Matematická kartografie

Úloha 4
Hodnocení kartografických zobrazení s využitím variačních kritérií

František Macek, Josef Zátka

Univerzita Karlova

Přírodovědecká fakulta

Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie

Praha, 2025

1 Zadání

Na základě globálních variačních kritérií proveďte zhodnocení níže uvedených zobrazení a rozhodněte o jejich vhodnosti (či nevhodnosti) pro mapy velkých územních celků.

Přehled lokálních variačních kritérií v bodě $P = [u, v]$:

- Airyho kritérium:
$$h^2(u,v) = \frac{(a-1)^2 + (b-1)^2}{2},$$
- komplexní kritérium:
$$h^2(u,v) = \frac{|a-1| + |b-1|}{2} + \frac{a}{b} - 1.$$

Pro kartografická zobrazení volená v normální poloze spočtěte hodnoty lokálních kritérií $h^2(u,v)$ v uzlových bodech geografické sítě pokrývajících zadané území a jeho nejbližší okolí s kroky $\Delta u = \Delta v = 10^\circ$ (resp. s polovičním krokem, je-li třeba), území by mělo být pokryto alespoň 30 uzlovými body. Při výpočtu využijte osové symetrie geografické sítě dle rovníku či základního poledníku. Z hodnot lokálních kritérií $h^2(u,v)$ v uzlových bodech určete pro každé kartografické zobrazení hodnoty globálních kritérií.

Globální variační kritérium H^2
$$H^2 = \frac{1}{(u_2-u_1)(v_2-v_1)} \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} h^2 \cos u \, dv \, du,$$

nahraďte diskrétními vztahy, uvažujte neváženou i váženou variantu
$$H_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^2(u_i, v_i), \quad H_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i h^2(u_i, v_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

kde váha $p_i = \cos u_i$.

Přehled analyzovaných kartografických zobrazení:

- Bonneovo,
- Mercator-Sansonovo,
- Eckertovo V.,
- Winkel-Tripel,

- Hammer-Aitoffovo.

V uzlových bodech geografické sítě vypočtěte měřítkové číslo $M(u,v)$ mapy jako funkci polohy
$$M(u,v) = \frac{M}{\max_{\forall A} m(u,v,A)} = \frac{M}{a(u,v)},$$
vygenerujte také jeho izočáry. Výchozí hodnotu měřítkového čísla volte pro formát A4, pro mapu planisféry např. $M = 100000000$. Výpočty proveďte na jednotkové kouli, zeměpisnou šířku u_0 nezkreslené rovnoběžky volte tak, aby procházela (stejně jako základní poledník) středem zobrazovaného území.

V přehledných tabulkách uveďte hodnoty globálních kritérií (vážená i nevážená varianta) a rozhodněte, kte

2 Popis a rozbor problému

Při znázorňování rozsáhlých geografických celků hodnotíme kvalitu zobrazení nejen podle míry zkreslení na jejich okrajích, ale zaměřujeme se na celkovou přesnost zobrazení v celé ploše mapy. Tento přístup zohledňuje deformace vzdáleností, úhlů i ploch. Pro takové analýzy využíváme pokročilá variační kritéria, která umožňují komplexnější hodnocení jednotlivých kartografických zobrazení.

2.1 Variační kritéria

Základním parametrem pro posouzení zobrazení je měřítko délek m, které určujeme ve směrech poledníků a rovnoběžek. U většiny zobrazení, kromě jednoduchých nebo konformních, nejsou jeho hodnoty extrémní, a proto je vhodnější používat poloosy a, b Tissotovy elipsy. Tyto poloosy jsou orientovány ve směrech azimutů A_1, A_2, přičemž první azimut se určuje podle vztahu

$$A_1 = \frac{\arctan\left(\frac{p}{m_p^2 - m_r^2}\right)}{2}.$$

a druhý azimut je k němu kolmý:

$$A_2 = A_1 + \frac{\pi}{2}.$$

Poloosa a udává maximální délkové zkreslení, zatímco poloosa b minimální. Hodnoty těchto poloos získáme dosazením azimutů do obecného vzorce pro výpočet délkového měřítka:

$$m^2(u, v, A) = m_p^2 \cdot \cos^2 A + m_r^2 \cdot \sin^2 A + p \cdot \cos A \cdot \sin A,$$

kde koeficient p je definován jako

$$p = \frac{2(f_u f_v + g_u g_v)}{R^2 \cos u}.$$

Z toho pak plyne:

$$a = \max(m(u, v, A_1), m(u, v, A_2)), \quad b = \min(m(u, v, A_1), m(u, v, A_2)).$$

Poloosy a a b slouží jako klíčové vstupní veličiny pro výpočet variačních kritérií v bodě $P = [u, v]$.

2.1.1 Airyho kritérium

Toto kritérium reflektuje především délkové zkreslení a nezohledňuje úhlové deformace. Jeho definice je:

$$h^2(u, v) = \frac{1}{2} \left[(a-1)^2 + (b-1)^2 \right].$$

2.1.2 Komplexní kritérium

Komplexní kritérium přidává do výpočtu člen a/b, a tím zohledňuje jak délkové, tak i úhlové zkreslení:

$$h^2(u, v) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{b} - 1 \right)^2 + (ab-1)^2 \right]$$

2.1.3 Globální kritérium

Globální kritérium vyjadřuje střední hodnotu $h^2(u, v)$ v oblasti Ω ohraničené okrajovými rovnoběžkami u_1, u_2 a poledníky v_1, v_2:

$$H^2 = \frac{1}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)} \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} h^2 \cos u \, du \, dv.$$

V praxi se často používá diskretizovaná forma, která představuje aritmetický průměr hodnot v uzlových bodech:

$$H^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h^2(u_i, v_i).$$

Pro snížení vlivu obastí blízko pólů se využívá vážený průměr:

$$H^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i h^2(u_i, v_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

kde váha p_i je rovna $\cos u_i$.

2.2 Měřítkové číslo mapy M

Měřítkové číslo mapy M je závislé na poloze a je dáno vztahem:

$$M(u, v) = \frac{M}{\max_{\forall} Am(u, v, A)} = \frac{M}{a(u, v)}.$$

Toto měřítko se v rámci mapového pole mění a při jeho výpočtu v jednotlivých uzlových bodech lze tyto změny znázornit pomocí izočar.

2.3 Analyzovaná kartografická zobrazení

V této úloze byla vyhodnocena vhodnost pěti následujících zobrazení:

2.3.1 Bonneovo zobrazení

Bonneovo zobrazení patří mezi nepravá kuželová zobrazení. Je ekvivalentností. Je ekvidistantní v ovnoběžkách, kde má jednu nezdeformovanou rovnoběžku u_0. Využívá se hlavně pro zobrazení oblastí v blízkosti základního poledníku a rovníku. Zobrazovací rovnice jsou:

$$x = R\left(\cos u_0 - (u_0 - u)\sin\frac{v\cos u}{\cot u_0 + u_0 - u}\right), y = R(u_0 - u)\cos\frac{v\cos u}{\cot u_0 + u_0 - u}.$$

Měřítko délek:

$$m_p = \sqrt{1 - (\varepsilon - v\sin u)^2},$$

kde:

$$\rho = \rho_0 + R(u_0 - u), \quad \varepsilon = \frac{Rv\cos u}{\rho}.$$

2.3.2 Mercator-Sansonovo zobrazení

Jde o nepravé válcové sinusoidální zobrazení. Je ekvivalentní a ekvidistantní v rovnoběžkách, přičemž zachovává nezkreslený základní poledník. Poledníky jsou zobrazovány jako sinusoidy, rovnoběžky jako úsečky. Jeho využití je časté v atlasech pro znázornění kontinentů nebo nebeské sféry. Nevýhodou je velké zkreslení v polárních oblastech. Zobrazovací rovnice jsou:

$$x = Rv\cos u, \quad y = Ru.$$

2.3.3 Zobrazení Eckert V.

Eckert V. je pseudokuželové vyrovnávací zobrazení se dvěma nezdeformovanými rovnoběžkami. Střední poledník je úsečkou o délce poloviny rovníku, ostatní poledníky jsou sinusoidy, rovnoběžky pak úsečky. Póly se zobrazují jako úsečky s poloviční délkou rovníku. Souřadnice x, y jsou aritmetickým průměrem mezi dvěma následujícími zobrazeními:

$$x = Rv\cos u, \quad y = Ru \quad \text{(Mercator-Sansonovo)},$$

$$x = Rv, \quad y = Ru \quad \text{(Marinovo ekvidistantní válcové)}.$$

2.3.4 Zobrazení Winkel-Tripel

Winkel-Tripel je modifikované azimutální vyrovnávací zobrazení. Střední poledník, rovník i póly se zobrazují jako úsečky, ostatní rovnoběžky a poledníky jako křivky. Rovnice vychází z průměrování Aitoffova a Marinova zobrazení, jejichž zobrazovací rovnice jsou:

Aitoffovo:

$$x = 2R\theta\sqrt{\rho}, \quad y = R\theta\frac{\sin u}{\sin\theta},$$

kde:

$$\theta = \arccos(\cos u \cos\frac{v}{2}), \quad \rho = 1 - \left(\frac{\sin u}{\sin\theta}\right)^2.$$

Marinovo:

$$x = Rv, \quad y = Ru.$$

2.3.5 Hammer-Aitoffovo zobrazení

Hammer-Aitoffovo zobrazení je odvozeno z Lambertova azimutálního ekvivalentního zobrazení, které je promítnuto na rovinu skloněnou o 60°, řadí se tak mezi modifikovaná azimutální zobrazení. Střední poledník je úsečkou o poloviční délce rovníku (ten je taky úsečkou), ostatní rovnoběžky a poledníky jsou složitými křivkami. Zobrazovací rovnice jsou:

$$x = \frac{2R\sin u}{\sqrt{2(1+\cos u\cos\frac{v}{2})}}, \quad y = \frac{2\sqrt{2}R\cos u\cos\frac{v}{2}}{\sqrt{1+\cos u\cos\frac{v}{2}}}.$$

3 Vlastní postup

Pro hodnocení pěti vybraných zobrazení byla zvoleno území kontinentální Jižní Ameriky. Výchozí hodnota měřítkového čísla M byla zvolena na 30 000 000, vykreslování ozočar probíhalo po 1 000 000.

V programovacím jazyce Python byl vytvořen skript `mk.py`, který obsahuje funkci `project`. Tato funkce využívá knihovnu `PyProj`, konkrétně třídu `Proj`, pro převod zeměpisných souřadnic podle zvoleného kartografického zobrazení. Současně vrací délky hlavních poloos Tissotovy elipsy zkreslení.

V prostředí Matlab byly vytvořeny tři skripty, které zajišťují výpočet variačních kritérií pro jednotlivá zobrazení a jejich následnou vizualizaci — tedy vykreslení analyzovaného území a izočar měřítkového čísla.

Skript `uv_sd.m` obsahuje funkce pro převod souřadnic do obecné polohy vůči zvolenému kartografickému pólu. Skript `graticule_proj.m` využívá funkci `project` a slouží k vytvoření geografické sítě).

Hlavním skriptem je `optimal_projections_pyproj.m`, který zajišťuje:

- nastavení cesty k Python interpretátoru,
- definici vstupních parametrů pro analyzované území (v našem případě Jižní Ameriku),
- výběr z kartografických zobrazení - zvolené stačí odkomentovat,
- vytvoření sítě bodů, ve kterých se počítají variační kritéria,
- výpočet měřítkového čísla a jeho vykreslení ve formě izočar,
- vykreslení geografické sítě a hranic zvoleného území - ty se načítají z textového souboru, který byl vytvořen ze souboru formátu *shapefile*.

Tento skript byl spuštěn pro všech pět analyzovaných zobrazení. Okrajové poledníky analyzované sítě byly 90° z. d. a 30° z. d., okrajovými rovnoběžkami byly zvoleny 60° j. š. a 20° s. š. Nezkresleným poledníkem je tedy 60° z. d., v Bonneově zobrazení, ve kterém ji lze v knihovně pyproj definovat, je nezkreslenou rovnoběžkou 20° j. š.

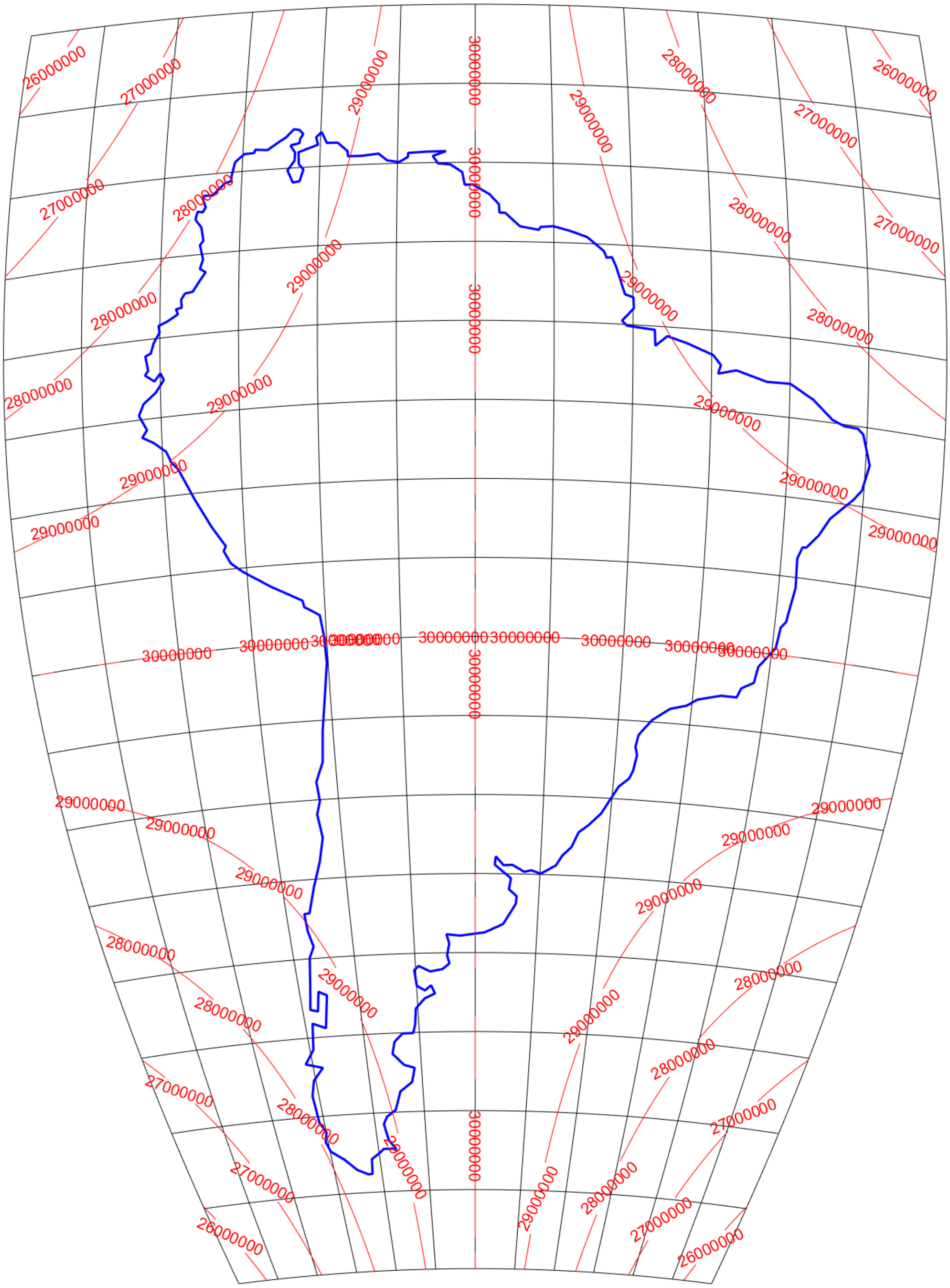
4 Výsledky

Tabulka 1 zobrazuje hodnoty Airyho a koplexního kritéria ve vážené a nevážené variantě.

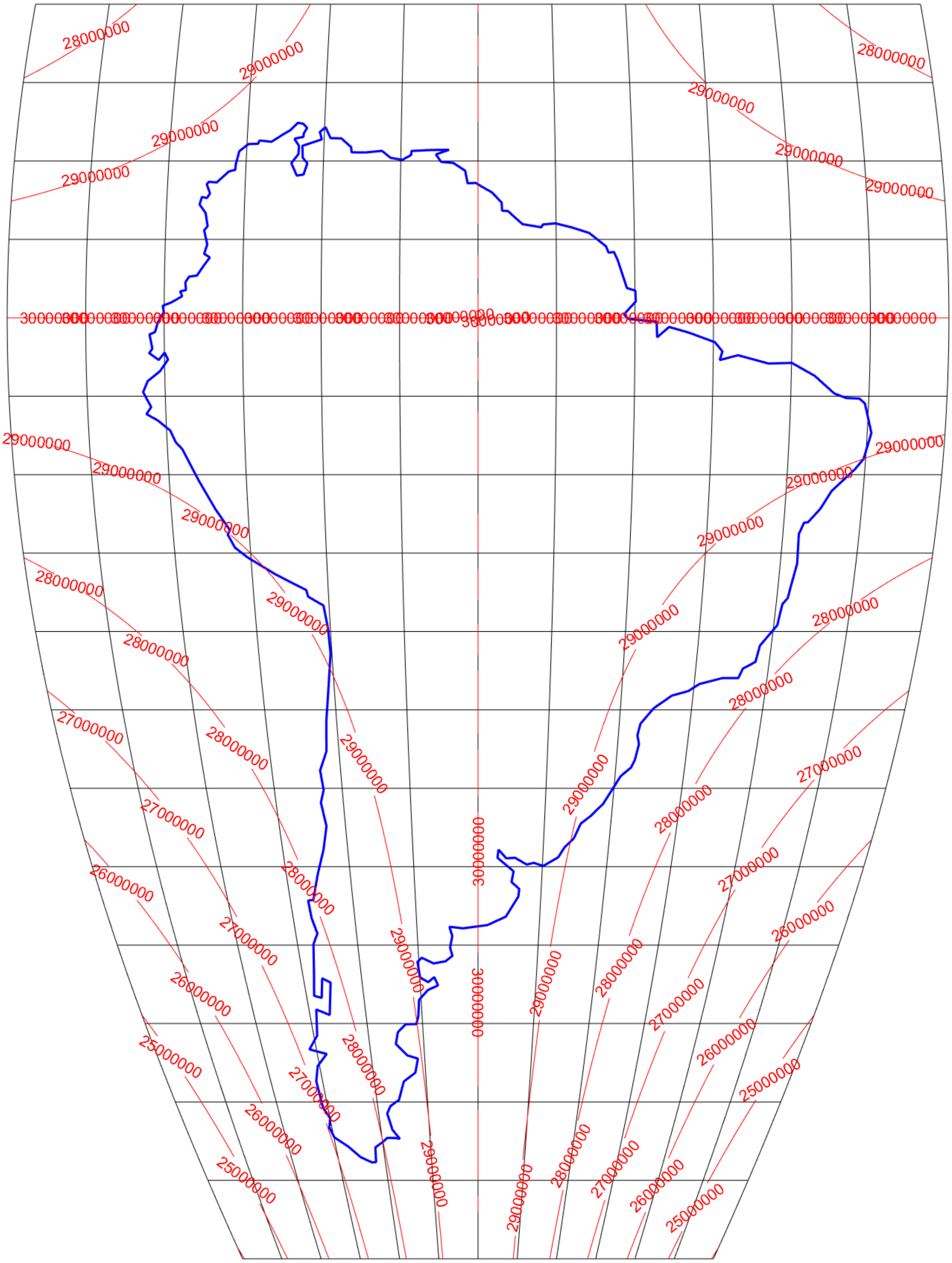
	Airyho kritérium		**Komplexní kritérium**	
Zobrazení	nevážená var.	vážená var.	nevážená var.	vážená var.
Bonneovo	0.00315	0.00279	0.13341	0.12372
Mercator-Sansonovo	0.00539	0.00372	0.17082	0.13636
Eckert V.	0.01489	0.01325	0.23511	0.19163
Winkel-Tripel	0.01606	0.00786	0.17774	0.11726
Hammer-Aitoffovo	0.00620	0.00369	0.18577	0.13432

Tabulka 1: Hodnoty globálních kritérií pro jednotlivá zobrazení

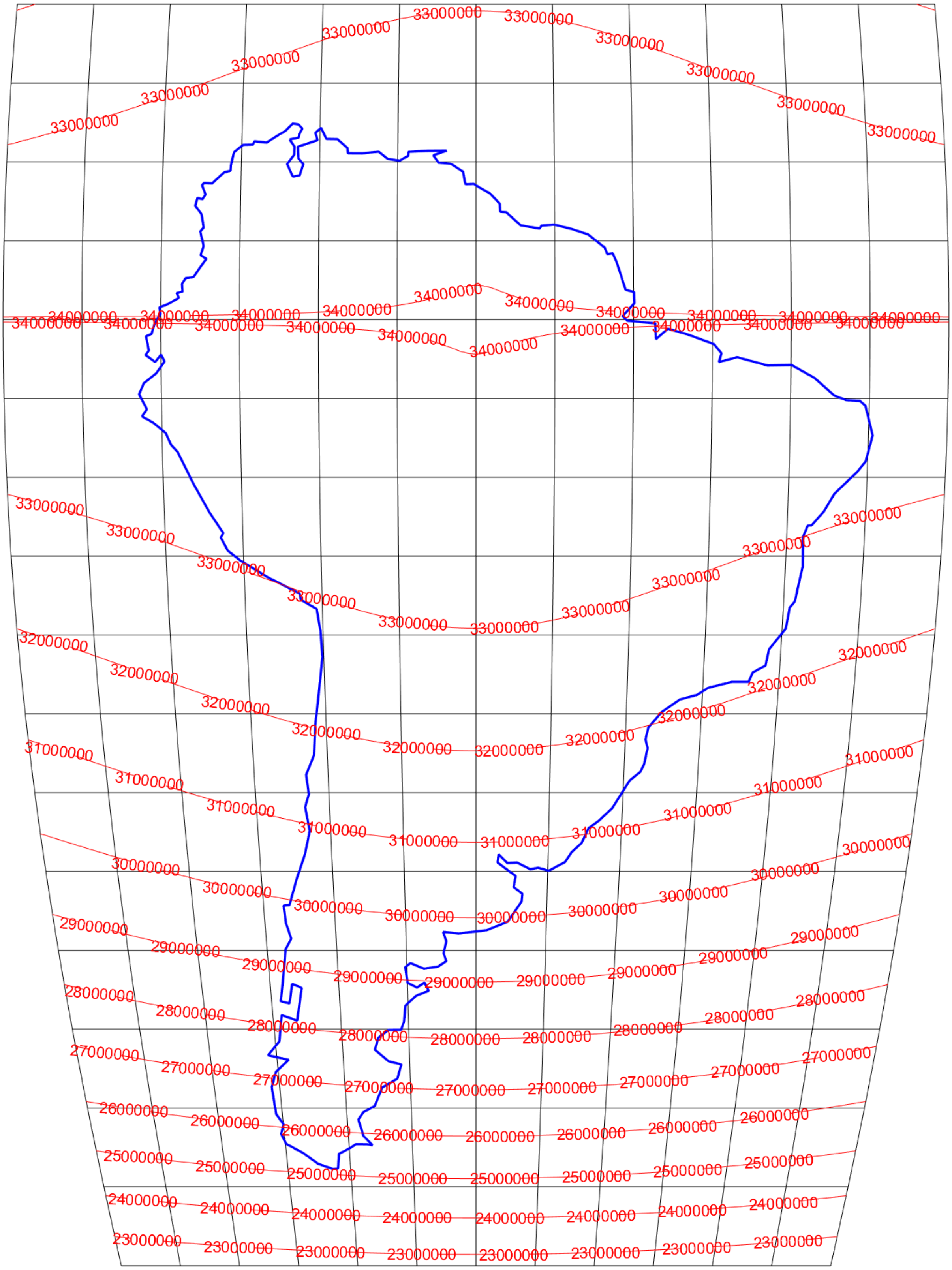
Obrázky 1 až 5 na dalších stránkách zachycují zobrazení Jižní Ameriky v jednotlivých zobrazeních spolu s izočárami měřítkového čísla M.



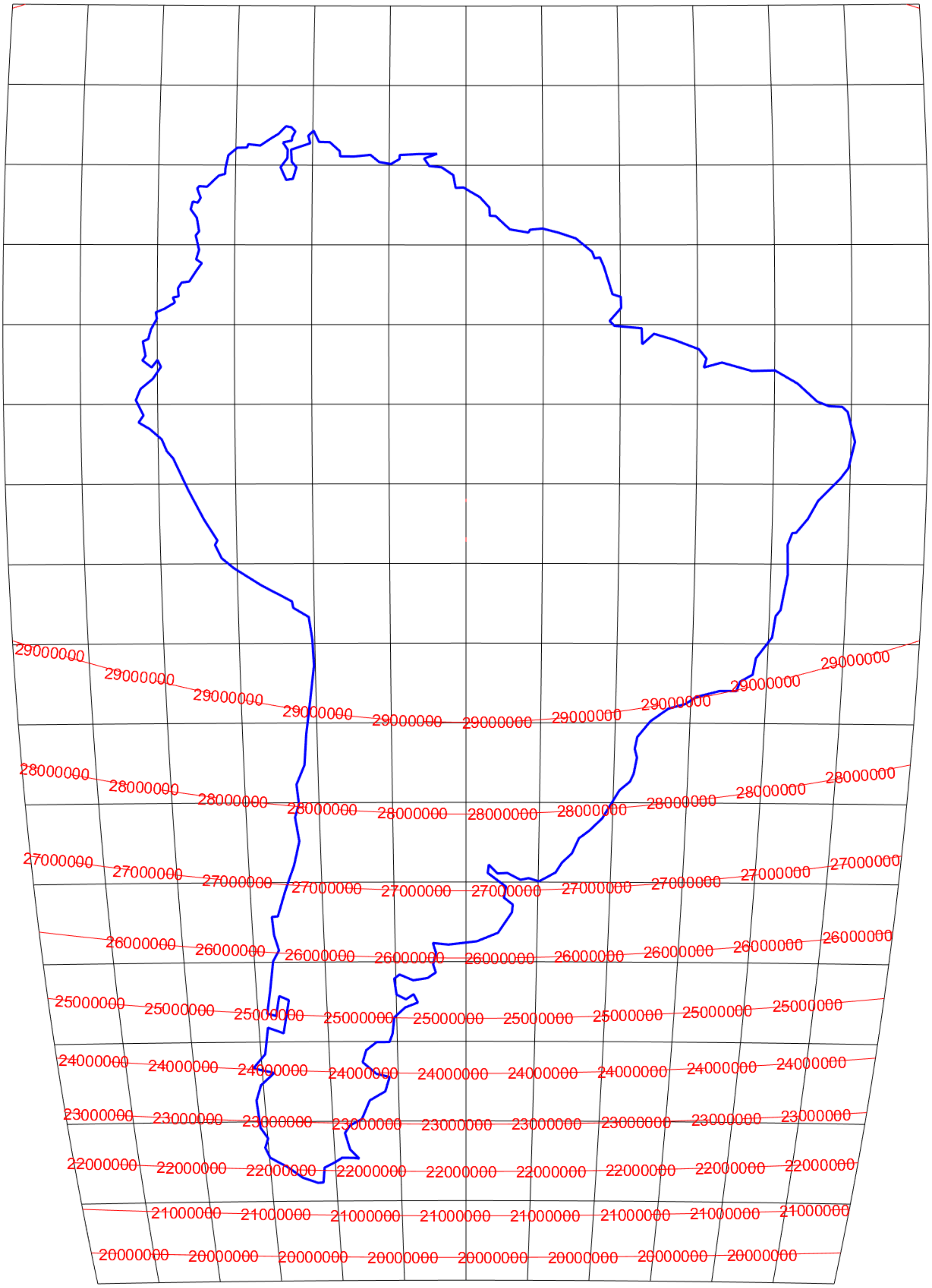
Obrázek 1: Jižní Amerika v Bonneově zobrazení. Zobrazeny jsou izočáry měřítkového čísla M s krokem 1 000 000.



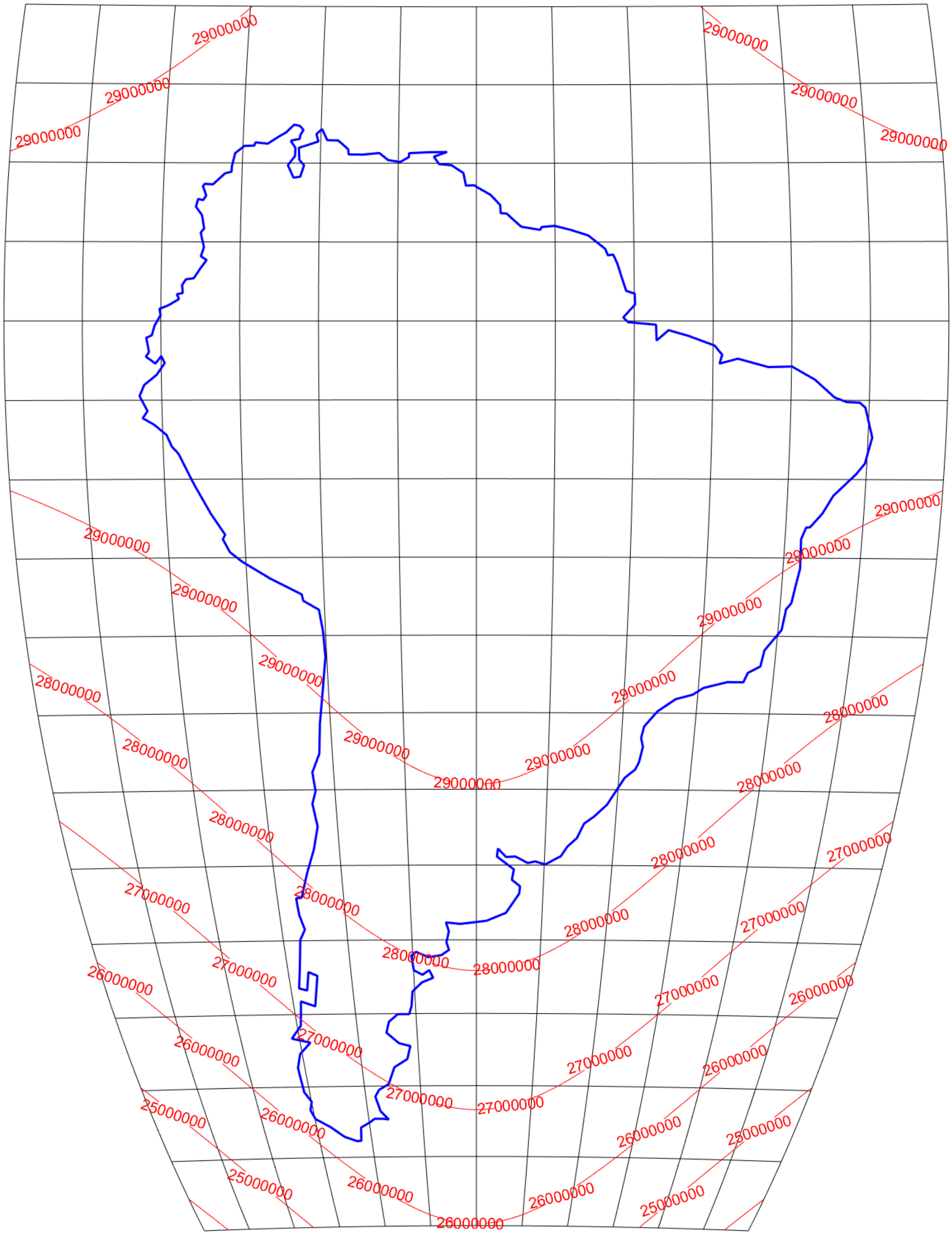
Obrázek 2: Jižní Amerika v Mercator-Sansonově zobrazení. Zobrazeny jsou izočáry měřítkového čísla M s krokem 1 000 000.



Obrázek 3: Jižní Amerika v zobrazení Eckert V. Zobrazeny jsou izočáry měřítkového čísla M s krokem 1 000 000.



Obrázek 4: Jižní Amerika v zobrazení Winkel-Tripel. Zobrazeny jsou izočáry měřítkového čísla M s krokem 1 000 000.



Obrázek 5: Jižní Amerika v Hammer-Aitoffově zobrazení. Zobrazeny jsou izočáry měřítkového čísla M s krokem 1 000 000.

5 Závěr

Cílem úlohy bylo porovnat vlastnosti vybraných jednoduchých konformních kartografických zobrazení a vyhodnotit jejich vhodnost pro zobrazení území s výrazně protáhlým tvarem a území bez dominantního směru. Posuzována byla tři konformní zobrazení v obecné poloze: válcové zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami, kuželové zobrazení rovněž se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami a azimutální zobrazení - stereografická projekce.

Jako zástupce protáhlého území bylo zvoleno Švédsko, pro území bez dominantního směru tvaru pak Polsko. U všech tří zobrazení byla pro oba státy vypočtena teoretická maximální délková zkreslení a vygenerovány odpovídající ekvideformáty. Na základě těchto výstupů bylo možné potvrdit předpoklad, že pro území protáhlého charakteru jsou nejvhodnější válcová a kuželová zobrazení, zatímco pro území bez dominantního směru je vhodnější stereografická projekce.

Přílohou této zprávy jsou v textu jmenované skripty ve formátu matlab.

6 Zdroje

Zdrojem všech uvedených informací, rovnic a předpisů byl návod ke cvičení z matematické kartografie k úloze 3 dostupný z

https://web.natur.cuni.cz/ bayertom/images/courses/mmk/mmk_cv_4_navod.pdf.