TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Diplomarbeit

Der Satz von Ramsey für Paare und beweisbar rekursive Funktionen

Alexander Kreuzer

14. Januar 2009

betreut durch Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Aufgabenstellung

In dieser Diplomarbeit sollen die arithmetischen Konsequenzen von Beweisen, die den unendlichen Satz von Ramsey für Paare verwenden, untersucht werden. Dabei liegt der Schwerpunkt insbesondere auf der Frage, ob der Satz von Ramsey für Paare und 2 Farben die Existenz von nicht primitiv-rekursiven Funktionen beweist.

Wir zeigen dazu, dass die Elimination von monotonen Skolemfunktionen auf einen Großteil solcher Beweise angewendet werden kann. Damit wird gezeigt, dass in einem entsprechenden Kontext Instanzen des Satzes von Ramsey für Paare und 2 Farben nur primitiv-rekursive Funktionen erzeugen.

Zusätzlich untersuchen wir mit der Funktionalinterpretation das unendliche Schubfachprinzip, dessen Verallgemeinerung der Satz von Ramsey ist.

Der Satz von Ramsey

Der Satz von Ramsey, eine Verallgemeinerung des Schubfachprinzips, wurde 1930 vom Frank P. Ramsey bewiesen und bildet zusammen mit dem Satz von van der Waerden das Fundament der sogenannten Ramsey Theorie. Der ursprüngliche Satz von Ramsey besagt

Satz ((Unendlicher) Satz von Ramsey)**.** *Seien $k, n \geq 1$ und seien alle ungeordneten k-Tupel der natürlichen Zahlen mit n Farben gefärbt. Dann gibt es eine unendliche Teilmenge H von $\mathbb{N}$, so dass die k-Tupel mit Werten in H alle die gleichen Farben haben.*

Weit verbreitet – insbesondere in der Kombinatorik – ist auch die endliche Version des Satzes von Ramsey:

Satz (Endlicher Satz von Ramsey)**.** *Seien $k, n, l \geq 1$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$, so dass es für alle Färbungen der ungeordneten k-Tupel der Menge $\{0, \ldots, r-1\}$ eine Menge $H \subseteq \{0, \ldots, r-1\}$ gibt, bei der $|H| \geq l$ und bei der alle k-Tupel mit Werten in H die gleiche Farbe haben.*

Die endliche Version folgt aus der unendlichen. Sie ist aus rekursiontheoretischer Sicht trivial, da nach einer Lösung einfach gesucht werden kann. In der Praxis ist die Suche nach r sehr aufwendig. So konnte bisher z.B. noch kein genauer Wert für den Fall $k = n = 2$ und $l \geq 5$ angegeben werden.

Offensichtlich hat die unendliche Version dieses Satzes – wie das unendliche Schubfachprinzip – in der Regel keine rekursive (in den Parametern des Problems) Lösung.

Es gibt mengentheoretische Erweiterungen des Satzes von Ramsey, die aber in dieser Arbeit nicht betrachtet werden.

Status

Der Satz von Ramsey wird seit 1971 sowohl mit rekursionstheoretischen als auch modelltheoretischen Methoden auf seine beweis- und rekursionstheoretische Stärke hin untersucht, siehe [Spe71, Joc72, Hir87, SS95, CJS01, Sim99, HJKH$^+$08, HS07].

Bekannt ist, dass der Satz von Ramsey für 1-Tupel dem (unendlichen) Schubfachprinzip entspricht. Dieses ist äquivalent zum Π^0_1-Bounded-Collection-Principle und damit in Bezug auf die logische Stärke sehr gut untersucht (siehe [Hir87], Kapitel 2).

Der Satz vom Ramsey für Tripel (und größere Tupel) ist äquivalent zur arithmetischen Komprehension (über RCA_0) (siehe [Joc72] und auch [Sim99]).

Es ist bekannt, dass der Satz von Ramsey für Paare und beliebig viele Farben die Totalität der Ackermann-Funktion beweist und damit die Existenz von nicht primitiv-rekursiven Funktionen (siehe [Hir87]). Er impliziert aber nicht ACA_0 (siehe [CJS01]).

Für den Satz von Ramsey für Paare und eine feste Anzahl an Farben konnte die beweistheoretische Stärke noch nicht vollständig bestimmt werden, obwohl dazu in der letzten Zeit erhebliche Bemühungen unternommen wurden, siehe [SS95, CJS01, HJKH$^+$08, HS07].

Specker zeigte, dass schon berechenbare Instanzen des Satzes von Ramsey für Paare die Existenz von nicht rekursiven Funktionen bzw. Mengen beweisen ([Spe71]). Damit kann der Satz nicht in RCA_0 bewiesen werden.

Cholak, Jockusch und Slaman zeigten allerdings, dass es für jede berechenbare Färbung von Paaren eine low_2 Lösung gibt, d.h. eine unendliche homogene Menge A mit $A'' \leq_T 0''$ ([CJS01]). Auf diesem Resultat aufbauend zeigten sie in der gleichen Veröffentlichung, dass $\mathrm{RCA}_0 + \Sigma^0_2\text{-IA} + \mathrm{RT}^2_2$ für Π^1_1-Sätze über $\mathrm{RCA}_0 + \Sigma^0_2\text{-IA}$ konservativ ist.

Offen bleibt allerdings, ob der Satz die Existenz von nicht primitiv-rekursiven Funktionen beweist.

Weiterhin ist ungeklärt, ob der Satz von Ramsey für Paare das schwache Lemma von König impliziert.

Neuere Untersuchungen versuchen diese Fragen zu klären, indem sie den Satz von Ramsey für Paare in schwächere Prinzipien zerlegen, die einzeln auf ihrer Stärke hin untersucht werden (siehe [CJS01, HS07]).

Logische Stärke

In dieser Arbeit betrachten wir die arithmetische Stärke von (Folgen von) Instanzen des Satzes vom Ramsey für Paare.

Wir beschränken uns bewusst auf (Folgen von) Instanzen des Satzes von Ramsey. Damit werden zwar unsere Ergebnisse zur Klassifizierung im Sinne der Reverse Mathematics nur eingeschränkt verwendbar sein. Allerdings reichen (Folgen von) Instanzen für die Analyse von Beweisen aus der Mathematik, die auf diesem Satz beruhen, meist aus, da mehrfache, nicht parallele Anwendungen nicht häufig vorkommen. Zusätzlich kann ein logisches Prinzip durch mehrfache Anwendungen deutlich stärker werden; z.B. folgt durch mehrfache Anwendung von Π^0_1-Komprehension (mit Mengenparametern) auch das Schema der Π^0_∞-Komprehension.

Man kann nicht schließen, dass die Ergebnisse für Instanzen auch für allgemeine Anwendungen des Satzes vom Ramsey für Paare gelten.

In der Reverse Mathematics wird bei dem Satz von Ramsey für Paare nur zwischen der Version für 2 Farben und der für beliebig viele Farben unterschieden, da die Version für n Farben mit einem Farbenblindheitsargument äquivalent zu der für 2 Farben ist. Mit der Einschränkung auf Instanzen kann dieses Farbenblindheitsargument nicht mehr durchgeführt werden. Deshalb betrachten wir in dieser Arbeit den Satz von Ramsey für Paare und n Farben und nicht wie üblich nur für 2 Farben.

Arithmetische Stärke

Wir untersuchen, welchen Einfluss die Verwendung von Instanzen des Satzes von Ramsey in Beweisen arithmetisch monotoner Sätze hat. Insbesondere betrachten wir Sätze der Form

$$\forall f, n \, \exists m \, A_{qf}(f, n, m), \tag{$*$}$$

wobei A_{qf} quantorfrei ist und untersuchen, unter welchen Bedingungen die Existenz einer in f und n primitiv-rekursiven Funktion folgt, die m beschränkt.

Typische Beispiel für Sätze der Form $(*)$ sind Sätze über die Konvergenz monotoner Folgen, wie

$$\forall f, n \, \exists m \, \Phi(f, m) \leq_{\mathbb{R}} 2^{-n},$$

wobei $\lambda m.\Phi(f, m)$ monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert für jedes f.

Solche Sätze treten unter Anderem in der Fixpunkt-Theorie auf (siehe [Koh08]). Aber auch viele andere Aussagen aus der Mathematik können in dieser Form geschrieben werden.

Die Untersuchungen müssen in einem schwachen System stattfinden, das selbst *nicht* die Existenz primitiv-rekursiver Funktion beweist.

Elimination von Skolemfunktionen

Wir verwenden für diese Untersuchung die *Elimination von Skolemfunktionen für monotone Formeln*. Dies ist eine von U. Kohlenbach entwickelte Methode, um den Einfluss nicht-konstruktiver Prinzipien auf arithmetisch monotone Formeln genau zu bestimmen (siehe [Koh98b, Koh98c]).

Die Elimination von Skolemfunktionen besagt in dem speziellen hier verwendeten Fall: Beweise arithmetisch monotoner Formeln, die in einem schwachen System ($\mathrm{G}_\infty\mathrm{A}^\omega$, d.h. ein System, das keine Σ^0_1-Induktion und nicht den vollen primitiv-rekursiven Iterator enthält), mit dem schwachen Lemma von König und mit Instanzen von Π^0_1-Komprehension und Π^0_1-Auswahlaxiom formalisiert werden können, können transformiert werden in Beweise ohne diese nicht-konstruktiven Prinzipien aber mit Σ^0_1-Induktion (s. Abschnitt 1.3).

Wichtig ist, dass die nicht-konstruktiven Prinzipien nur parallel angewendet werden dürfen und die nicht primitiv-rekursiven Lösungen dieser Prinzipien nicht iteriert werden. Dies wird durch das Beschränken auf Instanzen erreicht. Das schwache Lemma von König kann aber in voller Allgemeinheit angewendet werden, da es nicht zum Wachstum der Funktionen beiträgt.

Im Fall des Satzes von Ramsey für Paare sind diese Einschränkungen (auch bei möglichen anderen Techniken) notwendig, denn mit voller Σ_1^0-Induktion folgt über EA^2 oder RCA_0^* und einer Instanz von Π_1^0-Komprehension schon der Satz von Ramsey für Paare und beliebig viele Farben, der die Totalität der Ackermannfunktion und damit einer nicht primitiv-rekursiv beschränkbaren Funktion beweist.

Wir zeigen, dass der Satz von Ramsey für Paare und eine feste Anzahl an Farben aus dem schwachen Lemma von König und Π_1^0-Komprehension instanzenweise folgt. Damit kann er auch bei der Elimination von Skolemfunktionen verwendet werden. Insbesondere existiert eine primitiv-rekursive Schranke für m bei Sätzen der Form $(*)$, die mit Instanzen des Satzes von Ramsey für Paare und n Farben bewiesen werden.

Vorgehen

Für die Analyse der Stärke des Satzes von Ramsey für Paare ist der ursprüngliche Beweis von Ramsey ungeeignet, da er sich nicht in einem genügend schwachem System formalisieren lässt.

Wir verwenden einen Beweis von Erdős und Rado, der ursprünglich genutzt wurde, um mengentheoretische Erweiterungen des Satzes zu beweisen. Dieser Beweis ist konstruktiver; z.B. lassen sich im Gegensatz zum Beweis von Ramsey leicht Schranken für r im endlichen Satz von Ramsey ablesen. (Diese Schranken sind jedoch im Vergleich zu den besten bekannten Schranken um Größenordnungen schlechter.) Der Beweis benutzt allerdings das Lemma von König.

Wir werden deshalb in Kapitel 3 zuerst das Lemma von König genauer analysieren und zeigen, unter welchen Umständen seine Anwendungen mit Π_1^0-Auswahlaxiom-Instanzen auf das *schwache* Lemma von König (WKL) zurückgeführt werden können.

Mit dieser Analyse wird in Kapitel 4 der Beweis des Satzes von Ramsey für eine Färbung c in einem schwachem System mit WKL und einer Instanz $\xi(c)$ von Π_1^0-Komprehension formalisiert.

Wir betrachten auch den Satz von Ramsey für Paare und transitive Färbungen. In diesem Fall kann der Satz auch in einer allgemeineren Anwendung eliminiert werden.

Funktionalinterpretation

Neben der Analyse mit Hilfe der Technik der Elimination von Skolemfunktionen untersuchen wir direkt die Lösungsterme der Funktionalinterpretation.

In Kapitel 2 zeigen wir mit Hilfe der Funktionalinterpretation des unendlichen Schubfachprinzips von Oliva [Oli06] und mit Hilfe der Ergebnissen von Parsons [Par70], dass feste Anwendungen des unendlichen Schubfachprinzips eliminiert werden können. Wir betrachten auch das Π^0_1-Bounded-Collection-Principle. Dieses Prinzip ist äquivalent zu dem unendlichen Schubfachprinzip. Wir lösen dessen Funktionalinterpretation und zeigen, dass analog feste Anwendungen dieses Prinzips eliminiert werden können.

Mit der Elimination von Skolemfunktionen können allgemeinere Anwendungen des Π^0_1-Bounded-Collection-Principles eliminiert werden. Allerdings hängt dies stark von den Eigenschaften des logischen Systems ($\mathrm{G}_\infty\mathrm{A}^\omega$) ab. Die Elimination mit der Funktionalinterpretation gilt dagegen im allgemeineren Kontext.

Es ist fraglich, ob es eine Lösung der Funktionalinterpretation gibt, die ähnlich gute Ergebnisse liefert wie die Elimination von Skolemfunktionen, da bei der Funktionalinterpretation die speziellen Eigenschaften des System erst auf die Lösungsterme, die in jedem System die Übersetzung lösen, angewendet werden.

Anschließend lösen wir aufbauend auf der Formalisierung des Erdős-Rado-Beweises die Funktionalinterpretation des Satzes von Ramsey für Paare. Diese erfordert zusätzlich die Anwendung der Bar-Rekursion von Spector [Spe62], wobei allerdings Bar-Rekursion vom kleinsten Typ $B_{0,1}$ ausreicht.

1 Grundlagen

1.1 Systeme

In diesem Abschnitt werden zunächst die Peano Arithmetik und die Heyting Arithmetik in allen endlichen Typen (E-PA$^\omega$, WE-PA$^\omega$, E-HA$^\omega$, WE-HA$^\omega$) und die Fragmente EA^2 und G$_n$A$^\omega$ eingeführt, die den Kalmár elementaren Funktionen bzw. der n-ten Stufe der Grzegorczyk Hierarchie entsprechen.

G$_n$A$^\omega$ enthält neben den für die Definition der Funktionen aus der Grzegorczyk Hierarchie notwendigen Axiomen alle wahren $\forall$-Sätze (über Zahlen, Funktionen und Funktionalen). Damit werden insbesondere Aussagen über Konservativität, die in Kapitel 2 und Kapitel 4 behandelt werden, stärker. Allerdings ist das Axiomsystem nicht mehr entscheidbar.

EA^2 dagegen enthält ausschließlich die Axiome, die für die Definition der Kalmár elementaren Funktionen notwendig sind. Außerdem enthält EA^2 ausschließlich Funktionale bis zum Grad 2.

Die Kalmár elementaren Funktionen entsprechen der dritten Stufe der Grzegorczyk Hierarchie. G$_3$A$^\omega$ ist damit, abgesehen von den $\forall$-Sätzen, eine Typerweiterung von EA^2. Insbesondere EA^2 $\subseteq$ G$_n$A$^\omega$ für $n \geq 3$. Siehe [Koh08, Koh96].

Definition 1.1 (Endliche Typen)**.** Die Menge der endlichen Typen $\mathbf{T}$ ist definiert als

$$0 \in \mathbf{T}, \quad \rho, \tau \in \mathbf{T} \Rightarrow \tau(\rho) \in \mathbf{T},$$

wobei 0 den Typ der natürlichen Zahlen bezeichnet und $\tau(\rho)$ den Typ der Funktionen von Objekten des Typs ρ zu Objekten des Typs τ.

Die Menge der reinen Typen $\mathbf{P} \subset \mathbf{T}$ ist definiert als

$$0 \in \mathbf{P}, \quad \rho \in \mathbf{P} \Rightarrow 0(\rho) \in \mathbf{P}.$$

Die reinen Typen werden oft mit natürlichen Zahlen bezeichnet:

$$n + 1 := 0(n).$$

Der Grad deg eines Typs ρ ist definiert als

$$\deg(0) := 0, \quad \deg(\tau(\rho)) := \max(\deg(\tau), \deg(\rho) + 1).$$

Definition 1.2 (Klassische und intuitionistische Prädikatenlogik in allen endlichen Typen, PL$^\omega$, IL$^\omega$)**.** Die Sprache der intuitionistischen Prädikatenlogik in allen endliche Typen $\mathcal{L}(\mathrm{IL}^\omega)$ besteht aus Variablen $x^\rho, y^\rho, \ldots$ für jeden Typ $\rho \in \mathbf{T}$, den entsprechenden

Quantoren $\forall x^\rho$, $\exists x^\rho$, den logischen Symbolen $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\perp$ mit den üblichen Bedeutungen, der Gleichheitsrelation $=_0$ zwischen Objekten vom Typ 0 und dem λ-Kombinatoren $\Pi^{\rho\tau\rho}_{\rho,\tau}$, $\Sigma^{\tau\delta(\rho\delta)(\tau\rho\delta)}_{\delta,\rho,\tau}$ für alle $\delta, \rho, \tau \in \mathbf{T}$.

Terme von Typ τ sind Konstanten und Variablen des Types τ und für alle Terme t des Types $\tau\rho$ und s von Typ ρ ist ts ein Term von Typ τ.

Gleichheit für höhere Typen ist definiert als

$$[s =_\rho t] :\equiv [\forall x_1^{\rho_1}, \ldots, x_n^{\rho_n}\, sx_1 \ldots x_k =_0 tx_1 \ldots x_k] \quad \text{für } \rho = 0\rho_k \ldots \rho_1.$$

IL^ω enthält die üblichen Axiome und Regeln der intuitionistischen Prädikatenlogik, die Gleichheitsaxiome für $=_0$, die charakterisierenden Axiome für Π und Σ

$$\Pi_{\rho,\tau} x^\rho y^\tau =_\rho x \qquad \Sigma_{\delta,\rho,\tau} x^{\rho\tau\delta} y^{\rho\delta} z^\delta =_\tau xz(yz)$$

und die quantorfreie Extensionalitätsregel

$$(\text{QF-ER})\colon \frac{A_0 \rightarrow s =_\rho t}{A_0 \rightarrow r[s] =_\tau r[t]}, \qquad \text{wobei } A_0 \text{ quantorfrei ist.}$$

PL^ω enthält zusätzlich das tertium-no-datur Schema

$$A \vee \neg A.$$

Bemerkung 1.3. Mit den logischen Kombinatoren Π, Σ lässt sich der λ-Term $\lambda x^\rho.t^\tau$ für jeden Term $t^\tau[x^\rho]$ definieren, so dass

$$\mathrm{IL}^\omega \vdash (\lambda x^\rho.t^\tau)s^\rho =_\tau t[s].$$

Die Erweiterung von IL^ω, PL^ω mit den Extensionalitätsaxiomen

$$(\mathrm{E}_\rho)\colon \forall x^\rho, y^\rho, z^{\tau\rho}\, (x =_\rho y \rightarrow zx =_\tau zy)$$

wird mit E-IL^ω, E-PL^ω bezeichnet.

Die IL^2 bzw. PL^2 bezeichnen die Einschränkung auf Zahl- und Funktionsvariablen (Variablen vom Grad < 2) und Ersetzung der λ-Kombinatoren Π und Σ durch die λ-Abstraktion vom Typ 0 als primitiven Term, d.h. es gibt für jeden Zahlterm t eine Funktion $\lambda \underline{x}^{\underline{0}}.t$ mit

$$(\lambda \underline{x}^{\underline{0}}.t)(\underline{s}) =_0 t[\underline{x}/\underline{s}].$$

Außerdem wird QF-ER durch die Gleichheitsaxiome für jeden Typ (mit Grad < 2) ersetzt. Die Gleichheitsaxiome und damit die volle Extensionalität würden schon aus QF-ER folgen, denn mit QF-ER gilt

$$\frac{x =_0 y \rightarrow x =_0 y}{x =_0 y \rightarrow z^1 x =_0 z^1 y}$$

und damit E_1. Analog folgen E_τ mit $deg(\tau) < 2$.

Definition 1.4 ((Schwach extensionale) Peano und Heyting Arithmetik in allen endlichen Typen (E-PA$^\omega$, WE-PA$^\omega$, E-HA$^\omega$, WE-HA$^\omega$))**.** Die (schwach extensionale) Peano Arithmetik in allen endlichen Typen ist die Erweiterung von E-PL$^\omega$ bzw. PL$^\omega$ mit der Nachfolgerfunktion S^1, den S-Axiomen

$$Sx =_0 Sy \to x =_0 y \qquad \neg(0 =_0 Sx),$$

den Rekursoren $R_\rho^{\rho(\rho 0 \rho)\rho 0}$ für alle $\rho \in \mathbf{T}$ mit den definierenden Axiomen

$$(\mathrm{R}_\rho)\colon \begin{cases} R_\rho 0 yz =_\rho y, \\ R_\rho (Sx) yz =_\rho z(Rxyz)x, \end{cases}$$

und dem Induktionsschema

$$(\mathrm{IA})\colon A(0) \wedge \forall n\, (A(n) \to A(Sn)) \to \forall n\, A(n).$$

Die (schwach extensionale) Heyting Arithmetik in allen endlichen Typen ist die entsprechende Erweiterung von E-IL$^\omega$ und IL$^\omega$. $\widehat{\text{E-PA}^\omega}\!\restriction$, $\widehat{\text{WE-PA}^\omega}\!\restriction$ bezeichnen die Einschränkung von E-PA$^\omega$ bzw. WE-PA$^\omega$ auf quantorfreie Induktion und den Rekursor R_0. Analog bezeichnen $\widehat{\text{E-HA}^\omega}\!\restriction$ und $\widehat{\text{WE-HA}^\omega}\!\restriction$ die entsprechenden Einschränkungen von E-HA$^\omega$ und WE-HA$^\omega$.

Die geschlossenen Terme von $\widehat{\text{E-PA}^\omega}\!\restriction$, eingeschränkt auf reine Typen, entsprechen Kleenes primitiv-rekursiven Funktionalen (Schemata S1–S8 [Kle59]), während die geschlossenen Terme von E-PA$^\omega$ den primitiv-rekursiven Funktionalen im Sinne von Gödel entsprechen. Die Terme von WE-PA$^\omega$, genauer das quantorfreie Fragment von WE-PA$^\omega$, wird auch als *System T* bezeichnet [Göd58, Hil26].

Bemerkung 1.5 ([Koh08, 9.12], [Koh98b, S. 380])*.* E-PL$^\omega$ erfüllt das Deduktionstheorem, d.h.

$$\text{E-PL}^\omega + A \vdash B \quad \text{gdw.} \quad \text{E-PL}^\omega \vdash A \to B$$

für geschlossenes A und beliebiges B.

Für PL$^\omega$ gilt das Deduktionstheorem, aufgrund von QF-ER, im Allgemeinen nicht.

1.1.1 Modelle von E-PA$^\omega$

Das Modell aller mengentheoretischen Funktionale $\mathcal{S}^\omega$ ist definiert als

$$\begin{cases} S_0 := \mathbb{N} \\ S_{\tau\rho} := \{\text{alle mengentheoretischen Funktionale } \phi\colon S_\rho \to S_\tau\} \\ \mathcal{S}^\omega := \langle S_\rho \rangle_{\rho \in \mathbf{T}}. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\mathcal{S}^\omega$ ein Modell von E-PA$^\omega$.

Ein weiteres Modell von E-PA$^\omega$ ist die Struktur aller stark majorisierbaren Funktionale $\mathcal{M}^\omega$ („hereditarily strongly majorizable set-theoretic functionals of finite types") von Bezem [Bez85], siehe auch [Koh08, 3.61, 3.69].

$\mathcal{M}^\omega$ erfüllt im Gegensatz zu $\mathcal{S}^\omega$ Spectors Bar-Rekursion. Mit Bar-Rekursion kann volle Komprehension (über Zahlen) in der Funktionalinterpretation behandelt werden, siehe Abschnitt 1.2.3.

1.1.2 Kalmár elementare Arithmetik

Definition 1.6 (Kalmár elementare Funktionen, $\mathcal{E}$)**.** Die *Kalmár elementaren Funktionen* $\mathcal{E}$ sind die kleinste Menge, die die initialen Funktionen

- 0,
- Nachfolger S,
- Projektionen von k Parametern auf die i-te Komponente I_i^k,
- Addition $+$,
- modifiziertes Minus $\dot{-}$,
- Multiplikation $\cdot$ und
- Exponentiation 2^x

enthält und die unter Komposition, beschränkter Suche μ_b und elementarer (beschränkter) Rekursion abgeschlossen ist.

Elementare Rekursion definiert aus den Funktionen g,h,k die Funktion f mit

$$\begin{aligned} f(0,\underline{m}) &:= g(\underline{m}) \\ f(n+1,\underline{m}) &:= \min(h(f(n,\underline{m}),n,\underline{m}),k(n,\underline{m})). \end{aligned}$$

Diese Definition entspricht der dritten Stufe der Grzegorczyk Hierarchie. Für die ursprüngliche Definition von Kalmár siehe [Kal43], für die Äquivalenz siehe [Clo99].

Definition 1.7 (Kalmár elementare Arithmetik mit Funktionsvariablen, EA^2)**.** EA^2 bezeichnet die Erweiterung von PL^2 um die Nachfolgerfunktion S^1, die S-Axiomen

$$Sx =_0 Sy \rightarrow x =_0 y \qquad \neg(0 =_0 Sx),$$

das Schema der quantorfreien Induktion

$$(\text{QF-IA})\colon\ (A_0(0)\ \wedge\ \forall n\,(A_0(n) \rightarrow A_0(Sn)) \rightarrow \forall n\, A_0(n)$$

und Konstanten und definierenden Axiomen für alle Kalmár elementaren Funktionen von Typ ≤ 2.

1.1.3 Grzegorczyk Arithmetik

Definition 1.8 (Ackermann Funktion, [Ack28])**.** Die n-te Stufe der Ackermann Funktion $A_n\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist (durch Rekursion von außen) definiert durch

$$\begin{aligned} A_0(x,y) &:= Sy, \\ A_{n+1}(x,0) &:= \begin{cases} x & \text{falls } n=0 \\ 0 & \text{falls } n=1 \\ 1 & \text{falls } n\geq 2 \end{cases}, \\ A_{n+1}(x,Sy) &:= A_n(x,A_{n+1}(x,y)). \end{aligned}$$

Definition 1.9 (Grzegorczyk Arithmetik in allen endlichen Typen, $\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega$, [Grz53, Rit65]). $\mathcal{L}(\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega)$ enthält $\mathcal{L}(\mathrm{PL}^\omega)$, die Konstanten 0^0, S^1, $\max_0^{000}$, $\min_0^{000}$, $A_0^{000}, \ldots, A_n^{000}$, $\Phi_0^{000}, \ldots, \Phi_n^{000}$, μ_b^{001}, $\tilde{R}_\rho^{\rho(\rho 0)(\rho 00)(\rho 0)}$ und das Prädikat $<_0$.

$\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega$ enthält zusätzlich zu den Axiomen und Regeln aus PL^ω folgende Axiome:

1. $<_0$-Axiome: $\neg x <_0 0$, $x <_0 Sy \leftrightarrow x <_0 y \vee x =_0 y$, $x <_0 y \vee x =_0 y \vee y <_0 x$
2. S-Axiome: $Sx =_0 Sy \rightarrow x =_0 y$, $\neg 0 =_0 Sx$, $x \leq_0 Sx$
3. $\max_0(x,y) \geq_0 x$, $\max_0(x,y) \geq_0 y$, $\max_0(x,y) =_0 x \vee \max_0(x,y) =_0 y$
4. $\min_0(x,y) \leq_0 x$, $\min_0(x,y) \leq_0 y$, $\min_0(x,y) = x \vee \min_0(x,y) = y$
5. Die definierenden Gleichungen für A_n aus Definition 1.8.
6. $$\begin{cases} \Phi_i f 0 =_0 f0 \\ \Phi_i f(Sx) =_0 A_{i-1}(f(Sx), \Phi_i f x) \end{cases} \quad \text{für } i \geq 2$$
$$\begin{cases} \Phi_1 f 0 =_0 f0 \\ \Phi_1 f(Sx) =_0 \max_0(f(Sx), \Phi_i f x) \end{cases}$$
7. Die definierenden Gleichungen für die beschränkte Suche μ_b:
$$(\mu_b)\colon \begin{cases} y \leq_0 x \wedge f^{000}xy =_0 0 \rightarrow fx(\mu_b f x) =_0 0 \\ y <_0 \mu_b f x \rightarrow fxy \neq 0 \\ \mu_b f x =_0 \vee (fx(\mu_b fx) = 0 \wedge \mu_b f x \leq_0 x) \end{cases}$$
8. Die definierenden Gleichungen für den beschränkten Rekursor $\tilde{R}$:
$$\begin{cases} \tilde{R}0yzv\underline{w} =_0 y\underline{w} \\ \tilde{R}(Sx)yzv\underline{w} =_0 \min_0(z(\tilde{R}xyzv\underline{w})x\underline{w}, vx\underline{w}) \end{cases}$$
9. Alle $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})}$-wahren universellen Sätze. Das heißt alle Sätze der Form $\forall \underline{x}^{\underline{\rho}}\, A_0(\underline{x})$, die in dem vollen mengentheoretischem Modell $\mathcal{S}^\omega$ gelten und bei denen $deg(\underline{\rho}) \leq 2$ gilt.

$\mathrm{G}_\infty\mathrm{A}^\omega := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega$
$\mathrm{G}_n\mathrm{R}^\omega$ bezeichnet die Menge der geschlossenen Terme in $\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega$.

Bemerkung 1.10. Die Definition von $\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega$ ist auch nur unter Beachtung der Punkte 1–8 Sinnvoll.

Die $\forall$-Sätze sind auf Grad ≤ 2 eingeschränkt, damit auch das Modell aller stark majorisierbaren Funktionale $\mathcal{M}^\omega$ das System $\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega$ erfüllt. Insbesondere hat $\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega$ damit ein Modell, das Spectors Bar-Rekursion erfüllt.

Bemerkung 1.11. $\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega$ enthält QF-IA, da dieses Axiom als reiner $\forall$-Satz geschrieben werden kann und $\mathcal{S}^\omega \models$ QF-IA.

Σ_1^0-IA und stärkere Induktionsaxiome sind nicht beweisbar in $\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega$, da $\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega$ nicht den Iterator Φ_{it}

$$\begin{cases} \Phi_{it}0yf :=_0 y \\ \Phi_{it}(Sx)yf :=_0 f(\Phi_{it}xyf) \end{cases}$$

enthält.

Proposition 1.12 ([Koh08, 3.28]). *Sei $n \geq 1$, dann gibt es für jeden Satz A aus $\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega$, in dem nur beschränkte Quantoren vom Typ 0 vorkommen, einen Term t_A, so dass gilt*

$$\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega_\mathrm{i} \vdash \forall x_1, \ldots, x_n \; (t_A x_1 \ldots x_n =_0 0 \leftrightarrow A(x_1, \ldots, x_n)) \,.$$

Proposition 1.13 (Cantor Pairing). *Für $n \geq 2$ kann in $\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega$ die Cantor Pairing Funktion j und ihre Projektionen definiert werden:*

$$j(x^0, y^0) := \begin{cases} \min u \leq_0 (x+y)^2 + 3x + y \,[2u =_0 (x+y)^2 + 3x + y] & \textit{falls existent} \\ 0^0 & \textit{sonst} \end{cases}$$
$$j_1 z := \min x \leq_0 z \,[\exists y \; \leq z(j(x,y) = z)]$$
$$j_2 z := \min y \leq_o z \,[\exists x \; \leq z(j(x,y) = z)]$$

Proposition 1.14 ([Koh08, 3.30]). *Für $n \geq 2$ können in $\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega$ endliche Folgen, basierend auf Cantor Pairing (Proposition 1.13), kodiert werden.*

$$x := \langle x_0, \ldots, x_k \rangle$$

bezeichnet die Folge mit den Werten $x_0, \ldots, x_k$.

$lth(x)$ berechnet die Länge der durch x kodierten Folge, $(x)_y$ den Wert an der Stelle y, wobei $(x)_y = 0$ falls $y \geq lth(x)$.

Falls $n \geq 3$ kann zusätzlich die Konkatenation $*$ mit

$$\langle x_0, \ldots, x_i \rangle * \langle x_{i+1}, \ldots, x_k \rangle = \langle x_0, \ldots, x_k \rangle$$

und das Wertverlaufsfunktional

$$\Phi_{\langle\rangle} f x := \langle f0, \ldots, f(x \dot{-} 1) \rangle$$

definiert werden. Statt $\Phi_{\langle\rangle} f$ schreibe auch $\bar{f}$.

Bemerkung 1.15. Die Ergebnisse aus Proposition 1.12 und Proposition 1.14 gelten analog für EA^2, da in $\mathrm{G}_3\mathrm{A}^\omega$ und EA^2 die gleichen Funktionen definierbar sind.

1.1.4 Formelklassen

- Eine Formel heißt *quantorfrei*, wenn sie keine Quantoren enthält. Die Menge der quantorfreien Formeln wird mit QF bezeichnet. Formeln, in denen nur beschränkte Quantoren vom Typ 0 vorkommen, sind in $\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega$ und EA^2 mit Proposition 1.12 äquivalent zu einer quantorfreien Formeln.

- Die Menge aller Formeln der Form

$$\mathcal{Q}x_1^0\, \mathcal{Q}'x_2^0\, \mathcal{Q} \dots x_k^0 A_0(x_1, \dots, x_k),$$

  wobei A_0 nur beschränkte Quantoren enthält, $\mathcal{Q} \in \{\forall, \exists\}$ und $\mathcal{Q}'$ der zu $\mathcal{Q}$ duale Quantor ist, wird mit Π_k^0, falls $\mathcal{Q} = \forall$, und mit Σ_k^0, falls $\mathcal{Q} = \exists$, bezeichnet.
  $\Delta_k^0 := \Pi_k^0 \cap \Sigma_k^0$.

- Eine Formel heißt *arithmetisch*, falls sie nur Zahl-Quantoren, also Quantoren von Typ 0 enthält. Mit Prenexierung und Kontraktion von Quantoren (durch Tupelbildung, Proposition 1.14) ist jede arithmetische Formel, modulo Äquivalenz, in Π_k^0 bzw. Σ_k^0 für ein k enthalten. Daher wird die Menge der arithmetischen Formeln mit

$$\Pi_\infty^0 := \Sigma_\infty^0 := \bigcup_k \Pi_k^0$$

  bezeichnet.

- Die Menge der Formeln der Form

$$\mathcal{Q}f_1^1\, \mathcal{Q}'f_2^1\, \mathcal{Q} \dots f_k^1 A_{arith}(x_1, \dots, x_k),$$

  wobei A_{arith} eine arithmetische Formel ist, wird mit Π_k^1 bzw. Σ_k^1 bezeichnet.

- Eine Formel heißt *analytisch*, falls nur Quantoren vom Grad 0 oder 1 vorkommen.

In diesen Formelklassen sind beliebige Parameter zugelassen („Bold Face“).

1.1.5 Logische Prinzipien

Definition 1.16.

$$\begin{aligned}
\text{Auswahlaxiom } (\mathrm{AC}^{\alpha,\beta})&: \forall x^\alpha\, \exists y^\beta\, A(x,y) \to \exists Y^{\beta\alpha}\, \forall x^\alpha\, A(x, Yx)\\
\text{Komprehension } (\mathrm{CA})&: \exists g^1\, \forall x^0\, (g(x) =_0 0 \leftrightarrow A(x))\\
\text{Induktion } (\mathrm{IA})&: \big(A(0) \wedge \forall x^0\, A(x) \to A(x+1)\big) \to \forall x\, A(x)\\
\text{Bounded Collection Principle } (\mathrm{CP})&: \forall n\, (\forall x \le n\, \exists y\, A(x,y) \to \exists y^* \forall x \le n\, \exists y \le y^* A(x,y)) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

K-AS bezeichnet das Axiomschema AS, das auf Formeln aus der Menge K beschränkt wurde.

Logische Prinzipien mit Parametern

Definition 1.17.

$$\Pi^0_1\text{-CA}(f) :\equiv \exists g\, \forall x^0\, \big(gx =_0 0 \leftrightarrow \forall y^0\, fxy = 0\big)\,,$$
$$\Pi^0_1\text{-AC}(f) :\equiv \forall l^0\, \big(\forall x^0\, \exists y^0\, \forall z^0\, flxyz = 0\big) \rightarrow (\exists g\, \forall x\, \forall z\, flx(gx)z = 0)\,,$$
$$\Delta^0_2\text{-IA}(f,g) :\equiv \begin{cases} \forall l^0 \Big(\forall x^0\, \big(\exists u^0\, \forall v^0\, (flxuv =_0 0) \leftrightarrow \forall \tilde{u}^0\, \exists \tilde{v}^0\, (glx\tilde{u}\tilde{v} =_0 0\big) \rightarrow \\ \quad \big[\exists u\, \forall v\, (fl0uv = 0) \wedge \forall x\, (\exists u\, \forall v\, (fluv = 0)) \\ \qquad \rightarrow \exists u\, \forall v\, (fl(x+1)uv = 0)) \rightarrow \forall x\, \exists u\, \forall v\, (flxuv = 0)\big]\Big) \end{cases}$$

Π^0_1-IA(f), Σ^0_1-IA(f) sind analog definiert.

K-AS(f) bezeichnet das auf f angewendete Prinzip. (In der Regel werden Formeln nach Proposition 1.12 als Terme/Funktionen kodiert.) K-AS(f) wird für jedes Prinzip definiert.

K-AS$^-$ bezeichnet die Menge aller Instanzen K-AS(t), wobei in t nur freie Variablen vom Typ 0 vorkommen.

Bemerkung 1.18. Eine Folge $(f_i)_i$ einzelner Π^0_1-Komprehensionsinstanzen $\big(\Pi^0_1\text{-CA}(f_i)\big)_i$ kann auf Π^0_1-CA(f') mit $f'xy = f_{(x)_1}((x)_2, y)$ zurückgeführt werden [Koh98b, 3.8]. Damit wird auch die Existenz einer Folge von Komprehensionsfunktionen $(g_i)_i = \lambda x.g'(\langle i, x\rangle)$ bewiesen.

Proposition 1.19 ([Koh98b, 3.6])**.**

$$\text{G}_2\text{A}^\omega + \text{QF-AC}^{0,0} \vdash \forall f^{1(0)(0)(0)}\, \big(\Pi^0_1\text{-CA}(\xi f) \rightarrow \Pi^0_1\text{-AC}(f)\big)$$

für einen geeigneten geschlossenen Term ξ.

Proposition 1.20 ([Koh98b, 3.11])**.**

$$\text{G}_3\text{A}^\omega + \text{QF-AC}^{0,0} \vdash \forall f, g\, \big(\Pi^0_1\text{-CA}(\xi_1 f) \wedge \Pi^0_1\text{-CA}(\xi_2 g) \rightarrow \Delta^0_2\text{-IA}(f,g)\big)$$

für geeignete geschlossene Terme ξ_1 und ξ_2.

1.1.6 Vergleich zu Sub-Systemen der Arithmetik zweiter Stufe

Für eine genaue Beschreibung der Systeme siehe [Sim99].

Definition 1.21 (Arithmetik zweiter Stufe Z_2)**.** Die Sprache der Arithmetik zweiter Stufe besteht aus Zahlvariablen (i,j,k,...) und Mengenvariablen (X,Y,Z,...), den dazugehörigen Quantoren, den üblichen logischen Symbolen $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, den Prädikaten $=_0$, $<_0$ zwischen Zahlen und $\in$ zwischen einer Zahl und einer Menge, den Konstanten 0, 1 und den Funktionen $+$, $\cdot$.

Die Axiome bestehen aus

- Basisaxiomen: S-Axiomen (wobei $Sx \equiv x+1$), $<_0$-Axiomen (wie oben), den definierenden Axiomen für $+$ und $\cdot$,
- Induktionsschema
$$(\mathrm{IA})\colon\ (A(0) \wedge \forall n\,(A(n) \rightarrow A(Sn))) \rightarrow \forall n\, A(n),$$
- Komprehensionsschema
$$(\mathrm{CA})\colon \exists X\, \forall n\, (n \in X \leftrightarrow A(n)).$$

Bemerkung 1.22. Mit Komprehension ist das Schema IA äquivalent zu dem Axiom der quantorfreien Induktion
$$(\text{QF-IA})\colon \forall X\ (0 \in X \wedge \forall n\,(n \in X \rightarrow n+1 \in X)) \rightarrow \forall n\,(n \in X).$$

Definition 1.23 (RCA_0 (recursive comprehension))**.** RCA_0 hat die gleiche Sprache wie Z_2. Es enthält die Basisaxiome und Σ^0_1-IA, Δ^0_1-CA anstatt voller Induktion (IA) und Komprehension (CA).

Die Erweiterung von RCA_0 um alle primitiv-rekursiven Funktionen ist konservativ über RCA_0. Im Folgenden wird nicht mehr zwischen diesen beiden Systemen unterschieden.

Definition 1.24 (RCA^*_0)**.** Die Sprache von RCA^*_0 besteht aus der Sprache von Z_2 mit der Exponentialfunktion $\exp(n,m)$. RCA^*_0 enthält die Basisaxiome, Σ^0_0-IA, Δ^0_1-CA und die definierenden Axiome für exp.

Offensichtlich $\mathrm{RCA}_0 = \mathrm{RCA}^*_0 + \Sigma^0_1$-IA.

In RCA^*_0 kann man Cantor Pairing definieren und damit über Tupel und Mengen von Tupeln quantifizieren.

RCA^*_0 ist in $\mathrm{EA}^2 + $ QF-AC enthalten, wenn man Mengen durch ihre charakteristische Funktion identifiziert. Die Basisaxiome und QF-IA sind in EA^2 enthalten. Aus QF-AC folgt Δ^0_1-CA:
Seien ϕ, ψ quantorfrei mit $\exists x\, \phi(n,x) \leftrightarrow \forall x\, \psi(n,x)$, dann
$$\begin{aligned} & [\forall n\, \exists k \leq 1\ (\exists x\, \phi(n,x) \leftrightarrow k = 0)] \\ \leftrightarrow\ & \big[\forall n\, \exists k \leq 1\, \exists x, x'\ (\neg\phi(n,x) \rightarrow k \neq 0 \wedge \psi(n,x) \rightarrow k = 0)\big] \\ \xrightarrow{\text{QF-AC}}\ & [\exists K \leq_1 \lambda x.1\, \forall n\ (\exists x\, \psi(n,x) \leftrightarrow K(n) = 0)]\,. \end{aligned}$$

Umgekehrt kann $\mathrm{EA}^2 + $ QF-AC in RCA^*_0 eingebettet werden, indem Funktionen, wie in allen Systemen zweiter Stufe üblich, als Graph dargestellt werden. Die Kalmár elementaren Funktionen können in RCA^*_0 definiert werden, siehe [SS86]. QF-AC folgt aus Δ^0_1-CA und Σ^0_0-IA:
$$\begin{aligned} & [\forall x\, \exists y\, P(x,y)] \\ \xrightarrow{\Sigma^0_0\text{-IA}}\ & \big[\forall x\, \exists y\, (P(x,y) \wedge \forall y' < y\, \neg P(x,y'))\big] \\ \xrightarrow{\Delta^0_1\text{-CA}}\ & \big[\exists F\, (\forall x, y\, (P(x,y) \leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F) \wedge \underbrace{\forall x\, \exists y\, (\langle x,y\rangle \in F \wedge \forall y' < y\, \langle x,y'\rangle \notin F)}_{\text{F ist Graph einer Funktion}})\big] \end{aligned}$$

Definition 1.25 (ACA$_0$)**.** ACA$_0$ hat die gleiche Sprache wie Z$_2$. Es enthält die Basisaxiome, QF-IA und Π^0_∞-CA.

Aus QF-IA und Π^0_∞-CA lässt sich Π^0_∞-IA ableiten.

Definition 1.26 (WKL$_0$, WKL$_0^*$)**.** WKL$_0$ besteht aus RCA$_0$ und dem schwachen Lemma von König (WKL), siehe Kapitel 3. WKL$_0^*$ besteht entsprechend aus RCA$_0^*$ und WKL.

1.2 Funktionalinterpretation

Definition 1.27 (Dialectica Interpretation, [Göd58])**.** Jeder Formel A aus $\mathcal{L}(\text{WE-HA}^\omega)$ wird durch Induktion über den Aufbau von A die folgende Übersetzung zugeordnet

$$A^D \equiv \exists \underline{x}\, \forall \underline{y}\, A_D(\underline{x}, \underline{y}),$$

wobei A_D quantorfrei ist.

(i) $A^D :\equiv A_D :\equiv A$ für A Primformel.

Sei $A^D \equiv \exists \underline{x}\, \forall \underline{y}\, A_D(\underline{x}, \underline{y})$ und $B^D \equiv \exists \underline{u}\, \forall \underline{v}\, B_D(\underline{u}, \underline{v})$ schon definiert, dann

(ii) $(A \wedge B)^D :\equiv \exists \underline{x}, \underline{u}\, \forall \underline{y}, \underline{v}\, [A \wedge B]_D$
$\qquad :\equiv \exists \underline{x}, \underline{u}\, \forall \underline{y}, \underline{v}\, [A_D(\underline{x}, \underline{y}) \wedge B_D(\underline{u}, \underline{v})]$,

(iii) $(A \vee B)^D :\equiv \exists z^0, \underline{x}, \underline{u}\, \forall \underline{y}, \underline{v}\, [A \vee B]_D$
$\qquad :\equiv \exists z^0, \underline{x}, \underline{u}\, \forall \underline{y}, \underline{v}\, [(z = 0 \rightarrow A_D(\underline{x}, \underline{y})) \wedge (z \neq 0 \rightarrow B_D(\underline{u}, \underline{v}))]$,

(iv) $(A \rightarrow B)^D :\equiv \exists \underline{U}, \underline{Y}\, \forall \underline{x}, \underline{v}\, [A \rightarrow B]_D$
$\qquad :\equiv \exists \underline{U}, \underline{Y}\, \forall \underline{x}, \underline{v}\, [A_D(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{v}) \rightarrow B_D(\underline{U}\,\underline{x}, \underline{v})]$,

(v) $(\exists z^\rho\, A(z))^D :\equiv \exists z, \underline{x}\, \forall \underline{y}\, [\exists z\, A]_D :\equiv \exists z, \underline{x}\, \forall \underline{y}\, [A_D(\underline{x}, \underline{y}, z)]$,

(vi) $(\forall z^\rho\, A(z))^D :\equiv \exists \underline{X}\, \forall \underline{y}, z\, [\forall z\, A]_D :\equiv \exists \underline{X}\, \forall \underline{y}, z\, [A_D(\underline{X}\, z, \underline{y}, z)]$.

Definition 1.28 (Negativübersetzung, [Kur51])**.** Die *Negativübersetzung* von Kuroda ordnet jeder Formel A aus IL$^\omega$ eine Formel $A' :\equiv \neg\neg A^*$ zu. A^* ist definiert durch

(i) $A^* :\equiv A$ falls A Primformel,

(ii) $(A \Box B)^* :\equiv (A^* \Box B^*)$, wobei $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$,

(iii) $(\exists x^\rho\, A)^* :\equiv \exists x^\rho\, A^*$,

(iv) $(\forall x^\rho\, A)^* :\equiv \forall x^\rho\, \neg\neg A^*$.

1.2.1 ND-Übersetzung

Die Kombination von Negativübersetzung und Dialectica Interpretation heißt *ND-Übersetzung.*

Satz 1.29 (Korrektheit der ND-Übersetzung, [Göd58, Yas63, Tro73], [Koh08, 10.7])**.** *Sei $\mathcal{P}$ eine Menge rein universeller Sätze $\forall \underline{z}^{\underline{\rho}}\, B_0(\underline{z})$ (B_0 quantorfrei) aus $\mathcal{L}(\text{WE-PA}^\omega)$ und $A(\underline{a})$ ein beliebiger Satz aus $\mathcal{L}(\text{WE-PA}^\omega)$, der nur $\underline{a}$ frei enthält. Dann gilt*

$$\begin{cases} \text{WE-PA}^\omega + \text{QF-AC} + \mathcal{P} \vdash A(\underline{a}) \\ \Rightarrow \textit{ND extrahiert Terme } \underline{t} \textit{ aus } \text{WE-HA}^\omega\textit{, so dass} \\ \text{WE-HA}^\omega + \mathcal{P} \vdash \forall \underline{a}, \underline{y}\, (A')_D(\underline{t}\underline{a}, \underline{y}, \underline{a}). \end{cases}$$

Satz 1.30 (Charakterisierung der ND-Übersetzung, [Kre59], [Koh08, 10.13])**.** *Für jede Formel A aus $\mathcal{L}(\text{WE-PA}^\omega)$ gilt*

$$\text{WE-PA}^\omega + \text{QF-AC} \vdash A \leftrightarrow (A')^D.$$

Satz 1.31 (Hauptsatz über die Programmextraktion durch ND, [Göd58, Yas63, Tro73], [Koh08, 10.8])**.** *Sei $\mathcal{P}$ eine Menge rein universeller Sätze $\forall \underline{z}^{\underline{\sigma}}\, B_0(\underline{z})$ (B_0 quantorfrei) aus $\mathcal{L}(\text{WE-PA}^\omega)$ und $A_0(x^\rho, y^\tau)$ eine quantorfreie Formel aus $\mathcal{L}(\text{WE-PA}^\omega)$, in der x^ρ, y^τ die einzigen freien Variablen sind. Dann gilt*

$$\begin{cases} \text{WE-PA}^\omega + \text{QF-AC} + \mathcal{P} \vdash \forall x^\rho\, \exists y^\tau\, A_0(x, y) \\ \Rightarrow \textit{ND extrahiert einen geschlossenen } \text{WE-HA}^\omega\textit{-Term } t\textit{, so dass gilt} \\ \text{WE-HA}^\omega + \mathcal{P} \vdash \forall x\, A_0(x, tx). \end{cases}$$

1.2.2 NMD-Übersetzung

Definition 1.32 ([How73])**.**

$$\begin{aligned} x^* \operatorname{maj}_0 x &:\equiv x^* \geq_0 x, \\ x^* \operatorname{maj}_{\tau\rho} x &:\equiv \forall y^*, y\, (y^* \operatorname{maj}_\rho y \rightarrow x^* y^* \operatorname{maj}_\tau xy). \end{aligned}$$

Die monotone Funktionalinterpretation (MD) einer Formel A aus $\mathcal{L}(\text{WE-HA}^\omega)$ ist definiert als

$$A^{MD} :\equiv \exists \underline{x}\, \left(\underline{t}^* \operatorname{maj} \underline{x} \wedge \forall \underline{a}, \underline{y}\, A_D(\underline{x}(\underline{a}), \underline{y}, \underline{a})\right).$$

Die *NMD-Übersetzung* ist die Kombination von Negativübersetzung und monotoner Funktionalinterpretation.

Satz 1.33 (Korrektheit der NMD-Übersetzung, [Koh08, 10.20])**.** *Sei Δ eine Menge von Sätzen der Form*

$$\forall \underline{a}^{\underline{\delta}}\, \exists \underline{b} \leq_{\underline{\sigma}} \underline{r}\underline{a}\, \forall \underline{c}^{\underline{\gamma}}\, B_0(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}),$$

wobei B_0 quantorfrei ist, außer a,b,c keine freien Variablen enthält und $\underline{r}$ ein beliebiger geschlossener Term ist. $\underline{\delta}$,$\underline{\sigma}$,$\underline{\gamma}$ sind beliebige Typen. $\tilde{\Delta}$ ist definiert als die entsprechende Menge an Sätzen der Form

$$\exists \underline{B} \leq \underline{r}\, \forall \underline{a}, \underline{c}\, B_0(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}).$$

Dann gilt

$$\begin{cases} \text{WE-PA}^\omega + \text{QF-AC} + \Delta \vdash A(\underline{a}) \\ \Rightarrow \textit{NMD extrahiert Terme } \underline{t} \textit{ aus } \text{WE-HA}^\omega\textit{, so dass} \\ \text{WE-HA}^\omega + \tilde{\Delta} \vdash \exists \underline{x}\, (t^* \text{ maj } x \wedge \forall \underline{a}, \underline{y}\, (A')_D(\underline{x}\underline{a}, \underline{y}, \underline{a}). \end{cases}$$

Bemerkung 1.34. Die Ergebnisse aus Satz 1.29, 1.30, 1.31 und 1.33 gelten analog für $\widehat{\text{WE-PA}}^\omega\!\restriction$, $\widehat{\text{WE-HA}}^\omega\!\restriction$ und $\text{G}_n\text{A}^\omega$, $\text{G}_n\text{A}^\omega_{\text{i}}$ anstatt WE-PA^ω und WE-HA^ω.

1.2.3 Funktionalinterpretation der vollen klassischen Analysis

Spector zeigte, dass die Funktionalinterpretation des Schemas der vollen Komprehension über Zahlen

$$(\text{CA})\colon \exists f^1\, \forall x\, (f(x) =_0 0 \leftrightarrow A(x))$$

mittels Bar-Rekursion gelöst werden kann ([Spe62]).

Der (simultane) Bar-Rekursor $\underline{B}$ wird durch das folgende Axiom definiert:

$$(\text{BR}_{\underline{\rho},\underline{\tau}})\colon \begin{cases} y(\overline{\underline{x}, n^0}) <_0 n \rightarrow B_i^{\underline{\rho},\underline{\tau}} y\underline{z}\underline{u}n\underline{x} =_{\tau_i} z_i n(\overline{\underline{x}, n}) \\ y(\overline{\underline{x}, n}) \geq_0 n \rightarrow B_i^{\underline{\rho},\underline{\tau}} y\underline{z}\underline{u}n\underline{x} =_{\tau_i} u_i(\lambda \underline{D}^{\underline{\rho}}.B^{\underline{\rho},\underline{\tau}} y\underline{z}\underline{u}(n+1)(\overline{\underline{x}, n} * \underline{D}))n(\overline{\underline{x}, n}) \end{cases}$$

für $i = 1, \ldots, k$, wobei

$$(\overline{\underline{x}, n})_j(k^0) =_{\rho_i} \begin{cases} x_j(k) & \text{falls } k \leq n, \\ 0^{\rho_i} & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$(\overline{\underline{x}, n} * D)_j(k^0) =_{\rho_i} \begin{cases} x_j(k) & \text{falls } k \leq n, \\ D_j & \text{falls } k = n, \\ 0^{\rho_i} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(BR) bezeichnet die Vereinigung aller $\text{BR}_{\underline{\rho},\underline{\tau}}$ für $\underline{\rho}, \underline{\tau} \in \mathbf{T}$.

Da über $\text{WE-PA}^\omega + \text{QF-AC}^{0,0}$ die Schemata CA^0 und $\text{AC}^{0,0}$ äquivalent sind, gilt der folgende Satz:

Satz 1.35 ([Spe62], [Koh08, 11.6]). *Sei $A(\underline{a})$ ein beliebiger Satz aus $\mathcal{L}(\text{WE-PA}^\omega)$, der nur $\underline{a}$ frei enthält. Dann gilt*

$$\begin{cases} \text{WE-PA}^\omega + \text{QF-AC} + \text{AC}^{0,0} \vdash A(\underline{a}) \\ \textit{impliziert} \\ \text{WE-HA}^\omega + (\text{BR}) \vdash \forall \underline{y}\, (A')_D(\underline{t}\underline{a}, \underline{y}, \underline{a}), \end{cases}$$

wobei $\underline{t}$ eine geeignetes Tupel geschlossener Terme aus $\text{WE-HA}^\omega + (\text{BR})$ *ist, die aus einem Beweis der Prämisse extrahiert werden können.*

Für die Lösungen der Funktionalinterpretationen in Kapitel 3 und 4 verwenden wir folgende spezielle Form der Bar-Rekursion (siehe [Koh08, Kapitel 11.1]):

$$\Phi_\rho yunxm =_\rho \begin{cases} xm & \text{falls } m <_0 n, \\ 0^\rho & \text{falls } m \geq_0 n \wedge y(\overline{x,n}) < n, \\ \Phi_\rho yu(n+1)(\overline{x,n} * D_0)m & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

$$D_0 =_\rho un(\lambda D^\rho.\Phi_\rho yu(n+1)(\overline{x,n} * D)).$$

Φ_ρ kann mit $B_{\rho,\rho(0)}$ definiert werden.

In einigen Fällen können Terme, die einen Bar-Rekursor enthalten, in einen Term in T umgerechnet werden:

Satz 1.36 ([Koh99, 4.4]). *T und die Terme von* $\widehat{\text{WE-HA}}^\omega + (\text{BR}_{0,1})$ *(interpretiert in $\mathcal{C}^\omega$) beschreiben die gleichen mengentheoretischen Funktionale vom Typ ≤ 2.*

1.3 Elimination von Skolemfunktionen

Die Elimination von Skolemfunktionen (für monotone Formeln) ist eine von U. Kohlenbach entwickelte Methode um den Einfluss verschiedener Prinzipien, aus denen die Existenz nicht konstruktiver Funktionen folgt, auf arithmetische Formeln zu bestimmen [Koh98b, Koh98c].

Dazu werden die Prinzipien auf feste Instanzen (Abschnitt 1.1.5) eingeschränkt, da viele Prinzipien durch Iteration stärker werden.

Ein Beispiel für ein solches Prinzip ist Π^0_1-CA. Durch Iteration folgt aus Π^0_1-CA volle arithmetische Komprehension Π^0_∞-CA, die sehr stark ist und insbesondere die Existenz nicht primitiv-rekursiv beschränkbarer Funktionen beweist. Nicht iterierte Anwendungen von Π^0_1-CA in $\text{G}_\infty\text{A}^\omega$ hingegen sind, wie im Folgendem beschrieben, für arithmetische $\forall\exists$-Sätze konservativ über primitiv-rekursiver Arithmetik.

Weitere Beispiele für solche Prinzipien sind der Satz von Bolzano-Weierstraß und das Arzelà-Ascoli Lemma. (Für Formalisierungen siehe [Koh98a]).

Prinzipien, die wie WKL konstruktiv beschränkbar sind, können bei der Elimination von Skolemfunktionen uneingeschränkt benutzt werden. Siehe [Koh98b] und [Koh08, Kapitel 13].

Wir werden in Kapitel 4 zeigen, dass dies auch für feste Instanzen des Satzes von Ramsey für Paare gilt.

Zu den Hauptresultaten von Kohlenbach gehören:

Definition 1.37 ([Koh98b, 2.6]). Sei $A \in \mathcal{L}(\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega)$ eine Formel der Form

$$A \equiv \forall u^1\, \forall v \leq_\tau tu\, \exists y_1^0\, \forall x_1^0 \ldots \exists y_k^0\, \forall x_k^0\, \exists w^\gamma\, A_0(u, v, y_1, x_1, \ldots, y_k, x_k, w),$$

wobei A_0 quantorfrei ist, u, v, $\underline{y}$, $\underline{x}$, w die einzigen freien Variablen in A_0 sind, $t \in \mathrm{G}_n\mathrm{R}^\omega$ und $\tau, \gamma \in \mathbf{T}$.

A heißt *(arithmetisch) monoton* falls

$$Mon(A) :\equiv \begin{cases} \forall u^1\, \forall v \leq_\tau tu\, \forall x_1, \tilde{x}_1, \ldots x_k, \tilde{x}_k, y_1, \tilde{y}_1, \ldots y_k, \tilde{y}_k \\ \qquad \Big(\bigwedge_{i=1}^{k} (\tilde{x}_i \leq_0 x_i\, \wedge\, \tilde{y}_i \geq_0 y_i)\, \wedge\, \exists w^\gamma\, A_0(u, v, y_1, x_1, \ldots, y_k, x_k, w) \\ \qquad\qquad \to \exists w^\gamma\, A_0(u, v, \tilde{y}_1, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{y}_k, \tilde{x}_k, w) \Big). \end{cases}$$

Satz 1.38 ([Koh98c, 4.5]). *Sei $k \geq 3$ und A ein Π_1^1-Satz.*
Falls

$$\text{E-G}_k\mathrm{A}^\omega + \text{QF-AC}^{1,0} + \Delta_2^0\text{-CA}^- + \Pi_1^0\text{-AC}^- + \mathrm{WKL} \vdash A$$

dann

$$\mathrm{G}_k\mathrm{A}^\omega + \Sigma_1^0\text{-IA} + Mon(A) \vdash A.$$

Korollar 1.39 ([Koh98c, 4.8]). *Sei in Satz 1.38 A ein Π_3^0-Satz, dann gilt unter den Bedingungen aus Satz 1.38 sogar*

$$\mathrm{G}_k\mathrm{A}^\omega + \Sigma_1^0\text{-IA} \vdash A.$$

Beweis. Π_0^0-CP beweist, dass jeder Π_3^0-Satz äquivalent zu einem arithmetisch monotonen Satz ist. □

Korollar 1.40 ([Koh98c, 4.11]). *Sei in Satz 1.38 A ein Π_4^0-Satz , dann gilt unter den Bedingungen aus Satz 1.38 weiterhin*

$$\mathrm{G}_k\mathrm{A}^\omega + \Pi_1^0\text{-CP} \vdash A.$$

Beweis. Aus Π_1^0-CP folgt Σ_1^0-IA. Darüber hinaus beweist Π_1^0-CP, dass jeder Π_4^0-Satz äquivalent zu einem arithmetisch monotonen Satz ist ([Koh98c, 4.6]). □

Im Allgemeinen kann auf die Bedingung $Mon(A)$ nicht verzichtet werden. Die Grenze in Korollar 1.39 ist scharf. Es gibt nach [Avi02] einen Σ_3^0-Satz der mit Π_1^0-CP (folgt aus Π_1^0-AC$^-$), aber nicht mit Σ_1^0-IA beweisbar ist.

Sei

$$\mathcal{T} := \text{E-G}_\infty\mathrm{A}^\omega + \text{QF-AC}^{1,0} + \text{QF-AC}^{0,1} + \mathrm{WKL} + \Delta_2^0\text{-CA}^- + \Pi_1^0\text{-AC}^-.$$

Es folgt aus Korollar 1.39 und Korollar 1.40 sofort, dass $\mathcal{T}$ Π_3^0-konservativ über PRA + Σ_1^0-IA bzw. Π_4^0-konservativ über PRA + Π_1^0-CP ist.

Satz 1.41. *Sei* $A_0(f, y)$ *eine quantorfreie Formel, die nur* f, y *frei enthält. Dann gilt*

$$\begin{cases} \mathcal{T} \vdash \forall f^1\, \exists y^0\, A_0(f, y) \\ \ \Rightarrow \textit{Es existiert ein primitiv-rekursives Funktional } \phi \textit{ (im Sinne von Kleene) mit} \\ \widehat{\mathrm{WE\text{-}HA}}^\omega\!\restriction\, \vdash \forall f\, A_0(f, \phi(f)). \end{cases}$$

Insbesondere gilt

$$\begin{cases} \mathcal{T} \vdash \forall x^0\, \exists y^0\, A_0(x, y) \\ \ \Rightarrow \textit{Es existiert eine primitiv-rekursive Funktion } \phi \textit{ mit} \\ \mathrm{PRA} \vdash \forall x\, A_0(x, \phi(x)). \end{cases}$$

Insbesondere ist $\mathcal{T}$ Π^0_2*-konservativ über* PRA.

Beweis. Es gilt

$$\widehat{\mathrm{WE\text{-}PA}}^\omega\!\restriction\, \vdash Mon(\forall f^1\, \exists y^0\, A_0(f, y)).$$

Damit folgt die Aussage aus Satz 1.38 und Satz 1.31.

Der zweite Teil des Satzes folgt direkt aus dem ersten, da $\widehat{\mathrm{WE\text{-}PA}}^\omega\!\restriction$ Π^0_2-konservativ über PRA ist, siehe [AF98]. □

2 Unendliches Schubfachprinzip

Definition 2.1 (Unendliches Schubfachprinzip)**.** Das unendliche Schubfachprinzip („Infinite Pigeonhole Principle“) ist definiert als

$$(\mathrm{IPP})\colon \forall n \in \mathbb{N}\, \forall f \colon \mathbb{N} \to C_n\, \exists i \le n\, \forall k \in \mathbb{N}\, \exists m \ge k\ (f(m) = i)$$

wobei $C_n := \{0, \dots, n\}$.

IPP(n, f) bezeichnet IPP für festes n, f.

Bemerkung 2.2. Die obige Definition enthält Ausdrücke, wie „$n \in \mathbb{N}$“ oder „$f \colon \mathbb{N} \to C_n$“, die nicht in unserem formalen System enthalten sind. Diese informale Form wurde gewählt um der mathematischen Umgangssprache näher zu sein und die Lesbarkeit zu verbessern.

Die Ausdrücke können auf folgende Weise in das formale System übertragen werden: $n \in \mathbb{N}$ wird unserem Typsystem entsprechend durch eine Typ 0 Variable repräsentiert. Die Funktion $f \colon \mathbb{N} \to C_n$ wird durch eine Funktion f^1 repräsentiert, wobei jedes Vorkommen von $f(m)$ durch $f_n(m) := \min(f(m), n \dot{-} 1)$ ersetzt wird. Auf diese Weise entspricht f einer Funktion nach C_n und es werden keine neuen Quantoren zu unserer Aussage hinzugefügt.

Dies ergibt

$$\forall n^0\, \forall f^1\, \exists i^0 \le n\, \forall k^0\, \exists m^0 \ge k\ (f_n(m) = i)\,.$$

Im Folgenden wird nicht mehr zwischen der informalen und der formalen Schreibweise unterschieden.

Lemma 2.3.

$$\mathrm{G_2A}^\omega \vdash \mathrm{IPP} \to \mathrm{QF\text{-}CP}$$

Beweis. Zu zeigen ist

$$\forall y^*\, \exists x \le n\, \forall y \le y^*\, \neg A_{qf}(x, y) \to \exists x \le n\, \forall y\, \neg A_{qf}(x, y)$$

für alle n Angenommen es gilt die Prämisse für ein festes aber beliebiges n, dann ist

$$X(y^*) := \min\{x \in C_n \mid \forall y \le y^*\, \neg A_{qf}(x, y)\}$$

total. X kann mit μ_b und Proposition 1.12 in $\mathrm{G_2A}^\omega$ definiert werden. Mit IPP folgt, dass es ein $x \le n$ gibt, das unendlich oft im Bild von X vorkommt. Aufgrund der Monotonie von X gilt dann

$$\begin{aligned} &\exists x \le n\, \forall m\, \forall y \le m\, \neg A_{qf}(x, y) \\ \to &\exists x \le n\, \forall y\, \neg A_{qf}(x, y). \end{aligned}$$

$\square$

Satz 2.4 ([Hir87, 6.4]).

$$\mathrm{G_3A^\omega} \vdash \mathrm{IPP} \leftrightarrow \Pi^0_1\text{-CP}$$

Beweis.

„←“ Mit Π^0_1-CP gilt

$$\begin{aligned}\neg\mathrm{IPP} &\xleftrightarrow{\text{def}} \exists n\,\exists f\colon \mathbb{N} \to C_n\,\forall i \le n\,\exists k\,\forall m \ge k\, f(m) \ne i\\ &\xrightarrow{\Pi^0_1\text{-CP}} \exists n\,\exists f\colon \mathbb{N} \to C_n\,\exists k^*\,\forall i \le n\,\exists k \le k^*\,\forall m \ge k\, f(m) \ne i\\ &\to \exists n\,\exists f\colon \mathbb{N} \to C_n\,\exists k^*\,\forall m \ge k^*\,\forall i \le n\, f(m) \ne i\\ &\to \perp.\end{aligned}$$

Also Π^0_1-CP $\to$ IPP.

„→“ Es wird gezeigt, dass aus IPP die Kontraposition von Π^0_1-CP folgt, d.h.

$$\forall n, f\ (\forall y^*\,\exists x \le n\,\forall y \le y^*\,\exists z\, f(x,y,z) \ne 0 \to \exists x \le n\,\forall y\,\exists z\, f(x,y,z) \ne 0)\,. \tag{2.1}$$

Seien n, f fest aber beliebig mit

$$\forall y^*\,\exists x \le n\,\forall y \le y^*\,\exists z\, f(x,y,z) \ne 0. \tag{2.2}$$

Setze

$$A(y^*, z^*) :\equiv \exists x \le n\,\forall y \le y^* \exists z \le z^*\, f(x,y,z) \ne 0.$$

Nach Proposition 1.12 gibt es einen Term t mit

$$\mathrm{G_3A^\omega} \vdash t(y^*, z^*) = 0 \leftrightarrow A(y^*, z^*).$$

Definiere:

$$\begin{aligned} h(0) &:= \langle 0,0\rangle\\ h(m+1) &:= \begin{cases} j(j_1h(m), j_2h(m)+1) & \neg A(j_1h(m), j_2h(m))\\ j(j_1h(m)+1, j_2h(m)) & \text{sonst}\end{cases}\\ \nu(0) &:= 0\\ \nu(m+1) &:= \begin{cases} \nu(m) & \neg A(j_1h(m), j_2h(m))\\ x & x = \min\{x \le n \mid \forall y \le j_1h(m)\,\exists z \le j_2h(m)\, f(x,y,z) \ne 0\}\\ & \quad = \mu_b\, t(h(m))\, n \quad \text{für geeignetes } t \text{ siehe Proposition 1.12}\end{cases}\end{aligned}$$

$h \in \mathrm{G_3A^\omega}$, weil $h(m) \le j(m,m) \le 4m^2 \in \mathrm{G_3A^\omega}$. Genauso $\nu \in \mathrm{G_3A^\omega}$.
Nach Definition von h, ν gilt

$$\forall m\,\forall y < j_1h(m)\,\exists z \le j_2h(m)\, f(\nu(m), y, z) \ne 0. \tag{2.3}$$

$j_1h(m)$ ist unbeschränkt, denn angenommen es gäbe ein $l \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall m\ (j_1h(m) \leq l)\,,$$

dann gilt

$$\begin{aligned} &\exists x \leq n\, \forall y \leq l\, \exists z\, f(x,y,z) \neq 0 \qquad \text{mit (2.2)} \\ \overset{\text{QF-CP}}{\longrightarrow} &\exists x \leq n\, \exists k\, \forall y \leq l\, \exists z \leq k\, f(x,y,z) \neq 0 \\ \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} &\exists k\, A(l,k). \end{aligned}$$

Nach Definition von h gibt es damit ein m, so dass $j_1h(m) = l+1$. Das widerspricht der Definition von l.

Mit IPP gibt es ein $x \leq n$ mit $\nu(m) = x$ für unendlich viele m. Aus der Unbeschränktheit von $j_1h(m)$ und (2.3) folgt dann

$$\forall y\, \exists m\ ((y < j_1h(m)\ \wedge\ \nu(m) = x)\ \wedge\ \exists z \leq j_2h(m)\, f(\nu(m), y, z) \neq 0)$$

und damit die Behauptung

$$\exists x \leq n\, \forall y\, \exists z\, f(x,y,z) \neq 0. \qquad \square$$

Um Π^0_1-CP aus IPP zu beweisen, wurden zwei Instanzen von IPP benötigt (eine in Lemma 2.3 und eine in Satz 2.4). Da aber QF-CP aus QF-AC folgt, entsprechen sich in $\mathrm{G_3A^\omega}$ + QF-AC IPP und Π^0_1-CP instanzenweise.

2.1 Endliche Bar-Rekursion

Definition 2.5 (Endliche Bar-Rekursion)**.**
$B_{fin}\colon (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist definiert durch

$$(\mathrm{BR_{fin}}) : B_{fin}(K,n,s) = \begin{cases} \langle\rangle & \text{falls } lth(s) \geq n+1, \\ \langle c_s\rangle * B_{fin}(K,n,s*\langle c_s\rangle) & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned} h_s &:= \lambda x. M(s * \langle x\rangle * B_{fin}(K,n,s*\langle x\rangle)) \\ M(k) &:= \max\left\{(k)_0, \ldots, (k)_{lth(k)-1}\right\} \\ c_s &:= K(lth(s), h_s). \end{aligned}$$

Das Argument K wird im Folgenden weggelassen, wenn Verwechselungen ausgeschlossen sind.

Lemma 2.6. *B_{fin} kann mit R_1 definiert werden.*

Beweis. Definiere $B_{fin}(n,s)$ rekursiv über $m := n + 1 \dot{-} lth(s)$:

$$\begin{aligned} u &:= \lambda s^0.\langle\rangle \\ v &:= \lambda f^1, n^0, s^0.\langle c_{s,f}\rangle * f(s * \langle c_{s,f}\rangle) \\ c_{s,f} &:= K(lth(s), h_{s,f}) \\ h_{s,f} &:= \lambda x.M(s * \langle x\rangle * f(s * \langle x\rangle)) \end{aligned}$$

Dann gilt mit Induktion über m:

- $m = 0$ d.h. $lth(s) \geq n + 1$

$$R_1 muvs =_0 u(s) =_0 \langle\rangle =_0 B_{fin}(n,s)$$

- $m \rightsquigarrow m + 1$ d.h. $lth(s) = n + 1 - m - 1$

$$R_1(m+1)uvs =_0 \langle c_{s,R_1 muv}\rangle * f(m)(s * \langle c_{s,R_1 muv}\rangle)$$

mit Induktionshypothese und $m = n + 1 - lth(s * \langle x\rangle)$

$$\begin{aligned} &=_0 \langle c_s\rangle * B_{fin}(n, s * \langle c_s\rangle) \\ &=_0 B_{fin}(n,s) \end{aligned}$$

D.h. $B_{fin}(n,s) =_0 R_1(n + 1 \dot{-} lth(s))uvs.$ □

Definition 2.7. Sei T_0' das Subsystem von System T, in dem die Rekursion auf die Regel für Primitive-Rekursion vom Typ 0 und $\Phi_{\langle\rangle}$ eingeschränkt ist, d.h. R_0 ist nicht in T_0' enthalten. Aber für geschlossene Terme u^0,$v^{0000} \in T_0'$ gibt es einen Term t mit $tn^0 s^0 =_0 R_0 n(us^0)(vs^0)$.

In dem Zahlparameter s können mehrere Zahlparameter kodiert werden. Es können aber im Allgemeinen *keine* Funktionsparameter übergeben werden.

Proposition 2.8 ([Par70, Lemma 4])**.** *T_0' ist abgeschlossen unter Rekursion vom Typ 1 als Regel, d.h. für $u, v \in T_0'$ existiert $t \in T_0'$ mit $tn^0 s^0 =_0 R_1 nuvs$.*

Wie oben können in s mehrere Zahlparameter kodiert werden. Es können aber keine Funktionsparameter übergeben werden. Dies würde ausreichen um die Ackermannfunktion und damit eine nicht primitiv-rekursive Funktion zu definieren.

Korollar 2.9. *$B_{fin}(n,s) \in T_0'$ für ein $K(l^0, h^1, \underline{a}^0) \in T_0'$, in dem $l, h, \underline{a}$ die einzigen freien Variablen sind.*

Beweis. u, v aus Lemma 2.6 sind Elemente von T_0' und enthalten abgesehen von f^1 nur Zahlparameter. □

Satz 2.10. *T_0' und $\mathrm{G}_\infty\mathrm{R}^\omega$ beschreiben die gleichen mengentheoretischen Funktionale.*

Beweis. Die Konstanten 0, S, Π, Σ sind in beiden System enthalten.

$\mathrm{G}_\infty\mathrm{A}^\omega$ ist abgeschlossen unter primitiver Rekursion, da die Termen (von Typ 1) den primitiv-rekursiven Funktionen entsprechen. $\Phi_{\langle\rangle}$ ist definierbar in $\mathrm{G}_3\mathrm{A}^\omega$ (Proposition 1.14). Damit können alle Funktionale, die mit Termen aus T_0' dargestellt werden, auch in $\mathrm{G}_\infty\mathrm{A}^\omega$ dargestellt werden.

Umgekehrt sind A_n für festes n und $\min_0$, $\max_0$ primitiv-rekursiv und damit in T_0'. Φ_1, $\tilde{R}$, μ_b lassen sich mit primitiv-rekursiven Funktionen und $\Phi_{\langle\rangle}$ darstellen und sind damit in T_0' definierbar:

$$\Phi_1 fx = \max_{y\leq x}\{f(x)\} = M(\Phi_{\langle\rangle} f(x+1))x,$$

$$\text{wobei } \begin{cases} Ms0 & := (s)_0 \\ Ms(n+1) := \max(Msn, (s)_{n+1}) \end{cases}$$

$$\tilde{R}xyzv\underline{w} = R^* x(y\underline{w})(\Phi_{\langle\rangle}(\lambda m.zj_1(m)j_2(m)\underline{w})(j(\max_{k\leq x}\{vk\underline{w}\}, x)+1)),$$

$$\text{wobei } \begin{cases} R^*0y's & := y' \\ R^*(n+1)y's := s_{j(R^*ny's,n)} \end{cases}$$

$$\mu_b fx = \mu_b^*(\Phi_{\langle\rangle} f(x+1))x \dot{-} 1,$$

$$\text{wobei } \begin{cases} \mu_b^* s0 & := \begin{cases} 1 & (s)_0 = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \mu_b^* s(n+1) & := \begin{cases} n+2 & \mu_b^* sn = 0 \text{ und } s_{n+1} = 0 \\ \mu_b^* sn & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Φ_i kann für $i > 1$ aus A_i, $\tilde{R}$, Φ_1, $\min_0$ definiert werden ([Koh96, 2.2.3]). □

Korollar 2.11. $\mathrm{G}_\infty\mathrm{A}^\omega$ *ist abgeschlossen unter Rekursion vom Typ 1 als Regel und damit insbesondere auch unter B_{fin} für festes $K(l^0, h^1, \underline{a}^{\underline{0}})$, wobei $l, h, \underline{a}$ die einzigen freien Variablen in K sind.*

2.1.1 Majorisierung von B_{fin}

Definition 2.12. $\mathrm{G}_n\mathrm{R}^\omega_- \subset \mathrm{G}_n\mathrm{R}^\omega$ bezeichnet die Teilmenge aller geschlossenen Terme in $\mathrm{G}_n\mathrm{R}^\omega$, die nur aus Π, Σ, $A_0, \ldots, A_n$, 0^0, S, prd, $\min_0$, $\max_0$ aufgebaut sind, das heißt Terme, die nicht $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, $\tilde{R}_0$ oder μ_b enthalten.

$\mathrm{G}_n\mathrm{R}^\omega_-[K]$ bezeichnet die Menge aller geschlossenen Terme die aus $\mathrm{G}_n\mathrm{R}^\omega_-$ und K aufgebaut sind.

Lemma 2.13 ([Koh08, 3.37]). *Sei c^ρ eine Konstante aus $\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega$. Dann existiert ein geschlossener Term $t^{*\rho} \in \mathrm{G}_\omega\mathrm{R}^\omega_-$ mit*

$$\mathrm{G}_n\mathrm{A}^\omega_\mathrm{i} \vdash t^* \operatorname{maj}_\rho c.$$

Im Folgenden sei für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

$$n_1 \geq_S n_2 :\equiv lth(n_1) \geq lth(n_2) \wedge \bigwedge_{i=0}^{lth(n_2)} (n_1)_i \geq (n_2)_i.$$

Proposition 2.14. *Für K, K^* mit K^* maj K, n^*, n mit $n^* \geq n$ und s, s^* mit $s^* \geq_S s$ und $lth(s^*) = lth(s)$ gilt*

$$\mathrm{G_3A_i^\omega} \vdash B_{fin}(K^*, n^*, s^*) \geq_S B_{fin}(K, n, s).$$

Insbesondere majorisiert $\lambda K, n.B_{fin}(K, n, \langle\rangle)$ sich selbst.

Beweis. Induktion über $m := n^* + 1 \dot{-} lth(s)$:

- $m = 0$

$$B_{fin}(K^*, n^*, s^*) = B_{fin}(K, n, s) = \langle\rangle$$

- $m \rightsquigarrow m + 1$

$$\begin{aligned} h_{s^*,K^*,n^*}(x) &= M(s^* * \langle x\rangle * B_{fin}(K^*, n^*, s^* * \langle x\rangle)) \\ &\geq M(s * \langle x\rangle * B_{fin}(K, n, s * \langle x\rangle)) \quad \text{mit Voraussetzung und IH} \\ &= h_{s,K,n}(x) \end{aligned}$$

D.h. h_{s^*,K^*,n^*} maj $h_{s,K,n}$ und insbesondere

$$c_{s^*,K^*,n^*} = K^*(lth(s^*), h_{s^*,K^*,n^*}) \geq K(lth(s), h_{s,K,n}) = c_{s,K,n} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} B_{fin}(K^*, n^*, s^*) &= \langle c_{s^*,K^*,n^*}\rangle * B_{fin}(K^*, n^*, s^* * \langle c_{s^*,K^*,n^*}\rangle) \\ &\geq_S \langle c_{s,K,n}\rangle * B_{fin}(K, n, s * \langle c_{s,K,n}\rangle) \quad \text{mit (2.4) und IH} \\ &= B_{fin}(K, n, s) \end{aligned}$$

□

Proposition 2.15.

(i) *Jeder geschlossene Term $t^\rho \in \mathrm{G}_n\mathrm{R}^\omega$ wird majorisiert durch einen Term $t^{*\rho} \in \mathrm{G}_n\mathrm{R}^\omega_-$.*

(ii) *Jeder geschlossene Term $t^\rho \in \mathrm{G}_n\mathrm{R}^\omega[B_{fin}(\cdot, \cdot, \langle\rangle)]$ wird majorisiert durch einen Term $t^\rho \in \mathrm{G}_n\mathrm{R}^\omega_-[B_{fin}(\cdot, \cdot, \langle\rangle)]$.*

Beweis. Für (i) siehe [Koh96, 2.2.21] oder [Koh08, 3.39].
(ii) folgt aus (i) und Proposition 2.14. □

2.2 Interpretation von IPP

Die Funktionalinterpretation von IPP folgt [Oli06], für eine vollständige Diskussion siehe auch [Koh08, Abschnitt 10.2, Abschnitt 11.4].

$$\begin{aligned}(\mathrm{IPP})^{ND} \equiv \forall n\,\forall f\colon \mathbb{N}\to C_n\,\forall K\colon C_n\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N}\,\exists i\le n\,\exists g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}&\\ (g(K(i,g))\ge K(i,g)\ \wedge\ f(g(K(i,g)))=i)&\end{aligned} \tag{2.5}$$

Um g und i in der Funktionalinterpretation zu realisieren, reicht es $x_0,\dots,x_n\in\mathbb{N}$ und $g_0,\dots,g_n\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zu finden mit

$$\begin{aligned} x_i &= K(i,g_i),\\ g_i(x_i) &= \max\{x_0,\dots,x_n\}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Dann lösen $i := f(g_0(K(0,g_0))) = \cdots = f(g_n(K(n,g_n)))$ und $g := g_i$ die Funktionalinterpretation in (2.5).

Mit Hilfe von $\mathrm{BR}_{\mathrm{fin}}$ können g_i und x_i, die (2.6) genügen, gefunden werden:

Hilfssatz. Sei $\langle x_0,\dots,x_n\rangle := B_{fin}(n,\langle\rangle)$ dann gilt

$$\forall i\le n+1\,(\langle x_i,\dots,x_n\rangle = B_{fin}(n,\langle x_0,\dots x_{i-1}\rangle))\,.$$

Beweis. Induktion über i:
Für $i=0$ gilt die Aussage nach Definition.
Für $i+1\le n+1$ gilt mit Induktionshypothese

$$\begin{aligned}\langle x_i,\dots,x_n\rangle &= B_{fin}(n,\langle x_0,\dots,x_{i-1}\rangle)\\ &= \langle c_{\langle x_0,\dots,x_{i-1}\rangle}\rangle * B_{fin}(n,\langle x_0,\dots,x_{i-1}\rangle * c_{\langle x_0,\dots,x_{i-1}\rangle}),\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} x_i &= c_{\langle x_0,\dots,x_{i-1}\rangle}\\ \langle x_{i+1},\dots,x_n\rangle &= B_{fin}(n,\langle x_0,\dots,x_i\rangle).\end{aligned}$$ □

Mit $g_i := h_{\langle x_0,\dots,x_{i-1}\rangle}$ für $i\le n$ gilt dann

$$x_i = c_{\langle x_0,\dots,x_{i-1}\rangle} = K(i,h_{\langle x_0,\dots,x_{i-1}\rangle}) = K(i,g_i)$$

und

$$\begin{aligned} g_i(x_i) &= h_{\langle x_0,\dots,x_{i-1}\rangle}(x_i)\\ &= M(\langle x_0,\dots,x_{i-1}\rangle * \langle x_i\rangle * B_{fin}(n,\langle x_0,\dots,x_{i-1}\rangle * \langle x_i\rangle))\\ &=^{\text{Hilfssatz}} M(\langle x_0,\dots,x_n\rangle)\\ &= \max\{x_0,\dots,x_n\}.\end{aligned}$$

2.3 Interpretation von Π^0_1-CP

Negativübersetzung von Π^0_1-CP:

$$\begin{aligned}
&[\neg\neg\,(\forall x \leq n\,\neg\neg\exists y\,\forall z\,A_0(x,y,z) \to \exists v^*\,\forall u \leq n\,\neg\neg\exists v \leq v^*\,\forall w\,A_0(u,v,w))] \\
\leftrightarrow\, &[\forall x \leq n\,\neg\neg\exists y\,\forall z\,A_0(x,y,z) \to \neg\neg\exists v^*\,\forall u \leq n\,\neg\neg\exists v \leq v^*\,\forall w\,A_0(u,v,w)]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Dieser Satz ist, mit QF-CP äquivalent zu dem folgenden Satz, auf den die Funktionalinterpretation angewendet wird.

$$\begin{aligned}
&\forall x \leq n\,\neg\neg\exists y\,\forall z\,A_0(x,y,z) \to \neg\neg\exists v^*\,\forall u \leq n\,\exists v \leq v^*\,\forall w\,A_0(u,v,w) \\
\rightsquigarrow\, &\exists Y\,\forall x \leq n\,\forall Z\,A_0(x,Y(x,Z),Z(Y(x,Z))) \to \neg\neg\exists v^*\,\exists V\,\forall u \leq n\,\forall w\,A_0(u,V(u),w) \\
\rightsquigarrow\, &\left[\begin{array}{l}\forall Y, U \leq n, W\,\exists x \leq n, Z, V, v^*\,\big(A_0(x,Y(x,Z),Z(Y(x,Z))) \\ \qquad \to A_0(U(V,v^*),V(U(V,v^*)),W(V,v^*)))\,\wedge\,V(U(V,v^*)) \leq v^*\big)\end{array}\right] \equiv (\Pi^0_1\text{-CP})^{ND}
\end{aligned}$$

Dies führt zu den folgenden Bedingungen an x, Z, V, in Abhängigkeit von Y, U, W:

$$x = U(V,v^*) \qquad Y(x,Z) = V(U(V,v^*)) \qquad Z(Y(x,Z)) = W(V,v^*) \qquad V(x) \leq v^*$$

Sei B^W_{fin} definiert wie B_{fin} in Definition 2.5 mit der Ausnahme

$$M(s) := W(\lambda x.(s)_x, \max_{x \leq n}\{(s)_x\}).$$

Mit B^W_{fin} können dann analog zu Abschnitt 2.2 v_x und Z_x gefunden werden, so dass

$$\begin{aligned}
v_x &= Y(x, Z_x) \\
Z_x(v_x) &= W(\lambda x.v_x, \max\{v_0,\ldots,x_n\}).
\end{aligned}$$

Damit erfüllen dann

$$\begin{aligned}
\langle v_0,\ldots,v_n\rangle &:= B^W_{fin}(Y,n,\langle\rangle) \\
V &:= \lambda x.v_x \\
v^* &:= \max\{v_0,\ldots,v_n\} \\
x &:= U(V,v^*) \\
Z &:= h_{\langle v_0,\ldots,v_{x-1}\rangle}
\end{aligned}$$

die Gleichungen.

Alternativ kann auch der endliche Double Negation Shift

$$(\text{fDNS})\colon \forall x \leq n\,\neg\neg A(x) \to \neg\neg\forall x \leq n\,A(x),$$

der durch Induktion beweisbar ist, in (2.7) direkt interpretiert werden. Dies führt zu einer ähnlichen Lösung. Siehe [Ger06].

2.4 Schlüsse

Mit der Funktionalinterpretation von IPP und Π^0_1-CP und Korollar 2.11 können bestimmte Anwendungen dieser Prinzipien eliminiert werden:

Gilt

$$\mathrm{G}_\infty\mathrm{A}^\omega + \text{QF-AC} + \mathcal{P} \vdash \forall x\,(\mathrm{IPP}(\phi x, \psi x) \to \exists y^0\, A_0(x,y)),$$

wobei $\phi, \psi \in \mathrm{G}_\infty\mathrm{R}^\omega$, A_0 quantorfrei ist und x,y die einzigen freien Variablen in A_0 sind. $\mathcal{P}$ ist definiert wie in Satz 1.29.

$$\begin{aligned}
&\forall x\ (\mathrm{IPP}(\phi x, \psi x) \to \exists y\, A_0(x,y))\\
\equiv\, &\forall x\ (\exists i \le \phi x\, \forall k\, \exists m \ge k\, \psi x m = i \to \exists y\, A_0(x,y))\\
\rightsquigarrow^{ND}\, &\forall x\ (\exists i \le \phi x, g\, \forall k\, g(k) \ge k\ \wedge\ \psi x m = i \to \exists y\, A_0(x,y))\\
\rightsquigarrow^{ND}\, &\forall x\, \forall i \le \phi x, g\, \exists y\, \exists k\ (g(k) \ge k\ \wedge\ \psi x m = i \to A_0(x,y))
\end{aligned}$$

Nach Satz 1.29 gibt es Terme t_y, t_k mit

$$\forall x\, \forall i \le \phi x, g\ (g(t_k(x,i,g)) \ge t_k(x,i,g)\ \wedge\ \psi x m = i \to A_0(x, t_y(x,i,g))\,.$$

Durch Einsetzen der Lösung t_i, t_g von IPP^{ND} folgt

$$\begin{aligned}
&\forall x\ (t_i \le \phi x\ \wedge\ (g(t_k(x,t_i,t_g)) \ge t_k(x,t_i,t_g)\ \wedge\ \psi x m = i \to A_0(x, t_y(x,t_i,t_g)))\\
\leftrightarrow\, &\forall x\, A_0(x, t_y(x,t_i,t_g)).
\end{aligned}$$

Da t_K nur von x^0 abhängig ist, sind nach Korollar 2.11 t_i und t_g Terme aus $\mathrm{G}_\infty\mathrm{R}^\omega$.
Es folgt

$$\mathrm{G}_\infty\mathrm{A}^\omega + \mathcal{P} \vdash \forall x\, \exists y\, A_0(x,y).$$

Mit Proposition 2.14 gilt diese Argumentation auch für die NMD-Interpretation und das obige Ergebnis lässt sich verallgemeinern zu:
Aus

$$\mathrm{G}_\infty\mathrm{A}^\omega + \text{QF-AC} + \Delta \vdash \forall x\,(\mathrm{IPP}(\phi x, \psi x) \to \exists y^0\, A_0(x,y))$$

folgt

$$\mathrm{G}_\infty\mathrm{A}^\omega + \tilde{\Delta} \vdash \forall x\, \exists y\, A_0(x,y),$$

wobei Δ und $\tilde{\Delta}$ wie in Satz 1.33 definiert sind.

Vorhandene Resultate beweisen sogar stärkere Aussagen:
Aus Satz 1.41 folgt, dass die Anwendungen von IPP aus

$$\mathrm{G}_\infty\mathrm{A}^\omega + \text{QF-AC} + \mathcal{P} \vdash \forall x\,(\forall n\, \mathrm{IPP}(n, \psi x) \to \exists y\, A_0(x,y))$$

eliminiert werden können, da

$$\Pi^0_1\text{-AC}(\chi x) \to \forall n\, \mathrm{IPP}(n, \psi x)$$

für geeignetes χ.

Es ist allerdings offen, ob mit B_{fin} oder einer anderen Lösung der Funktionalinterpretation von IPP ein solches Resultat bewiesen werden kann. Satz 1.41 basiert wesentlich auf der Struktur von $\mathrm{G}_\infty\mathrm{A}^\omega$, während bei einer Lösung über die Funktionalinterpretation die Struktur von $\mathrm{G}_\infty\mathrm{A}^\omega$ nur für die Eigenschaften der Terme verwendet wird (hier in Form von Korollar 2.11).

3 Lemma von König

Definition 3.1 (Baum)**.**

1. Eine partielle Ordnung $(T, \prec)$, in der die Menge der Vorgänger $pr(x) := \{y \in T \mid y \prec x\}$ für jedes $x \in T$ wohlgeordnet ist, heißt *Baum*.

2. Eine linear geordnete maximale Menge in einem Baum heißt *Pfad*.

3. Ein Baum $(T, \prec)$, in dem für jedes $x \in T$ gilt, dass die Menge der direkten Nachfolger $succ(x) := \{y \in T, x \prec y \wedge (\nexists z\, (x \prec z \wedge z \prec y)\}$ endlich ist, heißt *endlich verzweigt*.
   Ein Baum in dem $|succ(x)| \leq n$, für alle $x \in T$, heißt *n-verzweigt*.

Lemma 3.2 (Lemma von König, [Kőn36])**.** *Ein endlich verzweigter Baum, der beliebig lange endliche Pfade enthält, besitzt einen unendlich langen Pfad.*

3.1 Formalisierung

Formal wird ein Baum als charakteristische Funktion über die Anfangsstücke (bzgl. $\prec$) der Pfade in einem Baum beschrieben. D.h. ein Baum $(\mathbb{N}, \prec)$ wird durch die Funktion f beschrieben, falls

$$\begin{aligned} f(\langle\rangle) &= 0 \\ f(\langle x \rangle) &= 0 \quad \text{gdw.} \quad x \prec\text{-minimal ist} \\ f(\langle n_1, \ldots, n_k, x \rangle) &= 0 \quad \text{gdw.} \quad f(\langle n_1, \ldots, n_k \rangle) = 0 \text{ und } x \in succ_{\prec}(n_k) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Falls $\prec$ entscheidbar ist und $\prec \subseteq <$ sind beide Formalisierungen äquivalent, da die Bedingungen an f (insbesondere $x \in succ_{\prec}(n_k)$) damit entscheidbar sind.

Definition 3.3 (Lemma von König (KL), [Koh08, S. 150])**.**

$$(\mathrm{KL})\colon \forall f^1\, \big(T(f) \wedge \forall x^0\, \exists s^0\, (lth(s) = x \wedge fs = 0) \to \exists b\, \forall x^0\, f(\bar{b}x) = 0\big)$$

wobei T ausdrückt, dass f einen endlich verzweigten Baum beschreibt:

$$T(f) :\equiv \forall s, r\, \left(f(s * r) = 0 \to fs = 0\right) \wedge \forall s\, \exists k\, \forall x\, \left(f(s * \langle x \rangle) = 0 \to x \leq k\right).$$

Das Lemma von König ist in RCA_0 äquivalent zu arithmetischer Komprehension [Sim99, III.7.2.]. Damit folgt aus KL auch das Lemma von König für Bäume, die sich nicht direkt wie in (3.1) darstellen lassen.

Die Einschränkung auf Binärbaume (d.h. Bäume, die nur aus endlichen 0-1-Folgen bestehen) ist in vielen Fällen ausreichend. Dabei handelt es sich um das so genannte *Schwache Lemma von König* („Weak König's Lemma“, WKL).

WKL_0 ($\mathrm{RCA}_0 + \mathrm{WKL}$, siehe Definition 1.26) ist Π^0_2-konservativ über PRA (Harrington, siehe z.B. [Sie85]) und damit schwächer als arithmetische Komprehension und das Lemma von König.

Definition 3.4 (Schwaches Lemma von König (WKL), [Koh08, S. 118])**.**

$$(\mathrm{WKL})\colon \forall f^1 \left(T_2(f) \wedge \forall x^0\, \exists s^0\, (lth(s) = x \wedge fs = 0) \to \exists b \leq_1 1\, \forall x^0\, f(\bar{b}x) = 0\right),$$

wobei T_2 ausdrückt, dass f einen Binärbaum beschreibt:

$$T_2(f) :\equiv \forall s, r\ (f(s * r) = 0 \to fs = 0) \wedge \forall s, x\ (f(s * \langle x \rangle) = 0 \to x \leq 1)\,.$$

Definition 3.5 (Beschränktes Lemma von König (WKL^*), [Koh08, 9.19])**.**

$$(\mathrm{WKL}^*)\colon \forall f^1, h^1 \left(T^*(f,h) \wedge \forall x^0\, \exists s^0\, (lth(s) = x \wedge fs = 0) \to \exists b \leq_1 h\, \forall x^0\, f(\bar{b}x) = 0\right),$$

wobei T^* ausdrückt, dass f einen Baum beschreibt, der durch h beschränkt ist:

$$T^*(f,h) :\equiv \forall s, r\ (f(s * r) = 0 \to fs = 0) \wedge \forall s, x\ (f(s * \langle x \rangle) = 0 \to x \leq h(lth(s)))\,.$$

Proposition 3.6 ([Sim99, IV.1.3.])**.** *Das schwache Lemma von König* (WKL) *ist über* EA^2 *äquivalent zu dem beschränktem Lemma von König* (WKL^*)*.*

Beweis. Simpson beweist in [Sim99, IV.1.3.] diese Äquivalenz in dem System RCA_0. Dieser Beweis ist auch in EA^2 ausführbar. □

Damit gibt es zwei Ursachen für die Stärke des Lemmas von König:

- Die Breite des Baumes ist nicht uniform in der Tiefe beschränkbar.
- Der Baum wird nicht, wie oben, durch eine Funktion f, dargestellt, sondern z.B. durch eine Relation $\prec$, wie in Definition 3.1.

  Selbst wenn der Baum wie in (3.1) dargestellt werden kann, folgt im Allgemeinen nicht die Existenz einer Beschränkungsfunktion.

3.2 KL$\restriction$

Für den Beweis des Satzes von Ramsey für Paare benötigen wir eine Version des Lemmas von König, die stärker als WKL ist. Andererseits soll die Version lediglich so stark sein, dass sie mit der Elimination von Skolemfunktionen für monotone Formeln (siehe Abschnitt 1.3) auf WKL zurückgeführt werden kann. Für KL ist nicht bekannt ob dies möglich ist.

Definition 3.7.

$$(\mathrm{KL}\restriction)\colon \forall f^1 \, \big(T\restriction(f) \wedge \forall x^0 \, \exists s^0 \, (lth(s) = x \wedge fs = 0) \to \exists b^1 \, \forall x^0 \, f(\bar{b}x) = 0\big)\,,$$

wobei

$$\begin{aligned} T\restriction(f) :\equiv \forall s, r \; (f(s * r) = 0 \to fs = 0) \\ \wedge \forall l \, \exists k \, \forall s, x \; ((lth(s) = l \wedge f(s * \langle x \rangle) = 0) \to x \leq k) \end{aligned}$$

KL$\restriction(f)$ bezeichnet KL$\restriction$ für ein festes f.

KL$\restriction$ unterscheidet sich von WKL* nur dadurch, dass in WKL* die Beschränkung in der Breite des Baumes uniform mit einer Funktion gegeben ist, während in KL$\restriction$ nur die Existenz einer Schranke für jede Tiefe gefordert wird. Eine Anwendung von Π^0_1-AC kann also eine Beschränkungsfunktion für die Breite des Baumes erzeugen.

Lemma 3.8.

$$\mathrm{EA}^2 + \mathrm{WKL} \vdash \forall f \, (\Pi^0_1\text{-AC}(\xi f) \to \mathrm{KL}\restriction(f))$$

Beweis. Aus

$$\forall i \, \exists k \, \forall s, x \; ((lth(s) = i \wedge f(s * \langle x \rangle) = 0) \to x \leq k)$$

folgt mit Π^0_1-AC(ξf) für ein geeignetes ξ

$$\exists h \, \forall s, x \; (f(s * \langle x \rangle) = 0) \to x \leq h(lth(s)))$$

und damit die Existenz eines h mit $T^*(f, h)$. Aus WKL* und damit nach Proposition 3.6 auch aus WKL folgt dann die Existenz eines unendlichen Pfades. $\square$

Um das volle Lemma von König (KL) aus KL$\restriction$ zu beweisen benötigt reicht Σ^0_2-IA.

Lemma 3.9.

$$\mathrm{EA}^2 + \Sigma^0_2\text{-IA} \vdash \forall f \; (\mathrm{KL}\restriction(f) \to \mathrm{KL}(f))$$

Beweis.

$$\forall l \, \exists k \, \forall s, x \, (lth(s) \leq l \wedge f(s * \langle x \rangle) = x \to x \leq k) \tag{3.2}$$

wird mit Σ^0_2-IA aus

$$\forall s \, \exists k \, \forall x \; (f(s * \langle x \rangle) = 0 \to x \leq k)$$

bewiesen.
Der Induktionsanfang ist trivial.
Induktionsschritt $l \rightsquigarrow l + 1$:
Aus der Voraussetzung folgt

$$\forall s \, \exists k \, \forall x \, (lth(s) \leq l + 1 \wedge f(s * \langle x \rangle) = 0 \to x \leq k).$$

Mit der Induktionshypothese gibt es ein k' so dass für alle s, die in den Baum sind und die nicht länger als $l+1$ sind, gilt $s \leq \Phi_{\langle\rangle}(\lambda x.k')(l+1) =: c$.
Damit ist die Aussage von oben äquivalent zu

$$\forall s \leq c\, \exists k\, \forall x\, (lth(s) \leq l+1 \wedge f(s * \langle x \rangle) = 0 \rightarrow x \leq k)$$

und mit Π^0_1-CP folgt

$$\exists k^*\, \forall s \leq c\, \forall x\, (lth(s) \leq l+1 \wedge f(s * \langle x \rangle) = 0 \rightarrow x \leq k^*)$$

und damit (3.2) für $l+1$. $\square$

In RCA_0 können aus Π^0_1-AC^- auch Instanzen des vollen Lemmas von König bewiesen werden. (Funktionen werden dabei in RCA_0 durch ihren Graph dargestellt, siehe S. 19.)

Korollar 3.10.

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall f\, (\Pi^0_1\text{-AC}(\xi f) \rightarrow \mathrm{KL}(f)).$$

Beweis. Mehrere Instanzen von Π^0_1-AC(ξf) können in eine kodiert werden können (Bemerkung 1.18). Mit einer Instanz und Σ^0_1-IA folgt Σ^0_2-IA^-. Aus Lemma 3.8 und dem Beweis zu Lemma 3.9 folgt dann die Behauptung. $\square$

Wir vermuten, dass EA^2 bzw. RCA^*_0 zu schwach sind dies zu beweisen. Uns ist allerdings keine Publikation zu diesem Thema bekannt.

3.3 Funktionalinterpretation

Definiere

$$\hat{f}n := \begin{cases} fn & \text{falls } fn \neq 0 \vee (\forall k, l\, (k * l = n \rightarrow fk = 0))\,, \\ 1^0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\hat{f}$ modifiziert f so, dass es einen Baum beschreibt. Falls f schon einen Baum beschreibt gilt $f = \hat{f}$. Weiterhin definiere

$$\begin{aligned} \mathsf{Inf}(x,q) &:\equiv \left[lth(q) \geq x \wedge \hat{f}q = 0 \right], \\ \mathsf{Bnd}(l,k,r) &:\equiv \left[lth(r) = l+1 \wedge \hat{f}(r) = 0 \rightarrow (r)_l \leq k \right]. \end{aligned}$$

Inf und Bnd sind Abkürzungen, die zur besseren Lesbarkeit verwendet werden.

3.3.1 Funktionalinterpretation von WKL*

Wir verwenden das zu WKL* äquivalente Prinzip

$$\forall f^1, h^1 \Big(\forall r^0\, \mathsf{Bnd}(lth(r) \dot{-} 1, h(lth(r) \dot{-} 1), r) \wedge \forall x^0\, \exists q^0\, \mathsf{Inf}(x,q) \\ \rightarrow \exists b \leq_1 h\, \forall a^0\, \hat{f}(\bar{b}a) = 0\Big).$$

Funktionalinterpretation:

$$\forall f\, \forall h\, \forall Q\, \forall A\, \exists b\, \exists r, x\, \Big(\mathsf{Bnd}(lth(r) \dot{-} 1, h(lth(r) \dot{-} 1), r) \wedge \mathsf{Inf}(x, Qx) \rightarrow \hat{f}(\bar{b}(Ab)) = 0\Big)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} t_x &:= \Phi_{WKL^*}(A, h, \langle\rangle) \\ t_r &:= Q(t_x) \\ t_b &:= [t_r] \end{aligned}$$

wobei

$$[x] := \lambda n.(x)_n$$

und

$$\Phi_{WKL^*}(A,h,x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A[x] < lth(x), \\ 1 + \max_{i \leq h(lth(x))}\{\Phi_{WKL^*}(A,h,x * \langle i \rangle)\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Lösung folgt Howards Funktionalinterpretation des schwachen Lemmas von König [How81]. Φ_{WKL^*} kann mit einem schwachen, trivial majorisierbaren Bar-Rekursor definiert werden. Für eine Diskussion der Funktionalinterpretation von WKL siehe auch [Saf08].

3.3.2 Funktionalinterpretation von KL↾

Wir verwenden das zu KL↾ äquivalente Prinzip

$$\forall f^1 \Big(\forall l^0\, \exists k^0\, \forall r^0\, \mathsf{Bnd}(l,k,r) \wedge \forall x^0\, \exists q^0\, \mathsf{Inf}(x,q) \rightarrow \exists b\, \forall x\, \hat{f}(\bar{b}x) = 0\Big).$$

Zuerst wird die Anwendung von AC in der Prämisse interpretiert:

$$\begin{aligned} &\forall l\, \exists k\, \forall r\, \mathsf{Bnd}(l,k,r) \xrightarrow{\mathrm{AC}^0} \exists h^1\, \forall l'\, \forall r'\, \mathsf{Bnd}(l', hl', r') \\ \rightsquigarrow^{ND} &\forall K\, \exists H\, \forall L', R'\, \exists l, R \\ &\quad \big(\mathsf{Bnd}(l, KlR, R(KlR)) \rightarrow \mathsf{Bnd}(L'(HL'R'), HL'R'(L'(HL'R')), R'(HL'R'))\big) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dies führt zu folgenden Bedingungen:

$$\begin{cases} t_l = L'(t_H) \\ K(t_l, t_R) = t_H(L'(t_H)) \\ t_R(K(t_l, t_R)) = R'(t_H). \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} t_l &:=_0 L'h_0 \\ t_H &:=_1 h_0 \\ t_R &:=_1 \lambda d^0.R'(E_{L'h_0} d), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} h_0 &:=_1 \Phi_0 L'u0^0 0^1 \\ E_n &:=_{000} \lambda d^0.\Phi_0 L'u(Sn)(\overline{h_0, n} * d) \\ unv &:=_0 Kn(\lambda d^0.R'(v(d))). \end{aligned}$$

Diese Lösung folgt [Spe62], siehe auch [Koh08, Kapitel 11].

Funktionalinterpretation der gesamten Aussage:

$$\begin{aligned} &\mathrm{KL}{\restriction} \\ \rightsquigarrow^{ND} &\forall l\,\forall R\,\exists k\,\mathsf{Bnd}(l,k,Rk) \wedge \forall x\,\exists q\,\mathsf{Inf}(x,q) \to \forall A\,\exists b\,\hat{f}(\bar{b}(Ab)) = 0 \\ \rightsquigarrow^{ND} &\forall K\,\forall Q\,\forall A\,\exists b\,\exists l, R, x\,\Big(\mathsf{Bnd}(l, KlR, R(KlR)) \wedge \mathsf{Inf}(x, Qx) \to \hat{f}(\bar{b}(Ab)) = 0\Big) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nach (3.3) bleibt zu lösen

$$\begin{aligned} &\forall K\,\forall Q\,\forall A\,\exists b\,\exists L', R', x\,\Big(\mathsf{Bnd}(L'(t_H L'R'), t_H L'R'(L'(t_H L'R')), R'(t_H L'R')) \\ &\qquad \wedge\ \mathsf{Inf}(x, Qx) \to \hat{f}(\bar{b}(Ab)) = 0\Big). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Mit der Funktionalinterpretation von WKL* ergibt sich folgende Lösung für (3.5):

$$\begin{aligned} t_{L'}(h) &:= lth(t_{R'}(h)) \dot{-} 1 \\ t_{R'}(h) &:= Q(\Phi_{WKL^*}(A, h, \langle\rangle)) \\ t_x &:= \Phi_{WKL^*}(A, t_H t_{L'} t_{R'}, \langle\rangle) \\ t_b &:= [Q(t_x)]. \end{aligned}$$

Damit wird die Funktionalinterpretation von KL↾ in (3.4) gelöst durch

$$\begin{aligned} t_l &:=_0 t_{L'}(h^0) \\ t_R &:=_1 \lambda d^0.t_{R'}(E_{t_{L'}h_0}d) \\ t_x &:= \Phi_{WKL^*}(A, h_0 t_{L'} t_{R'}, \langle\rangle) \\ t_b &:= [Q(t_x)], \end{aligned} \tag{3.6}$$

wobei

$$\begin{aligned} h_0 &:=_1 \Phi_0 t_{L'} u 0^0 0^1 \\ E_n &:=_{000} \lambda d^0.\Phi_0 t_{L'} u(Sn)(\overline{h_0, n} * d) \\ unv &:=_0 Kn(\lambda d^0.t_{R'}(v(d))). \end{aligned}$$

4 Satz von Ramsey für Paare

Definition 4.1.

1. $[X]^k := \{Y \subseteq X \mid |Y| = k\}$
2. Eine *n-Färbung* von $[X]^k$ ist eine Abbildung von $c\colon [X]^k \to C_n$, wobei $C_n := \{0, \dots, n-1\}$.
3. Eine Menge $H \subseteq X$ heißt *monochrom* für eine n-Färbung c von $[X]^k$, wenn c auf $[H]^k$ konstant ist.
4. Sei $(X, \prec)$ eine partielle Ordnung. Eine Menge $H \subseteq \mathbb{N}$ heißt *min-monochrom* für eine n-Färbung c von $[X]^k$, wenn für alle $i \in H$ gilt c ist konstant auf $\big\{\{i, x_2, \dots, x_k\} \mid i \prec x_l \text{ für } l = 2, \dots, k\big\}$.

Definition 4.2 (Ramsey's Theorem)**.** Für alle k, n und jede n-Färbung c von $[\mathbb{N}]^k$ existiert eine unendliche Menge $H \subseteq \mathbb{N}$, so dass H monochrom für c ist.

$\mathrm{RT}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{n}}$ bezeichnet Ramsey's Theorem für n-Färbungen von $[\mathbb{N}]^k$ und $\mathrm{RT}^{\mathrm{k}}_{<\infty} :\equiv \forall n\, \mathrm{RT}^{\mathrm{k}}_{n}$.

Offensichtlich

$$\mathrm{RT}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{n}} \to \mathrm{RT}^{\mathrm{k'}}_{\mathrm{n'}} \qquad \text{für } k \geq k' \text{ und } n \geq n'.$$

Im Falle $k = k'$ gilt mit einem Farbenblindheitsargument sogar

$$\mathrm{RT}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{n}} \leftrightarrow \mathrm{RT}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{n'}} \qquad \text{für } n, n' \geq 2. \tag{4.1}$$

Ramsey's Theorem ist eine Verallgemeinerung des unendlichen Schubfachprinzips, insbesondere gilt

$$\mathrm{RT}^1_{<\infty} \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \mathrm{IPP}.$$

$\mathrm{RT}^1_{\mathrm{n}}$ entspricht dem Schubfachprinzip für festes n und ist damit in reiner Logik (ohne Induktion) beweisbar.

4.1 Status

Die Analyse der logischen und algorithmischen Stärke des Satzes von Ramsey begann Specker 1971 mit [Spe71]:

Satz 4.3 ([Spe71])**.** *Es gibt eine berechenbare 2-Färbung von $[\mathbb{N}]^2$ ohne berechenbare unendliche monochrome Teilmenge.*
Insbesondere $\mathrm{RCA}_0 \nvdash \mathrm{RT}^2_2$.

Es folgten weitere rekursiontheoretische Ergebnisse von Jockusch 1972 [Joc72]:

Satz 4.4 ([Joc72]).

1. *Für jedes $n, k \in \mathbb{N}$ gilt: Jede berechenbare k-Färbung von $[\mathbb{N}]^n$ hat eine unendliche homogene Π^0_n Menge.*
2. *Für jedes $n \geq 2$ gibt es eine berechenbare 2-Färbung von $[\mathbb{N}]^n$, die keine unendliche homogene Σ^0_n Menge hat.*
3. *Für jedes n, k und jede berechenbare k-Färbung von $[\mathbb{N}]^n$ gibt es eine unendliche homogene Menge A, so dass $A' \leq_T 0^{(n)}$ gilt.*
4. *Für jedes $n \geq 2$ gibt es eine berechenbare 2-Färbung von $[\mathbb{N}]^n$, so dass $0^{(n-2)} \leq_T A$ für jedes unendliche homogene Menge A gilt.*

Korollar 4.5 ([Joc72]). *Für den Satz von Ramsey für Paare ($n = 2$) gilt damit insbesondere:*

1. *Es gibt eine 2-Färbung, so dass es keine unendliche monochrome Δ^0_2 Menge gibt.*
2. *Für jede 2-Färbung gibt es eine unendliche monochrome Menge A, die low bezüglich $0'$ ist, d.h. $A' \leq_T 0''$.*

1987 betrachtete Hirst in seiner Dissertation im Zuge der Reverse Mathematics die beweistheoretische Stärke des Satzes von Ramsey [Hir87]. Er bewies neben Satz 2.4

Satz 4.6 ([Hir87, 6.5]). $\mathrm{WKL}_0 \nvdash \mathrm{RT}^1_{<\infty}$

Satz 4.7 ([Hir87, 6.8]). $\mathrm{RCA}_0 \vdash \mathrm{RT}^2_2 \rightarrow \mathrm{RT}^1_{<\infty}$

Satz 4.8 ([Hir87, 6.11]). $\mathrm{RCA}_0 \vdash \mathrm{RT}^2_{<\infty} \rightarrow \Pi^0_2\text{-CP}$

Seetapun bewies 1995 mit einer rekursionstheoretischen Analyse, dass RT^2_2 schwächer als ACA_0 ist [SS95].

Mit modelltheoretischen Methoden, konnten Cholak, Jockusch und Slaman 2001 in [CJS01], u.A. das Ergebnis noch verbessern und beweisen:

Satz 4.9 ([CJS01, 10.2]). $\mathrm{RCA}_0 + \Sigma^0_2\text{-IA} + \mathrm{RT}^2_2$ *ist* Π^1_1*-konservativ über* $\mathrm{RCA}_0 + \Sigma^0_2\text{-IA}$.

Satz 4.10 ([CJS01, 11.1]). $\mathrm{WKL}_0 + \Sigma^0_3\text{-IA} + \mathrm{RT}^2_{<\infty}$ *ist* Π^1_1*-konservativ über* $\mathrm{RCA}_0 + \Sigma^0_3\text{-IA}$.

Auf den Ergebnissen von Jockusch aufbauend zeigte Simpson 1999

Satz 4.11 ([Sim99, III.7.6] und Beweis zu [Sim99, III.7.5]). *Über* RCA_0 *sind* ACA_0 *und* $\mathrm{RT}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ *für alle $n \geq 3$ und $k \geq 2$ äquivalent.*

Neuere Ansätze versuchen die Stärke von RT^2_2 genauer zu bestimmen, indem sie RT^2_2, in das *Stable Ramsey's Theorem* (SRT^2_2) und das *Cohesive Ramsey's Theorem* (CRT^2_2) aufteilen, und diese Prinzipien getrennt betrachtet.

SRT^2_2 ist RT^2_2 eingeschränkt auf stabile Färbungen c, d.h. $c(\{x, y\})$ ist für festes x und große y konstant. CRT^2_2 besagt, dass es für jede Färbung c eine Teilmenge gibt, auf der c stabil ist. Siehe dazu [HS07] und auch [CJS01].

Es ist unbekannt, ob $\mathrm{RT}^2_{<\infty}$ oder RT^2_2 über RCA_0 WKL implizieren.

Die Ergebnisse sind in folgendem Diagramm zusammengefasst. Die Pfeile drücken Implikationen über RCA_0 aus, doppelte Pfeile drücken eine strikte Implikation aus.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{ACA}_0 \arrow[r, leftrightarrow, "(1)"] \arrow[dd, Rightarrow, "(10)"] & \mathrm{RT}^3_2 \arrow[d, Rightarrow, "(2)"] & \\
 & \mathrm{RT}^2_{<\infty} \arrow[r, "(3)"] \arrow[d, Rightarrow] & \Pi^0_2\text{-CP} \\
\mathrm{WKL}_0 \arrow[dr, "|" marking, "(8)"] & \mathrm{RT}^2_2 \arrow[ur, "|" marking, "{(4),(5)}"'] \arrow[d, Rightarrow, "{(6),(7)}"] & \\
 & \mathrm{RT}^1_{<\infty} \arrow[r, leftrightarrow, "(9)"] & \Pi^0_1\text{-CP}
\end{tikzcd}$$

Diagramm 4.1: Zusammenhang zwischen RT und anderen logischen Prinzipien

Referenzen zu Diagramm 4.1:

(1) Satz 4.11
(2) Satz 4.10
(3) Satz 4.8
(4) Satz 4.9
(5) $\mathrm{RCA}_0 + \Sigma^0_2\text{-IA} \nvdash \Pi^0_2\text{-CP}$ [HP98, IV.1.29]
(6) Satz 4.7
(7) Sei COMP, die Z_2 Struktur, deren First Order Teil der Standard-Interpretation in $\mathbb{N}$ entspricht und deren Second Order Teile alle berechenbaren Mengen enthält. $\mathrm{COMP} \vDash \mathrm{RCA}_0 + \Pi^0_1\text{-CP}$, aber $\mathrm{COMP} \nvDash \mathrm{RCA}_0 + \mathrm{RT}^2_2$, wegen Satz 4.3.
(8) Satz 4.6
(9) Satz 2.4
(10) [Sim99, I.10.2]

4.2 Zwei Beweise für RT^2_n

In diesem Abschnitt werden zwei Beweise von RT^2_n dargestellt. Zunächst der ursprüngliche Beweis von Ramsey [Ram30] und danach ein alternativer Beweis von Erdős und Rado [EHMR84, 10.2 S. 68], der genutzt wurde um Verallgemeinerungen des Satzes von Ramsey in der mengentheoretischen Kombinatorik zu beweisen.

Beide Beweise sind ähnlich aufgebaut: Es wird zuerst ein unendliches, min-monochromes $X \subseteq \mathbb{N}$ erzeugt. Auf X kann dann mit RT^1_n eine unendliche monochrome Teilmenge gefunden werden. (Beide Beweise können leicht verallgemeinert werden, so dass sie $\mathrm{RT}^{\mathrm{k}+1}_\mathrm{n}$ auf $\mathrm{RT}^\mathrm{k}_\mathrm{n}$ zurückführen.)

Der Beweis von Ramsey ist einfacher und scheinbar elementar. Allerdings ist er sogar in ACA_0 nicht ausführbar [Sim99, S. 123]. Damit ist er zur genaueren Bestimmung der logischen Stärke von RT^2_n ungeeignet.

Der zweite Beweis ist in ACA_0 ausführbar. In diesem Beweis wird das Lemma von König verwendet, welches in diesem Fall genauer analysiert werden kann.

Satz 4.12. RT^2_n *gilt, für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis von Ramsey für Satz 4.12. Sei $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to C_n$ eine n-Färbung.

Wir konstruieren eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, auf der c min-monochrom ist.
Definiere dazu $c_j(x) = c(\{j, x\})$.

- Setzte $x_0 := 0$.
- Nach RT^1_n existiert ein unendliches $X_1 \subseteq \mathbb{N} \setminus \{x_0\}$, auf der c_0 konstant ist. Setze $x_1 := \min X_1$.
- Es existiert wieder ein unendliches $X_2 \subseteq X_1 \setminus \{x_1\}$, auf dem c_{x_1} konstant ist. $x_2 := \min X_2$.
- ...

Durch Iteration erhält man eine Folge $X := (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, die nach Konstruktion min-monochrom ist.

Definiere $c\colon X \to C_n$ mit $c'(x_j) := c(\{x_j, x_{j+1}\})$.
Mit RT^1_n existiert ein unendliches $H \subseteq X$ mit $c'(H) = i$.
Für $x, y \in H$ mit $x < y$ gilt

$$c(\{x, y\}) = c'(x) = i,$$

d.h. H ist monochrom für c. □

Für den vollständigen Beweis von Erdős und Rado, siehe [EHMR84, 10.2 Seite 68]. Die Notation des Beweises folgt [Far08].

Alternativer Beweis für Satz 4.12. Sei $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to C_n$ eine n-Färbung.
Setze

$$\begin{aligned} c_k\colon \{0, \dots, k-1\} &\to C_n \\ x &\mapsto c(\{k, x\}) \end{aligned}$$

Definiere rekursiv eine partielle Ordnung $\prec$ auf $\mathbb{N}$:

- $0 \prec 1$
- Falls $\prec$ auf $\{0, \dots, m-1\}$ bereits definiert ist, dann definiere für $k \in \{0, \dots, m-1\}$

  $$P_k := \big\{x \in \{0, \dots, m-1\} \mid x \prec k\big\}$$

  und

  $$k \prec m \quad \text{gdw.} \quad c_{k|P_k} = c_{m|P_k}.$$

Für $\prec$ gilt dann

(i) $\prec \subseteq <_{\mathbb{N}}$ und damit ist P_k gleich der Menge der $\prec$-Vorgänger $pd(k) := \{x \in \mathbb{N} \mid x \prec k\}$,

(ii) $0 \prec x \quad$ für alle $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

(iii) $\prec$ ist transitiv,

(iv) Auf $pd(m)$ beschreiben $<$ und $\prec$ die gleiche Ordnung, d.h. für $x, y \in pd(m)$ gilt $x < y \Leftrightarrow x \prec y$.

(i), (ii) folgen direkt aus der Definition von $\prec$.
(iii):
$(x \prec y$ und $y \prec z) \Rightarrow x \prec z$ wird mit Induktion über z bewiesen.
Der Fall $z = 0$ ist trivial wegen (i).
Induktionsschritt (Die Aussage gilt für alle $z' < z \rightsquigarrow$ die Aussage gilt für z):

$$
\begin{aligned}
x \prec y \text{ und } y \prec z &\Rightarrow c_{x|P_x} = c_{y|P_x}, c_{y|P_y} = c_{z|P_y} \\
&\qquad \text{und } P_x \subseteq P_y \qquad \text{mit Induktionshypothese für } y < z \\
&\Rightarrow c_{x|P_x} = c_{y|P_x} = c_{z|P_x} \\
&\Rightarrow x \prec z
\end{aligned}
$$

(iv):
„$\Leftarrow$“: folgt aus (i).
„$\Rightarrow$“: Ohne Beschränkung $x \neq 0$, dieser Fall ist nach (ii) trivial.
Beweis durch Induktion über m:

- Für $m = 0$ ist die Aussage nach (i) richtig.
- Angenommen die Aussage gilt für alle $m' < m$.
  Es gibt ein $<$-maximales i mit $i \prec x$ und $i \prec y$ ($0 \prec x, y$ mit (ii)). Sei p ein direkter $\prec$-Nachfolger von i, der mit m $\prec$-vergleichbar ist. Ein solcher existiert, weil $i \prec x \prec m$. Wegen $i \prec y \prec m$ und $i \prec p \prec m$ folgt $c_y(i) = c_m(i) = c_p(i)$. Aus der Induktionshypothese (für $m' = p$) folgt, dass alle $i' \prec p$ mit i vergleichbar sind, insbesondere gilt $P_p = P_i \cup \{i\}$ ($p \in succ(i)$). Mit $i \prec y$ und $c_y(i) = c_p(i)$ gilt dann $p \prec y$, der Fall $p = y$ kann nicht eintreten. Analog folgt $p \prec x$ oder $p = x$. Da $i \prec x$ und $i \prec y$ aber maximal ist, muss gelten $p = x$, insbesondere $x \prec y$.

Aus (iv) folgt, dass $pd(m)$ wohlgeordnet ist. Damit ist $(\mathbb{N}, \prec)$ ein Baum.

Jeder Pfad in $(\mathbb{N}, \prec)$ ist min-monochrom für c, denn für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \succ i$ mit $x \prec y$ gilt $c(\{i, x\}) = c(\{i, y\})$.

$(\mathbb{N}, \prec)$ ist n-verzweigt (und damit insbesondere endlich verzweigt), weil für alle $x, y \in succ(i)$ mit $x \neq y$ gilt $c_x(i) \neq c_y(i)$. Andernfalls wären x und y vergleichbar, da schon $c_{x|P_i} = c_{y|P_i}$. Da aber $c_x(i), c_y(i) \in C_n$ gilt $|succ(a)| \leq n$ für alle $i \in T$.

Nach dem Lemma von König (Lemma 3.2) existiert ein unendlicher Pfad B.

Definiere:

$$
\tilde{c}\colon B \to C_n \qquad \tilde{c}(x) := c(\{x, k\}) \quad \text{für ein } k \in B \text{ mit } k > x
$$

$\tilde{c}$ ist wohldefiniert, weil B min-monochrom für c ist.

Aus RT^1_n folgt, dass es ein unendliches $H \subseteq B$ gibt, auf dem $\tilde{c}$ konstant ist. Für $\{x,y\},\{u,v\} \in [H]^2$, ohne Beschränkung $x < y, u, v$ und $u < v$, gilt $\tilde{c}(x) = \tilde{c}(u)$ und damit auch $c(\{x,y\}) = c(\{u,v\})$, d.h. c ist konstant auf $[H]^2$. □

4.3 Formalisierter Beweis von RT^2_n

Wir formalisieren hier den Beweis von Erdős und Rado und zeigen, dass der Beweis für jede Folge von festen Instanzen in $\mathrm{EA}^2 + \mathrm{KL}{\restriction}^-$ ausgeführt werden kann.

Bei Einschränkung auf Instanzen gilt das Farbenblindheitsargument wie in (4.1) nicht mehr. Deshalb betrachten wir nicht nur üblich RT^2_2 sondern RT^2_n für jedes feste n.

Eine n-Färbung $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to C_n$ kann mit einer Funktion $\hat{c}\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to C_n$ mit $\hat{c}(x,y) = \hat{c}(y,x) = c(\{x,y\})$ dargestellt werden. RT^2_n wird damit auf folgende Weise formalisiert:

$$\begin{aligned}(\mathrm{RT}^2_\mathrm{n})\colon \forall c\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to C_n\, \exists f^1 \leq_1 \lambda x.1\, \exists i < n\, \big(&\forall k\, \exists x > k\, f(x) = 0\\ &\wedge \forall x,y\, (x \neq y \,\wedge\, f(x) = 0 \,\wedge\, f(y) = 0 \to \hat{c}(x,y) = i)\big)\end{aligned}$$

wobei $\hat{c}(x,y) = \begin{cases} c(x,y) & x \leq y,\\ c(y,x) & x > y.\end{cases}$

$\mathrm{RT}^2_\mathrm{n}(t)$ bezeichnet RT^2_n für einen festen Term t, der eine Funktion $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ repräsentiert, $\mathrm{RT}^{2\,-}_\mathrm{n}$ bezeichnet die Menge aller Instanzen von $\mathrm{RT}^2_\mathrm{n}(t)$ wobei im Term t nur freie Variablen von Typ 0 vorkommen. Im Folgenden wird n, wenn die Anzahl der Farben aus t ersichtlich ist, weggelassen.

Lemma 4.13. *Für alle Färbungen $c\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to C_n$ lässt sich die partielle Ordnung $\prec$ wie im alternativen Beweis zu Satz 4.12 und damit auch f wie in* (3.1) *auf S. 37 in* EA^2 *definieren.*
EA^2 *beweist, dass $\prec$-Ketten min-monochrom sind, und die Eigenschaften (i)–(iv), d.h.*

(i) $\forall x,y\ (x \prec y \to x < y)$,

(ii) $\forall x > 0\ (0 \prec x)$,

(iii) $\forall x,y,z\ (x \prec y \,\wedge\, y \prec z \to x \prec z)$,

(iv) $\forall m,x,y\ (y \prec m \to (x \prec y \leftrightarrow x \prec m \,\wedge\, x < y))$

gelten.

Beweis. Ohne Beschränkung $c(x,y) = c(y,x)$.
Definiere:

$$\begin{aligned}\tilde{p}(0) &:= \langle\rangle\\ \tilde{p}(1) &:= \langle 0\rangle\\ \tilde{p}(m+1) &:= \langle p^{m+1}_0, \ldots, p^{m+1}_m\rangle,\end{aligned}$$

wobei $p_k^{m+1} := \begin{cases} 0 & \forall x < k\ ((\tilde{p}(k))_x = 0 \rightarrow c(k,x) = c(m+1,x)) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

für $k := 0 \dots m$.

Es gilt

$$\tilde{p}(m) \leq \Phi_{\langle\rangle}(\lambda x.1, m).$$

Dann ist

$$p(x,y) := \begin{cases} \tilde{p}(y)_x & x < y \\ 1 & x \geq y \end{cases}$$

der Graph von $\prec$ aus dem Beweis von Erdős und Rado von Satz 4.12. Damit kann $\prec$ mit elementarer Rekursion dargestellt werden und ist insbesondere in EA^2 definierbar.

Im Folgenden setze

$$x \prec y :\equiv p(x,y) = 0.$$

(i), (ii) folgen direkt aus der Definition von $\prec$ bzw. p.

(iii) folgt aus quantorfreier Wertverlaufsinduktion über z (mit (i)) in

$$\forall z\, \forall y < z, x < y\ (x \prec y \wedge y \prec z \rightarrow x \prec z)\,.$$

Induktionsanfang ist trivial.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} & x \prec y \wedge y \prec z \\ & \rightarrow [(\forall i < x\,(i \prec x \rightarrow c(x,i) = c(y,i))) \wedge (\forall i < y\,(i \prec y \rightarrow c(y,i) = c(z,i)))] \end{aligned}$$

mit Induktionshypothese für $y < z$

$$\begin{aligned} & \rightarrow [(\forall i < x\,(i \prec x \rightarrow c(x,i) = c(y,i))) \wedge (\forall i < y\,(i \prec x \rightarrow c(y,i) = c(z,i)))] \\ & \rightarrow [\forall i < x\,(i \prec x \rightarrow c(x,i) = c(z,i))] \\ & \rightarrow x \prec z \end{aligned}$$

(iv):

Die „$\rightarrow$"-Richtung

$$\forall m, x, y\ (y \prec m \rightarrow (x \prec y \rightarrow x \prec m \wedge x < y))$$

folgt direkt aus (i) und (iii).

Die „$\leftarrow$"-Richtung ist (mit (i)) äquivalent zu

$$\forall m\, \forall x < m, y < m\ (x \prec m \wedge y \prec m \wedge x < y \rightarrow x \prec y)\,. \tag{4.2}$$

Beweis durch quantorfreie Wertverlaufsinduktion über m.

Induktionsanfang ist trivial.

Induktionsschritt ($m > 0$):
Falls $x = 0$ gilt 4.2 wegen (ii).
Sei $x \prec m$, $y \prec m$ und $x < y$, dann

$$
\begin{aligned}
& x \neq 0 \\
\xrightarrow{\text{(ii)}} & \exists i < x \, (i \prec x \wedge i \prec y) \qquad \text{z.B. } i = 0 \\
\xrightarrow{\mu_b} & \exists i < x \left(i \prec x \wedge i \prec y \wedge \underbrace{\forall i' < x \, ((i' \prec x \wedge i' \prec y) \rightarrow i' \leq i)}_{\equiv: i \text{ maximal}}\right) \\
\rightarrow & \exists i < x \left(i \prec x \wedge i \prec y \wedge i \text{ maximal} \wedge \exists p < m \, (p \prec m \wedge i \prec p)\right) \qquad \text{z.B. } p = x \\
\xrightarrow{\mu_b} & \exists i < x \left(i \prec x \wedge i \prec y \wedge i \text{ maximal} \right. \\
& \qquad \left. \wedge \, \exists p < m \, (p \prec m \wedge \underbrace{i \prec p \wedge \forall p' < m \, (p' \prec m \wedge i \prec p' \rightarrow p' \geq p)}_{p \text{ minimal mit } i \prec p \prec m})\right)
\end{aligned}
$$

Mit (iii) gilt $i \prec m$.
Aus $y \prec m$ und $i \prec y$ folgt $c(y, i) = c(m, i)$ und aus $p \prec m$ und $i \prec p$ folgt $c(p, i) = c(m, i)$, d.h.

$$c(y, i) = c(p, i). \tag{4.3}$$

Mit der Induktionshypothese (für p) und (i) gilt

$$\forall j, j' \, \left((j \prec p \wedge j' \prec p) \rightarrow (j \prec j' \leftrightarrow j < j')\right). \tag{4.4}$$

Es kann nicht sein, dass ein i' existiert mit $i \prec i' \prec p$. Denn falls es das gäbe, dann gilt mit (iii) $i \prec i' \prec m$. Aus p minimal mit $i \prec p \prec m$ folgt damit $i' \geq p$. Dies steht mit (i) im Widerspruch zu $i' \prec p$. Also folgt mit (4.4)

$$\forall i' \, \left(i' \prec p \rightarrow (i' = i \vee i' \prec i)\right).$$

Damit, mit (4.3) und mit $i \prec y, p$ gilt $c(p, i') = c(y, i')$ für alle $i' \prec p$, d.h. $p \prec y$ ($p = y$ kann nicht vorkommen, weil $p \leq x < y$).

Dies impliziert dann

$$\exists i < x \left(i \prec x \wedge i \prec y \wedge i \text{ maximal} \wedge \exists p < m \, (p \prec y \wedge p \in succ(i))\right)$$

Analog folgt $p = x$. Bei x ist der Fall $p \prec x$ ausgeschlossen, da dann $i \prec p \prec x, y$, somit wegen (i) $i < p$, was im Widerspruch zu i maximal steht.

$$
\begin{aligned}
\rightarrow & \exists i < x \, (i \prec x \wedge i \prec y \wedge i \text{ maximal} \wedge \exists p < m \, (p \prec y \wedge p = x) \\
\rightarrow & x \prec y
\end{aligned}
$$

□

Lemma 4.14. *Sei f die Darstellung des Baumes $(\mathbb{N}, \prec)$, wie in (3.1), dann gilt*

$$\mathrm{EA}^2 \vdash \forall c \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow C_n \left(\Pi^0_1\text{-CA}(\xi c) \rightarrow \forall l \, \exists k \, \forall s, x \, (lth(s) = l \wedge f(s * \langle x \rangle) = 0 \rightarrow x \leq k)\right),$$

wobei ξ ein geeigneter geschlossener Term ist.

Insbesondere folgt $T{\restriction}(f)$.

Beweis. Bezeichnungen wie im Beweis zu Lemma 4.13. Sei c eine n-Färbung, ohne Einschränkung $c(x,y) = c(y,x)$.

Nach Lemma 4.13 kann die partielle Ordnung $\prec$ und damit auch die charakteristische Funktion des Erdős-Rado-Baumes f in EA^2 definiert werden.

Definiere:

$$\begin{aligned}
h(0,p^0,c^0) &:= \langle\rangle = 0 \\
h(m+1,p^0,c^0) &:= h(m,p,c) * \begin{cases} \langle (c)_{m+1}\rangle & \text{falls } (p)_{m+1} = 0 \\ \langle\rangle = 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
h(k,p,c) &\leq c \\
g(m) &:= h(m, \Phi_{\langle\rangle}(\lambda x.p(x,m),m), \Phi_{\langle\rangle}(\lambda x.c(x,m),m))
\end{aligned}$$

h streicht die Positionen i in dem Tupel c, an denen $(p)_i \neq 0$ gilt. Somit $g(m) = \langle c(m,i_0),\dots,c(m,i_k)\rangle$ für die gesamten Vorgänger von m $i_0 \prec \dots i_k \prec m$. g ist in EA^2 definierbar, weil h elementar-rekursiv ist.

Nach Definition von g gilt

$$(g(x))_i < n, \tag{4.5}$$

$$x \prec y \to g(x) \sqsubset g(y). \tag{4.6}$$

Für g gilt weiter

$$\begin{aligned}
&g(z) = m * \langle x\rangle \\
\xrightarrow{\mu_b} &\exists v < z \big(g(z) = m * \langle x\rangle \ \wedge \ \underbrace{v \prec z \ \wedge \ \forall v' < z\,(v' \prec z \to v' \leq v)}_{v \text{ maximal mit } v \prec z}\big) \\
\to &\exists v < z \big(g(z) = m * \langle x\rangle \ \wedge \ z \in succ(v)\big) \\
\xrightarrow{\text{(iv)}} &\exists v < z \big(g(z) = m * \langle x\rangle \ \wedge \ z \in succ(v) \ \wedge \ \forall x < v\,(x \prec v \leftrightarrow x \prec z)\big) \\
\to &\exists v < z \big(g(z) = m * \langle x\rangle \ \wedge \ z \in succ(v) \ \wedge \ \tilde{p}(v) \sqsubset \tilde{p}(z)\big)
\end{aligned}$$

mit (i) und da v maximal mit $v \prec z$, gilt $(\tilde{p}(z))_i = 0$ für $i \in \{v+1,\dots,z-1\}$
Dies impliziert, dass

$$\exists v < z \big(g(z) = m * \langle x\rangle \ \wedge \ z \in succ(v) \ \wedge \ g(v) = m\big)$$

und damit

$$\exists v\, g(v) = m \ \wedge \ z \in succ(v).$$

Es gilt also

$$\forall z \ (g(z) = m * \langle x\rangle \to \exists v < z\, g(v) = m \ \wedge \ z \in succ(v))\,. \tag{4.7}$$

g ist injektiv. Durch Π^0_1-Induktion über l folgt

$$\forall l\,\forall x,y\ (x \neq y \wedge lth(g(x)) = l \rightarrow g(x) \neq g(y))\,. \tag{4.8}$$

Diese Induktionsformel enthält ausschließlich den Parameter c und kann deshalb auch als Π^0_1-IA$(\xi_1 c)$ geschrieben werden, für einen geeigneten geschlossenen Term ξ_1.
Induktionsanfang ($l = 0$) folgt aus (ii) und der Definition von g.
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
&\exists x,y\,(x \neq y \wedge lth(g(x)) = l+1 \wedge g(x) = g(y))\\
\xrightarrow{(4.7)}&\exists x,y\,\exists x',y'\,(x \neq y \wedge lth(g(x)) = l+1 \wedge x \in succ(x') \wedge y \in succ(y') \wedge g(x) = g(y)\\
&\qquad\wedge g(x') \sqsubset g(x) \wedge lth(g(x')) = l \wedge g(y') \sqsubset g(y) \wedge lth(g(y')) = l)\\
\xrightarrow{\text{IH}}&\exists x,y\,\exists x'\,(x \neq y \wedge lth(g(x) = l+1 \wedge x,y \in succ(x') \wedge g(x) = g(y))
\end{aligned}$$

x und y sind direkte Nachfolger von x' und $c(x,x') = (g(x))_l = (g(y))_l = c(y,x')$, d.h. x, y müssen gleich sein oder sie sind untereinander vergleichbar. Die erste Möglichkeit widerspricht der Annahme, die zweite widerspricht mit (4.6) $g(x) = g(y)$.

Da g injektiv ist folgt aus (4.7)

$$\forall z,v\ (g(z) = m * \langle x\rangle \wedge g(v) = m \rightarrow v \prec z)$$

Daraus folgt mit Π^0_1-Induktion und Lemma 4.13 (iii)

$$\forall l\,\forall x,y\,(lth(g(y)) = l \wedge g(x) \sqsubset g(y)) \rightarrow x \prec y).$$

Die Induktionsformel enthält nur den Parameter c, da $g \in \mathrm{EA}^2(c)$. Deshalb kann die Induktion als Π^0_1-IA$(\xi_2 c)$ geschrieben werden, für ein geeigneten Term ξ_2.
Mit (4.6) ergibt das

$$x \prec y \leftrightarrow g(x) \sqsubset g(y). \tag{4.9}$$

Insbesondere gibt $lth(g(x)) + 1$ die Ebene an, in der x im Baum liegt.

Aus der Injektivität und Σ^0_1-IA folgt

$$\forall l\,\exists k\,\forall x\ (lth(g(x)) = l \rightarrow x \leq k)\,. \tag{4.10}$$

Denn, wenn das nicht gälte, dann gäbe es ein l mit

$$\forall k\,\exists x\ (lth(g(x)) = l \wedge x > k)\,.$$

Mit Σ^0_1-Induktion folgt dann, dass es beliebig lange Folgen $\langle x_0, \ldots, x_k\rangle$ mit $x_i < x_{i+1}$ gibt mit $lth(g(x_i)) = l$. Dies widerspricht (4.5) und der Injektivität, denn es gibt nur maximal n^l viele Werte von g mit $lth(g(\cdot)) = l$.

Die hier verwendete Induktion enthält nur die Parameter l und c und kann damit als Σ^0_1-IA$(\xi_3 cl)$ geschrieben werden, für einen geeigneten Term ξ_3.

Da $lth(g(x))+1$ die Ebene angibt, in der x im Baum liegt, gilt

$$f(s*\langle x\rangle)=0\rightarrow lth(s)=lth(g(x)).$$

Daraus folgt mit (4.10), die Konklusion der Behauptung

$$\forall l\,\exists k\,\forall s,x\ (lth(s)=l\ \wedge\ f(s*\langle x\rangle)=0\rightarrow x\le k)\,.$$

Π^0_1-IA(t) bzw. Σ^0_1-IA(t) folgt aus QF-IA und Π^0_1-CA(ζt) (mit geeigneten ζ). Da mit Bemerkung 1.18 Folgen von Π^0_1-Komprehensionsinstanzen $\left(\Pi^0_1\text{-CA}(t_i)\right)_i$ in eine Instanz kodiert werden können, folgt, dass es einen geschlossen Term ξ gibt mit

$$\Pi^0_1\text{-CA}(\xi c)\rightarrow\Pi^0_1\text{-IA}(\xi_1 c)\ \wedge\ \Pi^0_1\text{-IA}(\xi_2 c)\ \wedge\ \forall l\ \Sigma^0_1\text{-IA}(\xi_3 cl).$$

Daraus folgt dann die gesamte Behauptung. □

Satz 4.15. *Zu jedem festen n lassen sich geschlossene Terme ξ_1 und ξ_2 finden, so dass*

$$\mathrm{EA}^2\vdash\forall c\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\rightarrow C_n\ \left(\mathrm{KL}{\restriction}(\xi_1 c)\ \wedge\ \Pi^0_1\text{-CA}(\xi_2 c)\rightarrow\mathrm{RT}^2_{\mathrm{n}}(c)\right).$$

Beweis. Sei f der Baum wie in Lemma 4.14. f kann geschrieben werden als gc. Aus Π^0_1-IA$(\xi_1 c)$ und Σ^0_1-IA$(\xi_2 cl)$ für entsprechende ξ_1, ξ_2 folgt $T{\restriction}(gc)$.

Da $f\in\mathrm{EA}^2(c)$, gibt es ein entsprechendes ξ_1, so dass mit $\mathrm{KL}{\restriction}(\xi_1 c)$ folgt, dass ein unendlicher Pfad b existiert.

Es gilt

$$\forall x,y\ (x<y\rightarrow bx\prec by)\,.$$

Nach Definition von $\prec$ ist c auf $b(\mathbb{N})$ min-monochrom. Wegen Lemma 4.13 (i) ist b auch streng $<$-monoton.

Definiere

$$\tilde{c}x:=c(bx,b(x+1)).$$

Da $b(\mathbb{N})$ min-monochrom folgt

$$\forall x\,\forall y>x\ c(bx,by)=\tilde{c}x.$$

Mit $\mathrm{RT}^1_{\mathrm{n}}$ gibt es eine Farbe i, die unendlich oft vorkommt. Damit ist $A:=\{bx\mid\tilde{c}x=i\}$ eine unendliche monochrome Menge und $b^*k:=t_{\exists x\le k\,bx=k\,\wedge\,\tilde{c}k=i}[k]$ eine Lösung für $\mathrm{RT}^2_{\mathrm{n}}$. □

Satz 4.16.

$$\mathrm{EA}^2+\text{QF-AC}^{0,0}+\mathrm{WKL}\vdash\forall c\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\rightarrow C_n\,(\Pi^0_1\text{-CA}(\xi c)\rightarrow\mathrm{RT}^2_{\mathrm{n}}(c))$$

für jedes feste n, wobei ξ ein geeigneter geschlossener Term ist.

Beweis. Folgt aus Satz 4.15 mit Lemma 3.8, Proposition 1.19 und Bemerkung 1.18. □

Bemerkung 4.17. In Satz 4.16 wird QF-AC^{0,0} nur für die Anwendung von Proposition 1.19 benötigt.

Damit gilt auch

$$\mathrm{EA}^2 + \mathrm{WKL} \vdash \forall c\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to C_n \, (\Pi^0_1\text{-AC}(\xi c) \to \mathrm{RT}^2_{\mathrm{n}}(c))$$

für einen geeigneten geschlossenen Term ξ.

Bemerkung 4.18. Aus Satz 4.16 folgt mit Bemerkung 1.18, dass Π^0_1-CA$^-$ eine ganze Folge von Instanzen von $\mathrm{RT}^2_{\mathrm{n_i}}(c_i)$ beweist. Allerdings muss die Anzahl der Farben beschränkt sein ($n_i \leq n$), da in dem Beweis $\mathrm{RT}^2_{\mathrm{n_i}}(c_i)$ mit Π^0_1-CA$^-$ auf $\mathrm{RT}^1_{\mathrm{n_i}}$ zurückgeführt wird. $\mathrm{RT}^1_{\mathrm{n_i}}$ folgt aus $\mathrm{RT}^1_{\mathrm{n}}$, das für ein festes n in EA^2 beweisbar ist. Ist $(n_i)_i$ unbeschränkt, wird $\mathrm{RT}^1_{<\infty}$ benötigt.

$\mathrm{RT}^1_{<\infty}$ ist äquivalent zu Π^0_1-CP (Satz 2.4) und damit in EA^2 oder E-G$_\infty$A$^\omega$ nicht beweisbar.

Bemerkung 4.19. Eine nähere Betrachtung des Beweises zu Satz 4.16 zeigt, dass eine Instanz von Π^0_1-Komprehension nicht nur eine Folge von Instanzen des Satzes von Ramsey $\big(\mathrm{RT}^2_{\mathrm{n}}(c_k)\big)_k$ impliziert, sondern auch die Existenz einer Folge homogener Mengen $(f_k)_k$ und Farben $(i_k)_k$ beweist (siehe Bemerkung 1.18).

4.3.1 RT^2 für transitive Färbungen

Eine n-Färbung $c\colon [X]^2 \to C_n$ heißt *transitiv*, falls

$$\forall x, y, z \, \big(c(\{x,y\}) = c(\{y,z\}) \to c(\{x,z\}) = c(\{x,y\})\big).$$

Sei $\mathrm{RT}^2_{\mathrm{ne}}$ wie $\mathrm{RT}^2_{\mathrm{n}}$ mit der Ausnahme, dass die monochrome Menge nicht durch eine charakteristische Funktion sondern durch eine Aufzählung gegeben wird. Mit der Notation von oben wird $\mathrm{RT}^2_{\mathrm{ne}}$ auf folgende Weise formalisiert:

$$\begin{aligned}(\mathrm{RT}^2_{\mathrm{ne}})\colon \forall c\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to C_n \, \exists f^1 \, \exists i < n \, \big(&\forall k \, f(k+1) > f(k) \\ &\wedge \forall x, y \, (x \neq y \to \hat{c}(f(x), f(y)) = i)\big)\end{aligned}$$

$\mathrm{RT}^2_{\mathrm{ne}}$ folgt aus $\mathrm{RT}^2_{\mathrm{n}}$ mit Σ^0_1-IA. Über RCA$_0$ sind diese Prinzipien damit äquivalent.

$\mathrm{RT}^2_{\mathrm{ne}}(c)$ und $\mathrm{RT}^{2-}_{\mathrm{e}}$ sind wie oben definiert.

Korollar 4.20 (Zum Beweis von Satz 4.15)**.**

$$\mathrm{EA}^2 \vdash \forall n \, \forall c\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to C_n \text{ mit } c \text{ transitiv } \big(\mathrm{KL}{\restriction}(\xi_1 c) \wedge \Pi^0_1\text{-CA}(\xi_2 c) \to \mathrm{RT}^2_{ne}(c)\big)$$

für geeignete geschlossene Terme ξ_1 und ξ_2.

Beweis. Die von b aus dem Beweis zu Satz 4.15 aufgezählte Menge ist min-monochrom, insbesondere

$$\forall x, y > 0 \; (\hat{c}(b0, bx) = \hat{c}(b0, by) =: i) \, .$$

Aus der Transitivität der Färbung c folgt

$$\forall x, y \; (x \neq y \to \hat{c}(bx, by) = i) \, .$$

D.h. b ist die Aufzählung einer unendlichen für c-monochromen Menge. □

Bemerkung 4.21. In diesem Fall wurde kein RT^1_n verwendet. Damit gilt das Ergebnis auch für Folgen von transitiven Färbungen mit unbeschränkt großer Anzahl an Farben.

Sei ADS („Ascending Descending Sequence") das Prinzip, das jede unendliche lineare Ordnung $\leq_L$ eine unendliche monotone Teilfolge besitzt. ADS(p) bezeichnet ADS für eine feste lineare Ordnung, die durch p beschrieben wird. $\mathrm{ADS_e}$ beschreibt ADS, wobei die Lösung durch eine aufzählende Funktion geben ist. Über $\mathrm{RCA_0}$ sind $\mathrm{ADS_e}$ und ADS äquivalent.

Setze

$$c(\{x,y\}) := \begin{cases} 0 & x \leq_L y \\ 1 & x >_L y \end{cases} \qquad \text{für } x < y.$$

c definiert eine transitive 2-Färbung und jede unendliche c-monochrome Menge beschreibt eine monotone Teilfolge von $\leq_L$. Damit gilt

$$\mathrm{EA}^2 \vdash \mathrm{RT}^2_{2\mathrm{e}}(c) \to \mathrm{ADS_e}(p)$$

und insbesondere

$$\mathrm{EA}^2 \vdash \forall p \text{ mit } p \text{ lin. Ordnung } \big(\mathrm{KL}{\restriction}(\xi_1' p) \wedge \Pi^0_1\text{-}\mathrm{CA}(\xi_2' p) \to \mathrm{ADS_e}(p)\big)\,.$$

4.4 Hauptresultate

Mit diesen Ergebnissen können die Sätze aus Abschnitt 1.3 um RT^2_n erweitert werden.

Satz 4.22. *Sei $k \geq 3$, A ein Π^1_1-Satz und $n \in \mathbb{N}$, darüber hinaus gelte*

$$\text{E-G}_k\mathrm{A}^\omega + \text{QF-AC}^{1,0} + \Delta^0_2\text{-CA}^- + \Pi^0_1\text{-AC}^- + \mathrm{WKL} + \mathrm{RT}^{2\,-}_\mathrm{n} \vdash A$$

dann folgt

$$\mathrm{G}_k\mathrm{A}^\omega + \Sigma^0_1\text{-IA} + Mon(A) \vdash A.$$

Beweis. Satz 1.38 und Satz 4.16. □

Wie in Kapitel 1 sei

$$\mathcal{T} := \text{E-G}_\infty\mathrm{A}^\omega + \text{QF-AC}^{1,0} + \text{QF-AC}^{0,1} + \mathrm{WKL} + \Delta^0_2\text{-CA}^- + \Pi^0_1\text{-AC}^-.$$

Satz 4.23. *Sei $A_0(f,y)$ eine quantorfreie Formel, die nur f, y frei enthält und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\begin{cases} \mathcal{T} + \mathrm{RT}^{2\,-}_\mathrm{n} \vdash \forall f^1\, \exists y^0\, A_0(f,y) \\ \Rightarrow \textit{Es existiert ein primitiv-rekursives Funktional } \phi \textit{ (im Sinne von Kleene) mit} \\ \widehat{\text{WE-HA}}^\omega{\restriction} \vdash \forall f\, A_0(f,\phi(f)). \end{cases}$$

Insbesondere gilt

$$\begin{cases} \mathcal{T} + \mathrm{RT}^{2-}_{\mathrm{n}} \vdash \forall x^0\, \exists y^0\, A_0(x,y) \\ \Rightarrow \textit{Es existiert eine primitiv-rekursive Funktion } \phi \textit{ mit} \\ \mathrm{PRA} \vdash \forall x\, A_0(x, \phi(x)). \end{cases}$$

Beweis. Satz 1.41 und Satz 4.16. □

Satz 4.24. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt*

(i) $\mathcal{T} + \mathrm{RT}^{2-}_{\mathrm{n}}$ *ist Π^0_2-konservativ über* PRA*,*

(ii) $\mathcal{T} + \mathrm{RT}^{2-}_{\mathrm{n}}$ *ist Π^0_3-konservativ über* $\mathrm{PRA} + \Sigma^0_1\text{-IA}$*,*

(iii) $\mathcal{T} + \mathrm{RT}^{2-}_{\mathrm{n}}$ *ist Π^0_4-konservativ über* $\mathrm{PRA} + \Pi^0_1\text{-CP}$*.*

Beweis. (i) folgt aus Satz 4.23.
(ii) und (iii) folgen aus Satz 4.22, wie Korollar 1.39 und Korollar 1.40 aus Satz 1.38. □

Analog können diese Sätze auch mit den Prinzipien aus Abschnitt 4.3.1 erweitert werden. Allerdings lassen sich diese Ergebnisse nicht auf $\mathrm{RT}^2_{<\infty}$ erweitern (siehe dazu Bemerkung 4.18):

Satz 4.25.

$$\text{E-G}_\infty\text{A}^\omega + \text{QF-AC}^{1,0} + \text{QF-AC}^{0,1} + \text{WKL} + \Delta^0_2\text{-CA}^- \nvdash \forall n\, \mathrm{RT}^{2-}_n$$

Beweis. Eine Folge von RT^{2-} mit unbeschränkt großer Anzahl an Farben ist ausreichend um die Totalität der Ackermann Funktion zu beweisen. Siehe dazu [Hir87, 6.12], alle in dem Beweis verwendete Instanzen von RT^2 sind von der Form RT^{2-}. Da Diagonale der Ackermann Funktion nicht primitiv-rekursiv beschränkt werden kann, folgt die Behauptung mit Satz 1.41. □

Bemerkung 4.26. Satz 4.23 kann auch als eine beweistheoretische Verfeinerung der Ergebnisse von Jockusch (Korollar 4.5) gesehen werden. So folgt Satz 4.5.2 aus einer weniger detaillierten Analyse des Beweises von Erdős und Rado:
Sei M das Modell dessen First Order Teil der Standard-Interpretation in $\mathbb{N}$ entspricht und dessen Second Order Teil alle Mengen in $0'$ enthält. Es gilt

$$M \vDash \mathrm{RCA}_0 + \Pi^0_1\text{-CA}^-.$$

Es existiert eine Erweiterung M' von M, die auch WKL erfüllt und, so dass alle Mengen *low* relativ zu $0'$ sind, d.h. für jede Menge A gilt $A' \leq_T 0''$ (Harrington, siehe [Sim99]).

$$M' \vDash \mathrm{RCA}_0 + \Pi^0_1\text{-CA}^- + \mathrm{WKL}$$

und nach Satz 4.16

$$M' \vDash \mathrm{RT}^{2-}_2 .$$

Also hat jede Instanz von RT^2_2 eine Lösung A mit $A' \leq_T 0''$.

Bemerkung 4.27. Für das Ergebnis aus Satz 4.16 wird volles WKL benötigt, Instanzen von WKL reichen nicht aus. Denn für ein geeignetes ζ gilt

$$\Pi^0_1\text{-CA}(\zeta t) \to \mathrm{WKL}(t)$$

und damit für das Modell M aus Bemerkung 4.26:

$$M \vDash \mathrm{RCA}_0 + \Pi^0_1\text{-CA}^- + \mathrm{WKL}^- .$$

Würden Instanzen von WKL ausreichen um RT^{2-}_2 zu beweisen, dann wäre

$$M \vDash \mathrm{RT}^{2-}_2$$

und jede Instanz von RT^2_2 hätte eine $0'$ Lösung. Dies widerspricht aber Korollar 4.5.1.

4.5 Funktionalinterpretation von $\mathrm{RT}^2_{<\infty}$

Wir wenden die Funtionalinterpretation auf die folgende zu $\mathrm{RT}^2_{<\infty}$ äquivalente Aussage an:

$$\forall n, c\, \exists \chi^1\, \exists i \leq n\ (\forall k\, \exists m \geq k\, \chi(m) = 0 \,\wedge\, \forall x, y\, \mathsf{COL}(x, y)) ,$$

wobei

$$\mathsf{COL}(x, y) :\equiv [\chi(x) = 0 \,\wedge\, \chi(x + y + 1) = 0 \to c(x, x + y + 1) = i] .$$

Funktionalinterpretation:

$$\forall n, c\, \forall \hat{K}\, \forall X, Y\, \exists \chi^1\, \exists i \leq n\, \exists g$$
$$\Big(g(\hat{K}\chi ig) \geq \hat{K}\chi ig \,\wedge\, \chi(g(\hat{K}\chi ig)) = 0 \,\wedge\, \mathsf{COL}(X\chi ig, Y\chi ig)\Big)$$

Sei c fest (aber beliebig) und sei f die charakteristische Funktion des zugehörigen Erdős-Rado-Baumes. f lässt sich aus c primitiv-rekursiv berechnen (Lemma 4.13). Wir wenden die Funktionalinterpretation von KL$\restriction$ (siehe Abschnitt 3.3) an, um zu zeigen, dass es ein b mit

$$f(\bar{b}(Ab)) = 0 \tag{4.11}$$

gibt. Definiere dazu:

$$t_K(l, R) := \begin{cases} \min\{R^i(0) \mid \mathsf{Bnd}(l, R^i(0), R^{i+1}(0)) \text{ wobei } i = 0 \dots n^l\} & \text{falls existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$t_Q(x) := \begin{cases} \begin{array}{l} \min\{\langle b_0, \dots, b_{x-1}\rangle \mid \\ \qquad b_{x-1} \leq \Sigma_{i=0}^{x} n^i \,\wedge\, b_i \leq b_{i+1} \,\wedge\, f(\langle b_0, \dots, b_{x-1}\rangle) = 0\} \end{array} & \text{falls existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach dem Beweis zu Lemma 4.14 gibt es maximal n^l verschiedene Werte in der Ebene $l+1$ des Baumes. Mit endlichem Schubfachprinzip gilt deshalb

$$\forall l\,\mathsf{Bnd}(l, t_K lR, R(t_K lR)).$$

Da die Werte in den ersten $l+1$ Ebenen verschieden sind, folgt mit endlichem Schubfachprinzip, dass es unter $\Sigma_{i=0}^{x} n^i$ Werten einen geben muss, der tiefer im Baum liegt. Damit gilt

$$\forall x\,\mathsf{Inf}(x, t_Q x).$$

Bemerke t_Q ist primitiv-rekursiv, da das Suche der $\prec$-kleineren Werte entscheidbar ist. Damit erfüllt t_b aus (3.6) mit $K = t_K$ und $Q = t_Q$ die Bedingung (4.11).

b ist nach Definition von f streng monoton steigend.

Setzte, wie in dem Beweis zu Satz 4.15

$$t_{\chi\,i,b} := \lambda k. \begin{cases} 1 & \text{falls } \exists x \le k\, bx = k \wedge c(bk, b(k+1)) = i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzte $\hat{K}'big := \hat{K}t_{\chi\,i,b}ig$.

Wir interpretieren nun die anschließende Anwendung von IPP. Es folgt wie in der Lösung der Funktionalinterpretation aus Abschnitt 2.2 von IPP, dass es x_i, g_i in Abhängigkeit von b gibt mit

$$\begin{aligned} x_{ib} &= \hat{K}'bi(\lambda j.b(g_{ib}j)) \\ g_{ib}(x_{ib}) &= \max\{x_{0b}, \dots, x_{nb}\} \end{aligned}$$

und damit auch mit

$$\begin{aligned} b(g_{ib}(x_{ib})) &= b(\max\{x_{0b}, \dots, x_{nb}\}) \\ &\ge \max\{x_{0b}, \dots, x_{nb}\}. \end{aligned}$$

Setzte:

$$\begin{aligned} t_A(b) &:= b(\max\{x_{0t_b}, \dots, x_{nt_b}\}) \\ t_i &:= c(t_b(\max\{x_{0t_b}, \dots, x_{nt_b}\})(t_b(\max\{x_{0t_b}, \dots, x_{nt_b}\} + 1)) \\ &= c(t_b(g_{0t_b}(x_{0t_b})), t_b(g_{0t_b}(x_{0t_b}) + 1)) \\ t_g &:= \lambda j.t_b(g_{t_i t_b}(j)). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & t_\chi(t_g(\hat{K}t_\chi t_i t_g)) \\ &= t_\chi(t_b(g_{t_i t_b}(\hat{K}'t_b t_i(\lambda j.t_b(g_{t_i t_b}j))))) \\ &= t_\chi(t_b(\max\{x_{0b}, \dots, x_{nb}\})) \\ &= t_\chi(t_b(g_{0t_b}(x_{0t_b}))) \\ &= 0 \qquad \text{nach Definition von } t_\chi \text{ und } t_A \end{aligned}$$

und
$$t_g(\hat{K}t_\chi t_i t_g) = t_b(g_{t_i t_b}(x_{t_i t_b})) = t_b(\max\{x_{0t_b}, \ldots, x_{nt_b}\}) \geq \hat{K}t_\chi t_i t_g.$$

Nach Definition von f und t_χ gilt

$$\forall x, y\, \mathsf{COL}(x, y).$$

Diese Ergibt insgesamt folgende Lösung:

$$\begin{aligned}
t_b &:= [t_Q(t_x)] \qquad t_x \text{ wie in (3.6)} \\
\langle x_{0b}, \ldots x_{nb}\rangle &:= B_{fin}(\hat{K}'b, n, \langle\rangle) \\
t_A(b) &:= b(\max\{x_{0b}, \ldots x_{nb}\}) \\
t_i &:= c(t_b(\max\{x_{0t_b}, \ldots, x_{nt_b}\})(t_b(\max\{x_{0t_b}, \ldots, x_{nt_b}\} + 1)) \\
t_g &:= \lambda j. t_b(h_{\hat{K}'t_b,\ \langle x_{0t_b}, \ldots, x_{t_i t_b}\rangle}) \qquad h_S \text{ wie in Definition 2.5} \\
t_\chi &:= \lambda k. \begin{cases} 1 & \text{falls } \exists x \leq k\ (t_b x = k \wedge c(t_b k, t_b(k+1)) = t_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Die gesamte Argumentation kann in $\widehat{\text{WE-HA}}^\omega\!\restriction + (\text{BR}_{0,1})$ ausgeführt werden (B_{fin} kann mit $B_{0,1}$ definiert werden).

Bermerke, dass Terme von Grad ≤ 2 aus $\widehat{\text{WE-HA}}^\omega\!\restriction + (\text{BR}_{0,1})$ und damit auch Terme von Grad ≤ 2, die aus dieser Lösung der Funktionalinterpretation aufgebaut sind, sich in Terme aus T umrechnen lassen (Satz 1.36).

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden Beweise für den Satz von Ramsey analysiert. Mit dieser Analyse konnte gezeigt werden, dass sich ein Beweis für $\mathrm{RT}^{2\,-}_2$ in $\mathrm{EA}^2 + \mathrm{QF\text{-}AC} + \mathrm{WKL} + \Pi^0_1\text{-}\mathrm{CA}^-$ formalisieren lässt.

Damit konnten wir zeigen, dass sich die Elimination von Skolemfunktionen für monotone Formeln auch auf Beweise, die $\mathrm{RT}^{2\,-}_2$ verwenden, anwenden lässt (Satz 4.23).

Insbesondere zeigten wir damit, dass $\mathrm{EA}^2 + \mathrm{QF\text{-}AC} + \mathrm{WKL} + \Pi^0_1\text{-}\mathrm{CA}^- + \mathrm{RT}^{2\,-}_2$ Π^0_4-konservativ über $\mathrm{PRA} + \Pi^0_1\text{-}\mathrm{CP}$ ist. (In der Sprache der Reverse Mathematics: $\mathrm{WKL}^*_0 + \Pi^0_1\text{-}\mathrm{CA}^- + \mathrm{RT}^{2\,-}_2$ ist Π^0_4-konservativ über $\mathrm{RCA}_0 + \Pi^0_1\text{-}\mathrm{CP}$.)

In den meisten Sätzen bzw. Beweisen aus der Mathematik, die den Satz von Ramsey verwenden, genügen Instanzen dieses Satzes. Damit verschärft unser Ergebnis in vielen Fällen die Konservativitätsresultate von Cholak, Jockusch und Slaman (Satz 4.9 und Satz 4.10, [CJS01]).

Unsere Ergebnisse können als eine beweistheoretische Verfeinerung der Resultate von Jockusch (Satz 4.4, [Joc72]) gesehen werden. Wir haben den gleichen Beweis analysiert. Unsere Analyse fand allerdings im Gegensatz zu der rekursionstheoretischen Analyse von Jockusch in einem schwächeren Kontext statt; insbesondere untersuchten wir auch die Verwendungen von Σ^0_1-Induktion (Bemerkung 4.26).

Weiterhin konnte die Optimalität der Analyse im Bezug auf die Anzahl der Farben nachgewiesen werden, denn für eine unbeschränkte Anzahl an Farben ($\mathrm{RT}^{2\,-}_{<\infty}$ anstatt $\mathrm{RT}^{2\,-}_{\mathrm{n}}$) wäre Satz 4.23 falsch (Satz 4.25).

Mit Hilfe der Analyse des Beweises von Erdős und Rado gelang es, die Funktionalinterpretation von $\mathrm{RT}^2_{<\infty}$ zu lösen (Abschnitt 4.5).

Darüber hinaus präsentieren wir einen anderen Ansatz, gewisse Anwendungen des unendlichen Schubfachprinzips aus Beweisen zu eliminieren, indem wir die Anwendungen der endlichen Bar-Rekursion in den Lösungstermen der Funktionalinterpretation genauer betrachten und zeigen, wann sie durch eine primitiv-rekursive Funktion ersetzt werden können (Kapitel 2).

Es bleibt zu untersuchen, ob ähnliche Ergebnisse auch für die Funktionalinterpretation von $\mathrm{RT}^2_{<\infty}$ oder RT^2_2 gelten. Des Weiteren ist noch nicht geklärt, ob sich die Elimination von Skolemfunktionen auch auf RT^3_2 anwenden lässt.

Danksagung

Herrn Professor Dr. Ulrich Kohlenbach danke ich für die Aufgabenstellung, seine wohlwollende und wertvolle Anleitung und ständige Gesprächsbereitschaft.

Den Mitarbeitern des Fachbereiches Mathematik und der Arbeitsgemeinschaft Logik danke ich für viele Anregungen und Tipps. Besondere Erwähnung verdient hier Herr Dipl.-Math. Pavol Safarik.

Herrn Professor Dr. Thomas Streicher danke ich für seine Bereitschaft, das Korreferat zu übernehmen.

Literaturverzeichnis

[Ack28] Wilhelm Ackermann, *Zum Hilbertschen Aufbau der reelen Zahlen*, Math. Ann (1928), no. 99, 118–133.

[AF98] Jeremy Avigad and Solomon Feferman, *Gödel's functional ("Dialectica") interpretation*, Handbook of proof theory, Stud. Logic Found. Math., vol. 137, North-Holland, Amsterdam, 1998, pp. 337–405.

[Avi02] Jeremy Avigad, *Notes on Π^1_1-conservativity, ω-submodels, and collection schema*, Tech. report, Carnegie Mellon Department of Philosophy, 2002, http://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/Papers/omegasubmodels.pdf.

[Bez85] Marc Bezem, *Strongly majorizable functionals of finite type: a model for bar recursion containing discontinuous functionals*, J. Symbolic Logic **50** (1985), no. 3, 652–660.

[CJS01] Peter Cholak, Carl G. Jockusch Jr., and Theodore A. Slaman, *On the strength of Ramsey's theorem for pairs*, J. Symb. Log. **66** (2001), no. 1, 1–55.

[Clo99] Peter Clote, *Computation models and function algebras*, Handbook of computability theory, Stud. Logic Found. Math., vol. 140, North-Holland, Amsterdam, 1999, pp. 589–681.

[EHMR84] Paul Erdős, András Hajnal, Attila Máté, and Richard Rado, *Combinatorial set theory: partition relations for cardinals*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 106, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984.

[Far08] Ilijas Farah, *Lecture: Set theory and its applications, lecture 3: König's lemma, Ramsey's theorem*, 2008, York University, http://www.math.yorku.ca/~ifarah/teaching/6049w08/lecture3.pdf.

[Ger06] Philipp Gerhardy, *Functional interpretation and modified realizability interpretation of the double-negation shift*, Logical Approaches to Computational Barriers, CiE 2006 (Benedikt Löwe Arnold Beckmann, Ulrich Berger and John V. Tucker, eds.), 2006, pp. 109–118.

[Göd58] Kurt Gödel, *Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes*, Dialectica **12** (1958), 280–287.

[Grz53] Andrzej Grzegorczyk, *Some classes of recursive functions*, Rozprawy Mat. **4** (1953), 46.

[Hil26] David Hilbert, *Über das Unendliche*, Math. Ann. **95** (1926), no. 1, 161–190.

[Hir87] Jeffry L. Hirst, *Combinatorics in subsystems of second order arithmetic*, Ph.D. thesis, Pennsylvania State University, 1987, `http://www.mathsci.appstate.edu/~jlh/bib/pdf/jhthesis.pdf`.

[HJKH$^+$08] Denis R. Hirschfeldt, Carl G. Jockusch, Jr., Bjørn Kjos-Hanssen, Steffen Lempp, and Theodore A. Slaman, *The strength of some combinatorial principles related to Ramsey's theorem for pairs*, Computational Prospects of Infinity, Part II: Presented Talks (Chitat Chong, Qi Feng, Theodore A. Slaman, W. Hugh Woodin, and Yue Yang, eds.), Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, World Scientific, 2008, pp. 143–162.

[How73] William A. Howard, *Hereditarily majorizable function of finite type*, in Troelstra [Tro73], pp. 454–461.

[How81] ———, *Ordinal analysis of simple cases of bar recursion*, J. Symbolic Logic **46** (1981), no. 1, 17–30.

[HP98] Petr Hájek and Pavel Pudlák, *Metamathematics of first-order arithmetic*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Second printing.

[HS07] Denis R. Hirschfeldt and Richard A. Shore, *Combinatorial principles weaker than Ramsey's theorem for pairs*, J. Symbolic Logic **72** (2007), no. 1, 171–206.

[Joc72] Carl G. Jockusch, Jr., *Ramsey's theorem and recursion theory*, J. Symbolic Logic **37** (1972), 268–280.

[Kal43] László Kalmár, *Ein einfaches Beispiel für ein unentscheidbares arithmetisches Problem*, Mat. Fiz. Lapok **50** (1943), 1–23.

[Kle59] Stephen C. Kleene, *Recursive functionals and quantifiers of finite types. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **91** (1959), 1–52.

[Koh96] Ulrich Kohlenbach, *Mathematically strong subsystems of analysis with low rate of growth of provably recursive functionals*, Arch. Math. Logic **36** (1996), no. 1, 31–71.

[Koh98a] ———, *Arithmetizing proofs in analysis*, Proceeedings of the Logic Colloquium'96 (J.M. Larrazabal, D. Lascar, and G. Mints, eds.), Lecture Notes in Logic, 1998, pp. 115–158.

[Koh98b] ______, *Elimination of Skolem functions for monotone formulas in analysis*, Arch. Math. Logic **37** (1998), 363–390.

[Koh98c] ______, *On the arithmetical content of restricted forms of comprehension, choice and general uniform boundedness*, Annals of Pure and Applied Logic **95** (1998), 257–285.

[Koh99] ______, *On the no-counterexample interpretation*, J. Symbolic Logic **64** (1999), no. 4, 1491–1511.

[Koh08] ______, *Applied proof theory: Proof interpretations and their use in mathematics*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, 2008.

[Kőn36] Dénes Kőnig, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936.

[Kre59] Georg Kreisel, *Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite types*, Constructivity in mathematics: Proceedings of the colloquium held at Amsterdam, 1957 (edited by A. Heyting), Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1959, pp. 101–128.

[Kur51] Sigekatu Kuroda, *Intuitionistische Untersuchungen der formalistischen Logik*, Nagoya Mathematical Journal (1951), no. 2, 35–47.

[Oli06] Paulo Oliva, *Understanding and using Spector's bar recursive interpretation of classical analysis*, Proceedings of CiE'2006, Lecture Notes in Computer Science, Springer 3988, 2006, pp. 423–434.

[Par70] Charles Parsons, *On a number theoretic choice schema and its relation to induction*, Intuitionism and Proof Theory (Proc. Conf., Buffalo, N.Y., 1968), North-Holland, Amsterdam, 1970, pp. 459–473.

[Ram30] Frank P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. **s2-30** (1930), no. 1, 264–286.

[Rit65] Robert W. Ritchie, *Classes of recursive functions based on Ackermann's function*, Pacific J. Math. **15** (1965), 1027–1044.

[Saf08] Pavol Safarik, *The interpretation of Bolzano-Weierstraß principle using bar recursion*, Master's thesis, Technische Universität Darmstadt, 2008.

[Sie85] Wilfried Sieg, *Fragments of arithmetic*, Ann. Pure Appl. Logic **28** (1985), no. 1, 33–71.

[Sim99] Stephen G. Simpson, *Subsystems of second order arithmetic*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Spe62] Clifford Spector, *Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. V, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1962, pp. 1–27.

[Spe71] Ernst Specker, *Ramsey's theorem does not hold in recursive set theory*, Logic Colloquium '69 (Proc. Summer School and Colloq., Manchester, 1969), North-Holland, Amsterdam, 1971, pp. 439–442.

[SS86] Stephen G. Simpson and Rick L. Smith, *Factorization of polynomials and Σ^0_1 induction*, Ann. Pure Appl. Logic **31** (1986), no. 2-3, 289–306, Special issue: second Southeast Asian logic conference (Bangkok, 1984).

[SS95] David Seetapun and Theodore A. Slaman, *On the strength of Ramsey's theorem*, Notre Dame J. Formal Logic **36** (1995), no. 4, 570–582, Special Issue: Models of arithmetic.

[Tro73] Anne S. Troelstra (ed.), *Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 344, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[Yas63] Mariko Yasugi, *Intuitionistic analysis and Gödel's interpretation*, J. Math. Soc. Japan **15** (1963), 101–112.