Mathematik Basics II

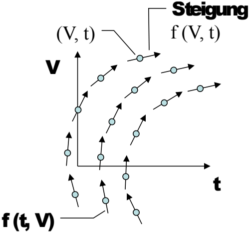
Neuroprothetics WS 2015/2016

Jörg Encke
TU-München
Fachgebiet für Bioanaloge Informationsverarbeitung
Prof. Hemmert

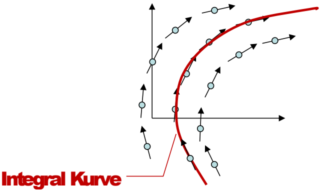
Technische Universität München

Fachgebiet für Bioanaloge Informationsverarbeitung

Analytisch $\Rightarrow$ **Geometrisch**



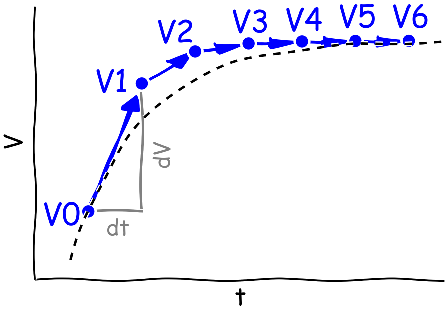
$$\frac{dV}{dt} = f(V,t) \quad \Rightarrow \quad \text{Richtungsfeld}$$



V_1 (Lösung) $\Rightarrow$ Integralkurve

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$
$$V_n = V(t_n)$$
$$V_{n+1} = V(t_{n+1})$$

Nutze die Steigung $f(V_n, t_n)$ um die Position des nächsten Punktes V_{n+1} zu errechen.

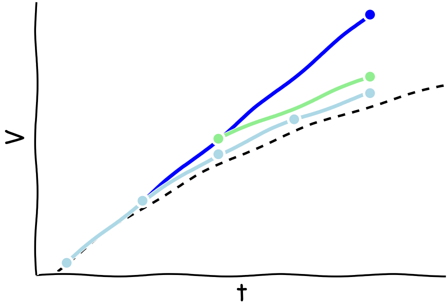


$$\frac{dV}{dt} = f(V, t)$$

$$\frac{V_{n+1} - V_n}{\Delta t} = f(V, t)$$

$$V_{n+1} = V_n + f(V_n, t_n) \cdot \Delta t$$

Der Fehler durch die numerische Näherung ist abhängig von der Schrittweite. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen wird duch die **Konsistenzordnung** gegeben.



Der **lokale Fehler** ist der Fehler zu einem bestimmten Zeitpunkt t

Herleitung über die Taylor Reihe:

$$V(t+\Delta t) = V(t) + \Delta t V'(t) + \underbrace{\frac{1}{2}\Delta t^2 V''(t) + O(\Delta t^3)}_{\text{Fehler}}$$

$\Rightarrow$ Für kleine Δt ist der **lokale Fehler** proportional zu Δt^2

Globaler Fehler

Der globale Fehler ist die Summe aller lokalen Fehler ($\propto \Delta t^2$) bis zu einem Zeitpunkt t.

Da für die Anzahl der Schritte zum Erreichen des Zeitpunktes t gilt:

$$\frac{t - t_0}{\Delta t}$$

Daher ist der globale Fehler näherungsweise proportional zu Δt

Das explizite Euler Verfahren ist eine Methode 1. Ordnung:
$\Rightarrow$ **Halbe Schrittweite halber Fehler**

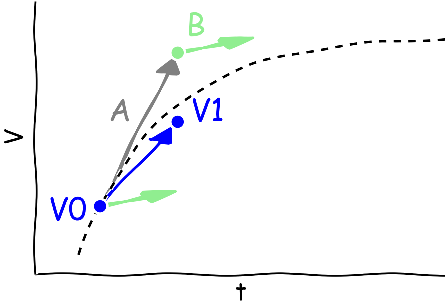
Methoden höherer Ordnung

Gibt es etwas besseres als die explizite Euler Methode?

Die Runge-Kutta-Verfahren sind eine Familie von **Einzelschritt Verfahren** welche sich in den meisten Anwendungsgebieten durchgesetzt hat.

- Heun Methode (2. Ordnung)
- Runge-Kutta 4. Ordnung

Nutze die mittlere Steigung von $f(V_n, t_n)$ sowie **einer** weitern Stützstelle um die Position des nächsten Punktes V_{n+1} zu berrechen.



$$A = f(V_n, t_n)$$

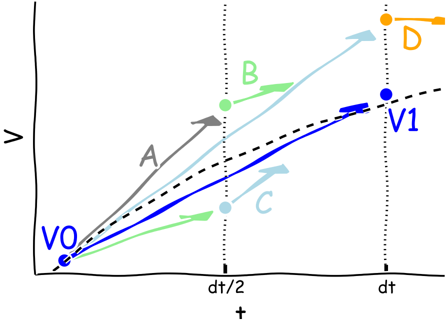
$$\tilde{V} = V_n + A \cdot \Delta t$$

$$B = f(\tilde{V}, t_{n+1})$$

$$V_{n+1} = V_n + \frac{A + B}{2} \cdot \Delta t$$

Methode 2. Ordnung $\Rightarrow$ **Halbe Schrittweise viertel Fehler.**

Nutze die mittlere Steigung von $f(V_n, t_n)$ sowie von **drei** weitern Stützstelle um die Position des nächsten Punktes V_{n+1} zu berrechen.



$$A = f(V_n, t_n)$$

$$\tilde{V_A} = V_n + A \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

$$B = f(\tilde{V_A}, t_{n+0.5})$$

$$\tilde{V_B} = V_n + B \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

$$C = f(\tilde{V_B}, t_{n+0.5})$$

$$\tilde{V_C} = V_n + C \cdot \Delta t$$

$$D = f(\tilde{V_C}, t_{n+1})$$

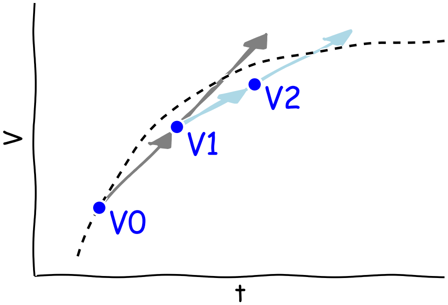
Methode 4. Ordnung $\Rightarrow$ **Halbe Schrittweise 1/16 Fehler.**

$$V_{n+1} = V_n + \frac{A + 2B + 2C + D}{6} \cdot \Delta t$$

Was gibt es sonst noch?

- Implizite Verfahren
- Exponentielle Verfahren

Nutze die Steigung am nächsten Punkt $f(V_{n+1}, t_)$ um die Position des nächsten Punktes V_{n+1} zu errechen.



$$\frac{dV}{dt} = f(V, t_n)$$

$$\frac{V_{n+1} - V_n}{\Delta t} = f(V, t)$$

$$V_{n+1} = V_n + f(V_{n+1}, t_{n+1}) \cdot \Delta t$$

Methode 1. Ordnung $\Rightarrow$ **halbe Schrittweite halber Fehler**

Zum Berechnen muss eine Gleichung der Art

$$0 = V_{n+1} - V_n + f(V_{n+1}, t_{n+1}) \cdot \Delta t$$

Gelöst werden. Je nach Beschaffenheit der Gleichung $f(V_{n+1}, t_{n+1})$ kann dies analytisch geschen oder muss numerisch durchgeführt werden.

 # Tafelmitschrift #

Vorteile ??

Exponentielle Verfahren können bei Gleichungen der Form:

$$\frac{dV}{dt} = A(t)V(t) + B(V,t)$$

angewendet werden.

Im Falle des Exponential Euler Verfahrens 1. Ordnung kann eine solche Gleichung gelöst werden durch:

$$V_{n+1} = V_n e^{A(t_n)\Delta t} + \frac{B(t_n)}{A(t_n)}(e^{A(t_n)\Delta t} - 1)$$

Vorteile ??

 # Demo #

Betrachtung mit Hilfe der Dahlquistschen Testgleichung

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V$$

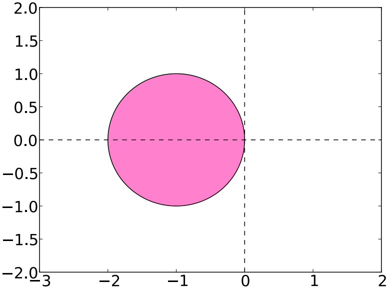
für die exakte Lösung $V(t) = e^{\lambda t}$ dieser Gleichung gilt:

$$\lim_{t \to \infty} |V(t)| = \begin{cases} 0 & Re\{\lambda\} < 0 \\ \infty & Re\{\lambda\} > 0 \end{cases}$$

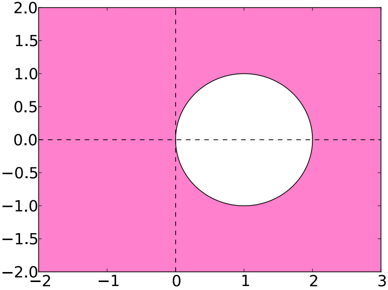
Es sollte bei $Re\{\lambda\} < 0$ also auch für die numerische Lösung gelten:

$$|V_n| \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

 # Tafelmitschrift #



Expliziter Euler

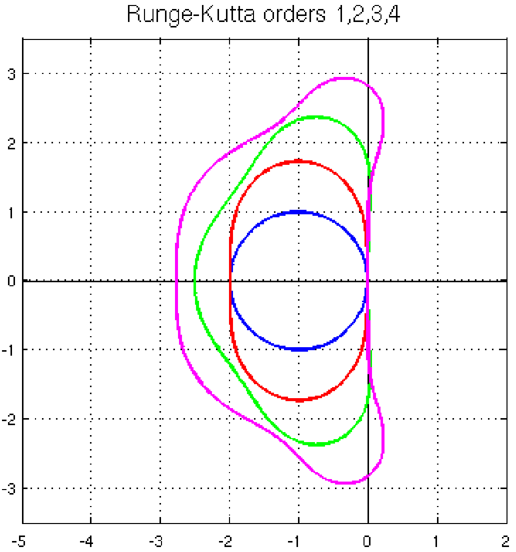


Impliziter Euler

- Kleiner Stabiltätsbereich
- Nicht für steife Gleichungen geeignet.

- A-Stabil
- Nicht für instabile Gleichungen geeignet.

Stabilitätsbereich



Fragen ?