Лабораторная работа №10
Задача о ВЕРШИННОМ ПОКРЫТИИ

Определение. Множество вершин $V' \subseteq V$ графа $G=(V, E)$ называется *вершинным покрытием графа G*, если у любого ребра графа хотя бы один из концов входит в V'.

Размер вершинного покрытия – количество вершин вершинного покрытия.

Оптимизационная задача о вершинном покрытии. Определить размер минимального вершинного покрытия в данном графе (найти минимальное вершинное покрытие).

Задача разрешения (ВП). Дан граф G и число k. Требуется установить, существует ли в графе G вершинное покрытие размера k.

Для решения задачи можно перебрать все подмножества вершин размера k в графе G (их количество равно числу сочетаний – C_V^k) и проверить, у каждого ли ребра графа хотя бы одна из концевых вершин принадлежит выбранному подмножеству (сложность проверки для каждого подмножества $O\left(k^2\right)$). Таким образом, для решения задачи о клике требуется действий $O\left(k^2 \cdot C_V^k\right)$, т. е. это задача экспоненциальной сложности (труднорешаемая).

Теорема. Задача о вершинном покрытии *NP*-полна (ВП$\in NPC$).

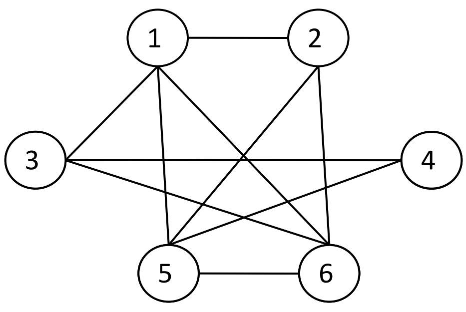
Доказательство

1. Задача ВП$\in NP$, так как проверяется за полиномиальное время (в качестве сертификата можно рассматривать вершинное покрытие размера k). Действительно, для того чтобы проверить, является ли некоторое подмножество из k вершин графа G вершинным покрытием, необходимо выполнить действий $O(k^2)$.

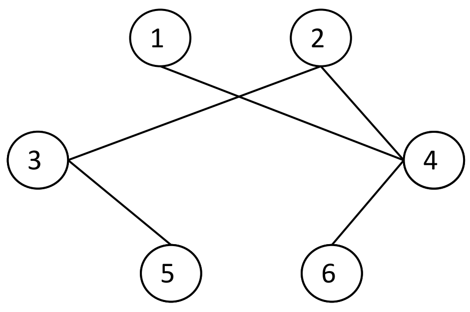
2. Построим алгоритм сведения *NP*-полной задачи КЛИКА к задаче ВП, т. е. алгоритм преобразования произвольной пары $(G, k)\in$КЛИКА в пару $(G', k')\in$ВП. Для этого рассмотрим дополнение графа G.

Дополнением графа $G=(V, E)$ называется граф $\overline{G}=(V,\overline{E})$, где $\overline{E}=\{(u,v):(u,v)\notin E\}$ – множество ребер полного графа, не вошедших в G.

Например:



G



$\overline{G}$

В графе $G' = \overline{G}$ существует вершинное покрытие размера $k' = |V| - k \Leftrightarrow$ в графе G существует клика размера k.

Действительно, если в G существует клика размера k, то ее дополнение образует вершинное покрытие графа $G' = \overline{G}$, имеющее размер $|V|-k$: любое ребро графа $G' = \overline{G}$ отсутствует в графе G, поэтому один из концов этого ребра должен быть вне клики. И наоборот, дополнение к вершинному покрытию графа $G' = \overline{G}$ является кликой графа G: если какие-то две вершины этого дополнения не связаны ребром в графе $G' = \overline{G}$, то они связаны ребром в графе G, и это ребро не покрыто.

3. Построенный алгоритм является алгоритмом сведения, так как в графе $G' = \overline{G}$ существует вершинное покрытие размера $k' = |V| - k \Leftrightarrow$ в графе G существует клика размера k. Данный алгоритм полиномиален, так как. время сведения ограничено сверху полиномом $O(|V|^2)$.

Таким образом, в силу леммы 3 задача ВП NP-полна (ВП$\in NPC$).

Задание:

1. Разобрать доказательство NP-полноты задачи о ВЕРШИННОМ ПОКРЫТИИ.
2. Построить алгоритм (программную реализацию) сведения произвольной индивидуальной задачи о КЛИКЕ к задаче о ВЕРШИННОМ ПОКРЫТИИ.
3. Построить индивидуальную задачу задачи о ВЕРШИННОМ ПОКРЫТИИ, соответствующую формуле задачи 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ $\varphi_{3-ВЫП} = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$.