Лабораторная работа №11
Задача о СУММЕ ПОДМНОЖЕСТВ

Дано конечное множество натуральных чисел $S \subset N$ и число $t \in N$.

Определить, существует ли такое подмножество $S' \subseteq S$, сумма элементов которого равна t.

Например, $S=\{7, 8, 13, 15, 24, 89\}$, $t=44$, тогда $S'=\{7, 13, 24\}$.

Теорема. Задача о сумме подмножеств NP-полна (СП$\in NPC$).

Доказательство

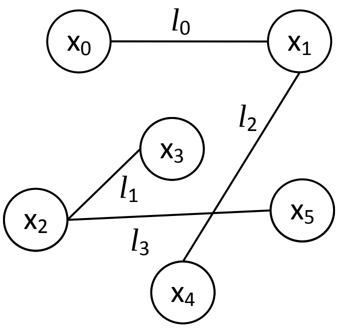
1. Задача СП$\in NP$, так как проверяется за полиномиальное время (в качестве сертификата можно рассматривать подмножество чисел, сумма которых равна t). Действительно, для того чтобы проверить, равна ли t сумма чисел подмножества S', необходимо выполнить действий $O(|S'|)$.

2. Построим алгоритм сведения NP-полной задачи ВП к задаче СП, т. е. алгоритм преобразования произвольной пары $(G, k) \in$ВП в пару $(S, t) \in$СП.

Пусть граф G представлен матрицей инцидентности (вершины и ребра в графе пронумерованы с нуля).

Например, дан граф G, и требуется построить в нем вершинное покрытие размера $k=4$.

	l_3	l_2	l_1	l_0
x_0	0	0	0	1
x_1	0	1	0	1
x_2	1	0	1	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	1	0	0
x_5	1	0	0	0



Требуется построить множество S и число t.

Достроим матрицу инцидентности следующим образом: добавим слева матрицы инцидентности столбец из единиц и каждой вершине графа поставим в соответствие число в системе счисления с основанием $k+1$, где k – размер искомого вершинного покрытия. Переведем образовавшиеся числа в десятичную систему счисления и запишем справа. Таким образом, для

		l_3	l_2	l_1	l_0	*10СС*
x_0	1	0	0	0	1	*626*
x_1	1	0	1	0	1	*651*
x_2	1	1	0	1	0	*755*
x_3	1	0	0	1	0	*630*
x_4	1	0	1	0	0	*650*
x_5	1	1	0	0	0	*750*
y_0	0	0	0	0	1	*1*
y_1	0	0	0	1	0	*5*
y_2	0	0	1	0	0	*25*
y_3	0	1	0	0	0	*125*
	4	2	2	2	2	*2812*

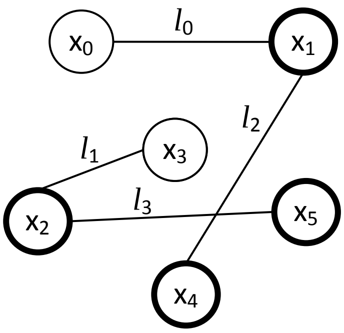
приведенного графа получили множество S={625, 651, 755, 630, 650, 750, 1, 5, 25, 125}.

Укажем число t, для этого в старший разряд запишем число (запись числа k в системе счисления с основанием (k+1)), а в остальные разряды – цифру 2. Найдем значение этого числа в десятичной системе счисления и запишем справа (для примера получено t=2812).

Теперь нужно показать, что в G существует вершинное покрытие размера k тогда и только тогда, когда в S существует подмножество S’ с суммой t.

1) Пусть дано вершинное покрытие $V' \subseteq V$ размера k, включим во множество S’ числа, соответствующие этим вершинам. Тогда сумма в системе счисления с основанием (k+1) будет иметь следующий вид: в старшем разряде – цифра k, а в остальных – 1 или 2, в зависимости от того, оба конца ребра вошли в вершинное покрытие или только один. Добавим y_i, соответствующие тем ребрам, у которых вошел только один конец, и прибавим соответствующие y_i числа в S’, в результате получим число t.

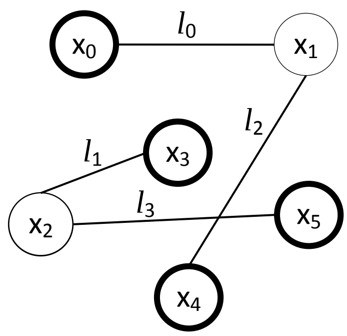
Так, в приведенном графе есть вершинное покрытие, состоящее из четырех вершин {x_1, x_2, x_4, x_5}.



		l_0	l_1	l_2	l_3	*10СС*
x_0	1	0	0	0	1	*626*
$\boldsymbol{x_1}$	**1**	0	**1**	0	**1**	***651***
$\boldsymbol{x_2}$	**1**	**1**	0	**1**	0	***755***
x_3	1	0	0	1	0	*630*
$\boldsymbol{x_4}$	**1**	0	**1**	0	0	***650***
$\boldsymbol{x_5}$	**1**	**1**	0	0	0	***750***
$\boldsymbol{y_0}$	0	0	0	0	**1**	***1***
$\boldsymbol{y_1}$	0	0	0	**1**	0	***5***
y_2	0	0	1	0	0	*25*
y_3	0	1	0	0	0	*125*
	4	2	2	2	2	*2812*

В S существует подмножество S’={651, 755, 650, 750, 1, 5} с суммой равной t=2812.

2) Обратное утверждение доказывается аналогично. Имеется подмножество S’ с суммой элементов равной t, следовательно, в младших разрядах записи числа t в системе счисления с основанием (k+1) стоят двойки. Так как y_i в соответствующий разряд дают максимум по одной единице, то вторая единица входит из «вершинных» строк. Вершины, соответствующие этим строкам, образуют вершинное покрытие.



Так, например, во множестве S={625, 651, 755, 630, 650, 750, 1, 5, 25, 125} имеется подмножество S’={1, 5, 25, 125, **626**, **630**, **650**, **750**} с суммой t=2812. Вершины, соответствующие выбранным числам – x_0, x_3, x_4, x_5, они образуют в графе G вершинное покрытие размера k=4.

3. Построенный алгоритм сведения полиномиален, так как все построенные числа имеют двоичное представление полиномиальной длины и строятся за полиномиальное время.

Таким образом, в силу леммы 3 задача СП NP-полна (СП$\in NPC$).

Задание:

1) Построить индивидуальную задачу (S, t)$\in$СП, соответствующую задаче (G, $k=2$)$\in$ВП: