Proof-mining und Kombinatorik

Programmextraktion für den Satz von Ramsey für Paare

Alexander P. Kreuzer

TU Darmstadt

13. April 2012

Was ist Programmextraktion?

Angenommen ein System $\mathcal{T}$ beweist einen Satz

$$A :\equiv \forall n \, \exists k \, A_{\mathsf{qf}}(n, k).$$

Dann soll aus dem Beweis ein Programm t extrahiert werden, so dass

$$\forall n \, A_{\mathsf{qf}}(n, t(n)).$$

Was ist Programmextraktion?

Angenommen ein System $\mathcal{T}$ beweist einen Satz

$$A :\equiv \forall n \, \exists k \, A_{\mathsf{qf}}(n, k).$$

Dann soll aus dem Beweis ein Programm t extrahiert werden, so dass

$$\forall n \, A_{\mathsf{qf}}(n, t(n)).$$

Beispiel

Sei $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ monoton gegen 0 fallend und in $\mathcal{T}$ definierbar.
Dann

$$\forall n \, \exists k \, \left(x_n < 2^{-k} \right).$$

Ein Programm t würde hier eine Konvergenzrate liefern.

Was ist Programmextraktion?

Angenommen ein System $\mathcal{T}$ beweist einen Satz

$$A :\equiv \forall n \, \exists k \, A_{qf}(n,k).$$

Dann soll aus dem Beweis ein Programm t extrahiert werden, so dass

$$\forall n \, A_{qf}(n, t(n)).$$

Beispiel

Sei $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ monoton gegen 0 fallend und in $\mathcal{T}$ definierbar. Dann

$$\forall n \, \exists k \, \left(x_n < 2^{-k} \right).$$

Ein Programm t würde hier eine Konvergenzrate liefern.

Es gibt zahlreiche Ergebnisse in der Ergodentheorie und nicht-linearen Analysis, die mit Hilfe von Programmextraktion gewonnen wurden.

Gödels Funktionalinterpretation

Idee: Jeder Formel wird eine äquivalente $\forall\exists$-Formel zugeordnet.
Z.B.

$$A :\equiv \forall x\, \exists y\, \forall z\, A_{\mathit{qf}}(x, y, z)$$

wird

$$A^{\mathit{ND}} \equiv \forall x\, \forall f_z\, \exists y\, A_{\mathit{qf}}(x, y, f_z(y))$$

zugeordnet.

Gödels Funktionalinterpretation

Idee: Jeder Formel wird eine äquivalente $\forall\exists$-Formel zugeordnet.
Z.B.

$$A :\equiv \forall x\, \exists y\, \forall z\, A_{qf}(x, y, z)$$

wird

$$A^{ND} \equiv \forall x\, \forall f_z\, \exists y\, A_{qf}(x, y, f_z(y))$$

zugeordnet.

- Diese Zuordnung erhält die logischen Schlussregeln, wie z.B.

$$\frac{A \qquad A \to B}{B},$$

  und weist Programme auf.

Gödels Funktionalinterpretation

Idee: Jeder Formel wird eine äquivalente $\forall\exists$-Formel zugeordnet.
Z.B.

$$A :\equiv \forall x\, \exists y\, \forall z\, A_{\mathsf{qf}}(x, y, z)$$

wird

$$A^{\mathsf{ND}} \equiv \forall x\, \forall f_z\, \exists y\, A_{\mathsf{qf}}(x, y, f_z(y))$$

zugeordnet.

- Diese Zuordnung erhält die logischen Schlussregeln, wie z.B.

  $$\frac{A \qquad A \to B}{B},$$

  und weist Programme auf.
- Damit kann man dann ein Programm für A^{ND} zu jedem A mit $\mathcal{T} \vdash A$ ausrechnen,
  - wenn es Programme für die Axiome von $\mathcal{T}$ gibt
  - und wenn man die Funktionalinterpretation in $\mathcal{T}$ austragen kann.

Gödels Funktionalinterpretation

Idee: Jeder Formel wird eine äquivalente $\forall\exists$-Formel zugeordnet.
Z.B.

$$A :\equiv \forall x\, \exists y\, \forall z\, A_{qf}(x, y, z)$$

wird

$$A^{ND} \equiv \forall x\, \forall f_z\, \exists y\, A_{qf}(x, y, f_z(y))$$

zugeordnet.

- Diese Zuordnung erhält die logischen Schlussregeln, wie z.B.

$$\frac{A \qquad A \to B}{B},$$

  und weist Programme auf.
- Damit kann man dann ein Programm für A^{ND} zu jedem A mit $\mathcal{T} \vdash A$ ausrechnen,
  - wenn es Programme für die Axiome von $\mathcal{T}$ gibt
  - und wenn man die Funktionalinterpretation in $\mathcal{T}$ austragen kann.
- $\forall\exists$-Form ist notwendig:
  Es gibt einen Satz der Form $\forall x\, \exists y\, \forall z\, A_{qf}(x, y, z)$, so dass es kein berechenbares t mit $\forall x\, \forall z\, A_{qf}(x, t(x), z)$ gibt. (Specker '49)

Logische Systeme: RCA_0^ω

Sei RCA_0^ω berechenbare Arithmetik in allen endlichen Typen, d.h.

- Typen für $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$, $\ldots$,
- enthält Terme $0, 1, +, \cdot$, Funktionsiterator, λ-Abstraktion und
- Induktion für Formeln der Form $\exists x\, A_{\mathit{qf}}(x)$.

Logische Systeme: RCA_0^ω

Sei RCA_0^ω berechenbare Arithmetik in allen endlichen Typen, d.h.

- Typen für $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^\mathbb{N}}$, $\ldots$,
- enthält Terme $0, 1, +, \cdot$, Funktionsiterator, λ-Abstraktion und
- Induktion für Formeln der Form $\exists x\, A_{\mathit{qf}}(x)$.

RCA_0^ω beweist z.B.

- den Zwischenwertsatz,
- Satz von Picard-Lindelöf.

Logische Systeme: RCA_0^ω

Sei RCA_0^ω berechenbare Arithmetik in allen endlichen Typen, d.h.

- Typen für $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^\mathbb{N}}$, $\ldots$,
- enthält Terme $0, 1, +, \cdot$, Funktionsiterator, λ-Abstraktion und
- Induktion für Formeln der Form $\exists x\, A_{qf}(x)$.

RCA_0^ω beweist z.B.

- den Zwischenwertsatz,
- Satz von Picard-Lindelöf.

Die geschlossenen Terme von RCA_0^ω heißen T_0.
T_0 ist die Erweiterung der primitiv-rekursiven Funktionen auf alle endliche Typen.

Logische Systeme: RCA_0^ω

Sei RCA_0^ω berechenbare Arithmetik in allen endlichen Typen, d.h.

- Typen für $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^\mathbb{N}}$, $\ldots$,
- enthält Terme $0, 1, +, \cdot$, Funktionsiterator, λ-Abstraktion und
- Induktion für Formeln der Form $\exists x\, A_{\mathit{qf}}(x)$.

RCA_0^ω beweist z.B.

- den Zwischenwertsatz,
- Satz von Picard-Lindelöf.

Die geschlossenen Terme von RCA_0^ω heißen T_0.
T_0 ist die Erweiterung der primitiv-rekursiven Funktionen auf alle endliche Typen.

Theorem (Parsons '72)

Aus Beweisen in RCA_0^ω kann man Programme in T_0 extrahieren.

Logische Systeme: WKL_0^ω

WKL (weak König's lemma) ist die Aussage,
dass jeder unendliche 0/1-Baum einen unendlichen Pfad besitzt.

Das System $\mathsf{RCA}_0^\omega + \mathsf{WKL}$ heißt WKL_0^ω.

Logische Systeme: WKL_0^ω

WKL (weak König's lemma) ist die Aussage,
dass jeder unendliche $0/1$-Baum einen unendlichen Pfad besitzt.

Das System $\mathsf{RCA}_0^\omega + \mathsf{WKL}$ heißt WKL_0^ω.

WKL_0^ω beweist z.B.,

- dass stetige Funktionen auf $[0,1]$ ein Maximum haben,
- den Satz von Cauchy-Peano,
- Fixpunktsatz von Schauder,
- Satz von Hahn-Banach (für separable Räume).

Logische Systeme: WKL_0^ω

WKL (weak König's lemma) ist die Aussage,
dass jeder unendliche 0/1-Baum einen unendlichen Pfad besitzt.

Das System $\mathsf{RCA}_0^\omega + \mathsf{WKL}$ heißt WKL_0^ω.

WKL_0^ω beweist z.B.,

- dass stetige Funktionen auf $[0,1]$ ein Maximum haben,
- den Satz von Cauchy-Peano,
- Fixpunktsatz von Schauder,
- Satz von Hahn-Banach (für separable Räume).

Theorem (Sieg '85, Kohlenbach '90)

Aus Beweisen in WKL_0^ω von Sätzen der Form $\forall f\, \exists n\, A_{\mathsf{qf}}(f,n)$ können Programme in T_0 extrahiert werden.

Logische Systeme: WKL_0^ω

WKL (weak König's lemma) ist die Aussage,
dass jeder unendliche 0/1-Baum einen unendlichen Pfad besitzt.

Das System $\mathsf{RCA}_0^\omega + \mathsf{WKL}$ heißt WKL_0^ω.

WKL_0^ω beweist z.B.,

- dass stetige Funktionen auf $[0,1]$ ein Maximum haben,
- den Satz von Cauchy-Peano,
- Fixpunktsatz von Schauder,
- Satz von Hahn-Banach (für separable Räume).

Theorem (Sieg '85, Kohlenbach '90)

Aus Beweisen in WKL_0^ω von Sätzen der Form $\forall f\, \exists n\, A_{\mathsf{qf}}(f,n)$ können Programme in T_0 extrahiert werden.

Notation: f ist immer von Typ $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ und n, k vom Typ $\mathbb{N}$.

Logische Systeme: ACA_0^ω

Arithmetische Komprehension (ACA)
bezeichnet das Schema

$$\exists f\, \forall n\ (f(n) = 0 \leftrightarrow F(n))$$

wobei $F(n)$ eine arithmetische Formel ist, d.h. nur Quantoren über Zahlen enthält.

ACA_0^ω ist $\mathsf{RCA}_0^\omega + \mathsf{ACA} \equiv \mathsf{WKL}_0^\omega + \mathsf{ACA}$.

Logische Systeme: ACA_0^ω

Arithmetische Komprehension (ACA)
bezeichnet das Schema

$$\exists f\, \forall n\ (f(n) = 0 \leftrightarrow F(n))$$

wobei $F(n)$ eine arithmetische Formel ist, d.h. nur Quantoren über Zahlen enthält.

ACA_0^ω ist $\mathsf{RCA}_0^\omega + \mathsf{ACA} \equiv \mathsf{WKL}_0^\omega + \mathsf{ACA}$.

ACA_0^ω beweist z.B.

- das Bolzano-Weierstraß Prinzip (Existenz eines Häufungspunktes),
- den Satz von Osgood,
- dass jeder abzählbare, kommutative Ring ein maximales Ideal hat.

- Sei T_1 das Termsystem T_0 plus Iteration von Funktionalen vom Typ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
  - T_1 enthält die Ackermannfunktion,
  - T_1 enthält alle Funktionen, die durch Doppelinduktion gebildet werden können. (Induktionsformel $\forall x \, \exists y \, F_{\mathsf{qf}}(x, y)$)

- Sei T_1 das Termsystem T_0 plus Iteration von Funktionalen vom Typ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
  - T_1 enthält die Ackermannfunktion,
  - T_1 enthält alle Funktionen, die durch Doppelinduktion gebildet werden können. (Induktionsformel $\forall x\, \exists y\, F_{\mathit{qf}}(x, y)$)
- System T erhält man, wenn man Iteration für alle Funktionale zu T_0 hinzufügt. (Hilbert '26, Gödel '58)

- Sei T_1 das Termsystem T_0 plus Iteration von Funktionalen vom Typ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
  - T_1 enthält die Ackermannfunktion,
  - T_1 enthält alle Funktionen, die durch Doppelinduktion gebildet werden können. (Induktionsformel $\forall x \, \exists y \, F_{\mathsf{qf}}(x, y)$)
- System T erhält man, wenn man Iteration für alle Funktionale zu T_0 hinzufügt. (Hilbert '26, Gödel '58)

Theorem (Spector '62, Howard '81)

Aus Beweisen in ACA_0^ω von Sätzen der Form $\forall f \, \exists n \, A_{\mathsf{qf}}(f, n)$ kann man Programme in T extrahieren.

Der Satz von Ramsey

- Unendliches Schubfachprinzip

$$\forall k\ \forall f\colon \mathbb{N} \to k \quad \exists X \subseteq \mathbb{N}\ (X \text{ unendlich} \wedge f{\restriction}X \quad \text{ ist konstant})$$

Der Satz von Ramsey

- Unendliches Schubfachprinzip

$$\forall k \ \forall f\colon \mathbb{N} \to k \quad \exists X \subseteq \mathbb{N} \ (X \text{ unendlich} \wedge f \restriction X \quad \text{ ist konstant})$$

- Satz von Ramsey (unendliche Version)

$$\forall k \, \forall n \ \forall f\colon [\mathbb{N}]^n \to k \, \exists X \subseteq \mathbb{N} \ (X \text{ unendlich} \wedge f \restriction [X]^n \text{ ist konstant})$$

wobei $[X]^n$ die ungeordneten n-Tupel von X bezeichnet.

Der Satz von Ramsey

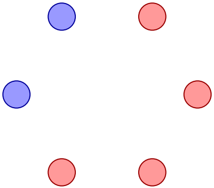
- Unendliches Schubfachprinzip

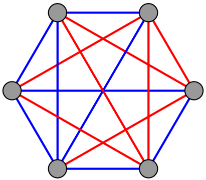
$$\forall k\ \forall f\colon \mathbb{N} \to k \quad \exists X \subseteq \mathbb{N}\ (X \text{ unendlich} \wedge f{\restriction}X \quad \text{ist konstant})$$

- Satz von Ramsey (unendliche Version)

$$\forall k\, \forall n\ \forall f\colon [\mathbb{N}]^n \to k\, \exists X \subseteq \mathbb{N}\ (X \text{ unendlich} \wedge f{\restriction}[X]^n \text{ ist konstant})$$

wobei $[X]^n$ die ungeordneten n-Tupel von X bezeichnet.





Der Satz von Ramsey

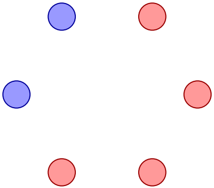
- Unendliches Schubfachprinzip

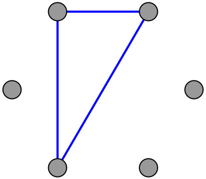
$$\forall k \ \forall f\colon \mathbb{N} \to k \quad \exists X \subseteq \mathbb{N} \ (X \text{ unendlich} \wedge f{\restriction}X \quad \text{ist konstant})$$

- Satz von Ramsey (unendliche Version)

$$\forall k \, \forall n \ \forall f\colon [\mathbb{N}]^n \to k \, \exists X \subseteq \mathbb{N} \ (X \text{ unendlich} \wedge f{\restriction}[X]^n \text{ ist konstant})$$

wobei $[X]^n$ die ungeordneten n-Tupel von X bezeichnet.





Der Satz von Ramsey

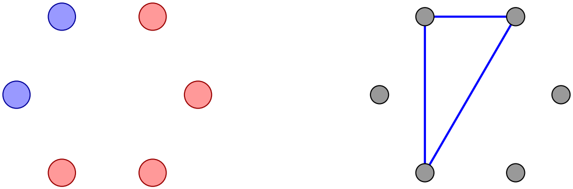
- Unendliches Schubfachprinzip

$$\forall k \ \forall f : \mathbb{N} \to k \quad \exists X \subseteq \mathbb{N} \ (X \text{ unendlich} \wedge f \restriction X \quad \text{ ist konstant})$$

- Satz von Ramsey (unendliche Version)

$$\forall k \, \forall n \ \forall f : [\mathbb{N}]^n \to k \, \exists X \subseteq \mathbb{N} \ (X \text{ unendlich} \wedge f \restriction [X]^n \text{ ist konstant})$$

wobei $[X]^n$ die ungeordneten n-Tupel von X bezeichnet.



Für festes n, k wird dieses Prinzip mit RT^n_k bezeichnet.

Der Satz von Ramsey (Fortsetzung)

Theorem (Jockusch '72; Seetapun, Slaman '95)

- $\mathsf{ACA} \longleftrightarrow \mathsf{RT}^3_2 \longleftrightarrow \mathsf{RT}^{n+3}_{k+2}$

Der Satz von Ramsey (Fortsetzung)

Theorem (Jockusch '72; Seetapun, Slaman '95)

- $\mathsf{ACA} \longleftrightarrow \mathsf{RT}^3_2 \longleftrightarrow \mathsf{RT}^{n+3}_{k+2}$
- $\mathsf{WKL} \not\rightarrow \mathsf{RT}^2_2$ *und* $\mathsf{RT}^2_2 \not\rightarrow \mathsf{ACA}$

Der Satz von Ramsey (Fortsetzung)

Theorem (Jockusch '72; Seetapun, Slaman '95)

- ACA $\longleftrightarrow$ RT^3_2 $\longleftrightarrow$ RT^{n+3}_{k+2}
- WKL $\not\longrightarrow$ RT^2_2 *und* RT^2_2 $\not\longrightarrow$ ACA

Theorem (Cholak, Jockusch, Slaman '01)

Die mit RT^2_2 *beweisbar rekursiven Funktionen sind in* T_1 *enthalten.*

Der Satz von Ramsey (Fortsetzung)

Theorem (Jockusch '72; Seetapun, Slaman '95)

- $\mathsf{ACA} \longleftrightarrow \mathsf{RT}^3_2 \longleftrightarrow \mathsf{RT}^{n+3}_{k+2}$
- $\mathsf{WKL} \not\longrightarrow \mathsf{RT}^2_2$ *und* $\mathsf{RT}^2_2 \not\longrightarrow \mathsf{ACA}$

Theorem (Cholak, Jockusch, Slaman '01)

Die mit RT^2_2 *beweisbar rekursiven Funktionen sind in* T_1 *enthalten.*

- Beweis ist indirekt. Keine Programmextraktion möglich.

Der Satz von Ramsey (Fortsetzung)

Theorem (Jockusch '72; Seetapun, Slaman '95)

- ACA $\longleftrightarrow$ RT^3_2 $\longleftrightarrow$ RT^{n+3}_{k+2}
- WKL $\not\longrightarrow$ RT^2_2 *und* RT^2_2 $\not\longrightarrow$ ACA

Theorem (Cholak, Jockusch, Slaman '01)

Die mit RT^2_2 beweisbar rekursiven Funktionen sind in T_1 enthalten.

- Beweis ist indirekt. Keine Programmextraktion möglich.
- Es ist offen, ob die rekursiven Funktionen genau T_1 entsprechen.

Der Satz von Ramsey (Fortsetzung)

Theorem (Jockusch '72; Seetapun, Slaman '95)

- ACA $\longleftrightarrow$ RT^3_2 $\longleftrightarrow$ RT^{n+3}_{k+2}
- WKL $\not\rightarrow$ RT^2_2 *und* RT^2_2 $\not\rightarrow$ ACA

Theorem (Cholak, Jockusch, Slaman '01)

Die mit RT^2_2 *beweisbar rekursiven Funktionen sind in* T_1 *enthalten.*

- Beweis ist indirekt. Keine Programmextraktion möglich.
- Es ist offen, ob die rekursiven Funktionen genau T_1 entsprechen.
- Trotz erheblicher Bemühungen und teilweiser Erfolge konnte die genaue Sträke von RT^2_2 bisher nicht bestimmt werden, siehe auch
  - Specker: Ramsey's Theorem does not hold in recursive set theory. '71
  - Hirst: Combinatorics in subsystems of second order arithmetic, '87
  - Hirschfeldt, Shore: Combinatorial principles weaker than RT^2_2, '07
  - Chong: Nonstandard methods in Ramsey's Theorem for pairs, '08
  - Chong, Slaman, Yang: Π^1_1-conservation of principles weaker than RT^2_2, '11
  - weitere Arbeiten von u.a. Downey, Lempp, Solomon, Mileti, Weiermann.

Programmextraktion für Ramsey für Paare

Theorem (K., erscheint in J. Symbolic Logic)

Aus Beweisen in

$$\mathsf{WKL}_0^\omega + \mathsf{RT}_2^2$$

von Sätzen der Form $\forall f \, \exists n \, A_{\mathit{qf}}(f, n)$
kann man Programme in T_1 *extrahieren.*

Programmextraktion für Ramsey für Paare

Theorem (K., erscheint in J. Symbolic Logic)

Aus Beweisen in

$$\mathsf{WKL}_0^\omega + \mathsf{RT}_2^2$$

von Sätzen der Form $\forall f\,\exists n\,A_{\mathit{qf}}(f,n)$
kann man Programme in T_1 *extrahieren.*

Beweis verwendet

- Programm-Normalisierung,
- Neue beweistheoretische Variante von *low*$_2$,
- Howards Ordinalzahlanalyse von Bar-Rekursion,
- Assoziierte (Kleene, Kreisel),
- WKL Elimination (Kohlenbach),
- Uniform weak König's Lemma (Kohlenbach),
- Elimination von Extensionalität (Gandy, Luckhardt).

Theorem (K., erscheint in Notre Dame J. Formal Logic)

Aus Beweisen in

$$\mathsf{WKL}_0^\omega + \textit{jede Folge in } \mathbb{R} \textit{ hat eine monotone Teilfolge}$$

von Sätzen der Form $\forall f\, \exists n\, A_{\mathit{qf}}(f, n)$
kann man Programme in T_0 *extrahieren.*

Theorem (K., erscheint in Notre Dame J. Formal Logic)

Aus Beweisen in

$$\mathsf{WKL}_0^\omega + \textit{jede Folge in } \mathbb{R} \textit{ hat eine monotone Teilfolge}$$

von Sätzen der Form $\forall f\, \exists n\, A_{qf}(f,n)$
kann man Programme in T_0 *extrahieren.*

- Zusammenhang mit RT^2_2:
  Prinzip folgt aus einem Spezialfall von RT^2_2.

Theorem (K., erscheint in Notre Dame J. Formal Logic)

Aus Beweisen in

$$\mathsf{WKL}_0^\omega + \textit{jede Folge in } \mathbb{R} \textit{ hat eine monotone Teilfolge}$$

von Sätzen der Form $\forall f\, \exists n\, A_{qf}(f,n)$
kann man Programme in T_0 *extrahieren.*

- Zusammenhang mit RT^2_2:
  Prinzip folgt aus einem Spezialfall von RT^2_2.
- Das System beweist, dass jede beschränkte Folge eine konvergierende Teilfolge besitzt.
  Aber i.A. kann nicht bewiesen werden, dass ein Häufungspunkt existiert.
  Die Existenz eines Häufungspunktes ist äquivalent zu ACA.

Theorem (K., erscheint in Notre Dame J. Formal Logic)

Aus Beweisen in

$$\mathsf{WKL}_0^\omega + \textit{jede Folge in } \mathbb{R} \textit{ hat eine monotone Teilfolge}$$

von Sätzen der Form $\forall f\, \exists n\, A_{qf}(f,n)$
kann man Programme in T_0 *extrahieren.*

- Zusammenhang mit RT_2^2:
  Prinzip folgt aus einem Spezialfall von RT_2^2.
- Das System beweist, dass jede beschränkte Folge eine konvergierende Teilfolge besitzt.
  Aber i.A. kann nicht bewiesen werden, dass ein Häufungspunkt existiert.
  Die Existenz eines Häufungspunktes ist äquivalent zu ACA.
- Beweis verwendet eine Verfeinerung von Howards Ordinalzahlanalyse.

Programmextraktion für Ultrafilter

Sei $\textsc{Ult}$ die Aussage, dass ein freier Ultrafilter über $\mathbb{N}$ existiert.

Theorem (K., erscheint in J. Mathematical Logic)

Aus Beweisen in

$$\mathsf{ACA}_0^\omega + \textsc{Ult}$$

von Sätzen der Form $\forall f\, \exists n\, A_{qf}(f, n)$
kann man Programme in T *extrahieren.*

Programmextraktion für Ultrafilter

Sei $\textsc{Ult}$ die Aussage, dass ein freier Ultrafilter über $\mathbb{N}$ existiert.

Theorem (K., erscheint in J. Mathematical Logic)

Aus Beweisen in

$$\mathsf{ACA}_0^\omega + \textsc{Ult}$$

von Sätzen der Form $\forall f\, \exists n\, A_{\mathit{qf}}(f, n)$
kann man Programme in T *extrahieren.*

Zusammenhang mit RT^2_2:
RT^2_2 beweist ein schwaches Ultrafilter Prinzip, das sogenannte Cohesive Prinzip.

Ultrafilter

Definition (Filter)

Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ heißt *Filter* über $\mathbb{N}$, falls

- $\forall X, Y \ (X \in \mathcal{F} \wedge X \subseteq Y \to Y \in \mathcal{F})$,
- $\forall X, Y \ (X, Y \in \mathcal{F} \to X \cap Y \in \mathcal{F})$,
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Ultrafilter

Definition (Filter)

Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ heißt *Filter* über $\mathbb{N}$, falls

- $\forall X, Y \ (X \in \mathcal{F} \wedge X \subseteq Y \rightarrow Y \in \mathcal{F})$,
- $\forall X, Y \ (X, Y \in \mathcal{F} \rightarrow X \cap Y \in \mathcal{F})$,
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Definition (Ultrafilter)

Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt *Ultrafilter*, wenn er ein maximaler Filter ist, d.h.
$\forall X \ \left(X \in \mathcal{F} \vee \overline{X} \in \mathcal{F}\right)$

Ultrafilter

Definition (Filter)

Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ heißt *Filter* über $\mathbb{N}$, falls

- $\forall X, Y \ (X \in \mathcal{F} \wedge X \subseteq Y \rightarrow Y \in \mathcal{F})$,
- $\forall X, Y \ (X, Y \in \mathcal{F} \rightarrow X \cap Y \in \mathcal{F})$,
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Definition (Ultrafilter)

Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt *Ultrafilter*, wenn er ein maximaler Filter ist, d.h. $\forall X \ \left(X \in \mathcal{F} \vee \overline{X} \in \mathcal{F}\right)$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathcal{U}_n := \{X \subseteq \mathbb{N} \mid n \in X\}$$

ein Ultrafilter. Ultrafilter dieser Form heißen *fixiert*.
Ein Ultrafilter, der nicht fixiert ist, heißt *frei*.

Freie Ultrafilter

- Um die Existenz von freien Ultrafiltern zu zeigen, wird das Auswahlaxiom benötigt.
  Insbesondere sind freie Ultrafilter nicht definierbar.

Freie Ultrafilter

- Um die Existenz von freien Ultrafiltern zu zeigen, wird das Auswahlaxiom benötigt.
  Insbesondere sind freie Ultrafilter nicht definierbar.

Lemma

Eine Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist ein freier Ultrafilter über $\mathbb{N}$, wenn

- $\forall X \ \left(X \in \mathcal{U} \vee \overline{X} \in \mathcal{U}\right)$,
- $\forall X, Y \ (X \in \mathcal{U} \wedge X \subseteq Y \to Y \in \mathcal{U})$,
- $\forall X, Y \ (X, Y \in \mathcal{U} \to X \cap Y \in \mathcal{U})$,
- $\forall X \ (X \in \mathcal{U} \to X \text{ ist unendlich})$.

Freie Ultrafilter

- Um die Existenz von freien Ultrafiltern zu zeigen, wird das Auswahlaxiom benötigt.
  Insbesondere sind freie Ultrafilter nicht definierbar.

Lemma

Eine Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist ein freier Ultrafilter über $\mathbb{N}$, wenn

- $\forall X \left(X \in \mathcal{U} \vee \overline{X} \in \mathcal{U} \right)$,
- $\forall X, Y \; (X \in \mathcal{U} \wedge X \subseteq Y \to Y \in \mathcal{U})$,
- $\forall X, Y \; (X, Y \in \mathcal{U} \to X \cap Y \in \mathcal{U})$,
- $\forall X \; (X \in \mathcal{U} \to X$ *ist unendlich*$)$.

- Die Aussage $\textsc{Ult}$ kann in RCA_0^ω formalisiert werden.

Freie Ultrafilter

- Um die Existenz von freien Ultrafiltern zu zeigen, wird das Auswahlaxiom benötigt.
  Insbesondere sind freie Ultrafilter nicht definierbar.

Lemma

Eine Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist ein freier Ultrafilter über $\mathbb{N}$, wenn

- $\forall X \left(X \in \mathcal{U} \vee \overline{X} \in \mathcal{U} \right)$,
- $\forall X, Y \ (X \in \mathcal{U} \wedge X \subseteq Y \to Y \in \mathcal{U})$,
- $\forall X, Y \ (X, Y \in \mathcal{U} \to X \cap Y \in \mathcal{U})$,
- $\forall X \ (X \in \mathcal{U} \to X$ *ist unendlich*$)$.

- Die Aussage $\textsc{Ult}$ kann in RCA_0^ω formalisiert werden.
- $\textsc{Ult}$ kann äquivalent als $\exists\forall$ in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\exists \mathcal{U} \, \forall Z \, \textsc{Ult}_{qf}(\mathcal{U}, Z)$$

Beweisskizze

Theorem

Aus Beweisen in

$$\mathsf{ACA}_0^\omega + \textsc{Ult}$$

von Sätzen der Form $\forall f \, \exists n \, A_{\mathit{qf}}(f, n)$
kann man Programme in T *extrahieren.*

- Angenommen
$$\mathsf{ACA}_0^\omega + \textsc{Ult} \vdash \forall f \, \exists n \, A_{\mathit{qf}}(f, n).$$

Beweisskizze

Theorem

Aus Beweisen in

$$\mathsf{ACA}_0^\omega + \textsc{Ult}$$

von Sätzen der Form $\forall f\, \exists n\, A_{qf}(f,n)$
kann man Programme in T *extrahieren.*

- Angenommen
$$\mathsf{ACA}_0^\omega + \textsc{Ult} \vdash \forall f\, \exists n\, A_{qf}(f,n).$$
- Da $\textsc{Ult}$ über RCA_0^ω arithmetische Komprehension impliziert, gilt
$$\mathsf{RCA}_0^\omega + \textsc{Ult} \vdash \forall f\, \exists n\, A_{qf}(f,n).$$

Beweisskizze

Theorem

Aus Beweisen in

$$\mathsf{ACA}_0^\omega + \textsc{Ult}$$

von Sätzen der Form $\forall f\, \exists n\, A_{\mathsf{qf}}(f,n)$
kann man Programme in T *extrahieren.*

- Angenommen

$$\mathsf{ACA}_0^\omega + \textsc{Ult} \vdash \forall f\, \exists n\, A_{\mathsf{qf}}(f,n).$$

- Da $\textsc{Ult}$ über RCA_0^ω arithmetische Komprehension impliziert, gilt

$$\mathsf{RCA}_0^\omega + \textsc{Ult} \vdash \forall f\, \exists n\, A_{\mathsf{qf}}(f,n).$$

- Mit Deduktionstheorem

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \textsc{Ult} \to \forall f\, \exists n\, A_{\mathsf{qf}}(f,n).$$

Beweisskizze (Fortsetzung)

- Ersetzung von $\textsc{Ult}$ liefert

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \exists \mathcal{U}\, \forall Z\, \textsc{Ult}_{\mathit{qf}}(\mathcal{U}, Z) \to \forall f\, \exists n\, A_{\mathit{qf}}(f, n).$$

Beweisskizze (Fortsetzung)

- Ersetzung von $\textsc{Ult}$ liefert

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \exists \mathcal{U}\, \forall Z\, \textsc{Ult}_{\mathsf{qf}}(\mathcal{U}, Z) \rightarrow \forall f\, \exists n\, A_{\mathsf{qf}}(f, n).$$

- Mit Umformungen folgt

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \forall \mathcal{U}, f\, \exists Z, n\ \left(\textsc{Ult}_{\mathsf{qf}}(\mathcal{U}, Z) \rightarrow A_{\mathsf{qf}}(f, n)\right).$$

Beweisskizze (Fortsetzung)

- Ersetzung von $\textsc{Ult}$ liefert

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \exists \mathcal{U}\, \forall Z\, \textsc{Ult}_{\mathit{qf}}(\mathcal{U}, Z) \rightarrow \forall f\, \exists n\, A_{\mathit{qf}}(f, n).$$

- Mit Umformungen folgt

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \forall \mathcal{U}, f\, \exists Z, n\, \left(\textsc{Ult}_{\mathit{qf}}(\mathcal{U}, Z) \rightarrow A_{\mathit{qf}}(f, n)\right).$$

- Die Funktionalinterpretation liefert Programme $t_Z(\mathcal{U}, f)$ und $t_n(\mathcal{U}, f)$.

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \forall \mathcal{U}, f\, \left(\textsc{Ult}_{\mathit{qf}}(\mathcal{U}, t_Z(\mathcal{U}, f)) \rightarrow A_{\mathit{qf}}(f, t_n(\mathcal{U}, f))\right).$$

Beweisskizze (Fortsetzung)

- Ersetzung von $\textsc{Ult}$ liefert

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \exists \mathcal{U}\, \forall Z\, \textsc{Ult}_{\mathsf{qf}}(\mathcal{U}, Z) \rightarrow \forall f\, \exists n\, A_{\mathsf{qf}}(f, n).$$

- Mit Umformungen folgt

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \forall \mathcal{U}, f\, \exists Z, n\, \left(\textsc{Ult}_{\mathsf{qf}}(\mathcal{U}, Z) \rightarrow A_{\mathsf{qf}}(f, n)\right).$$

- Die Funktionalinterpretation liefert Programme $t_Z(\mathcal{U}, f)$ und $t_n(\mathcal{U}, f)$.

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \forall \mathcal{U}, f\, \left(\textsc{Ult}_{\mathsf{qf}}(\mathcal{U}, t_Z(\mathcal{U}, f)) \rightarrow A_{\mathsf{qf}}(f, t_n(\mathcal{U}, f))\right).$$

- Diese Programme können $\mathcal{U}$ nur abzählbar oft abfragen.

Beweisskizze (Fortsetzung)

- Ersetzung von $\textsc{Ult}$ liefert

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \exists \mathcal{U}\, \forall Z\, \textsc{Ult}_{\mathit{qf}}(\mathcal{U}, Z) \to \forall f\, \exists n\, A_{\mathit{qf}}(f, n).$$

- Mit Umformungen folgt

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \forall \mathcal{U}, f\, \exists Z, n\ \left(\textsc{Ult}_{\mathit{qf}}(\mathcal{U}, Z) \to A_{\mathit{qf}}(f, n)\right).$$

- Die Funktionalinterpretation liefert Programme $t_Z(\mathcal{U}, f)$ und $t_n(\mathcal{U}, f)$.

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \forall \mathcal{U}, f\ \left(\textsc{Ult}_{\mathit{qf}}(\mathcal{U}, t_Z(\mathcal{U}, f)) \to A_{\mathit{qf}}(f, t_n(\mathcal{U}, f))\right).$$

- Diese Programme können $\mathcal{U}$ nur abzählbar oft abfragen.
- Man kann für jedes f einen approximativen Ultrafilter $\mathcal{F}_f$ in ACA_0^ω konstruieren, der sich auf den abgefragten Werten wie ein Ultrafilter verhält.

Beweisskizze (Fortsetzung)

- Ersetzung von $\textsc{Ult}$ liefert

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \exists \mathcal{U}\, \forall Z\, \textsc{Ult}_{\mathit{qf}}(\mathcal{U}, Z) \to \forall f\, \exists n\, A_{\mathit{qf}}(f, n).$$

- Mit Umformungen folgt

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \forall \mathcal{U}, f\, \exists Z, n\ \left(\textsc{Ult}_{\mathit{qf}}(\mathcal{U}, Z) \to A_{\mathit{qf}}(f, n)\right).$$

- Die Funktionalinterpretation liefert Programme $t_Z(\mathcal{U}, f)$ und $t_n(\mathcal{U}, f)$.

$$\mathsf{RCA}_0^\omega \vdash \forall \mathcal{U}, f\ \left(\textsc{Ult}_{\mathit{qf}}(\mathcal{U}, t_Z(\mathcal{U}, f)) \to A_{\mathit{qf}}(f, t_n(\mathcal{U}, f))\right).$$

- Diese Programme können $\mathcal{U}$ nur abzählbar oft abfragen.
- Man kann für jedes f einen approximativen Ultrafilter $\mathcal{F}_f$ in ACA_0^ω konstruieren, der sich auf den abgefragten Werten wie ein Ultrafilter verhält.
- Einsetzen liefert

$$\mathsf{ACA}_0^\omega \vdash \forall f\, A_{\mathit{qf}}(f, t_n(\mathcal{F}_f, f))$$

d.h. $t(f) := t_n(\mathcal{F}_f, f)$ ist eine Lösung. $\square$

Anwendungen

- Fixpunkttheorie
  - Analyse von Kirks Fixpunkttheorem für asymptotische Kontraktionen (Gerhardy '06, Briseid '07)
    Kirks Beweis verwendet Ultrapotenzen.
- Nichtstandard Analysis
  - Stochastische Differentialgleichungen
  - Navier-Stokes
- Ultralimiten, Ultrafilter Analysis
  - Banach Limiten
  - Nichtlineare Analysis, z.B. Invariante Maße.

Weitere Ergebnisse

- Bestimmung der Stärke des Bolzano-Weierstraß Prinzips für schwache Kompaktheit.
- Formalisierung einer Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes von Banach in $\mathsf{RCA}_0^\omega + T_1 + \mathsf{RT}_2^2$.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Veröffentlichungen

Alexander P. Kreuzer, Ulrich Kohlenbach,
Ramsey's Theorem for pairs and provably recursive functions,
Notre Dame J. of Formal Logic, vol. 50, no. 4, pp. 427–444 (2009).

Alexander P. Kreuzer,
The cohesive principle and the Bolzano-Weierstraß principle,
Math. Log. Quart. **57** (2011), no. 3, 292–298.

Alexander P. Kreuzer, Ulrich Kohlenbach,
Term extraction and Ramsey's theorem for pairs,
erscheint in J. of Symbolic Logic.

Alexander P. Kreuzer,
Primitive recursion and the chain antichain principle,
erscheint in Notre Dame J. of Formal Logic.

Alexander P. Kreuzer,
Non-principal ultrafilters, program extraction and higher order reverse mathematics,
erscheint in J. of Mathematical Logic.

Alexander P. Kreuzer,
On the strength of weak compactness,
eingereicht.

Generalized Banach Contraction Conjecture

Definition (g-Kontraktion)

Sei $\mathcal{X}$ ein vollständiger metrischer Raum, $\gamma \in [0, 1[$ und $m \in \mathbb{N}$.
$T \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ heißt (m, γ)-*g-Kontraktion*,
falls es für alle $x, y \in \mathcal{X}$ ein $i \in [1; m]$ gibt mit

$$d(T^i x, T^i y) <_{\mathbb{R}} \gamma^i d(x, y)$$

Theorem (Merryfield, Stein '02; Arvanitakis '03)

Jede (m, γ)-g-Kontraktion hat einen Fixpunkt.

Theorem (K.)

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt,
$\mathrm{RCA}_0^\omega + T_1$ *beweist, dass für jedes $\gamma < 1$ jede (m, γ)-g-Kontraktion einen Fixpunkt hat.*

Generalized Banach Contraction Conjecture: Ein Beispiel

Sei $\mathcal{X} := \{n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus 0\}$ und $T\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ geben durch

$$
\begin{aligned}
T(0) &:= 0 & & \\
T(n) &:= 1/(3n^4+1) & & n = 1, 2, \ldots \\
T(1/n) &:= n & & n = 0 \pmod 3 \\
T(1/n) &:= 1/(3n^4+2) & & n = 1 \pmod 3 \\
T(1/n) &:= 1/(3n^4+3) & & n = 2 \pmod 3
\end{aligned}
$$

- T ist ein $(3, \sqrt[3]{1/3})$-g-Kontraktion aber nicht stetig.
- Für jedes $x \neq 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} T^n(x) \neq 0$.

Asymptotische Kontraktionen

Sei $\mathcal{X}$ ein vollständiger metrischer Raum.

Definition

$T\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ heißt *asymptotische Kontraktion*, wenn es $\phi_n, \phi\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ gibt, so dass

- $\phi_n \to \phi$ gleichmäßig,
- ϕ stetig ist,
- $\phi(s) < s$ für $s > 0$,
- $d(T^n x, T^n y) \leq \phi_n(d(x,y))$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathcal{X}$.

Theorem (Kirk '04)

Sei T eine asymptotische Kontraktion und ϕ_n stetig.
Falls die Orbits von T beschränkt sind, dann hat T einen Fixpunkt.

Beweisidee

- Betrachte die Ultrapotenz $\mathcal{X}^{\mathcal{U}}$.
  - Element $\mathcal{X}^{\mathcal{U}}$ sind Folgen $(x_n) \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ modulo der Relation

$$(x_n) \sim (y_n) :\Leftrightarrow \lim_{n \to \mathcal{U}} d(x_n, y_n) = 0.$$

- Definiere auf der Ultrapotenz die Abbildungen

$$\begin{aligned} T^{\mathcal{U}}([x_n]_\sim) &:= [T(x_n)]_\sim, \\ \hat{T}([x_n]_\sim) &:= [T^n(x_n)]_\sim. \end{aligned}$$

- $T^{\mathcal{U}}, \tilde{T}$ kommutieren.
- $\hat{T}$ ist Kontraktion und hat genau einen Fixpunkt.
- Damit hat $T^{\mathcal{U}}$ Fixpunkt.
- Aus den Eigenschaften von $\mathcal{X}^{\mathcal{U}}$ folgt, dass T einen approximativen Fixpunkt und damit einen Fixpunkt hat.

Bar-Rekursion

Definition (Bar-Rekursor, nach Howard)

$$B_{0,1}AFGc :=_1 \begin{cases} Gc & \text{falls } A[c] < \operatorname{lth} c, \\ Fc(\lambda u^0.B_{0,1}(AFG(c * \langle u \rangle))) & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $[c] := \lambda i.(c)_i$.

$B_{0,1}$ ist nicht auf allen Funktionalen wohldefiniert.
Auf stetigen Funktionalen ist $B_{0,1}$ aber wohldefiniert.

Theorem (K.)

Seien f, g, a die Berechenungslängen von $F, G, A\alpha$ (für eine frische Variable α).
Dann hat $B_{0,1}AFGc$ die Berechnungslänge $k := 2^{g+f\cdot 4\cdot(\omega+\omega\cdot a+\omega)}$.

Falls f, g, a endlich sind, dann ist $k < \omega^\omega$.

Bolzano-Weierstraß I

Definition

- Eine Folge $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ heißt *langsam konvergierend* falls
$$\forall k \, \exists n \, \forall n' > n \, \left(|x_n - x_{n'}| < 2^{-k} \right).$$
- Ein Folge $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ heißt *schnell konvergierend* falls
$$\forall n \, \forall n' > n \, \left(|x_n - x_{n'}| < 2^{-n} \right).$$

Definition

$$(\mathsf{BW}_{\mathsf{weak}}): \begin{cases} \text{Jede Folge } (x_n)_n \subseteq [0,1] \text{ hat eine} \\ \qquad \text{langsam konvergierende Teilfolge.} \end{cases}$$

$$(\mathsf{BW}): \begin{cases} \text{Jede Folge } (x_n)_n \subseteq [0,1] \text{ hat eine} \\ \qquad \text{schnell konvergierende Teilfolge.} \end{cases}$$

Bolzano-Weierstraß II

Definition (Bolzano-Weierstraß für schwache Kompaktheit auf ℓ_2)

$$\text{(weak-BW)}: \begin{cases} \text{Jede Folge in der Einheitskugel von } \ell_2 \\ \qquad \text{hat einen schwachen Häufungspunkt.} \end{cases}$$

Theorem

- *Es gibt einen Turing Grad d mit $d'' = 0''$, so dass jede berechenbare Instanz von $\mathsf{BW}_{\mathsf{weak}}$ eine Lösung in d hat.*
- *Es gibt einen Turing Grad d mit $d' = 0''$, so dass jede berechenbare Instanz von BW eine Lösung in d hat.*
- *Jede berechenbare Instanz von weak-BW hat eine Lösung in $0''$.*

Jede dieser Aussagen ist optimal.

Atomic Model Theorem

Definition

- Eine Formel $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ aus $\mathcal{T}$ heißt *Atom* wenn für jede andere Formel $\psi(x_1, \ldots x_n)$

$$\mathcal{T} \vdash \phi \rightarrow \psi \qquad \text{oder} \qquad \mathcal{T} \vdash \phi \rightarrow \neg\psi.$$

- Eine Theorie $\mathcal{T}$ heißt *atomar*, falls jede Formel $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ die konsistent ist mit $\mathcal{T}$ zu einem Atom $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ erweitert werden kann, d.h. dass $\mathcal{T} \vdash \phi \rightarrow \psi$.
- Ein Model $\mathcal{A}$ heißt *atomares Model*, wenn jedes n-Tupel $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|$ ein Atom aus $Th(\mathcal{A})$ erfüllt.

Bestehe die Sprache nur aus den Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ und sei $\mathcal{T}$ eine vollständige Theorie, dann sind die Sätze der Form

$$x_0 = c_0 \wedge x_1 = c_1 \wedge \cdots \wedge x_n = c_n$$

Atome.

Atomic Model Theorem

Definition

- Eine Formel $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ aus $\mathcal{T}$ heißt *Atom* wenn für jede andere Formel $\psi(x_1, \ldots x_n)$

$$\mathcal{T} \vdash \phi \rightarrow \psi \qquad \text{oder} \qquad \mathcal{T} \vdash \phi \rightarrow \neg\psi.$$

- Eine Theorie $\mathcal{T}$ heißt *atomar*, falls jede Formel $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ die konsistent ist mit $\mathcal{T}$ zu einem Atom $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ erweitert werden kann, d.h. dass $\mathcal{T} \vdash \phi \rightarrow \psi$.
- Ein Model $\mathcal{A}$ heißt *atomares Model*, wenn jedes n-Tupel $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|$ ein Atom aus $Th(\mathcal{A})$ erfüllt.

Theorem (Atomic Model Theorem)

Jede atomare Theorie hat atomare Modelle.

Das Cohesive Prinzip

Sei $X \subseteq^* Y :\equiv (X \setminus Y$ ist endlich$)$.

Definition

Sei $(R_i) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
Eine Menge X heißt *cohesive* für die Mengen (R_i), falls

$$\forall i \left(X \subseteq^* R_i \vee X \subseteq^* \overline{R_i} \right).$$

Definition

Das *Cohesive Prinzip* besagt, dass es zu allen $(R_i) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ eine unendliche Menge gibt, die cohesive für (R_i) ist.

Prädikativismus
(Weyl, Feferman)

Finitistischer Reduktionismus
(Hilbert)

Rekursive Analysis mit klassischer Logik

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{ACA}_0 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dd] & \mathsf{RT}^3_2 \arrow[d] \\
 & \mathsf{RT}^2_2 \arrow[dl, leftrightarrow, "|" marking] \arrow[dd] \\
\mathsf{WKL}_0 \arrow[d] & \\
\mathsf{RCA}_0 & \mathsf{RT}^1_{<\infty} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Anwendungen von Proof-mining I

Kohlenbach, U. und Leuştean, L.
On the computational content of convergence proofs via Banach limits
Erscheint in: Philosophical Transactions of the Royal Society A.

Kohlenbach, U.
A uniform quantitative form of sequential weak compactness and Baillon's nonlinear ergodic theorem
Erscheint in: Communications in Contemporary Mathematics.

Kohlenbach, U.
On quantitative versions of theorems due to F. E. Browder and R. Wittmann
Adv. Math. 226 (2011), no. 3, 2764–2795.

Colao, V. und Leuştean, L. und López, G. und Martín-Márquez, V.
Alternative iterative methods for nonexpansive mappings, rates of convergence and applications
J. Convex Anal. 18 (2011), no. 2, 465–487.

Körnlein, D. und Kohlenbach, U.
Effective rates of convergence for Lipschitzian pseudocontractive mappings in general Banach spaces
Nonlinear Anal. 74 (2011), no. 16, 5253–5267.

Kohlenbach, U. und Leuștean, L.
Asymptotically nonexpansive mappings in uniformly convex hyperbolic spaces
J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 12 (2010), no. 1, 71–92.

Avigad, J. und Gerhardy, P. und Towsner, H.
Local stability of ergodic averages
Transactions of the American Mathematical Society, 362:261–288, 2010.

Leuștean, L.
Nonexpansive iterations in uniformly convex W-hyperbolic spaces
Nonlinear analysis and optimization I. Nonlinear analysis, 193–210, Contemp. Math., 513 (2010).

Kohlenbach, U. und Leuștean, L.
A quantitative mean ergodic theorem for uniformly convex Banach spaces
Ergodic Theory Dynam. Systems 29 (2009), no. 6, 1907–1915.

Briseid, E. M.
Fixed points of generalized contractive mappings
J. Nonlinear Convex Anal. 9 (2008), no. 2, 181–204.

Anwendungen von Proof-mining III

Leuștean, L.
A quadratic rate of asymptotic regularity in CAT(0)-spaces
Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 325 (2007), No. 1, 386–399.

Kohenbach, U.
The approximate fixed point property in product spaces
Nonlinear Anal. 66 (2007), no. 4, 806–818.

Briseid, E. M.
Some results on Kirk's asymptotic contractions
Fixed Point Theory 8 (2007), no. 1, 17–27.

Briseid, E. M.
A rate of convergence for asymptotic contractions
J. Math. Anal. Appl. 330 (2007), no. 1, 364–376.

Kohlenbach, U.
Some computational aspects of metric fixed point theory
Nonlinear Analysis vol. 61, no. 5, pp. 823-837 (2005).

Anwendungen von Proof-mining IV

Kohlenbach, U. und Leuştean, L.
Mann iterates of directionally nonexpansive mappings in hyperbolic spaces
Abstract and Applied Analysis, Vol. 2003 (2003), 449–477.

Kohlenbach, U.
A quantitative version of a theorem due to Borwein-Reich-Shafrir.
Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 22, pp. 641–656 (2001).

Kohlenbach, U.
New effective moduli of uniqueness and uniform a-priori estimates for constants of strong unicity by logical analysis of known proofs in best approximation theory.
Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 14, pp. 581–606 (1993).