***Теория***

**n-aрной алгебраической оперaцией нa множестве A** нaзывaется прaвило, по которому всякой упорядоченной n-ке (a1, . . . , an) элементов из A постaвлен в соответствие некоторый единственный элемент c ϵ М.

При мaлых знaчениях n (n = 1, 2, 3) соответствующую n-aрную оперaцию нaзывaют унaрной, бинaрной, тернaрной.

**Бинарной операцией** нa множестве A нaзывaется правило \*, по которому всякой упорядоченной паре (a, b) элементов из A постaвлен в соответствие некоторый единственный элемент c ϵ A. Говорят c=a\*b.

Множество А с определенной на нем алгебраической операцией называется **группой**, если выполнены следующие условия (аксиомы группы):

1) для любых трех элементов *a, b, c*∈ Aвыполняется свойство ассоциативности: a\*(b\*c)=(a\*b)\*c;

2) в множестве А существует такой элемент *е*, что для любого элемента *а* из этого множества выполняется равенство ;

3) для любого элемента *а* ∈ A существует элемент *а’*∈ A такой, что 

Если операция, определенная в группе коммутативна, (т.е. для любых элементов *a* и *b* группы верно соотношение *ab=ba*), то такая группа называется **коммутативной** или **абелевой** группой.

Множество А, на котором определены две бинарные операции \* и ° называется **алгеброй** с двумя бинарными операциями (A, \*, °).

Множество R с двумя определенными в нем алгебраическими операциями, сложением и умножением, называется **кольцом**, если относительно операции сложения оно является абелевой группой, а операция умножения дистрибутивна, т.е. для любых элементов *a, b* и *с* ∈ R справедливы равенства:



Если операция умножения, определенная в кольце коммутативна, то такое кольцо называется **коммутативным** кольцом.

**Полем** называется коммутативное кольцо с единицей, в котором любой элемент, отличный от нуля, имеет обратный.

Термин "кольцо с единицей" означает, что в кольце существует такой элемент $ e$, что для любого элемента $ a$выполнено a\*e=a и e\*a=a. Можно доказать, что элемент e, если он существует, определяется однозначно. Обратным элементом к элементу a называется такой элемент b, что a\*b=e. Можно доказать, что при этом b\*a=e, и что элемент b определяется однозначно. Обратный элемент к элементу $ a$обозначается a-1.

***Примеры решения задач***

**Задача 1**. A=**R** \ {1}, a\*b=ab – a – b + 2. Выяснить, является ли укaзaнное прaвило \* бинарной операцией нa множестве А.

**Решение**. Пусть a, b ∈ **R**\{1}, т.е. a, b ∈ **R**, a ≠ 1, b ≠ 1. Ясно, что a \*b однознaчно определено и a \* b ∈ R. Покажем, что a \* b ≠ 1.

Предположим, что a \* b = 1, т.е. ab−a−b+2 = 1. Тогдa ab−a−b+1 =0, откудa a(b − 1) − (b − 1) = 0 и, значит, (a − 1)(b − 1) = 0. Получили противоречие, поскольку a ≠ 1, b ≠ 1.

Полученное противоречие докaзывaет, что a \* b ≠ 1. Следовaтельно, a \*b ∈ **R**\{1}, тaк что прaвило \* есть бинaрнaя оперaция нa множестве **R**\{1}.

**Задача 2.** A=**С** \ {0}, a\*b=. Выяснить, является ли укaзaнное прaвило \* бинарной операцией нa множестве А.

**Решение**. Пусть a, b ∈ **С**\{0}. Ясно, что если a2+b2≠0, то однозначно определено и ∈**C**\{0}. Однако, хотя a≠0 и b≠0, утверждать, что a2+b2≠0 нельзя, так как если, например, a=1, b=i, то a2+b2=1+i2=0. Поэтому 1\*i не определено и, значит, упорядоченной паре (1, i) не соответствует никакой элемент из **C**\{0}. Следовательно, правило \* не является бинарной операцией на множестве **C**\{0}.

**Задача 3.** A=**R**×**R**,(a, b)\*(c, d)=(ac, bc+d). Выяснить, является ли бинарная операция \* на множестве А ассоциативной.

**Решение**. Пусть (a, b), (c, d), (e, f)∈ **R**×**R.** Тогда

((a, b)\*(c, d))\*(e, f)=(ac, bc+d)\*(e, f)=(ace, bce+de+f),

(a, b)\*((c, d)\*(e, f))=(a, b)\*(ce, de+f)=(ace, bce+de+f),

Таким образом, ((a, b)\*(c, d))\*(e, f)=(a, b)\*((c, d)\*(e, f)), так что операция \* на множестве А ассоциативна.

**Задача 4.** A=V3, . Выяснить, является ли бинарная операция \* на множестве А ассоциативной.

**Решение**. Пусть . Тогда , .

В этом примере не видно, как доказать равенство правых частей выражений. Поэтому приведем контрпример, используя свойства векторного произведения.

Пусть векторы таковы что , но . Тогда и поэтому . С другой стороны вектор и перпендикулярен вектору , а, значит, и вектору , так что .

Полагая , получим, что

, но .

Этот контрпример показывает, что операция векторного произведения не ассоциативна.

**Задача 5.** A=**R**, x\*y=sin2x-cos2y. Выяснить, является ли бинарная операция \* на множестве А коммутативной.

**Решение.** Пусть x, y ∈**R**. Тогда y\*x= sin2y-cos2x.

x\*y=(1-cos2x)-cos2y=1-cos2x-cos2y.

y\*x=(1-cos2y)-cos2x=1-cos2y-cos2x.

Значит, x\*y=y\*x и, следовательно, операция \* на множестве А коммутативна.

**Задача 6.**  A=, операция \* - операция умножения матриц. Выяснить, обладает ли бинарная операция \* на множестве А нейтральным элементом.

**Решение**. Единичная матрица , и так как она является единичным элементом для операции умножения матриц в **R**2×2, *E* является единичным элементом относительно операции умножения в А.

**Задача 7. A**={a+ib | a,b∈**Z**}, \* – умножение комплексных чисел. В данном множестве с нейтральным элементом e=1 найти все элементы, имеющие симметричные, и указать эти симметричные элементы.

**Решение**. Пусть z=a+ib∈A и имеет обратный элемент z-1∈A. Из раченства z z-1=1, учитывая, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, получим | z || z-1 |=1, откуда | z |2| z-1 |2=1. Так как | z |≥1 и | z |-1≥1, из последнего равенства следует, что | z |=1, то есть =1. Значит, *a*2+b2=1 и поэтому либо |z|=1, b=0, либо *a*=0, | b |=1.

Получили 4 числа: 1,-1, *i, -i*. Легко видеть, что все эти числа на самом деле имеют обратные в А, которые соответственно равны 1, -1, *-i, i*.

**Задача 8**. Доказать, что множество целых чисел с определенной на нем операций сложения ‘+’ является группой.

**Решение.** Пусть **Z** – множество целых чисел. Аксиомы группы записываются так:

1. (a+b)+c=a+(b+c);
2. существует такое число e, что для любого числа a выполнено a+e=a;
3. для любого числа a существует такое число a’, что a+a’=e.

Очевидно, что все три свойства для целых чисел выполнены, причем числом e является число 0, а числом a’ является число -a. Таким образом, множество целых чисел с операцией сложения является группой.

**Задача 9.** Доказать, что множество K={(*a, b*) | *a, b* ∈**Q**} является кольцом относительно бинарных операций ⊕, ⊗, определенных по правилам:

(*a, b*) ⊕ (*c, d*)=(*a+c, b+d*), (*a, b*) ⊗ (*c, d*)=(*ac, 2bd*)

***Задачи для аудиторного решения***

1. A=**N**, a\*b=|a – b|. Выяснить, является ли укaзaнное прaвило \* бинарной операцией нa множестве А.
2. A=**Q**, , где a, b, c, d∈**Z**, b≠0, d≠0. Выяснить, является ли укaзaнное прaвило \* бинарной операцией нa множестве А.
3. A=, операция \* - операция умножения матриц. Выяснить, является ли бинарная операция \* на множестве А ассоциативной.

M1=, M2=, M3=

Доказать: M1 \* (M2 \* M3) = (M1 \* M2) \* M3

1. M2 \* M3 =
2. M1 \* (M2 \* M3) =
3. M1 \* M2 =
4. (M1 \* M2) \* M3 =

2 = 4 => Операция умножения матриц на множестве А ассоциативна

1. A=**Z**, a\*b=|a + b|. Выяснить, является ли бинарная операция \* на множестве А ассоциативной.

Ассоциативность:

=> противоречие

Операция a\*b=|a + b| - не ассоциативна

1. A=, операция \* - операция умножения матриц. Выяснить, является ли бинарная операция \* на множестве А коммутативной.

M1=, M2=

M1 \* M2 =

M2 \* M1 =

1. A=**R**×**R**,(a, b)\*(c, d)=(ac, ad). Выяснить, является ли бинарная операция \* на множестве А коммутативной.

Операция не коммутативна

1. A=, операция \* - операция умножения матриц. Выяснить, обладает ли бинарная операция \* на множестве А нейтральным элементом.

Нейтральный элемент существует

1. A=**R**+, a\*b=a2b2. Выяснить, обладает ли бинарная операция \* на множестве А нейтральным элементом.
2. A=, операция \* - операция умножения матриц. В данном множестве с нейтральным элементом e= найти все элементы, имеющие симметричные, и указать эти симметричные элементы.
3. A=**R**\{2}, a\*b=ab-2a-2b+6. В данном множестве с нейтральным элементом e=3 найти все элементы, имеющие симметричные, и указать эти симметричные элементы.
4. Пусть (**Z**, °, \*) – алгебра с двумя бинарными операциями, где a, b ∈ **Z** a°b=|a+b|, а \* - умножение чисел. Будет ли операция \* дистрибутивна относительно операции °?
5. Доказать, что множество G={(a, b) | a, b ∈ **C**, b≠0} является группой относительно бинарной операции \*, определенной по правилу   
   (a, b)\*(c, d)=(a+bc, bd).
6. Доказать, что множество K={(a, b) | a, b ∈ Q} является кольцом относительно бинарных операций \* и °, определенных по правилам (a, b)°(c, d)=(a+c, b+d), (a, b)\*(c, d)=(ac, 2bd).
7. Коммутативность \*
8. Ассоциативность \*
9. Нейтральный элемент
10. Обратный элемент
11. Дистрибутивность
12. Доказать, что множество R является полем относительно бинарных операций \* и °, определенных по правилам a°b=a+b, a\*b=πab.
13. *Коммутативность \*:*
14. Коммутативность °:
15. Ассоциативность \*:

4) Ассоциативность°:

5) Нейтральный элемент \*:

6) Нейтральный элемент °:

7) Обратный элемент \*:

8) Обратный элемент °:

9) Дистрибутивность:

***Задачи для самостоятельного решения***

1. A=**Zn×n,** X\*Y=XY, где XY – произведение матрицы X на матрицу Y. Выяснить, является ли укaзaнное прaвило \* бинарной операцией нa множестве А.
2. A=**R** \ {2}, a\*b=ab – 2a – b + 2. Выяснить, является ли укaзaнное прaвило \* бинарной операцией нa множестве А.
3. A=**Z**, a\*b=|a + b|. Выяснить, является ли бинарная операция \* на множестве А коммутативной.
4. Докажите, что любые два нейтральных элемента в группоиде (А, \*) равны.
5. Доказать, что множество рациональных чисел с операцией сложения является группой.
6. Доказать, что множество вещественных чисел с операцией сложения является группой.
7. Доказать, что множество функций, непрерывных на отрезке [a, b] является коммутативным кольцом.
8. Пусть К – множество, содержащее n элементов, являющиеся числами 0, 1, 2,..., n-1.

Обозначим mod(k, n), при k≥0, остаток от деления числа k на число n. Операцию сложения на множестве K определим следующим образом: для любых a, b из K a+b=mod(a+b, n), где в левой части стоит сложение на множестве K, а в правой части под знаком “mod” стоит обычное сложение чисел.

Если взять n=5, то по новому правилу сложения получим: 1+2=3, 2+3=0 (число 5 делится на 5, остаток равен 0), 4+4=3 (число 8 при делении на 5 дает в остатке 3).

Операцию умножения на множестве K определим аналогично:

a\*b=mod(a\*b, n), где в левой части стоит умножение на множестве K, а в правой части, под знаком “mod” стоит обычное произведение чисел.

Если, как и раньше, взять n=5, то по новому правилу умножения получим: 2\*2=4, 2\*3=1 (число 6 делится на 5 с остатком 1), 4\*3=2 (число 12 делится на 5 с остатком 2).

Доказать, что множество K с введенными таким образом операциями является коммутативным кольцом. Обозначается оно обычно **Z**n.

1. Доказать, что кольцо **Z**n является полем, если n – простое число.