é composta pelos números 5, 7 e 9, e a segunda linha é formada pelos números 2, 8 e 11. A primeira coluna da matriz é formada pelos números 5 e 2, a segunda coluna pelos números 7 e 8, e a terceira coluna pelos números 9 e 11. Uma representação genérica da matriz 2×3 pode ser dada por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Os índices dos coeficientes da matriz representam, respectivamente, o número da linha e o da coluna do elemento. Por exemplo, o elemento a_{22} é o número que está na segunda linha e na segunda coluna. Se você olhar novamente a matriz numérica anterior, o número 11 representa o termo a_{23} , ou seja, o termo que está na segunda linha e na terceira coluna. Você nota alguma semelhança entre os coeficientes a_{ij} da matriz genérica e a forma geral do modelo de Programação Linear apresentada na Unidade I, no tópico **o modelo em si?**

Um sistema de equações lineares pode ser representado como uma matriz de coeficientes, o que facilita muito no momento de elaborar um software de Programação Linear. O Método *Simplex* na forma tabular utiliza a representação matricial para resolver o problema de otimização. Assim, veja como ficaria o sistema de equações diferenciais que estudamos há pouco em sua forma original e como uma matriz:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 &= 13 \\ 6 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 &= 27 \end{aligned}$$

Na forma matricial:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 13 \\ 6 & 9 & 27 \end{array} \right]$$

Essa é a forma da matriz ampliada do sistema de equações lineares, pois apresenta os coeficientes das equações e também o termo independente que está ao lado direito da igualdade das equações.

Se você representar o sistema de equações lineares como uma matriz, é possível resolvê-lo da mesma forma que o sistema com as equações. Basta multiplicar a primeira linha (L_1), por (-3), e somá-la à segunda linha (L_2). Observe a notação utilizada:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 13 \\ 6 & 9 & 27 \end{array} \right] \rightarrow -3L_1 &= \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 13 \\ -6 & -9 & -27 \end{array} \right] \rightarrow L_1 + L_2 \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Essa matriz pode ser novamente representada como um sistema de equações lineares na forma:

$$\begin{aligned}2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 &= 13 \\- 6 \cdot x_2 &= -12\end{aligned}$$

Ao resolver o sistema, como já foi feito, encontram-se as respostas $x_1 = 3/2$ e $x_2 = 2$. O procedimento de multiplicar e somar uma linha da matriz é conhecido como combinação linear, e é a aplicação do método de *Gauss* para a forma matricial.



REFLITA

A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.
(Albert Einstein)

MÉTODO *SIMPLEX* NA FORMA TABULAR

O Método *Simplex* é um processo iterativo utilizado para encontrar a solução de qualquer modelo de Programação Linear com um número finito de soluções (MARINS, 2011). Esse método apresenta bases geométricas que não serão abordadas neste livro. Você trabalhará diretamente com o Método *Simplex* na forma tabular (ou algébrica) nesta unidade e, na Unidade III, verá como resolver um modelo de Programação Linear pelo Método *Simplex* do Excel®.

O MÉTODO *SIMPLEX*

Na seção anterior, foram apresentadas equações lineares com sinal de igualdade em relação ao lado direito da equação. Praticamente todos os modelos de Programação Linear utilizados em Pesquisa Operacional serão elaborados com as inequações (\geq ou \leq), sendo que, dependendo dos sinais de desigualdade das restrições, será adotada uma maneira diferente de resolver o Método *Simplex* na forma tabular.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

É importante, neste ponto, distinguir alguns aspectos. A Programação Linear é a área da Pesquisa Operacional que permitirá a elaboração dos modelos e a transformação do problema real em linguagem matemática. O Método *Simplex* é a metodologia aplicada ao modelo de Programação Linear para que se resolva o sistema de equações obtido para cada caso.

SAIBA MAIS



O Método *Simplex* foi desenvolvido em 1947 pelo matemático norte-americano George B. Dantzig, sendo o mesmo considerado o pai da Programação Linear e um dos pioneiros da Pesquisa Operacional. Lecionou na Universidade de Stanford até próximo à sua morte em 2005, aos 90 anos de idade.

Fonte: adaptado de Hillier e Lieberman (2013).

O método segue um algoritmo de solução, que nada mais é do que uma sequência de ações desenvolvidas para encontrar a melhor resposta, como apresentado na Figura 1:

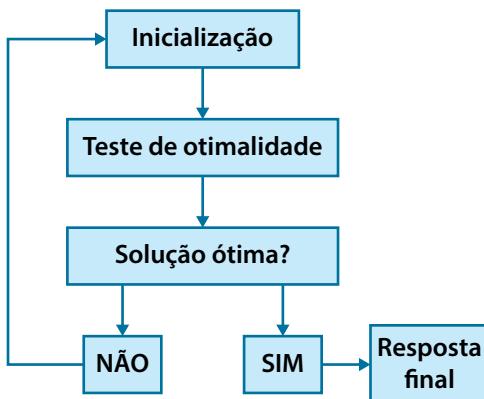


Figura 1 - Algoritmo simplificado do Método *Simplex*

Fonte: o autor.

Quando o método é iniciado, uma solução é calculada e, caso seja a ótima, o processo de cálculo se encerra. Caso não seja, o método recalculará uma nova solução e conferirá se trata-se ou não da ótima. A solução ótima é definida pela função objetivo, pois é ela que apresenta o objetivo que se quer alcançar com a solução do problema.

Segundo Lachtermacher (2007), algumas exigências devem ser respeitadas para que se resolva um modelo de Programação Linear com o Método *Simplex*. Em primeiro lugar, as equações da função objetivo e das restrições devem estar na forma canônica, ou seja, todas devem ser escritas com sinal de igualdade. Por isso, as equações de restrição precisam ser modificadas quando apresentam as desigualdades (\leq ou \geq). Em segundo lugar, a função objetivo deve ser de maximização. Você verá o procedimento para resolver os problemas de minimização mais adiante ainda nesta unidade.

A forma geral do modelo de Programação Linear deve ser a seguinte:

$$\max(Z) = c_{11} \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n$$

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

Com:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots; x_n \geq 0$$

Para que as restrições apresentem o sinal de igualdade, há a necessidade de modificarmos as inequações, acrescentando novas variáveis para estabelecer a igualdade entre os termos do lado esquerdo e direito das restrições.

Para resolver o modelo de Programação Linear por meio do Método *Simplex* na forma tabular, é importante seguir alguns passos para facilitar todo o processo de cálculo, pois em alguns casos ele pode ser longo e demorado.

Silva et al. (2010) e Longaray (2014) apresentam essas etapas, e você as verá no tópico seguinte.

ETAPAS DE RESOLUÇÃO DO MÉTODO SIMPLEX TABULAR

1^a Etapa: usando as variáveis de folga.

Com a função objetivo na forma de maximização, será a vez de alterar as inequações das restrições do problema para que assumam o sinal de igualdade. Essa alteração se faz por meio das variáveis de folga, que são utilizadas para equilibrar os dois lados das equações de restrição representando as sobras de recursos de cada restrição, sendo que a quantidade de variáveis de folga é igual ao número de restrições do problema com sinal de desigualdade (exceto as restrições de não negatividade).

Em Pesquisa Operacional, as restrições do problema usualmente estão relacionadas com a utilização de recursos, que podem ser matéria-prima, mão-de-obra e recursos financeiros, por exemplo. As restrições de limite superior (\leq) indicam que:

$$\text{utilização de recursos} \leq \text{disponibilidade de recursos}$$

Para acrescentar a variável de folga ao lado esquerdo da desigualdade, o raciocínio que se aplica é o de que, se o lado esquerdo da equação é menor do que o lado direito, então, para que haja igualdade, devemos somar algo do lado esquerdo:

utilização de recurso + variável de folga = disponibilidade de recurso
 Partindo do mesmo raciocínio, as restrições de limite inferior (\geq) indicam que:

$$\text{utilização do recurso} \geq \text{disponibilidade de recurso}$$

Para acrescentar a variável de folga do lado esquerdo da desigualdade, o raciocínio aplicado é o de que, se o lado esquerdo da equação é maior do que o lado direito, então, para que haja igualdade, devemos subtrair algo do lado esquerdo:

$$\text{utilização de recurso} - \text{variável de folga} = \text{disponibilidade de recurso}$$

Para ilustrar essa etapa, vamos retomar o exemplo 1 da Unidade I:

Exemplo 1 (maximização): uma empresa de móveis produz dois tipos de escrivaninha para computador. O modelo Oxford apresenta uma gaveta e apoio alto para impressora, e o modelo London apresenta quatro gavetas sem apoio para impressora. Sabe-se que as duas são produzidas em mdf, sendo que o modelo Oxford consome cerca de 4m^2 de mdf, e o modelo London 3m^2 de mdf. O tempo de fabricação do modelo Oxford é de 12h, e do modelo London é de 16h. Você quer fazer uma otimização desse setor da produção para maximizar o lucro mensal. A empresa vende para as lojas o modelo London com um lucro de R\$230,00, e o modelo Oxford com lucro R\$270,00. Durante o mês, a empresa tem disponibilidade de 192h de trabalho e uma quantidade de matéria-prima para fabricação das escrivaninhas de 80m^2 de mdf. **Elabore o modelo de maximização dos lucros para uma Programação Linear.**

Na Unidade I, você aprendeu como descrever o problema na forma matemática. O sistema de equações encontrado para esse exemplo foi:

$$\max(Z) = 270 \cdot x_1 + 230 \cdot x_2$$

Sujeito à:

$$R_1 : 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 80$$

$$R_2 : 12 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 \leq 192$$

$$R_3 : x_1 \geq 0$$

$$R_4 : x_2 \geq 0$$

Lembrando que as variáveis de decisão foram definidas como sendo:

x_1 = quantidade de escrivaninhas do modelo Oxford

x_2 = quantidade de escrivaninhas do modelo London

A notação utilizada para as variáveis de folga será xF_i , sendo que o índice i representa a restrição da qual a variável de folga faz parte. Você somente vai acrescentar as variáveis de folga nas restrições do problema com sinal de desigualdade (\geq ou \leq), exceto nas restrições de não negatividade. Portanto, neste exemplo, apenas as duas primeiras restrições receberão as variáveis de folga. Como ambas são restrições de limite superior (\leq), o lado esquerdo das restrições é menor do que o lado direito, então a variável de folga de cada equação será somada ao lado esquerdo da restrição, e trocaremos o sinal de menor igual pela igualdade. Veja:

$$4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + xF_1 = 80$$

$$12 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 + xF_2 = 192$$

Neste momento, escreva a função objetivo em sua forma transformada para resolver o problema, igualando-a a zero e considerando Z um termo da equação. Observe:

$$Z = 270 \cdot x_1 + 230 \cdot x_2$$

$$Z - 270 \cdot x_1 - 230 \cdot x_2 = 0$$

As equações que farão parte da resolução do Método *Simplex* são compostas pela função objetivo transformada, e pelas duas restrições com o sinal de igualdade:

$$Z - 270 \cdot x_1 - 230 \cdot x_2 = 0$$

$$4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + xF_1 = 80$$

$$12 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 + xF_2 = 192$$

2ª Etapa: construção da Tabela *Simplex*

O Método tabular do *Simplex* é resolvido com a construção de um quadro que podemos chamar de Tabela *Simplex*. Na construção da tabela, você vai utilizar aquela ideia de representar um sistema de equações na forma de matriz, ou seja, estarão presentes apenas os coeficientes das equações. Elabore a tabela

representando as colunas como os coeficientes das variáveis do problema, sendo que as linhas devem representar cada equação do sistema. A tabela original do *Simplex* (com os valores iniciais do problema) fica no seguinte formato:

Tabela 1 - *Simplex* original

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
F.O.	1	-270	-230	0	0	0
1 ^a R.	0	4	3	1	0	80
2 ^a R.	0	12	16	0	1	192

Fonte : o autor.

Note que, quando não aparece uma variável na equação que está sendo representada na Tabela *Simplex*, você coloca um coeficiente igual a zero. A função objetivo (1^a linha numérica da tabela) não apresenta xF_1 nem xF_2 e, por esse motivo, aparece o número zero na posição dessas duas variáveis. A última coluna representa os valores que estão ao lado direito da igualdade das equações do sistema linear.

3^a Etapa: determinação da solução básica inicial

Para resolver um problema de otimização com o Método *Simplex*, você precisa dar um chute inicial para a solução do problema, ou seja, o método se inicia com uma solução pré-definida, e então as iterações ocorrem até que se encontre a solução ótima. Na forma tabular do Método *Simplex*, é comum considerar inicialmente as variáveis de decisão iguais a zero. Portanto, $x_1=0$ e $x_2=0$. Quando você faz essa consideração, xF_1 e xF_2 assumem valores diferentes de zero, e você pode encontrar seus valores ao usar as equações de restrição com as variáveis de decisão substituídas por zero.

Para xF_1 :

$$4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + xF_1 = 80$$

$$4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + xF_1 = 80$$

$$xF_1 = 80$$

Para xF_2 :

$$12 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 + xF_2 = 192$$

$$12 \cdot 0 + 16 \cdot 0 + xF_2 = 192$$

$$xF_2 = 192$$

O que isso significa? Quando você assume que as variáveis de decisão são iguais a zero, nesse exemplo, você está dizendo que não produz nenhuma escrivaninha, nem Oxford, nem *London*. Se a sua produção é zero, não há consumo de recursos, ou seja, sobram 80m² de mdf e 192h de trabalho. Como xF_1 está associada à primeira restrição, xF_1 assume o valor de 80, e como xF_2 está associada às horas de trabalho, assume o valor de 192.

Então, dizemos que a solução básica é formada pelas variáveis básicas (que são as diferentes de zero), as variáveis não básicas (que são as iguais a zero), e o valor de Z. Se não há produção, não há lucro:

$$Z - 270 \cdot x_1 - 230 \cdot x_2 = 0$$

$$Z - 270 \cdot 0 - 230 \cdot 0 = 0$$

$$Z = 0$$

A solução básica inicial desse exemplo é dada por:

variáveis não básicas: $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$

variáveis básicas: $xF_1 = 80$ e $xF_2 = 192$

$$Z = 0$$

Observe que essa é uma solução do problema, mas é óbvio que não é a ótima, pois o objetivo principal é encontrar valores para x_1 e x_2 que dêem o maior valor possível para Z sem extrapolar as restrições do problema. As próximas etapas do Método *Simplex* servem para isso, ou seja, tornar x_1 e/ou x_2 diferentes de zero, e fazer com que xF_1 e xF_2 se tornem iguais a zero, o que representaria a utilização máxima de recursos.

4ª Etapa: determinar a variável que entra na base e a variável que sai da base

As variáveis que podem entrar na base são x_1 e x_2 , pois elas são as variáveis não básicas e iguais a zero. As variáveis que podem sair da base são xF_1 e xF_2 , pois são as variáveis básicas diferentes de zero. Esse é um processo de troca, já que, enquanto uma variável entra na base, a outra sai, ou seja, enquanto uma variável deixa de ter o valor igual a zero, a outra passa a assumir o valor de zero.

Nesta etapa, você deve selecionar dentre x_1 e x_2 , qual das duas vai entrar na base (deixar de ser zero) e, escolhida a variável que entrará na base, você selecionará a variável que sairá da base, xF_1 ou xF_2 . Então, como fazer?

Observe a linha da função objetivo (1ª linha numérica) da Tabela *Simplex* original (Tabela 1), e escolha a variável que apresenta o coeficiente de maior valor, desconsiderando o sinal, pois isso fará com que o método atinja a convergência mais rápido. Neste exemplo, x_1 apresenta o maior coeficiente (270), então essa será a primeira variável que entra na base.

Para escolher a variável que deixa a base (xF_1 ou xF_2), você vai fazer uma divisão entre o número que está na coluna de b com o coeficiente da variável que entrará na base. Esse cálculo é feito em cada linha que apresenta as variáveis de folga, que nesse exemplo são a 2ª e a 3ª linhas numéricas:

$$80 \div 4 = 20 \text{ (2ª linha numérica} \rightarrow xF_1)$$

$$192 \div 12 = 16 \text{ (3ª linha numérica} \rightarrow xF_2)$$

Como o menor valor da divisão é 16, resultante da razão entre 192 (termo b da 3ª linha numérica), e 12 (coeficiente de x_1 na 3ª linha numérica), a variável xF_2 vai sair da base primeiro.

Na Tabela 2, é apresentado novamente o quadro original do *simplex*, sendo que a célula da variável x_1 está destacada em tons de cinza, e a 3ª linha numérica que representa a linha da variável xF_2 .

Tabela 2 - Escolha das variáveis

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
F.O.	1	-270	-230	0	0	0
1ª R.	0	4	3	1	0	80
2ª R.	0	12	16	0	1	192

Fonte: o autor.

5^a Etapa: determinação da nova solução básica

Para determinar a nova solução básica, você vai precisar da linha pivô e do número pivô. Essa linha é a mesma da variável que sai da base, que nesse exemplo é a 3^a linha numérica, que está destacada na Tabela 2. O elemento pivô é o número que representa o coeficiente da variável que entra na base desta linha, sendo nesse exemplo o número 12, que é o coeficiente da variável x_1 na 3^a linha numérica da Tabela *Simplex*.

Nessa etapa, o objetivo é recalcular todas as linhas da Tabela *Simplex* (lembre-se da combinação linear vista na revisão de álgebra). A primeira linha que será recalculada é a linha pivô e, depois, ao utilizar a nova linha pivô, as demais serão encontradas. No cálculo de cada linha, é interessante fazer um quadro para facilitar a descrição das operações matemáticas. A partir desse ponto, as linhas numéricas da Tabela *Simplex* serão chamadas de 1^a, 2^a e 3^a linha, representando, respectivamente, os coeficientes da função objetivo (1^a), e das restrições (2^a e 3^a).

Para o cálculo da nova linha pivô, elabore uma tabela conforme apresentado na Tabela 3:

Tabela 3 - Cálculo na nova linha pivô

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
Linha pivô (3 ^a)	0	12	16	0	1	192
		12				
Nova linha pivô	0	1	$16/12 = 4/3$	0	$1/12$	16

Fonte: o autor.

Observe que os valores da linha pivô foram todos divididos pelo número pivô, ou seja, aquele número que representa o coeficiente da variável selecionada para entrar na base.



Com a nova linha pivô, pode-se então recalcular as demais linhas da Tabela *Simplex*. Na Tabela 4, é apresentado o processo de cálculo da nova 1^a linha. O objetivo é tornar o coeficiente de x_1 , na nova 1^a linha, igual a zero. Por essa razão, a nova linha pivô é multiplicada por 270, pois, ao somar com a 1^a linha, o coeficiente de x_1 torna-se zero.

Tabela 4 - Cálculo da nova 1^a linha

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
Nova linha pivô	0	1	4/3	0	1/12	16
($\times 270$)	0	270	360	0	45/2	4320
+ 1 ^a linha	1	-270	-230	0	0	0
Nova 1 ^a linha	1	0	130	0	45/2	4320

Fonte: o autor.

Da mesma forma, determina-se a nova 2^a linha, mas agora multiplicando a linha pivô por (-4), pois, ao somar a 2^a linha, o coeficiente de x_1 torna-se zero. Na Tabela 5, é apresentado o procedimento de cálculo. Veja:

Tabela 5 - Cálculo da nova 2^a linha

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
Nova linha pivô	0	1	4/3	0	1/12	16
($\times -4$)	0	-4	-16/3	0	-1/3	-64
+ 2 ^a linha	0	4	3	1	0	80
Nova 2 ^a linha	0	0	-7/3	1	-1/3	16

Fonte: o autor.

Depois de recalcular todas as linhas da Tabela *Simplex*, monta-se um quadro com as novas linhas para verificar os coeficientes encontrados e, então, anota-se a nova solução básica.

Tabela 6 - Nova Tabela *Simplex*

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
Nova 1 ^a linha	1	0	130	0	45/2	4320
Nova 2 ^a linha	0	0	-7/3	1	-1/3	16
Nova 3 ^a linha	0	1	4/3	0	1/12	16

Fonte: o autor.

variáveis não básicas: $x_2 = 0$ e $xF_2 = 0$

variáveis básicas: $x_1 = 16$ e $xF_1 = 16$

$$Z = 4320$$

Lembre-se que x_2 ainda não entrou na base. Portanto, continua sendo igual a zero, e xF_2 saiu da base, tornando-se igual a zero. Para encontrar os valores de x_1 , xF_1 e Z , basta escrever a Tabela *Simplex* na forma de equações e substituir os valores de $x_2=0$ e $xF_2=0$. Observe:

Para Z

$$Z - 0 \cdot x_1 + 130 \cdot x_2 + 0 \cdot xF_1 + (45 \div 2) \cdot xF_2 = 4320$$

$$Z - 0 \cdot x_1 + 130 \cdot 0 + 0 \cdot xF_1 + (45 \div 2) \cdot 0 = 4320$$

$$Z = 4320$$

Para xF_1

$$0 \cdot Z + 0 \cdot x_1 - \frac{7}{3} \cdot x_2 + xF_1 - \frac{1}{3} \cdot xF_2 = 16$$

$$0 \cdot Z + 0 \cdot x_1 - \frac{7}{3} \cdot 0 + xF_1 - \frac{1}{3} \cdot 0 = 16$$

$$xF_1 = 16$$

Para x_1

$$0 \cdot Z + x_1 + \frac{4}{3} \cdot x_2 + 0 \cdot xF_1 + \frac{1}{12} \cdot xF_2 = 16$$

$$0 \cdot Z + x_1 + \frac{4}{3} \cdot 0 + 0 \cdot xF_1 + \frac{1}{12} \cdot 0 = 16$$

$$x_1 = 16$$

6^a Etapa: teste da nova solução

A próxima etapa consiste em avaliar se o Método *Simplex* já encontrou a solução ótima ou se há necessidade de refazer os cálculos novamente. Isso é verificado por meio da observação dos coeficientes das variáveis não básicas na 1^a linha numérica da nova Tabela *Simplex*. Quando esses coeficientes forem iguais ou maiores que zero, significa que já foi encontrada uma solução ótima. Caso algum desses coeficientes seja negativo, o processo de cálculo das etapas 4 e 5 deve ser repetido com base na nova Tabela *Simplex*.

No exemplo 1, as variáveis não básicas ficaram sendo x_2 e xF_2 , com coeficientes 130 e $45/2$, respectivamente. Portanto, o método já encontrou a solução ótima com apenas uma iteração. Logo, nosso problema já tem uma resposta. Para otimizar os lucros, devem ser produzidas 16 escrivaninhas do modelo Oxford (x_1), e nenhuma do modelo *London* ($x_2=0$), o que irá gerar um lucro de R\$4.320,00 ($Z=4320$). Com essa produção, sobrarão 16m² de mdf ($xF_1=16$), e não sobrarão horas de trabalho ($xF_2=0$).

Essa é a resposta para a maximização do lucro segundo o problema descrito no exemplo 1, de acordo com o modelo criado para ele. Se houvesse necessidade de produzir escrivaninhas do modelo *London*, então seria necessário acrescentar essa informação ao modelo, para evitar que a otimização levasse a $x_2=0$. Mas tenha a consciência de que, quanto mais equações houver no modelo, maior será a complexidade para resolvê-lo. No entanto, sempre deve haver o cuidado de não omitir nenhuma informação para que o modelo não fique incompleto.

Na Unidade III, você poderá explorar o exemplo 1 com o acréscimo de novas restrições.



REFLITA

Nas grandes batalhas da vida, o primeiro passo para a vitória é o desejo de vencer.

(Gandhi)

ESPECIAIS DO MÉTODO *SIMPLEX*: PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Alguns problemas estudados com a Programação Linear necessitam de algumas modificações em sua estrutura matemática, para que sejam resolvidos pelo Método *Simplex*. Você viu no tópico anterior que o Método *Simplex* se aplica a casos de maximização, e que todas as equações de restrição precisam ser escritas como igualdade. Sendo assim, os problemas de minimização devem ser tratados de uma forma um pouco diferente.



O PROBLEMA DA MINIMIZAÇÃO

Neste caso, você deve reescrever a função objetivo com sinal inverso. A ideia é que a minimização é o inverso da maximização. Matematicamente falando, se você tem uma função objetivo da seguinte forma:

$$\min(Z) = 8 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$$

Isso seria equivalente a:

$$\max(W) = -8 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2, \text{ para } Z = -W$$

Para utilizar o Método *Simplex* tabular, você então reescreveria a função objetivo na forma:

$$W + 8 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 0$$

Se o seu problema de minimização for um caso de redução de custos, dependendo de como você descrever o problema e elaborar o modelo, a otimização pode levar a uma resposta de custo zero sem produção de qualquer mercadoria (as variáveis de decisão assumiriam valor igual a zero). Por isso, é comum acrescentar restrições de produção mínima, o que é representado por uma inequação do tipo maior igual (\geq), (isso dá origem a um problema para aplicar o *Simplex*, pois a solução básica inicial fica prejudicada).

O PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Sempre que você se deparar com restrições do problema de limite inferior na forma de inequações do tipo \geq , ou restrições de igualdade (=), e escrever essas restrições na forma correta do *Simplex*, surgirão inconsistências matemáticas quando você determinar a solução básica inicial com as variáveis de decisão iguais a zero.

Suponha que você tenha a seguinte restrição:

$$x_1 + 6 \cdot x_2 \geq 15$$

Para representar essa restrição na forma de solução do Método *Simplex*, você subtrai do lado esquerdo da equação uma variável de folga. Assim, há equilíbrio entre os dois lados da equação:

$$x_1 + 6 \cdot x_2 - xF_1 = 15$$

Até aí, tudo bem. Entretanto quando você vai resolver o seu problema e considera a solução básica inicial $x_1=0$ e $x_2=0$, a variável de folga assume valor negativo:

$$0 + 6 \cdot 0 - xF_1 = 15$$

$$xF_1 = -15$$

Todavia, isso não pode acontecer, pois todas as variáveis básicas da solução inicial do problema devem ser maiores ou iguais a zero (LONGARAY, 2014). Isso é resolvido quando é acrescentada à restrição uma variável artificial, que será representada pela letra S. Assim, a restrição fica na forma:

$$x_1 + 6 \cdot x_2 - xF_1 + S_1 = 15$$

Nessas circunstâncias, as variáveis não básicas passam a ser $x_1=0$, $x_2=0$ e $xF_1=0$, sendo que a variável artificial fica igual a um número maior do que zero:

$$0 + 6 \cdot 0 - 0 + S_1 = 15$$

$$S_1 = 15$$

Se a restrição for de igualdade, por exemplo:

$$2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 = 23$$

Como há equilíbrio entre os dois lados da equação (a igualdade já está definida), não se soma nenhuma variável de folga. Logo, teoricamente, a equação estaria pronta para entrar no processo de solução do Método *Simplex*. Novamente, quando você definir a solução básica inicial com $x_1=0$ e $x_2=0$, sua equação cai em uma inconsistência matemática:

$$2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 23$$

$$0 = 23$$

A alternativa para evitar essa inconsistência é a utilização da variável artificial na equação:

$$2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + S_1 = 23$$

Quando você assumir x_1 e x_2 como as variáveis não básicas (iguais a zero) da solução inicial do Método *Simplex*, a variável artificial passa a ter um valor positivo e diferente de zero:

$$2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + S_1 = 23$$

$$S_1 = 23$$

Em ambos os casos, a variável artificial vai aparecer na solução básica inicial como uma variável básica ($\neq 0$), e a primeira missão para resolver o Método *Simplex* é eliminá-la.

É importante você ter em mente que o uso da variável artificial ocorre pelo tipo de restrição e não pelo tipo de problema (maximização ou minimização), sendo que ela é mais comum em problemas de minimização, devido à presença de pelo menos uma restrição de limite inferior (\geq). Mas nada impede que em problemas de maximização também apareçam esses tipos de restrição, o que implica na necessidade de uso das variáveis artificiais.

Para resolver esse tipo de problema, utilizaremos o método do M grande. O objetivo inicial ao resolver um problema por meio desse método é eliminar a variável artificial, ou seja, torná-la igual a zero. Você verá que o processo é bem semelhante ao que é adotado para resolver problemas de maximização.

Retornemos ao exemplo 2 da Unidade I, pois trata-se de um problema de minimização que exigirá a utilização da variável artificial.

Exemplo 2 (minimização): uma indústria automotiva produz dois modelos de carros flex com motor 1.6 em uma de suas unidades o Ceres e o Vulcano. Você, como gerente de produção, quer estimar a melhor maneira de produzi-los com custos reduzidos, tendo por base um mês de produção. O modelo Ceres é mais robusto e completo, com um custo total de produção de R\$35000,00. Já o modelo Vulcano é mais simples e básico, apresentando um custo total de R\$28000,00. Ambos utilizam a mesma linha de montagem, sendo que o modelo Ceres demora 22h/unidade para ser montado, e cada unidade do modelo Vulcano fica pronto em 14h. A fábrica trabalha em dois turnos por dia, todos os dias da semana, com disponibilidade total de 480h para montagem em um mês. A fábrica precisa entregar para a concessionária pelo menos 10 veículos ao mês. **Elabore um modelo de minimização de custos para uma Programação Linear e resolva-o pelo Método Simplex tabular.**

Na Unidade I você descreveu um modelo para esse problema, cuja forma é:

$$\min(Z) = 35000 \cdot x_1 + 28000 \cdot x_2$$

Sujeito à:

$$R_1 : 22 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2 \leq 480$$

$$R_2 : x_1 + x_2 \geq 10$$

$$R_3 : x_1 \geq 0$$

$$R_4 : x_2 \geq 0$$

Lembrando que:

x_1 = quantidade de veículos do modelo Ceres

x_2 = quantidade de veículos do modelo Vulcano

1^a Etapa: utilizando as variáveis de folga

Inicialmente, você precisa escrever as equações do modelo do problema na forma canônica do Método Simplex. Então, a função objetivo de minimização deverá apresentar a forma de uma função de maximização para que seja estabelecida a equivalência entre essas funções:

$$\min(Z) = 35000 \cdot x_1 + 28000 \cdot x_2$$

$$\max(W) = -35000 \cdot x_1 - 28000 \cdot x_2$$

A representação da forma canônica para o Método *Simplex* fica:

$$W + 35000 \cdot x_1 + 28000 \cdot x_2 = 0$$

Às restrições, então, acrescentamos as variáveis de folga e as artificiais, se houver necessidade:

$$22 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2 + xF_1 = 480$$

$$x_1 + x_2 - xF_2 + S_1 = 10$$

Ao perceber que foi necessário acrescentar a variável artificial à uma das restrições, então essa variável também precisa aparecer na equação da função objetivo com um coeficiente M (por esse motivo, o método se chama método do M grande):

$$W + 35000 \cdot x_1 + 28000 \cdot x_2 + M_1 \cdot S_1 = 0$$

Como as três equações estão no formato adequado, a Tabela *Simplex* pode ser construída.

2ª Etapa: construção da Tabela Simplex

Tabela 7 - Tabela do *Simplex* original

	W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	S_1	b
F.O.	1	35000	28000	0	0	M_1	0
1ª R.	0	22	14	1	0	0	480
2ª R.	0	1	1	0	-1	1	10

Fonte: o autor.

3ª Etapa: determinação da solução básica inicial

Você já viu que a solução básica inicial consiste em considerar as variáveis de decisão iguais a zero e que, quando você tem a presença da variável artificial, a variável de folga, que está na mesma equação da variável artificial, também será considerada igual a zero. Portanto, considerando $x_1=0$, $x_2=0$ e $xF_2=0$, encontra-se os valores de xF_1 e S_1 .

Para xF_1 :

$$22 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2 + xF_1 = 480$$

$$22 \cdot 0 + 14 \cdot 0 + xF_1 = 480$$

$$xF_1 = 480$$

Para S_1 :

$$x_1 + x_2 - xF_2 + S_1 = 10$$

$$0 + 0 - 0 + S_1 = 10$$

$$S_1 = 10$$

A solução básica inicial desse exemplo é dada por:

variáveis não básicas: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $xF_2 = 0$

variáveis básicas: $xF_1 = 480$ e $S_1 = 10$

4ª Etapa: Determinar a variável que entra na base e a variável que sai da base

Quando se tem a variável artificial, a variável que entra na base é escolhida de forma que a variável que saia da base seja a artificial. Se x_1 for escolhida, a divisão entre os termos da coluna **b** e os coeficientes de x_1 são:

$$480 \div 22 \approx 21,8 \text{ (2ª linha numérica} \rightarrow xF_1\text{)}$$

$$10 \div 1 = 10 \text{ (3ª linha numérica} \rightarrow S_1\text{)}$$

Isso resulta na escolha da 3ª linha numérica, que é a linha de S_1 . Se x_2 for escolhida, então a divisão dos termos da coluna **b** e os coeficientes de x_2 são:

$$480 \div 14 \approx 34,3 \text{ (2ª linha numérica} \rightarrow xF_1\text{)}$$

$$10 \div 1 = 10 \text{ (3ª linha numérica} \rightarrow S_1\text{)}$$

Esse cálculo acaba resultando também na escolha da 3ª linha numérica. Para esse exemplo, tanto a escolha de x_1 quanto de x_2 permitem a retirada da variável S_1 da base. Depois de retirar S_1 da base, a Tabela Simplex deve ser recalculada até que seja encontrada a solução ótima. Assim, a escolha de x_1 ou x_2 , para entrar na base primeiro apenas pode fazer o problema ficar mais longo ou mais curto.

Escolhi a variável x_2 para entrar na base, e assim a variável S_1 ficará de fora. A 3^a linha numérica será a linha pivô e o elemento pivô será o número 1, conforme apresentado na Tabela 8:

Tabela 8 - Escolha das variáveis

	W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	S_1	b
F.O.	1	35000	28000	0	0	M_1	0
1 ^a R.	0	22	14	1	0	0	480
2 ^a R.	0	1	1	0	-1	1	10

Fonte: o autor.

Para calcular a nova linha pivô, basta dividir a 3^a linha numérica pelo elemento pivô. Observe, na Tabela 9, que a 3^a linha numérica já está no formato da nova linha pivô, sendo utilizada para determinar as novas linhas (1^a e 2^a linha) da Tabela *Simplex*.



SAIBA MAIS

A linha pivô deve apresentar coeficiente 1 para a variável que foi escolhida para entrar na base. Por isso, quando ele é diferente de 1, a linha toda é dividida pelo seu próprio valor.

Fonte: o autor.

Tabela 9 - Nova linha pivô

	W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	S_1	b
Linha pivô (3 ^a)	0	1	1	0	-1	1	10
			1				
Nova Linha pivô (3 ^a)	0	1	1	0	-1	1	10

Fonte: o autor.

Na Tabela 10, está apresentado o cálculo da nova 1^a linha. Como o objetivo é tornar o coeficiente de x_2 igual a zero, então a linha pivô será multiplicada por -28000 e somada à 1^a linha original.

Tabela 10 - Nova 1^a linha

	W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	S_1	b
Linha pivô (3 ^a)	0	1	1	0	-1	1	10
(x -28000)	0	-28000	-28000	0	28000	-28000	-280000
+ 1 ^a linha	1	35000	28000	0	0	M_1	0
Nova 1 ^a linha	1	7000	0	0	28000	M_1	-280000

Fonte: o autor.

Aqui cabe uma observação: no método do M grande, a multiplicação de qualquer valor por M, assim como a soma ou a subtração de qualquer valor de M, resultará sempre em M. Lembre-se de que M é um coeficiente genérico da variável artificial S, portanto, não tem valor conhecido, e depois ele será automaticamente eliminado.

O cálculo da nova 2^a linha seguirá o mesmo princípio. Como o objetivo é zerar o coeficiente de x_2 na 2^a linha, então a linha pivô será multiplicada por -14, como é possível visualizar na Tabela 11:

Tabela 11- Nova 2^a linha

	W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	S_1	b
Linha pivô (3 ^a)	0	1	1	0	-1	1	10
(x -14)	0	-14	-14	0	14	-14	-140
+ 2 ^a linha	0	22	14	1	0	0	480
Nova 2 ^a linha	0	8	0	1	14	-14	340

Fonte: o autor.

Com todas as linhas recalculadas, podemos escrever a nova Tabela Simplex.

Tabela 12 - Nova Tabela Simplex

	W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	S_1	b
Nova 1 ^a linha	1	7000	0	0	28000	M_1	-280000
Nova 2 ^a linha	0	8	0	1	14	-14	340
Nova 3 ^a linha	0	1	1	0	-1	1	10

Fonte: o autor.

Como o objetivo dessa primeira iteração do Método *Simplex* era tornar S_1 igual a zero, ou seja, retirá-lo da base, podemos eliminar a coluna de S_1 , e reescrever a Tabela *Simplex* sem a variável artificial:

Tabela 13 - Na Tabela *Simplex* sem a variável artificial

	W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
Nova 1ª linha	1	7000	0	0	28000	-280000
Nova 2ª linha	0	8	0	1	14	340
Nova 3ª linha	0	1	1	0	-1	10

Fonte: o autor.

5ª Etapa: Determinação da nova solução básica

Com a nova Tabela *Simplex*, podemos então escrever a nova solução básica. Na primeira iteração do método, x_2 entrou na base e S_1 saiu da base. Dessa forma, a solução básica ficou assim:

$$\text{variáveis não básicas: } x_1 = 0 \text{ e } xF_2 = 0$$

$$\text{variáveis básicas: } x_2 = 10 \text{ e } xF_1 = 340$$

$$W = -280000$$

Lembre-se que x_1 ainda não entrou na base. Portanto, continua sendo igual a zero, e que xF_2 saiu da base, tornando-se igual a zero. Para encontrar os valores de x_2 , xF_1 e W , basta escrever a Tabela *Simplex* na forma de equações e substituir os valores de $x_1=0$ e $xF_2=0$. Observe:

Para W:

$$W + 7000 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot xF_1 + 28000 \cdot xF_2 = -280000$$

$$W + 7000 \cdot 0 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot xF_1 + 28000 \cdot 0 = -280000$$

$$W = -280000$$

Para xF_1 :

$$0 \cdot W + 8 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + xF_1 + 14 \cdot xF_2 = 340$$

$$0 \cdot W + 8 \cdot 0 + 0 \cdot x_2 + xF_1 + 14 \cdot 0 = 340$$

$$xF_1 = 340$$

Para x_2 :

$$0 \cdot W + x_1 + x_2 + 0 \cdot xF_1 - xF_2 = 10$$

$$0 \cdot W + 0 + x_2 + 0 \cdot xF_1 - 0 = 10$$

$$x_2 = 10$$

6ª Etapa: Teste da nova solução

Para terminar o Método *Simplex* tabular, lembre-se de que os coeficientes das variáveis não básicas não devem ser negativos na 1^a linha. Ao observar a nova Tabela *Simplex* (Tabela 13), verifica-se que os coeficientes de x_1 e xF_2 são positivos (7000 e 28000), respectivamente. Assim, a solução encontrada é a ótima para o problema descrito no exemplo 2.

Antes de escrevermos a resposta encontrada, quero ressaltar que, ao resolver o método M grande, o objetivo principal é eliminar a variável artificial. Porém, caso a resposta não seja otimizada, essa etapa de eliminação de S já poderá resultar em uma convergência da solução para a ótima. Se algum dos coeficientes das variáveis não básicas for negativo, deve-se executar as etapas 4, 5 e 6 novamente, até que se atinja o ótimo.

Como o problema já foi otimizado, encontramos que, para a produção dos dois modelos de veículos com custo mínimo, deve-se fabricar dez unidades do modelo Vulcano ($x_1=10$) e nenhuma unidade do modelo Ceres ($x_2=0$). Com essa produção, sobram 340h de trabalho ($xF_1=340$), e não faltam veículos para a concessionária ($xF_2=0$).

Quando você escreve o problema de minimização na forma do *Simplex*, ele é trocado por um problema de maximização. Por isso, a variável encontrada na função objetivo foi $W=-280000$, mas o custo era representado por Z. Assim, a relação estabelecida ao trocar Z por W era que $Z=-W$. Logo, o custo encontrado para essa produção otimizada foi de R\$280.000,00.

Neste exemplo, assim como no exemplo 1, se houver a necessidade de produzir um número mínimo de unidades do modelo Ceres, deve-se especificar essa informação em uma das restrições do problema. Na Unidade III, você poderá explorar mais esses exemplos.



OUTROS CASOS ESPECIAIS DO MÉTODO *SIMPLEX*

Algumas situações especiais podem ocorrer ao elaborar um problema de Programação Linear, além do problema da solução básica inicial. Longaray (2014) e Silva et al. (2010) apresentam algumas delas.

EMPATE NA VARIÁVEL DE ENTRADA

Quando você escreve o problema de Programação Linear na forma canônica do Método *Simplex*, as variáveis de decisão não estão na base (são iguais a zero), e você precisa escolher uma delas para entrar na base primeiro. Normalmente, você seleciona aquela que apresenta o maior coeficiente não negativo (em problemas de maximização), ou aquela que vai ser útil para eliminar a variável artificial quando ela aparecer.

Pode acontecer, em algumas situações, de os coeficientes das variáveis de decisão apresentarem valores idênticos. Observe:

$$\max(Z) = 7 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2$$

Na forma canônica:

$$Z - 7 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 = 0$$

Ao construir a Tabela *Simplex*, você encontra:

Tabela 14 - Representação da 1^a linha da Tabela *Simplex*

	Z	x_1	x_2	b
1 ^a linha	1	-7	-7	0

Fonte: o autor.

Nesta situação, qualquer uma das variáveis pode ser escolhida, pois ambas darão a mesma contribuição para a resolução do problema.

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA

Quando o valor da divisão do termo independente **b** e o coeficiente da variável que entra na base forem iguais para duas ou mais linhas, dizemos que há empate da variável de saída. Então, qualquer uma dessas linhas pode ser escolhida como a linha da variável que sai da base (será a linha pivô). Porém, ao resolver esse problema, uma das variáveis básicas assumirá valor igual a zero. Lembre-se de que as variáveis básicas devem ser diferentes de zero. Essa ocorrência faz com que o problema passe a ser denominado de problema de degeneração.

Outra consequência do empate na variável de saída é que o valor da função objetivo passa a não variar, mesmo com novos cálculos. Então, dizemos que o problema entrou em looping ou sistema fechado. Existem técnicas para resolver esse tipo de problema, mas que, por ele ser raro, são pouco exploradas.

PROBLEMA DA VARIÁVEL LIVRE

Se alguma das variáveis do problema não respeitar a condição de não negatividade, dizemos que ela é uma variável livre e que, para ser resolvida pelo Método *Simplex*, deve ser representada como a diferença entre duas novas variáveis. Por exemplo, para o modelo de Programação Linear:

$$\max(Z) = 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2$$

Sujeito à:

$$5 \cdot x_1 + x_2 \leq 20$$

$$9 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2 \leq 75$$

Com:

$$x_1 \geq \text{livre}, x_2 \geq 0$$

Então, x_1 pode ser representada pela diferença entre duas outras variáveis x_3 e x_4 , por exemplo:

$$x_1 = (x_3 - x_4)$$

$$\max(Z) = 3 \cdot (x_3 - x_4) + 7 \cdot x_2$$

Sujeito à:

$$5 \cdot (x_3 - x_4) + x_2 \leq 20$$

$$9 \cdot (x_3 - x_4) + 13 \cdot x_2 \leq 75$$

Com:

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \text{ e } x_4 \geq 0$$

O Método *Simplex* então é resolvido normalmente e, ao final, para encontrar o valor de x_1 , basta fazer a diferença entre as duas variáveis ($x_3 - x_4$).



ANÁLISE DO DUAL E DO PRIMAL

Hillier e Lieberman (2013) apresentam o conceito de dualidade como algo fundamental para a Programação Linear, sendo esse conceito descoberto nos primórdios do desenvolvimento do tema. Um problema original (primal) apresenta, associado a ele, outro problema, chamado de dual, que é simétrico ao original e conduz à mesma solução.

O conceito de primal e dual é importante para a análise das respostas dos problemas de Programação Linear. Em alguns casos, transformar um problema original em seu dual reduz e facilita os cálculos. Para transformar um problema primal em dual, alguns passos devem ser seguidos. Primeiro, há a necessidade de se definir quantas variáveis farão parte do dual, e o que define esse número é a quantidade de restrições do problema primal - a representação dessas variáveis se dá pela letra y . Depois, é estabelecida a quantidade de restrições do dual, sendo que esse valor será igual à quantidade de variáveis do modelo primal.

Em seguida, a função objetivo (D) é criada, sendo o inverso da função objetivo primal (Z). Por exemplo, se a função objetivo primal for de maximização, a do dual será de minimização. Os coeficientes da função objetivo dual serão os valores dos termos independentes b das restrições do modelo primal.

Depois, são elaboradas as restrições do problema dual, sendo o lado direito das equações (termo independente) iguais aos coeficientes da função objetivo

do primal. Os coeficientes da primeira função objetivo do dual serão os valores dos coeficientes da primeira variável do primal e assim sucessivamente. Os sinais de desigualdade do dual serão o inverso dos apresentados no primal. Veja:

Exemplo 3: elabore um modelo dual para o programa linear apresentado.

$$\min(Z) = 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

Sujeito à:

$$x_1 + 9 \cdot x_2 \geq 10$$

$$5 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2 \geq 45$$

$$12 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \geq 93$$

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$

Como o modelo primal apresenta três restrições, então o modelo dual terá três variáveis, y_1 , y_2 e y_3 . O modelo primal apresenta duas variáveis, então o modelo dual terá duas restrições. A função objetivo será de maximização, e os seus coeficientes terão os valores dos termos independentes das restrições do primal:

$$\max(D) = 10 \cdot y_1 + 45 \cdot y_2 + 93 \cdot y_3$$

Os coeficientes das restrições são os valores dos coeficientes das colunas das restrições do primal, e os termos independentes serão os coeficientes da função objetivo:

$$y_1 + 5 \cdot y_2 + 12 \cdot y_3 \leq 2$$

$$9 \cdot y_1 + 13 \cdot y_2 + 6 \cdot y_3 \leq 5$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \text{ e } y_3 \geq 0$$

Dessa forma, o modelo pode ser resolvido pelo Método *Simplex*.

Observe, caro aluno(a), que resolver um problema pelo Método *Simplex* em sua forma tabular exige apenas cuidado no momento de definir o problema, sendo que os passos para resolvê-lo são iguais tanto para casos de maximização quanto para minimização em problemas de Pesquisa Operacional. Com o conhecimento adquirido nesta unidade, você estará pronto para iniciar a unidade III e resolver problemas mais complexos por meio de uma ferramenta computacional muito simples, a *Solver do Excel*. Aguardo você lá. Bons estudos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na Unidade II do livro de Pesquisa Operacional, você teve a oportunidade de conhecer o Método *Simplex*, uma ferramenta muito importante para a resolução de problemas de Programação Linear.

Você fez uma pequena revisão de álgebra linear para relembrar a maneira de representar sistemas de equações lineares na forma de matriz e como resolver o sistema aplicando a combinação linear ou o método de eliminação de *Gauss*.

Na sequência, você resolveu os dois exemplos da Unidade I por meio do Método *Simplex* na forma tabular e, para isso, viu que alguns passos são necessários, como representar o modelo na forma canônica, escrevê-lo na Tabela *Simplex*, determinar a solução básica inicial, escolher a variável que entra na base (deixa de ser igual a zero) e a variável que sai da base (assume o valor zero). Assim, você encontra a linha pivô e a recalcula, sendo que, ao utilizar essa, você determina as novas linhas da Tabela *Simplex*. Ao final da primeira iteração, você analisa os coeficientes das variáveis não básicas. Caso algum deles seja negativo, todo o processo de cálculo das linhas se reinicia e, se os valores forem maiores ou iguais a zero, então o Método *Simplex* encontrou a solução ótima para o problema.

Você também verificou que, para o problema de minimização, algumas modificações do modelo devem ser feitas, transformando-o em maximização. Se houver restrição de limite inferior (\geq) ou igualdade, deve ser acrescentada ao modelo a variável artificial S, e o método do M grande deve ser aplicado com o objetivo de se eliminar essa variável.

Também foram apresentados alguns casos especiais do Método *Simplex* que podem assumir formas diferentes para que se alcance o objetivo de otimização do problema. Você viu o conceito de dualidade, que permite que se reescreva o problema de Programação Linear original, tornando-o mais fácil de ser resolvido em algumas situações.

Na Unidade III, você expandirá os conhecimentos por meio da resolução de problemas com o computador e análise das suas respostas.

ATIVIDADES



1. Em Pesquisa Operacional, é comum utilizar sistemas de equações lineares para representar o modelo do problema de otimização. **Resolva os dois sistemas apresentados e encontre as soluções adequadas.**

a) $3 \cdot x_1 - 75 \cdot x_2 = -8$
 $12 \cdot x_1 + 84 \cdot x_2 = 64$

b) $7 \cdot x_1 + 35 \cdot x_2 = 84$
 $x_1 + 8 \cdot x_2 = 13$

2. A representação de sistemas de equações lineares como matriz auxilia na elaboração de algoritmos de resolução de problemas com Programação Linear. **Elabore as matrizes dos sistemas de equações apresentados e encontre o elemento da matriz pedido:**

a) $5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 13 \cdot x_3 = 250$
 $9 \cdot x_1 - 22 \cdot x_2 + 46 \cdot x_3 = 1200$
 $x_1 + 84 \cdot x_2 = 12$

Encontre o valor dos elementos a_{23} e a_{33} .

b) $2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 = 9$
 $27 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 = 130$

Encontre o valor dos elementos a_{11} e a_{22} .

3. Para resolver um problema de otimização com o Método Simplex, é necessário escrever o modelo que representa o problema na forma canônica, ou seja, na forma adequada para que o método possa ser aplicado. **Com base nos modelos de Programação Linear apresentados, escreva-os na forma correta para resolver com o Método Simplex:**

ATIVIDADES



a) $\max(Z) = 35 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2$

Sujeito à:

$$2 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \leq 30$$

$$11 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$

b) $\max(Z) = 3 \cdot x_1 + 25 \cdot x_2$

Sujeito à:

$$x_1 + x_2 = 30$$

$$9 \cdot x_1 + 81 \cdot x_2 \geq 250$$

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$

c) $\min(Z) = 12 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2$

Sujeito à:

$$10 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2 \leq 30$$

$$45 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 130$$

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$

d) $\min(Z) = 33 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2$

Sujeito à:

$$6 \cdot x_1 + 93 \cdot x_2 \geq 2200$$

$$16 \cdot x_1 + 77 \cdot x_2 \geq 300$$

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$

4. Uma empresa produz pijamas femininos e camisolas tendo como matérias-primas malha e renda. Cada unidade do pijama consome 1,5m de malha e 50cm de renda, e cada unidade da camisola consome 1,3m de malha e 1m de renda. O pijama é vendido a R\$85,00 e a camisola a R\$110,00 a unidade. Há disponibilidade na fábrica de aquisição de 130m de malha e 15m de renda por semana. **Elabore um modelo de programa linear e resolva-o pelo Método Simplex tabular a fim de maximizar a receita da empresa em uma semana.**
5. Uma concessionária de automóveis pretende fazer uma campanha publicitária no rádio e na televisão para lançar um novo modelo de sua marca. O objetivo é atingir mais de 6000000 (seis milhões) de pessoas durante uma semana. Ela vai utilizar o horário nobre da televisão e o horário noturno do rádio. Segundo as emissoras, cada propaganda no horário nobre atinge 200.000 pessoas e no horário noturno do rádio 110.000 pessoas. Cada propaganda na TV sairá por R\$15.000,00, e no rádio por R\$9.000,00. **Sabendo que o número máximo de propagandas na TV deva ser de 21, elabore um modelo de Programação Linear para minimizar os custos com propaganda e resolva-o pelo Método Simplex tabular.**



Na Unidade II, achei interessante trazer um artigo que trata da modelagem para simulação em um sistema de produção de um frigorífico de peixes. Leia o excerto do artigo. Se houver interesse, você pode encontrar a referência completa na seção de Referências ao final da Unidade II. As referências apresentadas durante o texto encontram-se no artigo original.

A melhoria da qualidade dos produtos, a redução de custos operacionais e a inovação tecnológica são aspectos importantes para sustentar as estratégias das organizações na disputa por mercados. Para assegurar lucro no médio e longo prazo, necessitam criar e gerenciar conhecimentos, obtendo vantagens reais ao desenvolver os seus sistemas de produção e oferecendo produtos e/ou serviços adequados às necessidades de seus clientes.

A falta de informações, a inexistência de situações análogas passadas, a complexidade associada aos problemas identificados, tudo faz com que a organização procure por métodos e técnicas que a orientem na busca por soluções. Nesse contexto, a Pesquisa Operacional, através da Simulação de Sistemas, pode contribuir de forma efetiva (GAVIRA, 2003).

A simulação é útil na resolução de problemas complexos que podem envolver situações determinísticas ou estocásticas. Assim, Morabito e Pureza (2010, p.170) definem simulação como “uma importante ferramenta de planejamento que procura emular, por meio de relações lógicas, o funcionamento de sistemas reais, a fim de observar seu comportamento sob diferentes cenários”.

Os investimentos com modificações de produtos, processos, tecnologias e arranjos físicos são altos e arriscados. A simulação permite uma visualização mais detalhada do funcionamento da planta e ainda testes com cenários alternativos para indicar soluções a baixo custo, através de modelos computacionais.

Nesse contexto, o objetivo central desse trabalho foi desenvolver um modelo de simulação para auxiliar na tomada de decisões sobre a programação da produção de um frigorífico de peixe, localizado no interior do estado de São Paulo - Brasil. Utilizou-se como ferramenta computacional o software Arena, e como método de pesquisa a modelagem/simulação e o estudo de caso, incluindo a metodologia SimuCAD e as etapas de desenvolvimento de um modelo de simulação discutidas por Banks (1998) e Law e Kelton (2000).

A perspectiva deste estudo foi abordar a simulação computacional para auxílio à programação da produção de um frigorífico de peixe específico. Programar a produção é uma atividade bastante complexa, pois envolve tempo de produção, prazo de entrega, mix de produto, quanto, quando e onde produzir, além de buscar sempre o equilíbrio entre capacidade produtiva e demanda. E com o objetivo de reduzir as dificuldades de programação é que as empresas estão, cada vez mais, fazendo uso de sistemas computacionais, softwares especializados e simuladores para o gerenciamento de seus sistemas produtivos, dispondo de soluções avançadas, com mais rapidez e segurança do que a concorrência.



O modelo de simulação desenvolvido respondeu aos objetivos estabelecidos, gerando resultados confiáveis e úteis para auxiliar na tomada de decisões sobre a programação da produção do frigorífico em estudo. Esse modelo também pode ser empregado em outras empresas com processos produtivos análogos ao estudado.

Tendo por base o referencial teórico elaborado, a pesquisa desenvolvida e o objetivo proposto, foi possível: gerar cenários de produção mais confiáveis; testar diversas variáveis de controle; aproveitar melhor os recursos e quantificá-los; obter planos de produção semanais ou diários; verificar a capacidade do sistema; analisar o estado dos estoques; e determinar a quantidade de matéria-prima necessária. Tudo isso identificando se será necessário adquirir mais mão de obra, fazer horas extras, utilizar os colaboradores em tempo parcial, ou seja, identificar através dos resultados gerados pela simulação um método de ajuste da capacidade. Tais decisões afetam os custos, as receitas, o capital de giro, a qualidade, a velocidade, a confiabilidade e a flexibilidade do sistema produtivo. Diante deste contexto, tomadas de decisão através das informações geradas pelo modelo de simulação aqui construído podem atender bem as expectativas de desempenho da empresa.

Além destes pontos, que são fundamentais para uma boa programação da produção, conseguiu-se reduzir o lead-time do processo de transformação dos produtos, por meio de cálculo específicos do tempo de congelamento dos filés frescos e do processo de *glasing*, e visualizar as consequências benéficas geradas.

Também é relevante enfatizar que o investimento em estudos e pesquisas no ramo de processamento de peixes é promissor, pois o consumo mundial per capita de pescados tem aumentado muito em virtude das mudanças alimentares e dos incentivos a aquicultura (FIGUEIREDO JUNIOR; VALENTE JUNIOR, 2008). Por conta deste crescimento, unidades de processamento de tilápias estão surgindo cada dia mais. Tal destaque nessa espécie é devido a determinadas características como: pequeno ciclo de engorda; desova durante todo o ano; resistência a doenças, altas densidades de povoamento e a baixos níveis de oxigênio dissolvido; boas características

organolépticas; e excelente rendimento de filé (HILSDORF, 1995). Portanto, a simulação foi considerada, neste caso, uma boa técnica para tratar o problema de programação exposto, tendo como vantagem a visualização do funcionamento do frigorífico de forma rápida e a baixo custo.

Tal ferramenta tem seu valor aumentado ao aliar-se com outras técnicas ou estudos aprofundados sobre melhoria do processo, como ocorreu com o estudo dos tempos de congelamento seguido de uma posterior simulação.

Fonte: Pereira e Costa (2012, p. 972-1001).

MATERIAL COMPLEMENTAR



LIVRO

Introdução à Engenharia. Modelagem e Solução de Problemas

Jay B. Brockman

Editora: LTC

Sinopse: o livro Introdução à Engenharia - Modelagem e Solução de Problemas mostra como os profissionais resolvem problemas no dia a dia, provendo os engenheiros do conhecimento essencial que precisam para ter sucesso. Brockman utiliza os conceitos básicos de matérias como matemática, ciência e física para resolver os problemas que surgem no exercício da profissão - desde a estabilidade de uma plataforma off-shore de petróleo à maneira mais eficiente de fornecer água a comunidades carentes.

Os capítulos da primeira parte deste livro discutem a representação e a resolução de problemas, abrangendo engenharia e sociedade e organização e representação de sistemas de engenharia. Já a segunda parte trata dos projetos baseados em modelos matemáticos da engenharia, usando para isso leis da natureza e modelos teóricos, análise de dados e modelos empíricos e modelagem da relação entre os componentes de um sistema (estruturas leves), entre outras ferramentas. Por fim, o pacote computacional MATLAB é o assunto da terceira parte, com a apresentação das ferramentas necessárias para implementar os modelos apresentados na segunda parte desta obra.

O livro possui quatro apêndices como adição ao já completo conteúdo do livro, disponibilizando ao estudante orientação para método de resolução de problemas, taxonomia de Bloom, sociedades de engenharia norte-americanas e sistemas de unidades.



REFERÊNCIAS

- AXLER, S. Pré-Cálculo. **Uma preparação para o Cálculo.** Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional.** Porto Alegre: McGraw-Hill, 2013.
- LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na tomada de decisões.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- LONGARAY, A. A. **Introdução à Pesquisa Operacional.** São Paulo: Editora Saravia, 2014.
- MARINS, F. A. S. **Introdução à Pesquisa Operacional.** São Paulo: Cultura Acadêmica, 2011.
- PEREIRA, C. R. Um modelo de simulação de sistemas aplicado à programação da produção de um frigorífico de peixe. In: **Produção Online**, Florianópolis, v. 12, n. 4, p. 972-1001, 2012.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Introdução à álgebra linear.** São Paulo: Pearson Education, 1997.



GABARITO

1)

a) $x_1 = \frac{43}{12}; \quad x_2 = \frac{1}{4}$ b) $x_1 = \frac{217}{21}; \quad x_2 = \frac{1}{3}$

2)

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 13 & 250 \\ 9 & -22 & 46 & 1200 \\ 1 & 84 & 0 & 12 \end{array} \right] \quad a_{23} = 46 \quad a_{33} = 0$

b) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 9 \\ 27 & 16 & 130 \end{array} \right] \quad a_{11} = 2 \quad a_{22} = 16$

3)

a) $Z - 35 \cdot x_1 - 17 = 0$

$$2 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + xF_1 = 30$$

$$11 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 + xF_2 = 12$$

b) $Z - 3 \cdot x_1 - 25 \cdot x_2 + M_1 \cdot S_1 + M_2 \cdot S_2 = 0$

$$x_1 + x_2 + S_1 = 15$$

$$9 \cdot x_1 + 81 \cdot x_2 - xF_1 + S_2 = 250$$

c) $W + 12 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2 + M_1 \cdot S_1 = 0$

$$10 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2 + xF_1 = 30$$

$$45 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - xF_2 + S_1 = 130$$

d) $W + 33x_1 + 9x_2 + M_1S_1 + M_2S_2 = 0$

$$6x_1 + 93x_2 - xF_1 + S_1 = 2200$$

$$16x_1 + 77x_2 - xF_2 + S_2 = 300$$

$$x1 \geq 0$$

$$x2 \geq 0$$



GABARITO

4) Sistema para o Método Simplex:

$$Z - 85 \cdot x_1 - 100 \cdot x_2 = 0$$

$$1,5 x_1 + 1,3 \cdot x_2 + xF_1 = 130$$

$$0,5 x_1 + x_2 + xF_2 = 15$$

Produção de 30 unidades de pijama, nenhuma unidade de camisola, com sobra de 85m de malha e sem sobra de renda, com receita de R\$2550,00.

5) Sistema para o método simplex:

$$Z = -W$$

$$Z + 1500 \cdot x1 + 9000 \cdot x2 + M1 \cdot S1 = 0$$

$$200000 \cdot x_1 + 110000 \cdot x_2 - xF_1 + S_1 = 6000000$$

$$x_1 + xF_2 = 21$$

Pelo resultado direto na tabela, teríamos 21 propagandas na TV e 16,36 propagandas no rádio, atingindo as 6000000 de pessoas, com um custo de R\$462.272,73. Considerando que só podem ser realizadas propagandas inteiras, deve-se considerar então 21 propagandas na TV e 17 propagandas no rádio, sendo que o custo ficaria:

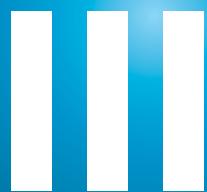
$$Z = 15000 \cdot x_1 + 9000 \cdot x_2 = 15000 \cdot 21 + 9000 \cdot 17$$

$$Z = \text{R\$ } 468.000,00$$



RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR: PLANILHA SOLVER

UNIDADE



Objetivos de Aprendizagem

- Habilitar o Solver no computador.
- Escrever os problemas de Programação Linear na planilha.
- Resolver e analisar as respostas encontradas.

Plano de Estudo

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- Resolvendo problemas de maximização com o *Solver*
- Resolvendo problemas de minimização com o *Solver*
- Análise de pós-otimização
- Análise de pós-otimização com o *Solver*

INTRODUÇÃO

Olá, caro(a) aluno(a), seja bem vindo! Iniciaremos a Unidade III da disciplina de Pesquisa Operacional. Nas unidades anteriores, você aprendeu a elaborar um modelo de Programação Linear e a prepará-lo para resolução utilizando o Método *Simplex* na forma tabular.

Você também resolveu alguns exemplos aplicando as etapas do Método *Simplex* para problemas de maximização e de minimização. É um trabalho grande, não? Utilizamos até o momento apenas duas variáveis de decisão (x_1 e x_2), com poucas restrições, e o procedimento de cálculo que você fez para resolver os problemas com o Método *Simplex* tabular foi trabalhoso. Por esse motivo, na Unidade III, você verá como resolver os problemas de Programação Linear com o *Solver do Excel*. Assim, os problemas poderão apresentar muito mais variáveis de decisão e equações de restrição, o que torna o modelo mais refinado e sem aumentar a dificuldade de resolvê-lo.

O avanço das técnicas computacionais é um dos fatores que alavancou o uso da Pesquisa Operacional no meio empresarial, pois permitiu que os modelos de Programação Linear se aproximem cada vez mais da realidade.

Existem diversos outros softwares de cálculo que são utilizados para a resolução de problemas de Programação Linear. Esses softwares podem apresentar linguagens diferentes para implementação dos modelos, mas todos apresentam o mesmo objetivo, que é o de otimizar o resultado. Se você não tem familiaridade com o *Excel*, sugiro que procure informações de como utilizá-lo, para que tenha um desempenho maior na disciplina, além de agregar conhecimento para a sua vida profissional.

Nesta unidade, você também verá como analisar as respostas encontradas após a solução do problema. Não basta encontrar a solução ótima, pois há a necessidade de analisá-la para confirmar se a solução é viável ou não. Além disso, você poderá simular algumas situações envolvendo o seu problema, sendo que bastará modificar algum parâmetro do seu modelo de acordo com o que você deseja avaliar.



RESOLVENDO PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO COM O SOLVER

A Pesquisa Operacional apresentou um grande avanço com o desenvolvimento de algoritmos computacionais, que permitiram a elaboração e a resolução de problemas mais complexos. Diversos autores, como Hillier e Lieberman (2013), e Longaray (2014), apresentam capítulos voltados à solução de problemas de Pesquisa Operacional utilizando o Método *Simplex* do Solver no Excel[®].

É importante ressaltar que o uso das planilhas eletrônicas ainda exige que o usuário elabore o modelo, monte o algoritmo e faça a análise de pós-otimização.

HABILITANDO O SOLVER

A unidade será iniciada com um pequeno tutorial de como habilitar o *Solver* no *Excel*. Ele já vem instalado como um suplemento do programa, mas na maioria das vezes não está habilitado, havendo necessidade simplesmente de torná-lo disponível na planilha. Como trabalharemos com um software que apresenta diversas versões, alguns nomes e formatos da planilha podem conter pequenas divergências com o que você estiver utilizando, mas saiba que a sequência de ações é a mesma, e a maneira de resolver os problemas de Programação Linear também. A versão do *Excel* utilizada nesta unidade é a de 2007.

As etapas para habilitar o *Solver* no *Excel* são as seguintes:

- abra uma planilha do programa e clique no botão Office na parte superior esquerda da planilha:

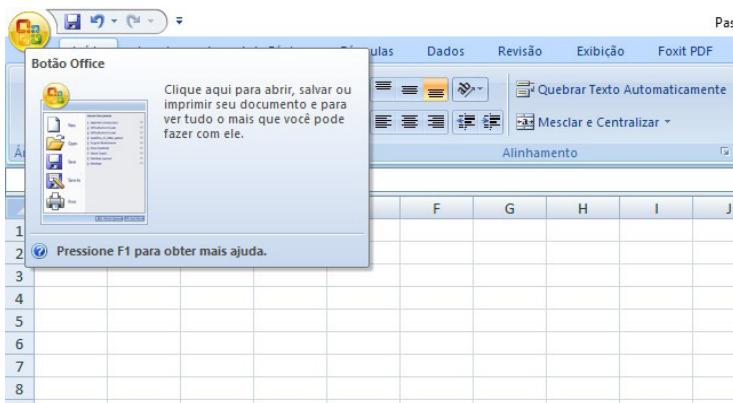


Figura 1 - Botão Office do *Excel*

Fonte: o autor.

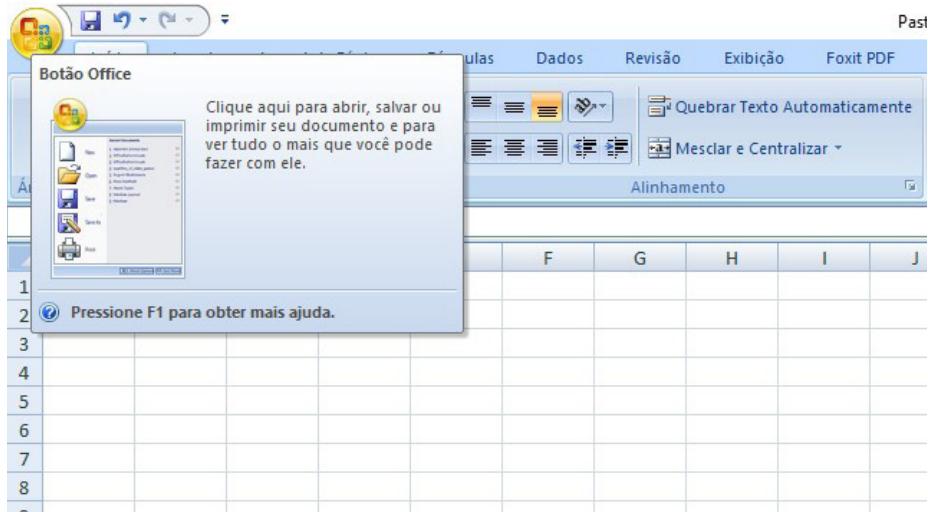


Figura 2 - Imagem após clicar no botão Office

Fonte: o autor.

- b) Em seguida, clique em Opções do Excel e selecione a aba suplementos.
Vá em gerenciar, selecione Suplementos do Excel e clique em Ir:

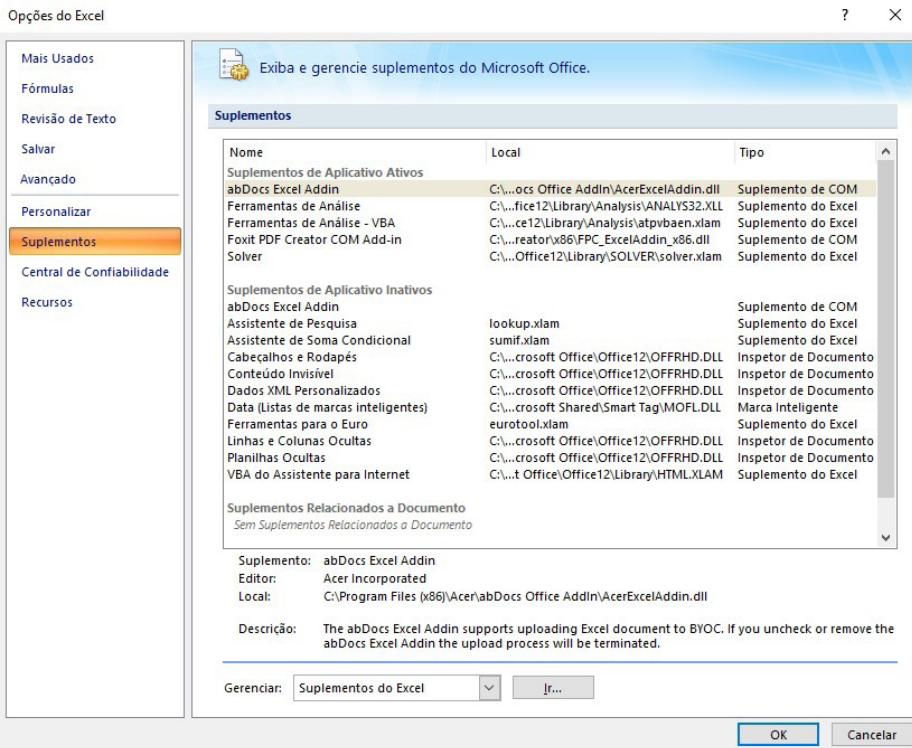


Figura 3 - Aba suplementos dentro de Opções do Excel

Fonte: o autor.

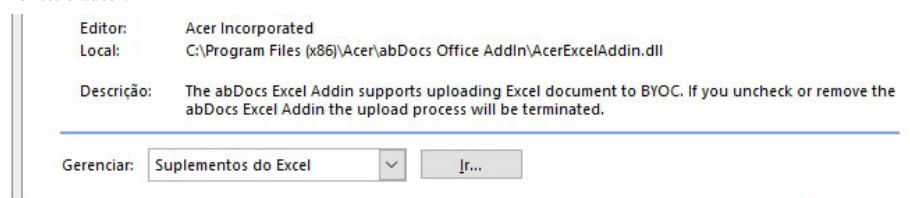


Figura 4 - Imagem de Gerenciar – Suplementos do Excel

Fonte: o autor.

- c) Ao abrir a janela dos suplementos, marque a caixa da opção Solver e clique em OK. Pronto, o Solver já está instalado:

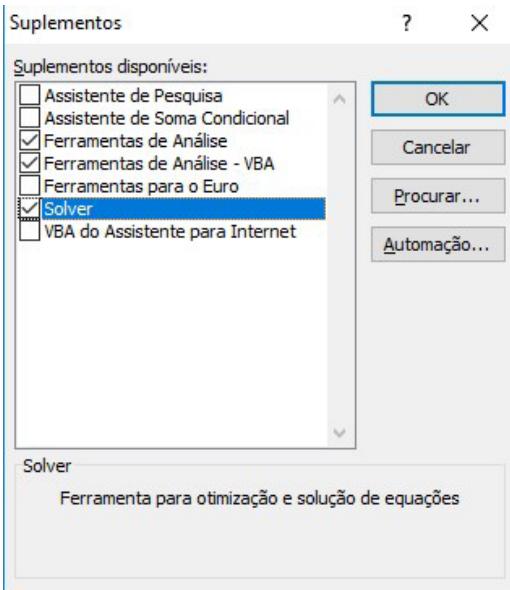


Figura 5 - Caixa da opção solver selecionada

Fonte: o autor.

O complemento Solver aparecerá na barra de ferramentas na opção dados.

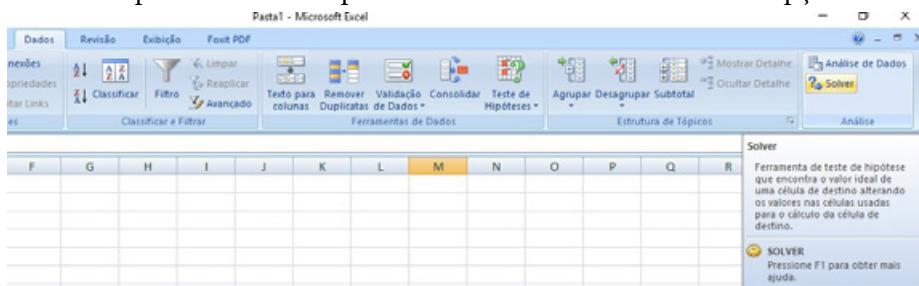


Figura 6 - Solver aparece na aba dados da barra de ferramentas

Fonte: o autor.

Ao habilitar o Solver uma vez, ele ficará disponível para qualquer planilha nova que você abrir. Portanto, esse processo precisa ser realizado apenas uma vez.

RESOLVENDO PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO

Resolver um problema de otimização utilizando o *Solver* do *Excel* é bem simples e rápido, e também é uma forma elegante de se trabalhar com a Programação Linear.

Considere o Exemplo 1, cuja modelagem foi desenvolvida na Unidade I e a solução ótima foi encontrada na Unidade II, por meio do Método *Simplex* na forma tabular.

Exemplo 1 (maximização): uma empresa de móveis produz dois tipos de escrivaninha para computador: o modelo *Oxford* apresenta uma gaveta e apoio alto para impressora e o modelo *London* tem quatro gavetas sem apoio para impressora. Sabe-se que as duas são produzidas em mdf, sendo que o modelo *Oxford* consome cerca de $4m^2$ de mdf, e o modelo *London* $3m^2$ de mdf. O tempo de fabricação do modelo *Oxford* é de 12h, e do modelo *London* é de 16h. Você quer fazer uma otimização desse setor da produção para maximizar o lucro mensal. A empresa vende para as lojas o modelo *London* com um lucro de R\$230,00, e o modelo *Oxford* com lucro de R\$270,00. Durante o mês, a empresa tem disponibilidade de 192h de trabalho e uma quantidade de matéria-prima para fabricação das escrivaninhas de $80m^2$ de mdf. **Elabore o modelo de maximização dos lucros para uma Programação Linear e resolva-o utilizando a ferramenta Solver do Excel.**

O modelo para esse problema já foi desenvolvido e é representado pelo conjunto de equações:

$$\max(Z) = 270 \cdot x_1 + 230 \cdot x_2$$

Sujeito à:

$$R_1 : 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 80$$

$$R_2 : 12 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 \leq 192$$

$$R_3 : x_1 \geq 0$$

$$R_4 : x_2 \geq 0$$

Sendo:

x_1 = quantidade de escrivaninhas do modelo *Oxford*

x_2 = quantidade de escrivaninhas do modelo *London*

Depois de estabelecido o modelo, há necessidade de escrevê-lo na planilha eletrônica, pois, assim como no Método *Simplex* tabular, o que vai para a planilha são os valores numéricos dos coeficientes de cada equação, bem como os números que representam os termos independentes. Na planilha, você deve colocar as informações essenciais, que incluem os dados de entrada, as variáveis de decisão, a que se referem cada restrição e quais são seus limites.

	A	B	C	D	E	F
1						
2						Produção de Escrivaninhas
3						
4	Dados de entrada					
5		Oxford	London			
6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)				Lucro Total	
7	Lucro unitário (R\$)					
8						
9	Restrições				Utilizado	Disponibilidade
10	Quantidade de mdf (m^2)					
11	Horas de trabalho (h)					

Figura 7 - Descrição dos elementos que vão compor a planilha do Exemplo 1

Fonte: o autor.

Observe, na Figura 7, que são escritas as informações importantes do problema. Então, identificamos os dados de entrada do lado esquerdo, que são as definições das variáveis de decisão, e quais serão as restrições. Nas colunas C, D, e E, aparecem os nomes das variáveis de decisão (modelo Oxford e modelo London), e as células em branco para que os valores numéricos dos coeficientes sejam escritos:

	A	B	C	D	E	F
1						
2						Produção de Escrivaninhas
3						
4	Dados de entrada					
5		Oxford	London			
6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)		0	0	Lucro Total	
7	Lucro unitário (R\$)		270	230		
8						
9	Restrições				Utilizado	Disponibilidade
10	Quantidade de mdf (m^2)		4	3		80
11	Horas de trabalho (h)		12	16		192

Figura 8 - Dados do modelo acrescentados à planilha

Fonte: o autor.

Na Figura 8, você pode ver que os valores dos coeficientes que aparecem no modelo foram colocados nas células da planilha. Na linha 7, você tem a representação da função objetivo que trata de maximizar o lucro, sendo que aparece o valor 270 abaixo da palavra Oxford, pois esse é o valor do lucro que cada unidade desse modelo fornece. Já abaixo da palavra London aparece o valor 230, que representa o lucro unitário desse modelo de escrivaninha:

$$\max(Z) = 270 \cdot x_1 + 230 \cdot x_2$$

As células C6 e D6 representam as quantidades de cada modelo de escrivaninha que são produzidas e comercializadas. Então, no início do problema, você coloca o número zero em ambas as células. Lembre-se de que, para resolver o Método Simplex, você necessita de uma solução inicial e, assim como na forma tabular, considera inicialmente a produção zero de cada variável de decisão.

As linhas 10 e 11 representam as restrições da quantidade de mdf disponíveis e de horas de trabalho, respectivamente. Observe que a disposição dos coeficientes obedece à sequência definida nas equações de restrição do modelo:

$$4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 80$$

$$12 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 \leq 192$$

As células pintadas de cinza receberão as fórmulas de cálculo das quantidades para o lucro e as quantidades utilizadas de recursos. Selecione a célula E7 que representa o valor do lucro total e coloque o sinal de igual (=). Escreva a função “somarproduto”, o que pode ser feito em letras maiúsculas ou minúsculas, abra um parêntese, e selecione as duas células C6 e D6. Coloque ponto e vírgula “;” e selecione as células C7 e D7. Então, feche o parêntese e aperte *ENTER* no teclado.

Depois, aparecerá o número zero na célula. A função “somarproduto” fará a multiplicação da célula C6*C7 e da célula D6*D7, somando-as no final, o que representa o lucro das unidades vendidas de cada modelo da escrivaninha:

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4	Dados de entrada					
5						
6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)	Oxford	London			
7	Lucro unitário (R\$)	0	0	Lucro Total		
8						
9	Restrições					
10	Quantidade de mdf (m ²)	4	3	Utilizado		
11	Horas de trabalho (h)	12	16		Disponibilidade	

Figura 9 - Função somarproduto aplicada à célula do lucro

Fonte: o autor.

Repita o mesmo procedimento para as células E10 e E11, coloque o sinal de igual (=) na célula E10 e escreva a função “somarproduto”. Abra um parêntese, selecione as células C6 e D6, coloque ponto e vírgula “;” e selecione as células C10 e D10. Feche o parêntese e aperte ENTER:

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4	Dados de entrada					
5						
6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)	Oxford	London		Lucro Total	
7	Lucro unitário (R\$)	0	0		R\$ 0,00	
8						
9	Restrições				Utilizado	Disponibilidade
10	Quantidade de mdf (m ²)	270	230			

Figura 10 - Função somarproduto aplicada à célula da 1^a restrição

Fonte: o autor.

Para a célula E11, adote o mesmo procedimento: selecione a célula, coloque o sinal de igual (=), escreva a função somarproduto, abra um parêntese, selecione as células C6 e D6, coloque ponto e vírgula “;” e selecione as células C11 e D11. Feche o parêntese e aperte ENTER:

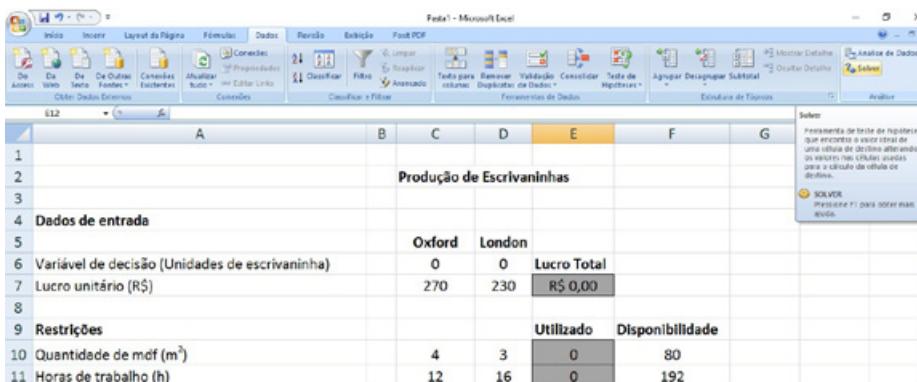
A	B	C	D	E	F
1					
2					
Produção de Escrivaninhas					
4 Dados de entrada					
6 Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)	Oxford	London			
7 Lucro unitário (R\$)	0	0			
	270	230			R\$ 0,00
9 Restrições					
10 Quantidade de mdf (m ³)			Utilizado		Disponibilidade
11 Horas de trabalho (h)	4	3	0		80
			=SOMARPRODUTO(C6:D6;C11:D11)		

Figura 11 - Função somarproduto aplicada à célula da 2ª restrição

Fonte: o autor.

Essas duas últimas etapas servem para determinar as quantidades utilizadas de cada recurso, mdf e horas de trabalho quando forem estimadas as quantidades produzidas de cada modelo de escrivaninha.

O modelo já está escrito na planilha, e, para resolvê-lo, vamos acionar o *Solver*. Selecione a célula da função objetivo, ou seja, a célula que tem o valor do lucro E7. Vá até a aba dados e clique no *Solver*:

Figura 12 - *Solver* na aba Dados

Fonte: o autor.

Vai aparecer uma janela do *Solver*, como apresentado na Figura 13:

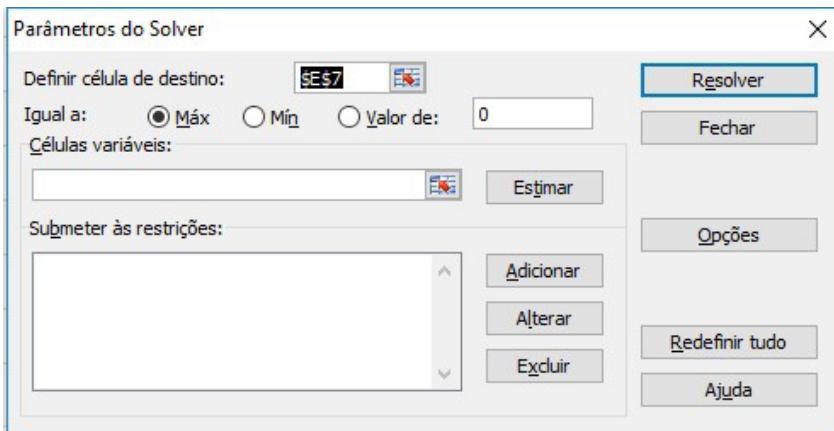


Figura 13 - Janela do *Solver*

Fonte: o autor.

Na janela do *Solver*, o importante é preencher “Definir célula de destino”, as “Células variáveis” e “Submeter às restrições”. Você também precisa selecionar se o problema é de maximização (Max) ou minimização (Min). A célula de maximização já está selecionada, e, em “Definir célula de destino”, já está marcado \$E\$7, ou seja, a célula E7, que, para nós, representa o lucro total que você quer otimizar.

As “Células variáveis” são as células da planilha que contêm as variáveis de decisão e, em nossa planilha, são as células C6 e D6. Então, clique na seta vermelha das “Células variáveis” e selecione na planilha as duas células. Depois, clique novamente na seta vermelha (Figura 13).

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
Produção de Escrivaninhas						
3						
4	Dados de entrada					
5						
6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)	Oxford	London			
7	Lucro unitário (R\$)	0	0	Lucro Total		
8		270	230	R\$ 0,00		
9	Restrições					
10	Quantidade de mdf (m ³)	4	3	Utilizado	Disponibilidade	
11	Horas de trabalho (h)	12	16	0	80	
				0	192	

Figura 14 - Selecionando as variáveis de decisão

Fonte: o autor.

A janela do *Solver* ficará como apresentado na Figura 15:

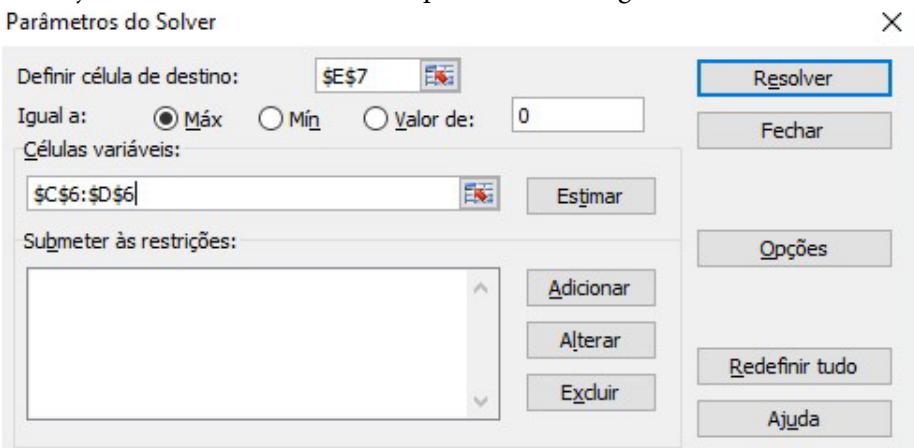


Figura 15 - Janela do *Solver* com as variáveis de decisão selecionadas

Fonte: o autor.

Agora, vá em “Submeter às restrições” e clique em “Adicionar”. Aparecerá a janela das restrições conforme mostrado na Figura 16:

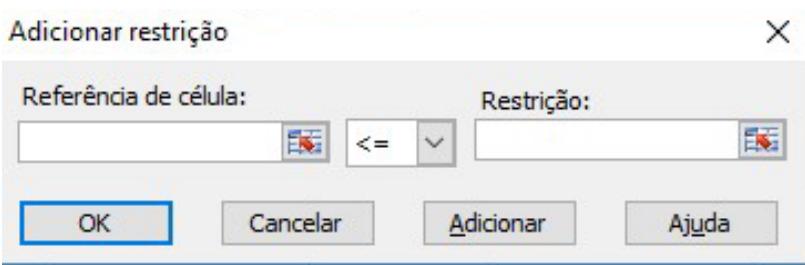


Figura 16 - Janela para acrescentar as restrições do problema

Fonte: o autor.

A “Referência da célula” representa a quantidade utilizada e a “Restrição” representa o limite para o recurso. O sinal que fica no meio (\leq) pode ser escolhido de acordo com as restrições do problema que se quer resolver. Em nosso problema, as duas restrições são do tipo menor-igual. Veja:

$$4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 80$$

$$12 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 \leq 192$$

Cada restrição pode ser acrescentada individualmente. Então, selecione “Referência da célula”, e clique na célula E10 da planilha para escolher a quantidade utilizada para a primeira restrição. Depois, selecione “Restrição”, e clique na célula F10 para representar o limite da primeira restrição. Aperte adicionar e note que a janela vai continuar aberta.

Então, selecione novamente “Referência da célula”, e clique em E11 para acrescentar a quantidade utilizada para a segunda restrição. Em seguida, selecione “Restrição”, e clique na célula F11 para acrescentar o limite da segunda restrição. Como não há mais restrições para acrescentar, aperte em OK:

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4	Dados de entrada					
5						
6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)	Oxford	London			
7	Lucro unitário (R\$)	0	0	Lucro Total		
8		270	230	R\$ 0,00		
9	Restrições					
10	Quantidade de mdf (m^2)	4	3	Utilizado		
11	Horas de trabalho (h)		12	0	Disponibilidade	
12				80		
13						
14				16	0	
15					192	

Adicionar restrição

Referência de célula:	<input type="text" value="E11"/>	Restrição:	<input type="text" value="=>F11"/>
<=		>	
<		>=	
>		<=	
<=		>	
<=		>=	
>		<=	
>		>	
<		<=	
<		<	

OK Cancelar Adicionar Ajuda

Figura 17 - Janela das restrições com os dados da segunda restrição

Fonte: o autor.

Observe na Figura 18 que as restrições aparecem no quadro que estava em branco abaixo de “Submeter às restrições”:

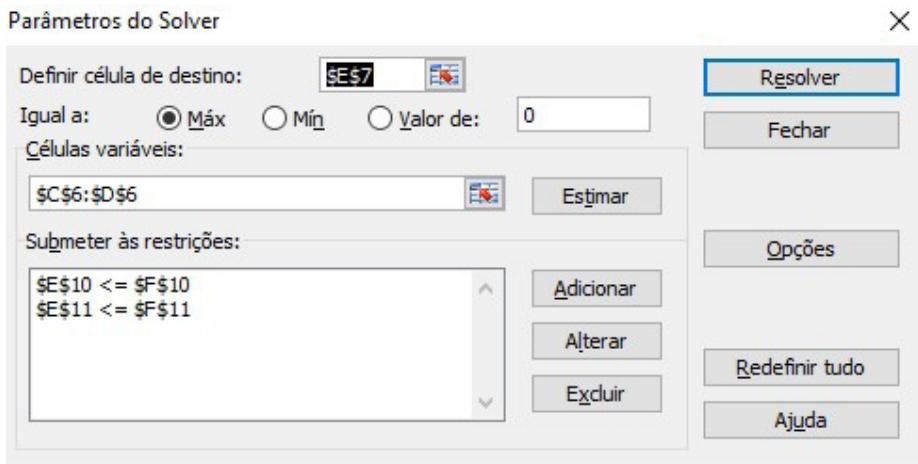


Figura 18- Janela do *Solver* com as restrições alocadas

Fonte: o autor.

Falta apenas acrescentar as restrições de não negatividade para as variáveis de decisão. Clique em “Opções”, e marque a caixa “Presumir não negativos”, o que fará com que o problema seja resolvido excluindo as respostas negativas que possam surgir para as variáveis de decisão. Depois, clique em OK:

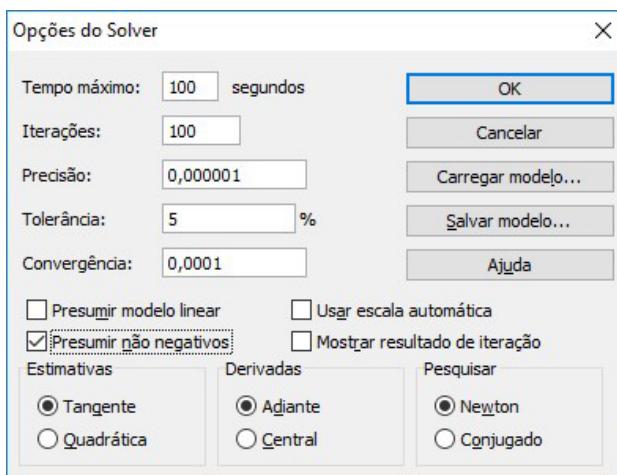


Figura 19 - Caixa de opções do *Solver*

Fonte: o autor.

Depois de clicar em OK você vai retornar para a janela inicial do *Solver*. Basta agora clicar em “Resolver”:

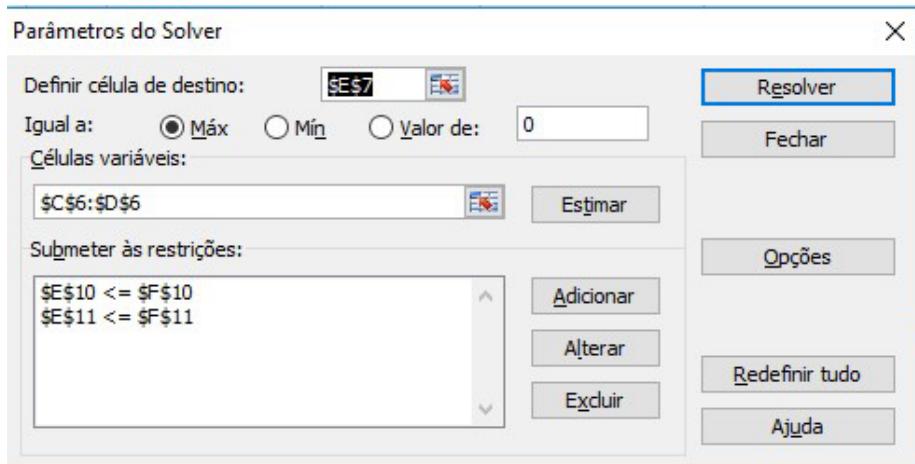


Figura 20- Janela do *Solver* pronta para resolver o problema

Fonte: o autor.

Assim que você clicar em OK, aparecerá uma janela com a mensagem de que o programa encontrou uma solução, e na planilha já aparecerão os valores calculados (Figura 21). Deixe marcada a opção “Manter solução do *Solver*”, e clique em OK:

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4	Dados de entrada					
5						
6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)		Oxford	London		
7	Lucro unitário (R\$)	16	0		Lucro Total	
		270	230		R\$ 4.320,00	
8						
9	Restrições					
10	Quantidade de...				Utilizado	Disponibilidade
11	Horas de trabalho	4	3	64	80	
		12	16	192	192	
12						
13						
14						
15						

Figura 21- Solução do problema

Fonte: o autor.

Observe que na planilha aparecem os valores 16 para a célula C6, e zero para a célula D6: essas são as quantidades que devem ser produzidas de escrivaninhas dos modelos Oxford e *London*, respectivamente. Com essa produção e comercialização, a empresa terá um lucro de R\$4.320,00 (célula E7), sendo utilizados 64m² de mdf (célula E10), e 192h de trabalho (célula E11).

O passo a passo apresentado para escrever o problema no *Excel*^{*} é o mesmo para qualquer outro tipo de otimização com Programação Linear e Método *Simplex*, sendo que o que pode mudar são apenas os tipos de restrição utilizados. Na próxima seção, você poderá resolver comigo um problema de minimização de custos.

SAIBA MAIS



O Lingo é uma linguagem de programação da LINDO System Inc. utilizada para solucionar problemas de Programação Linear e não linear. Você pode acessar mais informações em: http://www.decom.ufop.br/marcone/Disciplinas/OtimizacaoCombinatoria/lindo_p.pdf

Fonte: o autor.

RESOLVENDO PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO COM O SOLVER

Resolver um problema de minimização utilizando o *Solver* é muito mais simples do que pelo Método *Simplex* tabular. Lembre-se de que, para resolver um problema de minimização, você precisava transformá-lo em outro de maximização. Na planilha, isso não é mais necessário, pois o *Solver* apresenta a função de minimização pronta para ser utilizada.

Retomemos o Exemplo 2, que já tem um modelo feito (Unidade I), e foi resolvido pelo Método *Simplex* tabular na Unidade II.



Exemplo 2 (minimização): uma indústria automotiva produz dois modelos de carros flex com motor 1.6: o Ceres e o Vulcano, em uma de suas unidades. Você, como gerente de produção, quer estimar a melhor maneira de produzi-los com custos reduzidos, tendo por base um mês de produção. O modelo Ceres é mais robusto e completo, com um custo total de produção de R\$35000,00. Já o modelo Vulcano é mais simples e básico, apresentando um custo total de R\$28000,00. Ambos utilizam a mesma linha de montagem, sendo que o modelo Ceres demora 22h/unidade para ser montado e cada unidade do modelo Vulcano fica pronto em 14h. A fábrica trabalha em dois turnos por dia, todos os dias da semana, com disponibilidade total de 480h para montagem em um mês. A fábrica precisa entregar para a concessionária pelo menos 10 veículos ao mês. **Elabore um modelo de minimização de custos para uma Programação Linear e resolva-o utilizando o Solver do Excel[®].**

O modelo encontrado para esse problema foi o seguinte:

$$\min(Z) = 35000 \cdot x_1 + 28000 \cdot x_2$$

Sujeito à:

$$R_1 : 22 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2 \leq 480$$

$$R_2 : x_1 + x_2 \geq 10$$

$$R_3 : x_1 \geq 0$$

$$R_4 : x_2 \geq 0$$

Lembrando que:

x_1 = quantidade de veículos do modelo Ceres

x_2 = quantidade de veículos do modelo Vulcano

Para iniciar a solução do problema, escreva-o em uma planilha em branco. Siga os passos apresentados na seção anterior e você terá uma planilha conforme a apresentada na Figura 22. Veja:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
Produção de Veículos							
4	Dados de Entrada						
5							
6	Variável de decisão (Unidades de veículos)			Ceres	Vulcano		
7	Custo unitário (R\$)			0	0	Custo total	
8				35000	28000	R\$ 0,00	
9	Restrições						
10	Horas trabalhadas (h)			22	14	Utilizado	Disponibilidade
11	Produção (Unidades)			1	1	0	10

Figura 22- Planilha com a descrição e os coeficientes do problema

Fonte: o autor.

Observe na Figura 22 que foram descritas as variáveis de decisão (modelo Ceres e Vulcano), e acrescentadas as restrições de horas de trabalho, bem como a quantidade que precisa ser produzida e entregue para a concessionária. Nas células C7 e D7, são apresentados os valores dos custos de produção para cada unidade de veículo. Nas células E7, E10 e E11, também foram colocadas as fórmulas de cálculo para o custo total e as quantidades utilizadas de recursos (função “somarproduto”). Depois de representar o problema na planilha, selecione a E7 e clique em *Solver* na aba Dados.

Ao abrir a janela do *Solver*, selecione a opção “Min”, pois agora você tem um problema de minimização. Em “Células variáveis”, clique na seta vermelha e selecione na planilha as células C6 e D6 das variáveis de decisão (Figura 23):

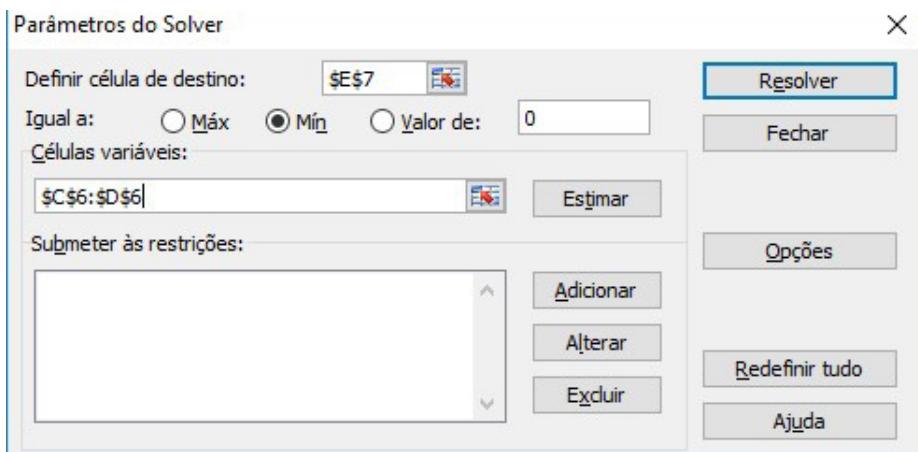


Figura 23- Janela do *Solver* com as variáveis de decisão acrescentadas

Fonte: o autor.

Clique em “Adicionar” em “Submeter às restrições”, para que você possa completar a janela do *Solver*. Não esqueça que, neste exemplo, há duas restrições, sendo uma de limite superior (\leq), e outra de limite inferior (\geq). A primeira restrição é de horas trabalhadas, que é a de limite superior (\leq). Então, clique em “Referência de célula” e selecione a célula E10 para as quantidades utilizadas, e clique em “Restrição” e selecione a célula F10 para a disponibilidade. Mantenha o sinal \leq e clique em adicionar:

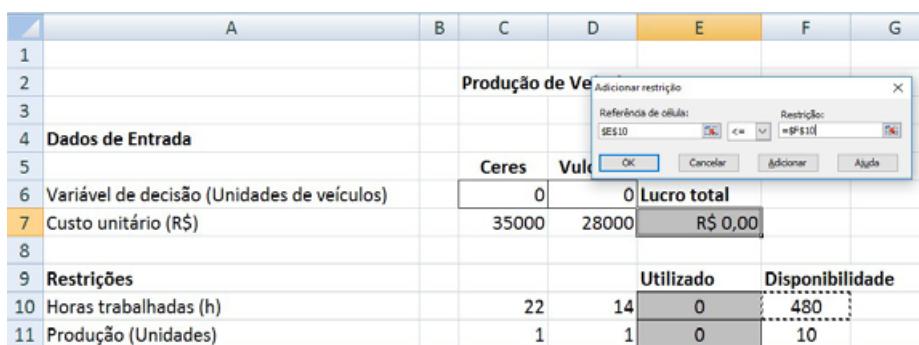


Figura 24 - Adição da primeira restrição à janela de restrições

Fonte: o autor.

Depois, clique em “Referência de célula” novamente e selecione a célula E11. Então, clique em “Restrição” e selecione a célula F11, modifique o sinal da desigualdade para maior igual (\geq) e aperte OK:

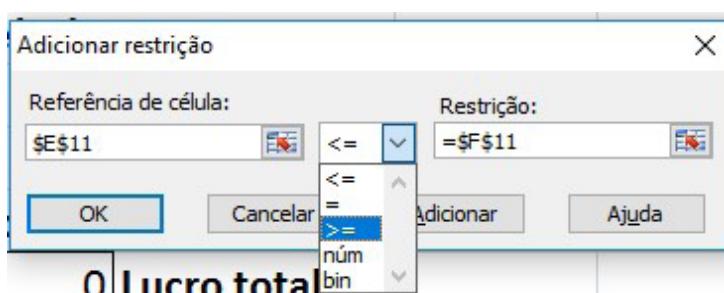


Figura 25 - Modificando o sinal da desigualdade

Fonte: o autor.

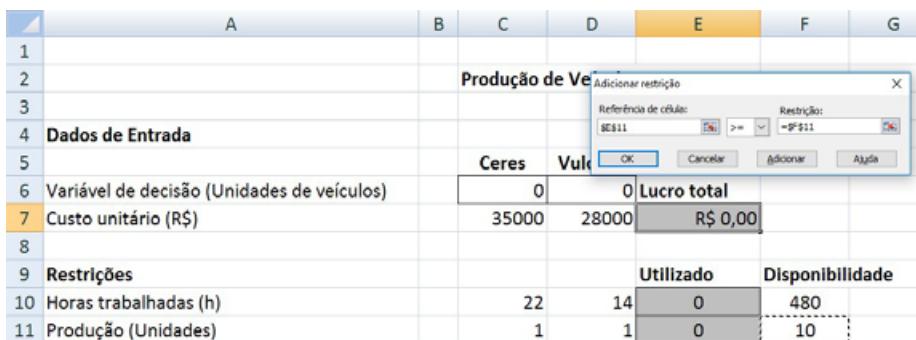


Figura 26 - Adição da segunda restrição à janela de restrições

Fonte: o autor.

Na janela do *Solver* aparecerão as restrições como as desigualdades das equações do modelo (Figura 27). Veja:

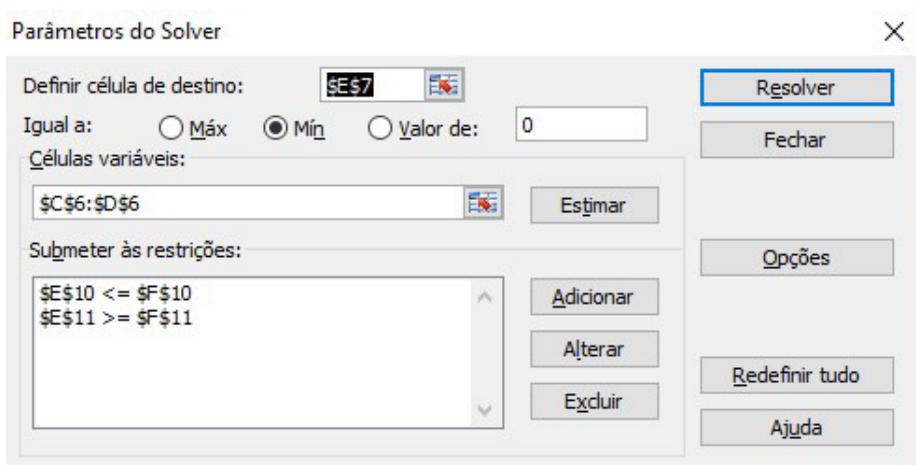


Figura 27 - Janela do *Solver* com as restrições do problema

Fonte: o autor.

Selecione “Opções” para marcar a caixa “Presumir não negativos” e aperte OK. Ao retornar para a janela do *Solver*, clique em “Resolver”. Então, selecione OK na caixa de mensagens e você terá a resposta para o Exemplo 2.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4	Dados de Entrada						
5							
6	Variável de decisão (Unidades de veículos)	0	10	Lucro total			
7	Custo unitário (R\$)	35000	28000	R\$ 280.000,00			
8							
9	Restrições						
10	Horas trabalhadas (h)	22	14	Utilizado	Disponibilidade		
11	Produção (Unidades)	1	1	140	480		
				10	10		

Figura 28 - Resposta do problema de minimização

Fonte: o autor.

Observe que para a produção do Exemplo 2, o menor custo é conseguido com a produção de 10 unidades do modelo Vulcano (célula D6), e nenhuma unidade do modelo Ceres (célula C6). O custo total é de R\$280.000,00 (E7), com a utilização de 140h de trabalho (E10), e envio para a concessionária de 10 unidades de veículo (E11).



REFLITA

Não se conhece completamente uma ciência enquanto não se souber da sua história.

(Auguste Comte)

ANÁLISE DE PÓS-OTIMIZAÇÃO

Tudo o que você estudou até agora na nossa disciplina de Pesquisa Operacional foi útil para a elaboração do modelo de Programação Linear e utilização de um método matemático para resolvê-lo, sendo empregado o Método *Simplex* em sua forma tabular na Unidade II, e o *Solver* do *Excel*[®], na Unidade III.

Esse processo levou à descrição do problema, transformação do problema em linguagem matemática pela elaboração do modelo e, depois de resolvido, foi encontrada a solução otimizada para o problema.

Entretanto, não basta apenas encontrar a solução, sendo necessário analisá-la e, se possível, testar novas possibilidades com o modelo. Essa etapa é chamada de análise de pós-otimização, sendo apresentada por diversos autores.

Segundo Longaray (2014), o processo de obtenção da solução do problema impacta praticamente apenas o detentor do problema: se for um *mix* de produção, a área diretamente relacionada seria a de planejamento e controle da produção (PCP). Porém, as variáveis do problema podem sofrer influência de outras áreas, como a financeira e de recursos humanos.

Por esse motivo, é fundamental realizar a *análise de pós-otimização*, também chamada de análise econômica ou análise de sensibilidade.

Essa análise pode ser feita verificando-se o impacto causado na resposta final do problema ao modificar os coeficientes das variáveis básicas e não básicas, mudança nos valores das constantes, pela inclusão de uma nova variável ou restrição.



ALGUMAS TÉCNICAS DE PÓS-OTIMIZAÇÃO

Hillier e Lieberman (2013) apresentam algumas técnicas que podem ser utilizadas para a análise de pós-otimização de um problema de Programação Linear.

Reotimização

A reotimização tem por finalidade depurar o modelo, ou seja, encontrar os pontos fortes e fracos do mesmo. Ao fazer pequenas modificações no modelo, mantendo-se o problema ainda próximo ao do modelo original, pode-se utilizar a solução otimizada do modelo original como solução básica inicial para a resolução do novo modelo, o que deve reduzir os esforços computacionais, pois acredita-se que a nova solução será próxima da antiga, já que o modelo apresentou poucas mudanças.

Preço-sombra

O preço-sombra é o nome que se dá à quantidade de variação do valor da função objetivo quando se aumenta ou diminui a disponibilidade do recurso de cada restrição. Essa análise é interessante para que se observe em quantos reais aumenta ou diminui o custo ou o lucro de um dado problema, caso o valor da disponibilidade de algum recurso seja alterado para mais ou para menos.

Durante a elaboração do modelo, os limites dos recursos são admitidos com base em estimativas, e tais valores podem aumentar ou diminuir ao longo do tempo. Se o recurso se tornar mais escasso, há diminuição da disponibilidade, e se, por outro lado, a oferta do recurso aumentar, então a disponibilidade aumentará. Analisar o comportamento da resposta da função objetivo nessas situações permite planejar melhor uma produção.

Esse tipo de análise pode ser feito diretamente no quadro *Simplex* quando o problema for resolvido pela forma tabular do método, modificando-se o valor de um dos limites disponíveis do recurso, recompondo os coeficientes na forma de equações, e resolvendo as equações de restrição para verificar o impacto dessas mudanças na variáveis de decisão (determina-se suas variações) e, depois, com essas variações das variáveis de decisão, determina-se o novo valor da função objetivo.

Na próxima seção desta unidade, você verá como fazer essa análise diretamente com o *Excel*.

Análise de Sensibilidade

É utilizada para verificar qual dos parâmetros (os coeficientes das variáveis do problema) apresenta uma influência maior na função objetivo ao ser modificado. Isso é importante, pois, como os parâmetros muitas vezes são estimativas iniciais de valores, somente ao implantar o modelo é que serão encontrados seus valores reais.

Um parâmetro sensível deve ser trabalhado com mais cuidado, pois, se uma pequena variação em seu valor afetar a solução da função objetivo, então sua solução ótima poderá ficar incorreta. A partir do momento em que você reconhece os parâmetros sensíveis do seu problema, procure estimá-los com mais detalhes, pois assim, ao implantar o modelo, os valores reais do parâmetro serão iguais ou muito próximos do utilizado na modelagem. Se esse valor se distanciar muito do valor usado no modelo, então uma nova solução ótima deverá ser calculada para o problema estudado.

É comum identificar os parâmetros nas restrições do problema, pois é justamente nelas que são escritas as condições que limitam a solução ótima do mesmo. Uma das maneiras de detectar esses parâmetros é resolvendo o modelo e observando os valores das variáveis de folga. Quando essas variáveis apresentarem valores diferentes de zero, provavelmente elas estarão associadas a algum parâmetro sensível, e, quanto maior o valor da variável de folga, maior a influência que uma alteração em seu parâmetro associado provocará na solução ótima.

O *Solver* do *Excel** também permite encontrar essa análise de sensibilidade, o que auxilia na análise final da resposta otimizada do problema.



SAIBA MAIS

A descoberta consiste em ver o que todos viram e em pensar no que ninguém pensou.

(A. Szent-Gyorgyi).



ANÁLISE DE PÓS-OTIMIZAÇÃO COM O SOLVER

Segundo Longaray (2014), a análise de pós-otimização pode ser realizada utilizando o *Solver* do *Excel* pela visualização dos Relatórios de *Resposta*, *Sensibilidade* e *Limites*, que são gerados no momento de aceitar a resposta fornecida pelo programa.

Para obter esses relatórios, você vai proceder conforme visto até o momento, ou seja, escreva o problema no *Excel*, abra o *Solver*, preencha as informações de restrição, clique em *Resolver*, e, na janela da solução do problema, basta selecionar os três nomes dos relatórios que aparecem.

Veja o Exemplo 1: quando você preencheu a janela do *Solver* e pediu para o programa resolver o problema, apareceu a seguinte janela:

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
Produção de Escrivaninhas						
Dados de entrada						
6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)	Oxford	London			
7	Lucro unitário (R\$)	16	0	Lucro Total		
8		270	230	R\$ 4.320,00		
Restrições						
10	Quantidade de			Utilizado	Disponibilidade	
11	Horas de trabalho	4	3	64	80	
12		12	16	192	192	
13						
14						
15						

Figura 29 - Solução do Exemplo 1

Fonte: o autor.

Na janela “Resultados do Solver”, do lado direito em “Relatórios”, você deve selecionar os nomes dos relatórios, conforme mostra a Figura 30:

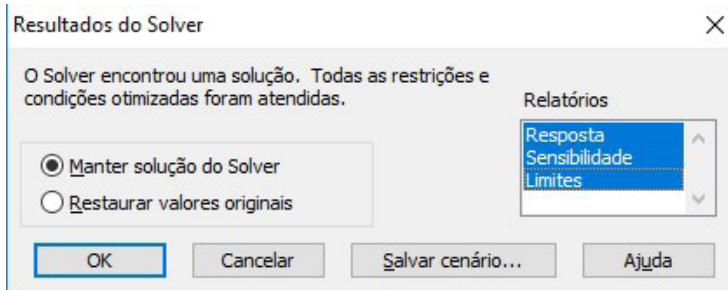


Figura 30 - Janela de Resultados do Solver com os relatórios selecionados

Fonte: o autor.

Clique em “OK” e aparecerão três novas abas na planilha em que você está resolvendo o problema com os relatórios que foram selecionados:



Figura 31 - Abas dos relatórios de análise do Solver

Fonte: o autor.

Você pode acessar qualquer um dos relatórios ao clicar sobre a aba que representa cada um. Selecione o Relatório de resposta 1:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 12.0 Relatório de resposta						
2	Planilha: [Pasta1]Plan1						
3	Relatório criado: 02/07/2017 20:11:05						
4							
5							
6	Célula de destino (Máx)						
7	Célula	Nome	Valor original	Valor final			
8	\$E\$7	Lucro unitário (R\$) Lucro Total	R\$ 4.320,00	R\$ 4.320,00			
9							
10							
11	Células ajustáveis						
12	Célula	Nome	Valor original	Valor final			
13	\$C\$6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha) Oxford	16	16			
14	\$D\$6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha) London	0	0			
15							
16							
17	Restrições						
18	Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência	
19	\$E\$10	Quantidade de mdf (m2) Utilizado	64	=\$F\$10<=\$F\$11 Sem agrupar	16		
20	\$E\$11	Horas de trabalho (h) Utilizado	192	=\$E\$11<=\$F\$11 Agrupar	0		

Figura 32 - Relatório de resposta para o Exemplo 1

Fonte: o autor.

No Relatório de resposta são apresentadas as informações iniciais e finais do problema. Nele, é descrito o tipo de otimização realizado: veja na linha 6 “Célula de destino (Máx)”, indicando maximização. Na linha 8, aparece a célula em que foi calculado o ótimo \$E\$7, sendo chamada de Lucro Total, com o valor inicial (“Valor original”) zero, e o valor final, que é o ótimo, de R\$4.320,00. Em células ajustáveis, a partir da linha 11, aparecem as células das variáveis de decisão

\$C\$6 e \$D\$6, com os respectivos nomes, “Unidades de escrivaninha Oxford” e “Unidades de escrivaninha London”, com os valores iniciais iguais a zero, e valores finais de 16 para escrivaninha Oxford, e zero para escrivaninha London.

A partir da linha 17 aparecem as Restrições, que foram calculadas nas células \$E\$10 e \$E\$11. O nome das restrições “Quantidade de mdf (m²) Utilizado”, e “Horas de trabalho (h) Utilizado”, também são mostrados, bem como os valores encontrados de 64 e 192, respectivamente. A fórmula de cada restrição é apresentada, ambas de limite superior (\leq).

A análise “Status” mostra “Sem agrupar”, quando o valor da restrição é diferente do limite utilizado no problema, e mostra “Agrupar”, quando os valores são iguais. Isso é observado no termo “Transigênciam” (em algumas versões do Excel[®] pode aparecer o termo “Margem de Atraso”). A Transigênciam é o valor das variáveis de folga.

Na primeira restrição para quantidade de mdf utilizado, há consumo de 64m², e sobra de 16m² (o total disponível era de 80m²). Esse foi o valor de xF₁ encontrado para a solução do problema na Unidade II. As horas trabalhadas utilizadas foram de 192h com uma transigênciam de 0h, ou seja, sem folga.

Esse foi o valor encontrado para xF₂ na Unidade II. Note que, para representar o modelo no Excel[®] não houve necessidade de colocar as variáveis de folga na planilha, mas o programa já faz isso automaticamente apresentando seus valores no relatório de resposta.

Agora, selecione o relatório de limites 1:

Célula	Ajustável	Destino Nome	Valor	Inferior Limite	Destino Resultado	Superior Limite	Destino Resultado
\$E\$7	Lucro unitário (R\$)	Lucro Total	R\$ 4.320,00				
\$C\$6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)	Oxford	16	0	0	16	4320
\$D\$6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)	London	0	0	4320	0	4320

Figura 33 - Relatório de Limites para o Exemplo 1

Fonte: o autor.

Esse relatório apresenta, na primeira parte, novamente os dados da função objetivo com a célula que a representa, seu nome e o valor encontrado de R\$4.320,00.

Na segunda parte do relatório, são apresentadas informações sobre as variáveis de decisão, aparecendo o limite inferior e superior que essas variáveis podem assumir, individualmente, sem ferir as restrições do problema. As restrições do problema são estas:

$$4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 80$$

$$12 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 \leq 192$$

Essa análise é feita individualmente. Então, o programa mantém uma variável constante e modifica a outra. Para analisar a quantidade mínima e máxima de escrivaninhas do modelo Oxford, assume-se a quantidade de escrivaninhas do modelo *London* igual a zero (valor encontrado na solução do problema). Assim, o programa encontra uma quantidade mínima de zero, o que resulta em uma função objetivo com valor zero também. O limite superior para esta variável é 16, ou seja, o valor calculado para essa variável de decisão, o que resulta em uma função objetivo com o valor de R\$4.320,00.

Isso significa que, ao produzir zero unidades da escrivaninha *London*, há disponibilidade de produção de até 16 unidades do modelo Oxford. Para as quantidades mínima e máxima de escrivaninhas do modelo *London*, assume-se o valor de escrivaninhas do modelo Oxford igual a 16 (resposta do problema) e, então, encontra-se os que os valores inferior e superior para o modelo Oxford são zero, mantendo a função objetivo com o valor calculado pelo problema.

Logo, produzindo 16 escrivaninhas Oxford, não há como produzir mais escrivaninhas *London*, pois as 16 escrivaninhas Oxford consomem todas as horas de trabalho (192h).

Quantidades mínimas geralmente são iguais a zero, pois limitamos nossas variáveis de decisão valores maiores ou iguais a zero. Esse número será maior do que zero apenas se alguma restrição do problema impor essa condição. Agora, abra o relatório de sensibilidade 1:

	A	B	C	D	E
1			Microsoft Excel 12.0 Relatório de sensibilidade		
2			Planilha: [Pasta1]Plan1		
3			Relatório criado: 02/07/2017 20:11:05		
4					
5					
6			Células ajustáveis		
7					
8			Célula	Nome	Final
9			\$C\$6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha) Oxford	Valor
10			\$D\$6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha) London	16
11					0
12					-130
13					
14			Célula	Nome	Reducido
15			\$E\$10	Quantidade de mdf (m2) Utilizado	Gradiente
16			\$E\$11	Horas de trabalho (h) Utilizado	64
					0
					192
					22,5

Figura 34 - Relatório de Sensibilidade para o Exemplo 1

Fonte: o autor.

O relatório de sensibilidade apresenta a influência das variáveis de decisão e das restrições na função objetivo. Na primeira parte das “Células ajustáveis”, o relatório apresenta onde estão as variáveis de decisão \$C\$6 e \$D\$6, respectivamente, seus nomes, os valores encontrados pelo modelo, e a influência no acréscimo de uma unidade das variáveis de decisão na resposta do modelo.

Na realidade, o “Reducido Gradiente” mostra o quanto vai mudar o valor da função objetivo se for acrescentada uma restrição que limite a quantidade de cada variável de decisão em uma unidade ou mais. Se você colocar uma restrição no problema que exija a produção mínima de uma unidade de escrivaninha do modelo Oxford, não haverá alteração na função objetivo, pois o ótimo se encontra com a produção de 16 unidades.

Porém, se você colocar uma restrição que exija a produção de uma unidade de escrivaninha do modelo *London*, o valor atual da sua função objetivo sofrerá uma redução de R\$130,00 (-130), pois o ótimo considera a produção zero para esse modelo. Assim, você consegue perceber que, se houver necessidade de produzir alguma quantidade de escrivaninhas do modelo *London*, seu lucro será menor do que o otimizado de R\$4.320,00.

A segunda parte do relatório apresenta a influência das restrições na função objetivo. Se você aumentar em uma unidade a quantidade de mdf disponível, (de 80 para 81m²), não haverá diferença para sua função objetivo, pois em seu ótimo há utilização de apenas 64m². Portanto, já há sobra desse recurso.

No entanto, se você aumentar em uma unidade a quantidade de horas disponíveis (de 192h para 193h), então sua função objetivo terá um ganho de R\$22,50, ou seja, seu lucro aumentará. É possível verificar também que, se por outro lado, houver redução da quantidade de horas disponíveis (de 192h para 191h), então haverá redução do seu lucro em R\$22,50. Isso pode ser facilmente observado quando são alterados os dados da planilha.

Volte à planilha referente aos dados do Exemplo 1:

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
Produção de Escrivaninhas						
4	Dados de entrada					
5		Oxford	London			
6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)	16	0	Lucro Total		
7	Lucro unitário (R\$)	270	230	R\$ 4.320,00		
8						
9	Restrições			Utilizado	Disponibilidade	
10	Quantidade de mdf (m ²)	4	3	64	80	
11	Horas de trabalho (h)	12	16	192	192	

Figura 35 - Planilha otimizada do Exemplo 1

Fonte: o autor.

Faça o primeiro teste considerando uma alteração na quantidade mínima de produção de escrivaninhas do modelo *London*. Para isso, na linha 12, acrescente a restrição:

$$x_2 \geq 1$$

A	B	C	D	E	F
1					
2					
3					
4	Dados de entrada				
5					
6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)	16	0	Lucro Total	
7	Lucro unitário (R\$)	270	230	R\$ 4.320,00	
8					
9	Restrições				
10	Quantidade de mdf (m ²)	4	3	Utilizado	80
11	Horas de trabalho (h)	12	16	Disponibilidade	192
12	Produção mínima de London (unidades)			=SOMARPRODUTO(C6:D6;C12:D12)	

Figura 36 - Restrição para produção do modelo *London* na planilha

Fonte: o autor.

Acrescente a descrição da restrição, coloque os coeficientes das variáveis de decisão, sendo zero para x_1 (modelo Oxford), e 1 para x_2 (modelo London), insira a fórmula para o cálculo das quantidades de produção do modelo *London* utilizando a função “somarproduto”, e coloque o número 1 em disponibilidade.

Selecione a célula da função objetivo (E7). e clique em *Solver*, na aba Dados. Vá em “Adicionar” para as restrições:

A	B	C	D	E	F
1					
2					
3					
4	Dados de entrada				
5					
6	Variável de decisão				
7	Lucro unitário (R\$)				
8					
9	Restrições				
10	Quantidade de mdf				
11	Horas de trabalho (h)				
12	Produção mínima de London (unidades)				

Parâmetros do Solver

Definir célula de destino: E7

Igual a: Max Min Valor de: 0

Célula variáveis: E6:\$D\$6

Submeter às restrições:

E6:\$D\$6 <= \$F\$10
E6:\$D\$11 <= \$F\$11

Resolver

Fechar

Opcões

Adicionar

Alterar

Excluir

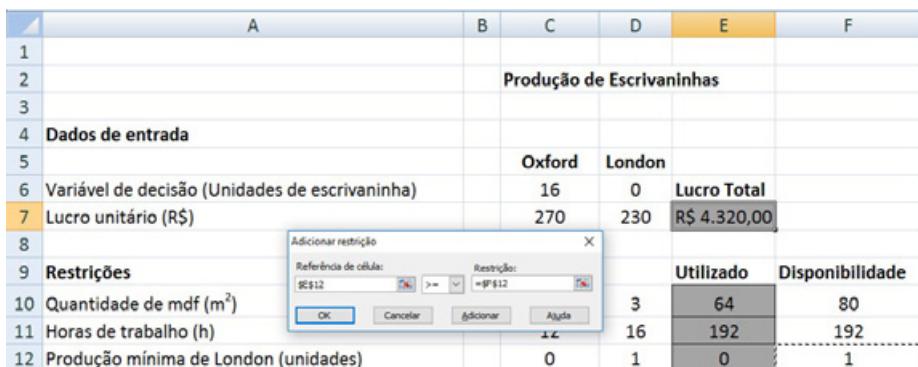
Definir tudo

Ajuda

Figura 37- Janela de parâmetros do *Solver*

Fonte: o autor.

Acrescente a nova restrição considerando que a célula E12 deva ser maior ou igual à célula F12, e depois clique em OK para retornar para a tela dos parâmetros do *Solver*. Observe na Figura 39 que aparecem agora três restrições. Depois, basta clicar em resolver:



A	B	C	D	E	F
1					
2					
3					
4	Dados de entrada				
5					
6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)	16	0	Lucro Total	
7	Lucro unitário (R\$)	270	230	R\$ 4.320,00	
8					
9	Restrições				
10	Quantidade de mdf (m ²)	3	64	Utilizado	Disponibilidade
11	Horas de trabalho (h)	16	192		
12	Produção mínima de London (unidades)	0	0		192
					1

Figura 38 - Acréscimo da terceira restrição

Fonte: o autor.

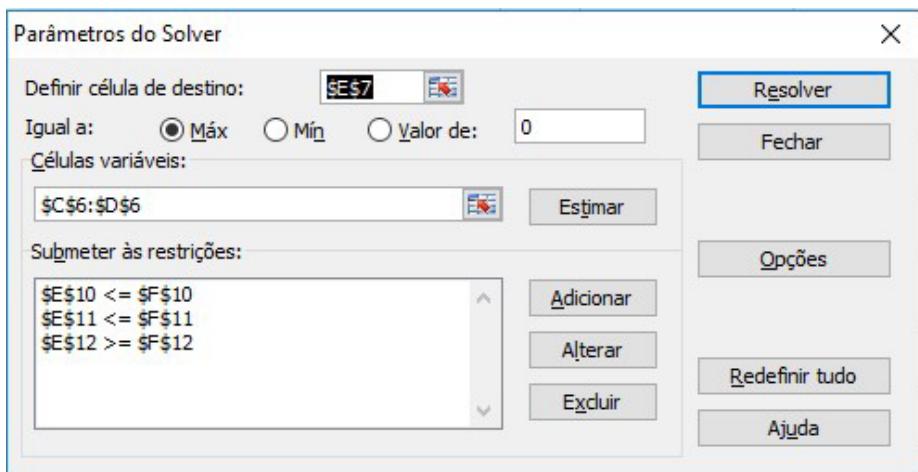


Figura 39 - Janela de parâmetros do Solver com nova restrição

Fonte: o autor.

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4	Dados de entrada	Produção de Escrivaninhas				
5		Oxford	London			
6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)	14,666667	1	Lucro Total		
7	Lucro unitário (R\$)	270	230	R\$ 4.190,00		
8						
9	Restrições			Utilizado	Disponibilidade	
10	Quantidade de mdf (m^2)	4	3	61,666667	80	
11	Horas de trabalho (h)	12	16	192	192	
12	Produção mínima de London (unidades)	0	1	1	1	

Figura 40 - Solução do novo problema

Fonte: o autor.

Observe que o valor do lucro encontrado foi de R\$4.190,00 o que é R\$130,00 menor do que o anterior de R\$4.320,00, conforme verificado no relatório de sensibilidade (Figura 34). Note que aparece como resposta para a quantidade de escrivaninhas do modelo Oxford um valor numérico não inteiro, pois o problema resolve situações para números reais maiores do que zero, porém, podendo ser não inteiros.

Cabe então a análise da situação. Se você for escrever um relatório sobre a solução, o correto é considerar a produção de apenas 14 unidades do modelo Oxford e 1 do modelo *London*. Com isso, seu lucro assume um valor diferente, que pode ser calculado diretamente pela função objetivo do problema. Veja:

$$\begin{aligned} Z &= 270 \cdot x_1 + 230 \cdot x_2 \\ Z &= 270 \cdot 14 + 230 \cdot 1 = 4010 \end{aligned}$$

Portanto, na prática, o lucro assumiria o valor de R\$4.010,00.

Para analisar os efeitos de mudanças na disponibilidade de recursos, basta acrescentar uma unidade a cada uma das restrições, mas separadamente. Retome então a planilha do problema original, apresentada na Figura 35, e apenas modifique o valor do limite da primeira restrição de 80 para 81. Basta então selecionar a célula da função objetivo (E7), clicar em *Solver* na aba dados e depois em resolver. Não há necessidade de modificar as fórmulas das restrições, pois a única mudança da análise é o valor do limite da restrição:

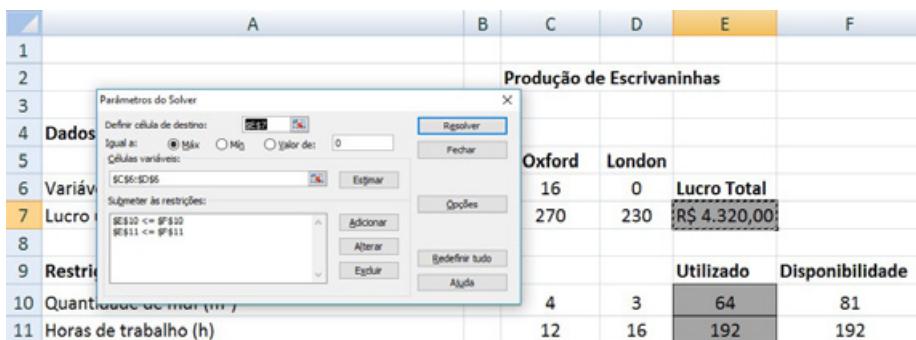


Figura 41 - Alteração no limite da primeira restrição

Fonte: o autor.

	A	B	C	D	E	F
1						
2					Produção de Escrivaninhas	
3						
4	Dados de entrada					
5						
6	Variável de decisão (Unidades de escrivaninha)	16	0	Lucro Total		
7	Lucro unitário (R\$)	270	230	R\$ 4.320,00		
8						
9	Restrições					
10	Quantidade de mdf (m ³)	4	3	64	81	
11	Horas de trabalho (h)	12	16	192	192	

Figura 42 - Resposta do problema com alteração na primeira restrição

3

Observe na Figura 42, que o valor do lucro não se modificou e isso era esperado, pois o valor do Multiplicador de Lagrange do relatório de sensibilidade na Figura 34 era zero, ou seja, indicava que a alteração de uma unidade no limite da primeira restrição não afetaria o valor da função objetivo.

Retome a planilha original do problema e mude o limite da segunda restrição de 192h para 193h, mantendo o limite da primeira restrição em 80. Selecione a célula da função objetivo, clique em *Solver* e resolver. Veja:

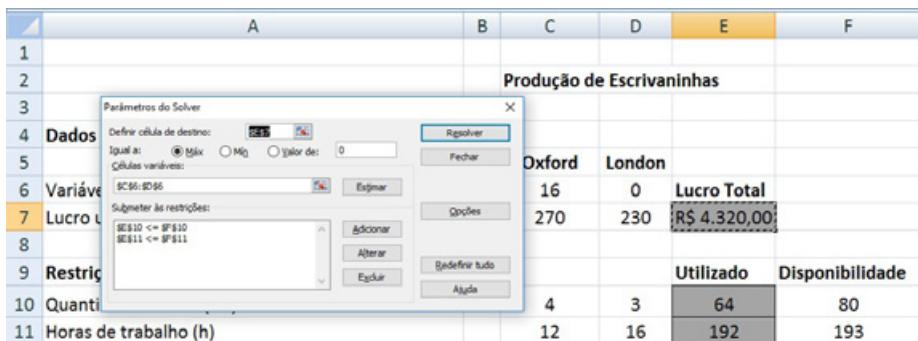


Figura 43 - Alteração no limite da segunda restrição

Fonte: o autor.

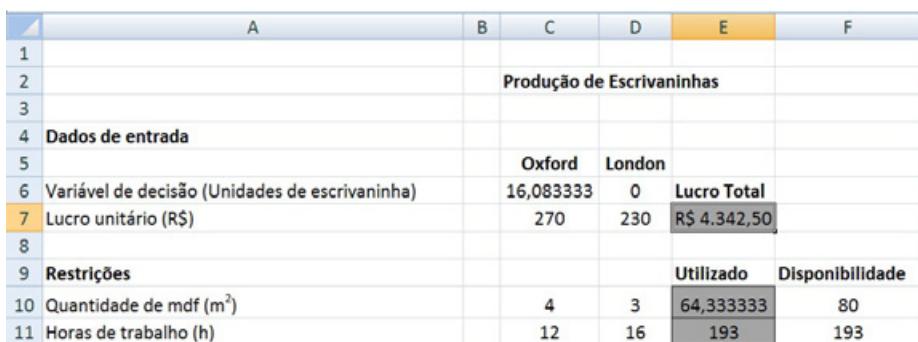


Figura 44 - Resposta do problema com segunda restrição modificada

Fonte: o autor.

Observe que o novo lucro ficou em R\$4.342,50, um valor R\$22,50 acima do lucro anterior de R\$4.320,00, o que era esperado devido ao valor do Multiplicador de Lagrange apresentado no relatório de sensibilidade da Figura 34. Novamente, na prática, você vai produzir 16 escrivaninhas do modelo Oxford, e não 16,0833..., e zero do modelo London, o que acabaria resultando em um lucro de R\$4.320,00.

É óbvio que a restrição de tempo é a limitante da produção. Por esse motivo, se ela for aumentada para 200h, por exemplo, os efeitos sobre o lucro são bem

maiores. Isso auxilia no projeto de situações futuras de expansão da produção com a aquisição de equipamentos novos com capacidade maior do que os atuais, ou na aquisição de novos equipamentos para complementar os já existentes.

A quantidade de análises que podem ser feitas utilizando a planilha é enorme, o que é muito útil para analisar cenários diferentes. Quando você utiliza um modelo e projeta situações, está fazendo uma simulação, de maneira que obtém informações de situações que não ocorreram, mas que podem acontecer naturalmente ou por decisão gerencial.

Caro (a) aluno(a), até a unidade III, você trabalhou com a Programação Linear aplicada à Pesquisa Operacional em todas as suas frentes, elaborando o modelo e resolvendo-o, seja na forma tabular (manual) ou com software. Você deve ter percebido que a utilização do *Solver*, do *Excel^(R)*, permitiu a ampliação da quantidade de análises do problema, sendo possível até mesmo simular algumas situações sem muito esforço. Espero que você tenha gostado da Programação Linear, pois é uma ferramenta muito útil em qualquer área do conhecimento.



Não há arte nem ciência patriótica. As duas, tal como tudo o que é bom e elevado, pertencem ao mundo inteiro e não podem progredir a não ser pela livre ação recíproca de todos os contemporâneos.

(Johann Goethe)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a Unidade III, encerramos nossos estudos de Programação Linear para a disciplina de Pesquisa Operacional. Até aqui, você aprendeu a elaborar os modelos de Programação Linear e a resolvê-los utilizando o Método *Simplex* para a otimização da resposta.

Na Unidade II, você utilizou o Método *Simplex* na forma tabular e percebeu que é algo trabalhoso a se fazer. Já na Unidade III, você entrou em contato com um dos programas que podem ser utilizados para a resolução desse tipo de problema: o *Solver do Excel*⁷. Apesar de parecer um pouco complicado no início, você deve ter notado que resolver problemas mais complexos utilizando o *Solver* é muito mais simples do que pelo método tabular.

O cuidado que você deve ter é no momento de transferir seu modelo de Programação Linear para a planilha do *Excel*⁷ que será utilizada para a resolução do problema. Preste muita atenção ao acrescentar as restrições na janela do *Solver* para não confundir os sinais de igualdade (=) e desigualdade (\leq ou \geq). Com o *Solver*, você pode obter relatórios junto à solução do problema, para realizar uma análise mais profunda do problema e verificar os parâmetros que são mais sensíveis à mudança.

As planilhas também permitem que sejam feitas alterações no problema, além de observar o que acontece com as respostas, o que representa uma simulação de situações em que você pode até mesmo propor melhorias para o processo em análise. Há muito ainda a ser explorado. Por isso, procure sempre ler as referências apresentadas em cada unidade, e fique livre para buscar novos autores. O importante é sempre abrir a mente para o novo e construir o seu próprio conhecimento.

Nas próximas unidades, você continuará caminhando pela Pesquisa Operacional, mas aprenderá novas técnicas de análise e solução de problemas. Na Unidade IV, será estudada a Teoria dos Jogos e, na Unidade V, a Teoria das Filas. Mas você verá que todas essas técnicas estão intimamente relacionadas.

ATIVIDADES



1. Uma empresa precisa transportar 150m³ de areia para o porto e, para isso, tem a intenção de utilizar caminhões com caçamba. Portanto, vai precisar alugar esses caminhões. A locadora A possui caminhões com capacidade de 14m³ e a locadora B tem caminhões com capacidade para 12m³ de areia. A empresa pode alugar no máximo 12 caminhões. O custo de aluguel por caminhão da empresa A é de R\$900,00, e da empresa B é de R\$750,00. **Elabore um modelo de minimização de custos e resolva-o no Excel®. Faça uma análise da resposta.**
2. Você é responsável pela compra de matéria-prima para o preparo de ração para cães adultos, e há necessidade de cuidar das especificações do produto. Um fornecedor te ofereceu uma farinha de carne e ossos com 50% de proteína e 12% de gordura, e uma farinha de vísceras de aves com 65% de proteína e 10% de gordura, ambas por kg de produto. Você sabe que essas matérias-primas devem representar, na composição da ração, no máximo 60% de proteínas e 11% de gordura. Os custos são R\$1,30/kg da farinha de carne e ossos, e R\$1,10/kg da farinha de vísceras. **Elabore um modelo de Programação Linear para determinar a quantidade de cada farinha na composição de 1kg de ração, a fim de minimizar os custos de produção para essas matérias-primas e resolva-o no Excel®. Faça uma análise da solução.**
3. Um produtor rural vende alimentos orgânicos para um hipermercado a 80km de sua propriedade. Seu veículo tem capacidade para transportar 250 caixas e ele pretende levar três produtos: batata inglesa, batata doce e cenoura. Por experiência de vendas passadas, ele sabe que pode levar no mínimo 60 caixas de batata branca, 50 caixas de batata doce e 45 caixas de cenoura. Porém, o máximo de caixas de cenoura que compensa levar é 80. O lucro que ele obtém com cada caixa é de R\$38,00 para a batata inglesa, R\$40,00 para a batata doce e R\$35,00 para a cenoura. **Utilizando um modelo de Programação Linear, determine a quantidade que ele pode transportar para otimizar os lucros.**
4. Uma indústria de cimentos utiliza calcário como matéria-prima elementar de seus produtos. Por ser um produto de origem natural, o calcário pode apresentar diferentes composições. Basicamente, ele é avaliado pelo teor de CaO (óxido de cálcio), e MgO (óxido de magnésio). Você tem dois tipos de calcário para utilizar como matéria-prima base para o cimento: o calcário tipo A apresenta em torno de 58,0% de CaO e 4,0% de MgO, e o calcário do tipo B apresenta 65,0% de CaO e 9,0% de MgO. Sabendo que o limite máximo aceitável para a quantidade de MgO é de 6,5%, e que o mínimo de CaO que deve haver na composição é de 52,0%, **estime qual é a melhor quantidade de cada tipo de calcário que pode ser utilizada (por kg de cimento), para resultar em um custo mínimo, sendo que o custo do calcário do tipo A é de R\$0,20/kg, e do tipo B é de R\$0,12/kg. Utilize um modelo de Programação Linear e analise os resultados.**

ATIVIDADES



5. Agora, você vai analisar a mesma indústria de cimento na seguinte situação: além dos calcários tipo A e B que você tem na atividade 4, você vai acrescentar argila ao preparo do clínquer (matéria-prima básica do cimento), e vai considerar outros compostos dessa mistura. Além do CaO (óxido de cálcio) e do MgO (óxido de magnésio), outros compostos são relevantes no preparo do cimento, como o Al₂O₃ (óxido de alumínio), o Fe₂O₃ (óxido de ferro) e o SiO₂ (dióxido de silício). O calcário do tipo A apresenta 58,0% de CaO, 4,0% de MgO, 1,8% de Al₂O₃, 0,92% de Fe₂O₃, e 6,0% SiO₂. O calcário do tipo B apresenta 65,0% de CaO, 9,0% de MgO, 1,1% de Al₂O₃, 0,66% de Fe₂O₃, e 6,7% de SiO₂. A argila que você vai adicionar contém 63% de SiO₂, 16,7% de Al₂O₃, 8,8% de Fe₂O₃, e 7,0% de CaO. Os limites que você pode ter de cada um desses compostos no clínquer final são apresentados na tabela a seguir:

Tabela 1 - Quantidade limite para cada componente do clínquer

Composto	CaO	MgO	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	SiO ₂
Mínimo (%)	52,0	0,0	3,8	1,7	18,0
Máximo (%)	67,0	6,5	6,0	7,0	24,0

Fonte: o autor.

6. **Estime a melhor composição do clínquer que gere o menor custo possível, considerando o preço do calcário tipo A de R\$0,20, do tipo B de R\$0,12, e da argila de R\$0,17, sabendo também que a quantidade de argila não deve exceder 25% (250g em 1 kg) da massa final. Utilize um modelo de Programação Linear e analise os resultados. Por quanto você deveria vender um saco de cimento de 50kg para obter um lucro de 75% sobre o valor do custo, considerando o cimento formado pelo clínquer moído?**



Este artigo aborda a utilização de um modelo de programação não-linear para o planejamento da produção (PCP). O modelo apresentado pelos autores do artigo foi resolvido no Excel® por meio de uma das metodologias inseridas no Solver, que é o método do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG). Leia o excerto do artigo e, caso haja interesse, você pode encontrar a referência completa na seção de Referências ao final da Unidade I. As referências apresentadas durante o texto encontram-se no artigo original.

Diante do cenário de constantes mudanças, cada vez mais as empresas são desafiadas tanto pela complexidade provocada pela variação de demanda de seus clientes, como pela acirrada concorrência imposta pelo mercado.

Assim, faz-se necessário determinar políticas otimizadas de ajuste da capacidade para equilibrar demanda com a oferta viabilizada pela sua capacidade de produção (LINGITZ et al., 2013; ZHANG et al., 2012). Porém, determinar níveis de capacidade de produção é um desafio, tanto pelo comportamento estocástico do sistema de produção, como pela chegada imprevisível de pedidos. Assim, para o caso de capacidade insuficiente, os problemas concentram-se no aumento do ciclo de produção, provocando atrasos nas entregas, aliado a altos níveis de work-in process. Já o excesso de capacidade resulta em desperdícios de recursos, provocado pela baixa utilização da estrutura produtiva ou de equipamentos (KORYTKOWSKI, 2006).

Tan e Alp (2009) destacam a importância da habilidade das empresas para lidar com a volatilidade na demanda para seus produtos. Para Giri e Moon (2004), cenários com baixa utilização da capacidade de produção apresentam maior habilidade para absorver a variabilidade da demanda do que um sistema com elevada utilização. Porém, nestas condições, é indispensável a mensuração das perdas associadas à baixa utilização destes recursos.

Decisões assertivas no planejamento de capacidade em nível tático e estratégico são essenciais para uma utilização otimizada dos recursos investidos em estrutura produtiva ou equipamentos, principalmente em sistemas modernos de manufatura (GUNASEKARAN et al., 1998). Portanto, determinar um nível ótimo de capacidade para atender a demanda é fundamental para o desempenho do sistema produtivo, ao passo que o desequilíbrio entre estas pode provocar perdas econômicas para a organização. Assim, o desafio repousa sobre harmonizar o grau de capacidade de produção com o nível de demanda do mercado, visando a maximização dos lucros (HO e FANG, 2013).

Modelos de previsão de demanda e decisões de capacidade assumem papéis importantes para teoria e prática, pois, para obterem oportunidades de mercado e alcançar demandas de longo prazo, as empresas devem frequentemente ajustar sua capacidade de produção (ZHANG et al., 2012).



Neste artigo, são abordados os temas previsão de demanda e capacidade de produção, de forma a entender e propor soluções para o problema de decisões acerca do planejamento da capacidade de produção, enfrentado por diversas organizações.

O objetivo é prever o mix de produtos, ou seja, o nível de atividade prevista (NAp), que otimiza a utilização da capacidade de produção disponível, avaliando os desajustes entre capacidade de produção e demanda que representam, respectivamente, estrutura produtiva e o mercado.

Planejar um sistema produtivo consiste em uma atividade complexa devido às constantes mudanças do mercado, principalmente pela variação da demanda. Nesse sentido, torna-se indispensável determinar políticas otimizadas de ajuste da capacidade para equilibrar demanda com a oferta viabilizada pela capacidade de produção (ZHANG et al., 2012).

O artigo apresentou um modelo baseado em programação matemática, para auxiliar no planejamento da capacidade produtiva integrando técnicas de previsão de demanda e conceitos de capacidade de produção. O modelo utilizou o algoritmo GRG não linear, com o objetivo de determinar o mix de produtos que optimiza o uso da capacidade de produção disponível. O modelo revelou ser de aplicação relativamente simples, uma vez que utiliza dados históricos de vendas, tempos de processamento e disponibilidade de máquinas, que são indicadores usuais nas organizações.

Assim, o resultado final é um modelo que permite o planejamento da capacidade produtiva em médio e longo prazo, fornecendo informações que auxiliam a tomada de decisões referentes às políticas de capacidade adequadas ao contexto no qual a organização está inserida.

O modelo consegue prever o nível de utilização da capacidade produtiva para períodos futuros. Porém, é importante que os tomadores de decisão consigam avaliar racionalmente o ajuste entre demanda e capacidade. Assim, sugere-se como pesquisa a incorporação de conceitos de custos de produção nessa análise, o que permite a quantificação econômica dos desajustes entre demanda e capacidade, auxiliando na escolha de decisões mais assertivas (ALMEIDA e WERNER, 2015). Outras oportunidades de estudo incluem a utilização de diferentes técnicas de previsão de demanda, além do uso de valores estocásticos para variáveis como demanda prevista e tempo de processamento. Além disso, corroborando com as ideias apresentadas por Ho e Fang (2013), a aplicação de elementos como restrições orçamentárias e índices de produtos defeituosos constitui relevante oportunidade para estudos futuros.

Fonte: Almeida et al. (2016, p.1033-1057).

MATERIAL COMPLEMENTAR



LIVRO

Excel para Engenheiros e Cientistas

Autor: Sylvan Charles Bloch

Editora: LTC

Sinopse: o livro **Excel para Engenheiros e Cientistas** orienta o leitor desde as noções básicas sobre planilhas até as aplicações mais avançadas do Excel para ciência e engenharia - incluindo a utilização do programa na prática de laboratório. A obra traz novas técnicas para configurar planilhas, solucionar problemas, analisar dados de diversos valores, além de apresentar resultados que poderão ser bastante úteis em várias disciplinas e também na carreira profissional.



REFERÊNCIAS

ALMEIDA et al. Planejamento da capacidade de produção na indústria plástica: uma abordagem baseada em previsão de demanda e níveis de capacidade. In: **Produção Online**, Florianópolis, v. 16, n. 3, p. 1033-1057, 2016.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2013.

LONGARAY, A. A. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: Saravia, 2014.



GABARITO

1) Modelo do problema:

$$x_1 = \text{caminhões da empresa A}$$

$$x_2 = \text{caminhões da empresa B}$$

$$\min(Z) = 900 \cdot x_1 + 750 \cdot x_2$$

Sujeito à:

$$14 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \geq 150 \text{ (Capacidade de transporte)}$$

$$x_1 + x_2 \leq 12 \text{ (Máximo de caminhões)}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Solução: a otimização leva à locação de 3 caminhões da empresa A e 9 caminhões da empresa B, completando os 150m³ de carga com um total de 12 caminhões, (transigências iguais a 0). O custo encontrado foi de R\$9.450,00.

2) Modelo do problema:

$$x_1 = \text{farinha de carne e ossos}$$

$$x_2 = \text{farinha de vísceras de aves}$$

$$\min(Z) = 1,3 \cdot x_1 + 1,1 \cdot x_2$$

Sujeito à:

$$50 \cdot x_1 + 65 \cdot x_2 \leq 60 \text{ (Proteínas)}$$

$$12 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 \leq 11 \text{ (Gorduras)}$$

$$x_1 + x_2 = 1 \text{ (Massa da ração)}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Solução: a otimização leva ao uso de 333g de farinha de carne e ossos, e de 667g de farinha de vísceras de aves para cada kg de ração, com um custo de R\$1,17/kg de ração. Essa composição garante 60% de proteína e 10,67% de gordura para essas matérias-primas.



GABARITO

3) Modelo do problema:

$$x_1 = \text{caixas de batata inglesa}$$

$$x_2 = \text{caixas de batata doce}$$

$$x_3 = \text{caixas de cenoura}$$

$$\max(Z) = 38 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 + 35 \cdot x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 250 \text{ (Capacidade de transporte)}$$

$$x_1 \geq 60 \text{ (Mínimo de caixas de batata inglesa)}$$

$$x_2 \geq 50 \text{ (Mínimo de caixas de batata doce)}$$

$$x_3 \geq 45 \text{ (Mínimo de caixas de cenoura)}$$

$$x_3 \leq 80 \text{ (Máximo de caixas de cenoura)}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$$

Solução: a otimização propõe levar 60 caixas de batata inglesa, 145 caixas de batata doce e 45 caixas de cenoura, transportando a capacidade máxima do veículo (250 caixas), com um lucro de R\$9.655,00.

4) Modelo do problema:

$$x_1 = \text{calcário do tipo A}$$

$$x_2 = \text{calcário do tipo B}$$

$$\min(Z) = 0,2 \cdot x_1 + 0,12 \cdot x_2$$

Sujeito à:

$$58 \cdot x_1 + 65 \cdot x_2 \geq 52 \text{ (Quantidade mínima de CaO)}$$

$$4 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \leq 6,5 \text{ (Quantidade máxima de MgO)}$$

$$x_1 + x_2 = 1 \text{ (Massa do cimento)}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Solução: a otimização do problema sugere o uso de 50% de calcário do tipo A e 50% de calcário do tipo B, conseguindo-se com essa mistura um custo de R\$0,16/kg de cimento. Essa mescla permite a produção de um cimento com 61,5% de CaO e 6,5% de MgO, atendendo às especificações (restrições do problema).

5) Modelo do problema:



GABARITO

x_1 = calcário do tipo A

x_2 = calcário do tipo B

x_3 = argila

$$\min(Z) = 0, 2 \cdot x_1 + 0, 12 \cdot x_2 + 0, 17 \cdot x_3$$

Sujeito à:

$$58 \cdot x_1 + 65 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 \geq 52 \text{ (quantidade mínima de CaO)}$$

$$58 \cdot x_1 + 65 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 \leq 67 \text{ (quantidade máxima de CaO)}$$

$$4 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \geq 0 \text{ (quantidade mínima de MgO)}$$

$$4 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \leq 6,5 \text{ (quantidade máxima de MgO)}$$

$$1,8 \cdot x_1 + 1,1 \cdot x_2 + 16,7 \cdot x_3 \geq 3,8 \text{ (quantidade mínima de Al2O3)}$$

$$1,8 \cdot x_1 + 1,1 \cdot x_2 + 16,7 \cdot x_3 \leq 6 \text{ (quantidade máxima de Al2O3)}$$

$$0,92 \cdot x_1 + 0,66 \cdot x_2 + 8,8 \cdot x_3 \geq 1,7 \text{ (quantidade mínima de Fe2O3)}$$

$$0,92 \cdot x_1 + 0,66 \cdot x_2 + 8,8 \cdot x_3 \leq 7 \text{ (quantidade máxima de Fe2O3)}$$

$$6 \cdot x_1 + 6,7 \cdot x_2 + 63 \cdot x_3 \geq 18 \text{ (quantidade mínima de SiO2)}$$

$$6 \cdot x_1 + 6,7 \cdot x_2 + 63 \cdot x_3 \leq 24 \text{ (quantidade máxima de SiO2)}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ (massa do cimento)}$$

$$x_3 \leq 0,25 \text{ (quantidade máxima de argila em kg)}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$$

Solução: a otimização do problema sugere o uso de 123g de calcário do tipo A (12,3%), 667g de calcário do tipo B (66,7%), e 210g de argila (21,0%), o que resulta em um custo de R\$0,14/kg de clínquer. Essa mistura fornecerá um cimento com 52,0% de CaO, 6,5% de MgO, 4,45% de Al2O3, 2,4% de Fe2O3 e 18,4% de SiO2. Considerando o cimento como esse clínquer moído, cada kg de cimento tem um custo de R\$0,14. Portanto, o preço de venda com 75% a mais do valor daria R\$0,245 ≈ R\$0,25/kg. Então, um saco de 50kg seria vendido a R\$12,50.



TEORIA DOS JOGOS E ESTRATÉGIA EMPRESARIAL

UNIDADE

IV

Objetivos de Aprendizagem

- Entender a lógica de funcionamento da Teoria dos Jogos.
- Identificar os principais constituintes de um jogo.
- Resolver problemas em Teoria dos Jogos.
- Compreender o uso da Teoria dos Jogos para a estratégia empresarial.

Plano de Estudo

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- Histórico, definições e importância da Teoria dos Jogos
- Tipos de jogos e suas representações
- Jogos simultâneos – Equilíbrio de Nash
- Formulação de estratégia via Teoria dos Jogos

INTRODUÇÃO

Olá, caro(a) aluno(a). Nas unidades anteriores, você aprendeu a utilizar a Programação Linear para resolver problemas comuns em Pesquisa Operacional, identificando os principais elementos que compõem um modelo desse tipo e resolvendo-o.

Nesta unidade, você verá outra ferramenta muito importante utilizada na Pesquisa Operacional para a resolução de problemas: trata-se da Teoria dos Jogos, que é baseada em conceitos de competição aplicados ao meio empresarial. Portanto, você aprenderá a identificar todos os elementos que fazem parte de um jogo e poderá resolvê-lo analiticamente.

Iniciaremos com um breve histórico da Teoria dos Jogos, e também apresentarei alguns conceitos básicos e fundamentais para que qualquer problema de competição empresarial possa ser resolvido com essa teoria.

Você também poderá escrever os problemas referentes à teoria nas formas mais adequadas para analisá-lo, a fim de tentar encontrar a melhor opção para a sua empresa. Os conceitos que você aprenderá nesta unidade são de grande importância e ajudam os gestores das empresas na tomada de decisões mais acertadas. Toda a técnica se baseia em imaginar diversos cenários que podem surgir durante um jogo empresarial, avaliando os ganhos e perdas de todos os concorrentes, algo que permite escolher a melhor opção para a empresa, mesmo que não seja a de maior rentabilidade.

Será possível trabalhar com jogos em que os envolvidos podem tomar decisões ao mesmo tempo, e também trabalhar com situações em que os jogadores tomarão decisões um após o outro.

Finalizaremos a unidade com o entendimento de que a Teoria dos Jogos pode auxiliar os gestores de empresas no estabelecimento de estratégias de negócio, escolhendo caminhos mais vantajosos, e prevendo, (com certa confiança), o comportamento de seu(s) concorrente(s).



HISTÓRICO, DEFINIÇÕES E IMPORTÂNCIA DA TEORIA DOS JOGOS

Antes de trabalharmos com os conceitos e definições da Teoria dos Jogos, vamos nos debruçar sobre um breve histórico dessa teoria, que também é uma ferramenta muito útil para a Pesquisa Operacional. Você terá a oportunidade de entender melhor alguns pontos estratégicos ao longo do capítulo. Por esse motivo, é interessante conhecer as origens do assunto. Então, vamos lá!

HISTÓRICO E VISÃO GERAL

A Teoria dos Jogos foi desenvolvida basicamente durante a Segunda Guerra Mundial, sendo um ramo da matemática aplicada para auxiliar processos de tomada de decisão (FIANI, 2015). Seu estudo sistemático teve início em 1944, com John Von Neumann e Oskar Morgenstern, que publicaram ‘*A Teoria dos Jogos e o Comportamento Econômico*’, ampliando o campo de aplicação da teoria em economia.

Já em 1950, John Forbes Nash Junior publicou quatro artigos importantes, dando origem ao chamado Equilíbrio de *Nash*, e, em 1994, o prêmio Nobel de Economia foi concedido a John Nash, John Harsanyi e Reinhard Selten, por suas contribuições para a Teoria dos Jogos (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

Basicamente, uma disputa ou competição entre duas pessoas, empresas ou países pode configurar um jogo. Se há dois agentes (jogadores) que lutam para alcançar o melhor objetivo individualmente, você pode analisar essa disputa utilizando a Teoria dos Jogos.

Fiani (2015) apresenta um exemplo clássico para ilustrar a teoria. Trata-se da Batalha do Mar de Bismarck em 1942, durante a Segunda Guerra Mundial. Nessa batalha, o exército japonês queria fazer uma manobra de reposicionamento de tropas, movendo parte do seu efetivo para Papua-Nova Guiné. Porém, o trajeto marítimo envolvia muitos riscos, pois os aviões dos Aliados patrulhavam constantemente a região e podiam realizar bombardeios sobre as tropas em movimento. Assim, o exército japonês teria que navegar três dias até chegar ao destino.

Dois caminhos poderiam ser seguidos: a rota norte e a rota sul, sendo que a diferença entre ambas era a previsão de mau tempo para a rota norte, o que diminuiria a visibilidade dos aviões Aliados, e o bom tempo previsto para a rota sul, o que facilitaria os bombardeios.



SAIBA MAIS

O exército dos Aliados era formado principalmente pelo Reino Unido, União Soviética e Estados Unidos (que entrou efetivamente na guerra nos últimos anos do conflito), e o exército do Eixo era formado essencialmente pela Alemanha, Itália e Japão.

Fonte: adaptado de Blainey (2015).

O exército Aliado só conseguia patrulhar uma rota por vez e seu serviço de inteligência apontava que o Japão iria fazer a movimentação de tropas mas sem saber por qual rota. Havia quatro possibilidades: a primeira é de que se o exército japonês escolhesse a rota sul, os aliados poderiam enviar a primeira patrulha para as rotas norte ou sul. Porém, se a patrulha fosse para o sul e encontrasse a frota japonesa no primeiro dia, os Aliados teriam três dias de ataque.

Outra situação se daria caso a patrulha fosse primeiro para a rota norte. Nesse caso, ela não encontraria nada, no dia seguinte iria para a rota sul e encontraria a frota japonesa, o que permitiria dois dias de ataque.

Em uma terceira possibilidade, se o exército japonês fosse pela rota norte (de menor visibilidade), as patrulhas dos Aliados também poderiam iniciar suas buscas pelas rotas norte ou sul. Caso fossem para o sul, não encontrariam a frota japonesa, perderiam um dia, no dia seguinte iriam para a rota norte e encontrariam o exército japonês. Porém, como a visibilidade era ruim, os bombardeios poderiam ser executados apenas em um dia.

Por fim, se as patrulhas partissem diretamente para o norte, encontrariam o exército japonês no primeiro dia e os bombardeios durariam dois dias, devido à visibilidade ruim. A combinação das possibilidades pode ser representada em uma tabela, como mostra o Quadro 1.

A escolha dos dois exércitos foi a rota norte já que, para os japoneses, seria a possibilidade que permitiria menos tempo de bombardeio: um ou dois. Para os aliados, seria uma escolha que resultaria em dois dias, de bombardeio, independentemente da escolha do exército japonês. Historicamente, o exército japonês teve muitas baixas, de maneira que poucos soldados chegaram ao destino planejado.

Quadro 1 - Opções dos exércitos na Batalha do Mar de Bismarck

Forças Aliadas	Comboio Japonês	
	Rota Sul	Rota Norte
Busca Rota Sul no 1º dia	3 dias de bombardeio	1 dia de bombardeio
Busca Rota Norte no 1º dia	2 dias de bombardeio	2 dias de bombardeio

Fonte: Fiavi (2015).

Os exércitos não sabiam qual seria a escolha de seu oponente, mas precisavam tomar uma decisão, e tiveram que se basear nas melhores possibilidades. Essa é a essência da Teoria dos Jogos. Quando você está competindo, seja na área militar, empresarial ou esportiva, e precisa tomar uma decisão sem saber ao certo qual será a escolha do seu adversário, você deve levantar todas as possíveis recompensas que cada jogador terá (você e seu adversário), de acordo com as decisões escolhidas, para então tomar a decisão final. O Quadro 1 é uma forma de representar um jogo, que você verá com mais detalhes nas próximas seções.

A grande vantagem de estudar essa teoria é que você desenvolve uma capacidade de raciocínio estratégico, quando explora as possibilidades de interação dos agentes envolvidos no jogo (FIANI, 2015).

Assim como a Programação Linear, a Teoria dos Jogos precisa de um modelo de tomada de decisão. A diferença é que, na Programação Linear, esse modelo era representado por equações matemáticas. Já na Teoria dos Jogos, os modelos serão demonstrados por tabelas ou diagramas, que permitem visualizar a sequência das escolhas e as consequências para cada jogador. Vamos então fazer uma definição mais formal sobre a teoria e apresentar alguns elementos essenciais.

DEFINIÇÕES E CARACTERÍSTICAS

Quando existirem dois ou mais agentes inteligentes que competem entre si para obter o máximo de ganho, de maneira que suas decisões devam ser tomadas em um ambiente de incertezas, temos um problema de jogos, que poderá ser resolvido pela teoria. Algumas situações, como o lançamento de campanhas publicitárias, campanhas políticas, lançamentos de novos produtos e estratégias militares, são exemplos de problemas de jogos (ANDRADE, 2015).

Algumas definições importantes são apresentadas por Andrade (2015):

- Cada oponente é chamado de *jogador*.
- As *estratégias* são definidas como as possibilidades de decisão que existem para cada jogador, sendo finitas ou infinitas.

- As estratégias resultam em *prêmios* para os jogadores.
- As interações estratégicas, ou *jogos*, podem ser *simultâneos*, ocorrendo quando os jogadores tomam decisões sem saber o que o outro jogador vai escolher, ou *sequenciais*, que é quando o jogador toma a decisão depois da escolha de seu oponente.
- Quando em um jogo, o ganho de um jogador resulta automaticamente na perda do outro jogador, dizemos que estamos em um *jogo de soma zero*.
- Os ganhos possíveis ou *prêmios* que cada jogador pode receber dependendo da estratégia escolhida, pode ser resumido em uma matriz de resultados que ajuda a entender a dinâmica do jogo, de maneira que as linhas representam o ganho do jogador em foco, e as colunas retratam o ganho de seus oponentes.

Outras características encontradas na Teoria dos Jogos são relevantes, como as *interações*, a *racionalidade* e o *comportamento estratégico*. Essas características são apresentadas por Fiani (2015) e mostradas a seguir:

- **Um jogo é um modelo formal:** a Teoria dos Jogos envolve técnicas de análise e descrição, e existem regras preestabelecidas para representar e estudar um jogo.
- **Interações:** cada jogador afeta os demais ao tomar uma decisão.
- **Agentes:** representa um indivíduo ou grupo de indivíduos que apresenta a capacidade de tomar decisões e afetar os demais. Geralmente, chamamos os agentes de jogadores.
- **Racionalidade:** ao assumir que os agentes são racionais, supõe-se que todos empregam os meios mais adequados para atingirem seus objetivos individuais.
- **Comportamento estratégico:** esse comportamento ocorre quando um jogador tem ciência de que a decisão tomada influenciará os demais jogadores. Da mesma forma, o jogador sabe que as decisões de seus competidores trarão consequência para ele.



TIPOS DE JOGOS E SUAS REPRESENTAÇÕES

Depois de conhecer um pouco da história e algumas definições básicas da Teoria dos Jogos, é hora de aprofundar o conhecimento sobre os tipos de jogos que podem ser desenvolvidos com essa teoria, bem como analisar as duas formas principais de representar esses jogos. Divirta-se!!

TIPOS DE JOGOS

Os jogos que podem ser representados pela teoria são divididos em alguns tipos. Fudenberg e Tirole (1991) apresentam essas subdivisões.

- **Jogo estático de informação completa:** nesse tipo de jogo, um jogador conhece todas as opções que seus oponentes podem tomar, mas não sabe com certeza qual delas será escolhida. Todas as estratégias são escolhidas simultaneamente e, por isso, cada jogador toma sua decisão ignorando as decisões dos demais.

- **Jogo dinâmico de informação completa e perfeita:** os jogadores executam suas ações de maneira não simultânea, e o próximo jogador sabe qual foi a escolha de seu antecessor. As ações do jogo obedecem a uma sequência estabelecida de acordo com cada situação.
- **Jogo dinâmico de informação completa e imperfeita:** apresenta as mesmas características do anterior, mas, em alguns momentos, um dos jogadores toma sua decisão mesmo não conhecendo as ações do adversário.
- **Jogo repetido finito:** esse tipo de jogo apresenta um número de rodadas definida, sabendo-se quando ele terminará. É um tipo de jogo interessante quando se pretende induzir uma cooperação entre os jogadores.
- **Jogo repetido infinito:** é diferente do jogo anterior, pois os jogadores não sabem quando o jogo terminará. Há possibilidade de cooperação entre si, mas isso dependerá de quanto cada um estará disposto a cooperar.

REPRESENTAÇÃO DOS JOGOS

A representação de jogos se dá por meio de modelos, que são uma forma de descrever o problema em estudo. Cada competição deve ser modelada permitindo uma representação dos elementos essenciais do jogo, que por sua vez possibilitem a apresentação das possíveis recompensas de cada jogador. Assim, você pode escolher a melhor opção para cada um.

Lembre-se de que todo modelo, inclusive os utilizados na Teoria dos Jogos, são representações simplificadas da realidade, servindo de guia para o entendimento dos fenômenos envolvidos no âmbito econômico, social e empresarial.

Alguns pontos são essenciais para que seja possível representar adequadamente um jogo. Lembre-se de que os jogos são modelos de interações estratégicas sendo o resultado do reconhecimento por parte dos jogadores, e de que suas ações afetam um ao outro (FIANI, 2015).

Os jogadores são indivíduos ou organizações que possuem autonomia para tomar decisões em uma interação estratégica. O objetivo de cada jogador é obter o melhor resultado possível por meio de sua ação ou movimento.

A ação ou movimento é uma escolha que determinado jogador pode fazer em um dado momento do jogo, e diversas ações estão disponíveis, dando origem a um conjunto de ações que gera uma recompensa. A recompensa (*payoff*) é o que todo jogador recebe ao término do jogo, de acordo com as suas escolhas e dos demais jogadores. A recompensa de cada jogador é representada por uma função de recompensa, que é um número que representa o que o jogador receberá devido a cada escolha.

Quando se elabora um modelo de jogo, duas situações se destacam: quando os jogadores não conhecem antecipadamente a decisão dos demais (jogos simultâneos) e quando conhecem (jogos sequenciais).

Jogos simultâneos

Os jogos simultâneos geralmente são representados na forma estratégica ou normal. Essa representação se dá com base em uma tabela que apresenta as recompensas de cada jogador, de acordo com a estratégia escolhida. Fiani (2015), apresenta um exemplo para ilustrar a representação na forma estratégica. Trata-se do problema de renovação dos empréstimos de dois bancos. Observe:

Exemplo 1 – o problema de renovação dos empréstimos de dois bancos

Exemplo adaptado de Fiani (2015), que supõe que uma empresa no início de suas atividades tomou 5 milhões de reais emprestados do banco A, e 5 milhões de reais emprestados do banco B, gerando um total de 10 milhões de reais em empréstimos. Considere também que a empresa não tenha capital próprio, e que disponha apenas do capital retirado dos bancos. Devido aos maus negócios, a empresa passou a ter um capital atual de 6 milhões de reais, que é insuficiente para cobrir os empréstimos.

O jogo é configurado quando os dois bancos devem decidir se renovam ou não o empréstimo para a empresa. Suponha que os dois bancos devem decidir entre duas opções apenas, que são as de renovar ou não renovar o empréstimo: se o banco renovar, recebe o pagamento dos juros e, caso não renove, a empresa deve reembolsar o principal do empréstimo. Se conseguir o empréstimo, a empresa poderá atuar por apenas mais um ano e então decretar falência, de maneira que os bancos dividiriam os ativos entre si.

Dessa forma, se os dois bancos renovarem o empréstimo, a empresa paga para cada um 1 milhão de reais de juros, mais 3 milhões de reais da divisão do ativo total de 6 milhões de reais, perfazendo um total de 4 milhões de reais para cada banco. Se um dos bancos não renovar o empréstimo e o outro sim, a empresa precisará decretar falência, devolvendo o empréstimo de 5 milhões de reais para o banco que não renovou, e apenas 1 milhão de reais para o banco que renovou.

Se ambos os bancos não renovarem os empréstimos, a empresa também decreta falência e partilha os ativos, o que resultará em 3 milhões de reais para cada um. Todas essas informações podem ser representadas em uma tabela contendo os ganhos de cada banco, e esse tipo de representação é chamado de forma estratégica ou normal. Essa demonstração é apresentada na Tabela 1:

Tabela 1 - Jogo na forma estratégica ou normal

Banco A		Banco B	
		Renova	Não Renova
Renova		4,4	1,5
Não Renova		5,1	3,3

Fonte: Fiani (2015).

Observe que essa representação permite observar as recompensas de cada jogador (banco), de acordo com suas ações (renovar ou não renovar). Na tabela, as linhas representam as estratégias de um jogador, enquanto as colunas representam as estratégias do outro jogador. Para esse exemplo, os primeiros valores antes da vírgula representam os lucros do banco A, e os valores após a vírgula indicam os lucros do banco B.

Nessa interação entre os bancos, cada um toma sua decisão sem saber o que o outro fará e sem se preocupar com as consequências, mas apenas com seu lucro imediato, o que configura nosso problema como um jogo simultâneo.

Se o problema for observado pela ótica do banco A, o maior lucro será obtido por meio da não renovação do empréstimo e torcendo para que o banco B renove e ganhe 5 milhões de reais. Para o banco B, a melhor opção também é não renovar o empréstimo, desde que o banco A renove. Porém, o mais seguro para ambos os bancos é não fazer a renovação, pois os dois receberão 3 milhões de reais. Perceba que os ganhos dos bancos é maior para ambos se os dois renovarem

o empréstimo, mas, como o jogo é simultâneo e nenhum banco sabe qual será a decisão de seu concorrente, ao renovar o empréstimo cada um corre o risco de receber apenas 1 milhão de reais caso o outro banco não efetue a renovação.

Jogos Sequenciais

Os jogos simultâneos não apresentam informações futuras ou os desdobramentos de decisões tomadas em sequência. Por isso, quando o processo de interação estratégica se desenvolve em etapas sucessivas, deve-se representar o jogo na forma *estendida*. Dessa forma, observa-se as recompensas de cada jogador em diversas situações, sendo que cada jogador pode tomar decisões com base nas decisões passadas de seu oponente. Para ilustrar esse tipo de jogo, Fiani (2015) apresenta um exemplo do lançamento de um veículo para competir com uma empresa que lidera o mercado.

Exemplo 2 – Lançamento de um produto competidor

Nesse exemplo, também adaptado de Fiani (2015), supõe-se que uma empresa automobilística não tenha um modelo de Van no mercado, enquanto sua concorrente já produz um tipo que é bem sucedido. Essa empresa deve decidir se lança ou não seu novo modelo e pode ser chamada de “Inovadora”. A empresa que já produz a Van pode ser chamada de “Líder” e tem duas opções: manter o preço ou reduzir o preço de seu modelo já existente, para competir com o modelo novo da Inovadora.

A particularidade desse tipo de jogo é que a empresa Inovadora decidirá se lançará ou não o modelo de Van, antes da empresa Líder decidir se vai aumentar ou reduzir o preço da Van que já está no mercado. Assim, as situações podem se desdobrar da seguinte forma: se a Inovadora decidir lançar seu modelo no mercado e a Líder reduzir o preço de sua Van, ambas recebem 2 milhões de reais de lucro, porque há uma competição acirrada no mercado. Mas, caso a Inovadora lance seu modelo no mercado e a Líder mantenha o preço de sua Van, a empresa Líder terá um lucro de 1 milhão de reais, e a Inovadora de 4 milhões de reais por aumentar sua participação no mercado.

Se a Inovadora não lançar seu modelo de Van, novamente, a empresa Líder poderá decidir entre manter ou reduzir o preço: caso mantenha, seu lucro será de 4 milhões de reais, e o ganho da empresa Inovadora será de 1 milhão de reais. Se a Líder reduzir o preço, seu lucro cairá para 3 milhões de reais, e o lucro da Inovadora também será de 1 milhão de reais.

Essas informações podem ser descritas na forma estendida, conforme apresentado na Figura 1:

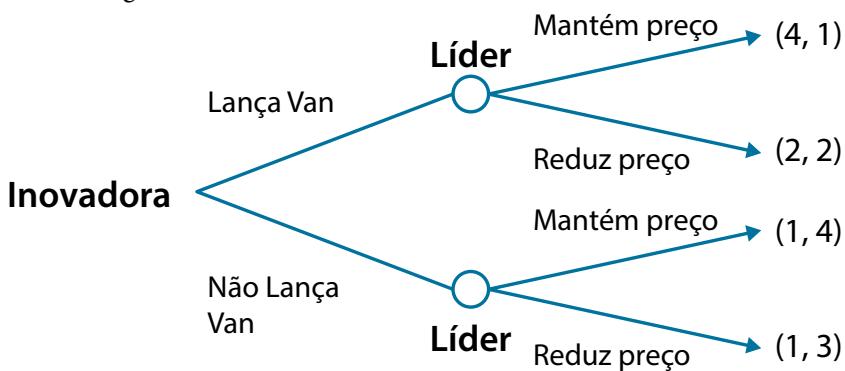


Figura 1 - Jogo sequencial na forma estendida

Fonte: Fiani (2015).

Essa representação também é conhecida como *árvore de jogos*, sendo composta por ramos e nós. Cada nó representa uma etapa do jogo e cada ramo representa a ação possível para cada jogador.

Nesse problema, a empresa Inovadora tomará a decisão primeiro e, por isso, analisemos sob seu ponto de vista. Os valores antes da vírgula representam os lucros na Inovadora, e os valores depois da vírgula representam os lucros da Líder.

Os maiores lucros da empresa Inovadora ocorrem com o lançamento da Van, sendo que a empresa pode receber 4 ou 2 milhões de reais. Caso decida pelo não lançamento da Van, seus lucros serão de apenas 1 milhão de reais. Portanto, essa será sua decisão. Caberá à Líder reduzir o preço de sua Van do mercado, para ficar com um lucro de 2 milhões de reais ao invés de 1 milhão de reais.

JOGOS SIMULTÂNEOS – EQUILÍBRIO DE NASH

Na Teoria dos Jogos, você deve sempre levar o máximo de informações possíveis para poder compor seu modelo de jogo e reconhecer quais seriam as recompensas que você e seu(s) concorrente(s) teriam. Quando as estratégias são elaboradas e as recompensas representadas na forma normal ou estendida, você consegue visualizar as melhores e piores opções para cada jogador, sendo que dentre as estratégias existentes pode haver as estritamente dominantes e as estritamente dominadas. Quando não há predomínio de nenhuma estratégia, aplica-se o equilíbrio de *Nash*, que permite selecionar a melhor alternativa.



ESTRATÉGIAS ESTRITAMENTE DOMINANTES OU ESTRITAMENTE DOMINADAS

Vamos então classificar os tipos de estratégia estritas que foram mencionadas, e resolver um exemplo para ilustrar esse caso.

- **Estratégias estritamente dominantes:** são aquelas que predominam sobre as outras, ou seja, as que apresentam as melhores recompensas, independentemente do que seu adversário escolher. Isso facilita muito a análise do jogo.
- **Estratégias estritamente dominadas:** são as que apresentam as piores opções para cada jogador, sendo necessariamente descartadas. Se houver estratégias dominantes, as demais serão as dominadas.

Nesta seção, você trabalhará com jogos simultâneos. Então, lembre-se de que são aqueles jogos em que todos os jogadores devem tomar decisões ao mesmo tempo, sem conhecer as verdadeiras intenções de seus oponentes. Veja no Exemplo 3 como identificar as estratégias estritamente dominantes.

Exemplo 3 – Lançamento de uma marca de sabão em pó biodegradável

Uma empresa de sabão em pó chamada Limpo decide se vai lançar ou não uma marca de sabão biodegradável para competir com uma marca de sabão de sua concorrente, a empresa Bonito. Por sua vez, a empresa Bonito deve escolher aumentar ou não os gastos em publicidade para manter sua fatia de mercado. Suponha que você tenha levantado todas as informações dos possíveis lucros de cada empresa, sendo esses valores representados na Tabela 2. Veja:

Tabela 2 - Representação na forma estratégica do exemplo 3

Limpo	Bonito	
	Aumentar gastos com publicidade	Não aumentar gastos com publicidade
Lançar o produto biodegradável	5,5	7,3
Não lançar o produto biodegradável	2,4	2,7

Fonte: o autor.

Os números ao lado esquerdo da vírgula representam os lucros da empresa Limpo, e os números ao lado direito da vírgula representam os lucros da empresa Bonito. Nota-se que se a empresa Limpo lançar o produto biodegradável, seus lucros poderão ser de 5 ou 7 milhões de reais e, caso não lance, os lucros seriam de 2 milhões de reais. Independentemente da decisão de aumentar ou não os gastos com publicidade, a melhor opção para a empresa Limpo é lançar o produto biodegradável.

Nessa situação/exemplo, adaptado de Fiani (2015), lançar o produto biodegradável é uma estratégia estritamente dominante sobre a estratégia de não lançar o produto biodegradável. Da mesma forma, a estratégia de não lançar o produto biodegradável é uma estratégia dominada pela estratégia de lançar o produto biodegradável.

A presença de opções que são bem melhores do que as demais facilitam muito a tomada de decisão acerca de qual atitude tomar em um jogo.

EQUILÍBRIO DE NASH

O equilíbrio de *Nash* é uma técnica utilizada para analisar um jogo quando não existem estratégias dominantes e tampouco dominadas. Uma definição para o equilíbrio de *Nash* é dada por Fiani (2015), que considera que esse equilíbrio é constituído quando, em uma combinação de estratégias, cada uma representa a melhor escolha possível em relação à estratégia dos demais jogadores, e isso é válido para todos os que estão jogando. No exemplo 4, o equilíbrio de *Nash* é utilizado para analisar o jogo.

Exemplo 4 – Prevenção de entrada no comércio internacional

Nesse exemplo, adaptado de Fiani (2015), vamos supor que há uma empresa que deseja entrar no mercado siderúrgico nacional exportando seus produtos para o país. Essa empresa será chamada de “Entrante Potencial”. Por outro lado, há uma empresa nacional, a “Dominante”, que já domina grande parcela desse mercado. Para a Entrante Potencial há três possibilidades: “não exportar” para o país, “exportar em pequena escala”, ou “exportar em larga escala”.

A empresa Dominante pode tomar duas atitudes: “investir” para expandir sua capacidade produtiva e aumentar sua participação no mercado nacional, reduzindo os preços de seus produtos devido ao aumento do volume de vendas, ou “não investir” e permanecer com a mesma capacidade produtiva.

Ambas devem tomar suas decisões sem conhecer a decisão tomada por sua rival. Na Tabela 4, são apresentadas as estratégias com suas recompensas representadas pelo número. Assim, as recompensas são representadas pelos números “0” (zero), “1” (um), “2” (dois) e “-1” (menos um). Nessa representação, “0” significa que não houve mudança de lucratividade, “1” representa aumento da lucratividade, “2” representa um grande aumento da lucratividade e “-1” indica que a empresa teve prejuízo.

Tabela 4 - Representação na forma estratégica do Exemplo 4

Empresa Dominante	Entrante Potencial		
	Não Exporta	Exporta em pequena escala	Exporta em larga escala
Investe	2,1	1,0	0,-1
Não Investe	1,0	2,1	-1,2

Fonte: Fiani (2015).

Lembre-se de que os números ao lado esquerdo da vírgula representam os ganhos do jogador que tem as estratégias das linhas (Empresa Dominante), e que os números ao lado direito da vírgula representam os ganhos do jogador que tem as estratégias nas colunas (Entrante Potencial).

Ao analisar a Tabela 4, é possível deduzir que a melhor alternativa para a Empresa Dominante seria “investir”, desde que a Entrante Potencial escolha a opção “não exporta”, ou, então, decidir por “não investir”, desde que a Entrante Potencial “exporte em pequena escala”, pois assim o mercado ficaria ocupado e não haveria mais espaço para novas concorrências.

Para a Entrante Potencial, a melhor opção é “exportar em larga escala” somente se a Empresa Dominante “não investir”, mas assim há o risco de haver prejuízo caso a Empresa Dominante “invista”. Como não há uma estratégia estritamente dominante, pode-se aplicar o equilíbrio de *Nash*.

O objetivo principal do equilíbrio de *Nash* é encontrar alguma combinação de estratégias em que cada jogador adote a melhor resposta ao que seus oponentes estão fazendo, sendo válido para todos os jogadores ao mesmo tempo.

Uma das maneiras de identificar esse equilíbrio é fixar a estratégia de um determinado jogador e marcar a melhor opção para o outro jogador, sendo que isso deve ser feito repetidamente para todas as estratégias disponíveis. Por exemplo: ao fixar uma estratégia que está na coluna, escolhe-se a melhor opção entre as linhas que formam essa coluna (para o jogador que tem suas estratégias representadas pelas linhas), procedendo-se da mesma maneira fixando as estratégias das linhas, uma a uma, e marcando para cada estratégia fixada a melhor opção nas colunas que compõem as escolhas do outro jogador.

Para o exemplo 4, ao fixar a primeira coluna que é representada pela estratégia “não exporta” da Entrante Potencial, a melhor escolha para a Empresa Dominante é a “investe”. Ao fixar a segunda coluna da estratégia “exporta em pequena escala”, a melhor escolha para a Empresa Dominante seria “não investe”. Além disso, fixando a terceira coluna “exporta em larga escala”, a melhor opção para a Empresa Dominante é “investe”. Essas escolhas poderiam ser demarcadas pela letra “l”, representando as melhores opções para o jogador que está nas linhas, conforme a Tabela 5:

Tabela 5 - Escolha das melhores estratégias da Empresa Dominante fixando-se as estratégias da Entrante Potencial

Empresa Dominante	Entrante Potencial		
	Não Exporta	Exporta em pequena escala	Exporta em larga escala
Investe	(l) 2,1	1,0	(l) 0,-1
Não Investe	1,0	(l) 2,1	-1,2

Fonte: adaptada de Fiani (2015).

O passo seguinte é fixar as estratégias das linhas (para a Empresa Dominante), e então escolher a melhor opção para a Entrante Potencial de cada linha. Então, se a Empresa Dominante “investe”, a melhor opção para a Entrante Potencial é “não exporta”. Ao fixar a estratégia “não investe” para a Empresa Dominante, a melhor escolha para a Entrante Potencial é “exporta em larga escala”. Essas escolhas podem ser marcadas com a letra “c”, para representar as melhores escolhas para o jogador da coluna. Na Tabela 6, são apresentadas essas estratégias assinaladas. Veja:

Tabela 6 - Determinação do Equilíbrio de *Nash* para o problema de prevenção de entrada no comércio internacional

Empresa Dominante	Entrante Potencial		
	Não Exporta	Exporta em pequena escala	Exporta em larga escala
Investe	(l) 2,1(c)	1,0	(l) 0,-1
Não Investe	1,0	(l) 2,1	-1,2 (c)

Fonte: adaptada de Fiani (2015).

Ao realizar esses procedimentos, você consegue identificar a estratégia que representa o equilíbrio de *Nash*, observando a célula que apresenta as duas letras “I” e “c”, pois isso indica a melhor opção para ambas as empresas, sendo portanto, a estratégia mais segura, de maneira que a escolha não dependa da estratégia adotada por sua rival. No exemplo, a melhor opção é a Empresa Dominante adotar a opção “investe”, e a Entrante Potencial escolher a opção “não exporta”.

O equilíbrio de *Nash* pode ser utilizado para qualquer jogo simultâneo, mesmo que haja uma estratégia dominante no problema.



REFLITA

Durante uma competição, cada jogador se preocupa com suas recompensas e ganhos. Seria possível uma estratégia ser vantajosa para todos os jogadores?

FORMULAÇÃO DE ESTRATÉGIA VIA TEORIA DOS JOGOS

A teoria pode ser utilizada para formular estrategicamente a interação entre empresas, sendo que uma empresa pode decidir se vai competir ou cooperar com seus adversários. Em situações que se deseja ampliar o mercado consumidor de um dado produto, a cooperação pode ser interessante para estimular o consumo do produto em questão.

Segundo Costa (2007), a cooperação deve ser escolhida por uma empresa caso o jogador tenha certeza de que a recompensa final será maior



para todos os jogadores e de que os demais honrarão a cooperação. Se a intenção for aumentar sua própria participação no mercado, então a competição é a melhor opção.

A rede de valor da empresa pode ser utilizada pela teoria em questão para analisar essa dinâmica de interações entre uma empresa e os demais jogadores. Essa rede nada mais é do que um diagrama, em que estão representados os principais jogadores com que a empresa se relaciona, conforme apresentado na Figura 2:

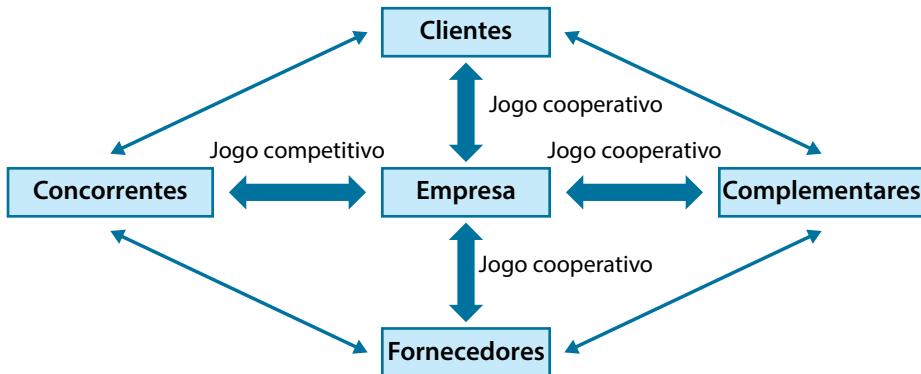


Figura 2 - Rede de valor de uma empresa

Fonte: adaptada de Costa (2007).

Na rede de valor representada na Figura 2, pode-se observar que uma empresa precisa se relacionar com seus clientes, fornecedores, complementares e concorrentes. Verifica-se que há uma relação de cooperação entre clientes, fornecedores e complementares, pois todos apresentam interesses comuns quanto à oferta de produto e de serviços, bem como uma relação de competição com seus concorrentes, uma vez que, geralmente, os jogadores querem tomar as maiores fatias do mercado.

Outra ferramenta que pode ser utilizada na formulação estratégica é a matriz de jogos estratégicos, conforme apresentado na Figura 3. Essa matriz é subdividida em posturas dos jogadores e forças que possuem.

A postura rival é uma competição retaliatória entre as empresas, também conhecida como Soma Zero ou Minimax. Nessa situação, a vitória de uma empresa implica na derrota da outra. São exemplos desse tipo de competição: uma concorrência pública ou privada, ou um leilão.

A postura associativa pode configurar um jogo Cooperativo de Pareto, sendo conhecido como um jogo ganha-ganha que, por ser um jogo cooperativo, é utilizado no meio empresarial, militar, político e até mesmo familiar. Nessas condições,

os jogadores realizam um acordo explícito, de maneira que todos respeitem as regras estabelecidas. O equilíbrio desse jogo é chamado de ótimo de Pareto, sendo que nenhum jogador pode melhorar seus resultados sem prejudicar os demais.

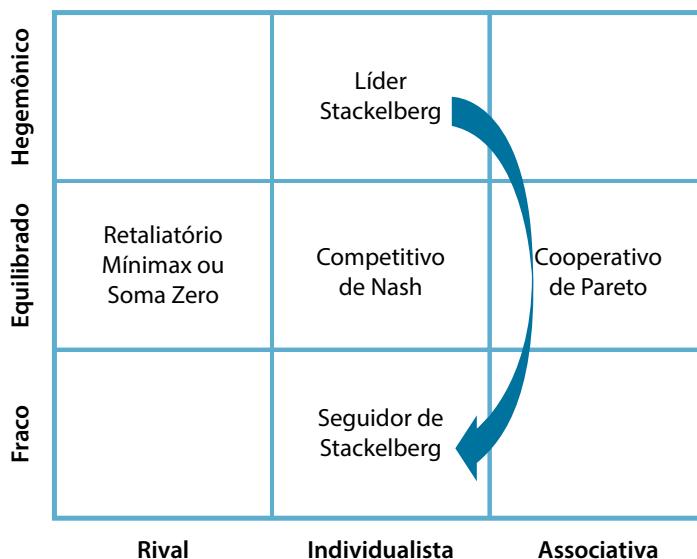


Figura 3 - Matriz de jogos estratégicos

Fonte: adaptada de Costa (2007).

Na postura individualista, três formas diferentes de jogos podem acontecer, que são a Líder de *Stackelberg*, Seguidor de *Stackelberg* e Competitivo de *Nash*.

O jogo Competitivo de *Nash* é aplicado em situações de livre mercado com grande quantidade de fornecedores e clientes, de forma que nenhum jogador tenha condições de dominar ou ser dominado pelos seus concorrentes. Um exemplo desse tipo de jogo é a competição entre restaurantes em uma grande cidade.

Os jogos Líder de *Stackelberg* e Seguidor de *Stackelberg* são classificados como jogos hierárquicos, sendo uma relação entre um jogador líder e outro seguidor. Há, nesses casos, um oponente mais forte e outro mais fraco, situação que pode ocorrer entre uma montadora e seus fornecedores de peças.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta unidade, você aprendeu a utilizar a Teoria dos Jogos para estabelecer relações de competição entre dois agentes. Em um jogo empresarial, você deve identificar os jogadores ou competidores, aqueles que procuram a melhor solução para si. Cada jogador é considerado uma entidade racional, que procura escolher a estratégia mais vantajosa para si.

Todos os jogadores se preocupam com as ações que tomarão e com a decisão que seu(s) concorrente(s) irá(ão) tomar. Os jogos podem ser representados na forma estratégica ou normal, usualmente - para jogos simultâneos, ou na forma estendida - aplicada para jogos sequenciais. Nessas representações, você deve colocar as recompensas que cada jogador terá, de acordo com as estratégias escolhidas.

Lembre-se de que os jogos simultâneos são aqueles em que todos os jogadores fazem suas escolhas sem saber qual será a estratégia adotada por seus concorrentes, sendo suas escolhas escolhidas simultaneamente. Já os jogos sequenciais são aqueles em que um dos jogadores inicia o processo de tomada de decisão e os demais jogadores escolhem suas estratégias depois da decisão do primeiro, sendo que isso ocorre sucessivamente.

Você também viu que existem estratégias estritamente dominantes e estritamente dominadas e que, quando isso ocorre, fica mais fácil analisar o jogo, pois uma das estratégias prevalece sobre as demais de uma maneira bem simples de se visualizar. Quando não há estratégias dominantes, é necessário utilizar o equilíbrio de *Nash*, que permite analisar e selecionar a estratégia mais vantajosa para cada um dos jogadores.

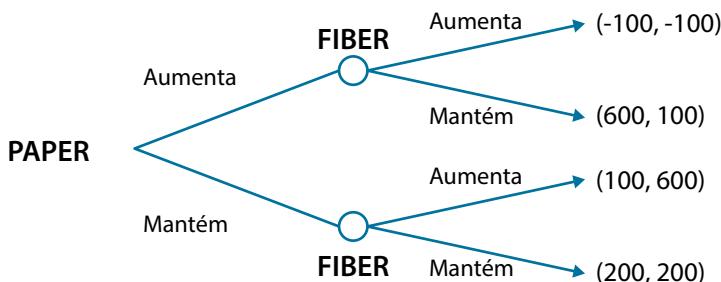
Outro ponto importante é a utilização da Teoria dos Jogos para formular estratégias, sendo possível utilizar a rede de valor ou a matriz de jogos estratégicos: com ela, uma empresa pode estabelecer se irá competir ou cooperar com seu(s) adversário(s).

Na próxima unidade, você aprenderá sobre a Teoria das Filas, outra ferramenta para análise de processos que permite avaliar o custo de um sistema representado por essa teoria.

ATIVIDADES



- Em uma situação de competição empresarial, cada empresa pode adotar uma estratégia que possa lhe favorecer. Assim, pode-se montar um jogo para analisar todas as estratégias possíveis. **Com base em seus conhecimentos aprendidos na unidade, aponte os elementos fundamentais que compõem um jogo.**
- Dependendo do tipo de relação existente em uma competição empresarial, você pode se deparar com jogos simultâneos ou sequenciais. **Descreva as características desses dois tipos de jogos.**
- A empresa de aviões *Air Force* pretende lançar um modelo de caça militar para competir com um modelo já existente da *Space Force*. Então, ela deve escolher entre lançar o modelo e não lançar o modelo novo. Já a *Space Force* poderá manter o preço de suas aeronaves ou reduzir o preço para diminuir o impacto da competição. Se a *Air Force* lançar o modelo novo e a *Space Force* mantiver o preço, o lucro da *Air Force* será de 3 bilhões de reais, e o da *Space Force* será de 1 bilhão de reais. Se a *Air Force* lançar o modelo novo e a *Space Force* reduzir o preço de seus aviões, o lucro de ambas será de 2 bilhões de reais. Caso a *Air Force* opte por não lançar o modelo, e a *Space Force* reduzir o preço de seus aviões, o lucro da *Air Force* será de 1 bilhão de reais e da *Space Force* de 2 bilhões de reais. E na última situação, se a *Air Force* não lançar o modelo novo e a *Space Force* não reduzir o preço de seus aviões, o lucro da *Air Force* será de 1 bilhão de reais e o da *Space Force* de 3 bilhões de reais. **Elabore o modelo desse jogo simultâneo na forma estratégica e selecione a melhor opção para a *Air Force*. Com base em sua escolha, aponte qual deve ser a estratégia escolhida pela *Space Force*.**
- Duas empresas estão em uma concorrência de mercado produzindo caixas *Tetra Pack* para laticínios. A empresa *Paper* está analisando uma possibilidade de ampliação de sua capacidade produtiva, e a empresa *Fiber* deve decidir se também aumenta ou mantém a sua produção atual. A decisão da *Fiber* só será tomada quando a *Paper* decidir qual caminho tomará. Na Figura 4 é apresentada a forma estendida desse jogo sequencial.



Representação estendida do jogo sequencial da atividade 4

Determine qual a melhor estratégia para as duas empresas.

ATIVIDADES



5. O seguinte trabalho, apresentado na Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Administração (ANPAD), em 2005 (seção 3Es2005, código 3Es090, p. 1-15), trata de uma disputa comercial entre a canadense Bombardier e a brasileira Embraer. **Leia os excertos do artigo e analise o quadro com as recompensas de cada uma para a venda de jatos para a Polônia.**

"A canadense Bombardier ocupa atualmente o status de principal concorrente da Embraer no mercado de produção de jatos regionais, além de ocupar o terceiro lugar entre as maiores empresas de aviões civis no mundo e o primeiro lugar em termos de fabricação de trens [...]. A Embraer (Empresa Brasileira de Aeronáutica) ocupa, no âmbito internacional o quarto lugar na produção de aviões comerciais. Nacionalmente a Embraer ocupou o sétimo lugar em 2002 entre as empresas não financeiras, segundo a pesquisa da edição especial da revista Conjuntura Econômica da Fundação Getúlio Vargas [...].

É nítida a intenção estratégica de ambas as empresas de adentrar o mercado europeu na produção de jatos regionais. Um caso recente, acontecido no final de 2002, foi à competição entre ambas pela preferência no fornecimento de 21 jatos para a empresa polonesa PLL LOT (Polskie Linie Lotnicze, LOT), em uma operação que chegaria a US\$ 600 milhões [...]. Teoricamente, somente uma das empresas poderá fornecer os 21 jatos para a LOT. Porém, nada impede que um acordo seja proposto, levando em conta a estratégia das duas empresas, para ganhar o contrato sobre referência. Os pay-offs (resultados) possíveis na competição entre a Embraer e a Bombardier são ilustrados (em US\$ milhões), na matriz de ganhos do jogo a seguir: (Carvalho e Wlailton, 2005, p. 9):

Tabela 7 - Vendas de jato para a empresa polonesa PLL LOT

Embraer	Bombardier	
	Não coopera	Coopera
Não coopera	200, 200	600, 0
Coopera	0, 600	300, 300

Fonte: o autor.

Conforme descrito na Tabela 7, temos os pay-offs, representando a remuneração das empresas em US\$ milhões, cujo resultado depende da interação entre as estratégias adotadas por cada empresa [...].

Analise a Tabela 7 com os pay-offs de cada empresa e encontre o equilíbrio de Nash.

MATERIAL COMPLEMENTAR



FILME

Uma mente brilhante (2002)

Sinopse: o personagem John Nash (Russell Crowe) é um gênio da matemática que, aos 21 anos, formulou um teorema que provou sua genialidade e o tornou aclamado no meio onde atuava. Mas, aos poucos, o belo e arrogante Nash se transforma em um sofrido e atormentado homem, que chega até mesmo a ser diagnosticado como esquizofrênico pelos médicos que o tratam. Porém, após anos de luta para se recuperar, ele consegue retornar à sociedade e acaba sendo premiado com o Nobel.





No artigo, os autores desenvolveram um modelo para estratégias de produção sob incertezas por meio de conceitos de Teoria dos Conjuntos Fuzzy e o Jogo de Barganha de *Nash*, aplicados ao setor de energia. Leia o excerto do artigo e, caso tenha interesse, você pode encontrar a referência completa na seção de Referências ao final da Unidade IV. As referências apresentadas durante o texto encontram-se no artigo original.

A área de energia no País vem crescendo em importância, incentivando as empresas prestadoras de serviços e fabricantes de produtos a investir na melhoria de seu portfólio de produtos (Oliveira, Paiva, Lima, Balestrassi, & Mendes, 2011).

Para Cook e Seiford (2009) e Ferreira e Gomes (2009), a medida de eficiência é um assunto de interesse para as organizações produtivas, que vêm buscando padrões mais elevados de produtividade e qualidade dos seus produtos e serviços. Charnes, Cooper e Rhodes (1978) desenvolveram um método conhecido como Análise por Envoltória de Dados (Data Envelopment Analysis – DEA), que permite, entre outras funcionalidades, comparar entidades similares, denominadas Unidades Tomadoras de Decisão (Decision Making Units – DMU), que utilizam os mesmos recursos (inputs ou entradas) e oferecem resultados (outputs ou saídas) comparáveis.

Desse modo, a DEA tem por finalidade avaliar a eficiência das DMUs. Essa avaliação se torna possível por meio da identificação de uma fronteira de eficiência com as melhores relações output/input (Cooper, Sieford, & Tone, 2007), onde se localizarão as DMUs consideradas eficientes (com taxa de output/input igual a 1 ou 100%). Para Kao e Lin (2012), avaliar a eficiência é algo importante para as organizações, visando, assim, identificar as operações que são ineficientes, auxiliando na tomada de decisão vinculada à redução das entradas e aumentos das saídas.

Santos, Marins e Salomon (2011) propuseram um modelo da DEA que utiliza os conceitos do Jogo da Barganha de Nash (Nash, 1950) para desenvolver um processo de negociação entre as DMUs, visando atingir melhores níveis na relação (negociação). Esses autores realizaram um estudo na área de saúde, com foco na projeção de inputs e outputs na fronteira de eficiência, buscando identificar oportunidades de melhoria, por meio do estabelecimento de medidas-alvo para os inputs (redução de insumos) e outputs (aumento de volume de produção).

O Jogo da Barganha de Nash para dois jogadores (Nash, 1953) considera um vetor de *pay-offs* que representam os pagamentos ou as recompensas para cada jogador advindos da escolha de estratégias de ação por ambos os participantes do jogo. Nesse contexto, há um conjunto finito de estratégias cooperativas para ambos os jogadores, e um ponto chamado de Ponto de Desacordo (Breakdown Point ou Disagreement Point), que é um limitante inferior para o conjunto de estratégias cooperativas interessantes para cada jogador (Santos et al., 2011).

Segundo Du, Liang, Chen, Cook e Zhu (2011), no Jogo da Barganha o propósito é que cada jogador, supostamente sem nenhum tipo de empatia entre si (ou de justiça ou de equidade), mas com alto grau de racionalidade, partindo de uma recompensa já garantida,



da (valor associado ao ponto de desacordo), tentaria negociar ou barganhar estratégias cooperativas de modo a encontrar uma situação melhor do que aquela antes de chegar ao acordo.

Wen, Qin e Kang (2011) comentam que, nos modelos clássicos da DEA, assume-se que os valores das entradas e saídas são estimados de maneira exata, ou seja, não há incertezas sobre esses valores de entrada e saída. Contudo, em situações reais, a ocorrência da incerteza é bastante comum, devido principalmente a fatores econômicos, como nível de renda, taxa de juros, taxa de desemprego, entre outros.

Lin e Okudan (2009) aplicaram um modelo DEA-CCR combinado com a Teoria da Utilidade, visando determinar a eficiência de um mix de produção. Contudo, esses autores não avaliaram a incerteza. Nesse sentido, deve-se destacar que várias pesquisas disponíveis na literatura científica têm proposto a combinação da Teoria dos Conjuntos Fuzzy com os modelos da DEA, visando, assim, tornar os cálculos das eficiências relativas das DMUs mais confiáveis e aderentes à realidade do mundo dos negócios (Cooper, Park, & Yu, 1999; Cooper, Park, & Yu, 2001a; Cooper, Park, & Yu, 2001b; Entani, Maeda, & Tanaka, 2002; Garcia, Melo, & Schirru, 2009; Guo & Tanaka, 2001; Hatami-Marbini, Emrouznejad, & Tavana, 2011; Kao & Lin, 2012; Kao & Liu, 2000; Lertworasirikul, Fang, Joines, & Nuttle, 2003; Wen, Qin, & Kang, 2011).

Um problema importante para as empresas em geral são a definição e o acompanhamento da eficiência do seu portfólio de produtos colocados no mercado. Para apoiar os decisores nessa difícil tarefa, propõe-se uma nova abordagem para o modelo DEA-GAME de Santos et al. (2011), incorporando a incerteza por meio da Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Para modelar os problemas de eficiência, é preciso definir as DMUs, que, no caso deste estudo, são o portfólio de produtos. Há dois tipos de parâmetros de saída (outputs), Total Produzido e Faturamento ([R\$]), e três parâmetros de entrada (inputs), Número de Pedidos Pendentes, Frequência de Ocorrência de Atrasos na Entrega dos Pedidos ([%]) e Custos de Matéria-Prima ([R\$]).

Uma das contribuições desta pesquisa é a incorporação de conceitos da Teoria dos Jogos e da Teoria dos Conjuntos Fuzzy para identificar oportunidades de melhor alocação de inputs e níveis a serem praticados de outputs diante da ocorrência de incertezas.

Fonte: Silva et al. (2015, p. 79).

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, E. L. **Introdução à Pesquisa Operacional – Métodos e Modelos para Análise de decisões.** Rio de Janeiro, LTC, 2015.
- BLAINEY, G. **Uma breve história do mundo.** Curitiba, Fundamento, 2015.
- CARVALHO, E., WLAILTON, C. **Cooperar ou Não Cooperar: A Disputa entre a Embraer e a Bombardier na Venda de Jatos Regionais.** Rio de Janeiro, Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração, 2005.
- COSTA, E. A. **Gestão Estratégica. Da empresa que temos para a empresa que queremos.** São Paulo, Saraiva, 2007.
- FIANI, R. **Teoria dos Jogos.** Rio de Janeiro, Elsevier, 2015.
- FUDENBERG, D.; TIROLE, J. **Game Theory.** Massachusetts, The MIT Press, 1991.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional.** Porto Alegre: McGraw-Hill, 2013.
- SILVA, et al. Um modelo Fuzzy-DEA-Game para estratégias de produção sob incerteza. **Revista de administração de empresas.** São Paulo, v. 55, n.1. 78-94, 2015.



GABARITO

- 1) Os principais elementos utilizados para representar um jogo são os próprios jogadores (às vezes chamados de agentes), que devem tomar decisões e, por esse motivo, agem racionalmente na escolha de uma estratégia que vise a melhor recompensa (também chamada de pay-off).
- 2) Os jogos simultâneos são os que ocorrem quando os jogadores tomam decisões ao mesmo tempo sem saber quais serão as decisões tomadas por seus concorrentes. Os jogos sequenciais ocorrem quando um dos jogadores deve tomar a decisão primeiro e os demais escolhem a estratégia com base na decisão tomada pelo jogador anterior.
- 3) A representação estratégica para esse jogo é apresentada a seguir:

Air Force	Space Force	
	Reduz o preço	Mantém o preço
Lança o modelo	2,2	3,1
Não lança o modelo	1,2	1,3

A melhor opção para a Air Force é “lançar o modelo”, pois seu lucro será maior de qualquer maneira em relação a “não lançar o modelo”. Com base nessas perspectivas, a Space Force deve optar por “reduzir o preço” de suas aeronaves para diminuir o prejuízo.

- 4) Considerando que a Paper tomar a decisão primeiro é mais vantajoso para aumento de sua capacidade produtiva, e conhecendo a decisão da Paper, é mais conveniente para a Fiber manter sua produção para que não tenha prejuízo.
- 5) Ao aplicar o equilíbrio de Nash para os dados do problema, a matriz de ganhos ficaria da seguinte forma:

Embraer	Bombardier	
	Não coopera	Coopera
Não coopera	(l) 200, 200 (c)	(l) 600, 0
Coopera	0, 600 (c)	300, 300

Portanto, observa-se que o equilíbrio de Nash ocorre quando ambas as empresas decidem não cooperar.



INTRODUÇÃO À TEORIA DAS FILAS

UNIDADE

V

Objetivos de Aprendizagem

- Conhecer as origens e aplicações da Teoria das Filas.
- Identificar os modelos de filas mais utilizados.
- Resolver problemas em Teoria das Filas.
- Aplicar a Teoria das Filas para redução do custo total.

Plano de Estudo

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- Breves conceitos estatísticos
- Características dos sistemas de filas
- Modelo de filas: sistema de um canal, uma fila e com população infinita – Mm/1/∞/FIFO
- Minimização do custo total do sistema de filas

INTRODUÇÃO

Olá, caro(a) aluno(a). Vamos iniciar a última unidade do nosso livro de Pesquisa Operacional. Nas unidades anteriores, você aprendeu a utilizar a Programação Linear para solucionar problemas que poderiam ser aplicados para determinar o melhor *mix* de produção, a melhor opção de investimento ou a melhor rota a ser seguida, sempre com o objetivo de economizar recursos, aumentar seus lucros ou diminuir custos.

Para resolver problemas de Programação Linear, você aprendeu a utilizar o Método *Simplex* na forma tabular (manual), e o *Solver do Excel*.

Na unidade anterior, você aprendeu outra ferramenta muito importante na Pesquisa Operacional: a Teoria dos Jogos. Com ela, você percebeu que pode tomar decisões com base em qual seria a melhor escolha para seus concorrentes. Dessa forma, você consegue escolher a melhor opção para si ou para a sua empresa, aumentando os ganhos.

Nesta unidade, tenho o prazer de apresentar a Teoria das Filas, que é outra ferramenta da Pesquisa Operacional que permite a avaliação de um sistema de produção, como por exemplo, ao encontrar seus pontos fracos em relação ao atendimento e à execução do processo. Com a teoria, você pode analisar e determinar a melhor opção para otimizar seu sistema de filas.

Um dos grandes objetivos é auxiliar na redução do custo total de um sistema. Você verá que, tendo por base técnicas estatísticas, é possível efetuar diversos cálculos de maneira simples que o ajudarão a entender o tempo que um cliente (pode ser uma peça ou uma pessoa), espera para ser atendido (ou processado). Com isso, é possível definir se há necessidade de expansão do sistema ou se ele tem capacidade para um aumento da produção.

Espero que você goste dessa unidade, pois nos deparamos com sistemas que apresentam filas em nosso próprio dia-a-dia, sendo, portanto, algo próximo das nossas vidas.



BREVES CONCEITOS ESTATÍSTICOS

Antes de falarmos da Teoria das Filas propriamente dita, vamos analisar alguns conceitos estatísticos que fundamentam essa teoria. Trouxe para você esta breve explicação para que tenha em mente que todas as equações utilizadas nesta unidade têm um fundamento estatístico bem embasado, que nos permitirá aplicá-las de forma simples e eficiente.

As filas se caracterizam, de maneira bem simples, em processos de atendimento de clientes que chegam e saem do posto de atendimento de maneira aleatória, ou seja, não apresentam uma regularidade quanto ao tempo de chegada e de partida. Porém, para que o problema seja modelado e resolvido de maneira mais simples, aplica-se uma distribuição de probabilidade de atendimento e para o tempo entre os atendimentos (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

Nessa distribuição, supõe-se que a quantidade de clientes que são atendidos pelo posto de atendimento é uniforme, e trabalha-se com uma média de valores de elementos que chegam para ser atendidos e que deixam o sistema de filas após o atendimento. É importante ter esse conhecimento para entender que esse processo de modelagem para a Teoria das Filas também é uma aproximação do sistema real confiável e útil para a resolução dos problemas.

A distribuição utilizada em Teoria das Filas é a exponencial, que considera a probabilidade de ocorrência de uma determinada quantidade de clientes que chegam para atendimento, são atendidos e deixam o sistema de filas. Essa função é apresentada na equação a seguir:

$$f_T(t) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Essa distribuição em função do tempo permite admitir que os tempos reais de atendimento sejam muito próximos dos tempos de atendimento esperados pelo modelo. Tal função de probabilidade, quando aplicada aos problemas de Teoria das Filas, permite associar o comportamento de atendimento a uma distribuição de Poisson, que é útil quando se tem um Processo de Poisson. Com essa distribuição, é possível utilizar o modelo da teoria de maneira que o processo de chegada de clientes e atendimento em um sistema com filas seja independente um do outro, havendo uma média que possa representar esses valores. A distribuição de Poisson apresenta apenas um parâmetro, que é considerado a média de ocorrência do evento analisado (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

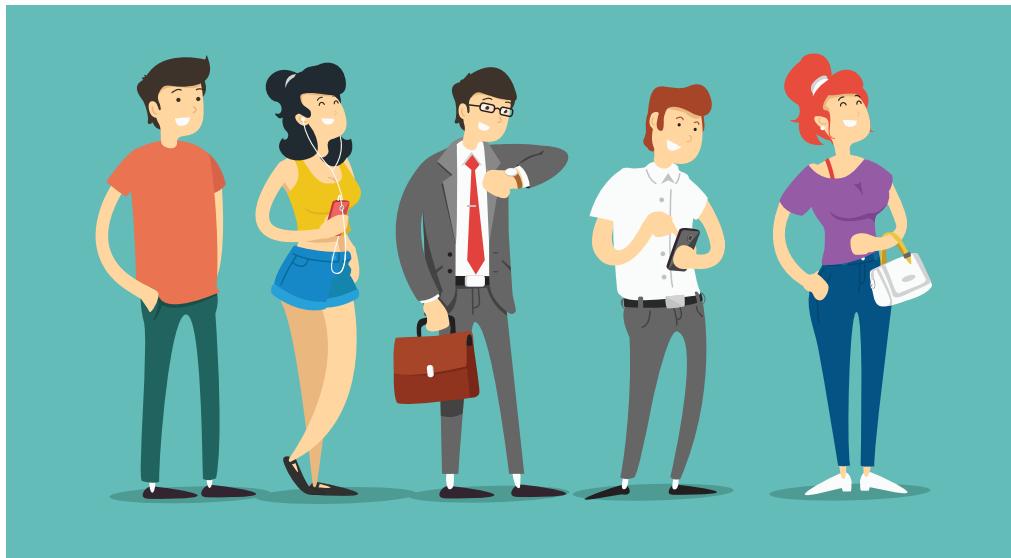


SAIBA MAIS

A distribuição de Poisson foi descoberta por Siméon-Denis Poisson, um engenheiro e matemático francês que teve como professores Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon Laplace e Jean Baptiste Fourier.

Fonte: Universidade Federal de Campina Grande ([2017], on-line)¹.

Por esse motivo, você vai trabalhar nas equações de Teoria das Filas com a taxa média de chegada de clientes na fila e com a taxa média de atendimento de clientes no sistema de filas.



CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS DE FILAS

Depois de uma sucinta revisão sobre funções de distribuição, iremos nos embrenhar na Teoria das Filas propriamente dita, iniciando com seu histórico e sua importância, além de vermos ainda os componentes de um sistema de filas que permitem caracterizar nossos problemas. Me acompanhe!

DEFINIÇÕES E HISTÓRICO

Em primeiro lugar, vamos conceituar o que é uma fila. Intuitivamente, todos sabemos descrever uma fila, já que ela nada mais é do que um processo em que uma pessoa ou objeto precisa esperar para ser atendido. Nenhuma fila é amigável, e o processo de espera pode trazer aborrecimentos, além de ser uma perda de tempo. No entanto, as filas são inevitáveis, mas podemos estudá-las para efetuar melhorias. Esse estudo se dá por meio da Teoria das Filas.

Tal teoria é uma modelagem analítica de um sistema ou processo em que ocorre espera, com o objetivo de determinar algumas quantidades, que são chamadas de medidas de desempenho. Tais medidas podem representar a produtividade ou a operacionalidade do processo em estudo.

Algumas medidas que podem ser determinadas são: o número de clientes em espera na fila, o tempo médio de atendimento do posto de atendimento ou o tempo ocioso dos prestadores de serviço. As medidas de desempenho do sistema permitem tomar decisões que incluem manter um sistema operando como está ou ampliá-lo, além de permitir o dimensionamento de infraestrutura, recursos humanos, financeiros, equipamentos e instalações, com a intenção de melhorar o desempenho global do processo (FOGLIATTI; MATTOS, 2007).

Matematicamente, a teoria foi desenvolvida no início do século XX, precisamente em 1908, na Dinamarca, por A. K. Erlang, um matemático que estudou o congestionamento das linhas telefônicas de seu país. Erlang é considerado o pai da Teoria das Filas, pois seu trabalho foi desenvolvido várias décadas antes do surgimento dos conceitos mais modernos sobre o assunto (PRADO, 2014).

Após a Segunda Guerra Mundial, a Teoria das Filas passou a ser aplicada em diversas áreas, como economia, administração, logística e produção, com a publicação de diversos trabalhos sobre o tema.

IMPORTÂNCIA DA TEORIA DAS FILAS

Fogliatti e Mattos (2007) afirmam que, após a aplicação da teoria e obtenção das medidas de desempenho, há a necessidade de analisar os resultados sob dois focos diferentes: o do usuário e o da gerência. Segundo o ponto de vista do usuário, as medidas principais são o tamanho médio da fila, o tempo médio de espera na fila e o tempo médio de atendimento. Já para a gerência, interessa bastante o tempo médio de serviço e o tempo médio ocioso.

Todos os serviços oferecidos dependem da atividade humana e/ou de uma máquina, o que implica em custos operacionais e de manutenção, além de investimento, se for o caso. Por esse motivo, o correto dimensionamento do processo de atendimento deve levar em consideração esses custos, para que não seja prejudicial para o usuário nem para a gerência. Na Figura 1, são apresentadas curvas que esboçam a relação entre os custos para o usuário ($C_{usuário}$) e para a gerência ($C_{gerenciais}$). Veja:

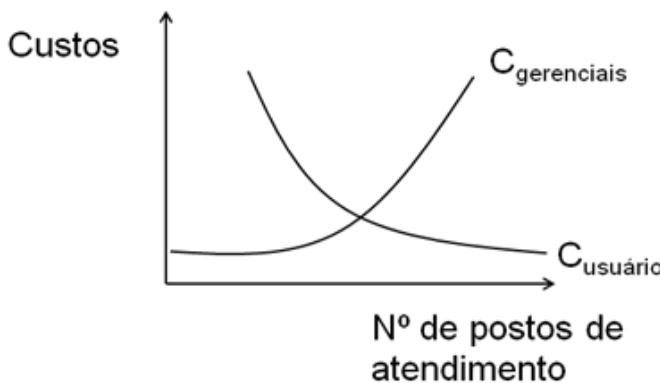


Figura 1 - Custos para o usuário e para a gerência em função do número de postos de atendimento
Fonte: adaptada de Fogliatti e Mattos (2007).

Observe que, para o usuário, quanto maior o número de postos de atendimento, menores serão seus custos, ou seja, menor será o tempo de espera para o atendimento. Porém, essa situação eleva muito os custos da gerência, pois quanto maior o número de postos de atendimento, maiores serão os gastos com manutenção e operação do sistema.

Por outro lado, a situação que resulta nos menores custos para a gerência, que seria a de operar com poucos postos de atendimento, elevaria muito os custos para o usuário.

Em outras palavras, havendo poucos postos de atendimento, os custos de operação e manutenção são baixos, mas o tempo de espera para ser atendido poderia ser insuportável para o usuário, fazendo-o trocar de prestador de serviço (é o que muitas vezes fazemos quando chegamos em um comércio e verificamos que o tempo de espera para ser atendido ou pagar a mercadoria demoraria muito, o que nos faz desistir daquele serviço e procurar outro lugar).

O custo total do sistema de filas poderia ser representado por uma equação, a exemplo da apresentada a seguir:

$$C_T = a \cdot C_G + b \cdot C_U$$

Há, no entanto, um ponto de equilíbrio, que fornece uma quantidade razoável de postos de atendimento, que não resultam em um custo tão elevado para a gerência nem para o usuário. E é justamente esse ponto que a Teoria das Filas ajuda as

empresas a encontrar. A minimização da função custo total, representada pela equação anterior, pode fornecer a melhor quantidade de postos de atendimento, conforme apresentado na Figura 2:

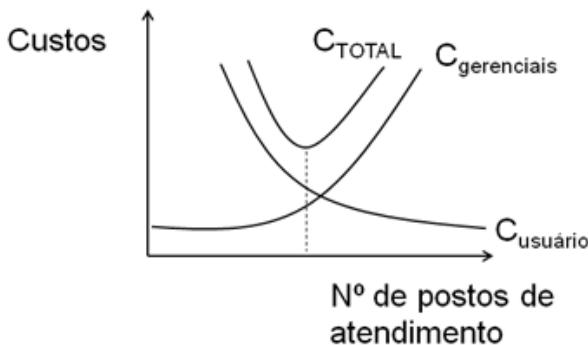


Figura 2 - Função custo total e seu ponto de equilíbrio

Fonte: adaptada de Fogliatti e Mattos (2007).

ELEMENTOS DE UM SISTEMA DE FILAS

Para caracterizar um sistema de fila, você precisa identificar o cliente e o servidor. O cliente é aquele que chega a um sistema para ser atendido, e o servidor é aquele que prestará o atendimento, que pode ser feito pelo posto de atendimento. Se o posto de atendimento estiver ocupado, o cliente deve esperar em uma fila até que chegue sua vez de ser atendido (observe a Figura 3). Há um tempo de espera na fila, um tempo de atendimento e, após o processo, o cliente deixa o sistema, dando lugar para outro (TAHA, 2008).

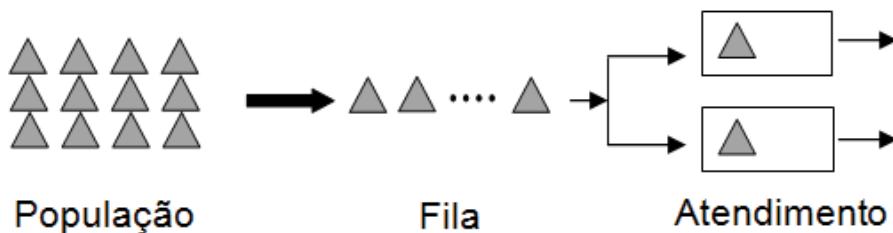


Figura 3 - Estrutura de um modelo de filas
Fonte: adaptada de Andrade (2015).

Os sistemas de filas podem ser subdivididos em quatro categorias. Assim, podemos ter fila única e um servidor, quando há apenas uma fila e um posto de atendimento. Já o sistema de fila única e múltiplos servidores em paralelo ocorre quando há apenas uma fila, mas com dois ou mais postos de atendimento. Outro sistema é o de múltiplas filas e múltiplos servidores em paralelo, quando há mais de uma fila e mais de um posto de atendimento.

E, por último, o sistema de fila única e múltiplos servidores em série, quando há apenas uma fila e mais de um servidor, mas em sequência e não em paralelo. As Figuras 4 a 7 apresentam esses tipos de sistemas de filas. Veja:

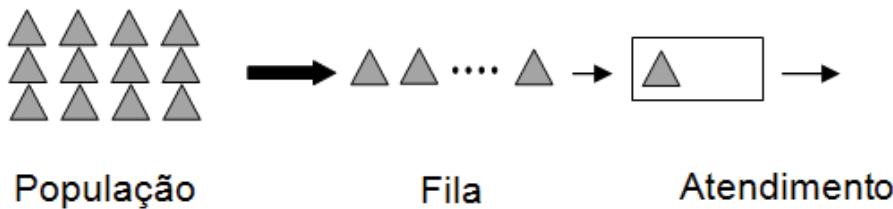


Figura 4 - Sistema de filas com uma fila e um servidor
Fonte: adaptada de Andrade (2015).



Figura 5 - Sistema de filas com uma fila e múltiplos servidores em paralelo
Fonte: adaptada de Andrade (2015).



Figura 6 - Sistema de filas com múltiplas filas e múltiplos servidores em paralelo
Fonte: adaptada de Andrade (2015).

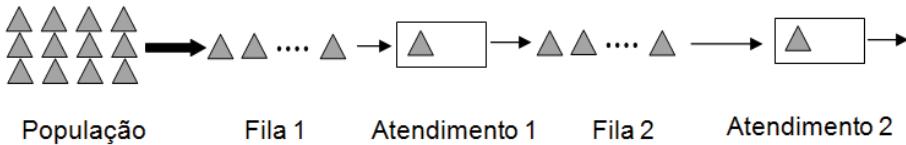


Figura 7 - Sistema de filas com fila única e múltiplos servidores em série

Fonte: adaptada de Andrade (2015).

Vamos caracterizar agora cada componente do sistema de filas.

Cliente

O cliente é proveniente de uma população e, caso essa população seja muito numerosa (infinita), a chegada de um cliente na fila não afeta a taxa de chegada dos demais clientes. Portanto, são independentes (esse é o conceito adotado ao considerarmos população infinita, ∞ , para resolver os problemas de filas de nossa disciplina). Se a população for pequena, a quantidade de clientes na fila interfere na taxa de chegada, pois, se todos estiverem na fila, não há mais ninguém para chegar (PRADO, 2014).

Processo de chegada

O comportamento de chegada dos clientes é que define esse tipo de processo. Se houver regularidade, com intervalos de tempo bem definidos e igualmente espaçados, temos um processo determinístico, em que se conhece exatamente o tempo de chegada de cada cliente, o que acontece apenas em processos automatizados com eficiência.

Quando não há um intervalo de tempo igualmente espaçado, temos um processo estocástico, ou seja, probabilístico, onde valem as distribuições de probabilidade, conforme mencionado no início da unidade. Se você tiver, por exemplo, a chegada de 10 automóveis por minuto ou de 1 automóvel a cada 6 segundos em uma praça de pedágio, você tem um valor médio, pois isso não quer dizer que necessariamente chegará 1 automóvel a cada 6 segundos. O número 10 representa a taxa média de chegada de veículos por minuto, e o número 6 representa o intervalo médio entre as chegadas (PRADO, 2014, FOGLIATTI E MATTOS, 2007).

Normalmente, representamos a taxa média de chegada pela letra λ , e o intervalo médio de chegada pelas iniciais IC. Para esse exemplo, então, teríamos:

$$\lambda = 10 \text{ veículos por minuto}$$

$$\text{IC} = 6 \text{ segundos}$$

Processo de atendimento

O processo de atendimento é caracterizado de maneira semelhante ao processo de chegada. Nesta parte do sistema, considera-se o comportamento do fluxo de usuários atendidos (PRADO, 2014, FOGLIATTI E MATTOS, 2007). Considerando que, no pedágio, cada cabine pode atender cinco veículos por minuto, ou que gaste 12 segundos para atender um veículo, dizemos que cinco é a taxa média de atendimento e que 12 é o tempo médio de atendimento. A letra grega μ é utilizada para representar a taxa média, e as iniciais TA para representar o tempo médio. Portanto, para esse exemplo, teríamos:

$$\mu = 5 \text{ veículos por minuto}$$

$$\text{TA} = 12 \text{ segundos}$$

Canais ou postos de atendimento (servidores)

Os locais físicos onde ocorrem os atendimentos aos clientes são chamados de postos de atendimento. A quantidade de postos podem variar de acordo com a demanda, ou seja, se aumentar a quantidade de clientes no sistema de filas e o tempo médio de espera na fila aumentar muito, pode-se acrescentar novos postos de atendimento para manter o sistema operando com qualidade. Mas lembre-se que isso não deve gerar um custo muito elevado para a gerência.

Capacidade do sistema

A capacidade do sistema é definida pelo número máximo de usuários que o sistema comporta, incluindo a quantidade que pode permanecer na fila e no próprio sistema de atendimento. Se a capacidade for ilimitada, nenhum usuário é rejeitado (mandado embora). No entanto, se o espaço físico de atendimento for limitado

e estiver completamente lotado, novos usuários são rejeitados e não conseguem entrar no sistema de atendimento até que alguém saia.

Disciplina de atendimento

Fogliatti e Mattos (2007) apresentam alguns critérios que a gerência pode adotar para o atendimento aos clientes, definindo qual será a ordem de atendimento assim que um servidor estiver desocupado. As quatro disciplinas mais utilizadas são:

- *FIFO (first in – first out)*: ou seja, o primeiro que entra é o primeiro que sai. Nesta disciplina, o atendimento aos usuários é feito por ordem de chegada. Quem chegou primeiro é atendido primeiro. É a disciplina mais utilizada na Teoria das Filas.
- *LIFO (last in – first out)*: o último que chega é o primeiro que sai. Essa disciplina é contrária à anterior, pois, no caso, quem chega por último é atendido primeiro. Esse tipo de regra de atendimento é comum para estoques verticais ou horizontais, já que, muitas vezes, o último elemento a chegar é o que está disponível para ser retirado do estoque.
- *PRI (priority service)*: o atendimento por prioridade obedece às regras estabelecidas pela gerência. Em um hospital, por exemplo, os pacientes em estado mais grave têm prioridade de atendimento, independentemente da ordem que ocupem em uma fila.
- *SIRO: (service in random order)*: é o tipo de disciplina que faz o atendimento de forma randômica (aleatória), independentemente da ordem de chegada, sem estabelecer uma prioridade. É o caso de consórcios, em que o atendimento geralmente é feito por sorteio.

NOTAÇÃO DE UM SISTEMA DE FILAS

Segundo Fogliatti e Mattos (2007), a notação utilizada para representar um sistema com fila é a proposta por Kendal, em 1953, sendo representada por A/B/C/D/E. Assim, A e B representam as distribuições dos tempos de chegada e atendimento, podendo receber as letras D para distribuições determinísticas,

M para distribuição exponencial (Markoviana), E_k para distribuição Erlang do tipo k (variável aleatória) e G para distribuição geral. As letras C e D representam o número de postos de atendimento em paralelo, e a capacidade física do sistema, respectivamente. A letra E é definida pela disciplina de atendimento utilizada para o sistema analisado.

Na próxima seção, estudaremos o modelo em que a distribuição de tempos de chegada e de atendimento apresenta distribuição exponencial, com um canal de atendimento e população infinita, seguindo uma disciplina de atendimento FIFO. Pela notação, escrevemos MM/1/ ∞ /FIFO.



REFLITA

O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano. Mas o que seria o oceano se não infinitas gotas?

(Isaac Newton)

MODELO DE FILAS: SISTEMA DE UM CANAL, UMA FILA E COM POPULAÇÃO INFINITA – MM/1/ ∞ /FIFO

Todos os modelos de filas utilizam algumas variáveis randômicas fundamentais que podem ser analisadas. Para o modelo MM/1/ ∞ /FIFO, podemos destacar as seguintes (PRADO, 2014).

Variáveis relacionadas ao sistema:

- TS = Tempo médio de permanência do cliente no sistema.
- NS = Número médio de clientes no sistema.

Variáveis referentes ao processo de chegada no sistema:

- λ = Ritmo (taxa) média de chegada de clientes ao sistema.
- IC = Intervalo médio entre chegadas de clientes.
- Por definição: $IC = 1/\lambda$.



Variáveis referentes à fila:

- TF = Tempo médio de permanência dos clientes na fila.
- NF = Número médio de clientes na fila.

Variáveis referentes ao processo de atendimento:

- TA = Tempo médio de atendimento ou serviço.
- c = Capacidade de atendimento ou quantidade de postos de atendimento.
- NA = Número médio de clientes que estão sendo atendidos.
- μ = Ritmo (taxa) média de atendimento de clientes no sistema.
- Por definição: $TA = 1/\mu$.

Algumas relações básicas entre essas variáveis podem ser:

$$NS = NF + NA$$

$$TS = TF + TA$$

Ou seja, o tempo médio de permanência dos clientes no sistema (TS) é igual à soma entre o tempo médio dos clientes na fila (TF), com o tempo médio do atendimento (TA). Da mesma maneira, o número médio de clientes no sistema (NS) é igual à soma entre o número médio de clientes na fila (NF), e no atendimento (NA).

Um parâmetro interessante de se calcular em um sistema com fila é a taxa de utilização do sistema (ρ), que é definida pela razão entre a taxa média de chegada de clientes (λ) e pela taxa média de atendimento de clientes (μ), sendo, portanto, definida por:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Esse parâmetro representa a fração média do tempo em que cada posto de atendimento está ocupado. Supondo que cheguem ao sistema 30 clientes por hora, e que a taxa média de atendimento seja de 75 clientes por hora, a taxa de ocupação (utilização) do sistema seria de $30/75 = 0,4$. Portanto, para esse exemplo, 40% do tempo de cada servidor é destinado ao atendimento dos clientes, e os outros 60% do tempo são ociosos.

A taxa de ociosidade do sistema pode então ser representada pela equação:

$$P(0) = 1 - \rho$$

Ou ainda:

$$P(0) = \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu} \right)$$

Quando ρ assume o valor 1, então as taxas médias de chegada e de atendimento são iguais. Logo, o sistema está operando no limite de sua capacidade. Caso esse valor seja maior do que 1, então o sistema não suporta a quantidade de clientes que chega, o que exige a necessidade de modificação com o aumento do número de postos de atendimento, por exemplo.

As variáveis randômicas λ e μ são a base do problema e, conhecendo-as, é possível calcular todas as demais variáveis. Na Figura 8, são apresentadas as equações para o cálculo das outras variáveis da Teoria das Filas. Observe:

Nome	Descrição	Fórmula
NF	Nº médio de clientes na fila	$NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$
NS	nº médio de clientes no sistema	$NS = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$
TF	Tempo médio dos clientes na fila	$TF = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$
TS	Tempo médio dos clientes no sistema	$TS = \frac{1}{\mu-\lambda}$
P _n	Probabilidade de haver n clientes no sistema	$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)$

Figura 8 - Equações das principais variáveis randômicas

Fonte: o autor.

Outras relações interessantes entre as variáveis randômicas são:

$$NF = \lambda \cdot TF$$

$$NS = \lambda \cdot TS$$

$$TF = TS - \frac{1}{\mu}$$

Vejamos uma aplicação no Exemplo 1.

Exemplo 1: em uma mineradora, os caminhões carregados de minério descarregam no britador. Sabendo que chegam ao britador cerca de 4 caminhões por hora, e que o índice de atendimento do britador é de 10 minutos por caminhão, determine as variáveis randômicas do processo, e analise a taxa de ocupação do sistema.

Para encontrar as variáveis randômicas para o exemplo e analisar o problema, precisamos das taxas médias de chegada (λ), e de atendimento (μ). Sabemos pelo enunciado que chegam 4 caminhões/h em média. Portanto, esse é o valor de λ . Quanto ao atendimento, conhecemos apenas o tempo de atendimento (TA), que é de 10 min/caminhão. Lembre-se de que a taxa média de atendimento é dada por $\mu=1/TA$, e que λ é dada em horas. Então, TA também precisa estar em horas. Considerando

que 10 min/caminhão é equivalente a aproximadamente 0,166h/caminhão, ao tomar o inverso desse valor, encontraremos a taxa média de atendimento. Veja:

$$\mu = \frac{1}{TA} = \frac{1}{0,166} \approx 6 \text{ caminhões/h}$$

Portanto, a taxa média é de 6 caminhões/h. Agora que conhecemos λ e μ , basta calcularmos as demais variáveis. Para o sistema:

$$NS = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{4}{6 - 4} = 2 \text{ caminhões}$$

$$TS = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{6 - 4} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ h}$$

Para a fila:

$$NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{4^2}{6(6 - 4)} \approx 1,33 \text{ caminhões}$$

$$TF = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{4}{6(6 - 4)} \approx 0,33 \text{ h} \approx 20 \text{ min}$$

A taxa de ocupação pode ser definida então por:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{6} = 0,666 \approx 66,6\%$$

Esses valores permitem determinar que no sistema estão 2 caminhões, sendo que 1,33 estão na fila aguardando o descarregamento. O tempo médio dos caminhões no sistema é de 0,5h ou 30min, dos quais 20min são na fila e 10min são para atendimento. A taxa de ocupação do sistema ficou em 66,6%, com ociosidade em torno de 33,4% do tempo.



MINIMIZAÇÃO DO CUSTO TOTAL DO SISTEMA DE FILAS

Conforme mencionado anteriormente, a Teoria das Filas pode ser utilizada para reduzir o custo total de um sistema em que se identifica a presença de filas. Para Andrade (2015), o custo total de um sistema (CT) é formado por dois tipos de custos: o do cliente (CE), que é o custo por permanecer no sistema aguardando o atendimento, e o de atendimento (CA), que representa o custo que a empresa tem para fornecer o serviço, englobando salários, aluguéis, equipamentos e manutenção, entre outros.

A empresa considera o custo total como sendo a soma entre os custos do cliente e do atendimento, pois seria racional considerar que o custo do cliente é de responsabilidade daquele que presta o serviço, e que pode influenciar nos rendimentos da empresa, já que um cliente que tenha um custo alto para usufruir do serviço da empresa pode optar por trocar de prestador.

Quando se eleva a taxa de atendimento ao cliente (μ), o custo do cliente é reduzido, o que favorece a permanência do cliente com a empresa. Por outro lado, o custo de atendimento pode ser elevado, uma vez que o aumento do valor de μ muitas vezes implica em aumentar a quantidade de postos de atendimento, o que encarece o processo.

O principal objetivo da aplicação da Teoria das Filas para redução de custo total é justamente o de encontrar a taxa de atendimento ótima (μ), que permita reduzir o custo total sem exceder o de atendimento. Para o equacionamento dessa seção, considere a seguinte nomenclatura:

CT = Custo total do sistema.

CE = Custo médio de permanência do cliente no sistema por período.

CA = Custo médio de atendimento por período.

CE_{unit} = Custo unitário de permanência (por cliente) por período.

CA_{unit} = Custo unitário de atendimento (por cliente).

Dessa forma, o custo total pode ser representado por:

$$CT = CE + CA$$

O custo total de permanência do cliente no sistema pode ser calculado pelo custo unitário multiplicado pelo número de clientes no sistema. Observe:

$$CE = CE_{unit} \cdot NS$$

Substituindo NS encontramos:

$$CE = CE_{unit} \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

O custo total de atendimento é calculado pelo custo unitário de atendimento multiplicado pela taxa de atendimento ao cliente. Veja:

$$CA = CA_{unit} \cdot \mu$$

Substituindo CE e CA, o custo total CT será definido por:

$$CT = CE_{unit} \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda} + CA_{unit} \cdot \mu$$

A taxa de serviço ótimo ou de atendimento ao cliente ótima é dada por:

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda \cdot CE_{unit}}{CA_{unit}}}$$

Dessa maneira, o valor de μ^* representa a taxa de serviço que resulta no menor custo total do sistema.

Vamos resolver o Exemplo 2 para ilustrar essa aplicação da Teoria das Filas.

Exemplo 2: uma loja de informática recebe, por dia, uma média de 3 pedidos para formatação de notebook seguindo uma distribuição de Poisson. Os técnicos da loja têm condições de formatar 4 notebooks por dia, também seguindo uma distribuição de Poisson. A loja estima que cada dia de espera para a formatação de um notebook representa um custo de R\$35,00. Cada conserto custa em média R\$65,00 de mão-de-obra. Determine o custo total do sistema e a taxa de serviço ótima.

Do enunciado, tiramos as informações essenciais de que a taxa média de chegada de pedidos é de 3 notebooks por dia (λ), a taxa média de atendimento da loja é de 4 notebooks por dia (μ), o custo unitário de espera do cliente (CE_{unit}) é de R\$35,00/notebook por dia, e o custo de atendimento unitário (CA_{unit}) é de R\$65,00/notebook. Com esses dados, podemos calcular o custo total do sistema. Observe:

$$CT = CE_{unit} \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda} + CA_{unit} \cdot \mu$$

$$CT = 35 \cdot \frac{3}{4 - 3} + 65 \cdot 4 = 105 + 260 = 365$$

O custo total desse sistema é de R\$365,00 por dia. A taxa de serviço ótima pode ser determinada por:

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda \cdot CE_{unit}}{CA_{unit}}}$$

$$\mu^* = 3 + \sqrt{\frac{3 \cdot 35}{65}} = 3 + 1,27 = 4,27$$

Pelos cálculos, para que se consiga o menor custo total, a loja deveria ter condições de realizar o atendimento referente a 4,27 notebooks por dia. Podemos verificar em quanto ficaria o custo total, substituindo μ^* na equação de determinação do custo total. Observe:

$$CT_{min} = CE_{unit} \cdot \frac{\lambda}{\mu^* - \lambda} + CA_{unit} \cdot \mu^*$$

$$CT_{min} = 35 \cdot \frac{3}{4,27 - 3} + 65 \cdot 4,27 = 82,68 + 277,55 = 360,23$$

Com a taxa de atendimento ótima, o custo total mínimo seria de R\$360,23 por dia.

Caro(a) aluno(a). Depois de passar por todas as seções da unidade V, você tem plenas condições de utilizar a Teoria das Filas para analisar um sistema que apresenta o estudo. Você também viu como utilizar a teoria para determinar o custo mínimo de operação de um sistema com filas, podendo escolher a melhor opção (de menor custo), dentre várias possíveis. Desejo bons estudos para você.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta última unidade, você aprendeu a utilizar a Teoria das Filas como uma das ferramentas da Pesquisa Operacional, que é muito útil na tomada de decisões envolvendo sistemas que apresentam filas.

Um problema referente à teoria é caracterizado por apresentar os clientes ou usuários que entram no sistema para serem atendidos. Normalmente, esse sistema já tem um usuário no posto de atendimento, então o cliente que chega deve esperar, formando uma fila. A maneira como os clientes serão atendidos é definida pela gerência da empresa e, depois que o cliente é atendido, ele se retira do sistema.

Dentre muitos sistemas de filas que existem, você aprendeu a trabalhar com aquele em que a chegada de clientes e saída obedece a uma distribuição exponencial (Markoviana), com uma fila, e de população infinita, considerando a disciplina de atendimento *FIFO*, na qual o primeiro que entra é o primeiro que sai.

Você aprendeu ainda a identificar e calcular algumas variáveis randômicas da Teoria das Filas, como as taxas médias de chegada de clientes e de atendimento no sistema, representados pelas letras λ e μ , respectivamente. O tempo médio de permanência no sistema (TS) e de permanência na fila (TF) também pode ser encontrado, bem como o número de clientes do sistema (NS) e nas filas (NF).

Uma das variáveis importantes que também pode ser calculada é a taxa de ocupação do sistema (ρ): com ela, você pode identificar se há tempo ocioso em seu sistema, e analisar a necessidade de ampliação, sempre com base no custo da gerência e do usuário.

Outra aplicação da Teoria das Filas é determinar o custo total do sistema, considerando os custos unitários de atendimento e de espera do cliente, sendo possível também encontrar a taxa de serviço ótima que resultaria em um custo total mínimo.

Todos as análises realizadas por meio desse estudo são muito úteis para avaliar qualquer situação, seja de prestação de serviços ou produção industrial. Basta encontrar os elementos que formam a estrutura de um sistema com filas.

ATIVIDADES



1. A Teoria das Filas é uma das técnicas aplicadas em Pesquisa Operacional com o intuito de analisar um sistema para determinar as melhores condições de operação, visando reduzir os custos operacionais. **Descreva quais são os elementos que constituem um sistema de filas e caracterize cada um deles.**
2. Um supermercado recebe fornecedores diariamente para repor o estoque de produtos vendidos. Ele possui apenas uma doca de descarregamento, e a gerência tem planos de ampliar a estrutura física do mercado, bem como a quantidade de produtos vendidos. Estima-se que haverá necessidade de aumentar em 20% a quantidade de caminhões que chegam para descarregamento. Considerando que atualmente chegam em média 15 caminhões por dia, e que a capacidade atual de atendimento é de 20 caminhões por dia, **determine as medidas de desempenho do sistema, e verifique se haverá necessidade de construir mais uma doca de descarregamento, sendo que a gerência considera uma taxa de ocupação de até 95% suficiente.**
3. Um sistema de carregamento de navios opera com uma taxa de ociosidade de 11,2% em uma semana. Sabendo que esse sistema atende cerca de 9 navios por semana, **determine a taxa média de chegada de navios em uma semana, o tempo de espera de cada navio na fila, e o tempo que cada um demora no sistema.**
4. Uma oficina de manutenção de aeronaves consegue reparar em média 10 aeronaves por mês, sendo que é comum receberem 7 aeronaves por mês para reparos. O gerente operacional da empresa sabe que o custo de reparo de cada aeronave é de R\$35000,00 em média, e que o custo de cada aeronave na fila é estimado em R\$55000,00 por mês. **Estime o custo total desse sistema de atendimento e determine qual seria a taxa média de serviço ótima para que a oficina tenha o menor custo possível.**
5. Uma empresa pretende adquirir máquinas de solda para seu processo de fabricação. O gerente de produção sabe que chegam em média 250 peças para soldagem por semana, e que o custo de espera de cada peça para ser soldada é de R\$850,00 por semana. Há duas opções de máquinas de soldas: a máquina A apresenta uma taxa média de soldagem de 300 peças por semana com um custo de operação de R\$310,00 por peça. Já a máquina B apresenta uma taxa média de soldagem de 153 peças por semana operando a um custo de R\$152,00 por peça. O gerente quer decidir se adquire uma unidade da máquina A ou duas unidades da máquina B. **Qual das duas máquinas oferece o menor custo total?**



Este artigo utiliza a Teoria das Filas para melhorar o atendimento aos clientes em uma agência bancária situada dentro de um fórum. Leia o excerto de, se houver interesse, você pode encontrar a referência completa na seção de Referências ao final da Unidade V. As referências apresentadas durante o texto encontram-se no artigo original.

No atual mundo globalizado, “cabem aos bancos três importantes papéis na sociedade: 1) proteger e rentabilizar os investimentos dos indivíduos e das empresas; 2) financiar o consumo e o investimento; 3) prover serviços de pagamento e de recebimento” (BARBOSA, 2010).

De acordo com o Banco Central ([2017], on-line)², os bancos comerciais têm como “objetivo principal proporcionar suprimento de recursos necessários para financiar, em curto e em médio prazo, o comércio, a indústria, as empresas prestadoras de serviços, as pessoas físicas e terceiros em geral”.

Em meio à importância dos bancos, a busca pela eficiência dos processos neste segmento tornou-se importante (FREITAS E MORAIS, 2012). Para tanto, faz-se necessária uma análise entre os principais agentes do segmento: as agências bancárias e seus clientes. Partindo de uma abordagem mais ampla, segundo Negretto (2007, p. 7), a “competitividade do mercado e a acessibilidade à informação têm provocado também mudanças no comportamento dos consumidores que se tornam cada vez mais exigentes e menos fiéis às empresas”.

Diante deste cenário, “os bancos precisam melhorar sua capacidade de manter clientes e descobrir novas maneiras de tornar a carteira mais lucrativa ao longo do período de relacionamento com cada um deles” (OLIVEIRA, 2008, p. 32). Conforme Negretto (2007) e Oliveira (2008), as organizações se depararam com uma situação instável diante de um mercado exigente e mutável, portanto, o relacionamento com clientes e a retenção dos mesmos se tornaram fundamentais.

Atualmente, os bancos procuram descobrir novos clientes e novos meios de conceder crédito ou de estabelecer vínculos com clientes e outros bancos. Procuram obter recursos em condições mais favoráveis, ampliando seu lucro, e, para tanto, o aprimoramento do serviço é essencial (FREITAS E MORAIS, 2012). O fato de ser muito concentrado, devido às economias de escala e de escopo existentes, acentua ainda mais a questão da competitividade do setor bancário (PAULA et al., 2013).

A criação diária de novos produtos é uma manifestação dessa busca por competitividade, que tem como objetivo principal garantir a satisfação dos clientes, o que acarreta em fidelização dos mesmos e assegura a lucratividade da empresa (JUNIOR; BORNIA, 2011). Segundo o SEBRAE (2012), a competitividade pressupõe produtos e/ou serviços de qualidade, além de bons preços.



A Teoria das Filas está diretamente relacionada com a realidade de uma agência bancária, tendo em vista as freqüentes filas neste ambiente. As filas que os clientes enfrentam para utilizar um serviço bancário refletem a falta de foco no cliente (ARAUJO et al., 2003; SHEIKH et al., 2013; XIAO e ZHANG, 2010). Sabbadini et al. (2006), Mulato e Oliveira (2006), Araújo et al. (2004), Ferreira et al. (2007), Fernandes e Marins (2012) e Pergher et al. (2014) destacam a necessidade de gerenciamento das filas.

Segundo Dávalos (2012, p. 4) a teoria parte do seguinte pressuposto “a formação de filas excede a capacidade de fornecer determinado serviço” e envolve o estudo matemático utilizando ferramentas de tratamento estatístico ou estocástico. Verifica-se que o estudo de serviços bancários, por meio da Teoria das Filas, pode proporcionar uma ferramenta poderosa para gestão dos processos em busca da prestação de serviços de excelência gerando satisfação, fidelidade e, consequentemente, mais negócios e menos custos para o banco.

O material necessário para a aplicação da Teoria das Filas – horários de chegada, de atendimento e de saída dos clientes das filas judicial, negocial e caixa do banco – foi obtido a partir da coleta de dados do sistema bancário da agência analisada. A partir desse material, aplicou-se a modelagem para analisar os resultados.

Em relação à distribuição de chegadas dos clientes, verificou-se que a distribuição exponencial, ou de Poisson, ilustra com eficácia essas distribuições das filas: judicial, negocial e caixa. Porém, na análise da distribuição do tempo de serviço, apenas a prestação de serviço judicial pode ser modelada pela distribuição de Poisson, podendo prever o tempo de atendimento bancário. As demais filas analisadas não podem ser modeladas pela distribuição de Poisson.

As medidas de desempenho do atendimento judicial, em relação ao tempo de espera na fila, apresentaram uma grande diferença dentro do período analisado, indicando uma sazonalidade dos atendimentos, com uma demanda maior nos últimos dois meses do ano, quando comparada à demanda dos dois primeiros meses do ano seguinte. O tempo médio de permanência no sistema também foi maior nos meses de novembro e dezembro. Esses dados explicam a sobrecarga dos funcionários, apontada na análise referente à utilização e ao tempo ocioso dos servidores.

Essas informações são fundamentais, pois permitem à gerência planejar antecipadamente a forma como os atendimentos serão feitos. Evitando tanto o excesso de trabalho para um grupo de funcionários como uma grande ociosidade de parte de seus colaboradores, a partir da redistribuição dos atendentes conforme a análise dos comportamentos das filas.

Mediante ao exposto, conclui-se que a aplicação da Teoria das Filas no setor bancário é viável e pode auxiliar no gerenciamento das agências, melhorando as condições de trabalho e a satisfação dos clientes, com menos filas e um equilíbrio maior. Proporcionando, de fato, vantagens competitivas para a agência.

Fonte: Lima et al. (2016, p. 210-241).

MATERIAL COMPLEMENTAR



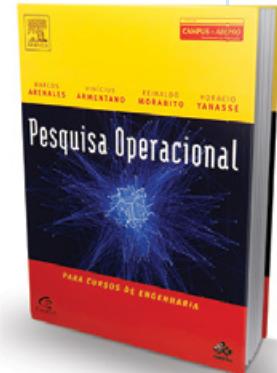
LIVRO

Pesquisa Operacional

Marcus Arenales, Vinícius Armentano, Reinaldo Morabito e Horacio Yanasse

Editora: Elsevier

Sinopse: pesquisa operacional é a aplicação de métodos científicos a problemas complexos para auxiliar no processo de tomada de decisões, tais como projetar, planejar e operar sistemas em situações que requerem alocações eficientes de recursos escassos. Neste livro, são introduzidos modelos matemáticos determinísticos e probabilísticos e vários dos principais métodos de solução e algoritmos utilizados na pesquisa operacional para melhor entendimento, análise e solução de problemas de decisão. Os requisitos para leitura deste livro são cursos introdutórios de cálculo integral e diferencial, álgebra linear e teoria de probabilidade. A habilidade de elaborar modelos matemáticos é fundamental e, por este, motivo o livro apresenta uma grande variedade de modelos de problemas nas áreas de engenharias e administração, entre outras, com o intuito de mostrar aos estudantes a versatilidade e a aplicabilidade de modelos de pesquisa operacional. Procurou-se destacar a importância da pesquisa operacional na engenharia de produção, em particular no gerenciamento de sistemas de produção e logística, envolvendo problemas de planejamento, programação e controle da produção, problemas de distribuição de produtos, problemas de localização de facilidades e instalações, entre outros. O livro está organizado em duas partes: I - abordam-se modelos determinísticos de programação matemática; II - abordam-se modelos determinísticos que consideram incertezas, a exemplo de modelos de programação dinâmica estocástica e teoria de filas.



REFERÊNCIAS

ANDRADE, E. L. **Introdução à Pesquisa Operacional:** Métodos e Modelos para Análise de Decisões. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

FOGLIATTI, M. C.; MATTOS, N. M. C. **Teoria das Filas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2007.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional.** Porto Alegre: McGraw-Hill, 2013.

LIMA, V.C., et al. **Aplicação da teoria das filas em serviços bancários.** Produção Online, Florianópolis, v. 16, n. 1, p. 210-241, 2016.

MARINS, F. A. S. **Introdução à Pesquisa Operacional.** São Paulo: Cultura Acadêmica, 2011.

PRADO, D. **Teoria das Filas e da Simulação:** Série Pesquisa Operacional, v. 2. Minas Gerais, Falconi consultores de resultado, 2014.

TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional.** São Paulo: Pearson, 2008.

REFERÊNCIAS ON-LINE

¹ Em: <<http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/SimeonDe.html>>. Acesso em: 09 mai. 2017.

² Em: <<https://www.bcb.gov.br/pre/composicao/bc.asp>>. Acesso em: 09 mai. 2017.



GABARITO

- 1) Os elementos que formam um sistema de filas são: os clientes ou usuários, os postos de atendimento ou servidores, as filas, os processos de chegada e atendimento, a capacidade do sistema e a disciplina de atendimento. O cliente é aquele que se dirige ao sistema para receber um atendimento, e o posto de atendimento é aquele que prestará o serviço ao cliente. A fila é formada caso todos os postos de atendimento estejam ocupados quando o cliente chega ao sistema. Os processos de chegada e atendimento descrevem a maneira como os clientes chegam e são atendidos, respectivamente, sendo, portanto, as frequências de chegada e atendimento. A capacidade do sistema indica o máximo de clientes que um sistema suporta, e a disciplina de atendimento se refere às regras utilizadas pela gerência para determinar a sequência de atendimento dos clientes.
- 2) As medidas de desempenho são NF, TF, NS, TS e ρ . Para encontrá-las, devemos determinar os valores da taxa média de chegada de caminhões (λ), e da taxa média de atendimento aos caminhões (μ). O enunciado nos fornece que $\lambda = 15$ caminhões/dia, e $\mu=20$ caminhões/dia. Portanto, as medidas de desempenho são:

$$NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{15^2}{20 \cdot (20 - 15)} = \frac{225}{100} = 2,25 \text{ caminhões na fila}$$

$$TF = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{15}{20 \cdot (20 - 15)} = \frac{15}{100} = 0,15 \text{ dia ou } 3,6 \text{ h de espera na fila}$$

$$NS = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)} = \frac{15}{20 - 15} = 3 \text{ caminhões no sistema}$$

$$TS = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{20 - 15} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ dia ou } 4,8 \text{ h no sistema}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{20} = 0,75 = 75,0\%$$

A taxa de ocupação atual do sistema é de 75%. Com a ampliação, havendo aumento de 20% da quantidade de caminhões que chegam, então a nova taxa média de chegada de caminhões ao sistema será de 18 caminhões por dia, (20% de 15 é 3, então somando teremos 18 caminhões). Mantendo-se a taxa média de atendimento em 20 caminhões por dia, podemos calcular o novo valor da taxa de ocupação:

$$\rho = \frac{18}{20} = 0,9 = 90,0\%$$

Como a gerência aceita uma taxa de ocupação de até 95% do sistema, a ampliação não necessitará da construção de uma nova doca de descarregamento (mesmo que o tempo de espera na fila aumente).



GABARITO

- 3) Para analisar todo processo de filas, é necessário encontrar as taxas médias de chegada de clientes (λ), e de atendimento (μ). Você conhece a taxa média de atendimento, que é de 9 navios por semana. Outra informação disponível é a da taxa de ociosidade de 11,2%, o que nos dá a taxa de ocupação de $100 - 11,2 = 88,8\%$. Pela equação da taxa de ocupação, é possível encontrar a taxa média de atendimento:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow 0,888 = \frac{\lambda}{9} \rightarrow \lambda = 7,992 \approx 8 \text{ navios/semana}$$

Portanto, a taxa média de chegada de navios é de 8 navios por semana. Para encontrar o tempo de médio de navios na fila (TF), e no sistema de carregamento (TS), basta utilizar as equações:

$$TF = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{8}{9 \cdot (9 - 8)} = \frac{8}{9} = 0,888 \text{ semana ou } 6,2 \text{ dias de espera na fila}$$

$$TS = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{9 - 8} = 1 \text{ semana no sistema}$$

Nessa situação, cada navio passa aproximadamente 1 semana (7 dias), no sistema de carregamento, sendo 6,2 dias na fila para ser carregado.

- 4) Para determinar o custo total de operação do sistema com filas, podemos utilizar a equação apropriada:

$$CT = CE_{unit} \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda} + CA_{unit} \cdot \mu$$

A taxa de atendimento aos clientes (μ), é de 10 aeronaves por mês, e a taxa de chegada de aeronaves (λ), é de 7 por mês. O custo unitário de espera de cada aeronave (CEunit), é de R\$55000,00 por mês, e o custo de atendimento (CAunit) de cada aeronave é de R\$35000,00, em média. Veja:

$$CT = 55000 \cdot \frac{7}{10 - 7} + 35000 \cdot 10 = 128333,33 + 350000 = 478333,33$$

O custo total do sistema é de R\$478.333,33 por mês.

A taxa de serviço ótima é definida por:

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda \cdot CE_{unit}}{CA_{unit}}} = 7 + \sqrt{\frac{7 \cdot 55000}{35000}} = 7 + 3,32 = 10,32 \text{ aeronaves/mês}$$

A taxa de serviço ótima é de 10,32 aeronaves por mês.



GABARITO

- 5) Para resolver esse problema, discrimine cada variável do problema:

Dados do processo:

$$\lambda = 250 \text{ peças/semana}$$

$$CE_{unit} = R\$850,00/\text{peça/ semana}$$

Dados da máquina A:

$$\mu_A = 300 \text{ peças/semana}$$

$$CA_{unit_A} = R\$310/\text{peça}$$

Dados da máquina B:

$$\mu_B = 153 \text{ peças/semana}$$

$$CA_{unit_B} = R\$152/\text{peça}$$

Como são necessárias duas máquinas B para suprir a necessidade do processo, podemos então escrever para as duas máquinas juntas:

$$\mu_{BB} = 306 \text{ peças/semana}$$

$$CA_{unit_BB} = R\$304,00/\text{peça}$$

- 6) Para determinar qual máquina oferece o menor custo total, basta calculá-lo para cada caso:

$$CT_A = CE_{unit} \cdot \frac{\lambda}{\mu_A - \lambda} + CA_{unit_A} \cdot \mu_A$$

$$CT_A = 850 \cdot \frac{250}{300 - 250} + 310 \cdot 300 = 4250 + 93000 = 97250$$

$$CT_{BB} = CE_{unit} \cdot \frac{\lambda}{\mu_{BB} - \lambda} + CA_{unit_BB} \cdot \mu_{BB}$$

$$CT_{BB} = 850 \cdot \frac{250}{306 - 250} + 304 \cdot 306 = 3794,64 + 93024 = 96818,64$$

Observa-se, então, que o custo total para a utilização do equipamento A é de R\$97.250,00, e para os dois equipamentos B, juntos, é de R\$96.818,64. Há, portanto, menor custo no uso de dois equipamentos B.



CONCLUSÃO

Muito bem, chegou a hora de nos despedirmos. Espero que você tenha gostado da disciplina de Pesquisa Operacional, que é uma ferramenta para auxiliar nos processos de tomada de decisão. Neste livro, escrito especialmente para você, tentei colocar de forma concisa os aspectos mais importantes sobre o tema.

Você aprendeu a utilizar a Programação Linear com o Método Simplex, para resolver problemas de maximização de lucro ou minimização de custo, com o desenvolvimento de um modelo matemático que represente da melhor forma possível o seu problema real. Espero que tenha percebido como a Programação Linear nos ajuda a absorver diversas informações depois da otimização do resultado. Com os relatórios de resposta do Excel®, você consegue identificar a influência que cada variável tem na resposta do seu problema.

Na sequência, você aprendeu a utilizar a Teoria dos Jogos para representar problemas de competição em que dois ou mais agentes (jogadores) buscam a melhor estratégia, ou seja, aquela que vai lhe oferecer o maior retorno. Você ainda teve a chance de visualizar que existem jogos simultâneos, isto é, os jogadores tomam suas decisões praticamente ao mesmo tempo. Mas também temos os jogos sequenciais, em que um jogador escolhe uma estratégia primeiro e, depois, os demais decidem o que fazer.

Na Teoria das Filas, você encontrou outra ferramenta poderosa que permite analisar processos em que ocorre a formação de fila. Dois parâmetros são fundamentais para estudar um problema com essa teoria: a taxa média de chegada de clientes (λ), e a taxa média de atendimento desses clientes (μ). Você também aprendeu a utilizar a teoria para avaliar o custo total do sistema e a calculá-lo para analisar a melhor opção de escolha de um equipamento novo, bem como a viabilidade de se aumentar um posto de atendimento.

Se você gostou da disciplina, procure mais informações nas referências apresentadas ao final de cada unidade. Um grande abraço!

