

Πρόταση προς απόδειξη:

Δεδομένου ενός οποιουδήποτε συνδεδεμένου γράφου $G(V,E)$ και του πίνακα γειτνίασης αυτού, να αποδειχθεί ότι ο γράφος $T(V_1,E_1)$ που προκύπτει επιλέγοντας την πρώτη μονάδα κάθε στήλης του πίνακα γειτνίασης του γράφου G (αρχίζοντας από τη δεύτερη στήλη), αποτελεί ένα ζευγνύον δένδρο του γράφου G .

Ορισμός:

Ζευγνύον δένδρο (spanning tree) ενός συνδεδεμένου γράφου G ονομάζεται ένα δένδρο T που είναι υπογράφος του G με σύνολο κορυφών $V(T) = V(G)$.

Απόδειξη (με τη μέθοδο της επαγωγής):

Θεωρώ τον γράφο $G(3,3)$ με πίνακα γειτνίασης:

	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

Επιλέγω τις πρώτες μονάδες (σημασμένες με κόκκινο) των στηλών 2 και 3 του πίνακα γειτνίασης του G . Παρατηρώ ότι ο γράφος που προκύπτει από τις ακμές που επέλεξα (έστω T) είναι υπογράφος του αρχικού (αφού μόνον κάποιες από τις ακμές του G έχουν επιλεγεί) και περιλαμβάνει τόσες κορυφές όσες και ο G (ισχύει δηλαδή $V(T) = V(G) = 3$). Άρα ο T είναι ένα ζευγνύον δένδρο του G . **(1)**

Έστω ότι για έναν γράφο $G_1(K,E)$ έχουμε το ζευγνύον δένδρο $T_1(K,E_1)$ που προέκυψε επιλέγοντας τους πρώτους άσσους από κάθε στήλη του πίνακα γειτνίασης του G_1 . **(2)**

Θα δείξω ότι για γράφο G_2 με $K+1$ κορυφές και E_2 ακμές έχω ένα ζευγνύον δένδρο αν επιλέξω τις πρώτες μονάδες των στηλών 2,3,..., $K+1$ του πίνακα γειτνίασης του G_2 .

Από την σχέση **(2)** γνωρίζω ότι για τυχαίο γράφο με K κορυφές έχω $K-1$ μονάδες επιλεγμένες στον πίνακα γειτνίασης, δηλαδή $K-1$ ακμές. Για να παράγω τον γράφο G_2 θεωρώ μία επιπλέον κορυφή, δηλαδή μια επιπλέον διάσταση στον πίνακα γειτνίασης. Σε αυτήν θα υπάρχει τουλάχιστον μία μονάδα διότι σε αντίθετη περίπτωση ο γράφος δεν θα είναι συνδεδεμένος (πράγμα που το απαιτήσαμε στην αρχή). Επομένως ο γράφος T_2 που προκύπτει είναι ένας υπογράφος του G_2 (εφόσον επιλέχθηκε ένα μέρος των μονάδων του πίνακα γειτνίασης του G_2) με $V(T_2) = V(G_2) = K+1$ δηλαδή ο T_2 είναι ένα ζευγνύον δένδρο του G_2 .