Matematická kartografie

Úloha 1
Výpočet souřadnic bodů v rovině Křovákova zobrazení

František Macek, Josef Zátka

Univerzita Karlova

Přírodovědecká fakulta

Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie

Praha, 2025

1 Zadání

Úloha č. 1: Výpočet souřadnic bodů v rovině Křovákova zobrazení

GPS aparaturou změřte zeměpisné souřadnice bodů φ, λ bodů P_1, P_2 vztažené k elipsoidu WGS-84 a vypočtěte jejich obraz v rovině Křovákova zobrazení. Měření proveďte na bodech o známých souřadnicích (trigonometrický bod) a to opakovaně.

Pro transformaci mezi elipsoidy použijte sedmiprvkovou Helmertovu prostorovou podobnostní transformaci danou vztahem:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}$$

Parametry prostorové transformace:

$$\begin{aligned} \omega_x &= 4.9984'' \\ \omega_y &= 1.5867'' \\ \omega_z &= 5.2611'' \\ m - 1 &= -3.5623 \times 10^{-6} \\ \Delta X &= -570.8285 \text{ m} \\ \Delta Y &= -85.6769 \text{ m} \\ \Delta Z &= -462.8420 \text{ m} \end{aligned}$$

Určení zeměpisné šířky φ obrazu bodu P na Besselově elipsoidu proveďte s přesností $0.001''$. Souřadnice obrazu bodu P v rovině Křovákova zobrazení určete s přesností na cm. V bodech P_1, P_2 dále vypočtěte:

- hodnoty délkového zkreslení m,
- hodnoty meridiánové konvergence c.

Porovnejte vliv následujících faktorů na souřadnice bodů P_1, P_2 a vzdálenosti $\|P_1 - P_2\|$:

- zanedbání změny elipsoidu: souřadnice φ, λ měřeny na Besselově elipsoidu,
- zanedbání vlivu elipsoidu: souřadnice měřeny na Gaussově kouli.

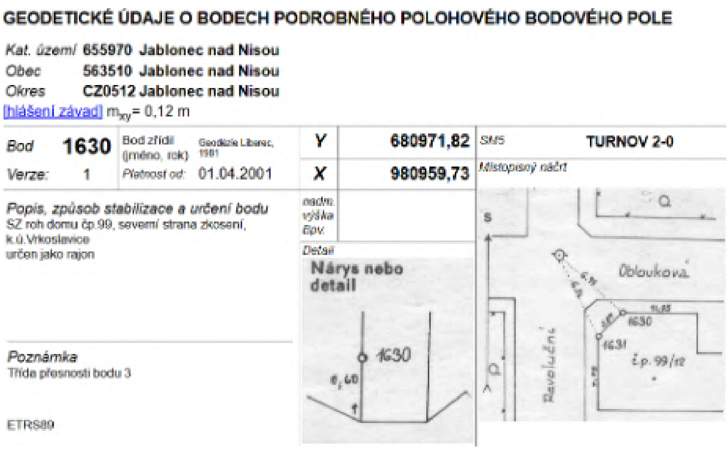
Jak se budou lišit takto určené souřadnice a vzdálenosti od hodnot vztažených k elipsoidu WGS-84? Pro jaká měřítka map si taková zjednodušení můžeme dovolit?

Obrazy bodů P_1, P_2 a jejich blízkého okolí vizualizujte s použitím vhodných podkladových geografických dat (např. WMS). Výpočty realizujte v SW Matlab.

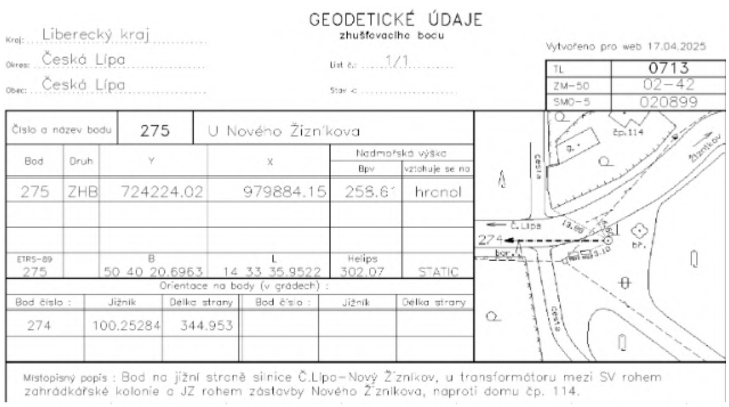
2 Popis a rozbor problému

Cílem úlohy je převést zeměpisné souřadnice bodů naměřené pomocí GPS ve světovém souřadnicovém systému WGS-84 do souřadnicového systému S-JTSK (Křovákovo zobrazení). Postup zahrnuje prostorovou transformaci mezi elipsoidy pomocí Helmertovy transformace a následné zobrazení na rovinu. Součástí je také vyhodnocení zkreslení a porovnání vlivu zjednodušení na výsledné souřadnice a vzdálenosti.

Zvolené body byly naměřeny v Jablonci nad Nisou (JBC) a České Lípě (CL) GPS aparaturou. Body byly měřeny třikrát, využit byl aritmetický průměr, uváděná přesnost byla ± 7 m pro Jablonec nad Nisou a ± 4 m pro Českou Lípu.



Obrázek 1: Trigonometrický bod, JBC (ČÚZK 2025a)



Obrázek 2: Trigonometrický bod, CL (ČÚZK 2025a)

Measurement	**Latitude [°]**	**Longitude [°]**
1	50.713608	15.168776
2	50.713598	15.168796
3	50.713482	15.168779
Mean	50.71356267	15.16878367

Tabulka 1: Nameřené hodnoty pro JBC (P_1)

Measurement	**Latitude [°]**	**Longitude [°]**
1	50.67243	14.56
2	50.67242	14.56001
3	50.67244	14.56
Mean	50.67243	14.56000333

Tabulka 2: Nameřené hodnoty pro CL (P_1)

Po nameření dvou bodů byla hlavní část rozdělena do následujích pěti bodů:

1. Převod zeměpisných souřadnic bodu $P' = [\varphi', \lambda']$ zdrojového elipsoidu na geocentrické prostorové souřadnice $P' = [X', Y', Z']$ vztaženému k tomuto elipsoidu.
2. Prostorová podobnostní transformace (Helmertova) mezi geocentrickými souřadnicemi bodu $P = [X', Y', Z']$ zdrojového elipsoidu a geocentrickými souřadnicemi bodu $P = [X, Y, Z]$ cílového elipsoidu.
3. Převod geocentrických souřadnic bodu $P = [X, Y, Z]$ cílového elipsoidu na zeměpisné souřadnice $P = [\varphi, \lambda]$ vztažené k cílovému elipsoidu.
4. Výpočet délkového zkreslení a meridiánové konvergence P_1 a P_2:
5. Porovnání zjednodušených případů

2.1 Vztah zeměpisných a geocentrických souřadnic

Prostorové geocentrické souřadnice (X, Y, Z) bodu určeného zeměpisnými souřadnicemi (φ, λ), ležícího na povrchu referenčního elipsoidu daného parametry (a, b), lze určit ze vztahu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ (1-e^2)\sin\varphi \end{pmatrix},$$

kde N představuje příčný poloměr křivosti:

$$N = \frac{a}{W},$$

W je první geodetická funkce:

$$W = \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi},$$

a e^2 je první excentricita elipsoidu:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

(Bayer 2025b)

2.2 Prostorová podobnostní transformace souřadnice (Helmertova)

Lineární transformace, která bodu $\mathbf{P}'_i = [X'_i, Y'_i, Z'_i]$ v souřadnicovém systému (O', X', Y', Z') přiřazuje bod $\mathbf{P}_i = [X_i, Y_i, Z_i]$ v systému (O, X, Y, Z), je definována jako prostorová podobnostní transformace (tzv. Helmertova transformace):

$$\mathbf{P} = m\mathbf{R}\mathbf{P}' + \boldsymbol{\Delta},$$

kde matice $\boldsymbol{\Delta}$ vyjadřuje translaci obou soustav, $\mathbf{R}$ je rotační matice a m měřítkový koeficient.

Transformace vyžaduje znalost čtyř identických bodů pro výpočet transformačních parametrů (1× měřítko, 3× rotace, 3× posun). Prvky matice $\mathbf{R}$ představují směrové kosíny rotací dle jednotlivách souřadnicových os:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z,$$

kde např.:

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega_x & \sin\omega_x \\ 0 & -\sin\omega_x & \cos\omega_x \end{pmatrix}, \quad \text{atd.}$$

Pro malé hodnoty úhlů rotace lze využít přiblížení:

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1.$$

Poté má matice rotace přibližný tvar:

$$\mathbf{R} \approx \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix}.$$

(Bayer 2025b)

2.3 Převod geocentrických souřadnic na zeměpisné souřadnice

S přihlédnutím k následujícím rovnicím:

$$X = N\cos\varphi\cos\lambda, \quad Y = N\cos\varphi\sin\lambda, \quad Z = N(1-e^2)\sin\varphi,$$

lze zeměpisnou délku λ určit ze vztahu:

$$\tan\lambda = \frac{Y}{X}. \tag{5}$$

Sečtením čtverců rovnic pro X a Y:

$$X^2 = N^2\cos^2\varphi\cos^2\lambda, \quad Y^2 = N^2\cos^2\varphi\sin^2\lambda,$$

dostaneme:

$$X^2 + Y^2 = N^2\cos^2\varphi, \quad \Rightarrow \sqrt{X^2+Y^2} = N\cos\varphi.$$

Po vydělení rovnice pro Z tímto výrazem dostaneme:

$$\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \frac{N(1-e^2)\sin\varphi}{N\cos\varphi} = (1-e^2)\tan\varphi,$$

odkud vyplývá:

$$\tan\varphi = \frac{Z}{(1-e^2)\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

(Bayer 2025b)

2.4 Křovákovo zobrazení

Křovákovo zobrazení je dvojité kuželové konformní zobrazení navržené ing. Josefem Křovákem, které převádí Besselův elipsoid do roviny prostřednictvím referenční koule.

Postup transformace:

1. Zobrazení Besselova elipsoidu na kouli (Gaussovo konformní).
2. Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické.
3. Zobrazení do roviny konformního kuželového zobrazení.
4. Transformace polárních souřadnic na rovinné pravoúhlé.

(Bayer 2025a), (MUNI 2025)

2.4.1 Konformní zobrazení referněího elipsoidu na Gaussovu kouli

Využito Gaussova konformního zobrazení z elipsoidu na kouli. Hodnota nekzreslené rovnoběžky je: $\varphi_0 = 49°30'$ s.š. Zeměpisná délka je odečítána od Ferrského poledníku, posun je tedy $17°40'$.

Konstanty zobrazení se určí z následujících vztahů:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1+e^2\cos^4\varphi_0}{1-e^2}},$$

$$k = \frac{\tan^{\alpha}\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1-e\sin\varphi_0}{1+e\sin\varphi_0}\right)^{\frac{\alpha e}{2}}}{\tan\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\varphi_0}, \quad \sin u_0 = \frac{\sin\varphi_0}{\alpha}.$$

Zobrazovací rovnice vypadá následovně:

$$\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{k}\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{\frac{\alpha e}{2}},$$

$$v = \alpha\lambda_F = \alpha(\lambda + 17°40').$$

(Bayer 2025a)

Transformace zeměpisných souřadnic na kouli na souřadnice kartografické

Kartografický pól byl určen z bodu, představující nejvýchodnější bod znázorněný na mapě 1:75 000, jeho souřadnice:

$$u_k = 59°42'42.6969'' \text{ s.š.}, \quad v_k = 42°31'31.41725'' \text{ v.d.F.}$$

Pro převod bylo využito vztahů sférické trigonometrie:

$$\sin\check{s} = \sin u \sin u_k + \cos u \cos u_k \cos(v_k - v),$$
$$\sin d = \frac{\cos u}{\cos\check{s}}\sin(v_k - v).$$

(Bayer 2025a)

2.4.2 Konformní zobrazení Gaussovy koule do roviny

Bylo využito Lambertova konformního kuželového zobrazení s jednou nezkreslenou kartografickou rovnoběžkou: $\varphi_0 = 49°30'$ s.š., kde vrchol kužele představuje kartografický pól. Další konstanty, mimo φ_0, se určí z následujících vztahů:

$$c = \sin\varphi_0, \qquad \rho_0 = k\,R\,\cot\varphi_0.$$

Zobrazovací rovnice pak mají tvar

$$\rho(\varphi) = \rho_0 \left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right)^c, \qquad \varepsilon(\lambda) = c\left(\lambda - \lambda_0\right),$$

(Bayer 2025a)

2.4.3 Transformace polárních souřadnic na pravoúhlé

Počátek součadnicového systému v obraze vrcholu kužele spadá do Estonského zálivu. Československo se nachází v prním kvadrantu - obě souřadnice jsou kladné. Hodnoty na ose x jsou na celém území větší než osy y.

$$x = \rho \cos \varepsilon, \quad y = \rho \sin \varepsilon$$

(Bayer 2025a)

2.4.4 Délkové zkreslení

Délkové zkreslení roste na sever a na jih od nekreslené rovnoběžky a jde určit dle následujícího vztahu:

$$m_r = \frac{c\rho}{R \cos \sigma}, \quad m = m_r - 1$$

(Bayer 2025a)

2.4.5 Meridiánová konvergence

S využitím sférické trigonometrie je možno zjištit, že platí:

$$c = \varepsilon - \xi, \quad \sin \xi = \frac{\cos u_k \sin(180^\circ - \delta)}{\cos u}$$

Alternativně lze výpočet provést pomocí řady:

$$c = 0.008257y + 2.373 \cdot \frac{y}{x} \quad [\text{v km}]$$

(Bayer 2025a)

3 Výsledky

Tabulka 1 a 2 s naměřenými body se nachází v kapitole 2 Popis a rozbor problému, stejně jako obrázky z podrobného polohového bodového pole (obrázek 1, obrázek 2).

Výpočty souřadnic obou bodů, délkového zobrazení a merdidánové konvergence v různých variantách transformace do S-JTSK, včetně rozdílů vůči WGS84 → JTSK, jsou uvedeny v tabulkách 3 a 4. Dále jsou v těchto tabulkách uvedeny také rozdíly mezi souřadnicemi vůči PPBP. Je nutné zmínit, že rozdíl pro bod 1 (JBC) je poměrně vysoký a pro příští meření by bylo vhodné zvolit lepší GPS aparturu, než starý android telefon s pochybnou aplikací. Naopak bod 2 (CL), měřený přístrojem Garmin Oregon 300, vykazuje vysokou přesnost.

Systém	**X [m]**	**Y [m]**	$\boldsymbol{m_r}$	$\boldsymbol{c}$	ΔX [m]	ΔY [m]
WGS84 → JTSK	980956.46	680976.71	1.00003631	7.2576°	0.00	0.00
Bessel → JTSK	981036.89	681075.94	1.00003599	7.2585°	+80.43	+99.23
Sféroid → JTSK	976262.60	681862.56	1.00004538	7.2732°	-4693.86	+885.85
ČÚZK (JTSK)	980973.79	680959.73	–	–	+17.33	-17.00

Tabulka 3: Srovnání pro bod 1 (JBC)

Systém	**X [m]**	**Y [m]**	$\boldsymbol{m_r}$	$\boldsymbol{c}$	ΔX [m]	ΔY [m]
WGS84 → JTSK	979883.03	724222.74	0.99997943	7.7239°	0.00	0.00
Bessel → JTSK	979965.18	724316.58	0.99997918	7.7248°	+82.15	+93.84
Sféroid → JTSK	975193.71	725040.78	0.99998619	7.7393°	-4689.32	+818.04
ČÚZK (JTSK)	979884.15	724224.02	–	–	+1.12	+1.28

Tabulka 4: Srovnání pro bod 2 (CL)

Tabulka 5 uvádí vzdálenosti mezi body P1 (JBC) a P2 (CL) v různých variantách transformace do S-JTSK a jejich rozdíl vůči variantě WGS84 → JTSK.

Systém	$\lvert P_1 - P_2 \rvert$ [m]	Rozdíl vůči WGS84 [m]
WGS84 → JTSK	43259.35	–
Bessel → JTSK	43253.92	-5.43
Sféroid → JTSK	43191.45	-67.90
ČÚZK (JTSK)	43263.38	+4.03

Tabulka 5: Vzdálenosti mezi body P1 a P2.

Tabulka 6 poté uvádí vzdálenosti bodů po transformaci z WGS84 do JTSK celým postupem popsaným v teoretické části a body se zanedbáním některé části transformace. Při zanedbání změny elipsoidu, kde souřadnice φ, λ jsou měřeny na Besselově elipsoidu vznikla chyba až téměř 128 metrů. Při stanovení grafické přesnosti mapy 1 mm lze konstatovat, že chyby menší než tato hodnota budou zanedbatelné. Z toho vyplývá, že první ze zjednodušení (chyba: 128 m), je považováno za přípustné u map s měřítkem menším než 1 : 128 000. Při zanedbání vlivu elipsoidu, kde souřadnice jsou měřeny na Gaussově kouli, vznikla chyba až 4,8 km, za největší přípustné měřítko můžeme tedy považovat 1 : 4 800 000. Dále jsou na obrázku 3 vizualizovány vypočítané body.

Bod	**Bessel → JTSK** [m]	**Sféroid → JTSK** [m]
P1 (JBC)	127.72	4776.72
P2 (CL)	124.71	4760.14

Tabulka 6: Vzdálenosti mezi body po transformaci WGS84 → JTSK a body se zanedbáním částí transformace.

Obrázek 3: Vizualizace bodů P1 a P2. vlastní zpracování, (ČÚZK 2025b)

Zdrojový kód k úkolu je dostupný v repizitáři zde: https://github.com/aktaz-fesoj/matkarto1

4 Zdroje

Odkazy

Bayer, Tomáš (2025a). *Jednoduchá kuželová zobrazení. Křovákovo zobrazení.* URL: `https://web.natur.cuni.cz/~bayertom/images/courses/mmk/mk8.pdf` (cit. 04. 05. 2025).

– (2025b). *Transformace zeměpisných souřadnic mezi elipsoidy (stručný návod k úloze 1).* URL: `https://web.natur.cuni.cz/~bayertom/images/courses/mmk/mmk_cv_1_navod.pdf` (cit. 04. 05. 2025).

ČÚZK (2025a). *Geoprohlížeč.* URL: `https://ags.cuzk.cz/geoprohlizec/` (cit. 04. 05. 2025).

– (2025b). *WMS - ZTM100.* URL: `https://ags.cuzk.gov.cz/arcgis1/services/ZTM/ZTM100/MapServer/WMSServer?` (cit. 04. 05. 2025).

MUNI (2025). *Křovákovo zobrazení a souřadnicový systém*. URL: https://is.muni.cz/el/sci/jaro2020/Z8106/um/11_Krovakovo_zobrazeni.pdf (cit. 04. 05. 2025).