Matematická kartografie

Úloha 3
Srovnání konformních kartografických zobrazení pro zvolené území

František Macek, Josef Zátka

Univerzita Karlova

Přírodovědecká fakulta

Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie

Praha, 2025

1 Zadání

Pro zvolenou dvojici států (dominantní směr, bez dominantního směru) porovnejte hodnoty délkového zkreslení u následujících kartografických zobrazení:

Konformní válcové zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami (Mercatorovo zobrazení):

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \cos u_0 \cos v, \\ y &= R \cdot \ln\big(\tan(\tfrac{u}{2} + 45°)\big). \end{aligned}$$

Konformní kuželové zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami (Lambertovo zobrazení):

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left(\frac{\tan(\frac{u_0}{2} + 45°)}{\tan(\frac{u}{2} + 45°)} \right)^n, \\ \varepsilon &= n \cdot v. \end{aligned}$$

Konformní azimutální zobrazení (sterografická projekce):

$$\begin{aligned} \rho &= 2R \cdot \tan\big(\tfrac{90° - u}{2}\big), \\ \varepsilon &= v. \end{aligned}$$

Kartografická zobrazení pro každý stát navrhněte v obecné poloze; parametry potřebné pro výpočet odvoďte z vhodného mapového podkladu.

Pro navrhovaná zobrazení volte dvě nezkreslené rovnoběžky tak, aby ve středu i na okraji zájmového území byly stejné absolutní hodnoty délkového zkreslení, tj.

$$m_r = m_r^j = 1 + \nu, \quad m_r^r = 1 - \nu.$$

Pro každou z variant na podkladové mapě se zakreslením státu vygenerujte ekvideformáty délkového zkreslení s vhodně zvoleným krokem.

V závěru proveďte diskuzi nad dosaženými hodnotami, pokuste se tyto výsledky zobecnit a rozhodnout, které zobrazení je pro každý ze států nejvhodnější.

Úhlové výpočty proveďte s přesností na minuty, výpočty zkreslení na 1×10^{-6}.

2 Popis a rozbor problému

Cílem úlohy je analyzovat vlastnosti konformních kartografických zobrazení pro dvě odlišná území: jedno s dominantním tvarem (dlouhé a úzké - bylo zvoleno Švédsko) a druhé bez výrazné orientace (bylo zvoleno Polsko). Pro každé území porovnáme tři základní typy zobrazení:

- **Válcové konformní zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami (Mercatorovo zobrazení)**
- **Kuželové konformní zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami (Lambertovo zobrazení)**
- **Azimutální konformní zobrazení (sterografická projekce)**

Hodnocení vychází z analýzy délkového zkreslení na okrajových rovnoběžkách území. Zvolíme vždy dvě nezkreslené rovnoběžky tak, aby hodnoty měřítka ve středu a na krajích území splňovaly:

$$m_r(m = j) = 1 + \nu, \quad m_r(m = r) = 1 - \nu,$$

kde ν označuje relativní zkreslení.

2.1 Použitá symbolika

R poloměr referenční koule

u, v zeměpisné souřadnice bodu P (šířka, délka)

x, y kartografické souřadnice obrazu P' v rovině mapy

u_0 šířka nezkreslené rovnoběžky,

u_1, u_2 šířky dvou nezkreslených rovnoběžek

u_k, v_k zeměpisné souřadnice kartografického pólu K

u_s, u_j zeměpisné šířky severního (u_s) a jižního (u_j) okraje území

$š, d$ kartografické souřadnice obecného bodu P v mapové rovině

$š_0, š_1, š_2$ kartografické šířky nezkreslených rovnoběžek odpovídající u_0, u_1, u_2

c konstanta zobrazení

2.2 Válcové konformní zobrazení (Mercator)

Zobrazovací rovnice Mercatorova zobrazení v obecné poloze mají tvar:

$$x = c \cos d$$
$$y = R \cdot \ln \tan \left(\frac{\check{s}}{2} + 45^\circ \right)$$

kde $c = R \cdot \cos \check{s}_0$. Nezkreslená rovnoběžka $\check{s}_0$ je volena tak, aby absolutní hodnota zkreslení ν byla na severním i jižním okraji stejná, tj. $m_r^s = m_r^j$ a zároveň na rovníku m_r^r také stejná. Platí vztah:

$$\cos \check{s}_0 = \frac{2 \cos \check{s}_s}{1 + \cos \check{s}_s}$$

Druhá nezkreslená rovnoběžka je osově symetrická k rovníku a její zeměpisná šířka tedy je $-\check{s}_0$.

Středem území je proložen kartografický rovník a dvě kartografické rovnoběžky jsou voleny tak, aby bylo území sevřeno do co nejužšího pásu. Na kartografickém rovníku jsou odečteny dva body

$$P_1 = [u_1, v_1], \quad P_2 = [u_2, v_2]$$

Pomocí nich lze určit zeměpisné souřadnice kartografického pólu $K = [u_k, v_k]$ dle vztahů:

$$\tan v_k = \frac{\tan u_1 \cos v_2 - \tan u_2 \cos v_1}{\tan u_2 \sin v_1 - \tan u_1 \sin v_2}$$

$$\tan u_k = -\frac{\cos(v_1 - v_k)}{\tan u_1} = -\frac{\cos(v_2 - v_k)}{\tan u_2}$$

Na okrajové rovnoběžce zvolíme libovolný bod $P_3 = [u_3, v_3]$ a kartografickou šířku této rovnoběžky určíme ze vztahu:

$$\check{s}_s = \arcsin[\sin u_3 \sin u_k + \cos u_3 \cos u_k \cos(v_3 - v_k)]$$

Měřítko délek m v libovolném bodě s kartografickou šířkou $\check{s}$ se určí jako:

$$m = m_p = m_r = \frac{\cos \check{s}_0}{\cos \check{s}}$$

Zkreslení délek ν pak vychází ze vztahu:

$$\nu = m - 1$$

2.3 Kuželové konformní zobrazení

Zobrazovací rovnice Lambertova kuželového konformního zobrazení v obecné poloze mají tvar:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{\tan\left(\frac{\check{s}_0}{2} + 45^\circ\right)}{\tan\left(\frac{\check{s}}{2} + 45^\circ\right)} \right)^c$$
$$\varepsilon = c \cdot d$$

Konstanty ρ_0 a c určíme z následujících podmínek. První podmínka říká, že zkreslení délek na severním a jižním okraji má být stejné: $m_r^s = m_r^j = 1 + \gamma$, zatímco ve středu má být $m_r^0 = 1 - \gamma$. Sečtením těchto vztahů dostaneme rovnici:

$$c\rho_s \cos \check{s}_0 + c\rho_0 \cos \check{s}_s = 2R \cos \check{s}_0 \cos \check{s}_s$$

Po dosazení příslušných hodnot lze ρ_0 spočítat následovně:

$$\rho_0 = \frac{2R \cos \check{s}_0 \cos \check{s}_s \tan^c\left(\frac{\check{s}_s}{2} + 45^\circ\right)}{c\left[\cos \check{s}_0 \tan^c\left(\frac{\check{s}_0}{2} + 45^\circ\right) + \cos \check{s}_s \tan^c\left(\frac{\check{s}_s}{2} + 45^\circ\right)\right]}$$

Konstanta c se následně vypočítá dosazením do podmínky $m_r^s = m_r^j = 1+\gamma$ podle vztahu:

$$c = \frac{\log \cos \check{s}_s - \log \cos \check{s}_j}{\log \tan\left(\frac{\check{s}_j}{2} + 45^\circ\right) - \log \tan\left(\frac{\check{s}_s}{2} + 45^\circ\right)}$$

Na základě hodnoty c lze určit $\check{s}_0$ ze vztahu:

$$\sin \check{s}_0 = c$$

Zadané území vymezíme pomocí dvou soustředných kružnic představujících kartografické rovnoběžky. Střed těchto kružnic určuje kartografický pól K a jeho souřadnice u_k, v_k stanovíme z mapy. Na každé z rovnoběžek pak odečteme souřadnice libovolných bodů

$P_1 = [u_1, v_1]$ a $P_2 = [u_2, v_2]$. Kartografické šířky těchto rovnoběžek spočítáme:

$$\check{s}_s = \arcsin[\sin u_1 \sin u_k + \cos u_1 \cos u_k \cos(v_1 - v_k)]$$

$$\check{s}_j = \arcsin[\sin u_2 \sin u_k + \cos u_2 \cos u_k \cos(v_2 - v_k)]$$

Díky těmto šířkám vypočítáme c a následně dosadíme do zobrazovacích rovnic, čímž lze vypočítat ρ_s a ρ_j. Délkové zkreslení $\nu = m - 1$ na okrajových rovnoběžkách získáme z následující rovnosti:

$$m = m_p = m_r = \frac{c\rho_s}{R \cdot \cos u_s} = \frac{c\rho_j}{R \cdot \cos u_j} = 1 + \gamma$$

2.4 Azimutální konformní zobrazení (sterografická projekce)

Zobrazovací rovnice pro stereografickou projekci v obecné poloze jsou následující:

$$\begin{aligned} \rho &= c \cdot \tan\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ \varepsilon &= d \end{aligned}$$

Zde c je konstanta a $\psi = 90° - \check{s}$ označuje doplněk kartografické šířky k pravému úhlu. Aby rovina promítání protínala sférický povrch v jediné nezkreslené rovnoběžce $\check{s}_0$, použije se:

$$\psi_0 = 90° - \check{s}_0$$

a konstanta c se stanoví podle vztahu:

$$c = 2R\cos^2\left(\frac{\psi_0}{2}\right)$$

V případě, že je zobrazení definováno pomocí jediné nezkreslené rovnoběžky, přepisují se rovnice jako:

$$\begin{aligned} \rho &= 2R\cos^2\left(\frac{\psi_0}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ \varepsilon &= d \end{aligned}$$

Zvolené území obklopíme co nejmenší kružnicí představující kartografickou rovnoběžku.

Střed této kružnice určuje kartografický pól K s určenými souřadnicemi u_k, v_k. Na této kružnici vybereme bod $P_1 = [u_1, v_1]$ a kartografickou šířku $\check{s}_j$ získáme ze vztahu:

$$\check{s}_j = \arcsin[\sin u_1 \sin u_k + \cos u_1 \cos u_k \cos(v_1 - v_k)]$$

$$\psi_j = 90^\circ - \check{s}_j$$

Pro minimalizaci zkreslení nepožadujeme nulové zkreslení v pólu, ale určujeme ho jako $\mu = 1 - \gamma$, kde μ je multiplikativní konstanta. Potom platí a lze určit nezkreslenou rovnoběžku:

$$m_r(\psi = 0) = \frac{\cos^2\left(\frac{\psi_0}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} = \mu$$

$$\mu = \cos^2\left(\frac{\psi_0}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \psi_0 = 2\arccos\sqrt{\mu}$$

Požadujeme-li stejné absolutní zkreslení na okraji území, platí:

$$m_r(\psi = 0) = m_r^p = 1 - \gamma$$

$$m_r(\psi_j) = m_r^j = 1 + \gamma$$

Součtem obou podmínek získáme vztah pro výpočet μ:

$$\mu = \frac{2\cos^2\left(\frac{\psi_j}{2}\right)}{1 + \cos^2\left(\frac{\psi_j}{2}\right)}$$

Nakonec určíme hodnotu zkreslení na okrajové rovnoběžce ψ_j ze vztahu pro měřítko délek:

$$m_r = \frac{\cos^2\left(\frac{\psi_0}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} = \frac{\mu}{\cos^2\left(\frac{\psi_j}{2}\right)}$$

3 Vlastní postup

Pro účely porovnání vlastností jednoduchých konformních kartografických zobrazení byla zvolena dvojice evropských států s odlišným tvarem území: Švédsko jako příklad země s výrazně protáhlým severojižním směrem a Polsko jako stát bez výrazného dominantního směru. Z databáze Natural Earth Data byly převzaty tvary těchto států ve formátu *shapefile* v generalizované podobě. V softwaru ArcGIS Pro byly z vytvořených přímek a kružnic odečteny souřadnice bodů potřebných ke konstrukci vybraných zobrazení. Byly využity geoprocessingové nástroj jako Minmum Bounding Geometry, Linear Directional Mean, Mean Center a další.

Provedení jednotlivých zobrazení, výpočet hodnot délkového zkreslení a vykreslení ekvideformát bylo následně realizováno v softwaru Matlab. Pro potřeby vizualizace států v Matlabu byl vytvořen konvertor polygonů z formátu *shapefile* do prostého textového souboru, ze kterého byly souřadnice načítány do Matlabu.

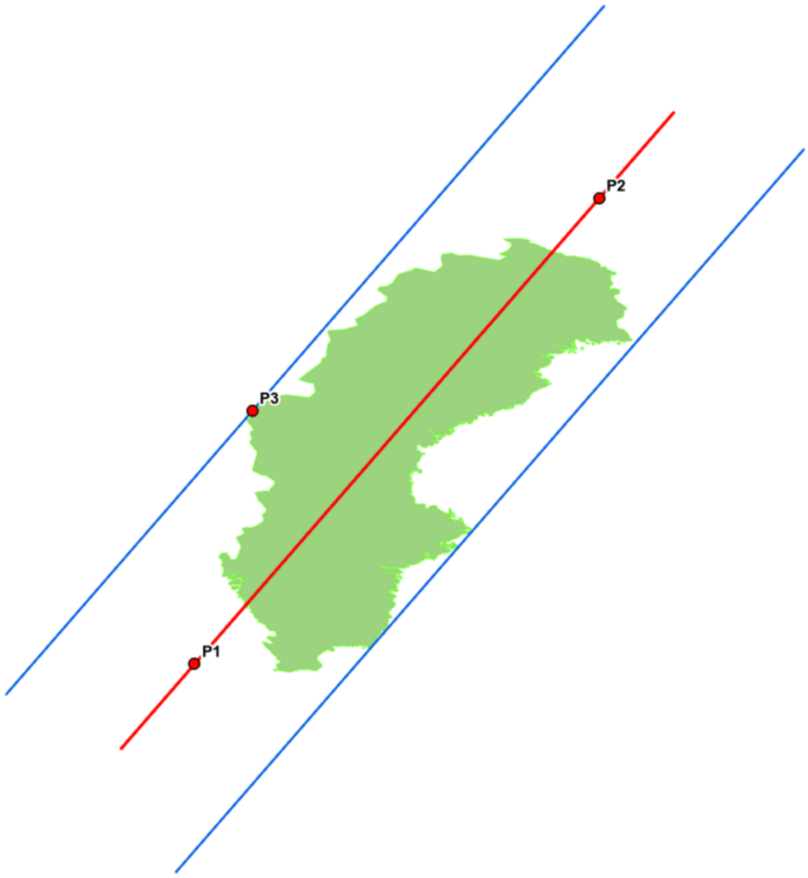
3.1 Konformní válcové zobrazení (Mercatorovo)

Pro návrh válcového zobrazení byla u každého státu určena úsečka, která prochází jeho středem a představuje kartografický rovník. K této úsečce byly následně určeny dvě kartografické rovnoběžky tak, aby území státu bylo zachyceno v co nejužším pásu. Poté byly zvoleny tři referenční body: body P1 a P2, které leží na kartografickém rovníku, a bod P3, který se nachází na jedné z okrajových rovnoběžek.

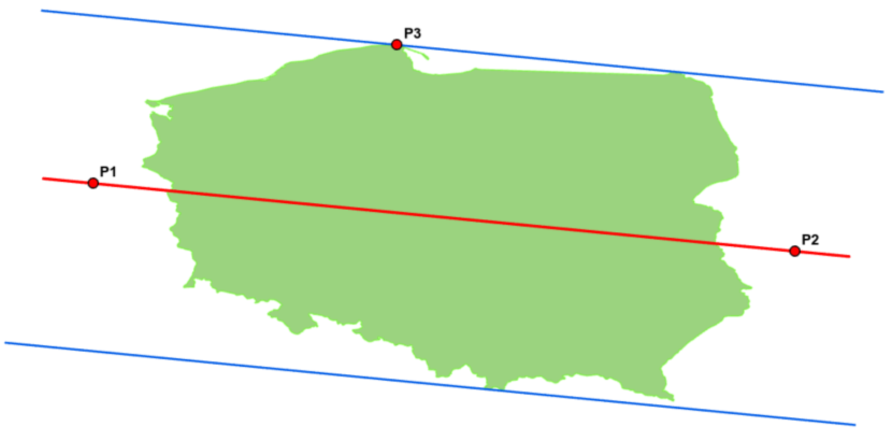
Znázornění zakreslených rovnoběžek a bodů je uvedeno na obrázku 1 pro Švédsko a na obrázku 2 pro Polsko. Přesné souřadnice všech vytvořených bodů pro oba státy jsou specifikovány v tabulce 1.

	Švédsko		**Polsko**	
bod	**u**	**v**	**u**	**v**
P_1	55,589741°	10,336312°	52,566676°	13,326047°
P_2	70,314434°	23,129377°	51,452568°	24,850801°
P_3	63,598135°	12,170295°	54,838324°	18,316905°

Tabulka 1: Souřadnice bodů pro konstrukci válcového zobrazení



Obrázek 1: Body a rovnoběžky pro Švédsko



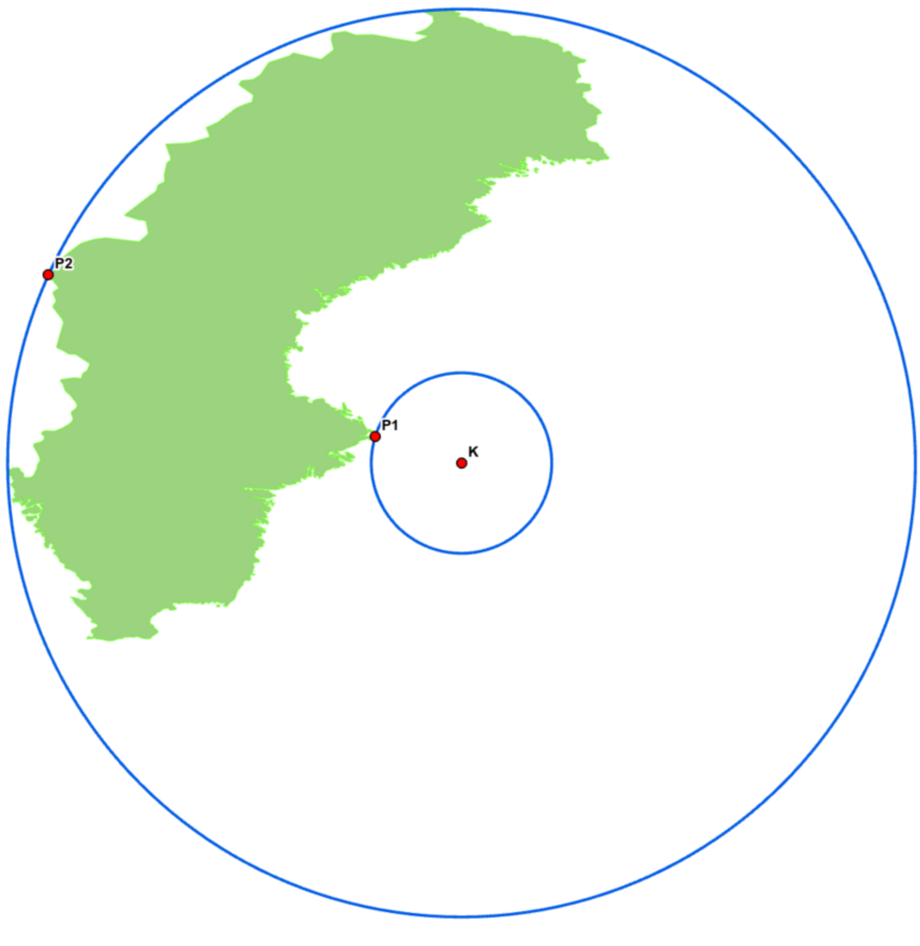
Obrázek 2: Body a rovnoběžky pro Polsko

3.2 Konformní kuželové zobrazení (Lambertovo)

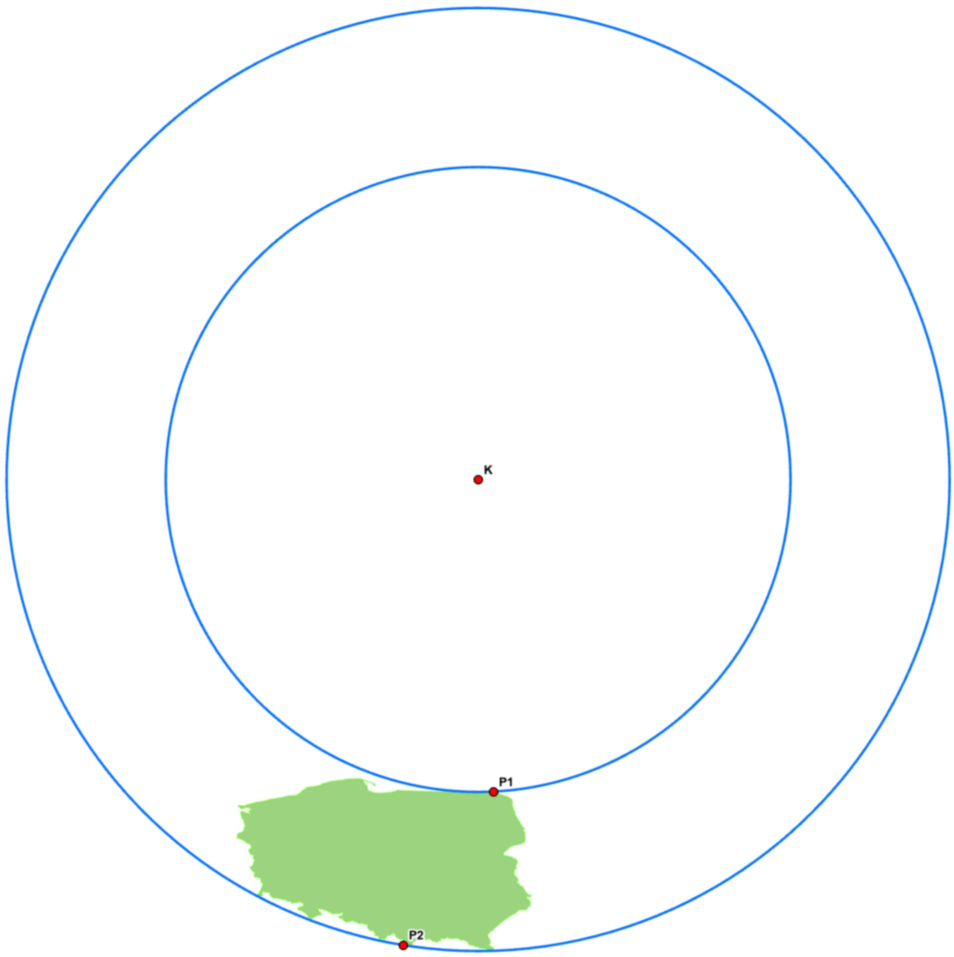
Pro navržení kuželového zobrazení bylo území obou států sevřeno do co nejužšího pásu dvěma soustřednými kružnicemi. Tyto kružnice představují kartografické rovnoběžky a jejich střed kartografický pól (K). Na severní kartografické rovnoběžce byl zvolen bod P1, na jižní P2. Zákres situace pro Švédsko a Polsko je znázorněn obrázkem 3, respektive 4. Tabulka 2 zachycuje souřadnice bodů K, P1 a P2.

	Švédsko		**Polsko**	
bod	**u**	**v**	**u**	**v**
K	59,201226°	20,963677°	65,003808°	22,327124°
P_1	59,771587°	19,088030°	54,403450°	22,840135°
P_2	63,288903°	11,992425°	49,188162°	19,785903°

Tabulka 2: Souřadnice bodů pro konstrukci kuželového zobrazení



Obrázek 3: Body a rovnoběžky pro Švédsko



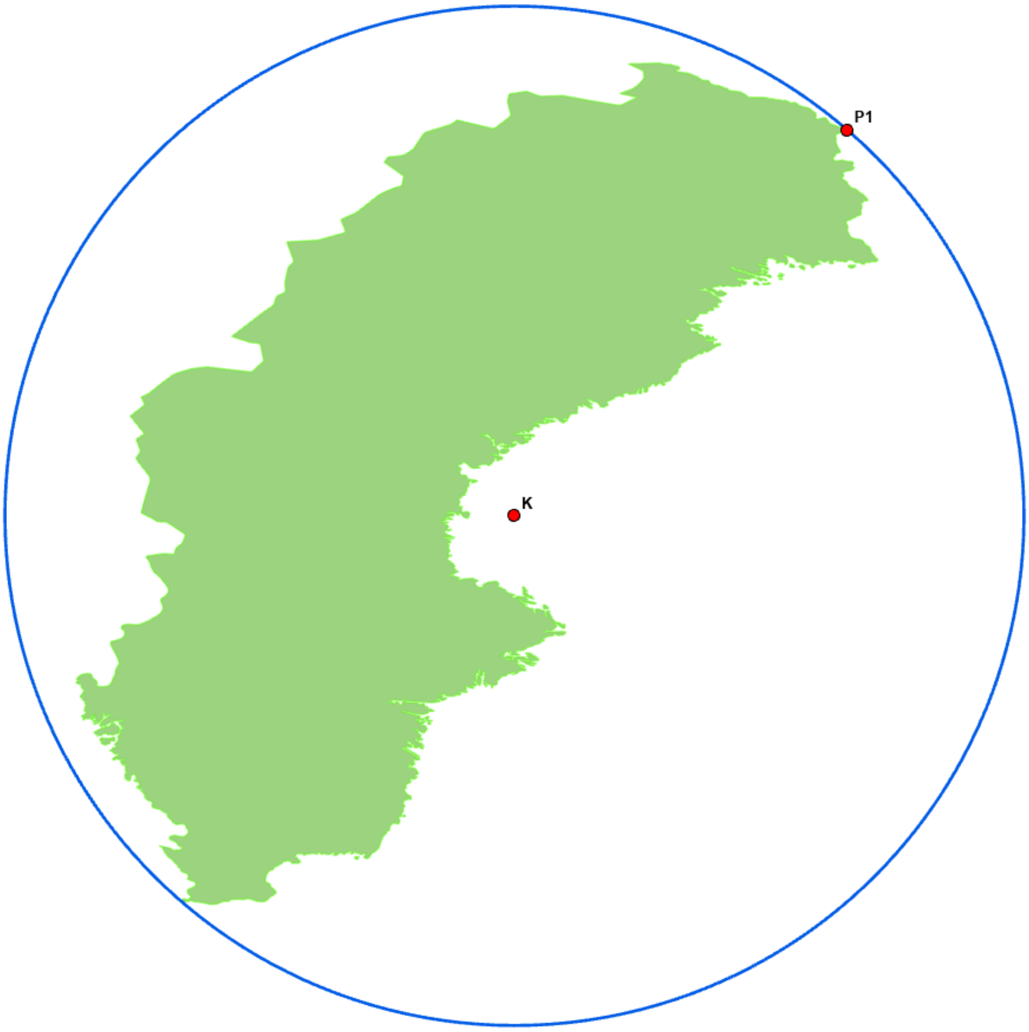
Obrázek 4: Body a rovnoběžky pro Polsko

3.3 Konformní azimutální zobrazení (Stereografická projekce)

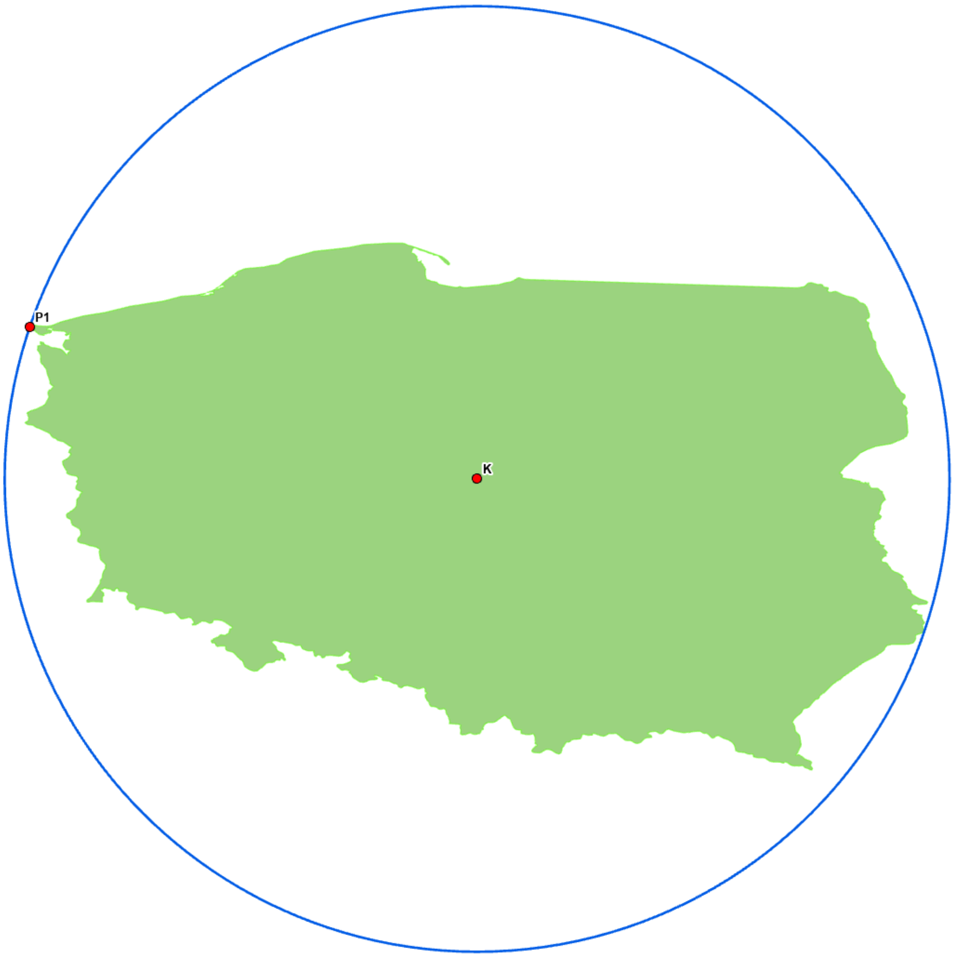
Pro účely konstrukce konformního azimutálního zobrazení byla pro každý ze států nalezena opsaná kružnice s nejmenším možným poloměrem. Její střed reprezentuje kartografický pól K a zvolený bod na ní ležící je označen jako bod P1. Zákres situace pro Švédsko a Polsko je znázorněn obrázkem 5, respektive 6. Tabulka 3 zachycuje souřadnice bodů K a P1.

	Švédsko		**Polsko**	
bod	**u**	**v**	**u**	**v**
K	61,666491°	18,247463°	52,223661°	19,141498°
P_1	67,950427°	23,662152°	53,906478°	14,175289°

Tabulka 3: Souřadnice bodů pro konstrukci azimutálního zobrazení



Obrázek 5: Body a rovnoběžka pro Švédsko

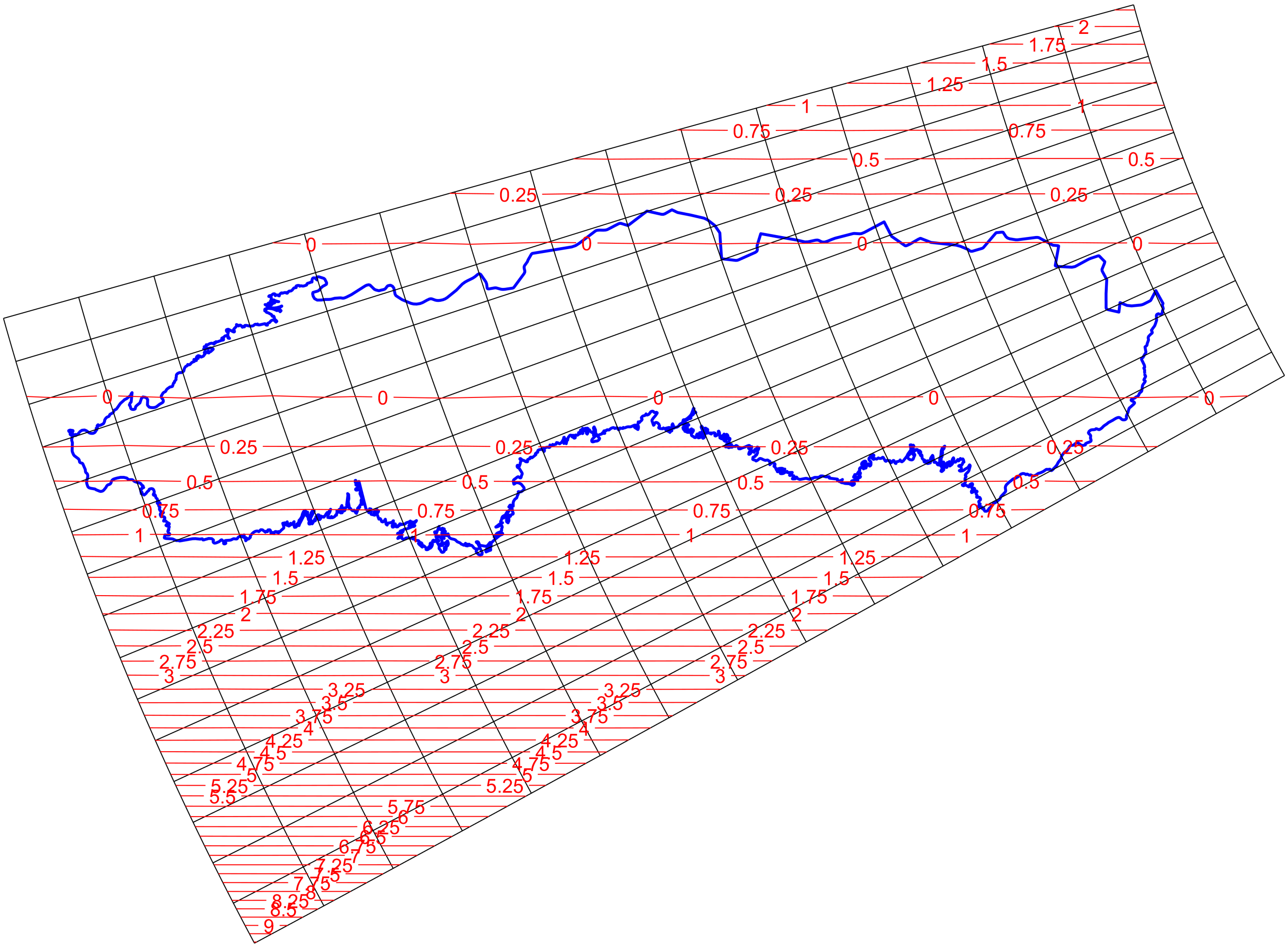


Obrázek 6: Body a rovnoběžka pro Polsko

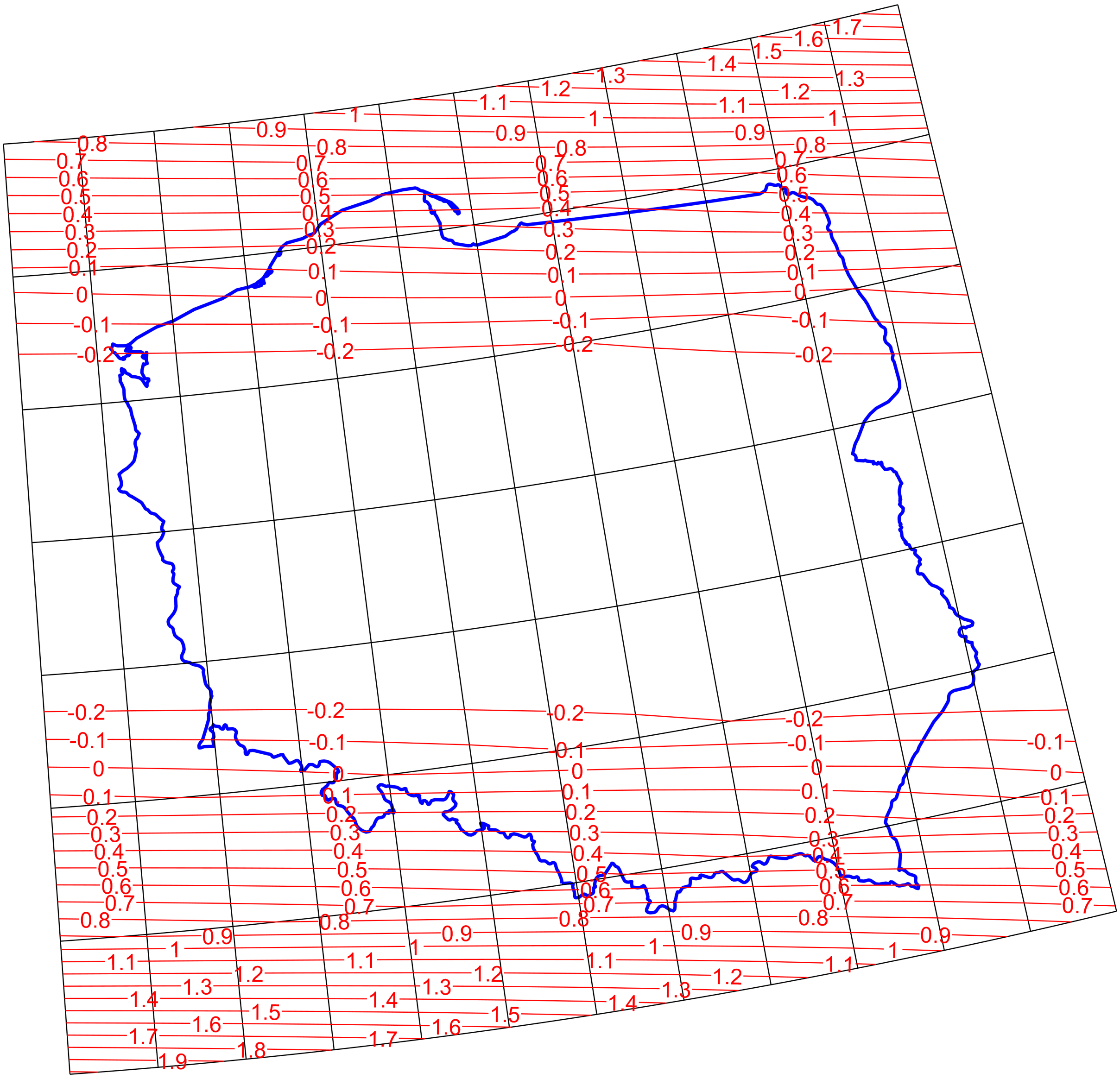
Pro každé zobrazení každého státu byl vytvořen vlastní skript v softwaru Matlab, který dané zobrazení realizuje a vizualizuje výsledky (včetně vizualizace ekvideformát). Takové skripty nesou názvy jako *sweden_mercator.m*, *poland_stereo.m* apod.

4 Výsledky

Každý stát byl v každém ze zobrazení vizualizován s doplněnými ekvideformáty, tj. křivkami stejného délkového zkreslení. Tato zobrazení jsou zachycena na obrázcích 7 až 12. V tabulkách 4, 5 a 6 jsou poté uvedena délková zkreslení ve zvolených bodech.



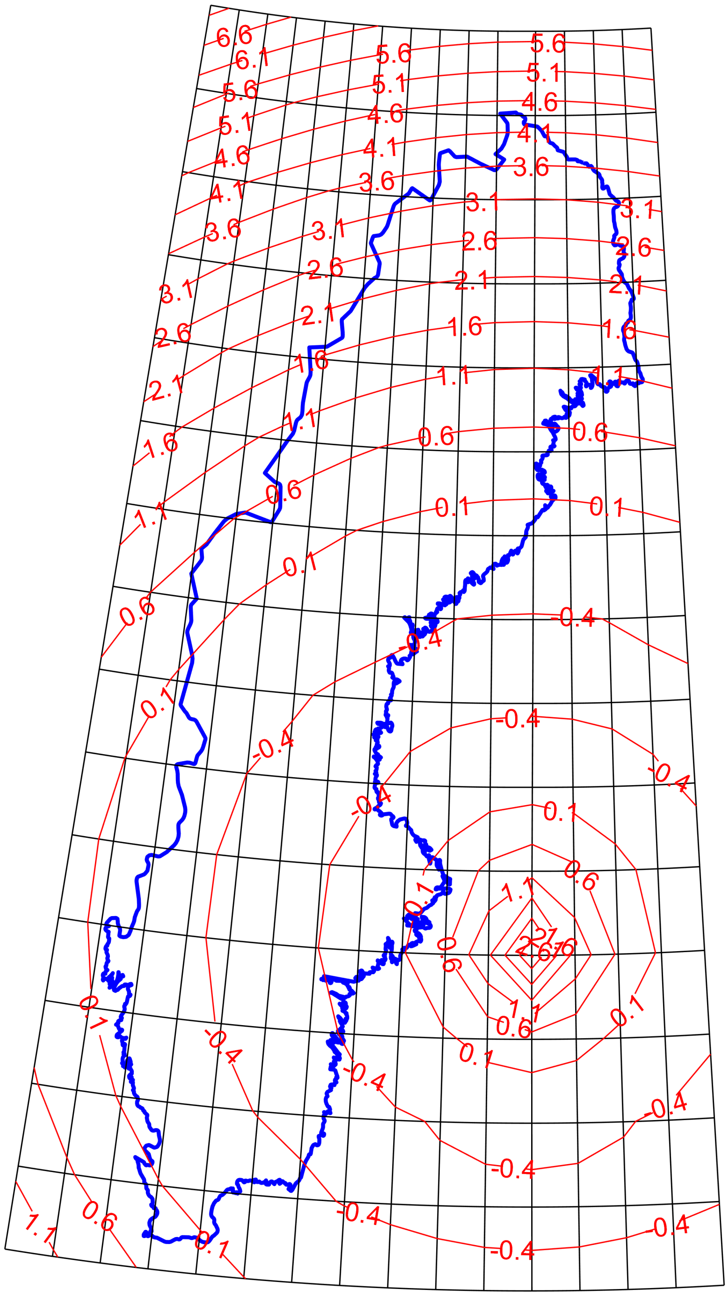
Obrázek 7: Válcové zobrazení s ekvideformáty - Švédsko



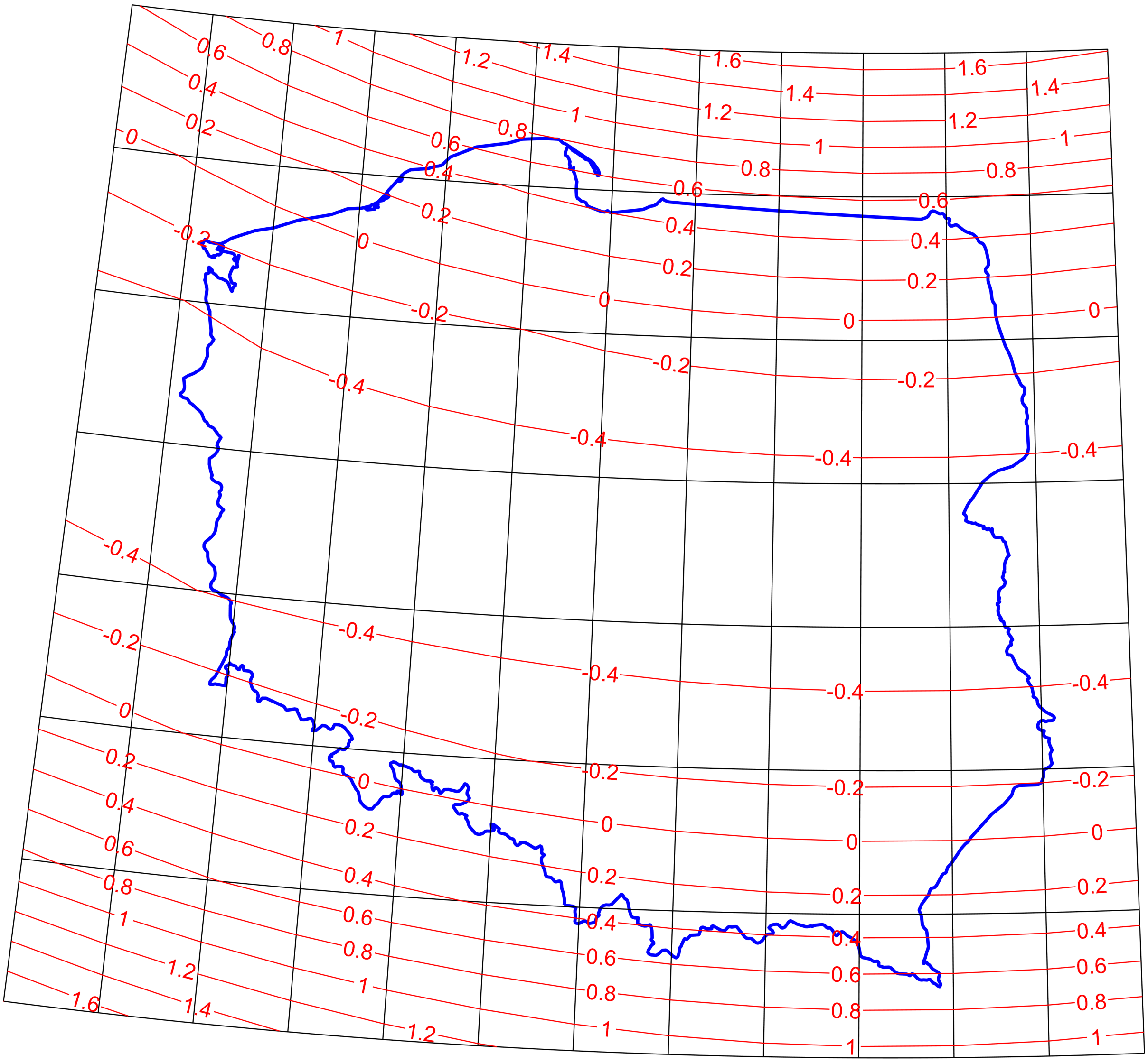
Obrázek 8: Válcové zobrazení s ekvideformáty - Polsko

bod	**Švédsko**	**Polsko**
P_1	-0.151842	-0.507906
P_2	-0.151842	-0.507906
P_3	0.151842	0.507906

Tabulka 4: Délková zkreslení pro válcové zobrazení (zaokrouhleno na $1 \cdot 10^{-6}$)



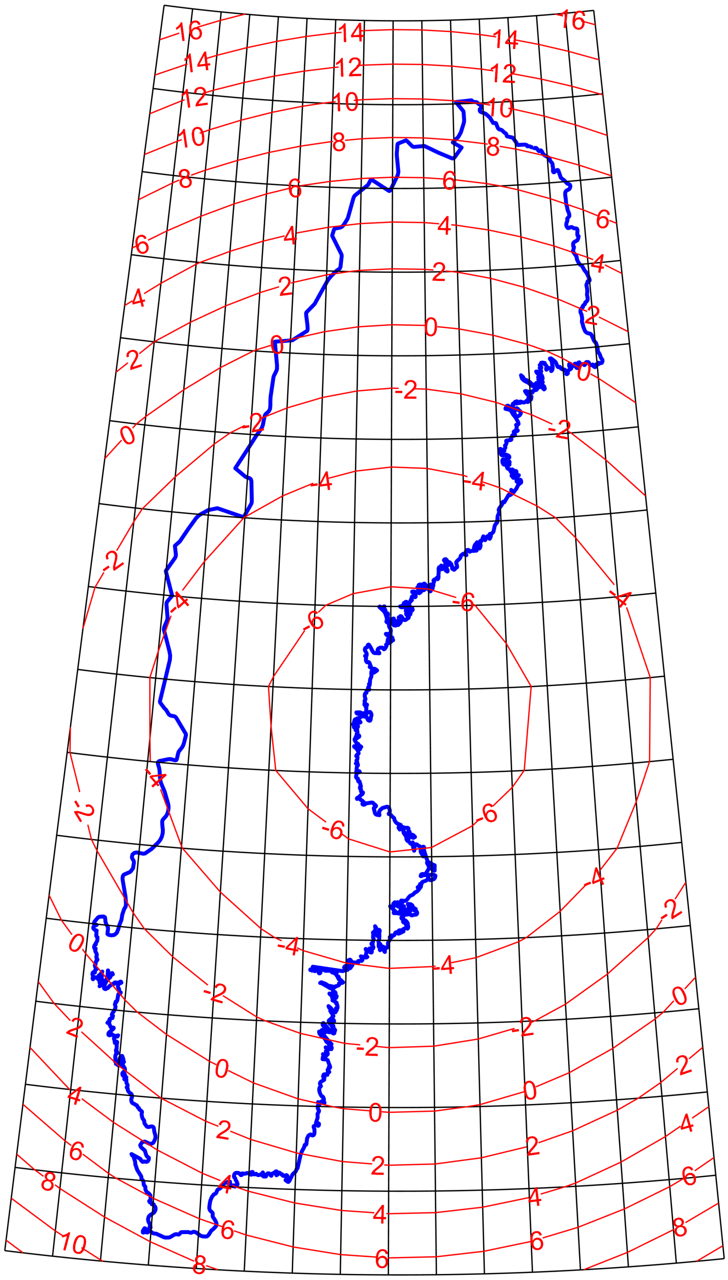
Obrázek 9: Kuželové zobrazení s ekvideformáty - Švédsko



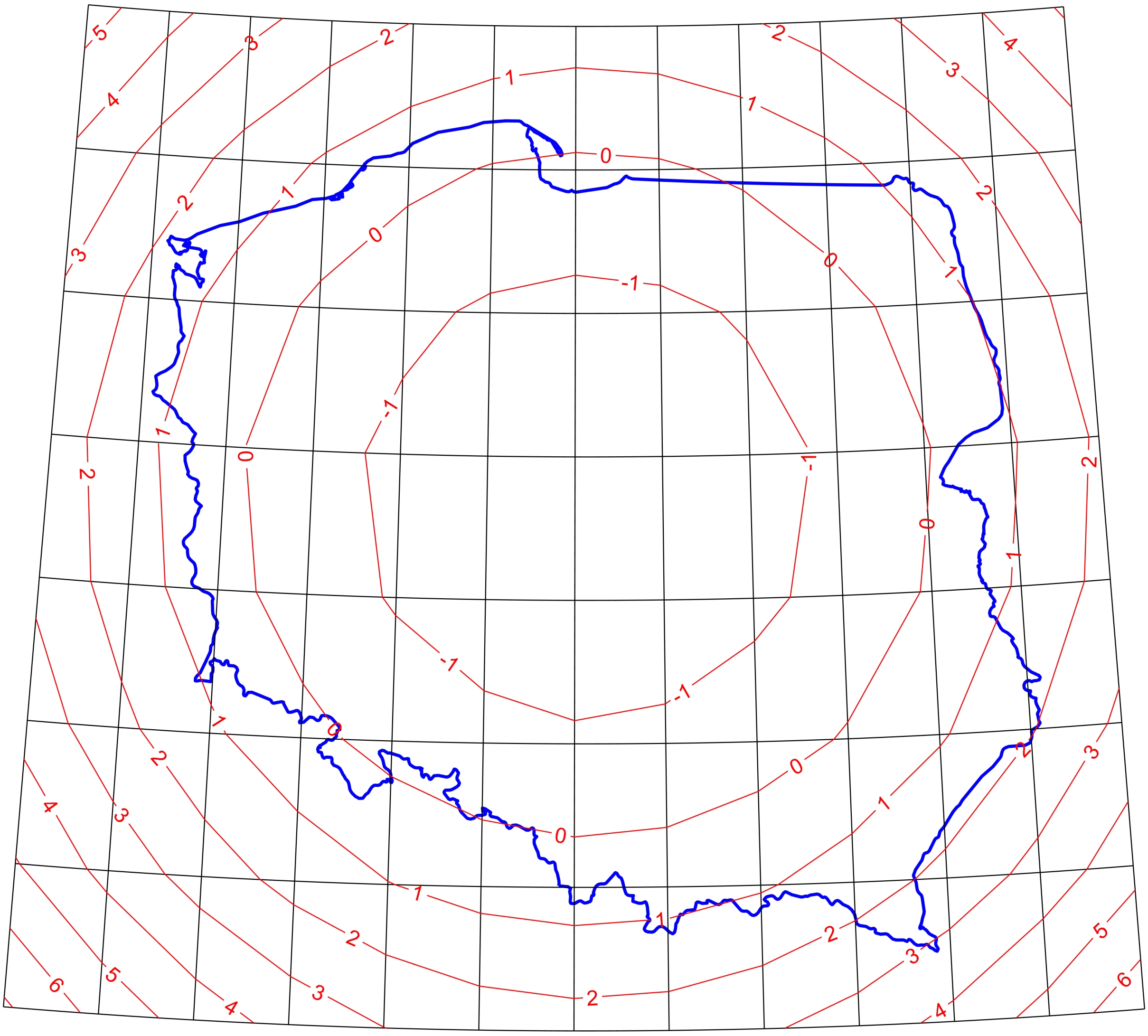
Obrázek 10: Kuželové zobrazení s ekvideformáty - Polsko

bod	**Švédsko**	**Polsko**
P_1	0.474439	0.531079
P_2	0.474439	0.531079
střed území	-0.474439	-0.531079

Tabulka 5: Délková zkreslení pro kuželové zobrazení (zaokrouhleno na $1 \cdot 10^{-6}$)



Obrázek 11: Azimutální zobrazení s ekvideformáty - Švédsko



Obrázek 12: Azimutální zobrazení s ekvideformáty - Polsko

bod	**Švédsko**	**Polsko**
P_1	1.703735	0.446701
pól	-1.703735	-0.446701
nezkreslená rovnoběžka	0	0

Tabulka 6: Délková zkreslení pro azimutální zobrazení (zaokrouhleno na $1 \cdot 10^{-6}$)

5 Závěr

Cílem úlohy bylo porovnat vlastnosti vybraných jednoduchých konformních kartografických zobrazení a vyhodnotit jejich vhodnost pro zobrazení území s výrazně protáhlým tvarem a území bez dominantního směru. Posuzována byla tři konformní zobrazení v obecné poloze: válcové zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami, kuželové zobrazení rovněž se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami a azimutální zobrazení - stereografická projekce.

Jako zástupce protáhlého území bylo zvoleno Švédsko, pro území bez dominantního směru tvaru pak Polsko. U všech tří zobrazení byla pro oba státy vypočtena teoretická maximální délková zkreslení a vygenerovány odpovídající ekvideformáty. Na základě těchto výstupů bylo možné potvrdit předpoklad, že pro území protáhlého charakteru jsou nejvhodnější válcová a kuželová zobrazení, zatímco pro území bez dominantního směru je vhodnější stereografická projekce.

Přílohou této zprávy jsou v textu jmenované skripty ve formátu matlab.

6 Zdroje

Zdrojem všech uvedených informací, rovnic a předpisů byl návod ke cvičení z matematické kartografie k úloze 3 dostupný z

https://web.natur.cuni.cz/ bayertom/images/courses/mmk/mmk_cv_4_navod.pdf.