नवीनतम पाठ्यक्रम व शिक्षण संस्थाओं के पैटर्न पर आधारित

सभी प्रतियोगी परीक्षाओं हेतु

Advance Maths

(वर्णात्मक एवं वस्तुनिष्ठ प्रश्नों सहित)

विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं हेतु, जैसेः

- एस.एस.सी. सभी परीक्षाएँ
- रेलवे भर्ती बोर्ड सभी परीक्षाएँ
- बैंक पी.ओ., बैंक क्लर्क, स्पेशलिस्ट ऑफिसर
- पुलिस सब-इंस्पेक्टर, पुलिस कांस्टेबल
- यू.पी.एस.सी. - सी.सैट, एस.सी.आर.ए. सी.डी.एस.
- राज्य सेवा परीक्षाएँ
  - ✧ एल.डी.सी., प्रशासनिक ऑफिसर परीक्षाएँ
  - ✧ पटवार, ग्रामसेवक

आदि के लिए सर्वोत्तम पुस्तक

हल एवं भूमिका सहित नवीनतम प्रश्न

इंजि. नरेश कुमार

मैं, मेरे पिता श्री कमलेश कुमार जी, माता श्रीमती कृष्णा देवी
और अग्रज रीतेश कुमार जी
को यह पुस्तक समर्पित करना चाहता हूँ,
जिनके अटूट प्रेम और विश्वास
ने मुझे अपने लक्ष्य तक पहुँचने का हौसला प्रदान किया
और हर परिस्थितियों में मेरे मार्गदर्शक बन, सही राह पर अग्रसर किया।

"माँ बाप का दिल जीत लो, कामयाब हो जाओगे।
वरना सारी दुनिया जीतकर भी तुम हार जाओगे।।"

प्रथम संस्करण की प्रस्तावना

इस पुस्तक को तैयार करते समय परीक्षार्थियों के परीक्षा संबंधी जरूरतों पर विशेष ध्यान दिया गया है।

पुस्तक की पाठ्य सामग्री को विविध प्रतियोगिता परीक्षाओं में पूछे गये प्रश्नों के पैटर्न एवं उनकी गुणवत्ता के वैज्ञानिक व तथ्यपूर्ण विश्लेषण के पश्चात् तैयार किया गया है।

हमने इस पुस्तक को पूर्णता प्रदान करने का यथासंभव प्रयास किया है यद्यपि कई परीक्षाओं में कुछ अध्यायों से ही प्रश्न पूछे जाते हैं, तथापि हमने अधिकाधिक अध्यायों को इस पुस्तक में समायोजित किया है ताकि प्रश्न-पत्र की फिसलन से अभ्यर्थी परेशान न हो।

इस पुस्तक में, विद्यार्थियों की आवश्यकता को ध्यान में रखते हुए प्रत्येक अध्याय की भूमिका सविस्तार दी गई है, जिससे विद्यार्थी अध्याय की शब्दावली, गणना के नियमों, सूत्रों, सिद्धांतों, सिद्धातों के प्रमाणों और विगत परीक्षाओं में पूछे गए प्रश्नों के विभिन्न पहलुओं से अवगत हो सके।

इस पुस्तक में दिए गए हल, प्रश्नों से पूर्व दी गई भूमिका पर आधारित हैं और हल करते समय प्रयोग विधि और सूत्र, भूमिका से लिए गये हैं। जिससे विद्यार्थी एक सुनहरे भविष्य की ओर अग्रसर हो सके।

हाल ही में हुई प्रतियोगिता परीक्षाओं में कुछ अन्य अध्याय (प्रायिकता, क्रमचय और संचय, लघुगणक, द्विघात समीकरण, सांख्यिकी) भी सम्मिलित किए गये हैं, उनका भी समावेश इस पुस्तक में किया गया है।

प्रस्तुत पुस्तक में कमजोर व प्रतिभाशाली सभी तरह के विद्यार्थियों की बुद्धिलब्धि को ध्यान में रखते हुए प्रश्नों के हल रेखाचित्रों सहित समझाने व अधिकाधिक महत्त्वपूर्ण प्रश्नों का समावेश करने का भरसक प्रयास किया गया है।

प्रश्नों का हल समझने के लिए विद्यार्थी का दृष्टिकोण सीखने वाला होना चाहिए। पाठक को भूमिका और प्रश्नों के निर्माण में प्रयुक्त प्रत्येक वाक्य की व्याख्या को स्पष्ट रूप से समझने की कोशिश करनी चाहिए।

हमें आशा ही नहीं पूर्ण विश्वास है कि यह पुस्तक आपको पसंद आयेगी, आपकी जरूरतों को पूरा करेगी एवं आपकी सफलता का मार्ग प्रशस्त करेगी। सुधार का पथ अंतहीन है। अतः हमें आपके मौलिक व तथ्यपूर्ण सुझावों की प्रतीक्षा रहेगी ताकि हम पुस्तक को ओर अधिक उपयोगी बना सके।

शुभकामनाओं सहित

इंजि. नरेश कुमार

विषय सूची

क्रमांक अध्याय **पृष्ठ संख्या**

तकनीकी गणित (Technical Maths)

22. द्विघातीय समीकरण (Quadratic Equation) 01-10

23. लघुगणक (Logarithms) 11-20

24. क्रमचय और संचय (Permutation and Combination) 21-30

25. प्रायिकता (Probability) 31-48

26. अनुक्रम और श्रेणी (Sequence and Series) 49-68

उच्च गणित (Advance Maths)

27. त्रिकोणमिति (Trigonometry) 69-120

28. ऊँचाई और दूरी (Height and Distance) 121-148

29. बीजगणित (Algebra) 149-204

30. ज्यामिति (Geometry) 205-280

31. वृत्त (Circle) 281-316

32. निर्देशांक ज्यामिति (Co-ordinate Geometry) 317-342

33. क्षेत्रमिति (Mensuration) 343-390

34. आयतन (Volume) 391-430

35. संमकों की व्याख्या (Data Interpretation) 431-446

36. सांख्यिकी (Statics) 447-460

Calculation Booster 461-464

तकनीकी गणित
(Technical Maths)
Page No. 1-68

उच्च गणित
(Advance Maths)
Page No. 69-460

25

प्रायिकता

(*Probability*)

समुच्चय सिद्धान्त (Set theory)

गणित की वह शाखा, जिसमें समुच्चयों का अध्ययन किया जाता है। वस्तुओं के संग्रह को समुच्चय कहते हैं। यद्यपि समुच्चय के अन्तर्गत किसी भी प्रकार की वस्तुओं का संग्रह संभव है, किन्तु समुच्चय सिद्धान्त मुख्यत: गणित से संबंधित समुच्चयों का ही अध्ययन करता है।

समुच्चय के अवयवों को निम्न चार प्रकार से लिखते हैं–

1. सभी अवयवों को लिखना

   जैसे : 20 तक सभी रूढ़ संख्याओं का समुच्चय नीचे दिया गया है।

   $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

2. कुछ अवयवों को लिखकर, डॉट-डॉट लगाना

   जैसे : सम संख्याओं का समुच्चय नीचे दिया गया है।

   $A = \{2, 4, 6, ...\}$

3. विवरण द्वारा

   जैसे : सभी विषम संख्याओं का समुच्चय नीचे दिया गया है।

   A = {सभी विषय संख्यायें}

4. बीजगणितीय संक्रियाओं द्वारा

   जैसे : $A = \{x \mid x = 2n + 3$, n एक पूर्ण संख्या है}

   यहाँ n का मान पूर्ण संख्याओं में रखकर समुच्चय A के अवयव ज्ञात किए जा सकते हैं।

समुच्चयों के प्रकार

1. परिमित समुच्चय (Finite set)

वह समुच्चय, जिसमें अवयवों की संख्या सीमित हो, परिमित समुच्चय कहलाता है।

जैसे : 20 तक सभी विषम संख्याओं का समुच्चय नीचे दिया गया है।

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

2. अपरिमित समुच्चय (Infinite set)

वह समुच्चय, जिसमें अवयवों की संख्या असीमित हो, अपरिमित समुच्चय कहलाता है।

जैसे : सम संख्याओं का समुच्चय नीचे दिया गया है।

$A = \{2, 4, 6, 8, ...\}$

3. रिक्त समुच्चय (Null/void/empty set)

वह समुच्चय, जिसमें अवयवों की संख्या शून्य हो, रिक्त समुच्चय कहलाता है। इसे {} या ϕ द्वारा दर्शाया जाता है।

समुच्चय की सदस्यता

यदि कोई अवयव किसी समुच्चय में हो, तो उसे दर्शाने के लिए $\in$ (belong to) प्रतीक का प्रयोग होता है।

जैसे : समुच्चय $S = \{5, 7, 11, 17, 20\}$ का एक अवयव 17 है, तो हम लिख सकते हैं, कि $17 \in S$

और यदि कोई अवयव किसी समुच्चय में न हो, तो उसे दर्शाने के लिए $\notin$ (does't belong to) प्रतीक का प्रयोग होता है।

जैसे : समुच्चय $S = \{5, 7, 11, 17, 20\}$ का 19 अवयव नहीं है, तो हम लिख सकते हैं, कि $19 \notin S$

उपसमुच्चय (Subset)

यदि किसी समुच्चय A के सभी अवयव किसी अन्य समुच्चय B में हों, तो कहा जा सकता है, कि A, B का उपसमुच्चय है। इसे दर्शाने के लिए $A \subset B$ का प्रयोग होता है।

किसी भी समुच्चय के कम से कम दो उपसमुच्चय होते हैं जो ϕ और स्वयं समुच्चय होते हैं।

उचित उपसमुच्चय (Proper subset)

यदि किसी समुच्चय A के सभी अवयव किसी अन्य समुच्चय B में हों और $A \neq B$ हो, तो कहा जा सकता है, कि A, B का उचित उपसमुच्चय है। इसे दर्शाने के लिए $A \subseteq B$ का प्रयोग होता है।

शक्ति समुच्चय (Power set)

किसी समुच्चय के सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय को शक्ति समुच्चय कहते हैं।

जैसे : माना $A = \{1, 2, 3\}$ एक समुच्चय है, जिसके उपसमुच्चय $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}$ और $\{1, 2, 3\}$ हैं।

अत: $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

किसी शक्ति समुच्चय में अवयवों की संख्या 2^n होती है, जहाँ n दिए गए समुच्चय में अवयवों की संख्या को निरुपित करता है।

समुच्चय की गणनसंख्यात्मकता (Cardinality of set)

समुच्चय की गणनसंख्यात्मकता, उस समुच्चय में अवयवों की संख्या होती है। इसे $|A|$ या #A द्वारा निरुपित करते है।

जैसे : समुच्चय $A = \{2, 5, 9, 11, 15, 17\}$ में अवयवों की संख्या 6 है।

अत: $|A| = 6$

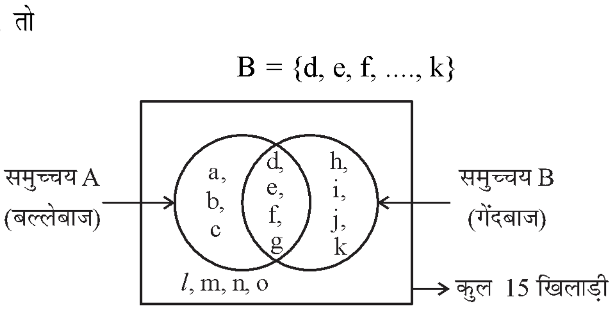
निर्देश : समुच्चय सिद्धान्त को समझने हेतु क्रिकेट में खिलाड़ियों का उदाहरण लेते हैं। मानते हैं, कि किसी मैच के लिए कुल 15 खिलाड़ियों {a, b, c, d, ..., m, n, o} का चयन हुआ है और इनमें से 11 खिलाड़ी {a, b, c, d, ..., j, k} उस मैच में खेलेंगे। जो खिलाड़ी खेल रहें हैं, उनमें से a, b, c, d, e, f, g बल्लेबाज हैं और d, e, f, g, h, i, j, k गेंदबाज हैं। कुछ खिलाड़ी {d, e, f, g} बल्लेबाज और गेंदबाज दोनों हैं।

माना समुच्चय A, बल्लेबाजी करने वाले खिलाड़ियों का समुच्चय है, तो

$$A = \{a, b, c, ..., g\}$$

और समुच्चय B, गेंदबाजी करने वाले खिलाड़ियों का समुच्चय है, तो

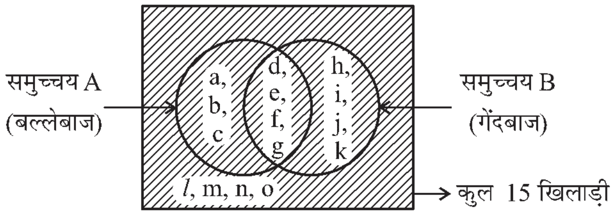
$$B = \{d, e, f, ..., k\}$$



- **सर्वसमावेशी समुच्चय (Universal set)**

वह समुच्चय, जिसमें दिए गए समुच्चयों के सभी अवयव हों, उसे सर्वसमावेशी समुच्चय कहते हैं। इसे U द्वारा दर्शाया जाता है।

जैसे : दिए गए उदाहरण में सभी 15 खिलाड़ियों का समुच्चय, सर्वसमावेशी समुच्चय कहलाता है।

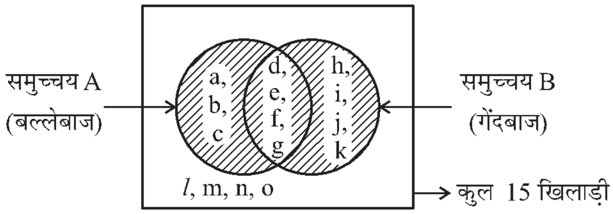


अत: $U = \{a, b, c, ..., m, n, o\}$

- **समुच्चय संघ (Union of sets)**

दो समुच्चयों A और B का संघ, वह समुच्चय होता है, जिसमें A और B के सभी अवयव हों। समुच्चय संघ में एक ही अवयव की पुनरावर्ती नहीं होती है। इसे $A \cup B$ द्वारा दर्शाया जाता है।

जैसे : दिए गए उदाहरण में समुच्चय A और B के समुच्चय संघ में खेलने वाले 11 खिलाड़ी होंगे।

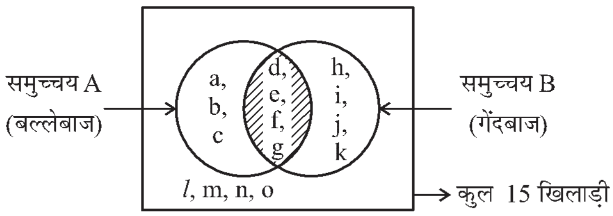


अत: $A \cup B = \{a, b, c, ..., j, k\}$

- **सर्वनिष्ठ समुच्चय (Intersection of sets)**

दो समुच्चयों A और B का सर्वनिष्ठ समुच्चय, वह समुच्चय होगा, जिसमें A और B के वे सभी अवयव हों, जो A और B दोनों में हैं। इसे $A \cap B$ द्वारा दर्शाया जाता है।

जैसे : दिए गए उदाहरण में समुच्चय A और B के सर्वनिष्ठ समुच्चय में वे खिलाड़ी होंगे, जो बल्लेबाज और गेंदबाज दोनों हैं।

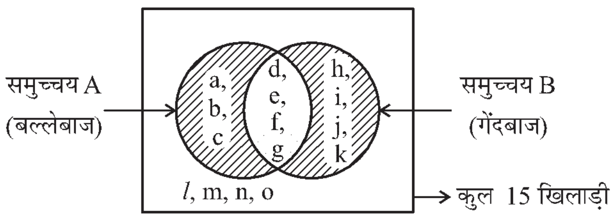


अत: $A \cap B = \{d, e, f, g\}$

- **$A \Delta B$ या $A \Theta B$**

$A \Delta B$ में वे सभी अवयव होंगे, जो या तो केवल A में हों या केवल B में हों।

जैसे : दिए गए उदाहरण में $A \Delta B$ में वे सभी अवयव होंगे, जो या तो केवल बल्लेबाज हैं या केवल गेंदबाज हैं।



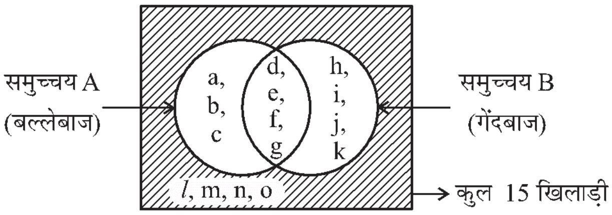
अतः $A \Delta B = \{a, b, c, h, i, j, k\}$

- **पूरक समुच्चय (Complement set)**

सर्वसमावेशी समुच्चय (U) और दिए गए समुच्चय A के अन्तर को पूरक समुच्चय कहते हैं। इसे A^C या A' से दर्शाया जाता है।

अतः $A^C = U - A$

जैसे : दिए गए उदाहरण में 4 अतिरिक्त खिलाड़ियों का समुच्चय खेलने वाले 11 खिलाड़ियों के समुच्चय का पूरक समुच्चय होगा।



अतः $(A \cup B)^C = U - (A \cup B) = \{l, m, n, o\}$

समुच्चयों पर मूल क्रियायें

- **दो समुच्चयों का योग (A + B)**

दो समुच्चयों का योग, दोनों समुच्चयों का समुच्चय संघ होता है। अर्थात् $A + B = A \cup B$ होता है।

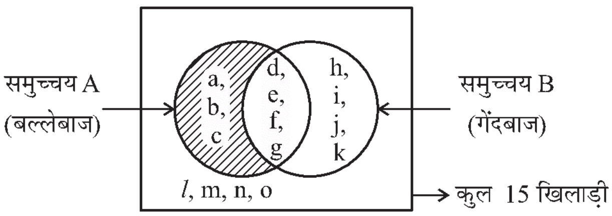
- **दो समुच्चयों का गुणनफल (A · B)**

दो समुच्चयों का गुणनफल, दोनों समुच्चयों का सर्वनिष्ठ समुच्चय होता है। अर्थात् $A \cdot B = A \cap B$ होता है।

- **दो समुच्चयों का घटाव (A – B) या A\B**

A – B में वे सभी अवयव होंगे, जो A में हैं, किन्तु B में नहीं।

जैसे : दिए गए उदाहरण में A – B में वे सभी खिलाड़ी होंगे, जो केवल बल्लेबाज हों।

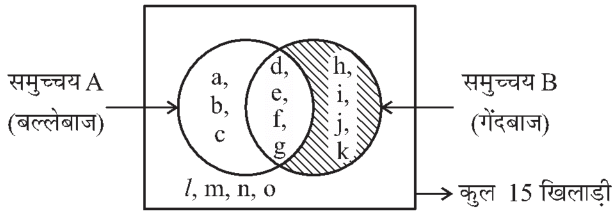


अतः $A - B = \{a, b, c\}$

और $A - B = \{A \cup B) - B = A - (A \cap B)$

इसी प्रकार, B – A में वे सभी अवयव होंगे, जो B में हैं, किन्तु A में नहीं।

जैसे : दिए गए उदाहरण में B – A में वे सभी खिलाड़ी होंगे, जो केवल गेंदबाज हैं।



अतः $B - A = \{h, i, j, k\}$

और $B - A = (A \cup B) - A = B - (A \cap B)$

यदृच्छया प्रयोग (Random experiment)

ऐसे प्रयोग, जिनके परिणाम निश्चित नहीं होते हैं, अर्थात् जिनके परिणाम के बारे में कोई निश्चित भविष्यवाणी नहीं की जा सकती है, यदृच्छया प्रयोग कहलाते हैं।

जैसे : ताश की गड्डी से एक पत्ता क्रमहीनतः निकालना, सिक्के को उछालना, पासा फेंकना आदि यदृच्छया प्रयोग हैं।

प्रतिदर्श समष्टि (Sample space)

किसी यदृच्छया प्रयोग से प्राप्त सभी सम्भव परिणामों के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं। इसे S द्वारा निरुपित करते हैं। किसी प्रतिदर्श समष्टि में अवयवों की संख्या को n(S) से दर्शाते हैं।

प्रतिदर्श समष्टि के लिए,

$n(S) = n(S_1) \times n(S_2) \times n(S_3) \times .... \times n(S_n)$

भिन्न-भिन्न यदृच्छया प्रयोगों में प्रतिदर्श समष्टि

1. सिक्कों को उछालना

चित (Head) **पट (Tail)**

- एक सिक्के को उछालने पर

$$S = \{H, T\}$$

यहाँ H और T क्रमशः Head (चित) तथा Tail (पट) को सूचित करते हैं।

अतः $n(S) = 2$

- दो सिक्कों को उछालने पर

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

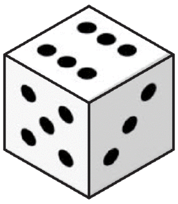
अतः $n(S) = 2 \times 2 = 4$

- तीन सिक्कों को उछालने पर

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

अतः $n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

2. पासों को फेंकना



पासा (Dice)

- एक पासे को फेंकने पर

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

अतः $n(S) = 6$

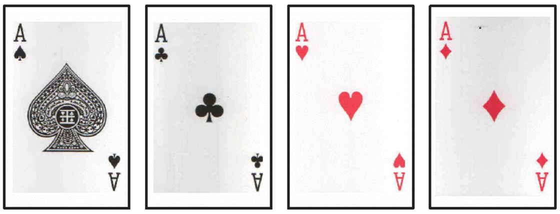
- दो पासों को एक साथ फेंकने पर

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

अतः $n(S) = 6 \times 6 = 36$

3. पीसी हुई ताश की गड्डी से पत्ते निकालना

- ताश की गड्डी में निम्न चार प्रकार के सेट होते हैं–



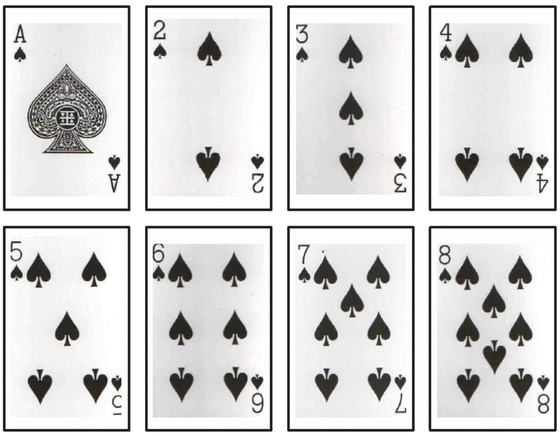
हुकुम (Spade) | चिड़ी (Club) | लाल पान (Heart) | ईंट (Diamond)

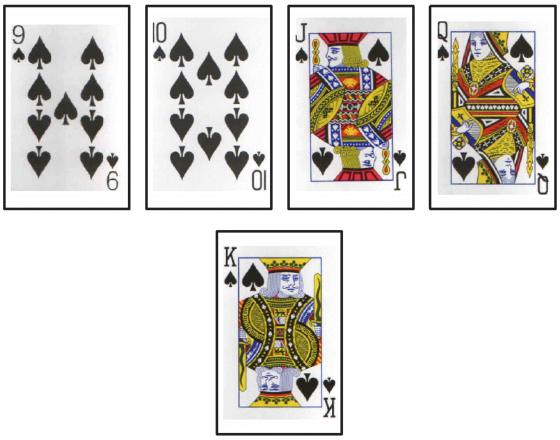
प्रत्येक सेट में कुल पत्ते = 13

अतः 1 ताश की गड्डी में कुल पत्ते $= 13 \times 4 = 52$

- प्रत्येक सेट में निम्न 13 प्रकार के पत्ते होते हैं–

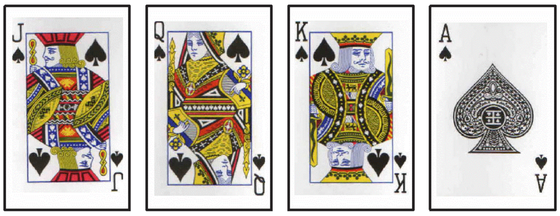
  जैसे : नीचे काला पान (हुकुम) का सेट दर्शाया गया है।





- प्रत्येक सेट में चार उच्च पत्ते होते हैं–

  जैसे : नीचे काला पान (हुकुम) के उच्च पत्ते दर्शाये गये हैं।

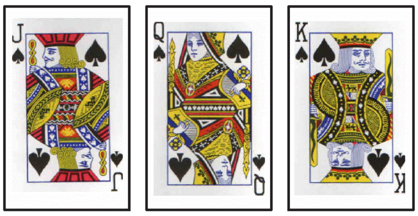


गुलाम (Jack) | बेगम (Queen) | बादशाह (King) | इक्का (Ace)

अतः 1 ताश की गड्डी में कुल उच्च पत्ते $= 4 \times 4 = 16$

- प्रत्येक सेट में तीन मुख पत्ते होते हैं–

  जैसे : नीचे काला पान (हुकुम) के मुख पत्ते दर्शाये गये हैं।



अतः 1 ताश की गड्डी में कुल मुख पत्ते $= 3 \times 4 = 12$

- ताश की गड्डी से एक पत्ता क्रमहीनतः निकालने पर

$$n(S) = {}^{52}C_1 = 52$$

क्योंकि ताश की गड्डी में 52 विभिन्न पत्ते होते हैं।

- ताश की गड्डी से दो पत्ते क्रमहीनतः निकालने पर

$$n(S) = {}^{52}C_2$$

- ताश की गड्डी से r विभिन्न पत्ते क्रमहीनतः निकालने पर

$$n(S) = {}^{52}C_r$$

(ii) पहला खींचा गया पत्ता पुन: गड्डी में नहीं मिलाया जाए, तो दोनों पत्ते खींचने की घटनाएँ परतंत्र घटनाएँ होंगी।

यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हों, तो

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

महत्त्वपूर्ण बिन्दु :

(i) असंभव घटना की प्रायिकता शून्य एवं निश्चित घटना की प्रायिकता 1 होती है। अर्थात् $P(\phi) = 0$ एवं $P(S) = 1$

(ii) किसी घटना की न्यूनतम प्रायिकता शून्य तथा अधिकतम प्रायिकता 1 होती है, क्योंकि किसी घटना में कम-से-कम शून्य अवयव और अधिक से अधिक प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों के बराबर होते हैं। अर्थात् $0 \le P(E) \le 1$

(iii) किसी घटना E के नहीं घटने की घटना को E′ द्वारा सूचित करते हैं और $P(E') = 1 - P(E)$ या $P(E) + P(E') = 1$

(iv) ताश की गड्डी में 52 पत्ते होते हैं जिसमें 26 लाल रंग के और 26 काले रंग के होते हैं। 26 लाल पत्तों में 13 लाल-पान (heart) एवं 13 ईंट (diamond) होते हैं और 26 काले पत्तों में 13 काला पान (spade) एवं 13 चिड़ियाँ (club) होते हैं।

(v) यदि A, B और C तीन घटनाएँ हो, तो

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Type - I

1. एक सिक्के को उछाले जाने पर पट (Tail) आने की प्रायिकता होगी–

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$

(c) 2 (d) 0

हल : $S = \{H, T\} \Rightarrow n(S) = 2$

और $E = \{T\} \Rightarrow n(E) = 1$

अत: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{2}$

2. एक पासे को फेंकने पर विषम अंक आने की प्रायिकता क्या है?

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$

हल : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Rightarrow$ $n(S) = 6$

और $E = \{1, 3, 5\}$

$\Rightarrow$ $n(E) = 3$

अत: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3. एक पासे को फेंकने पर 5 से कम अंक प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{5}{6}$ (d) $\frac{2}{3}$

हल : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Rightarrow$ $n(S) = 6$

और $E = \{1, 2, 3, 4\}$

$\Rightarrow$ $n(E) = 4$

अत: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

4. एक पासे को फेंकने पर सम आने की प्रायिकता क्या है?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{1}{6}$

हल : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$

और $E = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(E) = 3$

अत: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

5. एक पासे को फेंकने पर रूढ़ (Prime) संख्या आने की प्रायिकता क्या है?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{1}{4}$

हल : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$

और $E = \{2, 3, 5\} \Rightarrow n(E) = 3$

अत: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

6. एक पासे को फेंकने पर 3 के गुणज संख्या प्राप्त होने की क्या प्रायिकता है?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{5}{6}$

हल : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Rightarrow$ $n(S) = 6$

और $E = \{3, 6\}$

$\Rightarrow$ $n(E) = 2$

अत: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

7. ताश की गड्डी से एक पत्ता खींचा जाता है, उसके इक्का होने की प्रायिकता क्या है?

(a) $\frac{1}{26}$ (b) $\frac{1}{52}$

(c) $\frac{1}{13}$ (d) $\frac{4}{13}$

हल : $n(S) = {}^{52}C_1 = 52$

चूँकि ताश की गड्डी में 4 इक्के होते हैं।

$\Rightarrow$ $n(E) = {}^{4}C_1 = 4$

अत: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

8. ताश की गड्डी से एक पत्ता यदृच्छया खींचा जाता है। उसके लाल होने की प्रायिकता होगी-

(a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{1}{26}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

हल : $n(S) = {}^{52}C_1 = 52$

चूँकि ताश की गड्डी में 26 लाल पत्ते होते हैं।

$\Rightarrow$ $n(E) = {}^{26}C_1 = 26$

अत: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

$= \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

9. ताश की एक गड्डी से एक पत्ता यदृच्छया खींचा जाता है, तो उसके काला और बेगम होने की क्या प्रायिकता है?

(a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{1}{26}$

(c) $\frac{3}{52}$ (d) $\frac{2}{13}$

हल : $n(S) = {}^{52}C_1 = 52$

चूँकि ताश की गड्डी में 2 ऐसे पत्ते होते हैं, जो काला और बेगम दोनों होते हैं।

$\Rightarrow$ $n(E) = {}^{2}C_1 = 2$

अत: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

10. किसी सामान्य वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता क्या है?

(a) $\frac{53}{365}$ (b) $\frac{12}{365}$

(c) $\frac{30}{365}$ (d) $\frac{1}{7}$

हल : सामान्य वर्ष 365 दिन का होता है, जिसमें 52 सप्ताह एवं 1 अतिरिक्त दिन होता है। स्पष्ट है, कि किसी वर्ष 53 रविवार होंगे, यदि शेष एक दिन रविवार हो।

अत: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{7}$

11. एक लीप वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता क्या है?

(a) $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{2}{7}$

(c) $\frac{53}{365}$ (d) इनमें से कोई नहीं

हल : एक लीप वर्ष 366 दिन का होता है, जिसमें 52 सप्ताह एवं 2 अतिरिक्त दिन होते हैं। स्पष्ट है, कि किसी वर्ष 53 रविवार होंगे, यदि शेष दो दिनों में से एक दिन रविवार हो।

S = {(रविवार, सोमवार), (सोमवार, मंगलवार), (मंगलवार, बुधवार), (बुधवार, बृहस्पतिवार), (बृहस्पतिवार, शुक्रवार), (शुक्रवार, शनिवार), (शनिवार, रविवार)}

$\Rightarrow$ $n(S) = 7$

और E = {(रविवार, सोमवार), (शनिवार, रविवार)}

$\Rightarrow$ $n(E) = 2$

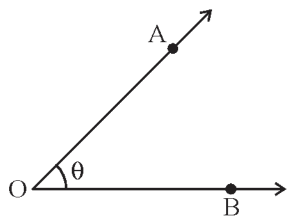
अत: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{7}$

27

त्रिकोणमिति
(*Trigonometry*)

कोण (Angle)

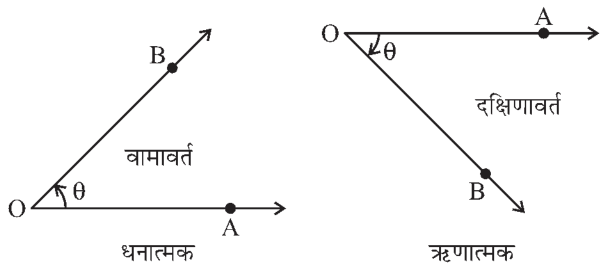
किसी किरण को उसके प्रारंभिक बिन्दु पर घुमाने से बनी आकृति कोण कहलाती है तथा घुमाव की मात्रा उसका माप होता है।



$\angle AOB = \theta$

यदि किरण को वामावर्त (Anti-clock wise) घुमाया जाए, तो कोण धनात्मक होता है।

और यदि किरण को दक्षिणावर्त (Clock wise) घुमाया जाए, तो कोण ऋणात्मक होता है।



Type - I

कोणों को मापने की प्रणालियाँ

1. षाष्टिक पद्धति (Sexagesimal system)

इकाई $\rightarrow$ डिग्री (x°)

1 समकोण $= 90^\circ$

$1^\circ = 60$ मिनट $= 60'$

$1' = 60$ सेकण्ड $= 60''$

कुल वृत्तीय कोण $= 360^\circ$

2. शत् पद्धति (Centesimal system)

इकाई $\rightarrow$ ग्रेड (x^g)

1 समकोण $= 100^g$

$1^g = 100$ मिनट $= 100'$

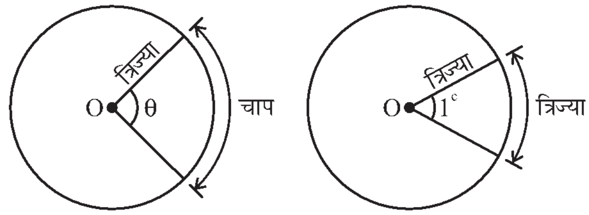
$1' = 100$ सेकण्ड $= 100''$

कुल वृत्तीय कोण $= 400^g$

3. वृत्तीय प्रणाली (Circular measurement)

इकाई $\rightarrow$ रेडियन (x या x^c)

1 रेडियन : 1 रेडियन केन्द्र पर बने उस कोण का माप है, जब चाप त्रिज्या के बराबर होती है।



$$\text{कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} \Rightarrow \theta = \frac{s}{r}$$

$$\text{कुल वृत्तीय कोण} = \frac{\text{परिधि}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

$$1 \text{ समकोण} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

कोणों को मापने की प्रणालियों का रूपांतरण

$$\frac{D}{90^\circ} = \frac{G}{100^g} = \frac{2R}{\pi}$$

कोण, जिस प्रणाली में चाहिए

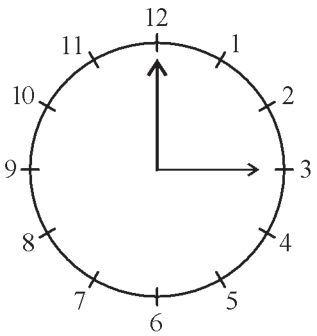
$$= \frac{\text{दिया गया कोण}}{(\text{दिए गए कोण की प्रणाली में समकोण का माप})} \times$$

(जिस प्रणाली में कोण चाहिए उस प्रणाली में समकोण का माप)

रेडियन माप = डिग्री माप $\times \dfrac{\pi}{180^\circ}$

और डिग्री माप = रेडियन माप $\times \dfrac{180^\circ}{\pi}$

घड़ी



मिनट वाली सुई द्वारा तय कोण

मिनट वाली सुई द्वारा 1 घण्टे में तय कोण $= 360^\circ$

1 मिनट में तय कोण $= \dfrac{360^\circ}{60} = 6^\circ$

अत: n : y बजे तक मिनट वाली सुई द्वारा तय कुल कोण

$= n \times 360^\circ + (6y)^\circ$

घण्टे वाली सुई द्वारा तय कोण

घण्टे वाली सुई द्वारा 12 घण्टे में तय कोण $= 360^\circ$

1 घण्टे में तय कोण $= \dfrac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

1 मिनट में तय कोण $= \dfrac{30^\circ}{60} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^\circ$

अत: n : y बजे तक घण्टे वाली सुई द्वारा तय कुल कोण

$= n \times 30^\circ + y \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^\circ$

1. $\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ रेडियन किसके बराबर है?

(a) 100° (b) 120°
(c) 108° (d) 180°

हल : डिग्री माप = रेडियन माप $\times \dfrac{180^\circ}{\pi}$

$= \dfrac{3\pi}{5} \times \dfrac{180^\circ}{\pi} = 108^\circ$

2. $\left(\dfrac{12\pi}{5}\right)^c$ का मान डिग्री में ज्ञात करें?

(a) 302° (b) 372°
(c) 432° (d) इनमें से कोई नहीं

हल : डिग्री माप = रेडियन माप $\times \dfrac{180^\circ}{\pi}$

$= \dfrac{12\pi}{5} \times \dfrac{180^\circ}{\pi} = 432^\circ$

3. 75° का मान रेडियन में ज्ञात करें?

(a) $\dfrac{3\pi}{4}$ (b) $\dfrac{2\pi}{3}$
(c) $\dfrac{12\pi}{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

हल : रेडियन माप = डिग्री माप $\times \dfrac{\pi}{180^\circ}$

$= 75^\circ \times \dfrac{\pi}{180^\circ} = \dfrac{5\pi}{12}$

4. 324° का मान रेडियन में ज्ञात करें?

(a) $\left(\dfrac{7\pi}{5}\right)^c$ (b) $\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)^c$
(c) $\left(\dfrac{8\pi}{3}\right)^c$ (d) इनमें से कोई नहीं

हल : रेडियन माप = डिग्री माप $\times \dfrac{\pi}{180^\circ}$

$= 324^\circ \times \dfrac{\pi}{180^\circ} = \left(\dfrac{9\pi}{5}\right)^c$

5. $7^\circ 30'$ को रेडियन में बदलिए–

(a) $\dfrac{\pi}{24}$ (b) $\dfrac{\pi}{18}$
(c) $\dfrac{\pi}{12}$ (d) $\dfrac{\pi}{36}$

हल : दिया गया कोण $= 7^\circ 30' = \left(7\dfrac{30}{60}\right)^\circ = \left(7\dfrac{1}{2}\right)^\circ$

अत: रेडियन माप = डिग्री माप $\times \dfrac{\pi}{180^\circ}$

$= \left(7\dfrac{1}{2}\right)^\circ \times \dfrac{\pi}{180^\circ}$

$= \left(\dfrac{15}{2}\right)^\circ \times \dfrac{\pi}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{24}$

Type - IV

यदि $a \sin\theta + b\cos\theta = c$ ...(1)

और $a\cos\theta - b\sin\theta = d$ ...(2)

समीकरण (1) और (2) का वर्ग करके जोड़ने पर

$(a\sin\theta + b\cos\theta)^2 + (a\cos\theta - b\sin\theta)^2 = c^2 + d^2$

$\Rightarrow a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2a\sin\theta\, b\cos\theta$

$+ a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2a\cos\theta\, b\sin\theta = c^2 + d^2$

$\Rightarrow a^2\sin^2\theta + b^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + a^2\cos^2\theta$

$= c^2 + d^2$

$\Rightarrow (a^2 + b^2)\sin^2\theta + (a^2 + b^2)\cos^2\theta = c^2 + d^2$

$\Rightarrow (a^2 + b^2)(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = c^2 + d^2$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

अतः $\mathbf{a\sin\theta + b\cos\theta = c}$

और $\mathbf{a\cos\theta - b\sin\theta = d}$

तो $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2 + d^2}$

41. यदि $a\sin\theta + b\cos\theta = c$ हो, तो $a\cos\theta - b\sin\theta$ का मान कितना होगा?

(a) $\pm\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}$ (b) $\pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

(c) $\pm\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}$ (d) $\pm\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$

हल : $a\sin\theta + b\cos\theta = c$

माना $a\cos\theta - b\sin\theta = d$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

$\Rightarrow \quad d^2 = a^2 + b^2 - c^2$

अतः $d = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

42. $x\cos\theta - y\sin\theta = 2$ तथा $x\sin\theta + y\cos\theta = 4$ में θ के निराकरणफल से क्या प्राप्त होगा?

(a) $x^2 + y^2 = 20$ (b) $3x^2 + y^2 = 20$

(c) $x^2 - y^2 = 20$ (d) $3x^2 - y^2 = 10$

हल : $x\cos\theta - y\sin\theta = 2$

और $x\sin\theta + y\cos\theta = 4$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2^2 + 4^2$

$= 4 + 16$

$= 20$

अतः θ का निराकरणफल

$x^2 + y^2 = 20$

43. यदि $3\sin\theta + 5\cos\theta = 5$ हो, तो $5\sin\theta - 3\cos\theta$ किसके बराबर होगा?

(a) ± 3 (b) ± 5

(c) 1 (d) ± 2

हल : $3\sin\theta + 5\cos\theta = 5$

माना $5\sin\theta - 3\cos\theta = d$

$\Rightarrow \quad 3^2 + 5^2 = 5^2 + d^2$

$\Rightarrow \quad d^2 = 3^2$

अतः $d = \pm 3$

44. यदि $x = a(\sin\theta + \cos\theta)$, $y = b(\sin\theta - \cos\theta)$ हो, तो $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ का मान क्या होगा?

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) –2

हल : $x = a(\sin\theta + \cos\theta)$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{a} = \sin\theta + \cos\theta$

और $y = b(\sin\theta - \cos\theta)$

$\Rightarrow \quad \frac{y}{b} = \sin\theta - \cos\theta$

अतः $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$

45. यदि $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ और $\frac{x}{a}\sin\theta - \frac{y}{b}\cos\theta = 1$ है, तो θ के निराकरणफल से प्राप्त होगा

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ (b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$ (d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$

हल : $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$

और $\frac{x}{a}\sin\theta - \frac{y}{b}\cos\theta = 1$

$\Rightarrow \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

अतः $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$

29

बीजगणित

(*Algebra*)

बीजगणित

बीजगणित, गणित की वह शाखा जिसमें राशियों के स्थान पर चिन्हों का प्रयोग किया जाता है।

राशियाँ मुख्यत: दो प्रकार की होती हैं-

(i) अचर राशि

(ii) चर राशि

अचर राशि

वह राशि, जिसका मान प्रत्येक गणितीय क्रिया में नियत रहता है।

अचर राशियाँ दो प्रकार की होती हैं-

(a) निरपेक्ष अचर : वह अचर राशि, जिसका मान प्रत्येक गणितीय क्रिया में समान रहता है, **निरपेक्ष अचर** कहलाता है।

जैसे : $1, 2, 3, \pi, ...$

(b) स्वेच्छिक अचर : वह अचर राशि, जिसका मान एक विशेष क्रिया में नियत रहता है, किन्तु सन्दर्भ बदलने पर जिसका मान बदल जाता है, **स्वेच्छिक अचर** कहलाता है।

जैसे : $y = mx + c$ एक सरल रेखा का समीकरण है। इसमें m और c अचर हैं, किन्तु भिन्न-भिन्न रेखाओं के लिए m और c के मान भिन्न-भिन्न होते हैं। अत: यहाँ m और c स्वेच्छिक अचर हैं।

चर राशि

वह राशि, जिसका मान गणितीय क्रिया में बदलता रहता है, चर राशि कहलाती है।

चर राशियाँ दो प्रकार की होती हैं-

(a) स्वतंत्र चर : उस चर को स्वतंत्र चर कहते हैं, जो कोई निर्दिष्ट स्वेच्छिक मान ग्रहण कर सकता है।

(b) परतंत्र चर : उस चर को परतंत्र चर कहते हैं, जिसका मान स्वतंत्र चर पर निर्भर करता है।

जैसे : $y = 3x + 4$ में $x = 2$ रखने पर $y = 10$ प्राप्त होता है। अत: यहाँ x स्वतंत्र चर और y परतंत्र चर है।

बीजगणितीय सूत्र

(1) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} b^0 + a^{n-2} b^1 + a^{n-3} b^2 + ... + a^0 b^{n-1})$

अत: $a^n - b^n$ के दो गुणनखण्ड होंगे। प्रथम गुणनखण्ड $(a - b)$ होगा तथा दूसरे गुणनखण्ड में a की घात पदों में घटती है और b की घात पदों में बढ़ती है। दूसरे गुणनखण्ड में प्रत्येक पद की कुल घात $(n - 1)$ होगी और दूसरे गुणनखण्ड में पदों का योग किया जाता है।

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
- $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$
- $a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$

(2) $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} b^0 - a^{n-2} b^1 + a^{n-3} b^2 - .... + a^0 b^{n-1})$

यहाँ n, एक विषम संख्या है।

अत: $a^n + b^n$ के दो गुणनखण्ड होंगे। प्रथम गुणनखण्ड $(a + b)$ होगा तथा दूसरे गुणनखण्ड में a की घात पदों में घटती है और b की घात पदों में बढ़ती है। दूसरे गुणनखण्ड में प्रत्येक पद की कुल घात $(n - 1)$ होगी और दूसरे गुणनखण्ड में एकान्तर पद धनात्मक एवं ऋणात्मक होंगे।

- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
- $a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

मेरुप्रस्तार/हलायुध त्रिकोण/पास्कल त्रिकोण

1 घात 0 के लिए

1 1 घात 1 के लिए

1 2 1 घात 2 के लिए

1 3 3 1 घात 3 के लिए

1 4 6 4 1 घात 4 के लिए

1 5 10 10 5 1 घात 5 के लिए

1 6 15 20 15 6 1 घात 6 के लिए

(3) $(a + b)^n = {}^nC_0\, a^n b^0 + {}^nC_1\, a^{n-1} b + {}^nC_2\, a^{n-2} b^2 + \ldots + {}^nC_n\, a^0 b^n$

अत: $(a + b)^n$ के पदों में a की घात घटती है और b की घात बढ़ती है। $(a + b)^n$ में सभी पद धनात्मक होंगे और अचर मानों के लिए पास्कल त्रिकोण का प्रयोग होता है।

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
  $= a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)$
- $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
- $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

(4) $(a - b)^n = {}^nC_0\, a^n b^0 - {}^nC_1\, a^{n-1} b + {}^nC_2\, a^{n-2} b^2 - \ldots + (-1)^n\, {}^nC_n\, a^0 b^n$

अत: $(a - b)^n$ के पदों में a की घात घटती है और b की घात बढ़ती है। $(a - b)^n$ में एकान्तर पद धनात्मक और ऋणात्मक होंगे और अचर मानों के लिए पास्कल त्रिकोण का प्रयोग होता है।

- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
  $= a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$
- $(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
- $(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$
- $(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

(5) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

(6) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

(7) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

Type - I

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(iii) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

(i) वर्ग के सूत्र

- माना $x + \frac{1}{x} = n$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = n^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = n^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 - 2$$

यदि $x + \frac{1}{x} = n$ है, तो $x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 - 2$

- माना $x - \frac{1}{x} = n$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = n^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = n^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 + 2$$

यदि $x - \frac{1}{x} = n$ है, तो $x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 + 2$

अत:

$x + \frac{1}{x} = n \quad \rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 - 2$

$x - \frac{1}{x} = n \quad \rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 + 2$

- माना $ax + \frac{1}{bx} = n$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\left(ax + \frac{1}{bx}\right)^2 = n^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2x^2 + 2 \times ax \times \frac{1}{bx} + \frac{1}{b^2x^2} = n^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2x^2 + \frac{1}{b^2x^2} = n^2 - \frac{2a}{b}$$

यदि $ax + \frac{1}{bx} = n$ है, तो $a^2x^2 + \frac{1}{b^2x^2} = n^2 - \frac{2a}{b}$

- माना $ax - \frac{1}{bx} = n$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\left(ax - \frac{1}{bx}\right)^2 = n^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2x^2 - 2 \times ax \times \frac{1}{bx} + \frac{1}{b^2x^2} = n^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2x^2 + \frac{1}{b^2x^2} = n^2 + \frac{2a}{b}$$

यदि $ax - \frac{1}{bx} = n$ है, तो $a^2x^2 + \frac{1}{b^2x^2} = n^2 + \frac{2a}{b}$

अत:

$$\begin{array}{ccccc} ax + \frac{1}{bx} = n & \searrow & & \nearrow & n^2 - \frac{2a}{b} \\ & & a^2x^2 + \frac{1}{b^2x^2} = & & \\ ax - \frac{1}{bx} = n & \nearrow & & \searrow & n^2 + \frac{2a}{b} \end{array}$$

(2) घन के सूत्र

- माना $x + \frac{1}{x} = n$

दोनों ओर घन करने पर

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = n^3$$

$$\Rightarrow \quad x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \times x \times \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) = n^3$$

$$\Rightarrow \quad x^3 + \frac{1}{x^3} + 3n = n^3$$

$$\Rightarrow \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = n^3 - 3n$$

यदि $x + \frac{1}{x} = n$ है, तो $x^3 + \frac{1}{x^3} = n^3 - 3n$

- माना $x - \frac{1}{x} = n$

दोनों ओर घन करने पर

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = n^3$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - \frac{1}{x^3} - 3 \times x \times \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right) = n^3$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - \frac{1}{x^3} - 3n = n^3$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - \frac{1}{x^3} = n^3 + 3n$$

यदि $x - \frac{1}{x} = n$ है, तो $x^3 - \frac{1}{x^3} = n^3 + 3n$

अत: $\mathbf{x + \frac{1}{x} = n}$ **है, तो** $\mathbf{x^3 + \frac{1}{x^3} = n^3 - 3n}$

और $\mathbf{x - \frac{1}{x} = n}$ **है, तो** $\mathbf{x^3 - \frac{1}{x^3} = n^3 + 3n}$

- माना $ax + \frac{1}{bx} = n$

दोनों ओर घन करने पर

$$\left(ax + \frac{1}{bx}\right)^3 = n^3$$

$$\Rightarrow a^3x^3 + \frac{1}{b^3x^3} + 3 \times ax \times \frac{1}{bx}\left(ax + \frac{1}{bx}\right) = n^3$$

$$\Rightarrow \quad a^3x^3 + \frac{1}{b^3x^3} + \frac{3na}{b} = n^3$$

$$\Rightarrow \quad a^3x^3 + \frac{1}{b^3x^3} = n^3 - \frac{3na}{b}$$

यदि $\mathbf{ax + \frac{1}{bx} = n}$ **है, तो**

$$\mathbf{a^3x^3 + \frac{1}{b^3x^3} = n^3 - \frac{3na}{b}}$$

• माना $ax - \frac{1}{bx} = n$

दोनों ओर घन करने पर

$$\left(ax - \frac{1}{bx}\right)^3 = n^3$$

$$\Rightarrow a^3x^3 - \frac{1}{b^3x^3} - 3 \times ax \times \frac{1}{bx}\left(ax - \frac{1}{bx}\right) = n^3$$

$$\Rightarrow \quad a^3x^3 - \frac{1}{b^3x^3} - \frac{3na}{b} = n^3$$

$$\Rightarrow \quad a^3x^3 - \frac{1}{b^3x^3} = n^3 + \frac{3na}{b}$$

यदि $\mathbf{ax - \frac{1}{bx} = n}$ **है, तो**

$$\mathbf{a^3x^3 - \frac{1}{b^3x^3} = n^3 + \frac{3na}{b}}$$

(3) यदि $x = a + b, a^2 - b^2 = 1$ और $a > b$

$$x = a + b \quad ...(1)$$

और $\frac{1}{x} = \frac{1}{a+b} \times \frac{a-b}{a-b}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} = a - b \quad ...(2)$$

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर

$$x + \frac{1}{x} = a + b + a - b = 2a$$

समीकरण (1) में से (2) घटाने पर

$$x - \frac{1}{x} = (a + b) - (a - b)$$

$$= a + b - a + b = 2b$$

अत: $x + \frac{1}{x} = 2a$ और $x - \frac{1}{x} = 2b$

(4) माना $x + \frac{1}{x} = n$ और $x - \frac{1}{x} = m$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 - 2 = m^2 + 2$$

अत: $x + \frac{1}{x} = n = \sqrt{m^2 + 4}$

और $x - \frac{1}{x} = m = \sqrt{n^2 - 4}$

नोट : बीजगणित में प्रश्न, चरों का उपयुक्त मान रखकर हल किए जा सकते हैं। चरों के मान इस प्रकार रखें, कि दी गई समीकरण व प्राप्त समीकरण, जो विकल्पों में दी गई हो, उनके हर शून्य नहीं होने चाहिए।

1. यदि $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 4$ हो, तो $a^2 + b^2$ का मान होगा–

(a) 1 **(b)** 2

(c) $1\frac{1}{2}$ **(d)** $2\frac{1}{2}$

हल : माना $a = b = 1$

a और b का मान दिए गए समीकरण में रखने पर

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1^2 + 1^2 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} = 4$$

$a = b = 1$ दिए गए समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

इसलिए $a = b = 1$ सही है।

अत: $a^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

2. यदि $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$ हो, तो $x - \frac{1}{x}$ का मान बताइए–

(a) –2 **(b)** 0

(c) 1 **(d)** –1

हल : माना $x = 1$

x का मान दिए गए समीकरण में रखने पर

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 1^2 + \frac{1}{1^2} = 2$$

$x = 1$ दिए गए समीकरण को संतुष्ट करता है।

इसलिए $x = 1$ सही है।

अत: $x - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{1} = 0$

3. यदि $x + \frac{1}{x} = 2$ हो, तो $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$ का मान है-

(a) 20 **(b)** 4

(c) 8 **(d)** 16

30

ज्यामिति
(*Geometry*)

ज्यामिति/रेखागणित

ज्यामिति या रेखागणित गणित की तीन विशाल शाखाओं में से एक है। इसमें बिंदुओं, रेखाओं, तलों, समतलों और ठोस चीजों के गुणस्वभाव, मापन और उनके अंतरिक्ष में सापेक्षिक स्थिति का अध्ययन किया जा सकता है।

- भूमि के नाप संबंधी कार्यों से इस विज्ञान की उत्पत्ति हुई, इसलिए इस गणित को भूमिति भी कहते हैं।
- आरंभ में यह अध्ययन रेखाओं और रेखाओं से घिरे क्षेत्रों के गुणों तक ही सीमित रहा, जिसके कारण ज्यामिति का नाम रेखागणित भी है।

बिन्दु (Point)

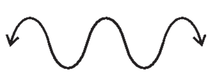
यह समतल में एक स्थिति को बताने के लिए एक सूक्ष्म चिन्ह है।

बिन्दु की लम्बाई, चौड़ाई, क्षेत्रफल और आयतन शून्य होते हैं।

रेखा (Line)

किसी तल पर खींची गई दो या दो से अधिक बिन्दुओं (संरेख या असंरेख) को मिलाने वाली आकृति को रेखा कहते हैं। रेखा की लम्बाई तो होती है, परन्तु चौड़ाई शून्य होती है।

जैसे :

रेखा दो प्रकार की होती है

1. सरल रेखा (Straight line)
2. वक्र रेखा (Curved line)

सरल रेखा

सरल रेखा गणित में शून्य चौड़ाई वाला अनंत लम्बाई वाला एक आदर्श वक्र होता है, यूक्लिडीय ज्यामिति (Euclidean geometry) के अंतर्गत दो बिन्दुओं से होकर एक और केवल एक ही रेखा जा सकती है। एक सरल रेखा दो बिन्दुओं के बीच की लघुत्तम दूरी प्रदर्शित करती है। सरल रेखा बिन्दुओं का सरलतम बिन्दुपथ होता है।

जैसे :

और $\overleftrightarrow{AB}$

वक्र रेखा

वह रेखा जिसके पथ में विचलन हो, उसे वक्र रेखा कहते हैं। **जैसे :**

रेखाखण्ड (Line segment)

यदि किसी रेखा के दोनों अंतिम बिन्दु दिए हों, अर्थात् रेखा के आरंभिक व अंतिम बिन्दु दिए गए हों, तो उसे रेखाखण्ड कहते हैं। रेखाखण्ड की लम्बाई तो होती है, परन्तु चौड़ाई शून्य होती है। **जैसे :**

, $\overline{AB}$ और AB

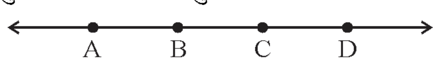
किरण (Ray)

यदि किसी रेखा का गमन एक ही दिशा में हो, अर्थात् रेखा का आरंभिक बिन्दु दिया गया हो, परन्तु अन्तिम बिन्दु ज्ञात न हो, तो उसे किरण कहते हैं। **जैसे :**

और $\overrightarrow{AB}$

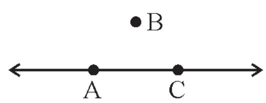
संरेख बिन्दु (Collinear points)

यदि तीन या तीन से अधिक बिन्दु एक सरल रेखा पर हों, तो उन बिन्दुओं को संरेख बिन्दु कहते हैं। **जैसे :**



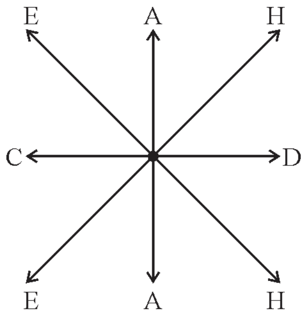
असंरेख बिन्दु (Non-collinear points)

यदि तीन या तीन से अधिक बिन्दु एक सरल रेखा पर न हों, तो उन बिन्दुओं को असंरेख बिन्दु कहते हैं। **जैसे :**



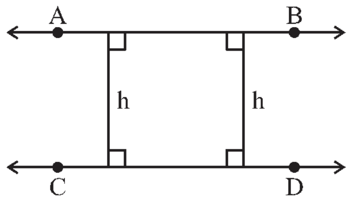
संगामी रेखाएँ (Con-current lines)

जब दो या दो से अधिक सरल रेखाओं का गमन एक ही बिन्दु से हो, तो उन रेखाओं को संगामी रेखाएँ कहते हैं। **जैसे :**



समान्तर रेखाएँ (Parallel lines)

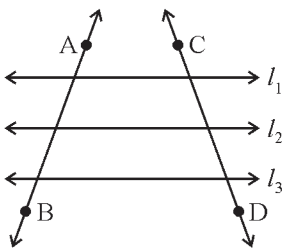
वे रेखाएँ समान्तर रेखाएँ कहलाती हैं, जो एक-दूसरे से कभी नहीं मिलती हैं और उनके बीच की लम्बवत् दूरी सदैव समान रहती है। समान्तर रेखाएँ दर्शाने के लिए $\parallel$ प्रतीक के रूप में प्रयोग होता है। **जैसे :**



और $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

तिर्यक रेखा (Transversal line)

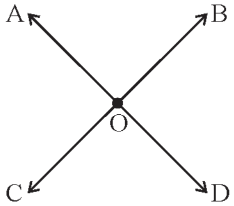
वह रेखा, जो दो या दो से अधिक रेखाओं को काटे, उसे तिर्यक रेखा कहते हैं। **जैसे :**



यहाँ l_1, l_2 और l_3 समान्तर रेखाएँ हैं और $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दो तिर्यक रेखाएँ हैं।

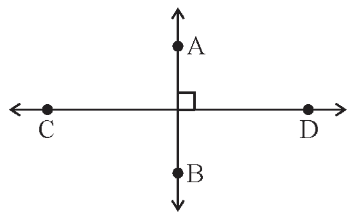
प्रतिच्छेदी रेखाएँ (Intersecting lines)

यदि दो सरल रेखाएँ एक ही बिन्दु पर काटें, तो उन रेखाओं को प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहते हैं। **जैसे :**



लम्बवत् रेखाएँ (Perpendicular lines)

जब दो रेखाएँ एक-दूसरे को समकोण पर काटती हैं, तो उन रेखाओं को लम्बवत् रेखाएँ कहते हैं। लम्बवत् रेखाएँ दर्शाने के लिए $\perp$ प्रतीक के रूप में प्रयोग होता है। **जैसे :**



सह-सतही रेखाएँ (Co-planar lines)

वे रेखाएँ, जो एक ही सतह पर हों, उन्हें सह-सतही रेखाएँ कहते हैं। इसी तरह, एक ही सतह के सभी बिन्दुओं को सह-सतही बिन्दु कहते हैं।

नोट :

(1) दो प्रतिच्छेदित रेखाएँ ज्यादा से ज्यादा एक बिन्दु पर काट सकती हैं।

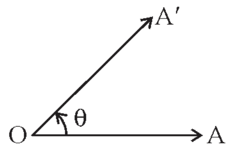
(2) एक सरल रेखा पर अनंत बिन्दु होते हैं।

(3) एक बिन्दु से अनंत सरल रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

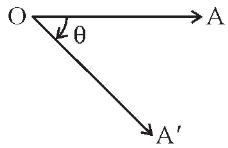
कोण (Angle)

जब किसी किरण को उसके प्रारंभिक बिन्दु से घुमाया जाता है, तो इस घुमाव के माप को ही कोण कहते हैं।

यदि किरण को वामावर्त घुमाया जाता है, तो प्राप्त कोण धनात्मक होता है और यदि किरण को दक्षिणावर्त घुमाया जाता है, तो कोण ऋणात्मक होता है।



धनात्मक कोण

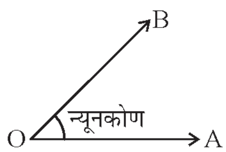


ऋणात्मक कोण

कोणों के प्रकार (Types of angle)

(1) न्यूनकोण : वह कोण, जो 0°C से बड़ा और 90° से छोटा हो, उसे न्यूनकोण कहते हैं।

$(0° < x < 90°)$



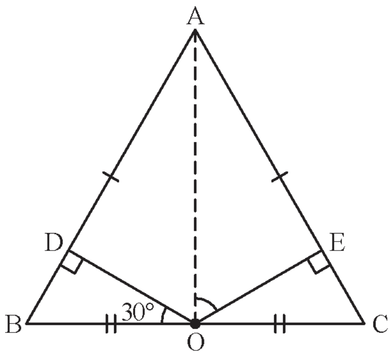
(2) समकोण : वह कोण, जिसका मान 90° है, समकोण कहलाता है।

62. ΔABC में, $AB = AC$, BC पर O एक ऐसा बिन्दु है, कि $BO = CO$ है और OD, AB पर लम्बवत् है और OE, AC के लम्बवत् है। यदि $\angle BOD = 30°$ हो, तो $\angle AOE$ का माप क्या है?

(a) 45° (b) 60°

(c) 75° (d) 30°

हल :



ΔBOD में,

त्रिभुज के तीनों कोणों का योग = 180°

$\angle B + 30° + 90° = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle B = 60°$

$\angle B = \angle C = 60°$

(समान भुजाओं के सामने के कोण)

$\Delta ABO \cong \Delta ACO$

(भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता)

$\angle AOB = \angle AOC$ (सापेक्ष कोण)

और $\angle AOB + \angle AOC = 180°$ (रैखीय युग्म)

$$\Rightarrow \quad \angle AOC = \frac{180°}{2} = 90°$$

ΔCOE में,

$\angle COE + \angle C + \angle OEC = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle COE = 180° - 60° - 90°$

$= 30°$

अत: $\quad \angle AOE = \angle AOC - \angle COE$

$= 90° - 30°$

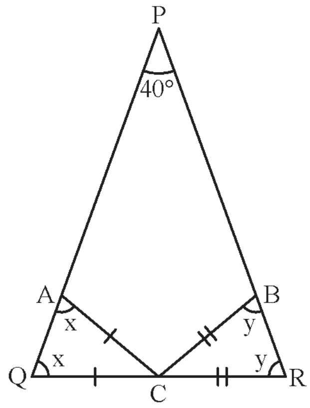
$= 60°$

63. ΔPQR में, PQ, PR, QR पर बिन्दु A, B तथा C इस प्रकार हैं, कि $QC = AC$ तथा $CR = CB$ है। तदनुसार, यदि $\angle QPR = 40°$ हो, तो $\angle ACB$ कितना होगा?

(a) 140° (b) 40°

(c) 70° (d) 100°

हल :



ΔACQ में,

$\angle ACQ + x + x = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle ACQ + 2x = 180° \quad ...(1)$

ΔBCR में,

$\angle BCR + y + y = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle BCR + 2y = 180° \quad ...(2)$

$\angle ACQ + \angle BCR + \angle ACB = 180°$

(सरल रेखा पर बने कोण)

$\Rightarrow \angle ACB = 180° - (\angle ACQ + \angle BCR) \quad ...(3)$

ΔPQR में,

$\angle P + \angle Q + \angle R = 180°$

$\Rightarrow \quad x + y = 180° - 40° = 140° \quad ...(4)$

समीकरण (1) और समीकरण (2) को जोड़कर समीकरण (4) का दोगुना घटाने पर

$\angle ACQ + 2x + \angle BCR + 2y - 2x - 2y$

$= 180° + 180° - 2 \times 140°$

$\Rightarrow \angle ACQ + \angle BCR = 80°$

अत: $\quad \angle ACB = 180° - 80°$

$= 100°$

Type - IV

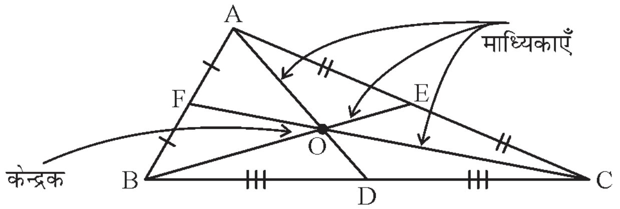
त्रिभुज के केन्द्र

त्रिभुज में भिन्न-भिन्न प्रकार के केन्द्र होते हैं। हम उन केन्द्रों में से 4 केन्द्रों के बारे में पढ़ेगें।

1. केन्द्रक (Centroid)
2. अंत:केन्द्र (Incentre)
3. परिकेन्द्र (Circumcentre)
4. लम्ब केन्द्र (Orthocentre)

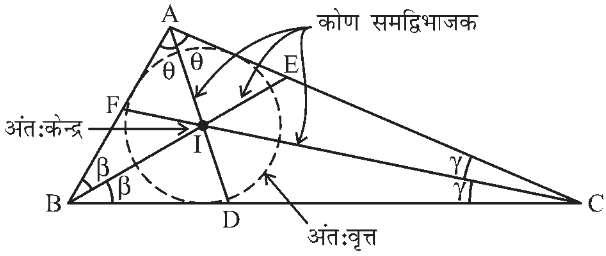
1. केन्द्रक

वह भुजा, जो त्रिभुज के शीर्ष से प्रारंभ हो और सामने वाली भुजा को मध्य बिन्दु पर मिले, उसे माध्यिका कहते हैं और त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ जिस बिन्दु पर मिलती है, उसे केन्द्रक कहते हैं।



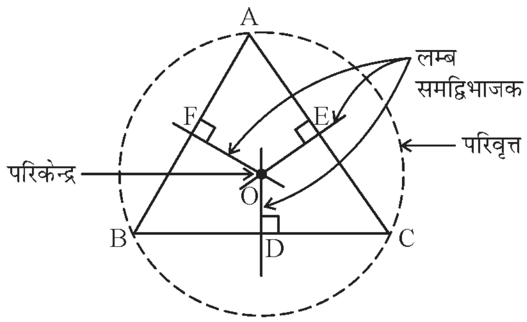
2. अंतःकेन्द्र

वह भुजा, जो शीर्ष कोण को समद्विभाजित करे और सामने वाली भुजा को काटे, उसे कोण समद्विभाजक या कोण अर्द्धक कहते हैं और जिस बिन्दु पर त्रिभुज के तीनों कोण समद्विभाजक एक-दूसरे को काटते हैं, उसे अंतःकेन्द्र कहते हैं।



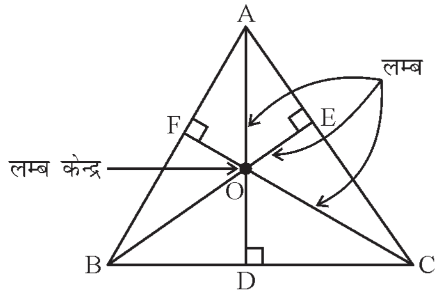
3. परिकेन्द्र

वह भुजा, जो किसी भुजा को समद्विभाजित करे और वे परस्पर लम्बवत् हों, उसे लम्ब समद्विभाजक कहते हैं और त्रिभुज की भुजाओं के तीनों लम्ब समद्विभाजक जिस बिन्दु पर एक-दूसरे को काटते हैं, उसे परिकेन्द्र कहते हैं।



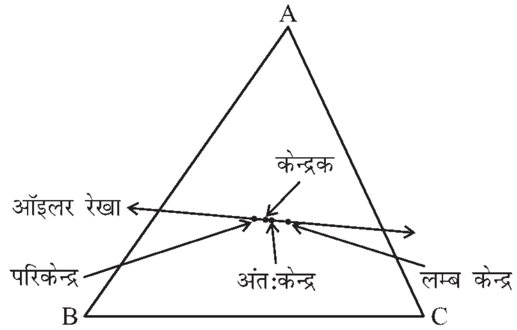
4. लम्ब केन्द्र

वह भुजा, जो त्रिभुज के शीर्ष से प्रारंभ होकर सामने वाली भुजा को समकोण पर काटे, उसे लम्ब कहते हैं और त्रिभुज के तीनों लम्ब जिस बिंदु पर एक-दूसरे को काटते हैं, उसे लम्ब-केन्द्र कहते हैं।



ऑइलर रेखा (Euler line)

त्रिभुज के चारों केन्द्र एक ही बिंदु पर हो सकते हैं या एक सरल रेखा पर होंगे, जिसे ऑइलर रेखा कहते हैं।

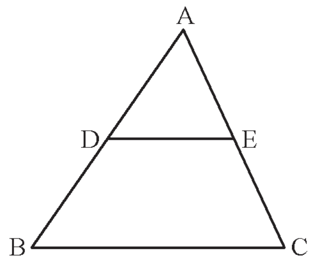


थेल्स प्रमेय (Thale's theorm)

थेल्स प्रमेय का प्रयोग समरूप त्रिभुजों में भुजाओं का अनुपात ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

यदि भुजाएँ समान्तर हों

- **भुजाओं का अनुपात**



दिया गया है, कि $DE \parallel BC$

ΔADE और ΔABC में,

$\angle ADE = \angle ABC$ (संगत कोण)

$\angle AED = \angle ACB$ (संगत कोण)

$\angle DAE = \angle BAC$ (उभयनिष्ठ कोण)

$\Rightarrow \quad \Delta ADE \sim \Delta ABC$

$$\therefore \quad \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

- **खण्ड़ों का अनुपात**

$$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$$

दोनों तरफ 1 घटाने पर,

$$\frac{AC}{AE}-1=\frac{AB}{AD}-1$$

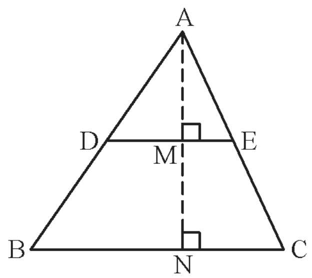
$$\Rightarrow \quad \frac{AC-AE}{AE}=\frac{AB-AD}{AD}$$

अत: $$\frac{EC}{AE}=\frac{DB}{AD}$$

और $$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$$

अत: समरूप त्रिभुजों की सापेक्ष भुजाएँ समानुपातिक होती हैं। यहाँ ऊपर चित्र में रेखाखण्डों का अनुपात भी समान है।

- **क्षेत्रफलों का अनुपात**



दिया गया है, कि $DE \parallel BC$

माना $AM \perp DE$ और $AN \perp BC$

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ पहले ही प्रमाणित कर चुके हैं,

$$\therefore \quad \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=r \qquad ...(1)$$

ΔADM और ΔABN में,

$\Delta DAM = \angle BAN$ (उभयनिष्ठ कोण)

$\angle ADM = \angle ABN$ (संगत कोण)

$\angle AMD = \angle ANB = 90°$

$\Rightarrow \quad \Delta ADM \sim \Delta ABN$

$$\therefore \quad \frac{AD}{AB}=\frac{AM}{AN}=\frac{DM}{BN}=r \qquad ...(2)$$

$$\left[\because \frac{AD}{AB}=r\right]$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$\frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}=\frac{\frac{1}{2}\times DE\times AM}{\frac{1}{2}\times BC\times AN}$$

$$=\frac{DE}{BC}\times\frac{AM}{AN}$$

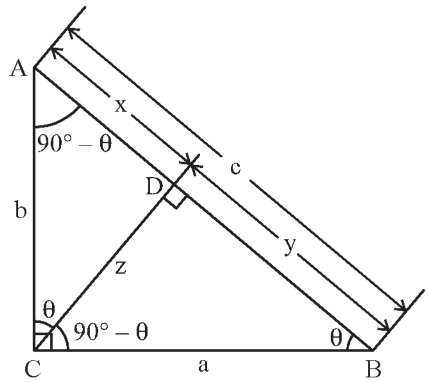
$\frac{DE}{BC}$ और $\frac{AM}{AN}$ का मान समीकरण (1) और समीकरण (2) से रखने पर

$$\frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}=r\times r=r^2$$

अत: समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी सापेक्ष भुजाओं के अनुपात के वर्ग के समान होता है।

समलम्ब $DECB$ का क्षेत्रफल $=\Delta ABC$ का क्षेत्रफल $-$ ΔADE का क्षेत्रफल

- **यदि समकोण त्रिभुज में समकोण से कर्ण पर लम्ब डाला जाए**



ΔBCD, ΔCAD और ΔBAC में सापेक्ष कोण समान हैं।

$\Rightarrow \quad \Delta BCD \sim \Delta CAD \sim \Delta BAC$

$\Delta BCD \sim \Delta BAC$ में,

$$\frac{z}{b}=\frac{y}{a}=\frac{a}{c}$$

$$\because \quad \frac{z}{b}=\frac{a}{c}\Rightarrow z=\frac{ab}{c} \qquad ...(1)$$

और $$\frac{y}{a}=\frac{a}{c}\Rightarrow y=\frac{a^2}{c} \qquad ...(2)$$

$\Delta CAD \sim \Delta BAC$ में,

$$\frac{x}{b}=\frac{z}{a}=\frac{b}{c}$$

$\because \quad \frac{x}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow x = \frac{b^2}{c}$ ...(3)

समीकरण (2) और (3) को गुणा करने पर

$$x \times y = \frac{a^2}{c} \times \frac{b^2}{c}$$

$\Rightarrow \quad xy = \frac{a^2b^2}{c^2} = \left(\frac{ab}{c}\right)^2$

$\Rightarrow \quad xy = z^2$

अत: $\quad x = \frac{b^2}{c}, y = \frac{a^2}{c}, z = \frac{ab}{c}$

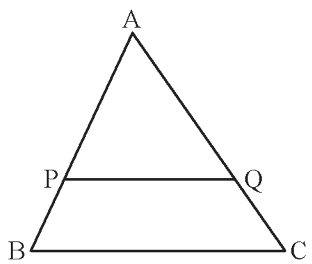
और $\quad xy = z^2$

64. एक त्रिभुज ABC में, BC के समान्तर एक सरल रेखा AB तथा AC को क्रमश: P तथा Q बिन्दुओं पर काटती है। तदनुसार, यदि AB = 3PB हो, तो PQ : BC कितना होगा?

(a) 1 : 3 (b) 3 : 4

(c) 1 : 2 (d) 2 : 3

हल :



दिया गया है, कि PQ || BC

$\Rightarrow \quad \Delta APQ \sim \Delta ABC$

$\therefore \quad \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$

चूँकि $\quad AB = 3PB$

$\Rightarrow \quad PB : AB = 1 : 3$

$\Rightarrow \quad AP : AB = 2 : 3$

अत: $\quad PQ : BC = AP : AB$

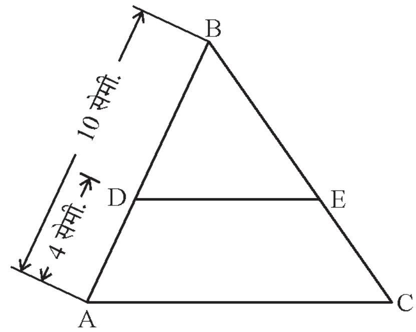
$= 2 : 3$

65. ΔABC में, DE || AC है। उसमें D तथा E क्रमश: AB तथा CB पर दो बिन्दु हैं। तदनुसार, यदि AB = 10 सेमी. तथा AD = 4 सेमी. हो, तो BE : CE कितना होगा?

(a) 2 : 3 (b) 2 : 5

(c) 5 : 2 (d) 3 : 2

हल :



दिया गया है, कि DE || AC

तो $\quad \frac{BE}{CE} = \frac{BD}{AD}$

$\because \quad AB = 10$ सेमी., $AD = 4$ सेमी.

$\Rightarrow \quad BD = AB - AD = 6$ सेमी.

$\because \quad \frac{BE}{CE} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{BE}{CE} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

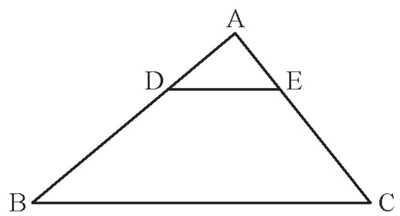
अत: $\quad BE : CE = 3 : 2$

66. ΔABC की भुजाओं AB तथा AC पर दो बिन्दु D तथा E इस प्रकार चुने गए हैं, कि $AD = \frac{1}{3}AB$ तथा $AE = \frac{1}{3}AC$ हैं। यदि BC की लम्बाई 15 सेमी. है। तदनुसार, DE की लम्बाई कितनी है?

(a) 10 सेमी. (b) 8 सेमी.

(c) 6 सेमी. (d) 5 सेमी.

हल :



दिया गया है, कि $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$ और $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$

यहाँ भुजाओं का अनुपात समान है, तो DE || BC

और ΔADE ~ ΔABC

$\Rightarrow \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad DE = \frac{1}{3} \times BC \quad [\because BC = 15$ सेमी.$]$

अत: $\quad DE = \frac{1}{3} \times 15$ सेमी. $= 5$ सेमी.