Адаптивные методы прогнозирования

Д. А. Ивахненко. Методы прогнозирования, СПбГЭУ 2021 г.

Литература

1. Holt, C. E. Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted averages (1957)
2. Gardner, E. S., Mckenzie, E. Forecasting Trends in Time Series (1985)
3. Winters, P. R. Forecasting sales by exponentially weighted moving averages (1960)

---

1. Простое экспоненциальное сглаживание

Экспоненциальное сглаживание (метод Брауна) использует идею метода скользящего среднего с той лишь разницей, что каждое предшествующее наблюдение имеет свой вес, экспоненциально убывающий по мере углубления в историю:

$$\hat{y}_{T+1|T} = \alpha y_T + \alpha(1-\alpha)\, y_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^2\, y_{T-2} + \ldots, \tag{1}$$

где $\alpha \in [0,\ 1]$.

Чем больше параметр сглаживания α, тем больший вес имеют последние наблюдения.

Наблюдение	α=0.2	α=0.4	α=0.6	α=0.8
y_T	0.2	0.4	0.6	0.8
y_{T-1}	0.16	0.24	0.24	0.16
y_{T-2}	0.128	0.144	0.096	0.032
y_{T-3}	0.1024	0.0864	0.0384	0.0064
y_{T-4}	0.08192	0.05184	0.01536	0.00128
y_{T-5}	0.065536	0.031104	0.006144	0.000256
y_{T-6}	0.0524288	0.0186624	0.0024576	0.0000512

Модель экспоненциального сглаживания можно выразить через рекуррентную формулу:

$$\hat{y}_{t+1|t} = l_t, \tag{2}$$

$$l_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\, l_{t-1}, \tag{3}$$

где l_t – ожидаемое значение ряда или уровень. Таким образом, прогноз на один шаг вперед может быть выражен в виде суммы:

$$\hat{y}_{T+1|T} = \sum_{i=0}^{T-1} \alpha(1-\alpha)^i\, y_{T-i} + (1-\alpha)^T\, l_0. \tag{4}$$

Формулу (3) можно переписать в следующем виде:

$$l_t = l_{t-1} + \alpha(y_t - l_{t-1}). \tag{5}$$

Отсюда следует, что новое значение уровня l_t (оценка $\hat{y}_{t+1|t}$) выражается через предыдущее предсказанное значение l_{t-1}, скорректированное на величину отклонения фактического значения y_t от прогноза l_{t-1}. То есть, модель «адаптируется» под временной ряд, сглаживая ошибки на каждом шаге. В результате метод Брауна позволяет получить достоверный краткосрочный прогноз, основываясь на всех известных значениях временного ряда.

2. Метод Хольта

Метод Брауна позволяет получить краткосрочный прогноз, но не учитывает тренд и сезонность. Учесть тренд позволяет метод Хольта, который предполагает разбиение временного ряда на две составляющие: уровень l_t и тренд b_t. По сравнению с методом Брауна экспоненциальное сглаживание применяется также к тренду в предположении, что будущее направление изменения ряда зависит от взвешенных предыдущих изменений.

2.1. Линейный тренд

В случае линейного тренда модель Хольта может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+h|t} &= l_t + h b_t, \\ l_t &= \alpha y_t + (1-\alpha)\,(l_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= \beta (l_t - l_{t-1}) + (1-\beta)\, b_{t-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\alpha,\ \beta \in [0,\ 1]$. Компонента, описывающая уровень, зависит от текущего значения ряда, а второе слагаемое разбивается на предыдущее значения уровня и тренда. В свою очередь компонента, отвечающая за тренд, зависит от изменения уровня на текущем шаге, и от предыдущего значения тренда. Результирующее значение прогноза представляет собой сумму модельных значений уровня и тренда.

2.2. Аддитивный затухающий тренд

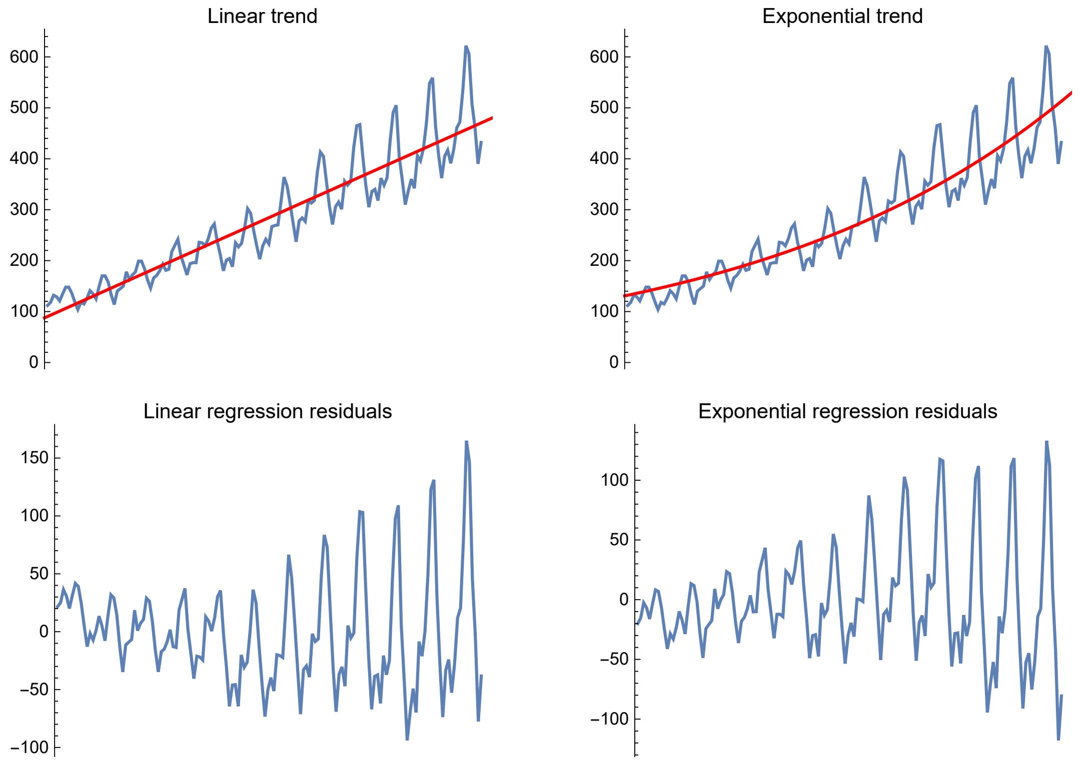
Метод Хольта описывает неизменное направление тренда. Это приводит к тому, что прогноз может быть слишком завышен или, наоборот, занижен. Чтобы этого избежать, введем коэффициент затухания ϕ в модель:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+h|t} &= l_t + \left(\phi + \phi^2 + \ldots + \phi^h\right) b_t, \\ l_t &= \alpha y_t + (1-\alpha)\,(l_{t-1} + \phi b_{t-1}), \\ b_t &= \beta (l_t - l_{t-1}) + (1-\beta)\, \phi b_{t-1}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\phi \in (0,\ 1)$. Коэффициент затухания ϕ показывает, какую долю тренда необходимо учитывать при прогнозировании на одну точку вперед. При $\phi = 1$ модель сводится к модели Хольта с линейным трендом (6), при $\phi = 0$ – к модели Брауна.

2.3. Экспоненциальный тренд

Временной ряд может обладать **экспоненциальным трендом**, который проявляется в более быстром росте значений признака. Данные об объемах пассажирских авиаперевозок в США можно описать с более высокой точностью, если использовать не линейный, а экспоненциальный тренд.



Модель Хольта для экспоненциального тренда принимает вид:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_{t+h|t} &= l_t b_t^h\,, \\
l_t &= \alpha y_t + (1-\alpha)\,(l_{t-1}\, b_{t-1}), \\
b_t &= \beta \frac{l_t}{l_{t-1}} + (1-\beta)\, b_{t-1}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

2.4. Мультипликативный затухающий тренд

В случае мультипликативного (экспоненциального) затухающего тренда модель может быть представлена в виде:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_{t+h|t} &= l_t b_t^{\left(\phi+\phi^2+\ldots+\phi^h\right)}\,, \\
l_t &= \alpha y_t + (1-\alpha)\left(l_{t-1}\, b_{t-1}^{\phi}\right), \\
b_t &= \beta \frac{l_t}{l_{t-1}} + (1-\beta)\, b_{t-1}^{\phi}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

3. Метод Хольта-Уинтерса

Модель Хольта-Уинтерса является модификацией модели Хольта. Данная модификация позволяет учесть не только последние наблюдаемые значения и тренд, но и сезонность.

3.1. Аддитивная сезонность

В случае аддитивной сезонности дополнительная компонента в модели объясняет повторяющиеся колебания вокруг уровня и тренда и характеризуется длиной сезона m:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_{t+h|t} &= l_t + h b_t + s_{t-m+(h \bmod m)}, \\
l_t &= \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)\,(l_{t-1} + b_{t-1}), \\
b_t &= \beta(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta)\, b_{t-1}, \\
s_t &= \gamma(y_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1-\gamma)\, s_{t-m}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Уровень теперь зависит от текущего значения ряда без учета соответствующей сезонной компоненты, а сезонная компонента зависит от текущего значения ряда за вычетом уровня и от предыдущего значения компоненты.

3.2. Мультипликативная сезонность

В случае линейного тренда и мультипликативной сезонности модель Хольта-Уинтерса может быть записана в виде:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{t+h|t} &= (l_t + hb_t)\, s_{t-m+(h \bmod m)},\\
l_t &= \alpha \frac{y_t}{s_{t-m}} + (1-\alpha)\,(l_{t-1} + b_{t-1}),\\
b_t &= \beta (l_t - l_{t-1}) + (1-\beta)\, b_{t-1},\\
s_t &= \gamma \frac{y_t}{l_{t-1} + b_{t-1}} + (1-\gamma)\, s_{t-m}.
\end{aligned} \tag{11}$$