

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**  
**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ**  
**КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА ДАННЫХ**

Румянцев  
Андрей Кирилович

**Статистическое оценивание параметров линейной  
регрессии с выбросами при наличии группирования  
наблюдений**

Дипломная работа

Научный руководитель:  
зав. кафедрой ММАД,  
канд. физ.-мат. наук, доцент  
Бодягин Игорь Александрович

Допущена к защите

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2019 г.

Зав. кафедрой ММАД,

канд. физ.-мат наук, доцент И.А. Бодягин

Минск, 2019



# Содержание

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>2</b>
<b>1 Модель линейной регрессии с выбросами при наличии группирования наблюдений</b>	<b>3</b>
<b>2 Существующие робастные способы оценивания параметров линейной регрессии с выбросами</b>	<b>4</b>
2.1 Метод наименьших квадратов . . . . .	4
2.2 М-оценки . . . . .	5
<b>3 Статистическое оценивание параметров линейной регрессии с выбросами при наличии группирования наблюдений</b>	<b>6</b>
3.1 Метод секущих . . . . .	8
3.2 Переклассификация выборки . . . . .	9
3.2.1 Метод $K$ -ближайших соседей . . . . .	9
3.2.2 Переклассификация с использованием Локального уровня выброса и Случайного леса . . . . .	10
3.3 Альтернативные оценки параметров модели . . . . .	12
3.4 Полиномиальная регрессия . . . . .	13
<b>4 Компьютерные эксперименты</b>	<b>15</b>
4.1 График рассеяния зависимой переменной и регрессоров . . . . .	15
4.2 Графики рассеяния оценок в случае использования метода $K$ -ближайших соседей для переклассификации . . . . .	15
4.3 Вариации оценок без переклассификации . . . . .	17
4.4 Сравнение оценок при переклассификации методом $K$ -ближайших соседей с оценками без переклассификации . . . . .	17
4.5 Сравнительный анализ построенной оценки с альтернативной . . . . .	19
4.5.1 Эксперимент с изменением объема выборки . . . . .	19
4.5.2 Эксперимент с полиномиальной регрессией . . . . .	20
4.6 Эксперименты с изменением уровня переклассификации выборки для метода $k$ -ближайших соседей . . . . .	22
4.7 Эксперименты с изменением $K$ для Least outlier factor, используемого в переклассификации . . . . .	23
<b>Заключение</b>	<b>25</b>
<b>Список Литературы</b>	<b>26</b>
<b>Приложение</b>	<b>27</b>

# ВВЕДЕНИЕ

В математической статистике широко используется регрессионная модель. Существует несколько подходов для оценки параметров регрессии, но далеко не все устойчивы к возникновению аномальных наблюдений, то есть таких наблюдений, которые не подчиняются общей модели. В реальной жизни аномальные наблюдения возникают постоянно. Такие наблюдения могут возникать по разным причинам: из-за ошибки измерения, из-за необычной природы входных данных. По этой причине большинство методов просто неприменимо. В прошлом веке в работах Хьюбера была заложена теория робастного оценивания.

Были предложены следующие робастные оценки[1]:

- М-Оценки
- R-Оценки
- L-Оценки

М-оценки – некоторое подобие оценок максимального правдоподобия (ММП-оценки - частный случай), L-оценки строятся на основе линейных комбинаций порядковых статистик, R-оценки – на основе ранговых статистик.

Такие случаи, когда зависимые переменные наблюдаются с выбросами или с пропусками, хорошо исследованы [3]. Более сложный случай, когда вместо содержащих выбросы значений зависимой переменной наблюдаются номера классов(интервалов), в которые попадают эти наблюдения [11].

# 1 Модель линейной регрессии с выбросами при наличии группирования наблюдений

Рассмотрим модель линейной регрессии:

$$y_i = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ x_{i1} \\ \dots \\ x_{in} \end{pmatrix}^T + \varepsilon_i, \quad (1)$$

$$y_i = f(x_i, \beta) + \varepsilon_i, \quad (2)$$

$$f(x_i, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_n x_{in}, \quad (3)$$

Здесь  $y_i$  – зависимая переменная,  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$  – вектор регрессоров,  $\{\beta_k, k = \overline{0, n}\}$  – коэффициенты линейной регрессии, а  $\varepsilon_i$  – случайная ошибка  $i$ -го эксперимента, распределение которой подчиняется нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ ,  $N$ -объем выборки. Каждый  $y_i$  принадлежит нормальному распределению:

$$y_i = f(x_i, \beta) + \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(f(x_i, \beta), \sigma^2). \quad (4)$$

Предполагается, что выборка содержит выбросы, описываемые следующими соотношениями.

$$y_i^{\tilde{\varepsilon}} = (\xi_i) y_i + (1 - \xi_i) \eta_i, \quad (5)$$

где  $\xi_i$  принимает значение, равное 1, с вероятностью  $1 - \tilde{\varepsilon}$  и значение, равное 0, с вероятностью  $\tilde{\varepsilon}$ :

$$\begin{cases} P\{\xi_i = 0\} = \tilde{\varepsilon}, \\ P\{\xi_i = 1\} = 1 - \tilde{\varepsilon}, \end{cases}, \quad (6)$$

$\eta_i$ -случайная величина из некоторого вообще говоря неизвестного распределения.

Параметр  $\xi_i$  имеет следующий содержательный смысл: если  $\xi_i = 0$ , то вместо истинного значения мы наблюдаем выброс, если  $\xi_i = 1$ , то наблюдается истинное значение. Переменную  $\tilde{\varepsilon}$  будем называть долей аномальных наблюдений. Величины  $\xi_i, x_i$  и  $\eta_i$  являются независимыми.

Пусть множество значений функции регрессии, т.е. множество  $\mathbb{R}$ , разбито на  $k$  непересекающихся полуинтервалов:

$$\mathbb{R} = (-\infty, a_1] \cup (a_1, a_2] \cup \dots \cup (a_{k-1}, +\infty). \quad (7)$$

Полученные полуинтервалы будем обозначать:  $\nu_0, \dots, \nu_{k-1}$ .

Предполагается, что каждый раз вместо истинного значения зависимой переменной  $y_i$  наблюдается только номер интервала, в который это наблюдение попало. Тогда для каждого  $y_i$  будем наблюдать лишь номер полуинтервала  $\mu_i$ , в который он попал.

$$\mu_i = j, \text{ если } y_i \in \nu_j. \quad (8)$$

В таком случае принято говорить, что имеет место группирование наблюдений, а сами наблюдения называются группированными [3].

## 2 Существующие робастные способы оценивания параметров линейной регрессии с выбросами

Для модели регрессии (1) существует несколько робастных способов оценивания параметров. Далее приведены некоторые из них.

### 2.1 Метод наименьших квадратов

Предположим, что случайные ошибки подчиняются нормальному закону распределения вероятностей:

$$L\{\varepsilon_i\} = N_1(0, \sigma^2), i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Строим логарифмическую функцию правдоподобия. В силу (??) и (1) имеем:

$$L\{y_i\} = N_1(f(x_i; \beta), \sigma^2). \quad (10)$$

Логарифмическая функция правдоподобия выглядит так[2]:

$$l(\beta) = \ln \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y_i - f(x_i; \beta))^2}{2\sigma^2}} \right) = -\frac{1}{2}n \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}R^2(\beta), \quad (11)$$

$$R^2(\beta) = \sum_{i=1}^n (\delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, \beta))^2 \geq 0. \quad (12)$$

Тогда оценка методом наименьших квадратов из формул (6), (9) такова:

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} R^2(\beta). \quad (13)$$

## 2.2 М-оценки

Швейцарский статистик П.Хьюбер предложил использовать М-оценки [2], которые являются решениями экстремальных задач вида:

$$\sum_{i=1}^n \phi(x_i; \beta) \rightarrow \min_{\beta}, \quad (14)$$

где  $\phi(\cdot; \beta)$ -некоторая функция, определяющая конкретный тип оценок и их точность.

Очевидно, что  $\phi(\cdot; \beta) \equiv -\ln p(\cdot; \beta)$  дает обычную оценку максимального правдоподобия, построенную по модели без выбросов (??).

Рассмотрим теперь некоторые способы выбора функции  $\phi(\cdot; \beta)$  для решения экстремальной задачи в М-оценках.

Для начала определим:

$$u_i = y_i^{\tilde{\varepsilon}} - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_n x_{in}). \quad (15)$$

Тогда существует такие методы[4]:

Способы выбора $\phi(\cdot; \beta)$	
Метод	Целевая функция
Метод Наименьших Квадратов	$\phi(\cdot; \beta)_{OLS} = u^2$
Хьюбера	$\phi(\cdot; \beta)_H = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2,  u  \leq k, \\ k u  - \frac{1}{2}k^2,  u  > k \end{cases}$
Биквадратный	$\phi(\cdot; \beta)_B = \begin{cases} \frac{k^2}{6}(1 - [1 - (\frac{u}{k})^2]^3),  u  \leq k \\ \frac{k^2}{6},  u  > k \end{cases}$

### 3 Статистическое оценивание параметров линейной регрессии с выбросами при наличии группирования наблюдений

Введем обозначение для функции распределения стандартного нормального закона:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (16)$$

Тогда функцию распределения нормального закона с параметрами  $\mu, \sigma^2$  можно представить как:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad (17)$$

где  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ .  
Обозначим:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (18)$$

Тогда:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]. \quad (19)$$

Подставив полученные выражения в (17) получим:

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \text{erf}\left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right]. \quad (20)$$

При модельных предположениях (4) вероятность попадания  $y_i$  в полуинтервал  $\nu_j$  равна:

$$\begin{aligned} P\{y_i \in \nu_j\} &= F_{y_i}(a_{j+1}) - F_{y_i}(a_j) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(\text{erf}(\frac{a_{j+1}-f(x_i,\beta)}{\sqrt{2}\sigma}) - \text{erf}(\frac{a_j-f(x_i,\beta)}{\sqrt{2}\sigma})), & j = \overline{1, k-2} \\ \frac{1}{2}(1 + \text{erf}(\frac{a_1-f(x_i,\beta)}{\sqrt{2}\sigma})), & j = 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \text{erf}(\frac{a_{k-1}-f(x_i,\beta)}{\sqrt{2}\sigma})), & j = k-1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (21)$$

Понятно, что:

$$P(\mu_i = j) = P(y_i \in \nu_{\mu_i}). \quad (22)$$



Решается задача статистического оценивания параметров модели  $\{\beta_k, k = \overline{0, n}\}$  по известным группированным наблюдениям с аномалиями.

Для этого построим функцию правдоподобия:

$$l(\beta, \sigma^2, \mu_1, \dots, \mu_N) = \sum_{i=1}^N \ln(P(y_i \in \nu_{\mu_i})) = \quad (23)$$

$$= \sum_{i=1}^N \ln \begin{cases} \frac{1}{2}(\operatorname{erf}(\frac{a_{j+1}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}) - \operatorname{erf}(\frac{a_j-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma})), & i = \overline{1, k-2} \\ \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(\frac{a_1-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma})), & i = 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(\frac{a_{k-1}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma})), & i = k-1 \end{cases}, \quad (24)$$

где:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (25)$$

Для максимизирования функции правдоподобия решим систему уравнений:

$$\frac{\delta l}{\delta \beta} = 0, \quad (26)$$

где:

$$\begin{aligned} \frac{\delta l}{\delta \beta} &= \frac{\delta \sum_{i=1}^N \ln P(y_i \in \nu_{\mu_i})}{\delta \beta} = \\ &= \frac{\delta \sum_{i=1}^N \ln(\frac{1}{2}(\operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i+1}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}) - \operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma})))}{\delta \beta} = \\ &= \sum_{i=1}^N \left( (1 - (\delta_{\mu_i 0} + \delta_{\mu_i k-1})) \frac{(\operatorname{erf}'(\frac{a_{\mu_i+1}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}) - \operatorname{erf}'(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}))}{(\operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i+1}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}) - \operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}))} + \right. \\ &\quad \left. + (\delta_{\mu_i 0} + \delta_{\mu_i k-1}) \frac{\operatorname{erf}'(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma})}{(1 + \operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}))} \right) (-1) \frac{\delta f(x_i, \beta)}{\delta \beta} = \quad (27) \\ &= - \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} 1 \\ x_{i1} \\ \dots \\ x_{in} \end{pmatrix} \times \left( (1 - (\delta_{\mu_i 0} + \delta_{\mu_i k-1})) \frac{(\operatorname{erf}'(\frac{a_{\mu_i+1}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}) - \operatorname{erf}'(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}))}{(\operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i+1}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}) - \operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}))} + \right. \\ &\quad \left. + (\delta_{\mu_i 0} + \delta_{\mu_i k-1}) \frac{\operatorname{erf}'(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma})}{(1 + \operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}))} \right). \end{aligned}$$

$\delta_{ij}$  - символ Кронекера.

Известно приближение для функции  $\operatorname{erf}(x)$ :

$$\begin{aligned} (\operatorname{erf} x)^2 &\approx 1 - \exp\left(-x^2 \frac{\frac{4}{\pi} + ax^2}{1 + ax^2}\right), \\ a &= \frac{8}{3\pi} \frac{3 - \pi}{\pi - 4}. \end{aligned} \quad (28)$$

Оно считается достаточно точным для  $x$  близких к 0 и к  $\infty$  [7].

Найдем производную для этого приближения:

$$\operatorname{erf}'(x) = \exp\left(-x^2 \frac{\frac{4}{\pi} + ax^2}{1 + ax^2}\right) \frac{-2x \frac{\frac{4}{\pi} + ax^2}{1 + ax^2} + (2ax^3) \frac{\frac{4}{\pi} + ax^2}{1 + ax^2} - \frac{2ax^3}{1 + ax^2}}{2\sqrt{1 - \exp\left(-x^2 \frac{\frac{4}{\pi} + ax^2}{1 + ax^2}\right)}}. \quad (29)$$

Уравнение (26) решается методом секущих.

### 3.1 Метод секущих

Так как мы не можем привести систему  $\frac{\delta l}{\delta \beta} = 0$  к виду, удобному для итерации, то нам придется искать ее нули с помощью метода секущих. Введем вектор ошибки  $\tilde{\epsilon}^{(k)} = \beta^* - \beta^{(k)}$ . Тогда для его определения имеем:

$$\frac{\delta l(\beta^{(k)} + \tilde{\epsilon}^{(k)})}{\delta \beta} = 0. \quad (30)$$

Строя разложение левой части по формуле Тейлора и ограничиваясь лишь линейными членами[8], будем иметь систему:

$$\frac{\delta}{\delta \beta} \frac{\delta l(\beta^{(k)})}{\delta \beta} \Delta \beta^{(k)} = -\frac{\delta l(\beta^{(k)})}{\delta \beta}. \quad (31)$$

Вторая производная функции  $l$  приближается с помощью выражения:

$$\frac{\delta}{\delta \beta_j} \frac{\delta l(\beta_1^{(k)}, \dots, \beta_n^{(k)})}{\delta \beta} \approx \frac{\frac{\delta l(\beta_1^{(k)}, \dots, \beta_j^{(k)}, \dots, \beta_n^{(k)})}{\delta \beta}(\beta^{(k)}) - \frac{\delta l(\beta_1^{(k)}, \dots, \beta_j^{(k-1)}, \dots, \beta_n^{(k)})}{\delta \beta}(\beta^{(k)})}{\beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k-1)}}. \quad (32)$$

Если матрица  $\frac{\delta}{\delta \beta} \frac{\delta l(\beta^{(k)})}{\delta \beta}$  невырожденная (а в нашем случае она диагональная), то из этой системы можно единственным образом найти  $\Delta \beta^{(k)}$  и построить приближение:

$$\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} + \Delta \beta^{(k)}. \quad (33)$$

## 3.2 Переклассификация выборки

Теперь имеем нули производной функции  $l$ , а также ее значения на границе отрезка  $[a, b]$ . Переберем эти значения и таким образом найдем значение вектора  $\hat{\beta}$ , где она достигает своего максимального значения.

Для уменьшения влияния выбросов будем использовать переклассификацию выборки. В ходе выполнения дипломной работы было испробовано несколько способов переклассификации выборки. Один из них: метод  $K$ -ближайших соседей.

### 3.2.1 Метод $K$ -ближайших соседей

Идея заключается в том, что аномальные наблюдения с большей вероятностью попадают не в те интервалы, в которые попадают истинные наблюдения. При этом переклассификация может помочь отнести аномальные наблюдения к истинным классам и улучшить качество оценивания.

На первом этапе для каждого вектора  $x_i$  имели класс  $\mu_i$ : т.е. пару  $(x_i, \mu_i)$ . Далее выполним переклассификацию выборки. Для этого построим новую выборку такого же объема  $N$ . Пройдемся по каждому элементу  $(x_i, \mu_i)$  выборки и для этого наблюдения построим новое:

$$(x_i, \check{\mu}_i), \quad (34)$$

где  $\check{\mu}_i$  получен по методу  $K$ -соседей.

$$\check{\mu}_i = \arg \max_j \sum_{k \in V_i, k \neq i} \delta_{\check{\mu}_k j}, \quad (35)$$

где  $V_i$  множество индексов  $l$  первых  $K$  векторов  $x_l$ , отсортированных по возрастанию расстояния до вектора  $x_i$ .

После переклассификации выборки, к ней применяется функция правдоподобия из уравнений (23), только теперь с использованием новых классов  $\check{\mu}_i$  вместо  $\mu_i$ . Она аналогично максимизируется и в итоге находится новая оценка параметров  $\hat{\beta}$ .

В ходе экспериментов (раздел 3.2) оказалось, что метод  $K$  ближайших соседей слабо исправляет ошибочные классы в выборке, поэтому было решено использовать другой подход в переклассификации.

### 3.2.2 Переклассификация с использованием Локального уровня выброса и Случайного леса

Идея метода заключается в следующем: определим в выборке такие наблюдения, которые, вероятно, являются аномальными с помощью какого-либо способа. После этого выберем наблюдения, которые не определились как аномальные. Обучим на полученных наблюдениях классификатор. После этого с помощью обученного классификатора переклассифицируем те наблюдения, которые определились как аномальные. В итоге получим выборку, которую будем использовать при решении уравнения (23).

Для определения аномальных наблюдений можно использовать Локальный уровень выброса. Метод был предложен Маркусом М. Бройнигом, Гансом-Петер Кейгелем, Реймондом Т. НГ и Ёргом Сандером в 2000 году. Аномальные наблюдения находятся с помощью измерения локального отклонения точек с учётом их соседей. Метод основан на концепте локальной плотности достижимости, где локальная плотность достижимости вычисляется с учётом ближайших  $K$  соседей, расстояние до которых используется для вычисления плотности. Сравнивая локальную плотность точки с локальной плотностью соседей можно определять точки, которые обладают значительно меньшей локальной плотностью по сравнению с соседями. Такие точки будем считать выбросами.

Пусть  $x_i$  является некоторой точкой выборки. Определим  $\rho(x_i, x_l)$  - расстояние от точки  $x_i$  до точки  $x_l$  (будем использовать меру Евклида),  $\rho_k(x_i)$  - расстояние от точки  $x_i$  до её  $K$ -го соседа. Аналогично методу  $K$ -ближайших соседей обозначим множество индексов  $k$  первых  $K$  векторов  $x_k$ , отсортированных по возрастанию расстояния до вектора  $x_i$  через  $V_i$ . Используя введенные величины зададим:

$$\hat{\rho}_k(x_i, x_l) = \max\{\rho_k(x_l), \rho(x_i, x_l)\} \quad (36)$$

Такую величину можно интерпретировать как истинное расстояние от точки  $x_l$  до точки  $x_i$  если  $x_l$  не входит в ее  $K$  ближайших соседей или расстояние до точки  $x_{V_K}$  в противном случае. Данная величина введена для того, чтобы более стабильно вычислять расстояние для тех значений, которые входят в  $K$ -соседей точки  $x_l$ .

Заметим, что введенная величина не обладает свойством симметричности.

Локальную плотность достижимости зададим выражением:

$$\text{lr}_k(x_i) = 1 / \left( \frac{\sum_{l \in V_i} \hat{\rho}_k(x_i, x_l)}{|V_i|} \right) \quad (37)$$

Теперь можно задать величину:

$$\text{LOF}_k(x_i) = \frac{\sum_{l \in V_i} \frac{\text{ld}_k(x_l)}{\text{ld}_k(x_i)}}{|V_i|} \quad (38)$$

Она является средней локальной плотностью достижимости соседей точки  $x_i$  по отношению к своей локальной плотности достижимости точки  $x_i$ .

По полученному значению можно судить [12], является ли наблюдение  $x_i$  выбросом или нет:

- $\text{LOF}_k(x_i) \sim 1$  - означает, что такая же плотность как у соседей
- $\text{LOF}_k(x_i) < 1$  - означает, что большая плотность чем у соседей (наблюдение - истинное)
- $\text{LOF}_k(x_i) > 1$  - означает, что меньшая плотность чем у соседей (наблюдение - выброс)

Найдем аномальные наблюдения в выборке.

Теперь обучим классификатор на предполагаемых истинных значениях выборки. Воспользуемся алгоритмом Random Forest. Построим по выборке несколько деревьев решений. Применим обученный классификатор к каждому аномальному наблюдению. Тот класс, за который проголосовало наибольшее количество построенных деревьев решений будем считать истинным классом данного аномального наблюдения.

В ходе экспериментов была построена таблица подходящих значений  $K$  для заданной длины интервала и объема выборки (раздел 4.7 таблица 4).

### 3.3 Альтернативные оценки параметров модели

Рассмотрим альтернативный метод оценивания параметров модели регрессии, основанный на замене группированных наблюдений серединами соответствующих интервалов. Такой метод встречается в литературе, например в [9].

Метод заключается в следующем: пусть имеется  $\mu_i$  - номер полуинтервала, в который попало очередное наблюдение  $y_i$ . Ему соответствует полуинтервал  $\nu_{\mu_i}$  (из (8)), т.е. полуинтервал:

$$y_i \in (a_{\nu_{\mu_i}}, a_{\nu_{\mu_i}+1}], i = \overline{1, N} \quad (39)$$

(считаем что  $a_1 < y_i < a_{k-1}, i = \overline{1, N}$ , т.е  $1 \leq \mu_i \leq k - 2$ ).

Найдем центральную точку этого интервала, т.е. точку

$$\check{y}_i = \frac{a_{\nu_{\mu_i}} + a_{\nu_{\mu_i}+1}}{2}. \quad (40)$$

Построим для всех значений функции регрессии  $y_i$  значения  $\check{y}_i$ . Будем использовать в качестве значений функции регрессии полученные значения  $\check{y}_i$ , а в качестве регрессоров  $x_i$  и построим МНК оценки параметров  $\beta$ .

Теперь имеет три вида оценок: оценки максимального правдоподобия, оценки максимального правдоподобия с переклассификацией, МНК по серединам интервалов.

### 3.4 Полиномиальная регрессия

Введем теперь модель полиномиальной регрессии.

$$\begin{aligned}
 y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_{i1}^1 + \beta_2 x_{i2}^2 + \cdots + \beta_n x_{in}^n + \varepsilon_i, i = \overline{1, N}, \\
 y_i &= \sum_{l=1}^n x_{il}^{l-1} + \varepsilon_i, i = \overline{1, N}, \\
 y_i &= f(x_i, \beta) + \varepsilon_i, \\
 f(x_i, \beta) &= \beta_0 + \beta_1 x_{i1}^1 + \beta_2 x_{i2}^2 + \cdots + \beta_n x_{in}^n
 \end{aligned} \tag{41}$$

В случае полиномиальной регрессии также справедливо:

$$y_i = f(x_i, \beta) + \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(f(x_i, \beta), \sigma^2). \tag{42}$$

Поскольку оценки строились путём максимизирования функции:

$$l(\beta, \sigma^2, \nu_0, \dots, \nu_{k-1}) = \sum_{i=1}^N \ln(P(y_i \in \nu_{\mu_i})) = \tag{43}$$

$$= \sum_{i=1}^N \ln \begin{cases} \frac{1}{2}(\operatorname{erf}(\frac{a_{j+1}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}) - \operatorname{erf}(\frac{a_j-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma})), & i = \overline{1, k-2} \\ \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(\frac{a_1-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma})), & i = 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(\frac{a_{k-1}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma})), & i = k-1 \end{cases}, \tag{44}$$

а функция правдоподобия максимизировалась путём решения системы уравнений:

$$\frac{\delta l}{\delta \beta} = 0, \tag{45}$$

которая примет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta l}{\delta \beta} &= \frac{\delta \sum_{i=1}^N \ln P(y_i \in \nu_{\mu_i})}{\delta \beta} = \\
 &= \frac{\delta \sum_{i=1}^N \ln(\frac{1}{2}(\operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i+1}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}) - \operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma})))}{\delta \beta} = \\
 &= \sum_{i=1}^N \left( (1 - (\delta_{\mu_i 0} + \delta_{\mu_i k-1})) \frac{(\operatorname{erf}'(\frac{a_{\mu_i+1}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}) - \operatorname{erf}'(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}))}{(\operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i+1}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}) - \operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}))} + \right. \\
 &\quad \left. + (\delta_{\mu_i 0} + \delta_{\mu_i k-1}) \frac{\operatorname{erf}'(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma})}{(1 + \operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}))} \right) (-1) \frac{\delta f(x_i, \beta)}{\delta \beta} = \tag{46}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= - \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} 1 \\ x_{i1}^1 \\ \dots \\ x_{in}^n \end{pmatrix} \times \left( (1 - (\delta_{\mu_i 0} + \delta_{\mu_i k-1})) \frac{(\operatorname{erf}'(\frac{a_{\mu_i+1}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}) - \operatorname{erf}'(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}))}{(\operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i+1}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}) - \operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}))} + \right. \\
\left. + (\delta_{\mu_i 0} + \delta_{\mu_i k-1}) \frac{\operatorname{erf}'(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma})}{(1 + \operatorname{erf}(\frac{a_{\mu_i}-f(x_i, \beta)}{\sqrt{2}\sigma}))} \right),
\end{aligned}$$

то построенные оценки также применимы и для полиномиальной регрессии.

Также как и в случае линейной регрессии считаем, что выборка содержит выбросы, т.е., аналогично:

$$y_i^{\tilde{\varepsilon}} = (\xi_i) y_i + (1 - \xi_i) \eta_i, \quad (47)$$

здесь  $y_i$  задаются формулой (41).



## 4 Компьютерные эксперименты

### 4.1 График рассеяния зависимой переменной и регрессоров

На следующем изображении представлен график рассеяния зависимой переменной и регрессоров:  $(y_i^{\tilde{\varepsilon}}, x_i)$ . Бралась выборка объема  $N = 1000$ . Доля выбросов  $\tilde{\varepsilon}$  равнялась 0.08. Параметры регрессии выбирались  $(90, 4)^T$ . Регрессоры  $x_i$  выбирались из равномерного распределения  $\sim U(-5, 5)$ . Ошибки экспериментов подчинялись нормальному закону распределения с параметрами  $(0, 16)$ . Выбросы подчинялись нормальному распределению с параметрами  $(100, 100)$ .

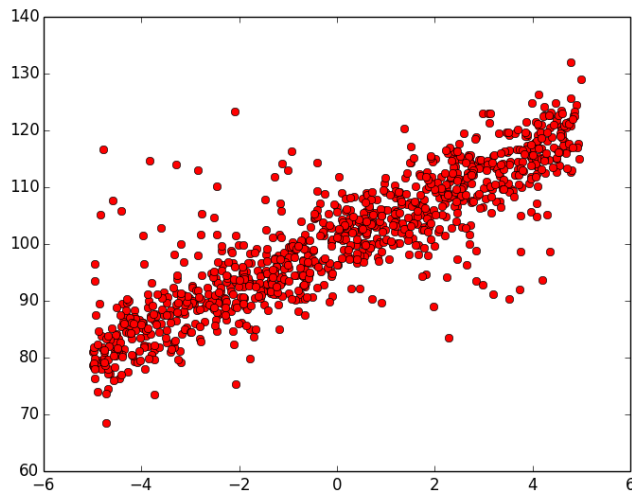


Рис. 1: Вывод графика рассеяния  $(y_i^{\tilde{\varepsilon}}, x_i)$

### 4.2 Графики рассеяния оценок в случае использования метода К-ближайших соседей для переклассификации

На следующих двух графиках (рис. 2 - рис. 3) изображена диаграмма рассеяния в случае, когда для переклассификации используется метод  $K$ -ближайших соседей.

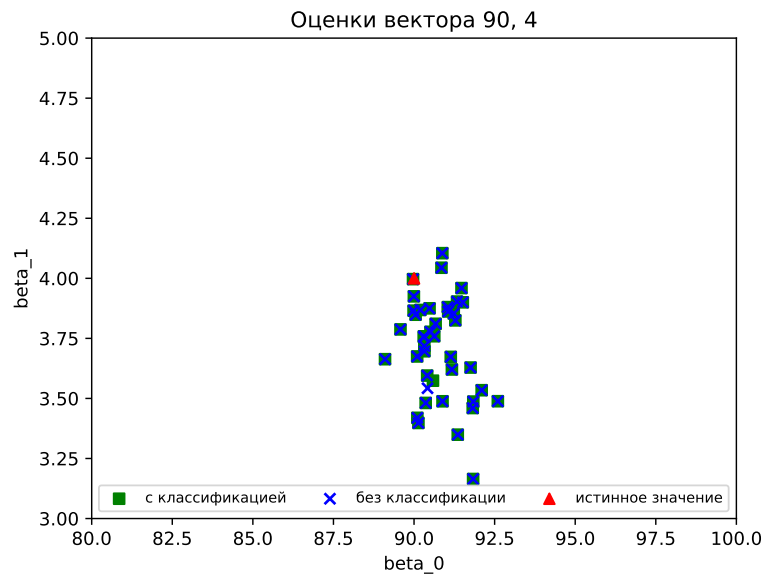


Рис. 2: Вывод графика рассеяния  $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$

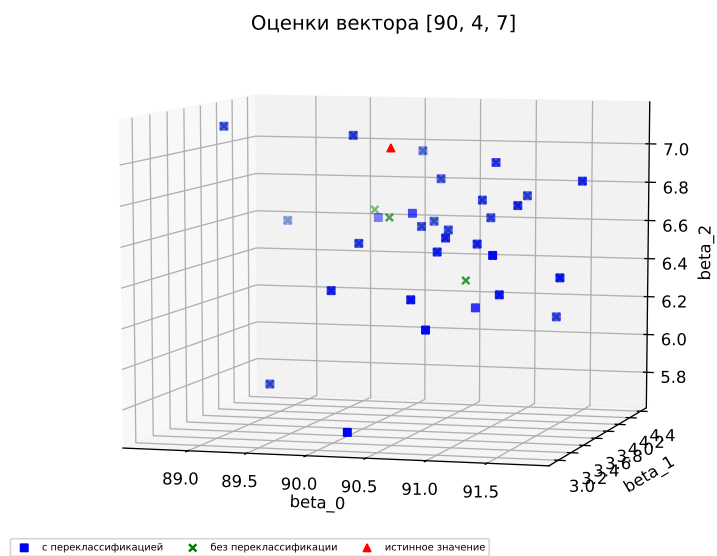


Рис. 3: Вывод графика рассеяния  $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$

### 4.3 Вариации оценок без переклассификации

В следующем эксперименте переклассификация выборки не использовалась. Объем выборки  $N$  изменялся от  $N_1 = 140$  до  $N_2 = 300$ , при этом выборка дополнялась, а не генерировалась новая. Использовалась модель линейной регрессии. Доля выбросов была постоянна и равнялась  $\tilde{\varepsilon} = 0.08$ . Регрессоры  $x_i$  были из равномерного распределения  $U(-5, 5)$ . Параметры регрессии были постоянными и равнялись  $\beta = (90, 4)^T$ . Ошибки экспериментов  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 16)$ . На графики изображено изменение вариаций оценок при увеличении выборки.



Рис. 4: Зависимость вариаций от размера выборки

### 4.4 Сравнение оценок при переклассификации методом К-ближайших соседей с оценками без переклассификации

Были проведены эксперименты для сравнения эмпирической вариации оценок максимального правдоподобия, когда использовалась переклассификация методом К-ближайших соседей и когда не использовалась. При этом на каждой итерации выборка увеличивалась.

Объем выборки  $N$  изменялся от  $N_1 = 100$  до  $N_2 = 400$ , при этом выборка дополнялась, а не генерировалась новая. Использовалась модель линейной регрессии. Доля выбросов была постоянна и равнялась  $\tilde{\varepsilon} = 0.08$ . Параметры регрессии были постоянными и равнялись  $\beta = (90, 4)^T$ . Регрессоры  $x_i$  были из равномерного распределения  $U(-5, 5)$ , ошибки экспериментов  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 16)$ .

В методе, где использовалась переклассификация, величина  $K$  выбиралась:  $K = 10$ .

Таблица 1: Параметры модели и оценок экспериментов

Параметры программы	
Переменная	значение
Размер выборки $N$	от 100 до 400
Доля выбросов $\tilde{\varepsilon}$	0.08
Параметры регрессии $\beta$	(90, 4)
Регрессоры $x_i$	$\sim U(-5, 5)$
$\varepsilon_i$	$\sim \mathcal{N}(0, 16)$
$\eta_i$	$\sim \mathcal{N}(100, 100)$
В методе, с переклассификацией величина $K$	10

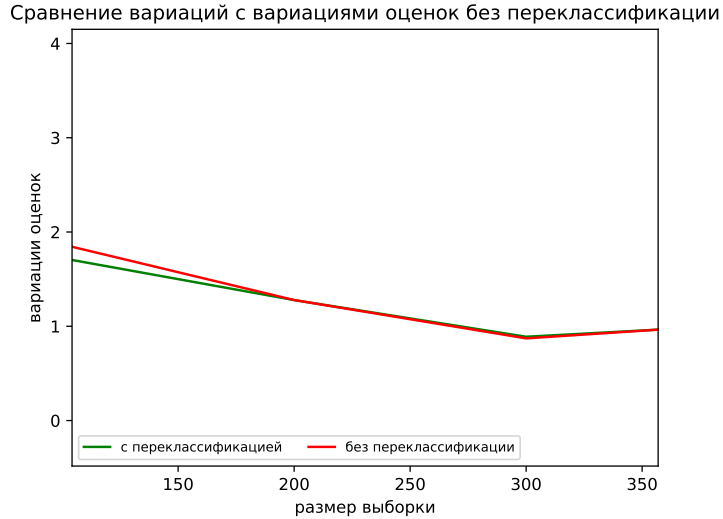


Рис. 5: Сравнение вариаций оценок когда используется и не используется переклассификация

## 4.5 Сравнительный анализ построенной оценки с альтернативной

### 4.5.1 Эксперимент с изменением объема выборки

В следующем эксперименте был произведен сравнительный анализ вариаций ОМП-оценок с МНК оценками в зависимости от объема выборки.

Объем выборки  $N$  изменялся от  $N_1 = 100$  до  $N_2 = 500$ , при этом выборка дополнялась, а не генерировалась новая. Использовалась модель линейной регрессии. Доля выбросов была постоянна и равнялась  $\tilde{\varepsilon} = 0.08$ . Параметры регрессии были постоянными и равнялись  $\beta = (90, 4)^T$ . Регрессоры  $x_i$  были из равномерного распределения  $U(-5, 5)$ , ошибки экспериментов  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 16)$ . Для переклассификации использовался метод  $K$ -ближайших соседей.

Таблица 2: Параметры модели и оценок

Параметры программы	
Переменная	значение
Размер выборки $N$	от 100 до 500
Доля выбросов $\tilde{\varepsilon}$	0.08
Параметры регрессии $\beta$	$(90, 4)$
Регрессоры $x_i$	$\sim U(-5, 5)$
$\varepsilon_i$	$\sim \mathcal{N}(0, 16)$
$\eta_i$	$\sim \mathcal{N}(100, 100)$
Величина $K$	10

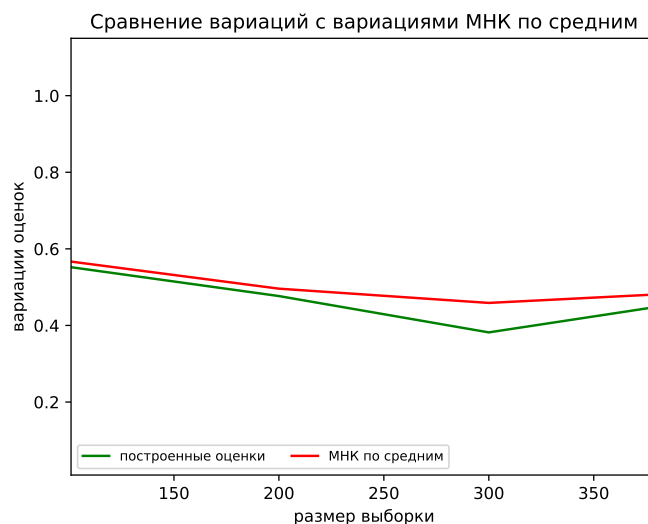


Рис. 6: Сравнение вариаций оценок

При сравнении графиков вариаций (рис.6) можно сделать вывод, что ОМП дают лучший результат,

#### 4.5.2 Эксперимент с полиномиальной регрессией

Был проведен эксперимент с полиномиальной регрессией. Использовались те же параметры модели (таблица 3), объем выборки  $N$  изменялся от 100 до 1000:

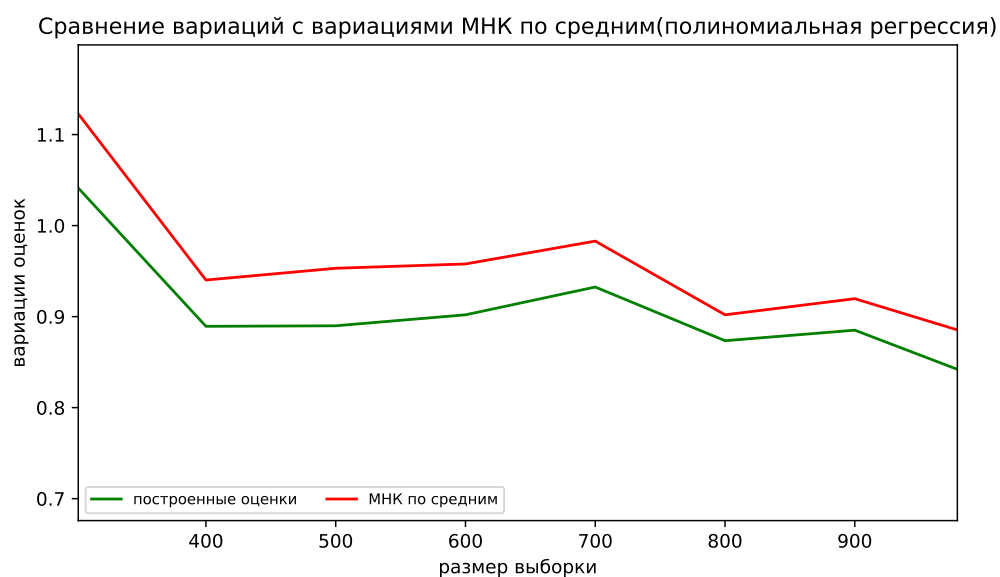


Рис. 7: Вариации оценок в случае полиномиальной регрессии

Оба метода имели схожее поведение при изменении объема выборки, но

построенные оценки максимального правдоподобия стабильно показывали лучший результат.

## 4.6 Эксперименты с изменением уровня переклассификации выборки для метода k-ближайших соседей

В ходе преддипломной практики были построены эксперименты с изменением величины  $K$  для метода  $K$ -ближайших соседей, используемого в переклассификации.

Объем выборки  $N$  был постоянным:  $N = 500$ . Использовалась модель линейной регрессии. Доля выбросов была постоянна и равнялась  $\tilde{\varepsilon} = 0.08$ . Параметры регрессии были постоянными и равнялись  $\beta = (90, 4)^T$ . Регрессоры  $x_i$  были из равномерного распределения  $U(-5, 5)$ , ошибки экспериментов  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 16)$ . Величина  $K$  менялась от 10 до 40.

Таблица 3: Параметры модели и оценок экспериментов с переклассификацией выборки

Параметры программы	
Переменная	значение
Размер выборки $N$	500
Доля выбросов $\tilde{\varepsilon}$	0.08
Параметры регрессии $\beta$	$(90, 4)$
Регрессоры $x_i$	$\sim U(-5, 5)$
$\varepsilon_i$	$\sim \mathcal{N}(0, 16)$
$\eta_i$	$\sim \mathcal{N}(100, 100)$
Величина $K$	от 10 до 40

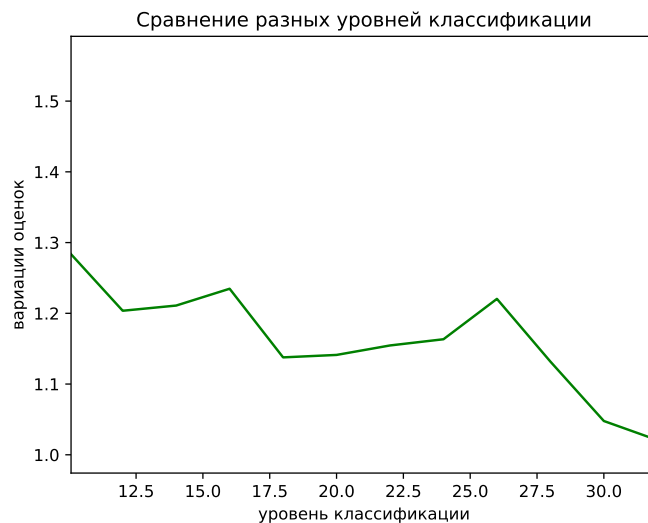


Рис. 8: Зависимость вариаций от  $K$  – числа соседей, используемого в переклассификации выборки



В результате получилось, что при увеличении константы  $K$  точность оценки параметров растёт.

## 4.7 Эксперименты с изменением $K$ для Least outlier factor, используемого в переклассификации

В ходе экспериментов была построена таблица, дающая хорошие значения  $K$  для выборки определенного объема с определенной длиной интервала, то есть такую величину  $K$ , при которой количество неверных классов после переклассификации не более чем такое количество до переклассификации (значения получены опытным путём). Доля выбросов была постоянна и равнялась  $\tilde{\varepsilon} = 0.08$ . Параметры регрессии были постоянными и равнялись  $\beta = (90, 4)^T$ . Регрессоры  $x_i$  были из равномерного распределения  $U(-5, 5)$ , ошибки экспериментов  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 16)$ .

Таблица 4: Подходящие значения  $K$  для выборки определенного объема с определенной длиной интервала

Объем выборки	длина интервала	величина $K$
1000	2.0	2
1000	3.0	4
1000	4.0	4
3000	1.0	2
3000	1.5	2
3000	1.75	3
3000	2.0	5
3000	4.0	7
10000	1.0	2
10000	1.5	3
10000	2.0	6
10000	4.0	8

Далее приведен пример получаемых в ходе экспериментов значений. было смоделировано  $10^5$  наблюдений. Процент аномальных наблюдений: 8%. Константа  $K$  равнялась 35.

```
modulated with outlier count: 8047
fit: classified
wrong outliers: 7987
fit: reclassifier scored 0.925034 on learning set:
fit: reclassified 10

fit: classified

Classes differ with/without outliers when without reclassification: 7604
Classes differ with/without outliers when with reclassification: 7582
```

Число 8047 - количество выбросов в выборке.

Число 7987 - количество ошибочных выбросов (то есть ошибки рода: отнести выбросы к истинным значениям или истинные значения к выбросам). Хотим, чтобы было по крайней мере меньше предыдущего значения.

Число 7604 - количество неверных значений изначально, то есть неверных значений, полученных извне (это число может быть меньше 8047 так как при достаточно широких классах выбросы могли попасть в нужный класс)

Число 7582 - результат переклассификации, который мы хотим получить меньше предыдущего числа (7604). Чем меньше - тем лучше.

## Заключение

В ходе выполнения дипломной работы были получены следующие результаты: была рассмотрена математическая модель линейной регрессии с выбросами при наличии группирования наблюдений; были описаны основные методы оценивания параметров линейной регрессии при наличии выбросов: оценки МНК, М-оценки; были построены оценки параметров линейной регрессии при наличии группирования наблюдений по методу максимального правдоподобия; были проведены компьютерные эксперименты в которых построенные оценки применялись к модельным данным; результаты экспериментов показали, что построенные оценки могут быть состоятельными.

В ходе дипломной работы был проведен аналитический обзор литературы методов статистического анализа данных при наличии классифицированных наблюдений с искажениями. В результате был реализован альтернативный метод - *метод наименьших квадратов по центрам интервалов*.

Был проведен сравнительный анализ альтернативного метода с оценками максимального правдоподобия. Оценки максимального правдоподобия с переклассификацией выборки показали наилучшие результаты.

Над оценками максимального правдоподобия с переклассификацией выборки были осуществлены эксперименты, в которых изменялась константа  $K$  для метода  $K$ —соседей (см. п. 4.6). Выяснилось, что увеличение константы  $K$  повышает точность аппроксимации.

Реализованные методы максимального правдоподобия с переклассификацией и МНК по серединам интервалов были обобщены на случай полиномиальной регрессии.

По проведенным экспериментам видно, что ОМП с переклассификацией показывают не хуже результаты, чем альтернативные оценки. Можно добиться более точных результатов аппроксимации, если хорошо подобрать параметры оценок.

## Список литературы

- [1] Хьюбер Дж П. *Робастность в статистике: пер. с англ.* – М.: Мир, 1984. – 304 с.
- [2] Харин Ю.С., Зуев Н.М., Жук Е.Е. *Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика: учебник* – Минск: БГУ, 2011. – 463 с.
- [3] Е. С Агеева, чл.-корр. НАН Беларуси Ю.С. Харин *Состоятельность оценки максимального правдоподобия параметров множественной регрессии по классифицированным наблюдениям*
- [4] John Fox, Sanford Weisberg *Robust Regression* – October 8, 2013
- [5] А.В. Омельченко *Робастное оценивание параметров полиномиальной регрессии второго порядка* – Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина, 2009
- [6] Özlem Gürünlü Alma *Comparison of Robust Regression Methods in Linear Regression* – Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 6, 2011, no. 9, 409 - 421 с.
- [7] Sergei Winitzki *A handy approximation for the error function and its inverse.*
- [8] Мандрик П.А., Репников В.И., Фалейчик Б.В., *Численные методы* [Электронный ресурс].
- [9] Paolo Giordani *Linear regression analysis for interval-valued data based on the Lasso technique* – Department of Statistical Sciences Sapienza University of Rome
- [10] Masahiro Inuiguchi, Tetsuzo Tanino, *interval linear regression methods based on minkowski difference a bridge between traditional and interval linear regression models.* – KYBERNETIKA, volume 42, 2006 , number 4, pages 423 - 440
- [11] Nelson, W., Hahn, G.J. *Technometrics.* volume 14, 1972, pages 247–269.
- [12] Markus M. Breunig, Hans-Peter Kriegel, Raymond T. Ng, Jörg Sander *LOF: Identifying Density-Based Local Outliers* – Proc. ACM SIGMOD 2000 Int. Conf. On Management of Data, pages 93–104, Dallas, TX, 2000

# Приложение

## Метод наименьших квадратов по центрам интервалов

```
class ApproximationGEMModelNaive(ApproximationGEMModelRedesigned):
    def fit(self):
        self.classify()

        def ex_generator(mu_data):
            for i in range(0, self.endogen.size):
                if mu_data[i] is None:
                    continue
                a_mu_i_plus_1 = mu_data[i] * Defines.INTERVAL_LENGTH
                a_mu_i = mu_data[i] * Defines.INTERVAL_LENGTH - Defines.INTERVAL_LENGTH
                yield (a_mu_i_plus_1 + a_mu_i) / 2

        naive_ex_data_positive = np.fromiter(ex_generator(self._np_freq_positive), float)
        naive_ex_data_negative = np.fromiter(ex_generator(self._np_freq_negative), float)

        naive_ex_data_full = np.append(naive_ex_data_positive, naive_ex_data_negative)

        z, resid, rank, sigma = np.linalg.lstsq(self.exogen, naive_ex_data_full, rcond=None)
        return z
```

## Моделирование полиномиальной регрессии:

```
def modulate_polynomial_regression(regression_sample_quintity, regression_outlier_percentage):
    regression_parameters = ACCURATE_RESULT
    _x_points = np.zeros(shape=[regression_sample_quintity, len(regression_parameters)])
    _y_points = np.zeros(shape=regression_sample_quintity)

    def np_random_polynomial(size):
        _res = np.zeros(size)
        for i in range(0, size):
            _res[i] = random.uniform(-5, 5) ** (i + 1)

        return _res

    for i in range(0, regression_sample_quintity):
        _x_points[i] = np.append(np.ones(1), np_random_polynomial(len(ACCURATE_RESULT) - 1))
        if random.random() > regression_outlier_percentage / 100:
            _y_points[i] = (_x_points[i] * ACCURATE_RESULT) + np.random.normal(0, 4)
        else:
            _y_points[i] = np.random.normal(100.0, 15.0, size=1)

    return _x_points, _y_points
```

## Моделирование линейной регрессии:

```
def modulateRegression(regression_sample_quintity, regression_outlier_percentage):
    regression_parameters = ACCURATE_RESULT
    _x_points = np.zeros(shape=[regression_sample_quintity, len(regression_parameters)])
    _y_points = np.zeros(shape=regression_sample_quintity)

    for i in range(0, regression_sample_quintity):
        if random.random() > regression_outlier_percentage / 100:
            _x_points[i] = np.append(np.ones(1), np.random.uniform(-5, 5, size=len(regression_parameters) - 1))
            _y_points[i] = (_x_points[i] * regression_parameters) + np.random.normal(0, 4)
        else:
            _x_points[i] = np.append(np.ones(1), np.random.uniform(-5, 5, size=len(regression_parameters) - 1))
            _y_points[i] = np.random.normal(100.0, 15.0, size=1)

    return _x_points, _y_points
```

## *Метод наименьших квадратов по центрам интервалов:*

```
def fit_data_naive_classic():
    sample_sizes = []
    all_results_classic = []
    all_results_naive = []
    for sample_size in range(SAMPLE_SIZE_MIN, SAMPLE_SIZE_MAX+1, SAMPLE_SIZE_STEP):
```

```

successful_fit = False
while not successful_fit:
    x_points, y_points = modulateRegression(sample_size, OUTLIER_PERCENTAGE)
    approx_model = groupingEstimates.GEM(x_points, y_points)
    approx_model_naive = groupingEstimatesNaive.GEM_N(x_points, y_points)
    try:
        result = approx_model.fit()
        print("GEM {}".format(result))
        result_naive = approx_model_naive.fit()
        print("GEM_N {}".format(result_naive))

        successful_fit = True

        all_results_classic.append(result)
        all_results_naive.append(result_naive)
        sample_sizes.append(sample_size)
    except KeyboardInterrupt:
        print("stopping...")
        np.save(NP_DATA_PATH + "gem_res_classic", all_results_classic)
        np.save(NP_DATA_PATH + "gem_res_naive", all_results_naive)
        np.save(NP_DATA_PATH + "gem_sizes", sample_sizes)
        quit()
    except Exception as e:
        print(e)
np.save(NP_DATA_PATH + "gem_res_classic", all_results_classic)
np.save(NP_DATA_PATH + "gem_res_naive", all_results_naive)
np.save(NP_DATA_PATH + "gem_sizes", sample_sizes)

```

График с разным объемом выборки:

```

def plot_with_different_sample_size():
    sample_sizes = []
    all_results_with_classification = []
    all_results_without_classification = []

    x_points = None
    y_points = None

    for sample_size in range(SAMPLE_SIZE_MIN, SAMPLE_SIZE_MAX+1, SAMPLE_SIZE_STEP):
        successful_fit = False
        while not successful_fit:
            x_points_t, y_points_t = modulateRegression(sample_size, OUTLIER_PERCENTAGE)

            if x_points is None or y_points is None:
                x_points = x_points_t
                y_points = y_points_t
            else:
                x_points = np.append(x_points, x_points_t, axis=0)
                y_points = np.append(y_points, y_points_t, axis=0)

            approx_model = groupingEstimates.GEM(x_points, y_points)
            try:
                result = approx_model.fit()
                print("GEM {}".format(result))
                result_without = approx_model.fit_without_reclassification()
                print("GEM_without {}".format(result_without))

                successful_fit = True

                all_results_with_classification.append(result)
                all_results_without_classification.append(result_without)
                sample_sizes.append(sample_size)
            except KeyboardInterrupt:
                print("stopping...")
                np.save(NP_DATA_PATH + "gem_res_with", all_results_with_classification)
                np.save(NP_DATA_PATH + "gem_res_without", all_results_without_classification)
                np.save(NP_DATA_PATH + "gem_sizes_with_without", sample_sizes)
                quit()
            except Exception as e:
                print(e)
        np.save(NP_DATA_PATH + "gem_res_with", all_results_with_classification)
        np.save(NP_DATA_PATH + "gem_res_without", all_results_without_classification)
        np.save(NP_DATA_PATH + "gem_sizes_with_without", sample_sizes)

```

## График с разным уровнем переклассификации:

```
def plot_with_different_reclassification_level():
    reclassification_levels = []
    all_results_with_classification = []
    recl_level_min = 10
    recl_level_max = 40

    x_points, y_points = modulateRegression(500, OUTLIER_PERCENTAGE)

    for recl_level in range(recl_level_min, recl_level_max + 1, 2):
        GroupingEstimatesDefines.RECLASSIFICATION_LEVEL = recl_level

        successful_fit = False
        while not successful_fit:
            approx_model = groupingEstimates.GEM(x_points, y_points)
            try:
                result = approx_model.fit()
                print("GEM {}".format(result))

                successful_fit = True

                all_results_with_classification.append(result)
                reclassification_levels.append(recl_level)
            except KeyboardInterrupt:
                print("stopping...")
                np.save(NP_DATA_PATH + "gem_with_dif_level_results", all_results_with_classification)
                np.save(NP_DATA_PATH + "gem_with_dif_level_levels", reclassification_levels)
                quit()
            except Exception as e:
                print(e)
        np.save(NP_DATA_PATH + "gem_with_dif_level_results", all_results_with_classification)
        np.save(NP_DATA_PATH + "gem_with_dif_level_levels", reclassification_levels)
```