Задача 1. Докажите, что всякую целочисленную квадратную матрицу второго порядка можно представить в виде суммы четырех целочисленных унимодулярных (2×2) – матриц, определитель которых равен «плюс» или «минус» один.

Решение. Представим матрицу (2×2):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Члены последовательности (a_n) удовлетворяют равенству $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_{n+1} + a_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, причем $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$.

Какие значения может принимать 2025-й член последовательности?

Ответ. Единственное значение $a_{2025} = 1013 \cdot 2025 = 2051325$.

Решение. Так как по условию задачи $a_0 = 0$, получаем, что $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6$ и т.д.

Применяя метод математической индукции, докажем, что $a_n = \frac{(n+1)n}{2}$ (то есть (a_n) –последовательность треугольных чисел, возрастающая).

База индукции ($n = 1$) выполнена. Что очевидно.

Индукционный шаг. Предположим, что при $n = k$ равенство $a_k = \frac{(k+1)k}{2}$ верно.

Тогда при $n = k + 1$ из формулы в условии получаем

$(a_{k+1} - a_k)^2 = a_{k+1} + a_k$, то есть $a_{k+1}^2 - (2a_k + 1)a_{k+1} + a_k^2 - a_k = 0$.

Решая квадратное уравнение относительно a_{k+1} и подставляя $a_k = \frac{(k+1)k}{2}$, получаем

$$a_{k+1} = \frac{2a_k + 1 \pm \sqrt{8a_k + 1}}{2} = \frac{(k+1)k + 1 \pm \sqrt{4(k+1)k + 1}}{2} =$$

$$= \frac{k^2 + k + 1 \pm (2k+1)}{2}$$

Так как $a_{k+1} \geq a_k$, то $a_{k+1} = \frac{k^2+k+1+(2k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, $a_{2025} = \frac{(2025+1)2025}{2} = 1013 \cdot 2025 = 2051325$.

Ответ. Единственное значение $a_{2025} = 1013 \cdot 2025 = 2051325$.

Задача 3. Пусть векторы x, y на плоскости таковы, что $|x+y|=|x|+|y|$. Докажите, что тогда для любых $a, b \in \mathbb{R},\ a \geq 0,\ b \geq 0$ верно $|ax+by|=a|x|+b|y|$.

Решение. Предположим, что $a \geq b$. Тогда

$$|ax+by|=|a(x+y)-(a-b)y| \geq a|x+y|-(a-b)|y|=$$
$$=a|x|+a|y|-(a-b)|y|=a|x|+b|y|.$$

С другой стороны, по неравенству треугольника $|ax+by| \leq a|x|+b|y|$.

Задача 4. Пусть $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+....+\frac{a_n}{n+1}=0,$ где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ - вещественные постоянные. Доказать, что многочлен $a_0+a_1x+...+a_nx^n$ имеет хотя бы один действительный корень.

Решение. Рассмотрим многочлен $P_{n+1}=a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+....+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$. По условию имеем, что $P_{n+1}(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+....+\frac{a_n}{n+1}=0$ и $P_{n+1}(0)=0$. Тогда по теореме Ролля $\exists x_0\in(0,1)$ такое, что $P'_{n+1}(x_0)=0$, где $P'_{n+1}(x)$ совпадает с многочленом $a_0+a_1x+...+a_nx^n$.

Задача 5. Докажите, что $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin 1001x}{\sin x}dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin 999x}{\sin x}dx$.

Решение. Покажем, что разность интегралов равна нулю. Рассмотрим

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin(1001x)}{\sin x}dx - \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin(999x)}{\sin x}dx = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin 1001x}{\sin x} - \frac{\sin 999x}{\sin x}\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin 1001x}{\sin x} - \frac{\sin 999x}{\sin x}\right)dx = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin 1001x - \sin 999x}{\sin x}\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin 1001x - \sin 999x}{\sin x}\right)dx = \left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся формулой:} \\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cdot \cos(1000x)}{\sin x}dx = 2\int\limits_0^{\pi/2} \cos(1000x)\,dx = \frac{1}{500}\sin(1000x)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{500}\left(\sin(500\pi) - \sin 0\right) = 0.$$

Т.е. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin 1001x}{\sin x}dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin 999x}{\sin x}dx$, что и требовалось доказать.

(интегралы собственные, т.к. функцию можно доопределить по непрерывности в точке x=0).

Задача 6. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+2025}-2025\sqrt{x+1}+2024\sqrt{x}}{\sqrt{x+2023}-2023\sqrt{x+1}+2022\sqrt{x}}$.

Решение.

Обозначим через $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+2025}-2025\sqrt{x+1}+2024\sqrt{x}}{\sqrt{x+2023}-2023\sqrt{x+1}+2022\sqrt{x}}$.

Тип предела $\left\{\dfrac{\infty-\infty}{\infty-\infty}\right\}$.

Преобразуем числитель:

$$\sqrt{x+2025}-2025\sqrt{x+1}+2024\sqrt{x}=$$
$$=\left(\sqrt{x+2025}-\sqrt{x+1}\right)+2024\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right).$$

Умножим и разделим каждую скобку на сопряженное:

$$\frac{x+2025-x-1}{\sqrt{x+2025}+\sqrt{x+1}}+\frac{2024(x-x-1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{2024\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+2025}\right)}{\left(\sqrt{x+2025}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=$$
$$=\frac{2024(x-x-2025)}{\left(\sqrt{x+2025}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2025}\right)}.$$

Аналогично преобразуем знаменатель:

$$\sqrt{x+2023}-2023\sqrt{x+1}+2022\sqrt{x}=\frac{2022\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+2023}\right)}{\left(\sqrt{x+2023}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=$$
$$=\frac{2022(x-x-2023)}{\left(\sqrt{x+2023}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2023}\right)}.$$

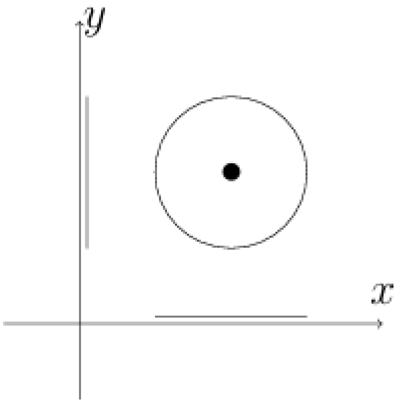
Тогда предел

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{2024(-2025)\left(\sqrt{x+2023}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2023}\right)}{2022(-2023)\left(\sqrt{x+2025}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2025}\right)}=\frac{2024\cdot2025}{2022\cdot2023}.$$

Ответ. $L=\dfrac{2024\cdot2025}{2022\cdot2023}$.

Задача 7. Непустое множество X на прямой или на плоскости называется линейно связным, если любые две его точки можно соединить ломаной, целиком лежащей в данном множестве. Известно, что проекции на оси координат множества $X \subset \mathbb{R}^2$ есть линейно связные множества в $\mathbb{R}^1$. Обязательно ли множество X линейно связно? Ответ обоснуйте.

Решение. Пример. Окружность с выделенным центром не будет линейно связным множеством, но проекциями этого множества буду отрезки, которые линейно связны.



Критические точки. Промежутки возрастания/убывания функции.

Ответ. Нет.