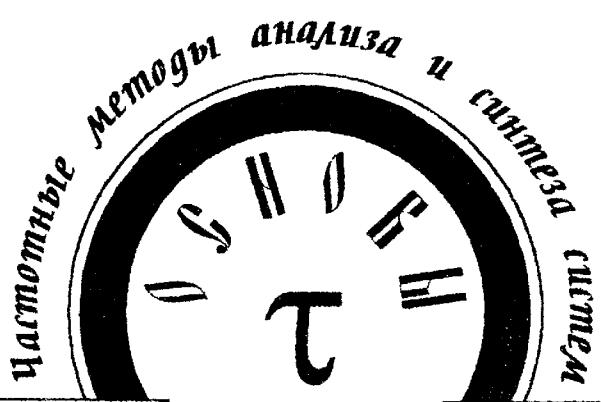


Е.А. НИКУЛИН



ТЕОРИИ

АВТОМАТИЧЕСКОГО

УПРАВЛЕНИЯ

Рассматриваются основные задачи проектирования САУ, статические свойства нелинейных и линейных элементов и систем, применение преобразования Лапласа для анализа динамики систем. Описываются основные соединения элементов и методы преобразования структурных схем, построение частотных характеристик и погрешности их аппроксимации, методы расчета временных характеристик, показатели качества переходных процессов и методы их оценки. Приводятся различные критерии устойчивости автоматических систем, в том числе с запаздыванием, алгебраические и частотные критерии обеспечения запасов устойчивости. Описываются основные частотные и временные методы расчета переходных процессов. Даётся классификация корректирующих устройств (регуляторов), рассматриваются частотные и спектральные методы расчета регулятора, обеспечивающего желаемые статические и динамические свойства замкнутой САУ, а также способы управления неустойчивыми объектами. Материал каждого параграфа иллюстрирован достаточным для понимания числом примеров, предлагаются 120 вариантов заданий для курсового проектирования, лабораторных, практических и самостоятельных работ.

Предназначено для студентов специальности 220100 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» всех форм обучения.

Рецензенты: д-р техн. наук А.Т. Надеев, канд. техн. наук С.Н. Рябов



ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В.1. Основные понятия теории автоматического управления	5
В.2. Классификация систем управления	5
В.3. Задачи теории автоматического управления	7

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Классификация элементов САУ	10
1.2. Статические свойства элементов и систем	10
1.2.1. Соединения статических элементов	11
1.2.2. Линеаризация статических элементов	12
1.2.3. Статические ошибки в замкнутых системах управления	14
1.3. Статический анализ и синтез схем на операционных усилителях	16
1.3.1. Нелинейные статические элементы на операционных усилителях	16
1.3.2. Линейные статические элементы на операционных усилителях	18
1.4. Описание динамики элементов САУ	22
1.5. Передаточная функция	26
1.6. Соединения элементов и преобразования структурных схем	27
1.7. Динамический анализ и синтез схем на операционных усилителях	31
1.7.1. Динамические элементы на операционных усилителях	31
1.7.2. Анализ и синтез многокаскадных схем на ОУ	38

ГЛАВА 2. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Основные частотные характеристики	46
2.2. Частотные характеристики типовых звеньев	48
2.3*. Погрешности аппроксимации ЛЧХ типовых звеньев	53
2.4. Частотные характеристики сложных систем	56
2.5*. Анализ полиномов	61
2.5.1. Полиномы низких степеней	63
2.5.2. Структура спектра полинома	65
2.5.3. Локализация корней полинома	68
2.5.4. Уточнение корней полинома	72

ГЛАВА 3. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Обратное преобразование Лапласа	82
3.1.1. Метод разложения Хевисайда	82
3.1.2. Табличный метод преобразований Лапласа	86
3.1.3. Программный метод преобразований Лапласа	87
3.2. Импульсная и переходная характеристики	89
3.3. Взаимосвязь частотных и временных характеристик	95
3.4*. Аппроксимационный метод построения временных характеристик	97
3.5. Показатели качества переходных процессов САУ и их оценка	101
3.5.1. Спектральные оценки качества переходных процессов	102
3.5.2. Частотные оценки качества переходных процессов	104

* Таким знаком обозначены параграфы вспомогательного назначения.

ГЛАВА 4. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ 109

4.1. Понятие устойчивости	109
4.2. Условия устойчивости линеаризованных систем	110
4.3. Алгебраические критерии устойчивости	111
4.3.1. Необходимые условия устойчивости	112
4.3.2. Критерий устойчивости Рауса - Гурвица	113
4.4. Построение областей устойчивости параметрических полиномов	115
4.5. Частотный критерий устойчивости Михайлова	118
4.6. Частотный критерий устойчивости Найквиста	122
4.6.1. Вывод критерия Найквиста	122
4.6.2. Логарифмический критерий устойчивости Найквиста	125
4.7. Запасы устойчивости замкнутой системы	131
4.8 *. Устойчивость систем с запаздыванием	135

ГЛАВА 5. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

139

5.1. Структура переходного процесса	139
5.2. Метод преобразования Лапласа	141
5.3. Метод вариации произвольных постоянных	145
5.4. Метод интеграла Диамеля	148
5.5. Метод пространства состояний	150

ГЛАВА 6. ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

156

6.1. Основные задачи частотного синтеза САУ	156
6.2. Методы повышения статической точности	161
6.2.1. Коэффициенты статических ошибок	161
6.2.2. Статические системы управления	162
6.2.3. Астатические системы управления	168
6.3. Методы улучшения динамических параметров	172
6.4. Быстрый синтез систем управления методом логарифмических частотных характеристик	179
6.5. Управление неустойчивыми объектами	184
6.6. Спектральный метод синтеза регуляторов	189

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Таблицы преобразований Лапласа

205

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Задания для курсового проектирования

224

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

230

ВВЕДЕНИЕ

В.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Теория автоматического управления (ТАУ) изучает процессы управления, методы исследования и проектирования систем автоматического управления (САУ). Необходимость поддержания постоянного или заданного закона изменения какой-либо величины возникает в различных отраслях техники: электроснабжении (постоянство частоты и напряжения в сети); атомной энергетике (постоянство мощности реактора для обеспечения его безопасности и устойчивости работы); авиации и судовождении (движение по заданному курсу, стабилизация крена и дифферента); космонавтике (ориентация в пространстве); металлургической и бумажной промышленности (постоянство толщины проката); робототехнике (движение рабочего органа по заданной траектории).

Сами по себе объекты, в которых протекают процессы, часто не обеспечивают их желаемого хода, не устраняют отклонений от заданных режимов. Поэтому такие *объекты управления (ОбУ)* снабжаются *регуляторами*, или *устройствами управления (УУ)*. Управление - это воздействие на ОбУ, предназначенное для достижения *цели управления*. Управление бывает ручным и автоматическим. Регулирование - это управление с целью обеспечения близости управляемых координат объекта к их *уставкам* - заданным значениям. Следящее регулирование - это обеспечение близости управляемых координат к значениям заранее извещенных уставок путем их сравнения благодаря наличию в системе контура *обратной связи (ОС)*. Программное регулирование - это регулирование координат ОбУ при заранее извещенных уставках без использования ОС. Стабилизация - это регулирование управляемых координат к постоянным уставкам. Таким образом, САУ есть объединение ОбУ и УУ.

Возмущение - это не управляемое воздействие извне на любой элемент САУ, как правило, затрудняющее достижение цели управления. Учет возмущений, то есть возможность их измерить и использовать для корректировки управления, позволяет противодействовать их вредному влиянию на ОбУ или, наоборот, использовать (например, попутный ветер при управлении самолетом) для ускорения достижения цели или экономии энергии.

В.2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Классификация САУ производится по следующим признакам:

- 1) по принципу регулирования: разомкнутые с программным управлением (рис. В.1,*a*), с управлением по возмущению (рис. В.1,*b*), замкнутые (рис. В.1,*c*) и комбинированные (рис. В.1,*г*). На рис. В.1 обозначено: ИУ - измерительное устройство, *g* - уставка, *x* - управление, *y* - измерение, *f_о* и *f_и* - возмущения ОбУ и ИУ, *e* - *невязка* (ошибка) регулирования.

Обратная связь - основной принцип функционирования сложных систем, позволяющий в реальном времени по ходу процесса управления устранять ошибки регулирования на основе измерения текущего состояния объекта. Если можно измерить возмущения, нарушающие желаемый ход процессов, то введение в САУ дополнительного контура управления по возмущению позволяет оперативно противодействовать его вредному влиянию, не дожидаясь, пока это влияние заметно проявится в выходном сигнале системы;

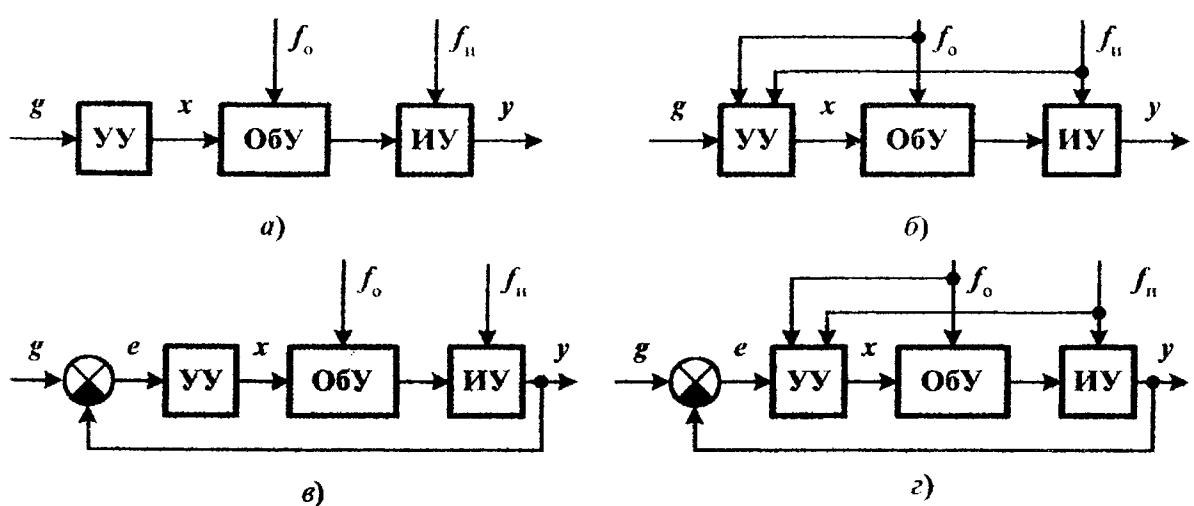


Рис. В.1

2) по цели регулирования: системы программного управления (цель: $y(t)=g(t)$ без ОС), следящие ($y(t)=g(t)$ с ОС), стабилизации ($y(t)=g=\text{const}$ с ОС) и экстремальные (цель: экстремум некоторого показателя качества управления);

3) по способу формирования сигнала управления регулятором:

- непрерывные (рис. В.2,а);
- дискретные
 - импульсные
 - с амплитудной модуляцией (рис. В.2,б);
 - с широтной модуляцией (рис. В.2,в);
 - с фазовой модуляцией (рис. В.2,г);
 - релейные ($x_i=i\Delta x$) (рис. В.2,д);
 - цифровые ($t_k=kT$, $x_i=i\Delta x$) (рис. В.2,е);
- с гармонической модуляцией.

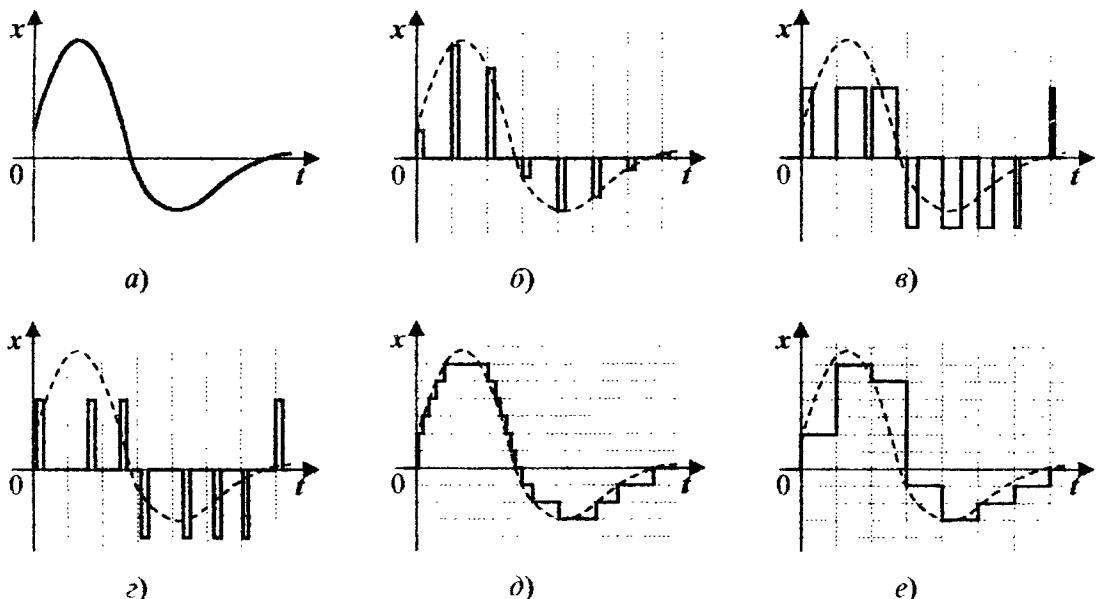


Рис. В.2

В непрерывных системах управление вырабатывается аналоговыми устройствами автоматики, например, схемами на операционных усилителях. В дискретных системах производится квантование сигналов по времени ($t_k = kT$) и (или) по уровню ($x_i = iAx$). В САУ, работающих на переменном токе, высокочастотные колебания несущей частоты модулируются в соответствии с величиной и знаком управляющего сигнала низкой частоты;

4) по количеству регулируемых координат: одномерные (с одним выходом) и многомерные, которые по взаимному влиянию координат друг на друга делятся на несвязанные и многосвязанные;

5) по характеру изменения параметров во времени: стационарные и нестационарные;

6) по распределению параметров в пространстве: с сосредоточенными и распределенными параметрами;

7) по степени идеализации математического описания: линейные и нелинейные;

8) по соотношению сигнал/шум в передаваемой информации: детерминированные и стохастические;

9) по характеру переходных процессов: устойчивые, неустойчивые и нейтральные.

B.3. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Основная задача ТАУ - обеспечение **устойчивости** системы путем выбора структуры и параметров регулятора или изменения параметров объекта. Пример неустойчивости (рис. B.3,a) - самовозбуждение акустической системы (микрофон, усилитель и динамик), слышимое как свист при приближении микрофона к динамику даже в отсутствие голоса. Причину неустойчивости упрощенно объясним с помощью коэффициентов усиления устройств W_m , W_y , W_d и воздушного слоя W_b , имеющих, во-первых, комплексный, а во-вторых, частотно-зависимый характер. Если на некоторой частоте последовательное соединение блоков в контуре обратной связи имеет коэффициент усиления амплитуды $A = |W_m W_y W_d W_b| > 1$ и фазовый сдвиг $\phi = \arg(W_m W_y W_d W_b) = 0$, то малейший сигнал этой частоты, попав в микрофон из внешней среды, лавинообразно усиливается в контуре обратной связи до максимальной мощности усилителя.

Устранение неустойчивости возможно следующими способами:

- 1) уменьшить $|W_y|$, то есть убавить громкость регулятором усилителя;
- 2) уменьшить $|W_b|$, то есть отодвинуть микрофон от динамика.

Таким образом, на плоскости $|W_y| \times |W_b|$ существуют области устойчивости и неустойчивости системы (рис. B.3,b). При неустойчивости переходные процессы расходятся



Рис. B.3

до насыщения по максимальной мощности, что ведет к перегреву аппаратуры, аварии, взрыву и другим нежелательным или катастрофическим последствиям.

Системы, устойчивость которых не может быть достигнута никаким изменением параметров, называются *структурно неустойчивыми*.

Задача программного управления - изменение управляемой величины по заранее заданному закону (программе) независимо от внешних воздействий. Например, программа автопилота самолета или программа движения руки робота.

Задача следящего управления - изменение управляемой величины по произвольному и заранее неизвестному закону (уставке). Цель слежения: $y(t) \rightarrow g(t)$, $e(t) \rightarrow 0$ (рис. В.1,б). При $e(t) \neq 0$ УУ отрабатывает ошибку управления (рассогласование выхода и уставки) в направлении уменьшения $|e(t)|$. Примеры: слежение локатора за целью; повторение манипуляций человека-оператора роботом, находящимся в агрессивной среде.

Задача стабилизации - то же при постоянной уставке $g(t) = \text{const}$. В качестве вычищающих устройств в системах слежения и стабилизации применяются дифференциалы (механические), гироскопы (электромеханические), дифференциальные усилители (электронные).

Задача статического и динамического анализа САУ - исследование статических и динамических свойств САУ с учетом взаимного влияния ее элементов друг на друга, определение статических ошибок регулирования и параметров качества переходных процессов в системе при различных входных воздействиях.

Задача синтеза устройства управления. Качество системы определяется параметрами переходного процесса при отработке системой возникающих возмущений. Показатели качества переходного процесса: время регулирования, колебательность, степень затухания колебаний, максимальные выбросы (*перерегулирования*) координат системы за установившиеся значения.

Основные функции регулятора:

- 1) преобразование контролируемых величин в сигналы используемого регулятором вида энергии (электрической, механической, гидравлической и т.д.);
- 2) формирование программных сигналов (уставок);
- 3) формирование ошибок регулирования;
- 4) квантование сигналов в дискретных системах;
- 5) выполнение аналоговых, логических и арифметических операций по расчету управляющего воздействия;
- 6) хранение сигналов до момента их использования;
- 7) распределение сигналов по различным каналам управления;
- 8) преобразование управляющих сигналов к виду, необходимому для работы исполнительных элементов.

Перечислены задачи регулятора в широком смысле, каким фактически является вся САУ, за исключением объекта. Задачей регулятора в узком смысле можно считать пятую функцию.

Разработка УУ заключается в выборе его *структуры* (из чего слагается управляющее воздействие) и расчете *параметров* (коэффициентов перед слагаемыми). Основными компонентами управления могут быть пропорциональное (*P-управление*) по ошибке регулирования $e(t) = g(t) - y(t)$, дифференциальное (*D-управление*) по производ-

ной ошибки $\frac{de(t)}{dt}$ и интегральное (*I-управление*) по интегралу ошибки $\int_0^t e(\tau) d\tau$.

Рассмотрим принципиальное назначение компонентов на примере автоматического движения судна по заданному компасному курсу g . Изменение направления движения достигается отклонением руля на угол x относительно оси судна (позиция *A* на рис. В.4,а), что при наличии продольного движения создает врачающий момент и поворачивает судно в сторону отклонения руля.

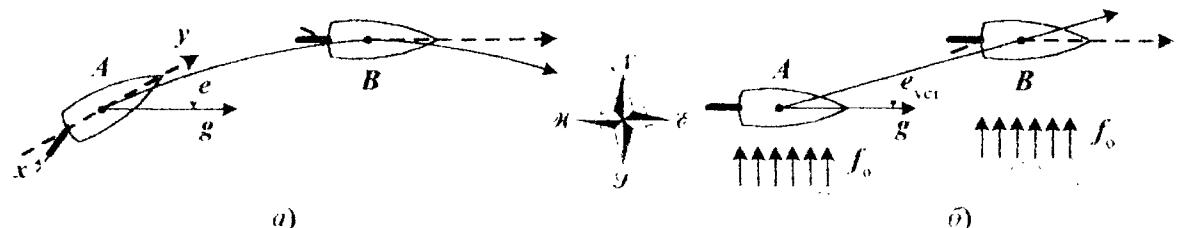


Рис. В.4

Пропорциональное управление $x_n(t) = K_n e(t)$ выполняет главную задачу уменьшения $|e(t)|$ за минимальное время регулирования. При достижении $e(t) = 0$ (позиция **B** на рис. В.4,а) руль устанавливается в неотклоненное состояние. Поскольку судно имеет определенный момент инерции, то оно продолжает и дальше вращаться, отходя тем самым от заданного курса в противоположную сторону. Так возникают колебания регулируемой величины u вокруг уставки g . Правильным выбором параметра регулятора K_n можно несколько сгладить (демпфировать) эти колебания, но общий характер переходного процесса остается колебательным.

Что делает опытный рулевой в таком случае? Он начинает заранее перекладывать руль так, чтобы подойти к точке равновесия с минимальной угловой скоростью $e'(t)$ и компенсировать инерцию вращения противоположным вращательным моментом, создаваемым рулевым, который изображен пунктиром в позиции **B** на рис. В.4,а. Дополнительное Д-управление $x_d(t) = K_d \frac{de(t)}{dt}$ способно уменьшить перерегулирование, демпфировать колебания, даже сделать систему апериодической (не колебательной), улучшить ее устойчивость, повысить быстродействие. Все это означает повышение качества управления.

Наконец, в реальных условиях плавания на море возможны различные неконтролируемые возмущения (ветер, течения), сносящие судно с курса и создающие устанавливающуюся ошибку отклонения от курса $e_{уст}$ (рис. В.4,б). Для ее устранения в закон управления добавляется интегральная компонента $x_n(t) = K_n \int_0^t e(\tau) d\tau$, сводящая статическую ошибку к нулю за счет дополнительного отклонения руля в сторону, противоположную сносу судна (изображено пунктиром в позиции **B** на рис. В.4,б).

Более детальное изучение компонентов управления и порождаемых ими переходных процессов будет продолжено в последующих параграфах книги.

Таким образом, структура управляющего воздействия может быть типа П, И, ПД, ПИ, ПИД и более сложная, отражающая входящие в управление слагаемые. В общем случае регулятор - это аналоговый или цифровой фильтр, выполняющий преобразование уставок и выходных сигналов системы в управляющие воздействия.

ГЛАВА I. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Математическое описание системы начинается с разделения ее на элементы, для которых должны быть составлены уравнения, описывающие их функционирование. Уравнения составляются на основе анализа физических, химических, экономических и других процессов, происходящих в системе, с помощью законов сохранения энергии и вещества, законов электротехники, гидравлики и т.д.

Система уравнений, с достаточной точностью описывающая поведение объекта во времени и пространстве, называется **математической моделью**.

1.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ САУ

Элементы САУ классифицируются по следующим признакам [1]:

- 1) по функциональному назначению: задающие (генераторы уставок), измерительные (датчики), суммирующие и вычитающие, усиливающие, преобразующие (корректирующие), исполнительные;
- 2) по виду используемой энергии: электрические, механические, гидравлические, пневматические, комбинированные;
- 3) по наличию источника энергии: активные, пассивные;
- 4) по длительности переходных процессов: безынерционные (описываются алгебраическими уравнениями), инерционные (описываются дифференциальными уравнениями);
- 5) по характеру установившегося режима: статические, астатические.

1.2. СТАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ

Статическим называется элемент, у которого при постоянном входном воздействии $x(t)$ с течением времени устанавливается постоянная выходная переменная $y(t)$. У **астатического** элемента выходная переменная не имеет установившегося значения, а неограниченно возрастает с постоянной скоростью (угол поворота электродвигателя при постоянном входном напряжении), ускорением (перемещение материальной точки при действии постоянной силы) или производной высшего порядка.

Свойства статизма или астатизма не абсолютны, а зависят от выбора входной и выходной переменных. Так, если при описании электродвигателя в качестве выходной переменной выбрать не угол поворота ϕ , а угловую скорость $\omega = d\phi/dt$, то получим статический элемент. Признак астатизма - наличие хотя бы одного интегратора между входом и выходом системы.

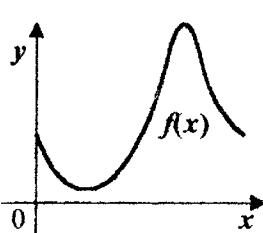


Рис. 1.1

Статической характеристикой (СХ) $y=f(x)$ (рис. 1.1)

статического элемента называется зависимость установившегося значения выходной переменной от значения постоянного входного воздействия. Нелинейная, в общем случае, СХ может быть гладкой или разрывной. Линейный статический элемент имеет гладкую линейную СХ $y(x)=a_0+a_1x$. Астатический элемент не имеет СХ, но может иметь СХ $y^{(i)}|_{y_{ст}}=f_i(x)$ для i -й

производной. Минимальный порядок производной $y(t)$, имеющей СХ, называется *порядком астатизма*. Статические элементы имеют астатизм нулевого порядка. Порядок астатизма равен числу интеграторов между входом и выходом, не охваченных ОС.

1.2.1. Соединения статических элементов

Статическая характеристика системы, образованной соединением элементов, может быть найдена двумя способами:

- *аналитическим*, если заданы формулы СХ всех исходных элементов;
- *графическим*, если СХ элементов заданы графиками.

Рассмотрим основные типы соединений двух статических элементов и методы аналитического и графического расчета их СХ.

1. *Параллельное соединение* (рис. 1.2): $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

2. *Последовательное соединение* (рис. 1.3): $f(x) = f_2(f_1(x))$. Нелинейные элементы нельзя переставлять местами, так как $f_2(f_1(x)) \neq f_1(f_2(x))$. Например, для функций $f_1(x) = 1 - e^{-x}$ и $f_2(x) = x^2$ имеем $1 - e^{-x^2} \neq (1 - e^{-x})^2$. Последовательность построения $f(x)$ показана стрелками на рис. 1.3,б. Окончательный график расположен в четвертом квадранте в осях x и y , для чего пришлось ось x продублировать вниз. Для привычного изображения график можно повернуть влево на 90° .

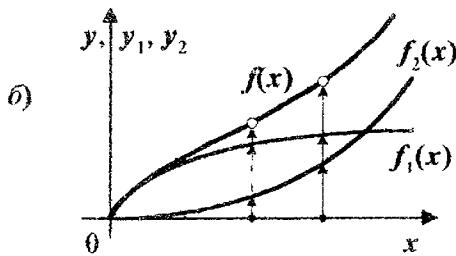
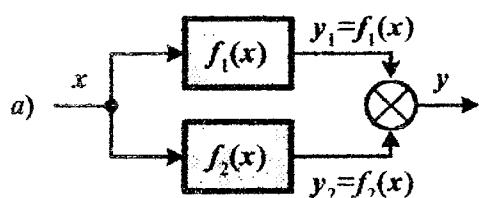


Рис. 1.2

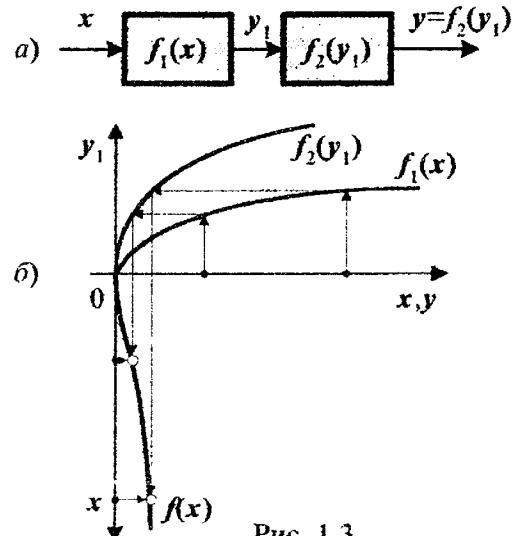
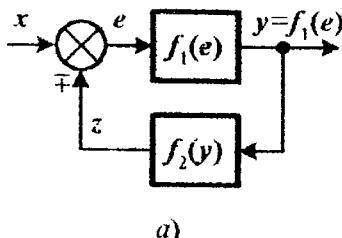
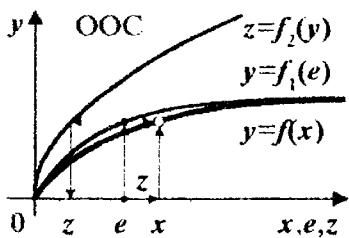
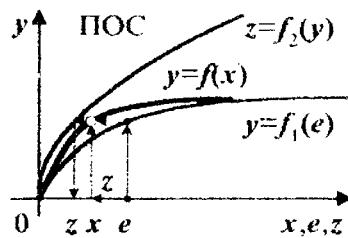


Рис. 1.3

3. *Соединение с ОС* (рис. 1.4). В обозначениях « \pm » и « \mp » верхний знак означает *отрицательную* ОС (ООС), а нижний - *положительную* (ПОС). Исключая переменную e , получим уравнение связи входа и выхода: $y = f_1(x \mp f_2(y))$. Оно имеет решение в виде функции, обратной к СХ $y = f(x)$: $x = f^{-1}(y) = f_1^{-1}(y) \pm f_2(y)$. Аналитическое обращение нелинейной функции не всегда возможно. Так, для функций $f_1(x) = 1 - e^{-x}$ и $f_2(x) = x^2$ получим $f_1^{-1}(y) = -\ln(1-y)$, откуда $x = -\ln(1-y) \pm y^2$. Явойной зависимости $y = f(x)$ нет.



a)

б)
Рис. 1.4

в)

Последовательность $e \rightarrow y = f_1(e) \rightarrow z = f_2(y) \rightarrow x \pm z$ графического построения CX обратного соединения дает функцию $y = f(x)$ для каждого значения e и показана стрелками для случаев ООС на рис. 1.4,б и ПОС на рис. 1.4,в.

1.2.2. Линеаризация статических элементов

Каждый элемент системы имеет рабочую область изменения входных и выходных переменных, причем некоторые точки этой области наиболее предпочтительны как точки равновесия или как самые удаленные от границ рабочей области. Такие точки называются **номинальными**, а координаты точки (x_n, y_n) - **номинальным режимом**. При

слабой нелинейности CX достаточно иметь одну номинальную точку, сильная же нелинейность CX заставляет разбивать область работоспособности на подобласти, каждую со своим номинальным режимом (рис. 1.5).

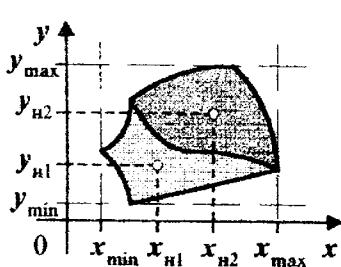


Рис. 1.5

В окрестности номинального режима желательно иметь линейное описание элемента как наиболее удобное для решения задач анализа и синтеза. **Линеаризация** - это замена реальных нелинейных уравнений, описывающих функционирование объекта, близкими к ним линейными уравнениями. Линеаризация гладкой функции $y = f(x)$ в окрестности номинальной точки (x_n, y_n) выполняется по формуле $y \approx y_n + df(x)/dx|_{x_n}(x - x_n)$. Это уравнение **касательной** к $f(x)$ в точке (x_n, y_n) (рис. 1.6). Введем **отклонения** от номинального режима $\Delta y = y - y_n$ и $\Delta x = x - x_n$, тогда линеаризованное уравнение в отклонениях примет вид $\Delta y = K \Delta x$ с коэффициентом $K = df(x)/dx|_{x=x_n} = \tan(\alpha)$. Если

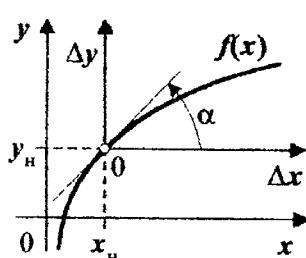


Рис. 1.6

CX $y = f(\bar{x})$ - функция вектора переменных $\bar{x} = [x_1 \dots x_n]^T$, то линеаризованная CX в приращениях есть гиперплоскость, касающаяся поверхности $y = f(\bar{x})$ в номинальной точке (\bar{x}_n, \bar{y}_n) и описываемая векторным уравнением в приращениях $\Delta y = \sum_{i=1}^n K_i \Delta x_i = \nabla f(\bar{x}) \Delta \bar{x}$, где $\nabla f(\bar{x}) = [K_1 \dots K_n]$ - вектор-строка градиента $f(\bar{x})$ в точке \bar{x}_n с элементами $K_i = \partial f(\bar{x}) / \partial x_i|_{\bar{x}=\bar{x}_n}$.

Рассмотрим примеры линеаризации CX.

Пример 1.1. Устройство умножения (рис. 1.7): $\partial y / \partial x_1|_{x_2=x_{2n}} = x_{2n}$, $\partial y / \partial x_2|_{x_1=x_{1n}} = x_{1n}$, $y = y_n + x_{2n}(x_1 - x_{1n}) + x_{1n}(x_2 - x_{2n})$.

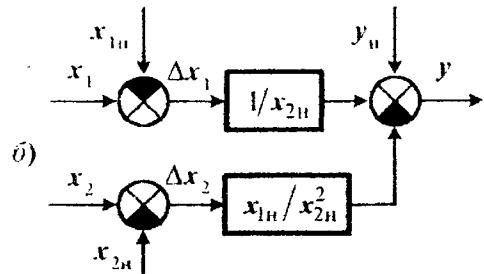
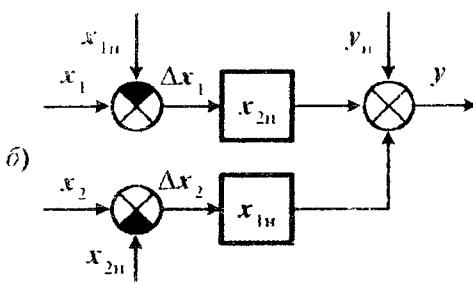
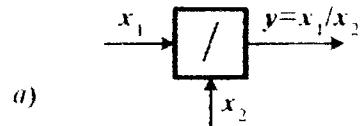
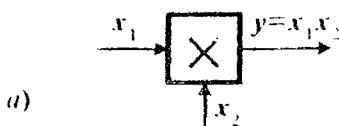


Рис. 1.7

Рис. 1.8

Пример 1.2. Устройство деления (рис. 1.8): $\frac{\partial y}{\partial x_1}|_{x_2} = 1/x_{2H}$, $\frac{\partial y}{\partial x_2}|_{x_1} = -x_{1H}/x_{2H}^2$, $y = y_H + (x_1 - x_{1H})/x_{2H} - (x_2 - x_{2H})x_{1H}/x_{2H}^2$. [1]

Пример 1.3. Вольт-амперная характеристика (ВАХ) диода, то есть зависимость тока I от напряжения U и температуры окружающей среды T , имеет вид (рис. 1.9, а)

$$I(U, T) = I_o(T) \left(e^{UT_n/n\Phi_T T} - 1 \right), \quad I_o(T) = \gamma T^2 e^{-\Phi_B T_n/\Phi_T T}, \quad (1.1)$$

где $\Phi_T = 0,0257$ и $\Phi_B = 0,7$ - тепловой и барьерный потенциалы, В; n и γ - индивидуальные для каждого диода коэффициенты. Справочные данные номинального режима диода КД512А [16]: $I_n = 10 \text{ мА}$ при $U_n = 1 \text{ В}$ и $T_n = 25^\circ\text{C} = 298 \text{ К}$. Предельные параметры диода: обратный ток $I_{on} = 5 \text{ мкА}$ при максимальном обратном напряжении $U_{omax} = 15 \text{ В}$; максимальный прямой ток $I_{max} = 20 \text{ мА}$; диапазон температур от $T_{min} = -25^\circ\text{C}$ до $T_{max} = 100^\circ\text{C}$.

Линеаризовать ВАХ диода в окрестности точки (U_n, T_n, I_n) . Построить рабочую область диода в окрестности номинального режима. Оценить изменение тока при изменениях напряжения на $\Delta U = 100 \text{ мВ}$ и температуры на $\Delta T = -20^\circ\text{C}$.

Решение. Вычислим коэффициенты n и γ решением системы уравнений (1.1) в двух режимах (U_n, T_n, I_n) и $(-U_{omax}, T_n, I_{on})$, причем $\exp(-U_{omax}/n\Phi_T) \approx 0$:

$$\begin{cases} I_n = \gamma T_n^2 e^{-\Phi_B T_n/\Phi_T T_n} \left(e^{U_n/n\Phi_T T_n} - 1 \right), \\ I_{on} \approx \gamma T_n^2 e^{-\Phi_B T_n/\Phi_T T_n}, \end{cases}$$

$$n = \frac{U_n}{\Phi_T \ln(1 + I_n/I_{on})} \approx 5,12,$$

$$\gamma = \frac{I_{on} e^{\Phi_B T_n/\Phi_T T_n}}{T_n^2} = 37,88 \text{ А/К}^2.$$

Найдем производные $I(U, T)$ по U и T :

$$K_U = \left. \frac{\partial I(U, T)}{\partial U} \right|_{U_n} = \frac{\gamma T_n^2}{n\Phi_T} (U_n - n\Phi_B) \cdot n\Phi_T = 0,0761 \text{ мА/мВ},$$

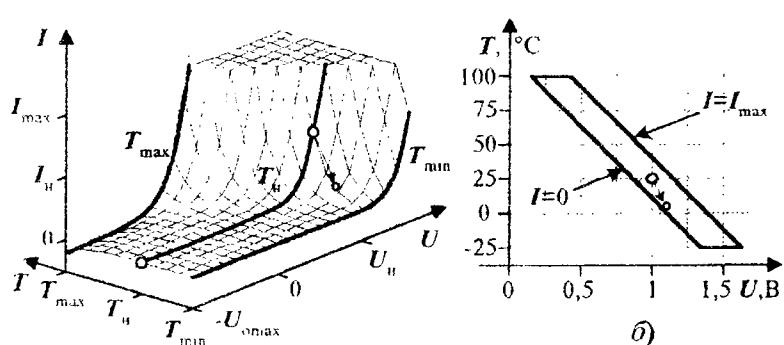


Рис. 1.9

$$K_T = \left. \frac{\partial I(U, T)}{\partial T} \right|_U = \frac{\gamma T_u}{n\varphi_1} e^{-\Phi_B/\Phi_1} \left[\left(e^{U_u/n\varphi_1} - 1 \right) \left(2n\varphi_1 + n\varphi_B - U_u \right) - U_u \right] = 0,7258 \text{ мА/К}.$$

Таким образом, линеаризованная ВАХ открытого диода в отклонениях ΔU , ΔT и ΔI имеет вид $\Delta I = K_U \Delta U + K_T \Delta T$. В переменных U (мВ) и T (°C) зависимость

$$I = 10 + 0,0761(U - 1000) + 0,7258(T - 25) = 0,0761U + 0,7258T - 84,2 \text{ мА}$$

есть уравнение плоскости в пространстве $U \times T \times I$, проходящей через точку (U_u, T_u, I_u) касательно к поверхности $I(U, T)$. Рабочая область диода изображена на рис. 1.9,б и ограничена прямыми $T = -25^\circ\text{C}$, $T = 100^\circ\text{C}$, $0,0761U + 0,7258T = 84,2$ и $0,0761U + 0,7258T = 104,2$. Левее рабочей области в пределах $-25^\circ\text{C} \leq T \leq 100^\circ\text{C}$ расположена область отсечки, а правее - область насыщения диода.

При заданных отклонениях ΔU и ΔT получим приращение тока $\Delta I = 0,0761 \cdot 100 - 0,7258 \cdot 20 = -6,91 \text{ мА}$ и полный ток $I = 3,09 \text{ мА}$. Истинное значение тока, вычисленное по нелинейному уравнению (1.1), равно 4,8 мА. Большая относительная погрешность линеаризации $\delta_I = 35,6\%$ при небольших отклонениях аргументов от номинального режима объясняется сильной нелинейностью ВАХ. \square

1.2.3. Статические ошибки в замкнутых системах управления

Снова функционирования САУ - принцип обратной связи, то есть зависимость текущего управления объектом от его состояния, обусловленного предыдущими воздействиями. Обратная связь может быть *естественной* (присущей ОБУ) и *искусственно организованной* для повышения качества регулирования. Отрицательная (положительная) ОС действует в сторону уменьшения (увеличения) отклонений выходных координат ОБУ от уставок. Деление на ООС и ПОС условно: при определенных частотных свойствах объекта может произойти инверсия знака ОС.

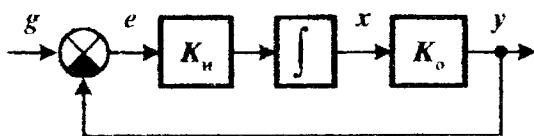
Обозначим (рис. В.1,в): K_y и K_o - статические коэффициенты усиления УУ и, соответственно, ОБУ вместе с ИУ. Тогда $x = K_y e$ и $y = K_o x$, а ошибка регулирования

$$e = g - y = g - K_y K_o e = g / (1 + K_y K_o) \neq 0.$$

Вывод: *в статической замкнутой системе всегда существует ненулевая статическая ошибка регулирования*. Будь она нулевой, были бы нулевыми управление x и выход y , что дало бы *ненулевое* значение $e = g - y$. Полученное противоречие доказывает основное свойство статических замкнутых систем.

Чтобы уменьшить статическую ошибку, нужно увеличивать значение $K_y K_o$. Поскольку обычно объект неизменяется, то необходимо увеличивать K_y до максимально возможного значения. Верхний предел увеличения K_y ограничен мощностью УУ и, в большей степени, требованиями устойчивости замкнутой САУ. На величину статической ошибки влияют также постоянные неконтролируемые внешние воздействия. Так, если на объекте скачком изменилась нагрузка f_o , то изменится и выходная координата $y(t)$. В установившемся режиме замкнутой статической системы благодаря ООС автоматически сформируются новые значения y , e и x , зависящие от новой нагрузки.

Для устранения нежелательного свойства статизма введем в УУ дополнительный элемент - *интегратор* (рис. 1.10,а). Докажем от противного, что в установившемся режиме полученной системы всегда будет достигаться нулевая статическая ошибка. Про-



a)

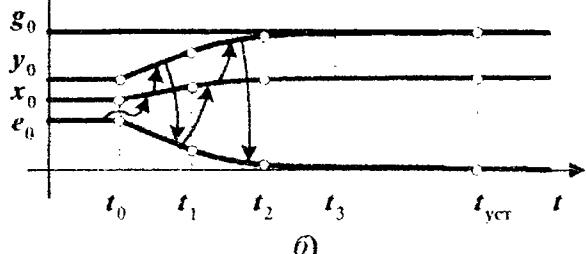


Рис. 1.10

следим развитие процессов $e(t)$, $x(t)$ и $y(t)$ в пошаговом режиме времени (рис. 1.10, б).

Итак, предположим, что к моменту времени t_0 в системе установились *постоянные* значения управления x_0 , выхода $y_0 \neq g_0$ и ошибки $e_0 = g_0 - K_o x_0 \neq 0$. На первом шаге интегратор, отрабатывая постоянную ошибку, дает линейно изменяющееся управление $x(t) = x_0 + K_n e_0 (t - t_0)$. Оно, в свою очередь, приводит к линейно изменяющемуся выходу $y(t) = K_o x_0 + K_o K_n e_0 (t - t_0)$, приближающемуся к уставке g_0 . Тем самым ошибка регулирования $e(t) = e_0 - K_n K_o e_0 (t - t_0)$ перестает быть постоянной и при правильно рассчитанном коэффициенте K_n начинает уменьшаться. На последующих шагах процессы $e(t)$, $x(t)$ и $y(t)$ становятся нелинейными, но общая тенденция развития переходных процессов такова, что с течением времени управление изменяется до тех пор, пока выход системы не сравняется с уставкой, а ошибка не станет исчезающей малой.

Таким образом, полученное противоречие позволяет сделать основной вывод: *в астатической системе всегда автоматически устанавливается нулевая ошибка регулирования*. При этом выход интегратора равен g_0/K_o при нулевом его входе. Это справедливо при любой статической нагрузке, действующей на объект. Скачкообразное изменение нагрузки порождает изменение выхода системы и новый переходный процесс устранения статической ошибки благодаря интегратору в структуре регулятора и действию ООС. Управление $x(t) = K_n \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$ называется *интегральным*.

Системы с И-управлением являются астатическими (с нулевой статической ошибкой), но медленными, что объясняется инерционностью процесса интегрирования ошибки. Системы с пропорциональным управлением $x(t) = K_p e(t)$ могут быть быстрыми, действующими, но не имеют астатизма. Комбинация $x(t) = K_p e(t) + K_n \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$ пропорциональной и интегральной составляющих управления с оптимально подобранными коэффициентами K_p и K_n делает *двухканальную* замкнутую систему (рис. 1.11) астатической и быстродействующей [2,3].

При больших уровнях ошибки работает преимущественно пропорциональная составляющая управления, быстро сводящая ошибку до значения $g/(1+K_p K_o)$. Окончательное точное сведение ошибки к нулю возлагается на интегральную составляющую управления.

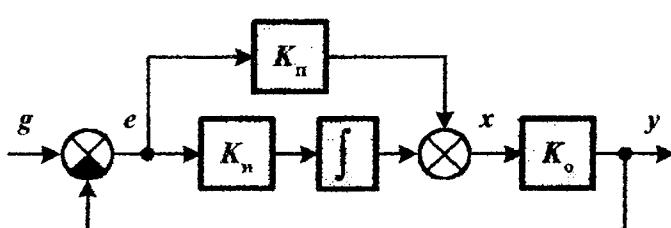


Рис. 1.11

1.3. СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СХЕМ НА ОПЕРАЦИОННЫХ УСИЛИТЕЛЯХ

Для практической реализации и моделирования элементов и систем будем использовать широко распространенные средства аналоговой электроники - **операционные усилители (ОУ)**, позволяющие конструировать сложные и разнообразные системы с широким спектром статических и динамических свойств [13,14,15]. Операционный усилитель (рис. 1.12,*a*) - это аналоговое устройство усиления разности $\Delta U = U - \bar{U}$ напряжений на его **прямом** (U) и **инверсном** (\bar{U}) входах: $U_{\text{вых}} = K_y \Delta U$. Усилительные свойства ОУ проявляются в области линейности его СХ при $|\Delta U| \leq U_{\text{max}}/K_y$, иначе ОУ работает в областях насыщения (рис. 1.12,*b*).

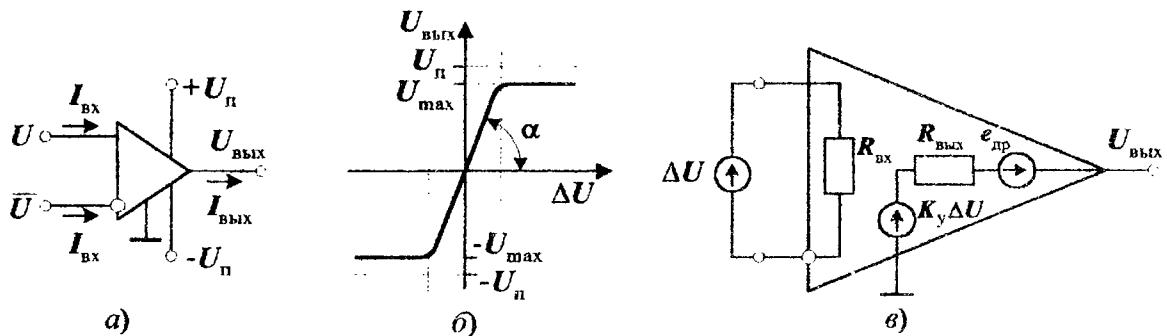


Рис. 1.12

Реальные ОУ серий 140, 153, 154, 157, 544, 553, 574 имеют следующие параметры: коэффициент усиления разностного (дифференциального) сигнала $K_y = 10^4 \div 10^6 = \tan(\alpha)$ (рис. 1.12,*b*); входное сопротивление $R_{\text{вх}}$ от 300 кОм (в ОУ с биполярным входным каскадом) до 10 ГОм (в ОУ с входным каскадом на полевых или МДП-транзисторах); выходное сопротивление $R_{\text{вых}} = 10 \div 300$ Ом; напряжение смещения (дрейф нуля) $e_{\text{др}} = 0,1 \div 10$ мВ, равное выходному напряжению при $\Delta U = 0$; двухполлярное напряжение питания $U_{\text{п}} = \pm(3 \div 40)$ В. На рис. 1.12,*c* приведена простейшая схема замещения ОУ.

В практических расчетах можно считать ОУ **идеальным** с параметрами $K_y = \infty$, $R_{\text{вх}} = \infty$, $R_{\text{вых}} = 0$, $e_{\text{др}} = 0$, что дает исходные соотношения для анализа и синтеза схем на ОУ: $U = \bar{U}$, $I_{\text{вх}} = 0$, $I_{\text{вых}} = \infty$. Первое условие означает **потенциальное** равенство напряжений входов ОУ, но не физическое их соединение. Последнее условие означает, что выходной ток идеального ОУ не ограничен величиной сопротивления нагрузки. Второе и третье условия означают **токовую развязку каскадов** на ОУ друг от друга. В дальнейших схемах мы будем изображать ОУ без выводов заземления и напряжений питания.

1.3.1. Нелинейные статические элементы на операционных усилителях

Многими соединениями с ООС являются схемы прямого и инверсного включения ОУ. Допустим, навесные элементы простейших схем имеют ВАХ $I_1 = f_1(U_1)$ и $I_0 = f_0(U_0)$. В схеме с прямым включением ОУ (рис. 1.13,*a*) имеем $\bar{U} = x$ и $I_1 = I_0$, откуда получим $f_1(x) = f_0(y - x)$ и СХ

$$f(x) = x + f_0^{-1}(f_1(x)). \quad (1.2a)$$

В схеме с инверсным включением ОУ (рис. 1.13,б) $\bar{U} = 0$ и $I_1 = I_0$, откуда $f_1(x) = f_0(-y)$ и

$$f(x) = -f_0^{-1}(f_1(x)). \quad (1.2b)$$

При графическом решении по заданной ВАХ $I_0 = f_0(U_0)$ и току I_0 находится напряжение U_0 для схем с прямым (рис. 1.14,а) и инверсным (рис. 1.14,б) включением ОУ.

Устойчивая работа схем на ОУ в линейном режиме обеспечивается **обязательным** соединением выхода y с инверсным входом \bar{U} проводом или навесным двухполюсником ООС, благодаря чему в схеме автоматически поддерживается динамическое равновесие. Например, в схеме на рис. 1.13,а изменения x , ΔU и y синфазны.

Часть приращения напряжения с выхода ОУ передается на вход \bar{U} . Таким образом, в системе с ООС устанавливаются новые равновесные значения ΔU и y . В схеме на рис. 1.13,б изменения x , ΔU и y противофазны. Отрицательное приращение выходного напряжения передается через элемент обратной связи на вход \bar{U} , что устанавливает новые равновесные значения ΔU и y .

Рассмотрим некоторые простейшие схемы функционального преобразования электрических сигналов на ОУ с ООС (рис. 1.15,а - 1.18,а) и их СХ (рис. 1.15,б - 1.18,б).

1. **Пропорциональный неинвертирующий усилитель** (рис. 1.15): $U_1 = x$, $f_1(U_1) = U_1/R_1$, $U_0 = y - x$, $f_0(U_0) = U_0/R_0$, $f_0^{-1}(I) = R_0 I$, $y = x + R_0(x/R_1) = (1 + R_0/R_1)x = Kx$ с коэффициентом усиления схемы $K = 1 + R_0/R_1 = \tan(\alpha)$.

2. **Пропорциональный инвертирующий усилитель** (рис. 1.16): $U_1 = x$, $f_1(U_1) = U_1/R_1$, $U_0 = -y$, $f_0(U_0) = U_0/R_0$, $f_0^{-1}(I) = R_0 I$, $y = -R_0(x/R_1) = -(R_0/R_1)x = -Kx$ с коэффициентом усиления $K = R_0/R_1 = \tan(\alpha)$.

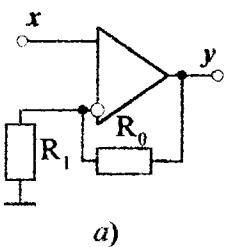


Рис. 1.15

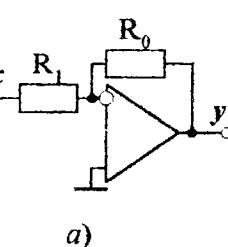
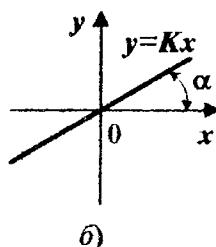
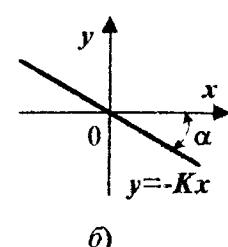


Рис. 1.16



3. **Логарифмический инвертирующий усилитель** (рис. 1.17): $f_1(U_1) = U_1/R_1$, $f_0(U_0) = I_o(e^{U_0/n\varphi_T} - 1)$, $f_0^{-1}(I) = n\varphi_T \ln(1 + I/I_o)$, $y = -n\varphi_T \ln(1 + x/I_o R_1)$.

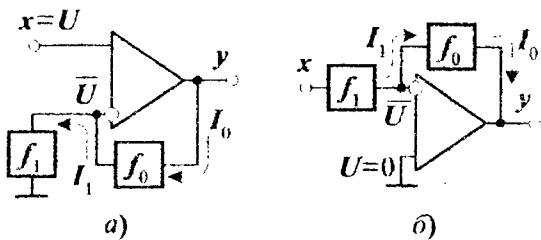
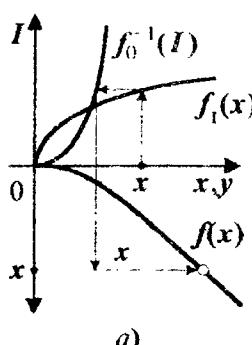
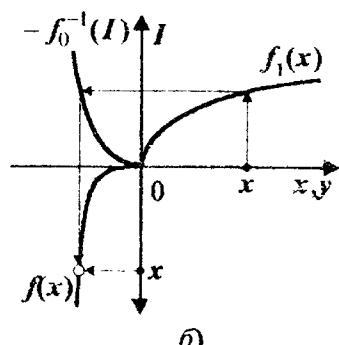


Рис. 1.13



а)



б)

Рис. 1.14

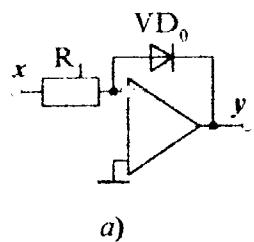


Рис. 1.17

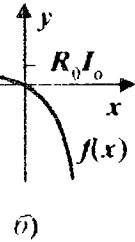
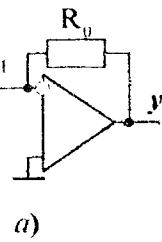
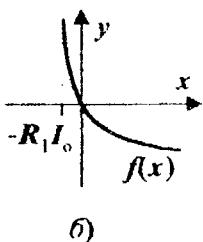


Рис. 1.18

4. Экспоненциальный инвертирующий усилитель (рис. 1.18): $f_1(U_1) = I_o \left(e^{U_1/n\Phi_T} - 1 \right)$, $f_0(U_0) = U_0 / R_0$, $f_0^{-1}(I) = R_0 I$, $y = -R_0 I_o \left(e^{x/n\Phi_T} - 1 \right)$.

1.3.2. Линейные статические элементы на операционных усилителях

Рассмотрим схему на ОУ с ООС (рис. 1.19), к прямым входам $x_{11} \dots x_{1n}$ которой подключены сопротивления $R_{11} \dots R_{1n}$, к инверсным входам $x_{21} \dots x_{2m}$ - сопротивления $R_{21} \dots R_{2m}$, а в цепи ООС включено сопротивление R_0 . Для того, чтобы реальный ОУ можно было с достаточной точностью считать идеальным, нужно выбирать сопротивления всех навесных резисторов хотя бы на порядок (в 10 раз) меньше паспортного значения R_{bx} и на порядок больше $R_{vых}$.

Напряжения на прямом и инверсном входах можно найти по законам Кирхгофа и Ома:

$$\sum_{j=1}^n I_{1j} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{x_{1j} - U}{R_{1j}} = 0,$$

откуда получим напряжение U , а по аналогии и \bar{U} :

$$U = \sum_{j=1}^n \frac{x_{1j}}{R_{1j}} \Bigg/ \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_{1j}}, \quad \bar{U} = \left(\sum_{j=1}^m \frac{x_{2j}}{R_{2j}} + \frac{y}{R_0} \right) \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{R_{2j}} + \frac{1}{R_0} \right).$$

Так как в идеальном ОУ $U = \bar{U}$, то из последних выражений следует

$$y = \left(\sum_{j=1}^m \frac{R_0}{R_{2j}} + 1 \right) \sum_{j=1}^n \frac{x_{1j}}{R_{1j}} \Bigg/ \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_{1j}} - \sum_{j=1}^m \frac{R_0}{R_{2j}} x_{2j}.$$

Таким образом, рассматриваемая схема выполняет n операций сложения и m операций вычитания подаваемых на ее входы напряжений:

$$y = \sum_i K_{1i} x_{1i} - \sum_i K_{2i} x_{2i}, \quad K_{1i} = \left(\sum_j \frac{R_0}{R_{2j}} + 1 \right) \Bigg/ \sum_j \frac{R_{1i}}{R_{1j}}, \quad K_{2i} = \frac{R_0}{R_{2i}}. \quad (1.3)$$

Проанализируем последствия добавления в схему заземленных входов $x_{10} = 0$ и $x_{20} = 0$, соединенных с входами ОУ через сопротивления R_{10} и R_{20} (на рис. 1.19 они изображены пунктиром). Из (1.3) следует, что это влияет только на коэффициенты K_{1i} .

В первом случае все они уменьшаются из-за увеличения знаменателей у K_{1i} . Во втором случае увеличиваются все числители и сами коэффициенты K_{1i} .

Задача синтеза схемы состоит в определении сопротивлений R_{1i} , R_{2i} и R_0 по заданным значениям коэффициентов K_{1i} и K_{2i} . Особенностью этой задачи является ее недоопределенность (число неизвестных $n+m+1$ меньше числа $n+m$ заданных коэффициентов) и вырожденность. Обозначим суммы коэффициентов усиления схемы по прямым и инверсным входам: $S_1 = \sum K_{1i}$ и $S_2 = \sum K_{2i}$. Суммируя в (1.3) коэффициенты K_{1i} , получим *ключевую зависимость между S_1 и S_2* , существующую в любой готовой схеме на ОУ (рис. 1.19) независимо от числа и сопротивлений навесных резисторов:

$$S_1 = \left(\sum_j \frac{R_0}{R_{2j}} + 1 \right) \sum_i \frac{1}{R_{1i}} / \sum_j \frac{1}{R_{1j}} = S_2 + 1. \quad (1.4)$$

Для численного расчета $m+1$ сопротивлений R_{2i} и R_0 по m коэффициентам K_{2i} необходимо доопределить (1.3) еще одним условием. Например, задать произвольно сопротивление R_0 , тогда сопротивления инверсных входов будут равны $R_{2i} = R_0 / K_{2i}$.

Однозначное определение n сопротивлений R_{1i} по n коэффициентам K_{1i} также невозможно из-за условия вырожденности, вытекающего из уравнений (1.3) и (1.4):

$$K_{1i} R_{1i} = S_1 / \sum_j \left(1/R_{1j} \right) = \text{const } \forall i = 1, n.$$

Если задать произвольно любое сопротивление R_{1j} , то остальные сопротивления, подключенные к прямым входам, однозначно находятся как $R_{1i} = K_{1j} R_{1j} / K_{1i} \forall i \neq j$.

При произвольно заданных коэффициентах K_{1i} и K_{2i} условие (1.4) скорее всего не выполнится. Это означает, что схема на рис. 1.19 структурно неполная. В ней не хватает одного из заземленных навесных резисторов R_{10} или R_{20} . Введение такого резистора эквивалентно добавлению в первое уравнение (1.3) нулевого слагаемого $K_{10}x_{10} = 0$ или $K_{20}x_{20} = 0$ с *положительным* коэффициентом усиления по заземленному входу $K_{10} = S_2 + 1 - S_1$ или $K_{20} = S_1 - S_2 - 1$. Какой из этих резисторов нужно добавить, зависит от соотношения сумм S_1 и $S_2 + 1$. Введение заземленных входов изменяет структуру схемы и восстанавливает баланс (1.4), при этом уравнение схемы не изменяется.

Таким образом, при синтезе схемы принимаем независимыми сопротивления R_{1i} и R_0 , а остальные сопротивления вычислим по формулам

$$R_{1i} = K_{1j} R_{1j} / K_{1i} \quad \forall i \neq j, \quad R_{2i} = R_0 / K_{2i}. \quad (1.5)$$

Если в полученной схеме окажется единственный прямой вход x_{11} (рис. 1.20), то по (1.3) его коэффициент усиления $K_{11} = S_2 + 1$ не зависит от R_{11} . Поэтому можно выбрать это сопротивление произвольным, в том числе и $R_{11} = 0$ (провод).

Пример 1.4. Построить схемы на ОУ КР544УД1А ($R_{\text{вх}} > 10 \text{ МОм}$, $R_{\text{вых}} < 200 \text{ Ом}$ [14]), реализующие следующие алгебраические соотношения (рис. 1.21):

а) $y = 3x_{11} + 4x_{12} - 6x_{21}$: $S_1 = S_2 + 1 = 7 \Rightarrow R_{11} = 4R_{12}/3$, $R_{21} = R_0/6$. Сопротивления всех резисторов должны лежать в диапазоне $2 \text{ кОм} \div 1 \text{ МОм}$. Выберем значения

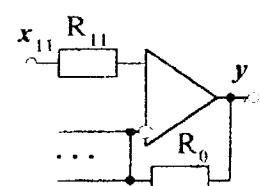


Рис. 1.20

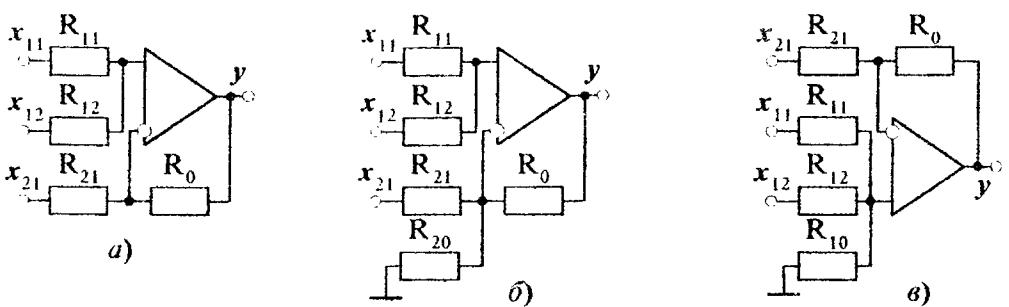


Рис. 1.21

$R_{12} = R_0 = 300 \text{ кОм}$, тогда $R_{11} = 400 \text{ кОм}$ и $R_{21} = 50 \text{ кОм}$;

б) $y = 3x_{11} + 4x_{12} - 5x_{21}$: $S_1 = 7 > S_2 + 1 = 6 \Rightarrow K_{20} = S_1 - S_2 - 1 = 1$, $R_{11} = 4R_{12}/3$, $R_{20} = R_0$, $R_{21} = R_0/5$. Выберем $R_{12} = R_0 = 300 \text{ кОм}$, тогда $R_{11} = 400 \text{ кОм}$, $R_{20} = 300 \text{ кОм}$ и $R_{21} = 60 \text{ кОм}$;

в) $y = 3x_{11} + 4x_{12} - 8x_{21}$: $S_1 = 7 < S_2 + 1 = 9 \Rightarrow K_{10} = S_2 + 1 - S_1 = 2$, $R_{11} = 2R_{10}/3$, $R_{12} = 2R_{10}/4$, $R_{21} = R_0/8$. Выберем $R_{10} = R_0 = 240 \text{ кОм}$, тогда $R_{11} = 160 \text{ кОм}$, $R_{12} = 120 \text{ кОм}$ и $R_{21} = 30 \text{ кОм}$. \square

Рассмотрим некоторые принципиальные схемы на ОУ и соответствующие им структурные схемы, выполняющие простейшие алгебраические операции.

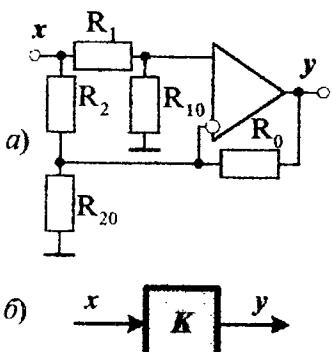


Рис. 1.22

1. Универсальный одновходовый усилитель (рис. 1.22) с коэффициентом усиления

$$K = \frac{1 + R_0/R_2 + R_0/R_{20}}{1 + R_1/R_{10}} - \frac{R_0}{R_2}.$$

Выбором сопротивлений схемы можно получить любое желаемое по знаку и абсолютной величине значение K в диапазоне $-R_0/R_2 \leq K \leq 1 + R_0/R_{20}$, в том числе:

- для схемы инвертирующего усилителя (рис. 1.23, а) $K = -R_0/R_2 < 0$;
- для схемы неинвертирующего усилителя-делителя (рис. 1.23, б) $K = (1 + R_0/R_{20})/(1 + R_1/R_{10}) > 0$;

- для схемы делителя напряжения (рис. 1.23, в) $0 < K = R_{10}/(R_1 + R_{10}) < 1$;
- для схемы усилителя напряжения (рис. 1.23, г) $K = 1 + R_0/R_{20} > 1$;

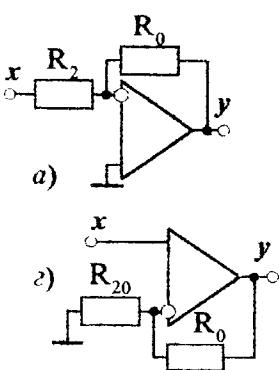


Рис. 1.23

- для схемы повторителя напряжения (рис. 1.23,б) $K=1$. Операционный повторитель аналогичен эмиттерному повторителю на транзисторе, но в нем обеспечивается точное воспроизведение входного напряжения увеличенной мощности. Повторитель используется для развязки каскадов схемы друг от друга благодаря параметрам $R_{\text{вх}}=\infty$ и $R_{\text{вых}}=0$.

2. Усилитель-вычитатель (рис. 1.24), выполняющий операцию $y=K_1x_1-K_2x_2$ с коэффициентами $K_1=\frac{1+R_0/R_2}{1+R_1/R_{10}}$ и

$K_2=\frac{R_0}{R_2}$. При $\frac{R_0}{R_2}=\frac{R_{10}}{R_1}=K$ он

становится дифференциальным усилителем: $y=K(x_1-x_2)$. При $R_1=R_{10}$ и $R_2=R_0$ получим вычитатель: $y=x_1-x_2$.

3. Неинвертирующий усилитель-сумматор (рис. 1.25), выполняющий операцию

$y=\sum_{i=1}^n K_i x_i$ со всеми положительными коэффициентами $K_i=\frac{1+R_0/R_{20}}{\sum_j R_i/R_j + R_i/R_{10}}$.

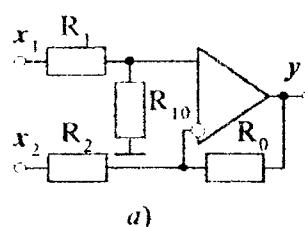
Синтез схемы по заданным K_i : $R_i=\frac{R_{10}}{K_i}$ и $R_{20}=\frac{R_0}{\sum_i K_i}$.

Выбором сопротивлений можно получить устройства усреднения $y=\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ (рис. 1.26,а) и

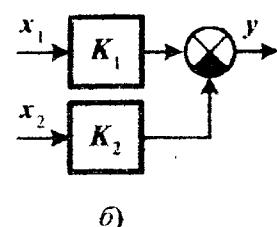
суммирования $y=\sum_{i=1}^n x_i$ (рис. 1.26,б) входных напряжений.

4. Инвертирующий усилитель-сумматор (рис. 1.27), выполняющий операцию вычитания $y=-\sum_{i=1}^n K_i x_i$ с коэффициентами $K_i=R_0/R_i$.

Синтез схемы: $R_i=R_0/K_i$.

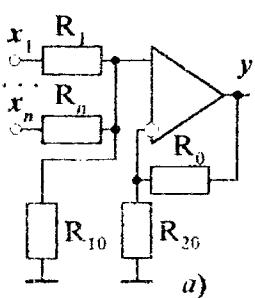


а)

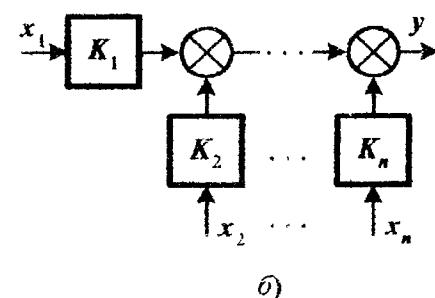


б)

Рис. 1.24

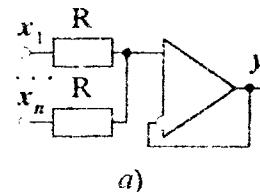


а)

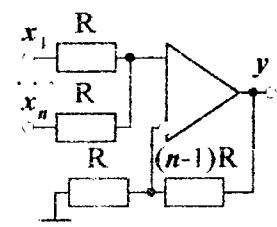


б)

Рис. 1.25

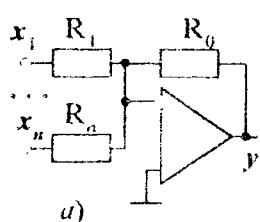


а)

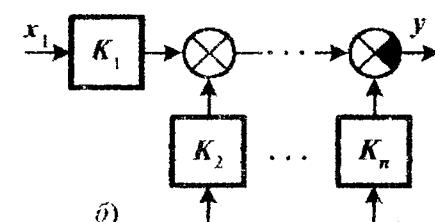


б)

Рис. 1.26



а)



б)

Рис. 1.27

1.4. ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ ЭЛЕМЕНТОВ САУ

Статические характеристики определяют лишь установившиеся режимы работы элементов САУ. Переходные процессы описываются уравнениями динамики - дифференциальными уравнениями (ДУ). Моделями систем с сосредоточенными параметрами являются ДУ в полных производных, а с распределенными параметрами - ДУ в частных производных. Для составления ДУ система делится на элементы. Пусть N - количество элементов в системе, y_i - выход i -го элемента \mathcal{E}_i . Его выход может быть связан с выходами других элементов \mathcal{E}_j непосредственно или через сумматоры (вычитатели). Эти элементы не являются динамическими, так как описываются алгебраическими уравнениями.

Для каждого динамического элемента составляются ДУ на основе законов механики поступательного и вращательного движений, электротехники и т.п. Порядок каждого ДУ не выше второго. Таким образом, объединяя ДУ элементов, получим систему из N в общем случае *нелинейных* ДУ [1]:

$$f_i(y_1, y'_1, y''_1, \dots, y_N, y'_N, y''_N, x, x') = 0 \quad \forall i = \overline{1, N}. \quad (1.6)$$

Линеаризация гладкой дифференцируемой функции $f_i(\dots)$ заключается в разложении ее в ряд Тейлора в окрестности номинального режима $(y_{1n}, \dots, y_{Nn}, x_n)$:

$$f_{in} + \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^2 \frac{\partial f_i}{\partial y_j^{(k)}} \Bigg|_n \Delta y_j^{(k)} + \sum_{k=0}^1 \frac{\partial f_i}{\partial x^{(k)}} \Bigg|_n \Delta x^{(k)} + F_i = 0 \quad \forall i = \overline{1, N},$$

где $f_{in}(y_{jn}, y'_{jn}, y''_{jn} \forall j = \overline{1, N}, x_n, x'_n) = 0$ удовлетворяет ДУ (1.6); $\Delta y_j^{(k)} = y_j^{(k)} - y_{jn}^{(k)}$ и $\Delta x^{(k)} = x^{(k)} - x_n^{(k)}$ - отклонения выходных и входных переменных и их производных k -го порядка от номинальных значений; F_i содержит производные f_i по $y_j^{(k)}$ и $x^{(k)}$ второго и высших порядков. После отбрасывания нелинейных функций F_i линеаризованная система ДУ примет вид

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^2 q_{ijk} \Delta y_j^{(k)} = \sum_{k=0}^1 r_{ik} \Delta x^{(k)} \quad \forall i = \overline{1, N}, \quad q_{ijk} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial y_j^{(k)}} \right|_n, \quad r_{ik} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x^{(k)}} \right|_n.$$

С помощью *оператора дифференцирования* $p = d/dt$ запишем ее в *операторной форме*

$$\sum_{j=1}^N Q_{ij}(p) \Delta y_j = R_i(p) \Delta x \quad \forall i = \overline{1, N}, \quad Q_{ij}(p) = q_{ij0} + q_{ij1}p + q_{ij2}p^2, \quad R_i(p) = r_{i0} + r_{i1}p.$$

Полиномы $Q_{ij}(p)$ и $R_i(p)$ формируют $N \times N$ -матрицу $Q(p) = \begin{bmatrix} Q_{11}(p) & \dots & Q_{1N}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{N1}(p) & \dots & Q_{NN}(p) \end{bmatrix}$ и

N -вектор $R(p) = [R_1(p) \dots R_N(p)]^T$. По правилам матричной алгебры [11, 12] запишем последнюю систему в виде $Q(p) \Delta Y(t) = R(p) \Delta x(t)$ с N -вектором отклонений выходов элементов $\Delta Y = [\Delta y_1(t) \dots \Delta y_N(t)]^T$. Решение системы ДУ имеет вид

$$\Delta Y(t) = Q^{-1}(p) R(p) \Delta x(t). \quad (1.7)$$

Выход линейной системы с одним входом есть линейная комбинация выходов элементов и входа:

$$\Delta y = \sum_{j=1}^N c_j \Delta y_j + D \Delta x = C \Delta Y + D \Delta x,$$

где $C = [c_1 \dots c_N]$ - $1 \times N$ -матрица коэффициентов связи выходов элементов с выходом системы; D - коэффициент прямой связи входа системы с ее выходом. Подставив (1.7) в последнее выражение, получим $\Delta y = (CQ^{-1}(p)R(p) + D)\Delta x(t)$. Обратная операторная матрица $Q^{-1}(p)$ вычисляется делением присоединенной $N \times N$ -матрицы $\text{adj}Q(p)$ на *характеристический полином* системы - определитель $A(p) = \det Q(p)$. Обозначим полином $B(p) = C \cdot \text{adj}Q(p) \cdot R(p) + D A(p)$. В итоге получим *операторное уравнение связи отклонений входа и выхода системы* $A(p)\Delta y(t) = B(p)\Delta x(t)$ с полиномами $A(p)$ и $B(p)$. Ему соответствует ДУ во временной форме

$$a_0 \Delta y(t) + a_1 \Delta y'(t) + \dots + a_n \Delta y^{(n)}(t) = b_0 \Delta x(t) + b_1 \Delta x'(t) + \dots + b_m \Delta x^{(m)}(t).$$

Порядок ДУ равен n и определяет порядок динамической системы. Порядок правой части ДУ равен $m \leq n$. Так как каждый из N элементов имеет порядок ДУ не выше второго, то общий порядок системы удовлетворяет условию $1 \leq n \leq 2N$.

Обычно в системах стабилизации номинальный режим - это состояние равновесия:

$y_{\text{н}}^{(k)} = 0 \forall k = \overline{0, 2}$, $x_{\text{н}}^{(k)} = 0 \forall k = \overline{0, 1}$. Поэтому операторная форма ДУ системы имеет вид

$$\begin{cases} A(p)y(t) = B(p)x(t), & A(p) = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n = \sum_{i=0}^n a_i p^i, \\ B(p) = b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m = \sum_{i=0}^m b_i p^i. \end{cases} \quad (1.8)$$

Операторной передаточной функцией (ОПФ) системы $W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ называется

дробно-рациональная функция полиномов ДУ (1.8). Она позволяет компактно записать ДУ в виде $y(t) = W(p)x(t)$ [2].

Рассмотрим на практике процесс составления и линеаризации ДУ.

Пример 1.5 [8]. Механическая система (рис. 1.28), состоящая из тележки и шарнирно укрепленного на ней в неустойчивом равновесии перевернутого жесткого маятника, движется горизонтально под управлением внешней силы f . Параметры системы: $2l$ - длина маятника; m - масса маятника; M - масса тележки; d - линейное перемещение центра масс тележки; ϕ - угол отклонения маятника от вертикали; k_ϕ - коэффициент вязкого трения в оси маятника. Момент $M_{\text{тр}}$ трения в оси пропорционален угловой скорости $\dot{\phi} = \phi'$ вращения маятника; k_v - коэффициент вязкого трения тележки о поверхность. Сила $F_{\text{тр}}$ трения о поверхность пропорциональна скорости $v = d'$ движения тележки.

Получить нелинейную и линеаризованную модели движения системы в окрестностях неустойчивого и устойчивого состояний равновесия маятника. Входная переменная - $f(t)$, выходные - $d(t)$ и $\phi(t)$.

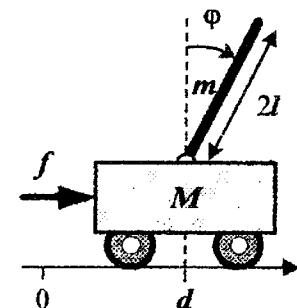


Рис. 1.28



Рис. 1.29

Решение. Составим уравнения динамики движения элементов системы (рис. 1.29), используя второй закон Ньютона:

$m(d(t) + l\sin(\phi(t)))'' = H(t)$ - горизонтальное движение центра масс маятника;

$m(l\cos(\phi(t)))'' = N(t) - mg$ - вертикальное движение центра масс маятника;

$J\phi''(t) = lN(t)\sin(\phi(t)) - lH(t)\cos(\phi(t)) - k_\omega\phi'(t)$ - вращательное движение маятника вокруг центра масс;

$Md''(t) = f(t) - k_v d'(t) - H(t)$ - горизонтальное движение тележки;

$0 = R(t) - N(t) - Mg$ - вертикальное движение тележки;

$J = 2 \int_0^l \rho \lambda^2 d\lambda = 2\rho l^3 / 3 = m l^2 / 3$ - момент инерции маятника с по-

гонной массой $\rho = m/2l$.

Исключая силы N и H , получим систему двух нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(d, \phi) = mdd''\cos(\phi) + (J + ml^2)\phi'' + k_\omega\phi' - mgl\sin(\phi) = 0, \\ f_2(d, \phi) = (M+m)d'' + k_v d' + ml\phi''\cos(\phi) - ml(\phi')^2\sin(\phi) - f = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Линеаризуя эту систему в окрестности номинального режима $f_H = 0$, $d_H = d'_H = d''_H = 0$ и $\phi_H = \phi'_H = \phi''_H = 0$, получим линейную модель системы

$$mdd'' + (J + ml^2)\phi'' + k_\omega\phi' - mgl\phi = 0, \quad (M+m)d'' + k_v d' + ml\phi'' - f = 0,$$

или в матричной форме $Q(p)Y(t) = R(p)f(t)$, где

$$\begin{aligned} Q(p) &= \begin{bmatrix} mlp^2 & (J + ml^2)p^2 + k_\omega p - mgl \\ (M + m)p^2 + k_v p & mlp^2 \end{bmatrix}; \quad Y(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix}; \quad R(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ A(p) &= mglk_v p + ((M + m)mgl - k_v k_\omega) p^2 - ((J + ml^2)k_v + (M + m)k_\omega) p^3 - \\ &\quad \cdot (M(J + ml^2) + mJ) p^4, \quad C_d = [1 \ 0], \quad C_\phi = [0 \ 1]. \\ \left\{ \begin{array}{l} d(t) = C_d Q^{-1}(p) R(p) f(t) = -\frac{mgl - k_\omega p - (J + ml^2)p^2}{A(p)} f(t), \\ \phi(t) = C_\phi Q^{-1}(p) R(p) f(t) = \frac{mlp^2}{A(p)} f(t). \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Пусть параметры системы имеют численные значения $I = 1 \text{ м}^2$, $m = 6 \text{ кг}$, $M = 11 \text{ кг}$, $k_\omega = 8 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, $k_v = 10 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$, примем для удобства расчетов $g = 10 \text{ м}/\text{с}^2$, вычислим момент инерции маятника $J = 2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ и запишем соответствующие уравнениям (1.10) численные ОПФ системы «тележка - перевернутый маятник»:

$$A(p) = 600p + 940p^2 + 216p^3 + 100p^4, \quad W_d(p) = \frac{60 - 8p - 8p^2}{A(p)}, \quad W_\phi(p) = \frac{6p^2}{A(p)}. \quad (1.11)$$

Ясно, что в данном номинальном режиме перевернутый маятник неустойчив. Как это можно определить по передаточной функции, рассмотрим в четвертой главе.

Выполнив линеаризацию уравнений динамики (1.9) в окрестности устойчивого номинального режима $f_{ii}=0$, $d_{ii}=d'_{ii}=d''_{ii}=0$ и $\phi_{ii}=180^\circ$, $\dot{\phi}_{ii}=\ddot{\phi}_{ii}=0$, получим ОПФ системы «тележка - обычный маятник»:

$$A(p)=600p+1100p^2+216p^3+100p^4, \quad W_d(p)=\frac{60+8p+8p^2}{A(p)}, \quad W_\phi(p)=\frac{6p^2}{A(p)}. \quad (1.12)$$

□

Операторный метод представляет ДУ в алгебраической форме, благодаря чему он гораздо удобнее для преобразований по сравнению с преобразованиями в дифференциальной форме. После составления ДУ элементов системы рекомендуется сразу перейти к их операторной форме формальной заменой производных $y^{(k)}(t)$ на $p^k y$. Например, компонентные уравнения радиоэлементов R , C и L в дифференциальной и операторной формах имеют вид

$$U_R=RI_R, \quad I_C=C\frac{dU_C}{dt} \Rightarrow I_C=CpU_C, \quad U_L=L\frac{dI_L}{dt} \Rightarrow U_L=LpI_L. \quad (1.13)$$

□ **Пример 1.6.** На рис. 1.30 приведена электрическая схема моста Вина - Робинсона [13] с входным напряжением x и выходным $y=U_1-U_2$. Составить ДУ этой схемы.

Решение. На основе законов Кирхгофа и формул (1.13) составим систему уравнений функционирования элементов схемы:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2RI_1=x-U_1 \\ RI_1=U_1 \\ I_2=I_3+I_4 \\ RI_2=x-U_3 \\ I_2=C\frac{d(U_3-U_2)}{dt} \\ RI_3=U_2 \\ I_4=C\frac{dU_2}{dt} \\ y=U_1-U_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2RI_1=x-U_1 \\ RI_1=U_1 \\ I_2=I_3+I_4 \\ RI_2=x-U_3 \\ I_2=Cp(U_3-U_2) \\ RI_3=U_2 \\ I_4=CpU_2 \\ y=U_1-U_2 \end{array} \right.$$

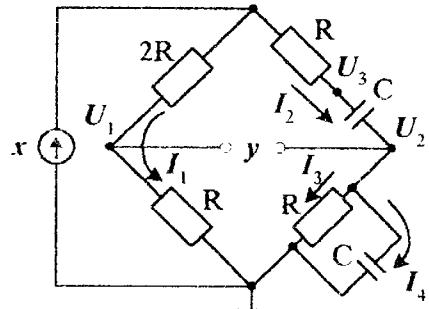


Рис. 1.30

Обозначив $T=RC$ и последовательно исключая переменные I_1 и I_4 и U_1 и U_3

$$I_1=\frac{x-U_1}{2R}, \quad U_1=\frac{x}{3}, \quad x-U_3=U_2+TpU_2 \Rightarrow U_3=x-(1+Tp)U_2,$$

$$x-U_3=Tp(U_3-U_2) \Rightarrow TpU_2=(1+Tp)U_3-x=Tpx-(1+Tp)^2U_2 \Rightarrow U_2=\frac{Tpx}{1+3Tp+T^2p^2},$$

$$y=\frac{x}{3}-\frac{Tpx}{1+3Tp+T^2p^2}=\frac{x+T^2p^2x}{3+9Tp+3T^2p^2},$$

получим ОПФ и ДУ схемы

$$W(p)=\frac{1+T^2p^2}{3(1+3Tp+T^2p^2)}, \quad 3y+9Ty'+3T^2y''=x+T^2x''. \quad (1.14)$$

□

1.5. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Б общем виде линейное ДУ системы с одним входом $x(t)$ и одним выходом $y(t)$ имеет вид

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^m b_i x^{(i)}(t). \quad (1.15)$$

Решение его методом вариации произвольных постоянных достаточно сложно. Для алгебраического решения линейных ДУ с произвольными начальными условиями разработан метод преобразования Лапласа [1,2,3,4,5,6,7,9,10].

Временная функция ограниченного роста

$$f(t): \left\{ |f(t)| \leq M e^{mt} \quad \forall t \geq 0, \quad f(t) = 0 \quad \forall t < 0 \right\}$$

имеет изображение, вычисляемое по формуле преобразования Лапласа:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad \forall s: \operatorname{Re}\{s\} > m. \quad (1.16)$$

Применяя интегрирование по частям $\int_a^b uv' dt = uv|_a^b - \int_a^b u'v dt$ [17], получим по индукции изображение $n+1$ -й производной временной функции ограниченного роста:

$$\begin{aligned} L\{f^{(n+1)}(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \left(f^{(n)}(t) \right)' dt = e^{-st} f^{(n)}(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f^{(n)}(t) (-se^{-st}) dt = \\ &= -s \int_0^\infty f^{(n)}(t) e^{-st} dt + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(f^{(n)}(t) e^{-st} \right) - f^{(n)}(0) = s L\{f^{(n)}(t)\} - f^{(n)}(0). \end{aligned}$$

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0), \quad L\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$L\{f'''(t)\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0), \quad L\{f^{(i)}(t)\} = s^i F(s) - \sum_{j=1}^i s^{i-j} f^{(j-1)}(0).$$

Подставим $L\{y^{(i)}(t)\}$ в левую часть ДУ (1.15):

$$\begin{aligned} L\left\{\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t)\right\} &= \sum_{i=0}^n a_i L\{y^{(i)}(t)\} = \left(\sum_{i=0}^n a_i s^i \right) Y(s) - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^i s^{i-j} y^{(j-1)}(0) = \\ &= A(s)Y(s) - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i s^k y^{(i-k-1)}(0) = A(s)Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \sum_{i=k+1}^n a_i y^{(i-k-1)}(0) = \\ &= A(s)Y(s) - \sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i = A(s)Y(s) - P(s), \quad A(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n. \end{aligned}$$

Коэффициенты полинома начальных условий $P(s)$ могут быть вычислены по рекуррентной или матричной формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(s) = p_0 + p_1 s + \dots + p_{n-1} s^{n-1}, \quad p_i = \sum_{j=i+1}^n a_j y^{(j-i-1)}(0) \quad \forall i=\overline{0, n-1}, \\ \left[\begin{array}{c} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{array} \right]. \end{array} \right. \quad (1.17a)$$

Аналогично для правой части ДУ (1.15)

$$L \left\{ \sum_{i=0}^m b_i x^{(i)} \right\} = B(s)X(s) - Q(s), \quad B(s) = b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(s) = q_0 + q_1 s + \dots + q_{m-1} s^{m-1}, \quad q_i = \sum_{j=i+1}^m b_j x^{(j-i-1)}(0) \quad \forall i=\overline{0, m-1}, \\ \left[\begin{array}{c} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{m-1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ b_2 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x(0) \\ x'(0) \\ \vdots \\ x^{(m-1)}(0) \end{array} \right]. \end{array} \right. \quad (1.17b)$$

Таким образом, изображение ДУ (1.15) имеет вид $A(s)Y(s) - P(s) = B(s)X(s) - Q(s)$, откуда

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} X(s) + \frac{P(s) - Q(s)}{A(s)}. \quad (1.18)$$

Передаточной функцией (ПФ) называется отношение изображения выхода системы к изображению ее входа $W(s) = Y(s)/X(s)$ при нулевых начальных значениях входа, выхода и их производных. Из (1.18) следует, что при нулевых начальных условиях ПФ имеет вид

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (1.19)$$

и равна ОПФ $W(p)$ при формальной замене оператора дифференцирования p на оператор Лапласа s , что позволяет составлять ПФ непосредственно по ДУ системы.

1.6. СОЕДИНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

Для определения ПФ системы, заданной структурной схемой, необходимо знать ПФ основных соединений элементов (звеньев) [1,2].

1. *Последовательное соединение звеньев* (рис. 1.31,а): $y_1 = W_1(s)x$, $y = W_2(s)y_1$, откуда $W(s) = W_2(s)W_1(s) = W_1(s)W_2(s)$. Для произвольного числа последовательно соединенных звеньев

$$W_{\text{посл}}(s) = \prod_i W_i(s). \quad (1.20a)$$

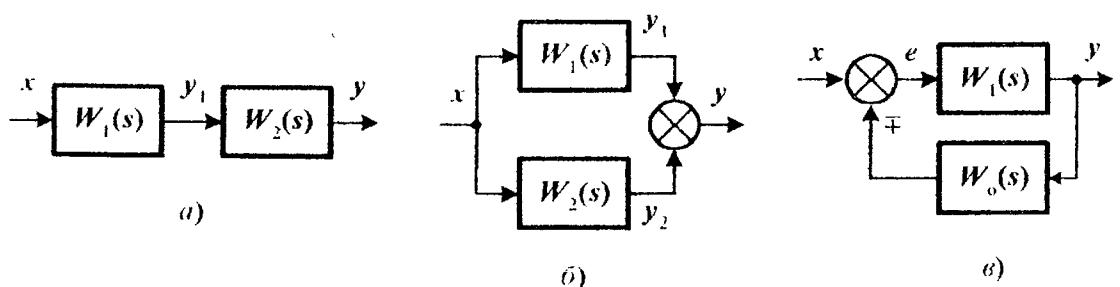


Рис. 1.31

2. *Параллельное соединение звеньев* (рис. 1.31, б): $y_1 = W_1(s)x$, $y_2 = W_2(s)x$, $y = y_1 + y_2$, откуда $W(s) = W_2(s) + W_1(s) = W_1(s) + W_2(s)$. Для произвольного числа параллельно соединенных звеньев

$$W_{\text{пар}}(s) = \sum_i W_i(s). \quad (1.206)$$

2. *Обратное соединение звеньев* (рис. 1.31, в): $e = x \mp W_o(s)y$, $y = W_1(s)e$, откуда

$$W_{\text{обр}}(s) = \frac{W_1(s)}{1 \pm W_1(s)W_o(s)}. \quad (1.20b)$$

Обратное соединение (обратная связь) широко применяется в автоматике для генерирования колебаний (ПОС), обеспечения устойчивости систем, стабилизации движения объектов в пространстве, уменьшения влияния на них неконтролируемого изменения параметров внешней среды (ООС).

Пример 1.7. Усилительный каскад с температурной стабилизацией (рис. 1.32, а). Из курса электроники известно, что включение сопротивления в эмиттерную цепь транзисторного каскада повышает стабильность его работы при изменениях температуры окружающей среды.

Выберем рабочую точку (I_6, U_{63}) транзистора на линейном участке входной неаризованной ВАХ (рис. 1.32, б) с углом наклона α и оценим зависимость стабильности коэффициента усиления каскада от изменения температуры, которое вызывает изменение коэффициента усиления тока и изменение входного сопротивления транзистора $R_{\text{вх}} = \text{ctg}(\alpha)$.

Составим основные уравнения каскада и соответствующую им структурную схему (рис. 1.32, в): $I_6 = (U_{63} - U_0)/R_{\text{вх}}$, $I_k = \beta I_6$, $I_3 = I_6 + I_k$, $x = U_{63} + I_3 R_3$, $y = U_n - I_k R_k$, откуда найдем выходное напряжение $y = U_n + W_3(U_0 - x)$ и коэффициент усиления каскада

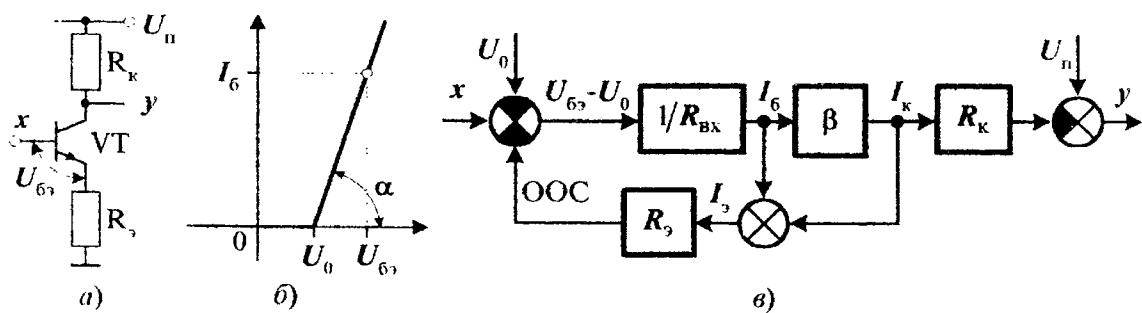


Рис. 1.32

$$W_s = \frac{\beta R_k}{R_{bx} + (\beta+1)R_3}. \text{ Без ООС (при } R_3=0 \text{) коэффициент усиления равен } W_0 = \beta R_k / R_{bx}.$$

Стабильность коэффициента усиления каскада оценим относительными изменениями W_s и W_0 от относительных изменений R_{bx} и β : $\Delta W = \frac{\partial W}{\partial R_{bx}} \Delta R_{bx} + \frac{\partial W}{\partial \beta} \Delta \beta$, где

$$\frac{\partial W_s}{\partial R_{bx}} = \frac{-\beta R_k}{(R_{bx} + (\beta+1)R_3)^2}; \quad \frac{\partial W_0}{\partial R_{bx}} = \frac{-\beta R_k}{R_{bx}^2}; \quad \frac{\partial W_s}{\partial \beta} = \frac{(R_{bx} + R_3)R_k}{(R_{bx} + (\beta+1)R_3)^2}; \quad \frac{\partial W_0}{\partial \beta} = \frac{R_k}{R_{bx}}.$$

Таким образом

$$\text{затем, получим } \delta W_s = \frac{-1}{1+(\beta+1)R_3/R_{bx}} \delta R_{bx} + \frac{1+R_3/R_{bx}}{1+(\beta+1)R_3/R_{bx}} \delta \beta \text{ и } \delta W_0 = -\delta R_{bx} + \delta \beta.$$

Оценим температурную нестабильность каскада при $R_{bx}=100 \Omega$, $R_3=1 \text{ к}\Omega$, $\beta=100$, $\Delta R_{bx}=-50 \Omega$ и $\Delta \beta=20$: $\delta W_s=0,0026$ или 0,26%, $\delta W_0=0,7$ или 70%. \square

Таким образом, введение ООС в виде резистора R_3 уменьшает нестабильность работы транзисторного каскада весьма существенно и тем больше, чем больше значение параметра β и отношение R_3/R_{bx} . Физически стабилизирующее действие ООС объясняется так: при повышении температуры возрастают токи транзистора. Эмиттерный ток, протекая по сопротивлению R_3 , уменьшает напряжение U_{be} , что уменьшает токи, возвращая выходное напряжение каскада почти к первоначальному значению.

Структурную схему любой сложности путем последовательных преобразований можно привести к простейшему виду с ПФ $W(s)=Y(s)/X(s)$, эквивалентному исходной схеме относительно входной и выходной переменных. Подробные правила эквивалентных структурных преобразований представлены в [1, табл. 3.3]. Основные преобразования приведены ниже в табл. 1.1. В процессе структурных преобразований ищется простейшее соединение звеньев (последовательное, параллельное или обратное) и заменяется эквивалентным звеном с соответствующей ПФ (1.20). Для предупреждения ошибок следует обозначать выполняемое преобразование, вычерчивать структурную схему после каждого шага и указывать на ней ПФ эквивалентных звеньев.

Пример 1.8. Разделить сцепленные контуры двухконтурной САУ. На рис. 1.33 представлены исходная структурная схема (a), схема после переноса узла e_2 через звено W_2 вперед (б) и после преобразований обратного и последовательного соединений (в). Окончательная ПФ системы равна

$$W = \left(\frac{W_1 W_2}{1 + W_2 W_4} \right) \left/ \left(1 + \frac{W_1 W_2}{1 + W_2 W_4} \frac{W_3}{W_2} \right) \right. = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_3 + W_2 W_4}.$$

Аналогичную ПФ получим аналитическим методом исключения вспомогательных переменных e_1 и e_2 . Запишем уравнения звеньев системы $e_1 = x - W_3 e_2$, $e_2 = W_1 e_1 - W_4 y$ и $y = W_2 e_2$ в матричной форме и выразим выход системы y через ее вход x :

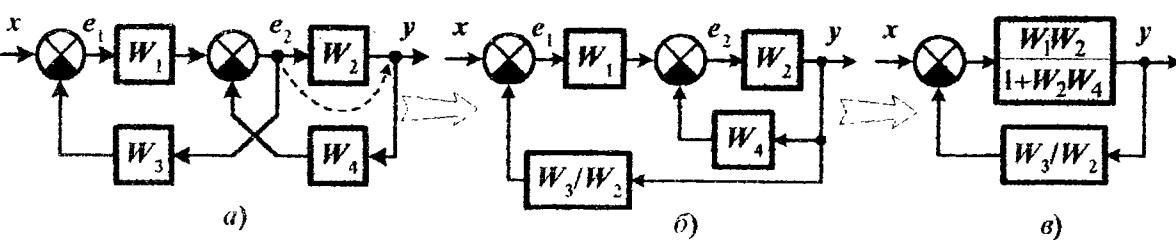
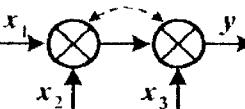
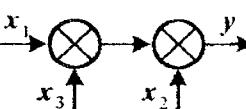
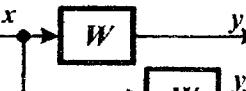
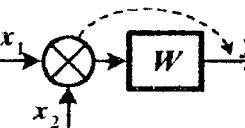
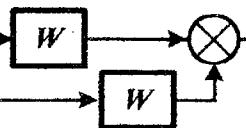
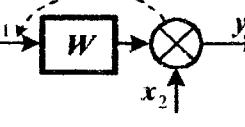
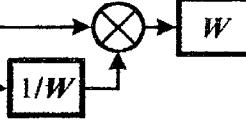
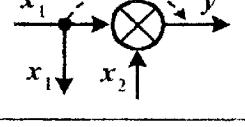
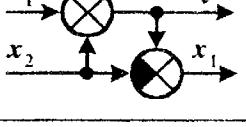
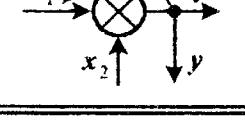
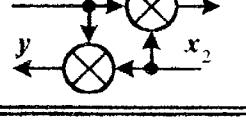


Рис. 1.33

Таблица 1.1

Преобразование	Исходная схема	Эквивалентная схема
Перестановка точек разветвления		
Перестановка сумматоров		
Перенос точки через звено вперед		
Перенос точки через звено назад		
Перенос сумматора через звено вперед		
Перенос сумматора через звено назад		
Перенос точки через сумматор вперед		
Перенос точки через сумматор назад		

$$\begin{bmatrix} 1 & W_3 \\ W_1 & -(1+W_2W_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x,$$

$$y = [0 \ W_2] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = [0 \ W_2] \begin{bmatrix} 1 & W_3 \\ W_1 & -(1+W_2W_4) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x = \frac{W_1W_2}{1+W_1W_3+W_2W_4} x.$$

□

1.7. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СХЕМ НА ОПЕРАЦИОННЫХ УСИЛИТЕЛЯХ

Задача динамического анализа схемы заключается в восстановлении решаемого ею ДУ или определении ее ПФ. Обратная задача синтеза состоит в разработке схемы по заданным ДУ или ПФ.

1.7.1. Динамические элементы на операционных усилителях

Активными компонентами линейных схем на ОУ являются резисторы (R), конденсаторы (C), индуктивности (L) и их последовательные, параллельные и смешанные соединения. Из компонентных уравнений (1.13) следуют операторные сопротивления радиоэлементов $Z(s)$:

$$Z_R = R, \quad Z_C(s) = \frac{1}{Cs}, \quad Z_L(s) = Ls. \quad (1.21)$$

Последовательное и параллельное соединения элементов Z_1 и Z_2 имеют сопротивления $Z_1 + Z_2$ и $Z_1 \parallel Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$. В табл. 1.2 приведены операторные сопротивления $Z(s)$ простейших двухполюсников. Смешанное соединение двухполюсников представляется суперпозицией последовательного и параллельного соединений.

Таблица 1.2

1		2		3		4	
	$\frac{1+RCs}{Cs}$		$R+Ls$		$\frac{1+LCs^2}{Cs}$		$\frac{1+RCs+LCs^2}{Cs}$
5		6		7		8	
	R		RLs		Ls		$R+Ls+RLCs^2$
	$\frac{1+RCs}{1+RCs}$		$\frac{R+Ls}{R+Ls}$		$\frac{1+LCs^2}{1+LCs^2}$		

С помощью операторных сопротивлений облегчается определение ПФ сложных схем. Например, схема моста Вина - Робинсона на рис. 1.30 является параллельным соединением двух делителей напряжения x , поэтому напряжения в средних точках и их разность равны (по прежнему $T = RC$)

$$U_1 = \frac{R}{2R+R}x = \frac{1}{3}x, \quad U_2 = \frac{R\|Z_C}{R+Z_C+R\|Z_C}x = \frac{1+Ts}{R+\frac{1}{Cs}+\frac{R}{1+Ts}}x = \frac{Ts}{1+3Ts+T^2s^2}x,$$

$$y = U_1 - U_2 = \frac{1}{3}x - \frac{Ts}{1+3Ts+T^2s^2}x = \frac{1+T^2s^2}{3(1+3Ts+T^2s^2)}x \Rightarrow W(s) = \frac{1+T^2s^2}{3(1+3Ts+T^2s^2)}.$$

Эта ПФ с точностью до замены s на p совпадает с ОПФ (1.14).

Рассмотрим схему динамического каскада на ОУ с ООС (рис. 1.34). Аналогично схеме статического каскада (рис. 1.19) ее выход и ПФ входов равны:

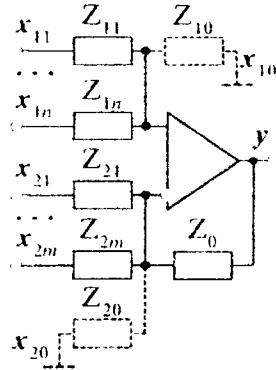


Рис. 1.34

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sum_i W_{1i}(s)x_{1i}(t) + \sum_i W_{2i}(s)x_{2i}(t), \\ W_{1i}(s) = \left(\frac{\sum_j Z_{0j}(s)}{\sum_j Z_{2j}(s)} + 1 \right) / \sum_j Z_{1j}(s), \quad W_{2i}(s) = \frac{Z_0(s)}{Z_{2i}(s)}. \end{array} \right.$$

Обозначим суммы ПФ входов: $S_1(s) = \sum_i W_{1i}(s)$ и $S_2(s) = \sum_i W_{2i}(s)$. Как и в (1.4), в работающей схеме между этими суммами существует зависимость $S_1(s) = S_2(s) + 1$. Для синтеза схемы по заданным ПФ ее входов необходимо дополнить $S_1(s)$ и (или) $S_2(s)$ недостающими ПФ $W_{10}(s)$ и (или) $W_{20}(s)$ с положительными коэффициентами, чтобы стало выполняться условие $S_1(s) + W_{10}(s) = S_2(s) + 1 + W_{20}(s)$. Схему надо дополнить заземленными входами $x_{10} = 0$ и (или) $x_{20} = 0$.

Приняв независимыми сопротивления $Z_{1i}(s)$ и $Z_0(s)$, остальные операторные сопротивления каскада с учетом дополнений определим по формулам, аналогичным (1.5):

$$Z_{1i}(s) = W_{1j}(s)Z_{1j}(s)/W_{1i}(s) \quad \forall i \neq j, \quad Z_{2i}(s) = Z_0(s)/W_{2i}(s). \quad (1.22)$$

Сопротивления $Z_{1i}(s)$, $Z_{2i}(s)$ и $Z_0(s)$ выбираются произвольно, но так, чтобы они соответствовали соединениям пассивных радиоэлементов (табл. 1.2), схема имела минимальное число навесных деталей и, желательно, не содержала индуктивностей.

Разработаем схемы на ОУ, решающих заданные ДУ или имеющие заданные ПФ.

Пример 1.9. $y + y' = 2x_{11} + 2x'_{11} + x_{12} - 2x_{21} - x'_{21}$. Операторное ДУ имеет вид $(1+s)y = 2(1+s)x_{11} + x_{12} - (2+s)x_{21} \Rightarrow y = W_{11}(s)x_{11} + W_{12}(s)x_{12} - W_{21}(s)x_{21}$, где $W_{11}(s) = 2$, $W_{12}(s) = 1/(1+s)$, $W_{21}(s) = (2+s)/(1+s)$. Вычисляем суммы $S_1(s) = (3+2s)/(1+s)$ и $S_2(s) + 1 = (3+2s)/(1+s)$. Поскольку $S_1(s) = S_2(s) + 1$, то дополнительных заземленных входов не требуется, а схема имеет два прямых входа x_{11} , x_{12} и один инверсный вход x_{21} .

По (1.22) определяем $Z_{12}(s) = \frac{W_{11}(s)}{W_{12}(s)}Z_{11}(s) = 2(1+s)Z_{11}(s)$, $Z_{21}(s) = \frac{Z_0(s)}{W_{21}(s)} = \frac{1+s}{2+s}Z_0(s)$. Вы-

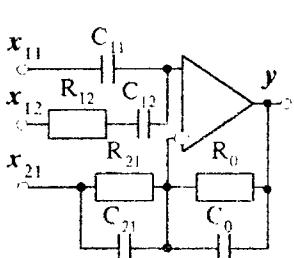


Рис. 1.35

бираем $Z_{11}(s) = 1/C_{11}s$ - конденсатор с емкостью C_{11} ; $Z_0(s) = R_0/(1+s)$ - параллельное соединение резистора с сопротивлением R_0 и конденсатора с емкостью $C_0 = 1/R_0$ (табл. 1.2, пункт 5). Тогда $Z_{12}(s) = 2(1+s)/C_{11}s$ - последовательное соединение резистора с $R_{12} = 2/C_{11}$ и конденсатора с $C_{12} = C_{11}/2$. Выбираем $Z_{21}(s) = R_0/(2+s)$ - параллельное соединение резистора с $R_{21} = R_0/2$ и конденсатора с $C_{21} = 1/R_0$. В результате получаем схему на рис. 1.35.

Пример 1.10. $y + y' = x_{11} + 2x'_{11} + x_{12} - 2x_{21} - x'_{21} \Rightarrow y = W_{11}(s)x_{11} + W_{12}(s)x_{12} - W_{21}(s)x_{21}$, где $W_{11}(s) = (1+2s)/(1+s)$; $W_{12}(s) = 1/(1+s)$; $W_{21}(s) = (2+s)/(1+s)$. Вычисляем $S_1(s) = 2$ и $S_2(s) + 1 = (3+2s)/(1+s)$. Так как $S_1(s) \neq S_2(s) + 1$, то добавляем в схему заземленный вход x_{10} с ПФ $W_{10}(s) = S_2(s) + 1 - S_1(s) = 1/(1+s)$, имеющей положительные коэффициенты. Выбираем $Z_{10}(s) = R_{10}$, тогда сопротивления прямых входов равны: $Z_{11}(s) = Z_{10}(s)W_{10}(s)/W_{11}(s) = R_0/(1+2s)$ - параллельное соединение $R_{11} = R_{10}$ и $C_{11} = 2/R_0$;

$Z_{12}(s) = Z_{10}(s)W_{10}(s)/W_{12}(s) = R_{10}$ - резистор с $R_{12} = R_{10}$. Выбираем $Z_0(s) = R_0/(1+s)$ - параллельное соединение резистора с R_0 и конденсатора с $C_0 = 1/R_0$, тогда сопротивление инверсного входа $Z_{21}(s) = Z_0(s)/W_{21}(s) = R_0/(2+s)$ - параллельное соединение резистора с $R_{21} = R_0/2$ и конденсатора с $C_{21} = 1/R_0$. В результате получаем схему на рис. 1.36. \square

✓ Пример 1.11. $y = W_{11}(s)x_{11} + W_{12}(s)x_{12}$ с ПФ

$W_{11}(s) = \frac{1+2s}{1+s}$ и $W_{12}(s) = \frac{1}{1+s}$. Тогда $S_1(s) = 2$ и $S_2(s) + 1 = 1$. Так как $S_1(s) \neq S_2(s) + 1$, то добавляем в схему заземленный вход x_{20} с ПФ $W_{20}(s) = S_1(s) - S_2(s) - 1 = 1$. Выбираем $Z_{11}(s) = 1/C_{11}s$, тогда $Z_{12}(s) = Z_{11}(s)W_{11}(s)/W_{12}(s) = (1+2s)/C_{11}s$ - последовательное соединение $R_{12} = 2/C_{11}$ и $C_{12} = C_{11}$. Выбираем $Z_0(s) = R_0$, тогда сопротивление заземленного инверсного входа равно $Z_{20}(s) = Z_0(s)/W_{20}(s) = R_0$. В результате получаем схему на рис. 1.37. \square

Простейшие типовые схемы динамических каскадов на ОУ и их ПФ сведены в табл. 1.3, в которой использованы следующие условные обозначения:

$$r_{ij} = R_i/R_j, c_{ij} = C_i/C_j, T_{ij} = R_i C_j, \tau_{ij}^2 = L_i C_j, \theta_{ij} = L_i/R_j. \quad (1.23)$$

При необходимости дополнительные схемы каскадов можно получить при $r_{ij} = 0$ выбором $R_i = 0$ (провод) или $R_j = \infty$ (разрыв), при $c_{ij} = 0$ выбором $C_i = 0$ (разрыв) или $C_j = \infty$ (провод) и при $\theta_{ij} = 0$ выбором $L_i = 0$ (провод) или $R_j = \infty$ (разрыв). Такие замены элементов проводом или разрывом следуют из формул операторных сопротивлений (1.21).

Применение табл. 1.3 вполне достаточно для построения большинства схем на ОУ. Если задана сложная ПФ, для которой в таблице не находится нужной схемы, то можно соединять каскады последовательно. Два последовательных каскада из второго и третьего столбцов с ПФ $W_2(s)$ и $W_3(s)$ можно заменить одним каскадом с ПФ $W_2(s)W_3(s)$. Это возможно благодаря развязке входной цепи от цепи в ОС. Например, схема моста Вина - Робинсона (рис. 1.30) на одном каскаде ОУ с ПФ (1.14) комбинируется из двух каскадов, имеющихся в табл. 1.3:

1) каскад с ПФ $W_2(s) = \frac{1}{3+9Ts+3T^2s^2}$ (пункт 23, б),

имеющий коэффициенты $c_{01} = 2$, $T_{10} = 9T$, $\tau_{10}^2 = 3T^2$ и параметры элементов $C_0 = 2C_1$, $R_1 C_0 = 9T$, $L_1 C_0 = 3T^2$;

2) каскад с ПФ $W_3(s) = 1+T^2s^2$ (пункт 6, б), имеющий коэффициент $\tau_{01}^2 = T^2$ и параметры элементов $L_0 C_1 = T^2$.

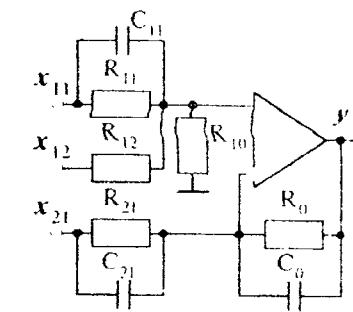


Рис. 1.36

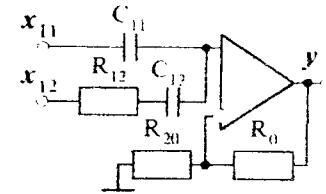


Рис. 1.37

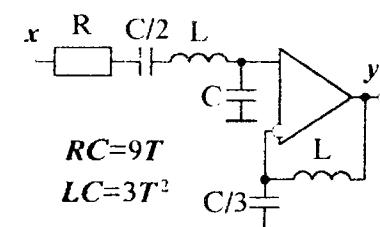


Рис. 1.38

В итоге получаем схему на рис. 1.38 с желаемой ПФ $W_2(s)W_3(s) = \frac{1+T^2s^2}{3(1+3Ts+T^2s^2)}$.

Таблица 1.3

Принципиальная схема и ее передаточная функция

Элементы схемы		<i>a)</i> инвертирующий каскад	<i>b)</i> неинвертирующий каскад с входным делителем	<i>c)</i> неинвертирующий каскад с делителем в ООС
<i>N_{пн}</i>	<i>Z₁</i>	<i>Z₀</i>	<i>Z₁</i>	<i>Z₀</i>
1	Любой	$\frac{Z_0(s)}{Z_1(s)}$	$\frac{Z_0(s)}{Z_0(s)+Z_1(s)}$	$\frac{Z_0(s)}{1+Z_0(s)}$
2	<i>R₁</i>	C_0	$\frac{1}{T_{10}s}$	$\frac{1}{1+T_{10}s}$
3	<i>C₁</i>	<i>R₀</i>	$-T_{01}s$	$\frac{T_{01}s}{1+T_{01}s}$
4	<i>R₁</i>	<i>L₀</i>	$-\theta_{01}s$	$\frac{\theta_{01}s}{1+\theta_{01}s}$
5	<i>L₁</i>	<i>R₀</i>	$\frac{1}{\theta_{10}s}$	$\frac{1}{1+\theta_{10}s}$
6	<i>C₁</i>	<i>L₀</i>	$-\tau_{01}^2 s^2$	$\frac{\tau_{01}^2 s^2}{1+\tau_{01}^2 s^2}$
7	<i>L₁</i>	<i>C₀</i>	$-\frac{1}{\tau_{10}^2 s^2}$	$\frac{1}{1+\tau_{10}^2 s^2}$

Продолжение табл. 1.3

8	R_1	$R_0 + C_0$	$-\frac{1+T_{00}s}{T_{10}s}$	$\frac{1+T_{00}s}{1+(T_{00}+T_{10})s}$	$\frac{1+(T_{00}+T_{10})s}{T_{10}s}$
9	$R_1 + C_1$	R_0	$-\frac{T_{01}s}{1+T_{11}s}$	$\frac{T_{01}s}{1+(T_{01}+T_{11})s}$	$\frac{1+(T_{01}+T_{11})s}{1+T_{11}s}$
10	C_1	$R_0 + C_0$	$-c_{10}(1+T_{00}s)$	$\frac{1+T_{00}s}{1+c_{01}+T_{00}s}$	$1+c_{10}+T_{01}s$
11	$R_1 + C_1$	C_0	$-\frac{c_{10}}{1+T_{11}s}$	$\frac{1}{1+c_{01}+T_{10}s}$	$\frac{1+c_{10}+T_{11}s}{1+T_{11}s}$
12	R_1	$R_0 \ C_0$	$-\frac{r_{01}}{1+T_{00}s}$	$\frac{1}{1+r_{01}+T_{10}s}$	$\frac{1+r_{01}+T_{00}s}{1+T_{00}s}$
13	$R_1 \ C_1$	R_0	$-r_{01}(1+T_{11}s)$	$\frac{1+T_{11}s}{1+r_{01}+T_{11}s}$	$1+r_{01}+T_{01}s$
14	C_1	$R_0 \ C_0$	$-\frac{T_{01}s}{1+T_{00}s}$	$\frac{T_{01}s}{1+(T_{00}+T_{01})s}$	$\frac{1+(T_{00}+T_{01})s}{1+T_{00}s}$
15	$R_1 \ C_1$	C_0	$-\frac{1+T_{11}s}{T_{10}s}$	$\frac{1+T_{11}s}{1+(T_{10}+T_{11})s}$	$\frac{1+(T_{10}+T_{11})s}{T_{10}s}$
16	$R_1 + C_1$	$R_0 + C_0$	$-c_{10} \frac{1+T_{00}s}{T_{10}s}$	$\frac{1+T_{00}s}{1+c_{01}+(T_{00}+T_{10})s}$	$\frac{1+c_{10}+(T_{01}+T_{11})s}{1+T_{11}s}$
17	$R_1 + C_1$	$R_0 \ C_0$	$-\frac{T_{01}s}{(1+T_{00}s)(1+T_{11}s)}$	$\frac{T_{01}s}{1+(T_{00}+T_{01}+T_{11})s+T_{00}T_{11}s^2}$	$\frac{1+(T_{00}+T_{01}+T_{11})s+T_{00}T_{11}s^2}{(1+T_{00}s)(1+T_{11}s)}$

Окончание табл. 1.3

18	$R_1 \ C_1$	$R_0 + C_0$	$-\frac{(1+T_{00}s)(1+T_{11}s)}{T_{10}s}$	$\frac{(1+T_{00}s)(1+T_{11}s)}{1+(T_{00}+T_{10}+T_{11})s+T_{00}T_{11}s^2}$
19	$R_0 \ C_1$	$R_0 \ C_0$	$-r_{01} \frac{1+T_{11}s}{1+T_{00}s}$	$\frac{1+T_{11}s}{1+r_{10}+(T_{10}+T_{11})s}$
20	R_1	$R_0 + C_0 + L_0$	$-\frac{1+T_{00}s+\tau_{00}^2s^2}{T_{10}s}$	$\frac{1+T_{00}s+\tau_{00}^2s^2}{1+(T_{00}+T_{10})s+\tau_{00}^2s^2}$
21	$R_1 + C_1 + L_1$	R_0	$-\frac{T_{01}s}{1+T_{11}s+\tau_{11}^2s^2}$	$\frac{T_{01}s}{1+(T_{01}+T_{11})s+\tau_{11}^2s^2}$
22	C_1	$R_0 + C_0 + L_0$	$-c_{10}(1+T_{00}s+\tau_{00}^2s^2)$	$\frac{1+T_{00}s+\tau_{00}^2s^2}{1+c_{01}+T_{00}s+\tau_{00}^2s^2}$
23	$R_1 + C_1 + L_1$	C_0	$-\frac{c_{10}}{1+T_{11}s+\tau_{11}^2s^2}$	1
24	R_1	$R_0 \ C_0 \ L_0$	$-\frac{\theta_{01}s}{1+\theta_{00}s+\tau_{00}^2s^2}$	$\frac{\theta_{01}s}{1+(\theta_{00}+\theta_{01})s+\tau_{00}^2s^2}$
25	$R_1 \ C_1 \ L_1$	R_0	$-\frac{1+\theta_{11}s+\tau_{11}^2s^2}{\theta_{10}s}$	$\frac{1+\theta_{11}s+\tau_{11}^2s^2}{1+(\theta_{10}+\theta_{11})s+\tau_{11}^2s^2}$
26	C_1	$R_0 \ C_0 \ L_0$	$-\frac{\tau_{01}^2s^2}{1+\theta_{00}s+\tau_{00}^2s^2}$	$\frac{\tau_{01}^2s^2}{1+\theta_{00}s+(\tau_{00}^2+\tau_{01}^2)s^2}$
27	$R_1 \ C_1 \ L_1$	C_0	$-\frac{1+\theta_{11}s+\tau_{11}^2s^2}{\tau_{10}^2s^2}$	$\frac{1+\theta_{11}s+(\tau_{10}^2+\tau_{11}^2)s^2}{1+\theta_{11}s+(\tau_{10}^2+\tau_{11}^2)s^2}$

Нетрудно заметить, что в табл. 1.3 нет ни одной схемы так называемого *неминимально-фазового* элемента, чья ПФ имеет полином $A(s)$ с правыми корнями и отрицательными коэффициентами (1.23). Такие элементы только на ОУ с ООС реализованы быть не могут и конструируются как системы с ПОС, то есть неустойчивые системы.

Пример 1.12. Разработать каскад на ОУ с ПФ $W(s)=K/(1-Ts)$, $K>0$, $T>0$.

Решение. По заданной ПФ запишем ДУ элемента, выраженное относительно старшей производной: $y - Ty' = Kx \Rightarrow y' = (1/T)y - (K/T)x$. Ему соответствует структурная схема на рис. 1.39, а. Временно разорвав ОС вокруг интегратора, запишем операторное уравнение элемента с двумя входами x и $y=y$: $Y(s) = W_1(s)Y(s) - W_2(s)X(s)$, где $W_1(s) = \frac{1}{Ts}$; $W_2(s) = \frac{K}{Ts}$. Так как $S_1(s) = 1/Ts \neq S_2(s) + 1 = \frac{K+Ts}{Ts}$, то дополним схему заземленными входами x_{10} с ПФ $W_{10}(s) = S_2(s) + 1$ и x_{20} с ПФ $W_{20}(s) = S_1(s)$.

Выбрав сопротивления $Z_1(s) = R_1$ и $Z_0(s) = 1/C_0 s$, по (1.22) определим: $Z_{10}(s) = \frac{W_1(s)}{W_{10}(s)} Z_1(s) = \frac{R_1/K}{1+(T/K)s}$ - параллельное соединение резистора с $R_{10} = R_1/K$ и конденсатора с $C_{10} = T/KR_{10}$; $Z_2(s) = Z_0(s)/W_2(s) = T/KC_0 = R_2$ - резистор; $Z_{20}(s) = Z_0(s)/W_{20}(s) = T/C_0 = R_{20}$ - резистор. В результате получаем принципиальную схему на рис. 1.39, б, выход которой связан с прямым входом ОУ по петле ПОС через резистор R_1 . Как будет показано в последующих главах, системы с правыми полюсами неустойчивы. Разработанный элемент имеет правый полюс $s_1 = 1/T > 0$ и расходящуюся составляющую переходного процесса $e^{t/T}$. \square

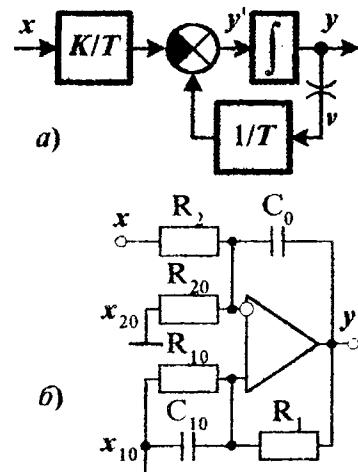


Рис. 1.39

В устойчивых схемах на ОУ положительная обратная связь недопустима.

Приведем некоторые схемы динамических элементов на ОУ и их ПФ.

1. Универсальный одновходовый усилитель (рис. 1.40) с

ПФ

$$W(s) = \frac{1 + Z_0(s)/Z_2(s) + Z_0(s)/Z_{20}(s)}{1 + Z_1(s)/Z_{10}(s)} - \frac{Z_0(s)}{Z_2(s)}. \quad (1.24)$$

Для синтеза схемы представим заданную ПФ в расщепленном виде $W(s) = W_1(s) - W_2(s)$ и введем дополнительные ПФ минимальной сложности с *положительными* коэффициентами $W_{10}(s)$ и (или) $W_{20}(s)$ так, чтобы выполнилось условие $W_1(s) + W_{10}(s) = W_2(s) + 1 + W_{20}(s)$. В крайнем (наихудшем) случае всегда можно задать $W_{10}(s) = W_2(s) + 1$ и $W_{20}(s) = W_1(s)$. Тогда, выбрав свободно сопротивления $Z_{10}(s)$ и $Z_0(s)$, остальные сопротивления схемы определим по (1.22):

$$Z_1(s) = Z_{10}(s)W_{10}(s)/W_1(s), \quad Z_2(s) = Z_0(s)/W_2(s), \quad Z_{20}(s) = Z_0(s)/W_{20}(s).$$

Пример 1.13. Дано ДУ $y + T_1 y' = x - T_2 x'$ с $T_1 > 0$ и $T_2 > 0$. Расщепляем его ПФ:

$$W(s) = \frac{1 - T_2 s}{1 + T_1 s} = W_1(s) - W_2(s), \quad \text{где } W_1(s) = \frac{1}{1 + T_1 s} \quad \text{и} \quad W_2(s) = \frac{T_2 s}{1 + T_1 s}, \quad \text{откуда } S_1(s) = \frac{1}{1 + T_1 s} \quad \text{и}$$

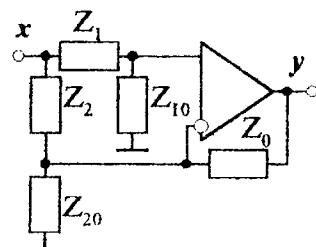


Рис. 1.40

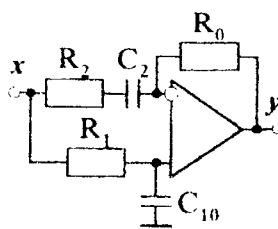


Рис. 1.41

$S_2(s) + 1 = \frac{1 + (T_1 + T_2)s}{1 + T_1 s}$. Вводим дополнительную ПФ

$W_{10}(s) = S_2(s) + 1 \cdot S_1(s) = \frac{(T_1 + T_2)s}{1 + T_1 s}$ и заземленный прямой вход

$x_{10} = 0$. Выбираем $Z_0 = R_0$ - резистор и $Z_{10}(s) = 1/C_{10}s$ - конденсатор, тогда получим на схеме (рис. 1.41):

- $Z_2 = Z_0/W_2 = R_0 T_1 / T_2 + R_0 / T_2 s$ - последовательное соединение резистора с $R_2 = R_0 T_1 / T_2$ и конденсатора с $C_2 = T_2 / R_0$ (табл. 1.2, п.1);

- $Z_1 = Z_{10} W_{10} / W_1 = (T_1 + T_2) / C_{10}$ - резистор R_1 . \square

2. Неинвертирующий сумматор (рис. 1.42, а), выполняю-

щий операцию $y = \sum_{i=1}^n W_i(s)x_i$ с ПФ

$$W_i(s) = \frac{1 + Z_0(s)/Z_{20}(s)}{\sum_j Z_i(s)/Z_j(s) + Z_i(s)/Z_{10}(s)}$$

Синтез схемы: $Z_i(s) = Z_{10}(s)/W_i(s)$, $Z_{20}(s) = Z_0(s)/\sum W_i(s)$.

Выбрав $Z_i = R_i$, $Z_{10} = Z_0 = 1/C_0s$ и $Z_{20} = R_1 \parallel \dots \parallel R_n$, получим неинвертирующий интегратор (рис. 1.42, б), выполняю-

щий операцию $y = \sum_{i=1}^n K_i \int_0^t x_i(\tau) dt$ с коэффициентами $K_i = 1/R_i C_0$.

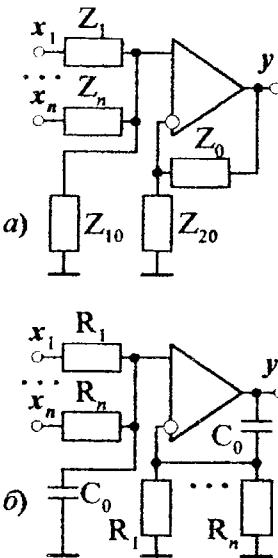


Рис. 1.42

3. Инвертирующий сумматор (рис. 1.43, а), выполняющий

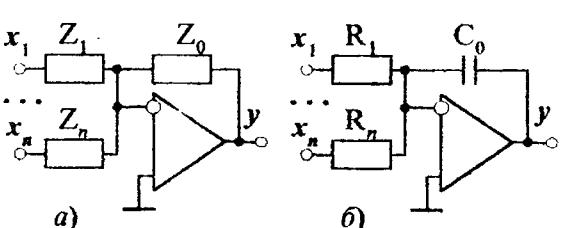


Рис. 1.43

операцию $y = -\sum_{i=1}^n W_i(s)x_i$ с ПФ

$W_i(s) = Z_0(s)/Z_i(s)$, в том числе инвертирующий интегратор (рис. 1.43, б),

выполняющий операцию $y = -\sum_{i=1}^n K_i \int_0^t x_i(\tau) dt$

с коэффициентами $K_i = 1/R_i C_0$.

1.7.2. Анализ и синтез многокаскадных схем на ОУ

Задача анализа схемы заключается в определении ее ПФ. При анализе схема делится на каскады четырехполюсников. Так как у ОУ $R_{вх} \gg R_{вых}$, то ПФ каскада на ОУ не зависит от его нагрузки. При расчете каскада на пассивном четырехполюснике без ОУ необходимо учитывать нагрузку, потребляющую часть его тока и изменяющую ПФ.

□ Пример 1.14. Последовательное соединение четырехполюсников (рис. 1.44). В схеме (а) с развязывающим операционным повторителем ПФ последовательных каскадов перемножаются:

$$W_1(s) = \frac{1}{1 + T_{11}s}, W_2(s) = 1, W_3(s) = \frac{T_{22}s}{1 + T_{22}s}, T_{ij} = R_i C_j,$$

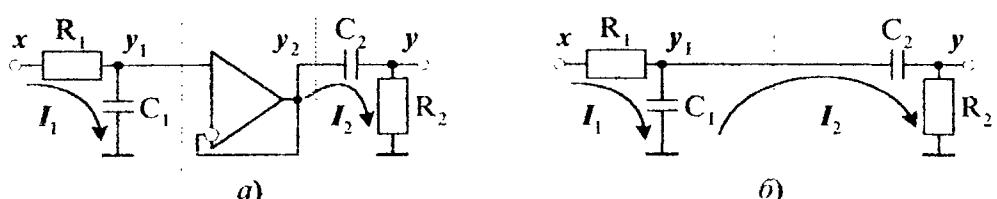


Рис. 1.44

$$W(s) = \prod_{i=1}^3 W_i(s) = \frac{T_{22}s}{(1+T_{11}s)(1+T_{22}s)}. \quad (1.25)$$

Без развязывающего операционного повторителя между первым и третьим каскадами получим схему (б), ПФ которой рассчитаем методом контурных токов:

$$QI = Px, \quad y = CI \Rightarrow y = CQ^{-1}Px, \quad W = CQ^{-1}P,$$

$$\text{где } Q = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 + Z_4 \end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \ Z_4]; \quad Z_1 = R_1; \quad Z_2 = \frac{1}{C_1 s}; \quad Z_3 = \frac{1}{C_2 s};$$

$Z_4 = R_2$. Отсюда получаем ПФ

$$W(s) = \frac{Z_2 Z_4}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4) + Z_1 Z_2} = \frac{R_2 / C_1 s}{(R_1 + 1/C_1 s)(R_2 + 1/C_2 s) + R_1 / C_1 s} = \frac{T_{22}s}{(1+T_{11}s)(1+T_{22}s) + T_{12}s},$$

которая не совпадает с ПФ (1.25), так как второй каскад является нагрузкой для первого и потребляет часть его тока. \square

При последовательном соединении каскадов пассивных четырехполюсников необходимо включать между ними развязывающие операционные повторители. Тогда ПФ каскадов можно перемножать. Без повторителей должна учитываться нагрузка каскадов.

Пример 1.15. Рассмотрим схему (рис. 1.45), состоящую из четырех каскадов, первый из которых является пассивным с нагрузкой Z_3 . Запишем уравнения каскадов, определим их ПФ и ПФ всей системы в целом методом эквивалентных преобразований структурных схем (рис. 1.46):

$$y_1 = W_1 x, \quad y_2 = -W_2 y_1 - W_3 y_3,$$

$$y = -W_4 y_2, \quad y_3 = W_5 y_2 + W_6 y,$$

где

$$W_1 = \frac{Z_2 \| Z_3}{Z_1 + Z_2 \| Z_3} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3};$$

$$W_2 = \frac{Z_5}{Z_3}; \quad W_3 = \frac{Z_5}{Z_4}; \quad W_4 = \frac{Z_7}{Z_6}; \quad W_5 = \frac{1 + Z_{10}/Z_{11}}{1 + Z_8/Z_9}; \quad W_6 = \frac{1 + Z_{10}/Z_{11}}{1 + Z_9/Z_8}.$$

$$W = \frac{W_1 W_2 W_4}{1 - W_3 W_4 (W_6 - W_5/W_4)} = \frac{W_1 W_2 W_4}{1 + W_3 (W_5 - W_4 W_6)} =$$

$$= \frac{Z_2 Z_4 Z_5 Z_7 (Z_8 + Z_9) Z_{11}}{(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3) [Z_4 Z_6 (Z_8 + Z_9) Z_{11} + Z_5 (Z_6 Z_9 - Z_7 Z_8) (Z_{10} + Z_{11})]}.$$

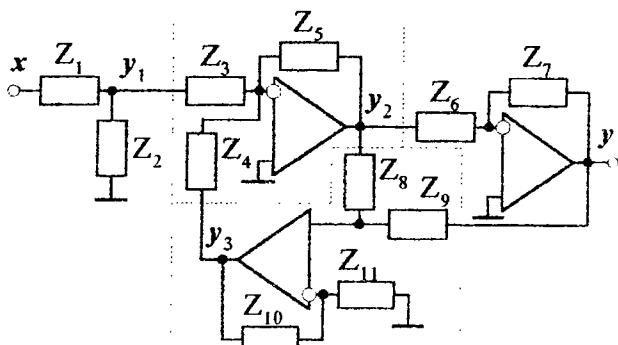


Рис. 1.45

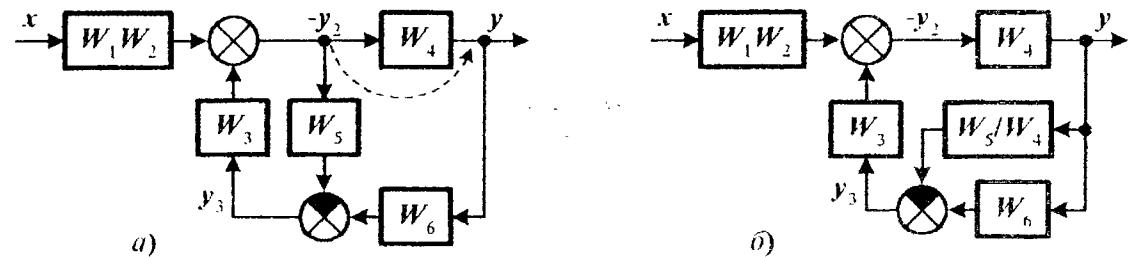


Рис. 1.46

Отметим, что влияние нагрузки первого каскада учтено при записи его ПФ W_1 . \square

При *синтезе* схемы на ОУ по заданной ПФ решение не единственно и зависит от сложности ПФ и особенно от ее минимально-фазовости. Процесс разработки и выбора варианта схемы является многокритериальной задачей оптимизации: следует минимизировать стоимость устройства, желательно использовать типовые схемы каскадов, обеспечивать возможность необходимой вариации параметров схемы минимальными изменениями номиналов радиоэлементов. Рассмотрим некоторые *методы синтеза схем на ОУ со сложными ПФ*.

1. Представим ПФ *произведением* простых ПФ первого и второго порядков:

$$W(s) = \prod_i W_i(s). \quad (1.26a)$$

Если все ее полюсы левые, то схема может строиться как последовательное соединение каскадов из табл. 1.3.

Пример 1.16. Разработать схему моделирования системы «тележка - обычный маятник», имеющую ПФ (1.12).

Решение. Представим ПФ системы в виде произведений ПФ, реализуемых каскадами на ОУ из табл. 1.3:

$$W_d(s) = \frac{0,1(1+0,133s+0,133s^2)}{s(1+1,68s)(1+0,155s+0,1s^2)} = \frac{-0,2}{1+1,68s} \frac{0,5}{1+0,155s+0,1s^2} \frac{(1+0,133s+0,133s^2)}{s},$$

$\underbrace{W_1(s)}_{\text{п. 12, а}} \quad \underbrace{W_2(s)}_{\text{п. 23, б}} \quad \underbrace{W_{31}(s)}_{\text{п. 25, а}}$

$$W_\phi(s) = \frac{0,01s}{(1+1,68s)(1+0,155s+0,1s^2)} = \frac{-0,2}{1+1,68s} \frac{0,5}{1+0,155s+0,1s^2} (-0,1s),$$

$\underbrace{W_1(s)}_{\text{п. 12, а}} \quad \underbrace{W_2(s)}_{\text{п. 23, б}} \quad \underbrace{W_{32}(s)}_{\text{п. 3, а}}$

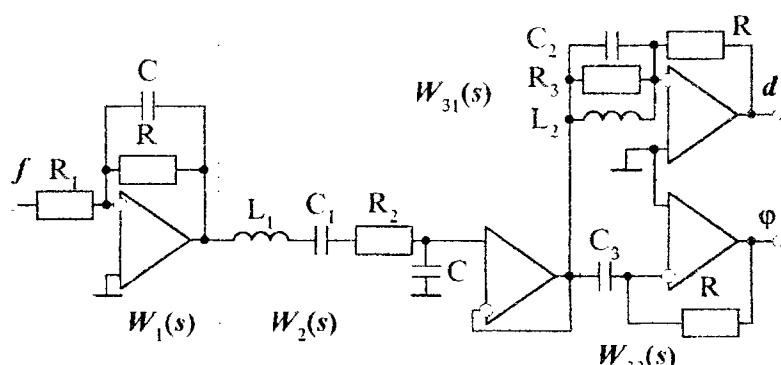


Рис. 1.47

На рис. 1.47 приведена принципиальная схема моделирования сложной механической системы «тележка - обычный маятник», номиналы радиоэлементов которой удовлетворяют соотношениям $RC = 1,68$, $R = 0,2R_1$, $C = C_1$, $R_2C = 0,31$, $L_1C = 0,2$, $L_2/R = 1$, $L_2/R_3 = 0,133$, $L_2C_2 = 0,133$, $RC_3 = 0,1$. \square

2. Представим ПФ суммой простых ПФ порядков не выше второго:

$$W(s) = \sum_i W_i(s). \quad (1.26)$$

Структурная схема параллельного соединения аналогична соединению на рис. 1.31, б, а принципиальная схема кроме каскадов, реализующих ПФ $W_i(s)$, включает еще алгебраический многоходовый сумматор.

Пример 1.17. Разработать схему ПИД-регулятора с ПФ $W(s) = K_n + K_d s + K_u / s$, параметры которой K_n , K_d и K_u могут варьироваться произвольно и независимо друг от друга как по величине, так и по знаку.

Решение. Представим два варианта схемы регулятора, отличающиеся сложностью и степенью стандартизации (рис. 1.48):

а) первый вариант реализован только на стандартных каскадах на ОУ. Пропорциональный, дифференцирующий и интегрирующий каскады с инвертирующими ПФ $W_n(s) = -|K_n|$, $W_d(s) = -|K_d|s$ и $W_u(s) = -|K_u|/s$ построены по табл. 1.3 (пункты 1, а, 3, а и 2, а). Выбор знака или отключение каждой из этих ПФ выполняется *вручную* трехпозиционным тумблером. Управляющее воздействие формируется на выходе сумматора с тремя прямыми и тремя инверсными входами. В схеме свободно выбираются параметры элементов R и C . Переменные сопротивления настраиваются по формулам

$$R_n = R / |K_n|, \quad R_d = |K_d| / C, \quad R_u = 1 / |K_u| C;$$

б) во втором варианте схема строится на основе универсального усилителя (рис. 1.40), ПФ которого (1.24) имеет как положительную, так и отрицательную составляющие, что позволяет реализовать любой желаемый знак ПФ *без ручного переключения* механическими тумблерами, а только настройкой переменных параметров схемы. Представим желаемые коэффициенты регулятора произвольным образом в виде разностей $K_n = K_{n+} - K_{n-}$, $K_d = K_{d+} - K_{d-}$ и $K_u = K_{u+} - K_{u-}$ со *строгим положительными* составляющими $K_{n+} > 0$, $K_{n-} > 0$, $K_{d+} > 0$, $K_{d-} > 0$, $K_{u+} > 0$ и $K_{u-} > 0$.

Для того, чтобы не использовать индуктивности, построим схему на двух каскадах. Первый каскад выполняет операцию $z = (W_1(s) - W_2(s))e$ с ПФ $W_1(s) = K_{n+} + K_{d+} s$ и $W_2(s) = K_{n-} + K_{d-} s$. По методике синтеза схем на ОУ вычислим суммы $S_1(s) = K_{n+} + K_{d+} s$ и $S_2(s) + 1 = K_{n-} + K_{d-} s + 1$. Так как $S_1(s) \neq S_2(s) + 1$ и соотношения между положительными и отрицательными составляющими ПФ заранее неизвестны, то дополним схему *двумя* заzemленными входами с ПФ $W_{10}(s) = S_2(s) + 1$ и $W_{20}(s) = S_1(s)$. Составим соотношения (1.22) для определения структуры и параметров радиоэлементов каскада:

$$\begin{cases} (K_{n+} + K_{d+} s)Z_1(s) = (K_{n-} + K_{d-} s + 1)Z_{10}(s), \\ Z_0(s) = (K_{n-} + K_{d-} s)Z_2(s) = (K_{n+} + K_{d+} s)Z_{20}(s). \end{cases}$$

Выберем $Z_1(s) = R_1 / (1 + R_1 C_1 s)$ - параллельное соединение произвольного сопротивления $R_1 = R$ и конденсатора $C_1 = K_{d+} / K_{n+} R$, тогда $Z_{10}(s) = R_{10} / (1 + R_{10} C_{10} s)$ - параллельное соединение $R_{10} = K_{n+} R / (1 + K_{n-})$ и $C_{10} = K_{d-} / K_{n+} R$. Пусть также выбрано $Z_0(s) = R$, тогда $Z_2(s) = R_2 / (1 + R_2 C_2 s)$ - параллельное соединение $R_2 = R / K_{n-}$ и $C_2 = K_{d-} / R$, а $Z_{20}(s) = R_{20} / (1 + R_{20} C_{20} s)$ - параллельное соединение $R_{20} = R / K_{n+}$ и $C_{20} = K_{d+} / R$.

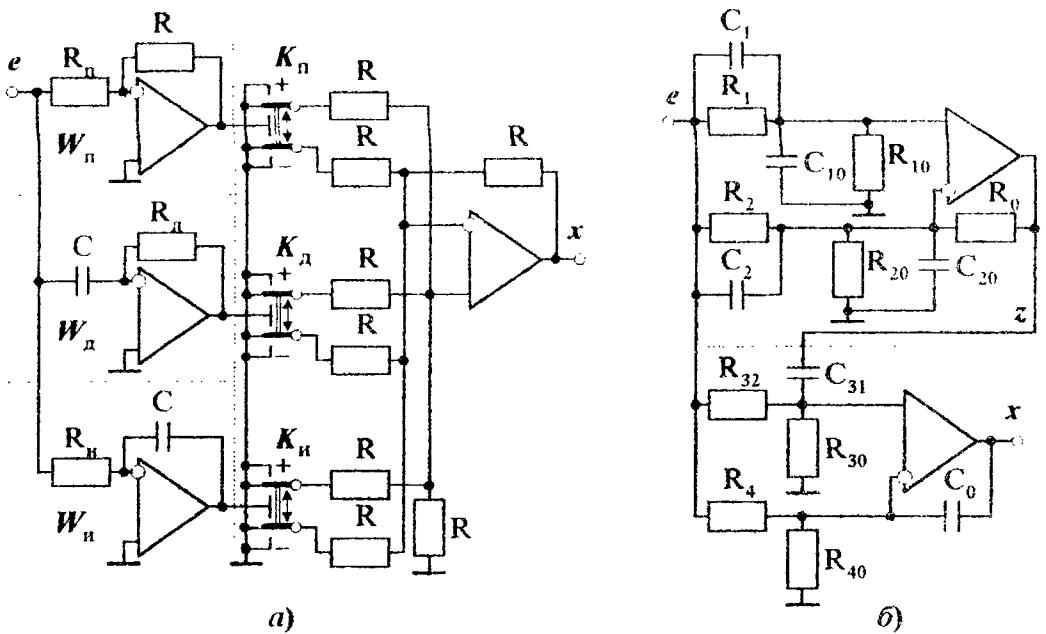


Рис. 1.48

Второй каскад выполняет операцию $x = z + (K_{u+}/s)e = z + (K_{u+}/s - K_{u-}/s)e$. Вычисляем $S_3(s) = 1 + K_{u+}/s$, $S_4(s) + 1 = 1 + K_{u-}/s$, $W_{30}(s) = K_{u-}/s$, $W_{40}(s) = K_{u+}/s$ и

$$\begin{cases} Z_{31}(s) = K_{u+}Z_{32}(s)/s = K_{u-}Z_{30}(s)/s, \\ Z_0(s) = K_{u-}Z_4(s)/s = K_{u+}Z_{40}(s)/s. \end{cases}$$

Выберем произвольно емкости C конденсаторов $Z_{31}(s) = Z_0(s) = 1/Cs$, тогда $R_{32} = R_4 = 1/K_{u+}C$ и $R_{30} = R_{40} = 1/K_{u-}C$. \square

Если в (1.26) не все ПФ $W_i(s)$ являются минимально-фазовыми, то соответствующие им каскады имеют локальную ПОС и делают схему неустойчивой.

3. Недостаток последовательного и параллельного соединений каскадов - возможность дифференцирования высокочастотных шумовых составляющих сигнала, что ведет к возрастанию уровня шума пропорционально его частоте. Другой недостаток - разнотипность каскадов, нерегулярная структура схемы, трудоемкий расчет номиналов ее радиоэлементов, наконец, необходимость вычисления корней полинома для получения разложений (1.26).

Метод реализации ПФ $W(s) = B(s)/A(s)$, свободный от указанных недостатков, основан на построении вспомогательной схемы, имеющей ПФ $W_v(s) = 1/A(s)$ и выход $v(t)$, удовлетворяющий ДУ

$$v^{(n)} = \frac{1}{a_n}x - \frac{a_{n-1}}{a_n}v^{(n-1)} - \dots - \frac{a_1}{a_n}v' - \frac{a_0}{a_n}v. \quad (1.27a)$$

Соединим последовательно n интеграторов, обозначим их выходы справа налево как v , v' , ..., $v^{(n-1)}$, а вход самого левого интегратора сформируем по уравнению (1.27a) с помощью $n+1$ -ходового сумматора. Так как $W(s) = B(s)W_v(s)$, то выход $y(t)$ формируется как линейная комбинация выходов интеграторов (рис. 1.49, a):

$$y = B(s)v = b_0v + b_1v' + \dots + b_nv^{(n)}. \quad (1.27b)$$

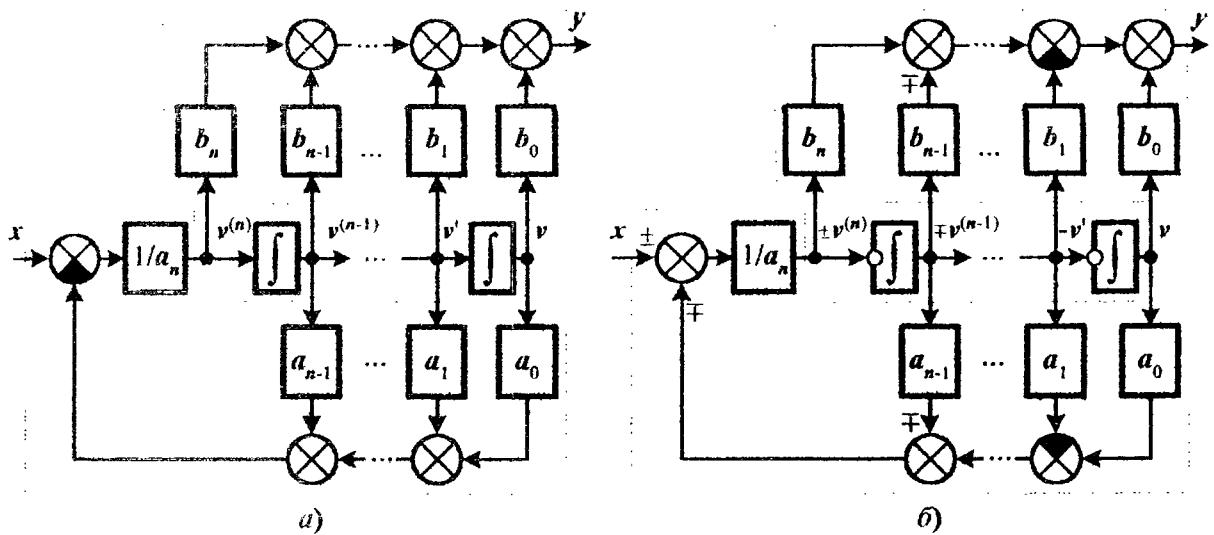


Рис. 1.49

При $m < n$ вводятся фиктивные коэффициенты $b_{m+1} = \dots = b_n = 0$. Методика построения подобных схем унифицирована для любых ПФ, у которых $m \leq n$. Структуры схем являются **каноническими** (регулярными, повторяющимися), не имеют дифференциаторов, строятся просто, хотя и не гарантируют минимальных затрат оборудования.

Для практической реализации канонической схемы необходимо n одновходовых интеграторов и не более двух многовходовых сумматоров-вычитателей, обведенных на структурных схемах (рис. 1.49) пунктиром. Интеграторы можно строить по неинвертирующей (рис. 1.50, а) и по инвертирующей (рис. 1.50, б) схемам с постоянной времени $RC = 1$. В схеме на инвертирующих интеграторах (рис. 1.49, б) необходимо учитывать **чертование справа налево знаков производных** $\dots -v''' \rightarrow v'' \rightarrow -v' \rightarrow v$ и коэффициентов суммирования в цепях ОС и формирования выхода системы.

Вынос точки съема $v^{(n)}$ влево за сумматор дает эквивалентные схемные решения на рис. 1.51 с меньшим числом ОУ за счет совмещения функций многовходовым интегратором.

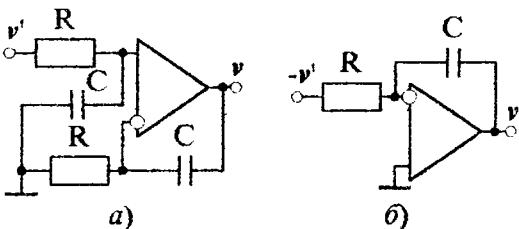


Рис. 1.50

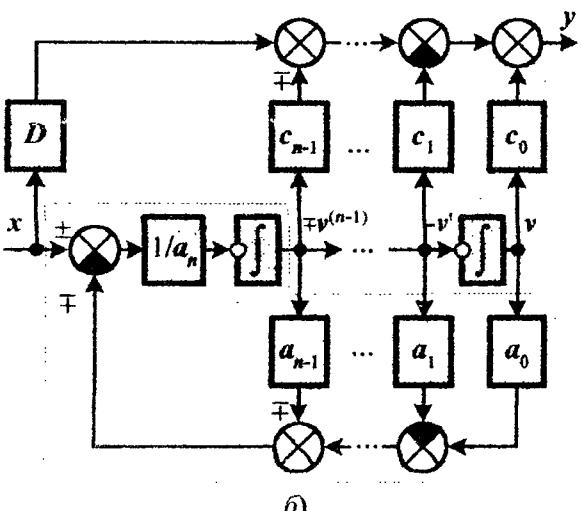
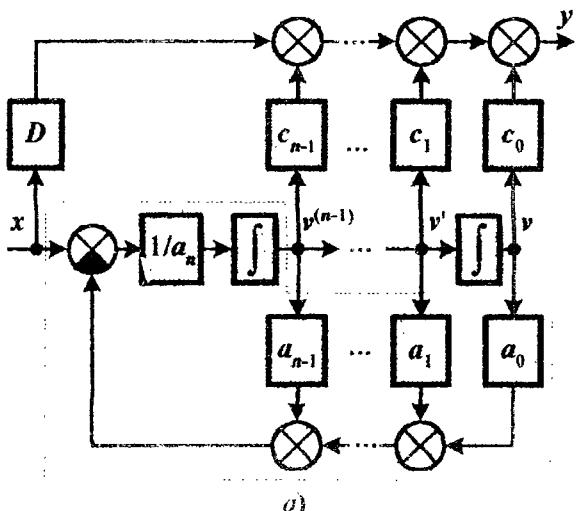


Рис. 1.51

росумматором, обведенным пунктиром. Ценой экономии оборудования несколько усложняется расчет схемы. Принципиальная схема интегратора строится по типовой методике синтеза каскада на ОУ на основе операторного ДУ

$$v^{(n-1)} = \frac{1}{a_n s} x - \frac{a_{n-1}}{a_n s} v^{(n-1)} - \dots - \frac{a_1}{a_n s} v' - \frac{a_0}{a_n s} v. \quad (1.28a)$$

Подставив $v^{(n)}$ из (1.27a) в (1.27б), получим уравнение выхода системы

$$y = \sum_{i=0}^{n-1} c_i v^{(i)} + Dx, \quad D = b_n/a_n, \quad c_i = b_i - Da_i, \quad \forall i = \overline{0, n-1}. \quad (1.28b)$$

Пример 1.18. Разработать канонические схемы на ОУ, моделирующие систему «тележка - обычный маятник», имеющую ПФ (1.12)

$$W_d(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_{21} s^2}{a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4}, \quad W_\Phi(s) = \frac{b_{22} s^2}{a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4}$$

с коэффициентами $b_0 = 60$, $b_1 = 8$, $b_{21} = 8$, $b_{22} = 6$, $a_1 = 600$, $a_2 = 1100$, $a_3 = 216$, $a_4 = 100$.

Решение. На рис. 1.52, а показана структурная схема на неинвертирующих интеграторах, моделирующая уравнения (1.28)

$$v''' = (1/a_4 s)f - (a_3/a_4 s)v''' - (a_2/a_4 s)v'' - (a_1/a_4 s)v', \quad d = b_0 v + b_1 v' + b_{21} v'', \quad \Phi = b_{22} v''.$$

Начиная построение схемы с интегратора, сравниваем суммы $S_1(s) = 1/a_4 s$, $S_2(s) + 1 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 s)/a_4 s$ и вводим дополнительный прямой заземленный вход с ПФ $W_{10}(s) = S_2(s) + 1 - S_1(s) = (a_1 + a_2 + a_3 - 1 + a_4 s)/a_4 s = (19,15 + s)/s$. Составим соотношения для выбора структуры и параметров принципиальной схемы (рис. 1.53, а):

$$Z_{11}(s) = (a_1 + a_2 + a_3 - 1 + a_4 s)Z_{10}(s), \quad a_4 s Z_{10}(s) = a_1 Z_{21}(s) = a_2 Z_{22}(s) = a_3 Z_{23}(s).$$

Выбирая значения R и C из условия $RC = 1$, положим $Z_{10}(s) = R_{10}/(1 + R_{10}C s)$ с $R_{10} = a_4/(a_1 + a_2 + a_3 - 1)C = 0,0522R$, тогда $Z_{11} = R_{11} = (a_1 + a_2 + a_3 - 1)R_{10} = a_4 R = 100R$. Выбирая $Z_0(s) = 1/Cs$, получим $Z_{21} = R_{21} = a_4/a_1 C = 0,167R$, $Z_{22} = R_{22} = a_4/a_2 C = 0,0909R$ и

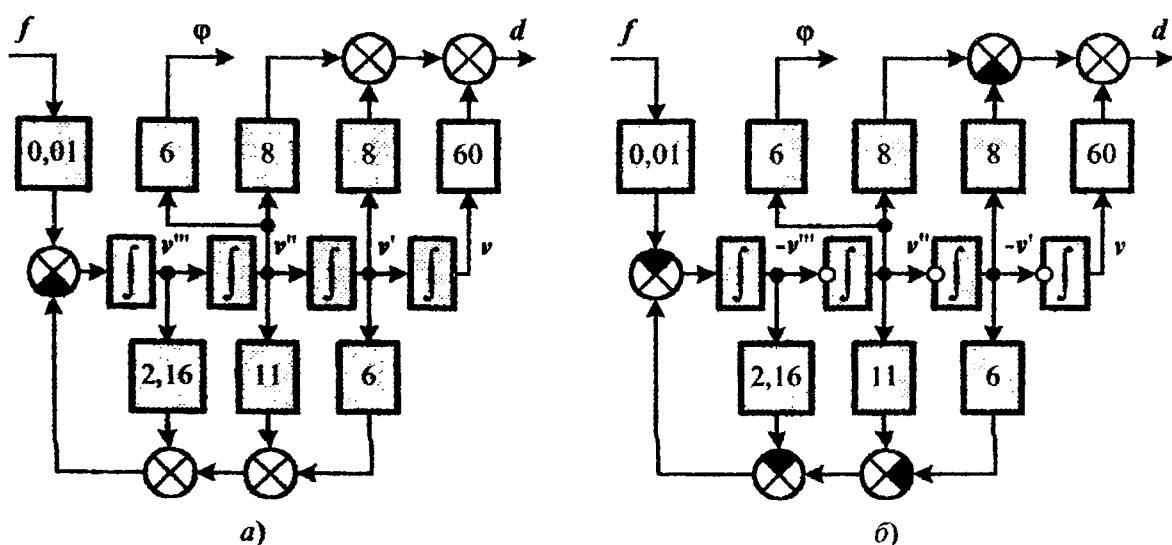


Рис. 1.52

$$Z_{23} = R_{23} = a_4/a_3 C = 0,463R.$$

Сопротивления выходных каскадов, формирующих значения d и ϕ , удовлетворяют соотношениям $R/R_{31} = b_0/b_{21} = 7,5$, $R/R_{32} = b_1/b_{21} = 1$, $R/R_{40} = b_0 + b_1 + b_{21} - 1 = 75$ и $R/R_{50} = b_{22} - 1 = 5$.

На рис. 1.52,б показана структурная схема на инвертирующих интеграторах, моделирующая уравнения

$$-v''' = -\frac{1}{a_4 s} f - \frac{a_3}{a_4 s} (-v''') + \frac{a_2}{a_4 s} v'' - \frac{a_1}{a_4 s} (-v'), \quad d = b_0 v - b_1 (-v') + b_{21} v'', \quad \phi = b_{22} v''.$$

Начиная построение схемы с интегросумматора, сравниваем суммы $S_1(s) = a_2/a_4 s$, $S_2(s) + 1 = (1 + a_1 + a_3 + a_4 s)/a_4 s$ и вводим дополнительные заземленные входы с ПФ $W_{10} = 1$ и $W_{20}(s) = (a_2 - a_1 - a_3 - 1)/a_4 s = 2,83/s$. Составим соотношения для выбора структуры и параметров принципиальной схемы (рис. 1.53,б):

$$a_2 Z_{11}(s) = a_4 s Z_{10}(s), \quad a_4 s Z_0(s) = Z_{21}(s) = a_1 Z_{22}(s) = a_3 Z_{23}(s).$$

Выбирая значения R и C из условия $RC = 1$, положим $Z_{10}(s) = 1/Cs$ и $Z_0(s) = 1/Cs$, тогда $Z_{11} = R_{11} = a_4/a_2 C = 0,0909R$, $Z_{21} = a_4/C = 100R$, $Z_{22} = R_{22} = a_4/a_1 C = 0,167R$, $Z_{23} = R_{23} = a_4/a_3 C = 0,463R$ и $Z_{20} = R_{20} = a_4/(a_2 - a_1 - a_3 - 1)C = 0,353R$.

Сопротивления выходных каскадов, формирующих значения d и ϕ , удовлетворяют соотношениям $R/R_{31} = b_0/b_{21} = 7,5$, $R/R_{41} = b_1 = 8$, $R/R_{40} = b_0 + b_{21} - b_1 - 1 = 59$ и $R/R_{50} = b_{22} - 1 = 5$. □

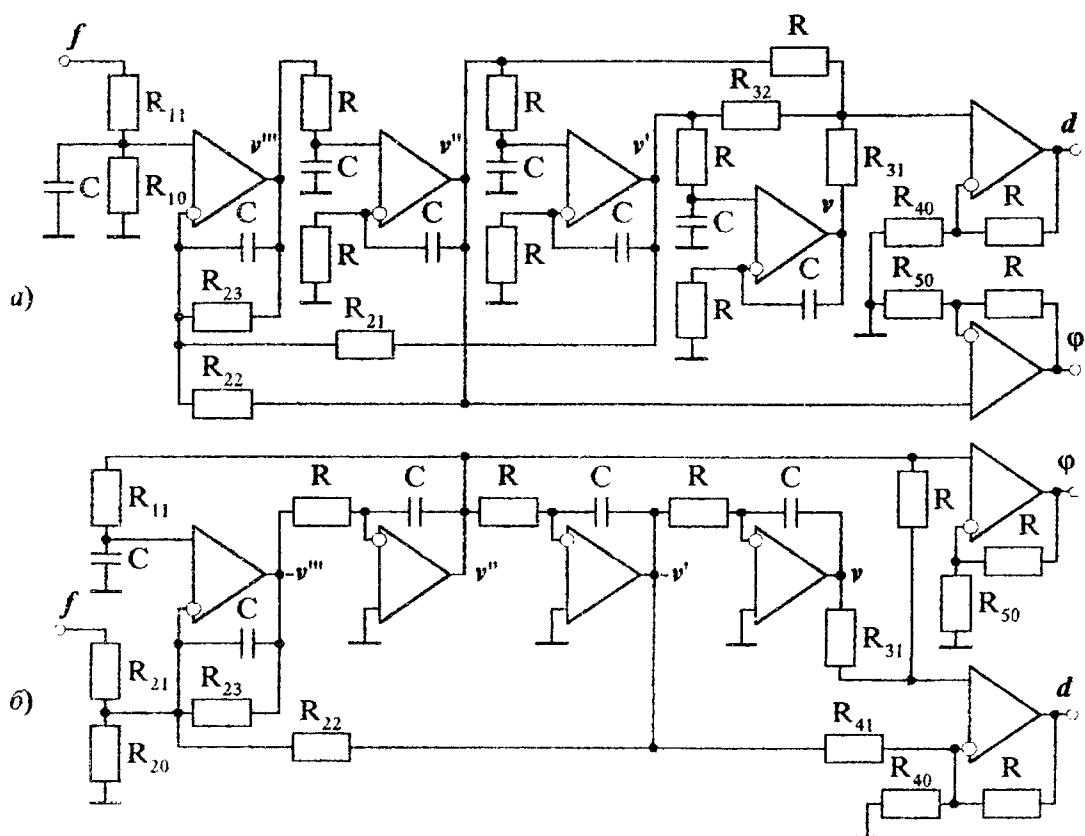
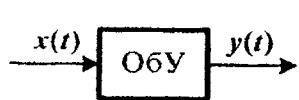


Рис. 1.53

ГЛАВА 2. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Частотная характеристика (ЧХ) - это зависимость параметров (амплитуды и фазы) гармонических колебаний выходной переменной линейного объекта от параметров и частоты колебаний входной переменной в установившемся режиме функционирования (рис. 2.1).



$$x(t) = A_x \sin(\omega t + \phi_x)$$

$$y_{\text{уст}}(t) = A_y \sin(\omega t + \phi_y)$$

$$A_y = A_y(\omega), \phi_y = \phi_y(\omega)$$

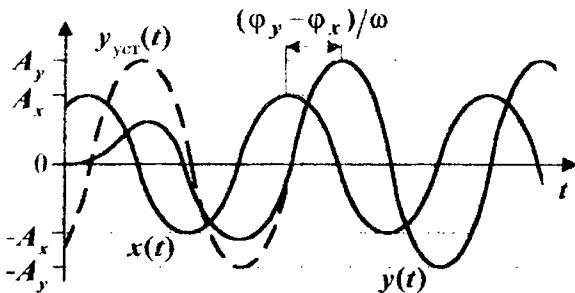


Рис. 2.1

2.1. ОСНОВНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Рассмотрим линейный объект, описываемый ДУ (1.15)

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i x^{(i)}(t).$$

Гармонические колебания описываются формулой

$$v(t) = A_v e^{j(\omega t + \phi_v)} = A_v \cos(\omega t + \phi_v) + j A_v \sin(\omega t + \phi_v)$$

равномерного вращения в комплексной плоскости вектора длиной (амплитудой) A_v с угловой скоростью (частотой) ω (рад/с) = $2\pi f$ (Гц) и начальным фазовым углом ϕ_v (рад) = $(\pi/180)\phi_v$ (град) (рис. 2.2).

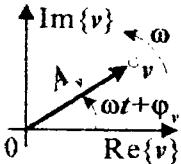


Рис. 2.2

Подставим в ДУ (1.15) значение входа $x(t)$, установленное значение выхода $y(t)$ и их производные:

$$\begin{cases} x(t) = A_x e^{j(\omega t + \phi_x)}, & x^{(i)}(t) = A_x (j\omega)^i e^{j(\omega t + \phi_x)} \quad \forall i = \overline{0, m}, \\ y(t) = A_y e^{j(\omega t + \phi_y)}, & y^{(i)}(t) = A_y (j\omega)^i e^{j(\omega t + \phi_y)} \quad \forall i = \overline{0, n}, \end{cases}$$

тогда

$$A_y e^{j\phi_y} \sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i = A_x e^{j\phi_x} \sum_{i=0}^m b_i (j\omega)^i, \quad \frac{A_y}{A_x} e^{j(\phi_y - \phi_x)} = \sum_{i=0}^m b_i (j\omega)^i \Bigg/ \sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i = \frac{B(s)}{A(s)} \Bigg|_{s=j\omega}.$$

Обозначим: $A(\omega) = A_y(\omega)/A_x$ - амплитудно-частотная характеристика (АЧХ); $\phi(\omega) = \phi_y(\omega) - \phi_x$ - фазочастотная характеристика (ФЧХ); $W(j\omega) = A(\omega) e^{j\phi(\omega)}$ - комплексная частотная характеристика (КЧХ), которая получается из ПФ $W(s)$ формальной заменой оператора s на комплексную функцию частоты $j\omega$.

Представим КЧХ (рис. 2.3) в виде

$$W(j\omega) = A(\omega) \{ \cos(\phi(\omega)) + j \sin(\phi(\omega)) \} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где $P(\omega) = \operatorname{Re}\{W(j\omega)\} = A(\omega) \cos(\phi(\omega))$ - вещественная ЧХ (ВЧХ); $Q(\omega) = \operatorname{Im}\{W(j\omega)\} = A(\omega) \sin(\phi(\omega))$ - минимая ЧХ (МЧХ). Между АЧХ, ФЧХ, ВЧХ и МЧХ существуют следующие зависимости:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad \phi(\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right).$$

Указанные ЧХ принято строить в равномерном масштабе по оси частот ω . Особое внимание следует уделить построению ФЧХ по ее аналитической зависимости с помощью ЭВМ, в том числе и калькулятора. Так как функция arctg дает главное значение угла в диапазоне от $+90^\circ$ до -90° , то к нему следует добавить $+180^\circ$ или π (рад) при $\{Q(\omega)>0\} \cap \{P(\omega)<0\}$ либо -180° или $-\pi$ (рад) при $\{Q(\omega)<0\} \cap \{P(\omega)<0\}$.

Линия на комплексной плоскости $W(j\omega)$, образуемая точками КЧХ при изменении частоты ω от 0 до ∞ , называется *годографом* или *амплитудно-фазовой* частотной характеристикой (АФЧХ) $A(\phi)$. Годограф строится как параметрическая функция частоты по значениям любой из пар ЧХ $\{A(\omega), \phi(\omega)\}$ или $\{P(\omega), Q(\omega)\}$. На годографе необходимо указать стрелкой направление возрастания частоты и отметить следующие *особые точки*: начало годографа при $\omega=0$; конец годографа при $\omega \rightarrow \infty$; пересечения с осями координат $\operatorname{Re}\{\omega\}$ и $\operatorname{Im}\{\omega\}$; пересечения с окружностью единичного радиуса.

В равномерном масштабе частот графики АЧХ и ФЧХ быстро изменяются на низких частотах и медленно - на высоких. Поэтому в практических расчетах используются логарифмические ЧХ (ЛЧХ) в соответствующих масштабах по осям частоты и амплитуды: $L(\omega) = 20 \lg(A(\omega))$ - логарифмическая АЧХ (ЛАЧХ) и $\Phi(\omega)$ - логарифмическая ФЧХ (ЛФЧХ). Обратная зависимость АЧХ от ЛАЧХ есть $A(\omega) = 10^{0.05L(\omega)}$. Значениям $L < 0$ соответствуют значения $0 < A < 1$, $L = 0$ - $A = 1$, $L > 0$ - $A > 1$.

Единицей измерения логарифмической величины является *декада* (дек) - интервал, на котором крайние значения величины отличаются друг от друга в 10 раз. Примеры декад: $(1, 10)$, $(0,2, 2)$, $(10^n, 10^{n+1})$. Если равномерная ось частот $\omega \in [0, \infty)$ - полубесконечная, то логарифмическая ось $\lg \omega \in (-\infty, \infty)$ - бесконечная, поэтому начальные значения ЛЧХ при $\omega=0$ отсутствуют. Принято ось $L(\omega)$ проводить через частоту $\omega=1$, где $\lg \omega = 0$. Единица измерения логарифмической амплитуды - *бел* (Б); декада по оси $L(\omega)$ равна 20 дБ. В табл. 2.1 даны логарифмы $\lg x$ и $20 \lg x$ величины x на декаде $(1, 10)$.

Таблица 2.1

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lg x$	0	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1
$20 \lg x$	0	6,02	9,54	12,04	13,98	15,56	16,9	18,06	19,08	20

На других декадах $\lg(10^n x) = n + \lg x$ и $20 \lg(10^n x) = 20n + 20 \lg x$.

Расположение частот на нулевой, первой, минус первой и i -й декадах логарифмической оси следующее:

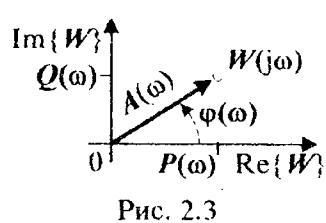
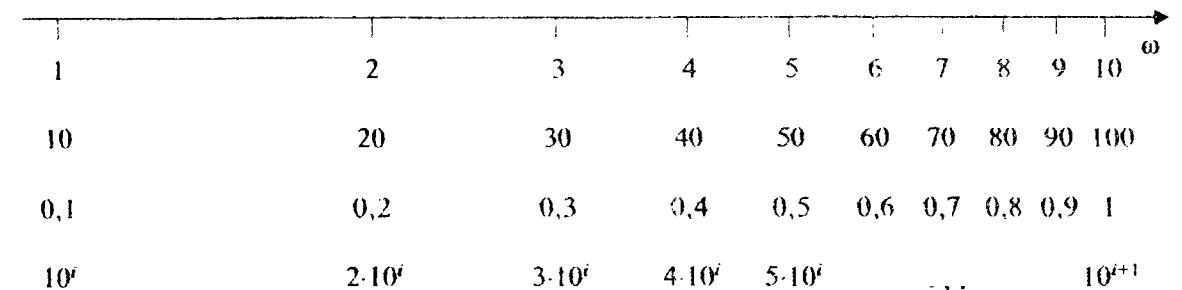


Рис. 2.3



Если под руками нет ни калькулятора, ни табл. 2.1, то для быстрого логарифмирования достаточно запомнить следующие простые правила:

1) $\lg 2 \approx 0,3$ и $\lg 3 \approx 0,48$;

2) умножение (деление) числа на 2 увеличивает (уменьшает) его логарифм на 0,3 дек, то есть на 6 дБ;

3) умножение (деление) числа на 3 увеличивает (уменьшает) его логарифм на 0,48 дек, то есть на 9,5 дБ.

По этим правилам определим, например:

$$1) \lg 15 = \lg(3 \cdot 10/2) = 0,48 + 1 - 0,3 = 1,48;$$

$$2) \lg 250 = \lg(10 \cdot 10 \cdot 10/2/2) = 3 - 0,3 - 0,3 = 2,4;$$

$$3) \lg 0,7 = \lg 7 - 1 \approx 0,5 \cdot \lg 50 - 1 = 0,5(2 - 0,3) - 1 = -0,15;$$

$$4) L = -22 = -40 + 18 = -40 + 20(0,3 \cdot 3) \text{ дБ} \Rightarrow A = 2 \cdot 2 \cdot 2 / 100 = 0,08;$$

$$5) A = 120 \Rightarrow L = 20 \lg 120 = 20 \lg(10 \cdot 3 \cdot 4) = 20(1 + 0,48 + 0,6) = 41,6 \text{ дБ}.$$

2.2. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ

Типовые звенья - это элементы, ПФ которых имеют в числителе или знаменателе полином минимального порядка с действительными коэффициентами:

- безынерционный усилитель нулевого порядка с ПФ $W(s) = K$;
- дифференцирующее звено первого порядка с ПФ $W(s) = Ks$;
- форсирующее звено первого порядка с ПФ $W(s) = K(1 + Ts)$;
- интегрирующее звено первого порядка с ПФ $W(s) = K/s$;
- апериодическое звено первого порядка с ПФ $W(s) = K/(1 + Ts)$;
- форсирующее звено второго порядка с ПФ $W(s) = K(1 + 2\xi Ts + T^2 s^2)$;
- колебательное звено второго порядка с ПФ $W(s) = K/(1 + 2\xi Ts + T^2 s^2)$;
- звено чистого запаздывания с ПФ $W(s) = Ke^{-\tau s}$.

В перечисленных типовых ПФ значения коэффициента усиления K и постоянной времени T могут быть любого знака, коэффициент демпфирования должен быть $0 \leq \xi < 1$, время запаздывания $\tau \geq 0$. При $\xi \geq 1$ полином $1 + 2\xi Ts + T^2 s^2$ имеет два действительных корня $s_{1,2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)/T$ и равен $(1 - s/s_1)(1 - s/s_2)$, то есть данный элемент не является типовым и его можно представить последовательным соединением двух апериодических или форсирующих звеньев первого порядка.

⇨ **Пример 2.1.** Последовательность построения ЧХ типовых звеньев с ПФ $W(s) = B(s)/A(s)$ покажем на примере звена с $W(s) = K/(Ts - 1)$:

1) получим КЧХ, подставив в ПФ $s = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{P_B(\omega) + jQ_B(\omega)}{P_A(\omega) + jQ_A(\omega)} = \frac{K}{1 + jT\omega};$$

2) получим ВЧХ и МЧХ, умножив $B(j\omega)$ и $A(j\omega)$ на комплексно-сопряженный полином $A(-j\omega)$:

$$W(j\omega) = \frac{(P_B(\omega) + jQ_B(\omega))(P_A(\omega) - jQ_A(\omega))}{P_A^2(\omega) + Q_A^2(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega) = \frac{-K - jKT\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

Построим в равномерном масштабе графики ВЧХ $P(\omega)$ и МЧХ $Q(\omega)$ (рис. 2.4, а, б):

$$P(\omega) = \frac{P_B(\omega)P_A(\omega) + Q_B(\omega)Q_A(\omega)}{P_A^2(\omega) + Q_A^2(\omega)} = \frac{-K}{1 + T^2\omega^2},$$

$$Q(\omega) = \frac{Q_B(\omega)P_A(\omega) - P_B(\omega)Q_A(\omega)}{P_A^2(\omega) + Q_A^2(\omega)} = \frac{-KT\omega}{1 + T^2\omega^2};$$

3) построим годограф $A(\varphi)$ как функцию $Q(P)$ параметра $\omega \in [0, \infty)$ (рис. 2.4, в). Это уравнение полуокружности в соответствующем квадранте, определенном знаками $P(\omega)$ и $Q(\omega)$, радиусом $|K|/2$ с центром в точке $(-K/2, 0)$:

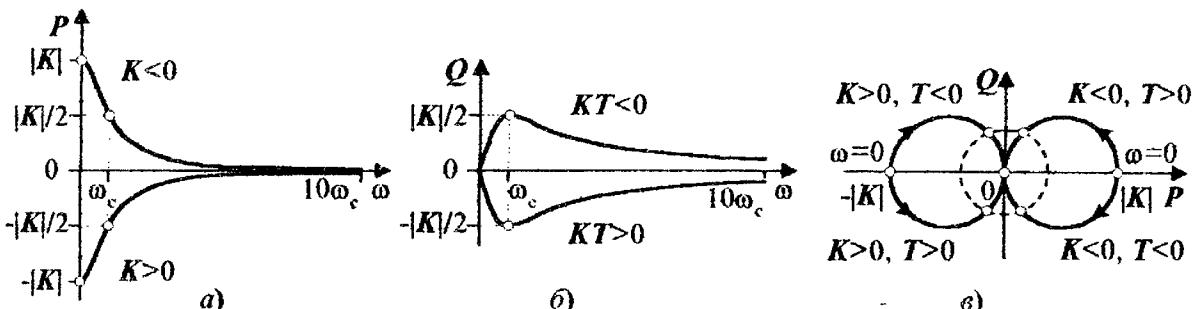


Рис. 2.4

4) построим в равномерном масштабе графики АЧХ $A(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ (рис. 2.5). Обратите внимание на расположение ФЧХ $\arctg((-KT\omega)/(-K))$ в зависимости от знаков K и T :

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = |K| / \sqrt{1 + T^2\omega^2},$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = \begin{cases} \arctg(T\omega) & \text{при } K < 0, \\ \arctg(T\omega) - 180^\circ & \text{при } K > 0, T > 0, \\ \arctg(T\omega) + 180^\circ & \text{при } K > 0, T < 0; \end{cases}$$

5) построим ЛАЧХ $L(\omega)$ и ЛФЧХ $\Phi(\omega)$ на интервале частот $\omega \in [0, 1\omega_c, 10\omega_c]$, где происходят основные изменения ЛЧХ (рис. 2.6). Желательно сначала построить асимптотические ЛЧХ (АЛАЧХ $L_a(\omega)$ и АЛФЧХ $\Phi_a(\omega)$), состоящие из отрезков прямых линий:

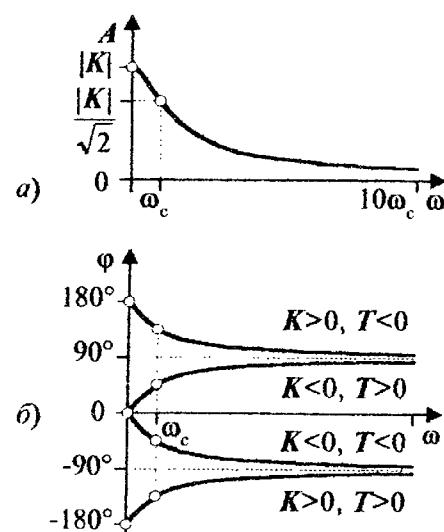


Рис. 2.5

Таблица 2.2

Звено и его ПФ $W(s)$	АФЧХ $A(\Phi)$	ЛАЧХ $L(\omega)$	ЛФЧХ $\Phi(\omega)$
Безынерционный усилитель			
K	$P(\omega) = K, Q(\omega) = 0$ 	$L(\omega) = 20\lg K $ 	$\Phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{при } K > 0 \\ \pm 180^\circ & \text{при } K < 0 \end{cases}$
Дифференцирующее звено	$P(\omega) = 0, Q(\omega) = K\omega$ 	$L(\omega) = 20\lg K + 20\lg\omega$ 	$\Phi(\omega) = \begin{cases} 90^\circ & \text{при } K > 0 \\ -90^\circ & \text{при } K < 0 \end{cases}$
K_3	$P(\omega) = 0, Q(\omega) = K\omega$ 		
Форсирующее звено первого порядка	$K(1+Ts)$ 	$L(\omega) = 20\lg K + 10\lg(1-T^2\omega^2)$ 	$\Phi(\omega) = \begin{cases} \arctg(T\omega) & \text{при } K > 0 \\ \arctg(T\omega) \pm 180^\circ & \text{при } K < 0 \end{cases}$

Продолжение табл. 2.2

<p>Интегрирующее звено</p> $\frac{K}{s}$	$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = -K/\omega$ $L(\omega) = 20\lg K - 20\lg\omega$	$\Phi(\omega) = \begin{cases} 90^\circ \text{ при } K < 0 \\ -90^\circ \text{ при } K > 0 \end{cases}$
<p>Апериодическое звено</p> $\frac{K}{1-Ts}$	$P(\omega) = K / \left(1 + T^2 \omega^2 \right)$ $Q(\omega) = -KT\omega / \left(1 + T^2 \omega^2 \right)$ $L(\omega) = 20\lg K - 10\lg\left(1 + T^2 \omega^2\right)$	$\Phi(\omega) = \begin{cases} 180^\circ \text{ при } K < 0, T < 0 \\ 0^\circ \text{ при } K > 0, T < 0 \\ 90^\circ \text{ при } K > 0, T > 0 \end{cases}$
<p>Звено чистого запаздывания</p> $Ke^{-\tau s}$	$P(\omega) = K \cos(\tau\omega)$ $Q(\omega) = -K \sin(\tau\omega)$ $L(\omega) = 20\lg K $	$\Phi(\omega) = \begin{cases} -180^\circ \text{ при } K > 0 \\ 180^\circ \text{ при } K < 0 \\ 360^\circ \text{ при } K < 0 \end{cases}$

<p>Форсирующее звено второго порядка</p> $K \left(1 + 2\xi T_s + T^2 s^2 \right)$ $P(\omega) = K \left(1 - T^2 \omega^2 \right)$ $Q(\omega) = 2\xi K T \omega$	$L(\omega) = 20 \lg K + 10 \lg \left\{ \left(1 - T^2 \omega^2 \right)^2 + (2\xi T \omega)^2 \right\}$ $\Phi(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2} & \text{при } K > 0 \\ \arctg \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2} \pm 180^\circ & \text{при } K < 0 \end{cases}$
<p>Колебательное звено</p> $\frac{K}{1 + 2\xi T_s + T^2 s^2}$ $P(\omega) = \frac{K \left(1 - T^2 \omega^2 \right)}{\left(1 - T^2 \omega^2 \right)^2 + (2\xi T \omega)^2}$ $Q(\omega) = \frac{-2\xi K T \omega}{\left(1 - T^2 \omega^2 \right)^2 + (2\xi T \omega)^2}$	$L(\omega) = 20 \lg K - 10 \lg \left\{ \left(1 - T^2 \omega^2 \right)^2 + (2\xi T \omega)^2 \right\}$ $\Phi(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2} & \text{при } K > 0 \\ -\arctg \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2} \pm 180^\circ & \text{при } K < 0 \end{cases}$

$$L(\omega) = 20\lg|K| - 10\lg(1+T^2\omega^2),$$

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20\lg|K| & \text{при } \omega \leq \omega_c, \\ 20\lg|K| - 20\lg|T|\omega & \text{при } \omega > \omega_c. \end{cases}$$

Частота $\omega_c = 1/|T|$ называется *частотой сопряжения* ветвей АЛАЧХ. Асимптотическая ЛФЧХ, например, для случая $K>0$ и $T>0$ имеет вид

$$\Phi_a(\omega) = \begin{cases} -180^\circ & \text{при } \omega \leq \omega_c, \\ -135^\circ + 45^\circ \lg(T\omega) & \text{при } 0,1\omega_c < \omega < 10\omega_c, \\ -90^\circ & \text{при } \omega \geq 10\omega_c. \end{cases}$$

Логарифмическая ФЧХ кососимметрична относительно средней точки $\Phi(\omega_c) = (\Phi(0) + \Phi(\infty))/2$.

Основное преимущество ЛЧХ - возможность их быстрого построения для любых типовых звеньев по передаточной функции без применения калькулятора или ЭВМ благодаря следующим *свойствам*:

1) логарифмические ЧХ одинаковы по форме для различных значений K и T (можно изготовить шаблоны $L(\omega)$ и $\Phi(\omega)$ из плотного, желательно прозрачного материала) и отличаются лишь ориентацией относительно оси L (ЛАЧХ смещается по вертикали в зависимости от $|K|$), оси Φ (ЛФЧХ зависит от знаков K и T) и оси $\lg\omega$ (ЛЧХ смещаются по горизонтали в зависимости от величины $|T|$);

2) точные ЛЧХ можно приближенно аппроксимировать асимптотическими ЛЧХ, состоящими из отрезков прямых линий и строящимися непосредственно по ПФ звена.

В табл. 2.2 приведены АФЧХ и ЛЧХ всех типовых звеньев.

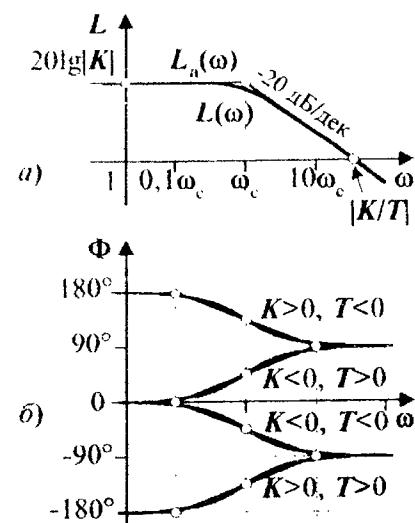


Рис. 2.6

2.3*. ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ЛЧХ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ

Уследуем погрешности $\Delta L(\omega) = L(\omega) - L_a(\omega)$ и $\Delta\Phi(\omega) = \Phi(\omega) - \Phi_a(\omega)$ аппроксимации нелинейных ЛЧХ с помощью АЛЧХ для типовых звеньев первого и второго порядков с $K>0$ и $T>0$. Для других значений K и T ЛЧХ приведены в табл. 2.2. Используем нормированную логарифмическую частоту $w = \lg(\omega/\omega_c)$, где $\omega_c = 1/T$ - частота сопряжения.

$$1. \text{Апериодическое звено с ПФ } W(s) = \frac{K}{1+Ts}.$$

Логарифмическая АЧХ звена $L(w) = 20\lg K - 10\lg(1+10^{2w})$ аппроксимируется двумя прямыми (рис. 2.7, а):

$$L_a(w) = \begin{cases} 20\lg K & \forall w \leq 0 - \text{горизонтальная прямая}, \\ 20\lg K - 20w & \forall w > 0 - \text{прямая с наклоном } -20 \text{ дБ/дек.} \end{cases}$$

Четная функция $\Delta L(w) = -10\lg(1+10^{-2|w|})$ погрешности аппроксимации ЛАЧХ (рис. 2.7, б) наиболее отклонена при $w=0$, где $\omega=\omega_c$: $\Lambda_1 = \Delta L(0) = -10\lg 2 \approx -3 \text{ дБ}$. На расстояниях $\Omega_L = \pm 1$ дек отклонения равны $\Delta L(\Omega_L) = 10\lg 1,01 = -0,0432 \text{ дБ}$, что составляет 1,44% от Λ_1 . Таким образом, ЛАЧХ отличается от АЛАЧХ в основном на интервале частот $\omega \in [0,1\omega_c, 10\omega_c]$ шириной 2 дек вокруг частоты сопряжения ω_c .

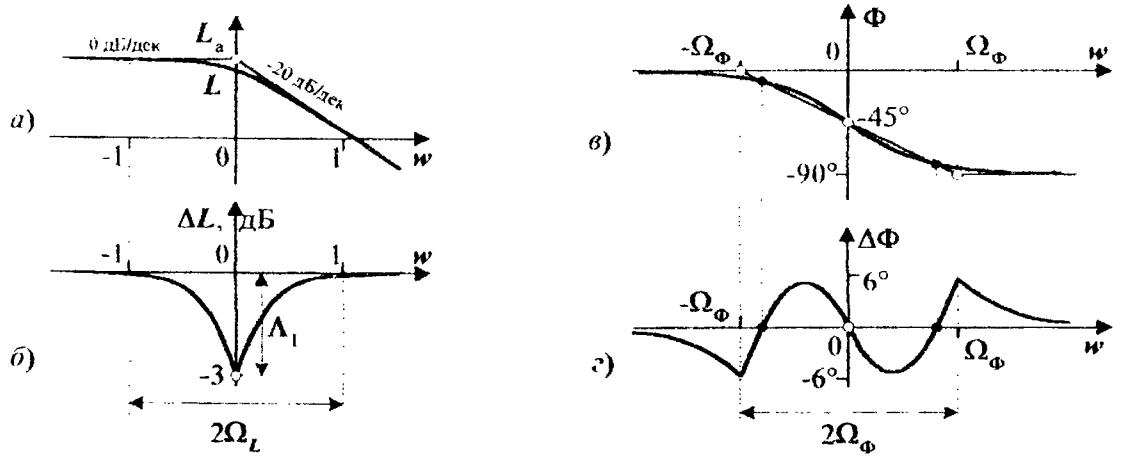


Рис. 2.7

Аппроксимируем ЛФЧХ $\Phi(w) = -\arctg(10^w)$ тремя прямыми (рис. 2.7, б):

$$\Phi_a(w) = \begin{cases} 0^\circ & \forall w \leq -\Omega_\Phi \text{ - горизонтальная прямая,} \\ -45^\circ(1+w/\Omega_\Phi) & \forall -\Omega_\Phi < w < \Omega_\Phi \text{ - наклон } -45/\Omega_\Phi \text{ (град/дек),} \\ -90^\circ & \forall w \geq \Omega_\Phi \text{ - горизонтальная прямая.} \end{cases}$$

Нечетная функция погрешности аппроксимации ЛФЧХ (рис. 2.7, в)

$$\Delta\Phi(w) = \begin{cases} -\arctg(10^w) & \forall w \leq -\Omega_\Phi, \\ -\arctg(10^w) + 45^\circ(1+w/\Omega_\Phi) & \forall -\Omega_\Phi < w < \Omega_\Phi, \\ -\arctg(10^w) + 90^\circ & \forall w \geq \Omega_\Phi \end{cases} \quad (2.1)$$

существенно зависит от полуширины Ω_Φ среднечастотной части ЛФЧХ. Оптимальное значение Ω_Φ находится решением минимаксной задачи

$$\Omega_\Phi = \arg \left\{ \min_{\Omega_\Phi} \max_w |\Delta\Phi(w)| \right\}. \quad (2.2)$$

Данная запись означает следующий алгоритм определения Ω_Φ :

- 1) задается значение Ω_Φ и по (2.1) строится график функции $|\Delta\Phi(w)|$;
- 2) находится максимальная погрешность ЛФЧХ $\max_w |\Delta\Phi(w)|$;

3) пункты 1 и 2 повторяются для разных Ω_Φ , и из всех значений $\max_w |\Delta\Phi|$ выбирается минимальное. Соответствующее ему значение Ω_Φ является решением минимаксной задачи поиска оптимальной полуширины среднечастотной части АЛФЧХ.

Так как функция $|\Delta\Phi(w)|$ не является гладкой ни по аргументу w , ни по параметру Ω_Φ , то решение задачи (2.2) может быть найдено только численными методами на ЭВМ, что и было сделано с помощью MathCAD. Результаты расчетов приведены на графике $\max_w |\Delta\Phi(\Omega_\Phi)|$ (рис. 2.8) и

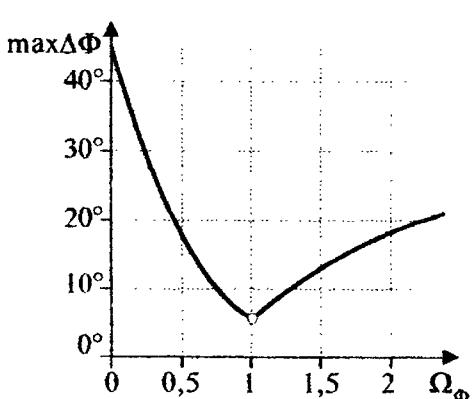


Рис. 2.8

удобства пользования вполне приемлемо значение $\Omega_\Phi = 1$ дек., при котором погрешность аппроксимации ЛФЧХ не превышает $5,71^\circ$, или 6% от полного изменения фазы $|\Phi(\infty) - \Phi(0)| = 90^\circ$.

Вывод. Логарифмические ЧХ типовых звеньев первого порядка с ПФ $K(1+Ts)$ и $K/(1+Ts)$ аппроксимируются с помощью АЛЧХ с максимальными погрешностями по амплитуде 3 дБ и фазе $5,7^\circ$. Ширина среднечастотной части ЛЧХ равна 2 дек вокруг частоты сопряжения $\omega_c = 1/|T|$.

$$2. Колебательное звено с ПФ W(s) = \frac{K}{1 + 2\xi Ts + T^2 s^2}.$$

Логарифмическая АЧХ звена $L(w) = 20\lg K - 10\lg \left\{ (1 - 10^{2w})^2 + 4\xi^2 \cdot 10^{2w} \right\}$ аппрокси- мируется двумя прямыми (рис. 2.9,а):

$$L_a(w) = \begin{cases} 20\lg K & \forall w \leq 0 \text{ - горизонтальная прямая,} \\ 20\lg K - 40w & \forall w > 0 \text{ - прямая с наклоном } -40 \text{ дБ/дек.} \end{cases}$$

Четная функция $\Delta L(w, \xi) = -10\lg \left\{ (1 - 10^{-2w})^2 + 4\xi^2 \cdot 10^{-2w} \right\}$ погрешности аппроксимации ЛАЧХ зависит как от частоты, так и от коэффициента демпфирования $0 \leq \xi < 1$. На рис. 2.9,б изображено по одной из симметричных ветвей $\Delta L(w, \xi)$ для разных ξ . На частоте сопряжения отклонения ЛАЧХ от АЛАЧХ равны

$$\Lambda_2(\xi) = \Delta L(0, \xi) = -20\lg(2\xi) \approx -6 - 20\lg\xi \text{ дБ.} \quad (2.3)$$

Графики $\Lambda_2(\xi)$ и $\max_w \Delta L(\xi) = \max_w |\Delta L(w, \xi)|$ построены на рис. 2.9,в. При $0,25 \leq \xi < 1$ максимальная погрешность лежит в пределах ± 6 дБ и вместо ЛАЧХ можно строить только АЛАЧХ. При $0 \leq \xi < 0,25$ нужно обязательно строить полную ЛАЧХ с резонансным пиком $\Lambda_2(\xi)$ для колебательного звена или впадиной $-\Lambda_2(\xi)$ для форсированного.

Зависимость $\Omega_L(\xi)$ полуширины среднечастотной части ЛАЧХ от ξ получим из следующего соображения. При $\xi = 1$ колебательное звено становится последовательным соединением двух апериодических звеньев, дающих на частоте $\Omega_L = 1$ дек суммарную погрешность $20\lg 1,01 = -0,0864$ дБ. Будем определять значение $\Omega_L(\xi)$ по минимальной частоте, на которой $|\Delta L(w, \xi)| \leq 0,0864$. Решение этой задачи изображено на графике $\Omega_L(\xi)$ (рис. 2.9,в).

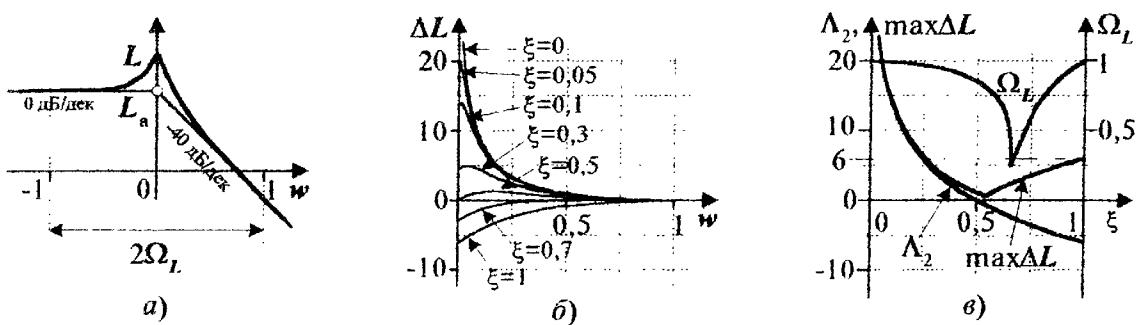


Рис. 2.9

Аппроксимируем ЛФЧХ $\Phi(w) = -\arctg \left(\frac{2\xi \cdot 10^w}{1 + 10^{2w}} \right)$ тремя прямыми (рис. 2.10, а):

$$\Phi_a(w) = \begin{cases} 0^\circ & \forall w \leq -\Omega_\Phi \text{ - горизонтальная прямая,} \\ -90^\circ(1+w/\Omega_\Phi) & \vee \quad \Omega_\Phi < w < \Omega_\Phi \text{ - наклон } -90/\Omega_\Phi \text{ (град/дек).} \\ -180^\circ & \forall w \geq \Omega_\Phi \text{ - горизонтальная прямая.} \end{cases}$$

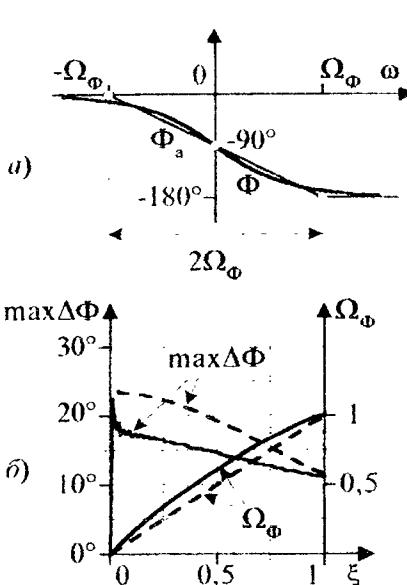


Рис. 2.10

Нечетная функция погрешности ЛФЧХ

$$\Delta\Phi(w) = \begin{cases} \Phi(w) & \forall w \leq -\Omega_\Phi, \\ \Phi(w) + 90^\circ(1+w/\Omega_\Phi) & \forall -\Omega_\Phi < w < \Omega_\Phi, \\ \Phi(w) + 180^\circ & \forall w \geq \Omega_\Phi \end{cases}$$

аналогична графику на рис. 2.7, а. Оптимальное значение полуширины Ω_Φ среднечастотной части ЛФЧХ находится решением минимаксной задачи (2.2) для каждого ξ . Результаты расчетов в среде MathCAD приведены на графиках $\Omega_\Phi(\xi)$ и $\max\Delta\Phi(\xi)$ (рис. 2.10, б): сплошные графики - оптимальные, пунктирные - при $\Omega_\Phi = \xi$. Для удобства допустимо принять $\Omega_\Phi = \xi$, тогда $11^\circ < \max\Delta\Phi < 23.4^\circ$, что составляет от 6 до 13% полного изменения фазы $|\Phi(\infty) - \Phi(0)| = 180^\circ$.

Выход. Логарифмические ЧХ типовых звеньев второго порядка с ПФ $K(1+2\xi Ts + T^2 s^2)$ и $K/(1+2\xi Ts + T^2 s^2)$ хорошо аппроксимируются с помощью АЛЧХ только при $0,25 \leq \xi < 1$, при этом максимальные погрешности аппроксимации не превышают значений 6 дБ по амплитуде и 22° по фазе. При $0 \leq \xi < 0,25$ АЛАЧХ необходимо дополнить резонансным пиком или впадиной величиной $A_2 = -6 - 20\lg\xi$ дБ. Ширина среднечастотной части ЛАЧХ не превышает 2 дек, а ширина ЛФЧХ близка к значению 2ξ вокруг частоты сопряжения $\omega_c = 1/|T|$.

2.4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Комплексную ЧХ системы с ПФ $W(s) = B(s)/A(s)$ можно представить в виде произведения N типовых КЧХ:

$$W(j\omega) = \prod_{i=1}^N W_i(j\omega) = \prod_{i=1}^N A_i(j\omega) e^{j\Phi_i(\omega)} = \left\{ \prod_{i=1}^N A_i(j\omega) \right\} e^{j \sum_{i=1}^N \Phi_i(\omega)} = A(j\omega) e^{j\Phi(\omega)}.$$

Таким образом, АЧХ, ФЧХ и ЛАЧХ системы, представленной последовательным соединением типовых звеньев, имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\omega) = \prod_{i=1}^N A_i(\omega), \quad \Phi(\omega) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(\omega), \\ L(\omega) = 20 \lg \prod_{i=1}^N A_i(\omega) = \sum_{i=1}^N 20 \lg A_i(\omega) = \sum_{i=1}^N L_i(\omega). \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Возможность суммирования, в том числе и графического, ЛЧХ типовых звеньев изменяет алгоритм построения ЧХ сложных систем, который теперь выглядит так:

1) найти **нули** (корни полинома $B(s)$) и **полюсы** (корни $A(s)$) ПФ $W(s)=B(s)/A(s)$ и представить ее в виде произведения типовых ПФ $W_i(s)$. Нумерация постоянных времени типовых звеньев сквозная по убыванию $|T_i|$;

2) на частотном диапазоне $\omega \in [0, 1/\max|T_i|, 10/\min|T_i|]$, округленном до целого числа декад, отметить по возрастанию частоты сопряжения $\omega_{ci}=1/|T_i|$ и построить в общих осях $\{L, \lg\omega\}$ АЛАЧХ и $\{\Phi, \lg\omega\}$ АЛФЧХ типовых звеньев;

3) согласно (2.4) графически сложить $L_{ai}(\omega)$, $\Phi_{ai}(\omega)$ и получить $L_a(\omega)$ и $\Phi_a(\omega)$;

4) с учетом погрешностей аппроксимации построить реальные ЛАЧХ $L(\omega)$ и ЛФЧХ $\Phi(\omega)$;

5) построить в равномерном масштабе график $A(\omega)=10^{0.05L(\omega)}$;

6) по графикам $A(\omega)$ и $\Phi(\omega)$ построить годограф КЧХ $W(j\omega)$;

7) по проекциям точек годографа на оси координат построить в равномерном масштабе графики $P(\omega)=\operatorname{Re}\{W(j\omega)\}$ и $Q(\omega)=\operatorname{Im}\{W(j\omega)\}$.

Наиболее трудоемким является первый этап, требующий расчета корней полиномов. Остальные этапы выполняются графически за 5–10 мин для систем любой степени. После выполнения третьего этапа нужно проверить правильность построения АЛЧХ по расположению асимптот на низших (при $\omega \rightarrow 0$) и высших (при $\omega \rightarrow \infty$) частотах. Эта проверка легко выполняется непосредственно по ПФ.

На низших частотах $\omega << 1/\max|T_i|$ ПФ близка к $W(s \rightarrow 0)$, то есть к:

1) $b_0/a_0 \neq 0$ для статических систем, при этом $L_a(\omega)=20\lg|b_0/a_0|$ – горизонтальная прямая; $\Phi_a(\omega)=90^\circ \{ \operatorname{sgn}(b_0/a_0)-1 \}$ начинается с угла 0° при $b_0/a_0 > 0$ или с угла $\pm 180^\circ$ при $b_0/a_0 < 0$;

2) $s^k b_k/a_0$, если числитель ПФ $B(s)=s^k(b_k+b_{k+1}s+\dots+b_m s^{m-k})$, при этом АЛАЧХ $L_a(\omega)=20\lg|b_k/a_0|+20k\lg\omega$ проходит через точку $L(1)=20\lg|b_k/a_0|$ с наклоном $+20k$ дБ/дек; $\Phi_a(\omega)=90^\circ \{ \operatorname{sgn}(b_k/a_0)-1+k \}$ начинается с угла $90^\circ k$ при $b_k/a_0 > 0$ или с угла $90^\circ k \pm 180^\circ$ при $b_k/a_0 < 0$;

3) $s^{-k} b_0/a_k$, если знаменатель ПФ $A(s)=s^k(a_k+a_{k+1}s+\dots+a_n s^{n-k})$, при этом АЛАЧХ $L_a(\omega)=20\lg|b_0/a_k|-20k\lg\omega$ проходит через точку $L(1)=20\lg|b_0/a_k|$ с наклоном $-20k$ дБ/дек; $\Phi_a(\omega)=90^\circ \{ \operatorname{sgn}(b_0/a_k)-1-k \}$ начинается с угла $-90^\circ k$ при $b_0/a_k > 0$ или с угла $-90^\circ k \pm 180^\circ$ при $b_0/a_k < 0$.

На высших частотах $\omega >> 1/\min|T_i|$ ПФ близка к значению $W(s \rightarrow \infty)=s^{m-n} b_m/a_n$: АЛАЧХ $L_a(\omega)=20\lg|b_m/a_n|+20(m-n)\lg\omega$ имеет наклон $(m-n)k$ дБ/дек и проходит через точку $L(1)=20\lg|b_m/a_n|$; $\Phi_a(\omega)=90^\circ \{ \operatorname{sgn}(b_m/a_n)-1+m-n \}$ сходится к углу $90^\circ(m-n)$ при $b_m/a_n > 0$ или к углу $90^\circ(m-n) \pm 180^\circ$ при $b_m/a_n < 0$.

Пример 2.2. Построить ЛЧХ схемы моста Вина – Робинсона (рис. 1.30) с ПФ $W(s)=\frac{1+T^2s^2}{3(1+3Ts+T^2s^2)}$, постоянная времени которой T соответствует частоте сопряжения $f_c=50$ Гц.

Решение. Прежде всего определим значение $T = 1/\omega_c = 1/2\pi f_c = 1/100\pi \approx 3,183$ мс . Полном знаменателя ПФ имеет действительные корни $s_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{5})/2T \approx \{-120, -822,5\}$, и разложение на простые множители $(1-s/s_1)(1-s/s_2) = (1+T_1s)(1+T_2s)$ с постоянными временем $T_1 = (3 + \sqrt{5})T/2 \approx 8,333$ мс и $T_2 = (3 - \sqrt{5})T/2 \approx 1,216$ мс , причем $T_1 T_2 = T^2$. Таким образом, ПФ имеет разложение $W(s) = \frac{1}{1+T_1s} \frac{1+T^2 s^2}{3} \frac{1}{1+T_2s}$ на два апериодических звена и предельный случай форсирующего звена второго порядка с $\xi = 0$.

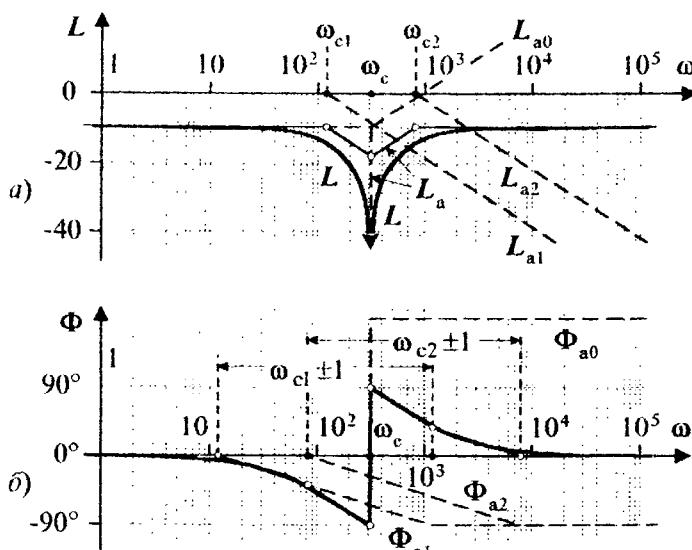


Рис. 2.11

Вместо графического сложения АЛЧХ звеньев можно построить начальные участки ЛЧХ системы для ПФ $W(s \rightarrow 0)$ по описанным выше правилам и, двигаясь вдоль оси $\lg \omega$ слева направо, изменять наклоны АЛАЧХ на частотах ω_{ci} и наклоны АЛФЧХ на частотах $\omega_{ci} \pm \Delta_\Phi$.

□ **Пример 2.3.** Построить все ЧХ системы с ПФ

$$W(s) = \frac{50s + 99s^2 + 4998s^3 - 100s^4}{-400 - 8000s + 96s^2 + 1920s^3 + s^4 + 20s^5}.$$

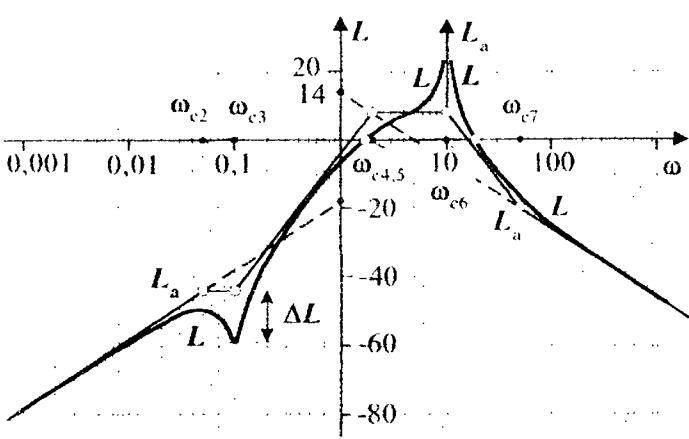
1. Разложим $W(s) = \frac{s(50-s)(1+2s+100s^2)}{(1+20s)(s-2)(s+2)(100+s^2)} = \prod_{i=1}^7 W_i(s)$, где $W_i(s) = K_i s$, $K_1 = -0,125$,

$L_1(1) = 20 \lg |K_1| = 3(-6) = -18$ дБ, $\Phi_1(0) = -90^\circ$; $W_2(s) = 1/(1+T_2s)$, $T_2 = 20$ с, $\omega_{c2} = 0,05$ рад/с; $W_3(s) = 1 + 2\xi_3 T_3 s + T_3^2 s^2$, $T_3 = 10$ с, $\omega_{c3} = 0,1$ рад/с, $\xi_3 = 0,1$; $W_4(s) = 1/(1+T_4s)$, $T_4 = 0,5$ с, $\omega_{c4} = 2$ рад/с; $W_5(s) = 1/(1-T_5s)$, $T_5 = 0,5$ с, $\omega_{c5} = 2$ рад/с; $W_6(s) = 1/(1+T_6^2 s^2)$, $T_6 = 0,1$ с, $\omega_{c6} = 10$ рад/с, $\xi_6 = 0$; $W_7(s) = 1-T_7s$, $T_7 = 0,02$ с, $\omega_{c7} = 50$ рад/с .

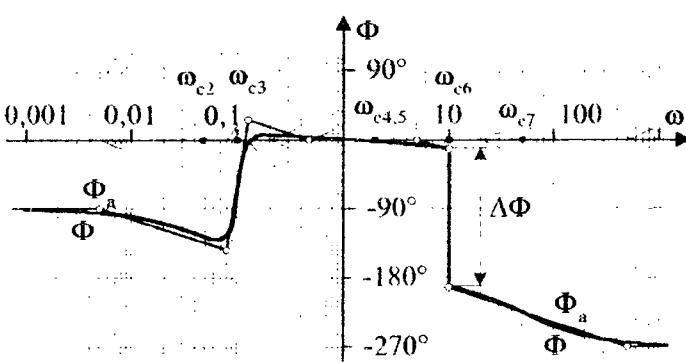
2. На частотном диапазоне $\omega \in [0,001, 1000]$ отметим на осях $\lg \omega$ частоты сопряжения $\omega_{c2} \div \omega_{c7}$ и условные обозначения (наклонные риски) перегибов АЛЧХ (рис.

Обозначив частоты сопряжения ЛАЧХ типовых звеньев $\omega_{cl} = 120$ рад/с, $\omega_c = 314$ рад/с и $\omega_{c2} = 822,5$ рад/с, построим в частотном диапазоне $\omega \in [1, 10^5]$ асимптотические ЛЧХ L_{al} , L_{a0} , L_{a2} (рис. 2.11,а) и Φ_{al} , Φ_{a0} , Φ_{a2} (рис. 2.11,б). Согласно (2.3) и табл. 2.2 график L_{a0} имеет асимптоту в $-\infty$ на частоте ω_c . График Φ_{a0} представляет собой скачок фазы с 0 до $+180^\circ$ на этой же частоте.

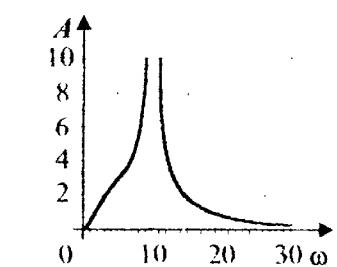
Просуммировав АЛЧХ, получим графики L_a и Φ_a , а с учетом погрешностей аппроксимации графики $L(\omega)$ и $\Phi(\omega)$. □



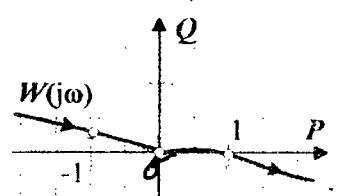
a)



b)



c)



d)

Рис. 2.12

2.12,a,b). Построим начальные участки АЛЧХ: $W(s \rightarrow 0) = 50s/(-400) = -0,125s = W_1(s)$, $L_{a1}(\omega) = 20\lg\omega - 18 \text{ дБ}$, $\Phi_{a1}(\omega) = -90^\circ$.

3. Двигаясь вдоль осей $\lg\omega$ слева направо, изменяя наклоны $L_a(\omega)$ и $\Phi_a(\omega)$ в соответствии с отмеченными перегибами. На конечном участке АЛЧХ проверяем правильность их построения: $W(s \rightarrow \infty) = -5/s$, $L_a(\omega) = 14 - 20\lg\omega \text{ дБ}$, $\Phi_a(\omega) = 90^\circ \equiv -270^\circ$.

4. Строим ЛЧХ, сглаживая перегибы АЛЧХ с учетом погрешностей аппроксимации. На частоте ω_{c3} ЛАЧХ имеет свойства форссирующего звена второго порядка с $\xi_3 = 0,1$: резонансный пик $\Delta L(\omega_{c3}) = 6 + 20\lg(0,1) = -14 \text{ дБ}$ и ширину интервала переворота фазы $2\Omega_\Phi = 0,2 \text{ дек}$. Особенность ЛЧХ: разрыв в $L(\omega_{c6}) \rightarrow \infty$ на две ветви и скачок в $\Phi(\omega_{c6})$ на $\Delta\Phi = -180^\circ$, так как эти свойства имеет колебательное звено с $\xi_6 = 0$.

5. График $A(\omega)$ (рис. 2.12,c), начинающийся и заканчивающийся в нуле, также имеет разрыв на частоте ω_{c6} .

6. Годограф $W(j\omega)$ (рис. 2.12,d) начинается и заканчивается в начале координат, а на частоте ω_{c6} разрывается на две ветви. Первая ветвь асимптотически стремится в бесконечность под фазовым углом $\Phi(\omega_{c6} - 0) = -11,14^\circ$. Вторая ветвь выходит из бесконечности под углом $\Phi(\omega_{c6} + 0) = -191,14^\circ$.

7. Проходя по годографу, строим ВЧХ $P(\omega)$ и МЧХ $Q(\omega)$ (рис. 2.12,d). □

□ **Пример 2.4.** Построить АЛЧХ и годографы системы «тележка - маятник». Единицы измерения выходных переменных: $[d] = \text{см}$, $[\phi] = \text{град}$.

Решение. Система с перевернутым маятником с ПФ (1.11) (рис. 2.13):

$$W_d(s) = \frac{100(60 - 8s - 8s^2)}{600s + 940s^2 - 216s^3 - 100s^4} = \frac{10(1 - T_2 s)(1 + T_4 s)}{s(1 + T_1 s)(1 - T_3 s)(1 + T_5 s)} \text{ см/Н,} \quad (2.5a)$$

$$W_\Phi(s) = \frac{180 \cdot 6s^2}{\pi(600s + 940s^2 - 216s^3 - 100s^4)} = \frac{0,573s}{(1 + T_1 s)(1 - T_3 s)(1 + T_5 s)} \text{ град/Н,} \quad (2.5b)$$

$T_1 = 1,72\text{c}$, $\omega_{c1} = 0,58 \text{ рад/c}$; $T_2 = 0,438\text{c}$, $\omega_{c2} = 2,28 \text{ рад/c}$; $T_3 = 0,397\text{c}$, $\omega_{c3} = 2,52 \text{ рад/c}$;
 $T_4 = 0,305\text{c}$, $\omega_{c4} = 3,28 \text{ рад/c}$; $T_5 = 0,244\text{c}$, $\omega_{c5} = 4,1 \text{ рад/c}$.

Система с обычным маятником с ПФ (1.12) (рис. 2.14):

$$W_d(s) = \frac{100(60 + 8s + 8s^2)}{600s + 1100s^2 + 216s^3 + 100s^4} = \frac{10(1 + 2\xi_2 T_2 s + T_2^2 s^2)}{s(1 + T_1 s)(1 + 2\xi_3 T_3 s + T_3^2 s^2)} \text{ см/Н,} \quad (2.6a)$$

$$W_\Phi(s) = \frac{180 \cdot 6s^2}{\pi(600s + 1100s^2 + 216s^3 + 100s^4)} = \frac{0,573s}{(1 + T_1 s)(1 + 2\xi_3 T_3 s + T_3^2 s^2)} \text{ град/Н,} \quad (2.6b)$$

$T_1 = 1,68\text{c}$, $\omega_{c1} = 0,6 \text{ рад/c}$; $T_2 = 0,37\text{c}$, $\omega_{c2} = 2,74 \text{ рад/c}$, $\xi_2 = 0,18$;
 $T_3 = 0,316\text{c}$, $\omega_{c3} = 3,16 \text{ рад/c}$, $\xi_3 = 0,245$.

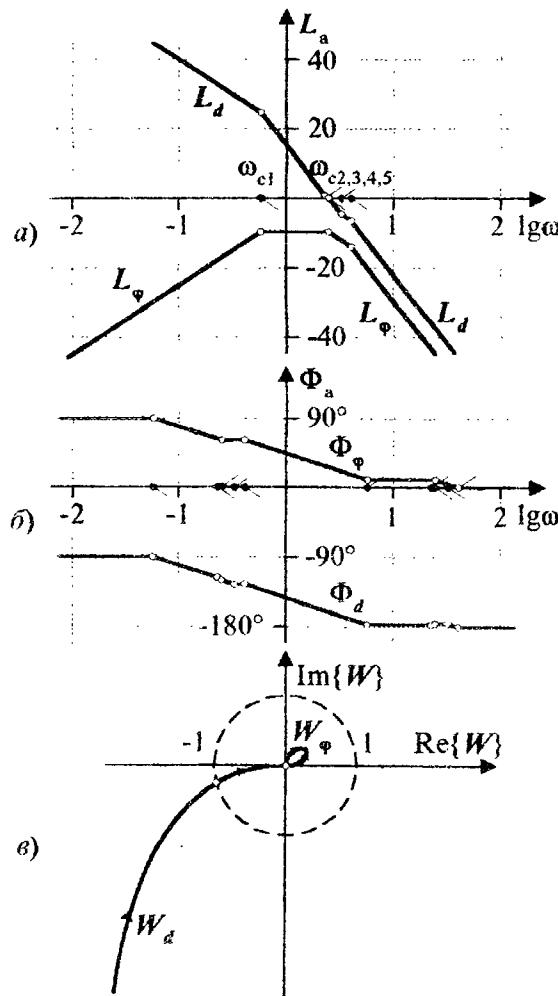


Рис. 2.13

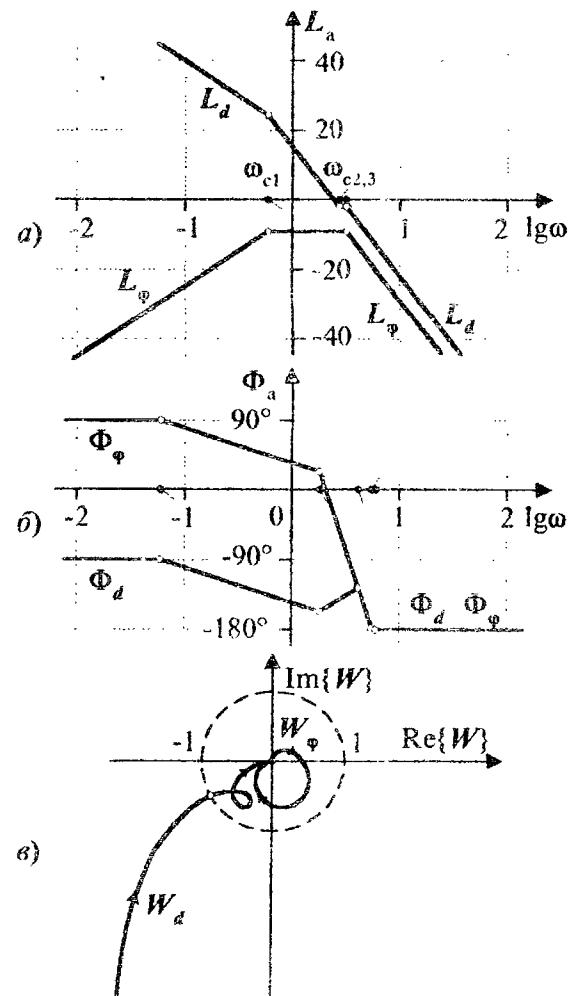


Рис. 2.14

2.5*. АНАЛИЗ ПОЛИНОМОВ

Dля разложения сложной системы на типовые звенья необходимо найти корни и множители полиномов $A(s)$ и $B(s)$ ее передаточной функции $W(s)=B(s)/A(s)$.

Рассмотрим полином $A(s)=a_0+a_1s+\dots+a_n s^n$ степени n с действительными коэффициентами a_i ($a_n \neq 0$) и методы расчета корней уравнения $A(s)=0$.

Основные задачи численного анализа полиномов:

- определение структуры спектра полинома: типа (действительного и комплексного) и числа корней каждого типа;
- локализация корней (определение интервала расположения) и выбор их начальных приближений;
- итерационное уточнение корней;
- формирование множителей полинома.

□ **Теорема 2.1** (Гаусса). Полином степени n имеет ровно n действительных или комплексных корней (каждый кратный корень считается кратное число раз).

$$\text{Следствие: } A(s)=a_0 \prod_{i=1}^n (1-s/s_i) = a_n \prod_{i=1}^n (s-s_i). \quad \square \quad (2.7a)$$

□ **Теорема 2.2.** Комплексные корни действительного полинома всегда попарно сопряжены: каждый корень $s_i=\eta_i+j\omega_i$ имеет сопряженный ему корень $s_{i+1}=\bar{s}_i=\eta_i-j\omega_i$.

Доказательство. Поскольку s_i - корень $A(s)$, то $A(s_i)=0$. Используя аксиомы комплексной арифметики $\bar{z}_1+z_2=\bar{z}_1+\bar{z}_2$, $\bar{z}_1 \cdot z_2=\bar{z}_1 \bar{z}_2$ и свойство действительного числа $a=\bar{a}$, определим

$$A(\bar{s}_i) = \sum_j a_j (\bar{s}_i)^j = \sum_j \bar{a}_j \bar{s}_i^j = \sum_j \bar{a}_j s_i^j = \sum_j a_j s_i^j = \bar{0} = 0.$$

Следовательно, \bar{s}_i также является корнем полинома $A(s)$.

Следствие 1: если полином имеет комплексно-сопряженные корни $s_{i,i+1}=\eta_i \pm j\omega_i$, то в (2.7а) произведения комплексно-сопряженных множителей дают действительные множители второго порядка:

$$(s-s_i)(s-s_{i+1})=s^2-2\eta_i s+\eta_i^2+\omega_i^2, \quad (1-s/s_i)(1-s/s_{i+1})=1+2\xi_i T_i s+T_i^2 s^2,$$

где $T_i=1/\sqrt{\eta_i^2+\omega_i^2}$; $\xi_i=-\eta_i T_i=-\eta_i/\sqrt{\eta_i^2+\omega_i^2}$.

Следствие 2: степень полинома и число его действительных корней одновременно либо четны, либо нечетны. В частности, любой полином нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень. □

Обозначим числа действительных положительных, отрицательных и нулевых корней n_+ , n_- и n_0 , а n_k - число пар комплексно-сопряженных корней, тогда число действительных корней $n_d=n_++n_-+n_0$, общее число корней полинома $n=n_d+2n_k$, а разложение полинома на *действительные* множители имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} A(s)=a_{n_0} s^{n_0} \prod_{i=1}^{n_++n_-} (1+T_i s) \prod_{i=1}^{n_k} (1+2\xi_i T_i s+T_i^2 s^2), \\ A(s)=a_n s^{n_0} \prod_{i=1}^{n_++n_-} (s-s_i) \prod_{i=1}^{n_k} (s^2-2\eta_i s+\eta_i^2+\omega_i^2). \end{array} \right. \quad (2.7b)$$

Для расчета корней и множителей полинома необходим определенный инструмент: компьютер, калькулятор или, в крайнем случае, бумага с карандашом вместе с хорошо обученной головой, понимающей сущность методов вычислений и критически осмысливающей полученные результаты. Лучшим помощником студента, инженера, исследователя и разработчика является профессиональный программный продукт типа **MathCAD** с богатыми функциональными и интеллектуальными возможностями, развитыми графическими средствами, удобным и дружественным интерфейсом [18]. Ниже приведен листинг программы расчета корней, множителей и графика (рис. 2.15) полинома пятой степени

$$A(s) = -400 - 20008s - 304s^2 + 4802s^3 + 101s^4 + 50s^5. \quad (2.8)$$

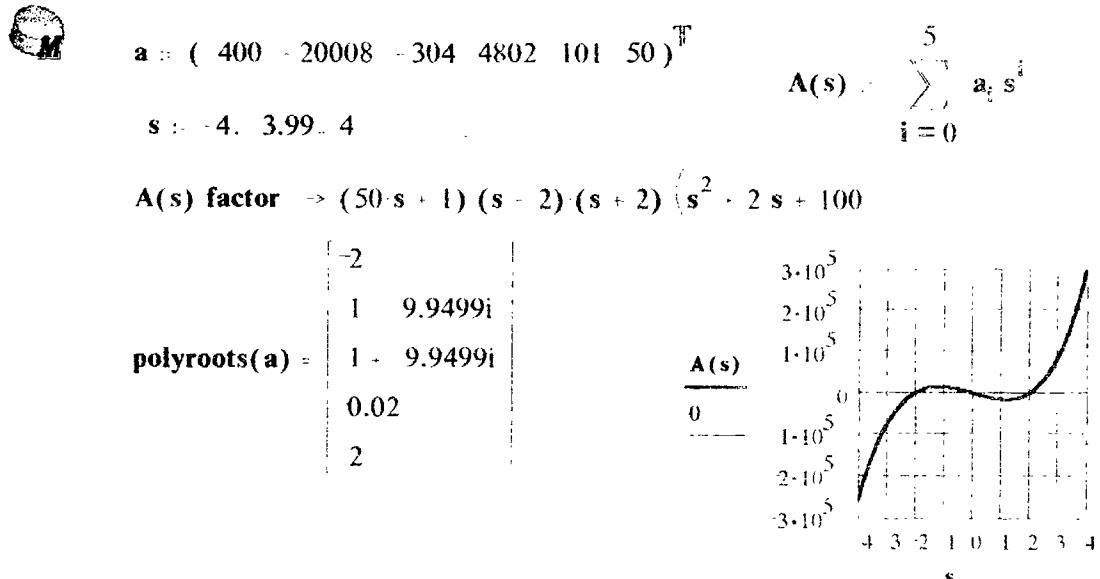


Рис. 2.15

Далее мы будем изучать методы исследования действительных полиномов без использования компьютера [11, 12, 19, 20]. К сожалению, такое положение еще типично для среднестатистического инженера или студента, имеющего в нужный момент на вооружении лишь калькулятор, который желательно должен быть программируемым.

Что касается расчета значения полинома $A(s)|_{s=c}$, то следует делать это последовательным умножением $A(c) = \dots (a_n c + a_{n-1})c + \dots + a_1)c + a_0$, а не суммированием слагаемых $a_i c^i$, которые могут быть настолько разных порядков, что при округлении произойдет потеря самых малых из них.

В процессе расчета корней рекомендуется периодически понижать степень полинома $A(s)$ путем деления его на полином $B(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0$, образованный произведением найденных простых множителей типа $(s - s_i)$ или $(1 + T_i s)$ для действительных корней и $(s^2 - 2\eta_i s + \eta_i^2 + \omega_i^2)$ или $(1 + 2\xi_i T_i s + T_i^2 s^2)$ для комплексно-сопряженных. При делении образуются полиномы частного $C(s) = c_l s^l + \dots + c_1 s + c_0$ степени $l = n - m > 0$ и остатка $D(s) = d_{m-1} s^{m-1} + \dots + d_1 s + d_0$. Деление полиномов можно выполнить вручную «уголком» как деление обычных чисел:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 \\ d_{m-1} s^{m-1} + \dots + d_1 s + d_0 = c_l s^l + c_{l-1} s^{l-1} + \dots + c_1 s + c_0 \quad (2.9a)$$

В соответствии с этим методом деления последовательно рассчитываем коэффициенты $c_i \div c_l$ и $d_0 \div d_{m-1}$:

$$\begin{cases} c_l = \frac{a_n}{b_m}, c_{l-1} = \frac{a_{n-1} - b_{m-1}c_l}{b_m}, \dots, c_0 = \frac{a_m - b_{m-1}c_1 - \dots - b_{m-l}c_l}{b_m}, \\ d_{m-1} = a_{m-1} - b_{m-1}c_0 - \dots - b_{m-l}c_{l-1}, \dots, d_1 = a_1 - b_1c_0 - b_0c_1, d_0 = a_0 - b_0c_0, \end{cases} \quad (2.9b)$$

при этом $b_i \neq 0 \forall i < 0$. Отсюда получаем рекуррентные

$$c_{l-i} = \frac{1}{b_m} \left(a_{n-i} - \sum_{j=1}^{\min\{i, m\}} b_{m-j} c_{l-i+j} \right) \forall i = \overline{0, l}, \quad d_i = a_i - \sum_{j=0}^{\min\{i, l\}} b_{i-j} c_j \forall i = \overline{0, m-1} \quad (2.9b)$$

и матричные формулы

$$\begin{bmatrix} c_l \\ c_{l-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_m & 0 & \dots & 0 \\ b_{m-1} & b_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m-l} & \dots & \dots & b_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d_{m-1} \\ \dots \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{m-1} \\ \dots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{m-1-l} & \dots & b_{m-2} & b_{m-1} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & b_0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_l \\ c_{l-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{bmatrix} \quad (2.9c)$$

для вычисления коэффициентов полиномов с определителем обращаемой матрицы, равным $b_m^{l+1} \neq 0$. Признак делимости $A(s)$ на $B(s)$ - нулевой остаток $D(s)$. При грубом расчете корней будет получен остаточный полином с ненулевыми коэффициентами $d_0 \div d_{m-1}$, сравнимыми по величине с коэффициентами $A(s)$ и $B(s)$. В этом случае требуется уточнить корни и построить новый полином $B(s)$.

2.5.1. Полиномы низких степеней

При $n=1$ полином $a_0 + a_1 s$ имеет единственный действительный корень $s_1 = -a_0/a_1$. При заданном действительном корне s_1 и одном из желаемых коэффициентов a_0 или a_1 полином первой степени имеет разложения $A(s) = a_0(1 + T_1 s) = a_1(s - s_1)$, где $T_1 = -1/s_1 = a_1/a_0$.

При $n=2$ полином $a_0 + a_1 s + a_2 s^2$ имеет дискриминант $d = a_1^2 - 4a_0a_2$ и корни $s_{1,2} = (-a_1 \pm \sqrt{d})/2a_2$. Если $d > 0$, то s_1 и s_2 - два различных простых действительных корня. При заданных простых действительных корнях $s_1 \neq s_2$ и одном из желаемых коэффициентов a_0 или a_2 полином второй степени имеет разложения $A(s) = a_2(s - s_1)(s - s_2) = a_0(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)$, где $T_i = -1/s_i \forall i = \overline{1, 2}; T_1 T_2 = a_2/a_0$.

Если $d = 0$, то $s_1 = s_2$ - один действительный корень кратности 2. При заданном двукратном действительном корне s_1 и одном из коэффициентов a_0 или a_2 полином имеет разложения $A(s) = a_2(s - s_1)^2 = a_0(1 + Ts)^2$, где $T = -1/s_1; T^2 = a_2/a_0$.

Если $d < 0$, то $s_{1,2} = \eta \pm j\omega$ - два простых комплексно-сопряженных корня с действи-

тельной $\eta = a_1/2a_2$ и мнимой $\omega = \sqrt{d}/2a_2$ частями. По заданным корням $s_{1,2}$ и одному из коэффициентов a_0 или a_2 полином второго порядка имеет разложения $A(s) = a_2(s^2 - 2\eta s + \eta^2 + \omega^2) = a_0(1 + 2\xi Ts + T^2 s^2)$, где $T = 1/\sqrt{\eta^2 + \omega^2}$; $\xi = -\eta/T = -\eta/\sqrt{\eta^2 + \omega^2}$; $T^2 = a_2/a_0$.

При $n=3$ полином $a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3$ имеет корни, вычисляемые по *методу Кардано* следующим образом.

1. Заменой аргумента $s = z - a_2/3a_3$ полином $A(s)$ преобразуется к специальному виду $B(z) = b_0 + b_1 z + a_3 z^3$ с коэффициентами $b_0 = a_0 - a_1 a_2/3a_3 + 2a_2^3/27a_3^2$ и $b_1 = a_1 - a_2^2/3a_3$.

2. Вычисляется модуль $V > 0$ и аргумент ϕ из комплексного выражения

$$v^3 = -b_0/2a_3 + \sqrt{(b_0/2a_3)^2 + (b_1/3a_3)^3} = V^3 e^{j3\phi}.$$

3. Находятся значения $v_i = V e^{j(\phi + 2\pi i/3)}$ $\forall i = \overline{1,3}$ и корни полинома $B(z)$

$$z_i = v_i - \frac{b_1}{3a_3 v_i} = \left(V - \frac{b_1}{3a_3 V}\right) \cos\left(\phi + \frac{2\pi i}{3}\right) + j \left(V + \frac{b_1}{3a_3 V}\right) \sin\left(\phi + \frac{2\pi i}{3}\right), \quad (2.10)$$

удовлетворяющие условию $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

4. Вычисляются корни полинома $A(s)$: $s_i = z_i - a_2/3a_3$ $\forall i = \overline{1,3}$.

При заданных корнях s_1 , s_2 , s_3 и одном из коэффициентов a_0 или a_3 полином третьей степени может иметь следующие разложения:

- если все три корня действительны, то

$$A(s) = a_0(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s) = a_3(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3),$$

где $T_i = -1/s_i$ $\forall i = \overline{1,3}$; $T_1 T_2 T_3 = a_3/a_0$;

- если один корень s_1 - действительный, а два $s_{2,3} = \eta \pm j\omega$ - комплексно-сопряженные, то

$$A(s) = a_3(s - s_1)(s^2 - 2\eta s + \eta^2 + \omega^2) = a_0(1 + T_1 s)(1 + 2\xi T_2 s + T_2^2 s^2),$$

где $T_1 = -1/s_1$; $T_2 = 1/\sqrt{\eta^2 + \omega^2}$; $\xi = -\eta/T_2 = -\eta/\sqrt{\eta^2 + \omega^2}$; $T_1 T_2^2 = a_3/a_0$.

Пример 2.5. Вычислить корни полиномов знаменателей ПФ обеих систем «тележка - маятник» $A_1(s) = 600 + 940s - 216s^2 - 100s^3$ и $A_2(s) = 600 + 1100s + 216s^2 + 100s^3$.

Решение. Выполнив по методу Кардано в полиноме $A_1(s)$ замену аргумента $s = z - 0,72$, получим полином $B_1(z) = -151,45 + 1095,52z - 100z^3$, тогда

$$v_1^3 = -0,757 + j6,937 = 6,978 e^{j1,68} \Rightarrow V_1 = 1,911, \phi_1 = 0,56.$$

По (2.10) вычисляем корни полинома $B_1(z)$, а затем ненулевые корни полинома $A_1(s)$ и его разложение:

$$z_1 = -3,377 \Rightarrow s_1 = -4,097, z_2 = 0,139 \Rightarrow s_2 = -0,5815, z_3 = 3,238 \Rightarrow s_3 = 2,518,$$

$$A_1(s) = -100(s + 4,097)(s + 0,5815)(s - 2,518) = 600(1 + 0,244s)(1 + 1,72s)(1 - 0,397s).$$

Заменив в полиноме $A_2(s)$ аргумент $s = z - 0,72$, получим полином

$B_2(z) = -117,35 + 944,48z + 100z^3$, тогда $v_2^3 = 6,204 \Rightarrow V_2 = 1,837$, $\varphi_2 = 0$, $z_1 = 0,124 \Rightarrow s_1 = -0,596$,

$z_2 = -0,062 + j3,075 \Rightarrow s_2 = -0,782 + j3,075$, $z_3 = -0,062 - j3,075 \Rightarrow s_3 = -0,782 - j3,075$,

$$A_2(s) = 100(s+0,596)(s^2 + 1,564s + 10,067) = 600(1+1,678s)(1+0,1554s+0,0993s^2).$$

Так были получены разложения знаменателей ПФ (2.5) и (2.6) в примерах 1.16 и 2.4. [1]

Достаточно трудоемкие методы (Декарта - Эйлера, Феррари) расчета корней полинома четвертой степени, связанные с дополнительным решением полиномиальных уравнений третьей степени, приведены в [11]. Корни полиномов степеней выше четвертой не имеют аналитических методов расчета и находятся в общем случае численными приближенными методами.

2.5.2. Структура спектра полинома

Определить состав корней каждого типа можно по графику полинома или по его коэффициентам. Графический метод сопряжен с многократными вычислениями $A(s)$ для различных значений аргумента. Он позволяет оценить число действительных корней по пересечениям графика с осью абсцисс и локализовать области размещения этих корней.

График полинома $A(s)$ степени n , его коэффициенты a_0, a_n и корни s_i имеют следующие свойства (рис. 2.16):

1) при четном n противоположные пределы $A(s \rightarrow \pm\infty)$ одного знака: $A(\pm\infty) \rightarrow +\infty$ при $a_n > 0$ (график 1) и $A(\pm\infty) \rightarrow -\infty$ при $a_n < 0$ (график 2).

Следствия:

а) при $a_0 a_n < 0$ график хотя бы дважды пересекает ось s по разные стороны от оси ординат, а полином четной степени имеет хотя бы два действительных корня **разных знаков**;

б) при $a_0 a_n > 0$ график **может** не пересекать ось s , а полином не иметь действительных корней;

2) при нечетном n противоположные пределы графика разных знаков: $A(\pm\infty) \rightarrow \pm\infty$ при $a_n > 0$ (график 3) и $A(\pm\infty) \rightarrow \mp\infty$ при $a_n < 0$ (график 4).

Следствие: график всегда пересекает ось s хотя бы один раз, а полином нечетной степени **всегда** имеет хотя бы один действительный корень $s_i > 0$ при $a_0 a_n < 0$ и $s_i < 0$ при $a_0 a_n > 0$;

3) знакопостоянное касание кривой $A(s)$ оси абсцисс (график 2) означает наличие действительного корня четной, а знакопеременное касание (график 3) - нечетной кратности;

4) локальные минимум при $A(s) > 0$ (графики 1, 3, 4) и максимум при $A(s) < 0$ (график 4) означают наличие комплексно-сопряженных корней $\eta \pm j\omega$ с действительной частью η в окрестности экстремума. Обратное утверждение неверно: **не каждая пара комплексных корней дает на графике локальный экстремум**.

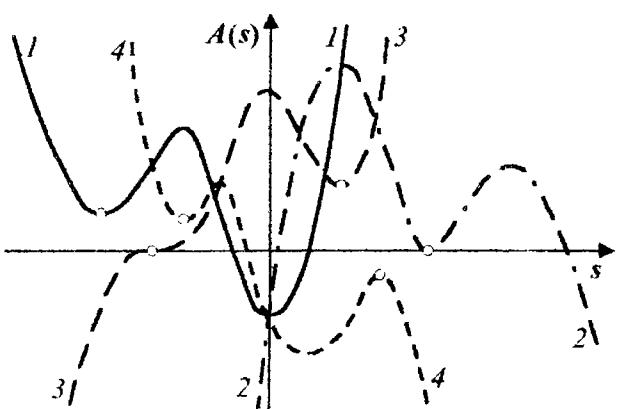


Рис. 2.16

Если построение графика полинома затруднительно, то можно использовать следующие теоремы, устанавливающие структуру спектра полинома только по его коэффициентам. Знание возможного числа каждого типа корней позволяет не искать те корни, которых в принципе нет.

\square Т е о р е м а 2.3 (Декарта). У действительного полинома $A(s)$:

1) $n_0 = \max\{i\} : a_0 = \dots = a_{i-1} = 0$ - кратность нулевого корня равна числу подряд следующих нулевых коэффициентов;

2) n_+ равно или на четное число меньше числа инверсий знака в последовательности ненулевых коэффициентов полинома $A(s)$;

3) n_- равно или на четное число меньше числа инверсий знака в последовательности ненулевых коэффициентов полинома $A(-s)$. \square

В связи с чрезвычайной простотой отделения нулевого корня любой кратности далее будем исследовать полином с ненулевыми корнями, структуру спектра которого можно уточнить с помощью следующих теорем.

\square Т е о р е м а 2.4 (Фурье - Бюдана). Число действительных корней полинома $A(s)$ на интервале $s \in [a, b]$ равно или на четное число меньше значения $N(a) - N(b)$, где $N(s)$ - число инверсий знака в последовательности $Q(s) = \{A(s), A'(s), \dots, A^{(n)}(s)\}$ значений полинома и его производных. При расчете $N(a)$ нулевые члены в $Q(a)$ вычеркиваются. Если при расчете $N(b)$ окажется, что $A^{(k)}(b) \neq 0$ и $A^{(l)}(b) \neq 0$, а $A^{(i)}(b) = 0 \forall i \in [k+1, l-1]$, то $A^{(i)}(b)$ заменяются на $(-1)^{l-i} \operatorname{sgn}(A^{(l)}(b))$. \square

Благодаря возможности интервальной оценки структуры спектра эта теорема более мощная, чем теорема Декарта. Подставив в $Q(s)$ предельное значение $s = +\infty$, получим число инверсий знака последовательности $Q(\infty) = \{a_n, n a_n, n(n-1)a_n, \dots, n!a_n\}$, равное $N(\infty) = 0$. Учитывая, что числа инверсий знаков последовательностей $Q(0) = \{a_0, a_1, 2a_2, \dots, n!a_n\}$ и коэффициентов $A(s)$ равны, получаем верхнюю оценку $N(0) - N(\infty) = N(0)$ числа n_+ , соответствующую теореме 2.3.

Плата за простоту теорем Декарта и Фурье - Бюдана - возможная неопределенность их оценок с точностью до четного числа.

\square Т е о р е м а 2.5 (Расса - Гурвица). У действительного полинома $A(s)$:

1) число правых (с $\operatorname{Re}\{s_i\} > 0$) корней равно числу инверсий знака в последовательности из $n+1$ элементов

$$M = \{a_n, M_1, M_1 M_2, M_2 M_3, \dots, M_{n-1} M_n\}, \quad (2.11)$$

где M_i есть i -й главный минор $n \times n$ -матрицы Гурвица Γ .

$$\Gamma = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & \dots & M_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 \end{bmatrix}, \quad M_1 = a_{n-1},$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = a_{n-1}a_{n-3} - a_n a_{n-2},$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \dots, M_n = a_0 M_{n-1}.$$

Следствие: если все элементы этой последовательности ненулевые и одного знака, то все корни полинома - левые. Для этого, по крайней мере, необходимо, чтобы коэффициенты a_0 , a_{n-1} и a_n были одного знака;

2) число левых (с $\operatorname{Re}\{s_i\} < 0$) корней равно числу инверсий знака в последовательности (2.11), построенной для полинома $A(-s)$.

Следствие: если все элементы этой последовательности ненулевые и одного знака, то все корни полинома - правые. Для этого, по крайней мере, необходимо, чтобы коэффициенты a_0 , $(-1)^{n-1}a_{n-1}$ и $(-1)^na_n$ были одного знака.

Анализ миноров матрицы Γ и элементов (2.11) показывает, что при переходе от полинома $A(s)$ к полиному $A(-s)$ меняют знаки:

- при четном n миноры M_2 , M_3 , M_6 , M_7 , ... и элементы последовательности $\{M_1, M_2M_3, M_4M_5, \dots\}$;

- при нечетном n миноры M_1 , M_2 , M_5 , M_6 , ... и элементы последовательности $\{a_n, M_1M_2, M_3M_4, \dots\}$.

В дополнение к теореме Рауса - Гурвица приведем формулу Орландо [11]

$$M_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=i+1}^n (s_i + s_k)$$

и следствие из нее: если $M_{n-1} = 0$ при $a_0 \neq 0$, то полином имеет пару корней с нулевой суммой (действительные корни $s_1 = -s_2$ или мнимые корни $s_{1,2} = \pm j\omega$), а два последних элемента в M равны нулю. Для соответствия теореме нулевым минорам и элементам последовательности (2.11) нужно приписать знаки «+» или «-» так, чтобы в случае действительных корней $s_1 = -s_2$ числа инверсий знаков в последовательностях, построенных для $A(s)$ и $A(-s)$, увеличивались на единицу.

Теорема Рауса - Гурвица дает более определенный результат по сравнению с теоремами Декарта и Фурье - Бюдана за счет дополнительного формирования матрицы Гурвица и расчета ее миноров. А если все миноры $M_i \neq 0$, то числа правых и левых корней определяются точно.

□ **Пример 2.6.** Оценить структуру корней полинома (2.8).

Решение. Анализируя только степень полинома $n=5$ и знаки коэффициентов $a_0 = -400$ и $a_5 = 50$, получим очень грубые оценки структуры спектра полинома: $n_0 = 0$, $n_+ \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $n_- \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и $n_K \in \{0, 1, 2\}$.

Используя теорему Декарта, построим диаграммы знаков коэффициентов полиномов $A(s)$ и $A(-s)$:

$$A(s): -400 \quad -20008 \quad -304 \quad 4802 \quad 101 \quad 50$$



$$\Rightarrow n_+ = 1,$$

$$A(-s): -400 \quad 20008 \quad -304 \quad -4802 \quad 101 \quad -50$$



$$\Rightarrow n_- \in \{0, 2, 4\},$$

$$n_K = (5-1-n_-)/2 \in \{0, 1, 2\}.$$

Применим метод Рауса - Гурвица для полинома $A(s)$:

$$I' = \begin{bmatrix} 101 & -304 & -400 & 0 & 0 \\ 50 & 4802 & -20008 & 0 & 0 \\ 0 & 101 & -304 & -400 & 0 \\ 0 & 50 & 4802 & -20008 & 0 \\ 0 & 0 & 101 & -304 & -400 \end{bmatrix}, \quad a_5=50, \quad M_1=101, \quad M_2=-500202, \\ M_3=-50020200, \quad M_4=0, \quad M_5=0.$$

Так как $M_4=0$, $a_0<0$ и $a_5>0$, то полином имеет действительные противоположные корни и последовательность вида $\{+, +, +, +, +0, -0\}$ с одной инверсией знака. Таким образом, $n_+=1$, а число левых корней равно четырем. Это равно числу инверсий знака в последовательности $\{-, +, -, +, -0, -0\}$, построенной для полинома $A(-s)=-400+20008s-304s^2-4802s^3+101s^4-50s^5$ с минорами $M_1=101$, $M_2=-500202$, $M_3=-50020200$, $M_4=0$, $M_5=0$. Из четырех левых корней заведомо один - действительный $s_2=-s_1$, а из оставшихся трех - не более одной пары комплексно-сопряженных корней. Следовательно, $n_- \in \{2, 4\}$ и $n_k \in \{0, 1\}$. В действительности полином имеет следующие типы корней: $n_0=0$, $n_+=1$, $n_-=2$ и $n_k=1$. \square

2.5.3. Локализация корней полинома

Локализация корней - это приближенная оценка областей их размещения на действительной оси или на комплексной плоскости. Наиболее быстрый способ локализации действительных корней нечетной кратности заключается в построении графика $A(s)$ и поиске таких интервалов $[s_{i\min}, s_{i\max}]$ его пересечения с осью s , что $A(s_{i\min})A(s_{i\max})<0$. В точках действительных корней четной кратности график $A(s)$ лишь касается оси s , поэтому локализовать их данным методом нельзя из-за однозначности функции $A(s)$ на концах тестируемого интервала. Некоторую ясность в вопросе о существовании действительных корней на интервале $[a, b]$ с $A(a)A(b)>0$ может внести теорема Фурье - Бюдана. Ее результат $N(a)-N(b)=0$ означает отсутствие таких корней.

К сожалению, достоверная локализация комплексно-сопряженных корней полинома высокой степени по его графику затруднительна. На рис. 2.15 в среде MathCAD построен график функции (2.8), пересекающий ось s в окрестности действительных значений 0 и ± 2 . Оставшаяся пара комплексно-сопряженных корней $-1 \pm \sqrt{10}$ никаких визуальных признаков своего существования не обнаруживает.

Далее рассмотрим некоторые вычислительные методы локализации корней без построения графика функции $A(s)$.

2.5.3.1. Метод обособленных корней [20]

Метод основан на предположении, что полином с предварительно отделенными нулевыми корнями имеет близкие или удаленные от начала координат корни, обособленные (далеко отстоящие) от остальных корней.

В случае возможного существования близкого к нулю действительного корня $|s_i| \ll |s_i| \forall i=\overline{2, n}$ пренебрежем в уравнении $A(s_i)=0$ слагаемыми $a_2s_i^2 + a_n s_i^n$, тогда из уравнения $a_0 + a_1 s_i \approx 0$ следует оценка $s_i \approx -a_0/a_1$. Если существует удаленный от остальных действительный корень $|s_i| > |s_i| \forall i=\overline{2, n}$, то, пренебрегая в уравнении $A(s_i)=0$ слагаемыми

гаемыи $a_0 = a_{n-2}s_1^{n-2}$, получим оценку $s_1 \approx |a_{n-1}/a_n|$.

Аналогично находятся оценки расположения обособленных от других комплексно-сопряженных корней s_1 и $s_2 = \bar{s}_1$ путем решения квадратных уравнений $a_0 + a_1 s + a_2 s^2 = 0$ и $a_{n-2} + a_{n-1} s + a_n s^2 = 0$ с отрицательными дискриминантами $a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$ и $a_{n-1}^2 - 4a_n a_{n-2} < 0$.

Полученные оценки можно использовать как начальные приближения в алгоритмах итерационного уточнения корней.

2.5.3.2. Метод Маклорена [19, 20]

Эффективный метод интервальной локализации *действительных* корней предложен **Маклореном**. Из полинома $A(s)$ формируются два вспомогательных полинома $A_1(s)$ и $A_2(s)$ с единичными старшими коэффициентами:

$$A_1(s) = (-1)^n A(-s)/a_n = s^n - \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}\alpha_1 s + (-1)^n\alpha_0,$$

$$A_2(s) = A(s)/a_n = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0,$$

где $\alpha_i = a_i/a_n$. Все действительные корни $A(s)$ локализованы в интервале

$$-1 - \sqrt[n-m]{M_1/a_n} < s_i < 1 + \sqrt[n-m]{M_2/a_n}, \quad (2.12a)$$

где m_i и M_i – максимальные индекс и модуль *отрицательных* коэффициентов полинома $A_i(s)$.

Вместо неравенства (2.12a) можно использовать неравенство

$$-1 - \sqrt[n-m]{|M_1/a_n|} < s_i < 1 + \sqrt[n-m]{|M_2/a_n|} \quad (2.12b)$$

для полиномов $A_1(s) = A(-s)$ и $A_2(s) = A(s)$, приведенных к виду с положительными старшими коэффициентами a_n . Если $|M_1/a_n| \gg 1$ или $|M_2/a_n| \gg 1$, то формула (2.12b) дает сильно завышенные границы. Для сужения интервала локализации рекомендуется представить полиномы $A_1(s)$ и $A_2(s)$ суммами полиномов с положительными старшими коэффициентами и приблизительно равными отношениями максимальных модулей к старшим коэффициентам. Для каждого слагаемого $A_{1i}(s)$ и $A_{2i}(s)$ по (2.12) находится интервал локализации его действительных корней. Тогда интервал локализации действительных корней полинома $A(s)$ есть *объединение* интервалов локализации корней слагаемых полиномов. При удачном разбиении полиномов границы локализации определяются значительно точнее, чем без такого разбиения.

2.5.3.3. Метод кругов Гершгорина [11, 12]

Любому действительному полиному $\tilde{A}(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_{n-1} s^{n-1} + s^n$ с приведенными коэффициентами $\alpha_i = a_i/a_n$ можно поставить в соответствие $n \times n$ -матрицу F , собственные числа которой (корни уравнения $|M_n - F| = 0$) равны корням полинома, который в этом случае называется *характеристическим*. Из бесконечного множества подобных матриц с одинаковым характеристическим полиномом $\tilde{A}(s)$ выделяются особые *канонические формы Фробениуса*

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} = F_1^T, \quad (2.13)$$

элементы которой есть числа 0, 1 и коэффициенты $-\alpha_i \forall i=0, \overline{n-1}$. В теории матриц известны **методы кругов Гершгорина**, применяемые для локализации собственных чисел $n \times n$ -матрицы $F = \{f_{ij}\}$. Круг Гершгорина G_i для i -го диагонального элемента f_{ii} описывается неравенством $|s - f_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |f_{ij}|$, то есть имеет центр в точке f_{ii} оси $\text{Re}\{s\}$ и радиус $R_i = \sum_{j \neq i} |f_{ij}|$. В частности, в (2.13) матрица F_1 имеет $n-1$ совпадающих кругов единичного радиуса с центрами в начале координат и один круг радиуса $R_n = \sum_{i=0}^{n-2} |\alpha_i|$ с центром в точке $-\alpha_{n-1}$ (рис. 2.17, а). Матрица F_2 имеет $n-1$ кругов с центрами в начале координат и радиусами $R_1 = |\alpha_0|$, $R_i = |\alpha_{i-1}| + 1 \forall i=2, \overline{n-1}$ и круг G_n единичного радиуса с центром в точке $-\alpha_{n-1}$ (рис. 2.17, б).

Размещение корней полинома $A(s)$ и собственных чисел матрицы F , согласно методу кругов Гершгорина, удовлетворяет следующим условиям:

1) любой корень лежит, по крайней мере, в одном из кругов и ни один из корней не лежит вне кругов: $\forall i \exists j: |s_i - f_{jj}| \leq R_j$;

2) если m кругов образуют область, изолированную от остальных кругов, то в этой области размещено ровно m корней;

3) если какой-либо один круг Гершгорина изолирован, то есть $\exists i: |f_{ii} - f_{jj}| > R_i + R_j \forall j \neq i$, то он имеет ровно один действительный корень $s_i \in [f_{ii} - R_i, f_{ii} + R_i]$. Если все круги изолированы, то каждый из них имеет по одному действительному корню.

Во многих случаях анализ совместного расположения кругов Гершгорина, построенных для обеих матриц F_1 и F_2 , позволяет сузить области локализации корней характеристического полинома этих матриц.

В заключение приведем дополнительные оценки модулей корней полинома, в том числе и комплексных [1, 20], при следующих соотношениях между коэффициентами:

- если $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$, то $|s_i| < 1 \forall i=1, \overline{n}$; (2.14a)

- если $0 < \alpha_n < \dots < \alpha_1 < \alpha_0$, то $|s_i| > 1 \forall i=1, \overline{n}$; (2.14б)

- если $0 < m \leq a_j/a_{j+1} \leq M \forall j=0, \overline{n-1}$, то $m \leq |s_i| \leq M \forall i=1, \overline{n}$; (2.14в)

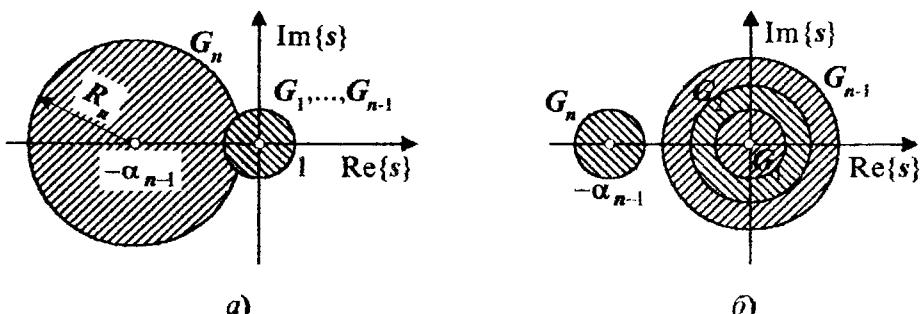


Рис. 2.17

- если для действительных неотрицательных чисел $q_r = \sqrt[n]{|a_{n-r}/a_n|}$ выполняются условия $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$, то модули всех корней

$$\begin{cases} |s_i| \leq q_1 + q_2, \\ |s_i| \leq q_1 + 0,618q_2 + 0,2213q_3 + 0,0883q_4 + 0,0375q_5 + 0,0185q_6 + 0,0074q_7 + 0,0081q_8. \end{cases} \quad (2.14r)$$

Каждую полученную оценку обосабленного корня полинома желательно проверить на принадлежность областям локализации корней, найденным методами кругов Гершгорина или Маклорена.

Упражнение 2.7. Локализовать расположение действительных корней полинома (2.8) подходящими для него методами.

Решение. Предполагая наличие обосабленных действительных корней, получим $s_1 \approx -101/50 = -2,02$ и $s_2 \approx 400/20008 = -0,019992$. Судя по тому, что отношение модулей этих чисел составляет два порядка, можно считать эти приближения соответственно большим и малым.

Из двух оценочных полиномов второго порядка $-400-20008s-304s^2$ и $4802+101s+50s^2$ лишь второй имеет отрицательный дискриминант и оценки комплексно-сопряженных корней $s_{4,5} \approx -1,01 \pm j9,7478$ с большим модулем.

Круги Гершгорина, рассчитанные по матрицам (2.13) для полинома $A(s) = 50(s^5 + 2,02s^4 + 96,04s^3 + 6,08s^2 - 400,16s - 8)$, образуют односвязные области и отсекают на действительной оси s интервалы $[-512,24, 508,2]$ для матрицы F_1 и $[-401,16, 401,16]$ для матрицы F_2 . Пересечение этих интервалов дает область локализации действительных корней $[-401,16, 401,16]$.

По методу Маклорена для полинома $A(s)$ получим $n=5$ и

$$A_1(s) = s^5 + 2,02s^4 + 96,04s^3 + 6,08s^2 - 400,16s + 8 \Rightarrow m_1 = 4, M_1 = 400,16;$$

$$A_2(s) = s^5 + 2,02s^4 + 96,04s^3 + 6,08s^2 - 400,16s - 8 \Rightarrow m_2 = 2, M_2 = 400,16.$$

Таким образом, получили интервал локализации действительных корней

$$(-1-\sqrt[3]{400,16}, 1+\sqrt[3]{400,16}) \approx (-401,16, 7,37). \quad (2.15)$$

Для сужения левой границы представим $A_1(s) = A_{11}(s) + A_{12}(s) + A_{13}(s)$:

$$A_{11}(s) = s^5 - 2,02s^4 - 2,02s + 8 \Rightarrow n_{11} = 5, m_{11} = 4, M_{11} = 2,02, -1 - M_{11} = -3,02;$$

$$A_{12}(s) = 96,04s^3 - 388,01s \Rightarrow n_{12} = 3, m_{12} = 1, -1 - \sqrt[3]{388,01/96,04} = -3,01;$$

$$A_{13}(s) = 6,08s^2 - 10,13s \Rightarrow n_{13} = 2, m_{13} = 1, -1 - 10,13/6,08 = -2,67.$$

Для сужения правой границы представим $A_2(s) = A_{21}(s) + A_{22}(s) + A_{23}(s)$:

$$A_{21}(s) = s^5 - 6,08s^2 - 6,08s - 6 \Rightarrow n_{21} = 5, m_{21} = 2, 1 + \sqrt[3]{6,08} = 2,83;$$

$$A_{22}(s) = 2,02s^4 - 15,68s - 2 \Rightarrow n_{22} = 4, m_{22} = 1, 1 + \sqrt[3]{15,68/2,02} = 2,98;$$

$$A_{23}(s) = 96,04s^3 - 378,4s \Rightarrow n_{23} = 3, m_{23} = 1, 1 + \sqrt[3]{378,4/96,04} = 2,98.$$

Таким образом, интервал (2.15) сузился до $(-3,02, 2,98) \approx (-3, 3)$, то есть в 68 раз. Полученные выше оценки s_1 и s_2 лежат в действительном интервале $(-3,02, 0)$, а положительный действительный корень локализован в интервале $(0, 2,98)$. \square

2.5.4. Уточнение корней полинома

После локализации корней следует завершающий этап их *уточнения* с желаемой точностью. Выбирается начальное приближение $s^{(0)}$, желательно из областей локализации. Итерационный процесс уточнения (настройки) порождает последовательность приближений $s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(N)}$ к некоторому корню s_i и заканчивается на N -й итерации при достижении абсолютной ϵ_a или относительной ϵ_o погрешностей:

$$\Delta^{(N)} = |s^{(N)} - s^{(N-1)}| < \epsilon_a, \quad \delta^{(N)} = \Delta^{(N)} / |s^{(N)}| < \epsilon_o. \quad (2.16)$$

Нет никакой возможности рассмотреть здесь огромное число алгоритмов, отличающихся *объектом настройки* (интервала, корня или множителя полинома), *характером сходимости* (глобальным или локальным) и ее *скоростью* (геометрической, квадратичной, осциллирующей и т.д.). Остановимся лишь на некоторых методах, которые можно реализовать без использования компьютера (желателен программируемый калькулятор).

2.5.4.1. Метод дихотомии (дробления)

Начальный интервал $\Lambda^{(0)} = [s_l^{(0)}, s_r^{(0)}]$ локализации корня должен удовлетворять условию $A_l^{(0)} A_r^{(0)} < 0$, где $A_l^{(k)} = A(s_l^{(k)})$ и $A_r^{(k)} = A(s_r^{(k)})$ – значения полинома на левой и правой границах. Дихотомическое сужение интервала $\Lambda^{(k)} = [s_l^{(k)}, s_r^{(k)}]$ ($k=0,1,2,\dots$) – это дробление его на две части внутренней точкой $s^{(k+1)} = d_l^{(k)} s_l^{(k)} + d_r^{(k)} s_r^{(k)}$. Для следующей итерации из двух подинтервалов $[s_l^{(k)}, s^{(k+1)}]$ и $[s^{(k+1)}, s_r^{(k)}]$ выбирается тот, на концах которого значения полинома разных знаков: $A_l^{(k+1)} A_r^{(k+1)} < 0$. Достигнув сходимость на N -й итерации, получим корень $s_i = s^{(N+1)}$.

Простейшими методами дробления интервала $\Lambda^{(k)}$ являются:

- *половинное* с коэффициентами $d_l = d_r = 0,5$. Гарантирует монотонную сходимость длины интервала $\lambda^{(k)} = |s_r^{(k)} - s_l^{(k)}|$ к нулю со скоростью геометрической прогрессии $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} / 2$, знаменатель которой $q=2$ дает примерно три новые значащие цифры корня за каждые десять итераций настройки;
- *пропорциональное* с коэффициентами дробления

$$d_l^{(k)} = |A_r^{(k)}| / (|A_l^{(k)}| + |A_r^{(k)}|), \quad d_r^{(k)} = 1 - d_l^{(k)}.$$

Длина интервала монотонно сужается как прогрессия $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} / q^{(k)}$ со знаменателем $q^{(k)} = 1/d_v^{(k)}$, в котором индекс $v \in \{l, r\}$ такой, что $A_v^{(k)} A(s_i^{(k+1)}) < 0$. В некоторых случаях на начальных итерациях $q^{(k)} \gg 1$, а интервал быстро сужается; на последующих итерациях $q^{(k)} \approx 1$, а интервал практически перестает сужаться, при этом один из его концов сходится к корню полинома.

Следует предостеречь от использования отличных от (2.16) критериев останова

итераций. Например, выход по длине интервала $\lambda^{(N)} < \epsilon_a$ в методе пропорционального дробления может стать невозможен при слишком малом значении ϵ_a . При половинном дроблении никогда не выполняется условие $\lambda^{(N-1)}/\lambda^{(N)} - 1 < \epsilon_o$ относительного сужения длины интервала.

Пример 2.8. Сравнить половинный и пропорциональный методы расчета действительного корня полинома (2.8) с погрешностями $\epsilon_a = \epsilon_o = 10^{-6}$ при начальном интервале $\Lambda^{(0)} = [-3, 3]$.

Решение. На рис. 2.18 изображены процессы сужения $\Lambda^{(k)}$:

а) метод половинного дробления сходится за 21 итерацию и дает корень $s_3 = 1,999999$;

б) метод пропорционального дробления сходится за 24 итерации и дает корень $s_3 = -1,999998$.

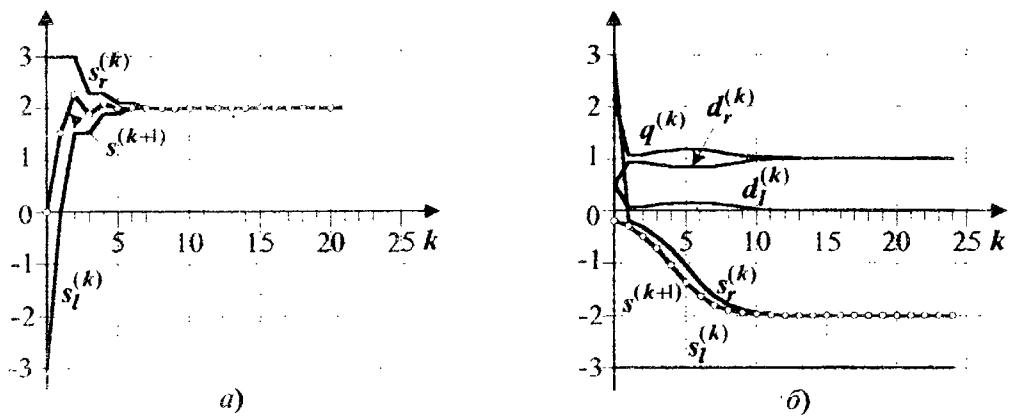


Рис. 2.18

Отметим, что при выборе начального интервала $\Lambda^{(0)} = [-3,02, 2,98]$ оба метода сходятся к одному и тому же корню $s_1 = -2$. Иногда пропорциональный метод демонстрирует очень быструю сходимость. Например, при $\Lambda^{(0)} = [-1,5, 0]$ он сходится к корню $s_2 = -0,02$ всего за три итерации с коэффициентами сужения интервалов $q^{(0)} \approx 33,13$, $q^{(1)} \approx 2,26$, $q^{(2)} \approx 1,0008$ и $q^{(3)} \approx 1,0000004$, тогда как половинный метод сходится к этому же корню за 20 итераций. \square

2.5.4.2. Метод итерации

Исходное полиномиальное уравнение $a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n = 0$ преобразуется к виду $s = \psi(s)$. Выбирается начальное приближение корня $s^{(0)}$ и строится последовательность приближений $s^{(k+1)} = \psi(s^{(k)})$. Достаточные условия ее сходимости к некоторому действительному корню s_i - существование вокруг него окрестности, во всех точках которой $|\psi'(s)| < 1$, а во вторых, попадание приближения $s^{(k)}$ в эту окрестность. Хорошо, если это будет начальное приближение $s^{(0)}$. Скорость сходимости метода близка к геометрической со знаменателем $q = 1/\psi'(s_i)$. При $|\psi'(s_i)| \geq 1$ последовательность $s^{(k)}$ к корню

ψ_1 не сходится.

Успешность применения метода итерации весьма чувствительна к выбору функции $\psi(s)$ и значения $s^{(0)}$. Приведем возможные варианты $\psi(s)$ и ее производной $\psi'(s)$:

$$\psi_1(s) = s + hA(s), \quad \psi'_1(s) = 1 + hA'(s);$$

$$\psi_2(s) = -\frac{a_0 - a_1 s - \dots - a_{n-1} s^{n-1}}{a_n s^{n-1}}, \quad \psi'_2(s) = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(n-1-i)a_i}{a_n s^{n-i}};$$

$$\psi_3(s) = \frac{-a_0}{a_1 + a_2 s + \dots + a_n s^{n-1}}, \quad \psi'_3(s) = a_0 \sum_{i=0}^{n-2} (i+1)a_{i+2}s^i \left/ \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}s^i \right)^2 \right..$$

В функции $\psi_1(s)$ параметр h выбирается так, чтобы в возможно более широком интервале выполнялось условие сходимости $|1+hA'(s)|<1$, откуда следует $-2 < hA'(s) < 0$. Если задать $s^{(0)}$ из условия $A'(s^{(0)}) > 0$, то $h = -1/A'(s^{(0)}) < 0$ и $\psi_1(s) = s \cdot A(s)/A'(s^{(0)})$, а в точке начального приближения $\psi'_1(s^{(0)}) = 1 - A'(s^{(0)})/A'(s^{(0)}) = 0$. Это удовлетворяет условию $|\psi'(s_i)| < 1$.

При выборе дробно-рациональных функций типа $\psi_2(s)$ или $\psi_3(s)$ их полюсы не должны совпадать с корнями $A(s)$. Допустим, это условие не выполняется для простого действительного корня $s_i = \eta$, тогда $\psi(s) = B(s)/(s - \eta)D(s)$, $D(\eta) \neq 0$ и $A(s) = s(s - \eta)D(s) - B(s)$. Поскольку $A(\eta) = -B(\eta) = 0$, то $B(s) = (s - \eta)E(s)$, $E(\eta) \neq 0$ и $\psi(s) = E(s)/D(s)$. Таким образом, при совпадении корня $A(s)$ с полюсом $\psi(s)$ метод итерации никогда не сойдется к этому корню, так как он фактически работает с полиномом $\bar{A}(s) = sD(s) - E(s)$, для которого η не является корнем: $\bar{A}(\eta) \neq 0$. Если корень $A(s)$ очень близок к полюсу $\psi(s)$, то окрестность, в которой выполнено условие сходимости, будет, скорее всего, отсутствовать. Это объясняет невозможность нахождения всех действительных корней полинома при неудачном выборе разрывной функции $\psi(s)$.

Для того чтобы исключить действительные полюсы $\psi(s)$, ее знаменатель подбирается так, чтобы он нигде не обращался в нуль на интервале локализации корней. Но так как никакая непрерывная функция $\psi(s)$ не может в двух соседних точках пересекать прямую s , имея в них обеих производные $|\psi'(s)| < 1$, то такой выбор $\psi(s)$ в принципе не может дать все действительные корни полинома.

Пример 2.9. Вычислить действительные корни полинома (2.8) методом итерации с погрешностями $\epsilon_a = \epsilon_o = 10^{-6}$ при начальных приближениях $s^{(0)} = -1,5$, $s^{(0)} = 0,8$ и $s^{(0)} = 3$.

Решение. Исследуем возможности различных функций $\psi(s)$. Пусть вначале $\psi_1(s) = s + h(s^{(0)})A(s)$, где $h(s) = -1/(-20008 - 608s + 14406s^2 + 404s^3 + 250s^4)$. На рис. 2.19, а, б, в приведены функции $\psi_1(s)$, $\psi'_1(s)$ и итеративные процессы уточнения корней полинома. Графики 1 соответствуют начальному условию $s^{(0)} = -1,5$ и коэффициенту $h(-1,5) = -7,56 \cdot 10^{-5}$. Так как области сходимости очень узкие и не включают ни одного корня полинома, то последовательность $s^{(k)}$, имеющая периодический характер, никогда не сходится. Графики 2 построены для $s^{(0)} = 0,8$ и $h(0,8) = 9,12 \cdot 10^{-5}$. Достаточно широкая область сходимости, включающая корень $s_2 = -0,02$, обеспечивает его получение

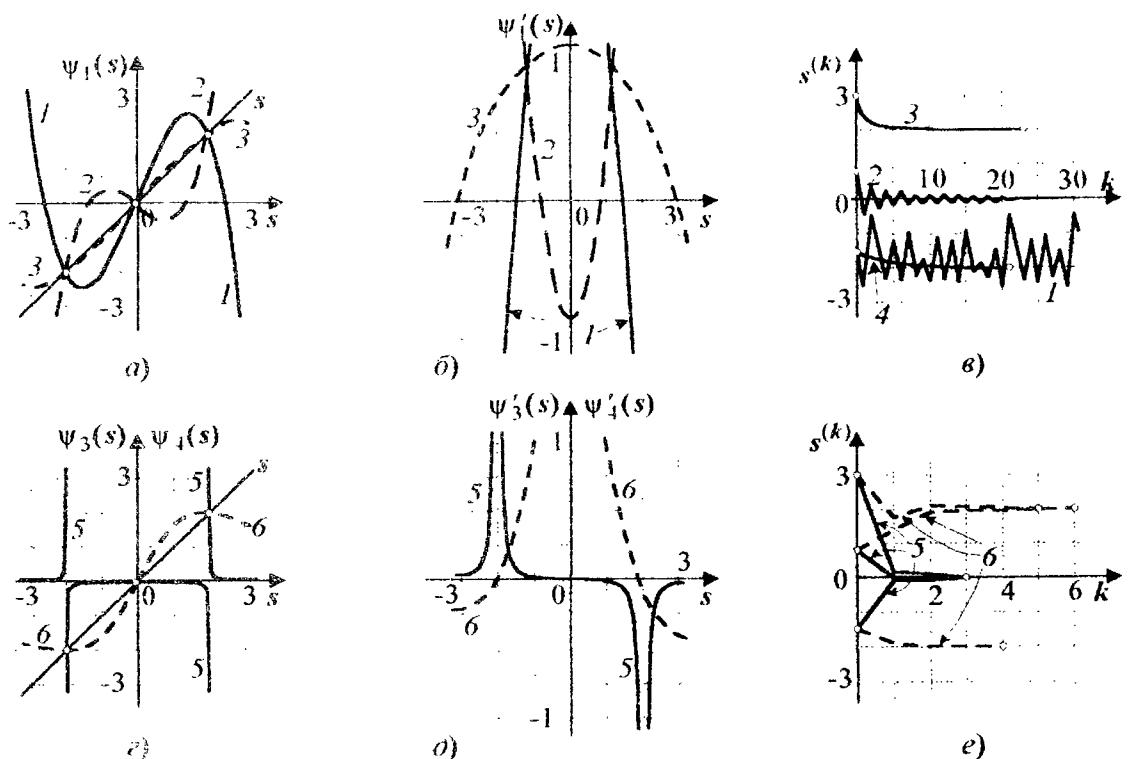


Рис. 2.19

за 70 итераций. Хорошими свойствами сходимости к корню $s_3 = 2$ обладает начальное приближение $s^{(0)} = 3$ с коэффициентом $h(3) = -7,2 \cdot 10^{-6}$ (график 3). Применяя функцию $\psi_1(s)$ с коэффициентом $h(3)$ для $s^{(0)} = -1,5$, получим последовательность приближений, сходящуюся к корню s_1 за 21 итерацию (график 4). Более того, исследование в среде MathCAD показало, что при $h=h(3)$ любые начальные приближения $s^{(0)} \in [-3, -0,02)$ сходятся к s_1 , а любые $s^{(0)} \in (-0,02, 3]$ - к s_3 .

Выберем функцию $\psi_3(s) = \frac{400}{-20008 - 304s + 4802s^2 + 101s^3 + 50s^4}$. Графики 5 $\psi_3(s)$, $\psi'_3(s)$ и $s^{(k)}$ изображены на рис. 2.19, a, d, e . Все три начальных приближения сходятся к одному и тому же корню s_2 за 3 итерации. Нет ни одного значения $s^{(0)}$, сходящегося к корням s_1 и s_3 . Это объясняется близостью корней к полюсам $\psi_3(s)$, равным $-2,01 \approx s_1$ и $1,99 \approx s_3$, в окрестностях которых не выполняется условие сходимости $|\psi'(s)| < 1$.

Составим гладкую функцию $\psi_4(s) = \frac{400 + 40016s + 304s^2 - 101s^4}{20008 + 4802s^2 + 50s^4}$, не имеющую действительных полюсов. На рис. 2.19, a, d, e изображены графики 6 $\psi_4(s)$, $\psi'_4(s)$ и $s^{(k)}$. Начальное приближение $s^{(0)} = -1,5$ сходится к s_1 за 4 итерации, а $s^{(0)} = 0,8$ и $s^{(0)} = 3$ - к $s_3 = 2$ за 6 и 5 итераций. Нет ни одного значения $s^{(0)}$, сходящегося к корню s_2 , соседнему с s_1 и s_3 . Это объясняется отсутствием около него окрестности, в которой выполняется условие сходимости $|\psi'(s)| < 1$.

2.5.4.3. Метод Ньютона

Этот метод уточнения простых корней известен еще как *метод касательных* и описывается итерационной формулой

$$s^{(k+1)} = s^{(k)} - A(s^{(k)}) / A'(s^{(k)}). \quad (2.17)$$

Налицо сходство (2.17) с методом итерации, использующим функцию $\psi_1(s) = s - A(s) / A'(s^{(0)})$ с фиксированным знаменателем $A'(s^{(0)})$. Можно ожидать сравнительного ускорения и расширения области сходимости алгоритма Ньютона благодаря вычислению на каждой итерации производной полинома $A'(s)$, которая в точке корня должна быть ненулевой, то есть корень - некратным.

Задав начальное приближение $s^{(0)}$ в области локального притяжения какого-нибудь корня полинома, рекуррентно вычисляем приращения $\Delta^{(k)} = -A(s^{(k)}) / A'(s^{(k)})$ и новые приближения $s^{(k+1)} = s^{(k)} + \Delta^{(k)}$ до выполнения условий остановки (2.16). Метод Ньютона имеет *квадратичную* скорость сходимости $|s^{(k+1)} - s^{(k)}| \approx q |s^{(k)} - s^{(k-1)}|^2$, более высокую, чем скорость сходимости геометрической прогрессии: за одну итерацию число верных знаков корня примерно удваивается. При выборе $s^{(0)}$ вне областей локального притяжения алгоритм расходится или зацикливается.

Пример 2.10. Вычислить все корни полинома (2.8) методом Ньютона с погрешностями $\epsilon_a = \epsilon_o = 10^{-6}$ при начальных приближениях $s^{(0)} = 0,8$, $s^{(0)} = 1,1$ и $s^{(0)} = 3$.

Решение. На рис. 2.20 показаны процессы уточнения корней методом Ньютона. При начальном приближении $s^{(0)} = 0,8$ последовательность знакопеременно сходится к корню $s_2 = -0,02$ за 4 итерации; при $s^{(0)} = 1,1$ - с большим выбросом к $s_1 = -2$ за 8 итераций; при $s^{(0)} = 3$ наблюдается монотонная сходимость к корню $s_3 = 2$ за 5 итераций.

Для получения оставшихся корней разделим по алгоритму (2.9) исходный полином $A(s)$ на произведение трех полученных множителей

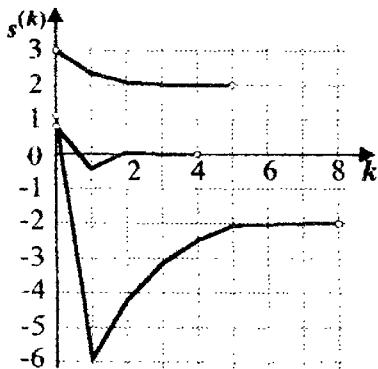


Рис. 2.20

$$B(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = s^3 + 0,02s^2 - 4s - 0,08 :$$

$$\begin{aligned} & 50s^5 + 101s^4 + 4802s^3 - 304s^2 - 20008s - 400 \mid s^3 + 0,02s^2 - 4s - 0,08 \\ & \underline{50s^5 + s^4 - 200s^3 - 4s^2} \\ & \quad 100s^4 + 5002s^3 - 300s^2 - 20008s \\ & \quad \underline{100s^4 + 2s^3 - 400s^2 - 8s} \\ & \quad 5000s^3 + 100s^2 - 20000s - 400 \\ & \quad \underline{5000s^3 + 100s^2 - 20000s - 400} \\ & \quad 0 \end{aligned}$$

Полином частного имеет комплексно-сопряженные корни $s_{4,5} = -1 \pm \sqrt{99}$.

Таким образом, найдены все корни полинома, имеющего в результате следующие формы разложения на множители:

$$A(s) = -400(1+50s)(1+0,5s)(1-0,5s)(1+0,02s+0,01s^2) = 50(s+0,02)(s+2)(s-2)(s^2 + 2s + 100). \quad \square$$

Мы рассмотрели основные численные методы расчета действительных корней полиномов. Что касается комплексных корней, то график функции $A(s)$ не дает оценок их действительных и мнимых частей. Локализация, часто очень грубая, возможна методом кругов Гернгрина или по (2.14). Задав комплексное начальное приближение $s^{(0)} = \eta^{(0)} + j\omega^{(0)}$, используем для уточнения корня метод Ньютона с учетом следующих замечаний:

1) все вычисления в (2.17) производятся в комплексных числах и без применения ЭВМ достаточно сложны;

2) скорость сходимости алгоритма Ньютона на комплексной плоскости значительно меньше, чем на действительной оси;

3) не любое комплексное приближение сходится к комплексному корню, а области сходимости алгоритма Ньютона могут иметь самые разнообразные формы, быть невыпуклыми и неодносвязными, что затрудняет выбор начальных приближений и нахождение всех комплексных корней.

На рис. 2.21,а изображены корневые траектории ньютоновского итерационного процесса для начальных приближений $s^{(0)} = 0 + j7$, $s^{(0)} = 0 + j8$ и $s^{(0)} = 0 + j9$, сходящиеся к корням s_1 , s_2 и s_4 соответственно за 12, 10 и 6 итераций. Сложность структуры областей сходимости к пяти корням полинома (2.8), найденным в примере 2.10, проиллюстрирована на рис. 2.21,б. Вблизи границ областей s_2 расположены мелкие «острова» сходимости к другим корням, не связанные со своими «материками». При увеличении масштаба изображение обнаруживает типичные фрактальные свойства: отсутствие гладких границ и бесконечную степень их дробности.

Эти особенности могут затруднить выбор начальных приближений корней: очень близкие значения $s^{(0)}$ сходятся к разным корням s_i . Например, приближение $s^{(0)} = -0,8 + j7,62$ сходится к комплексному корню s_5 за 20 итераций; приближение $s^{(0)} = -0,8 + j7,63$ - к действительному корню s_2 за 26 итераций; $s^{(0)} = -0,8 + j7,64$ сходится к s_1 за 27 итераций; приближение $s^{(0)} = -0,8 + j7,65$ сходится к комплексному корню s_4 за 25 итераций; $s^{(0)} = -0,82 + j7,63$ сходится к s_3 за 28 итераций. Для этих итерационных процессов характерны скачки приближений с одного «острова» на другой до попадания в «материковую» область с быстрой сходимостью к соответствующему корню.

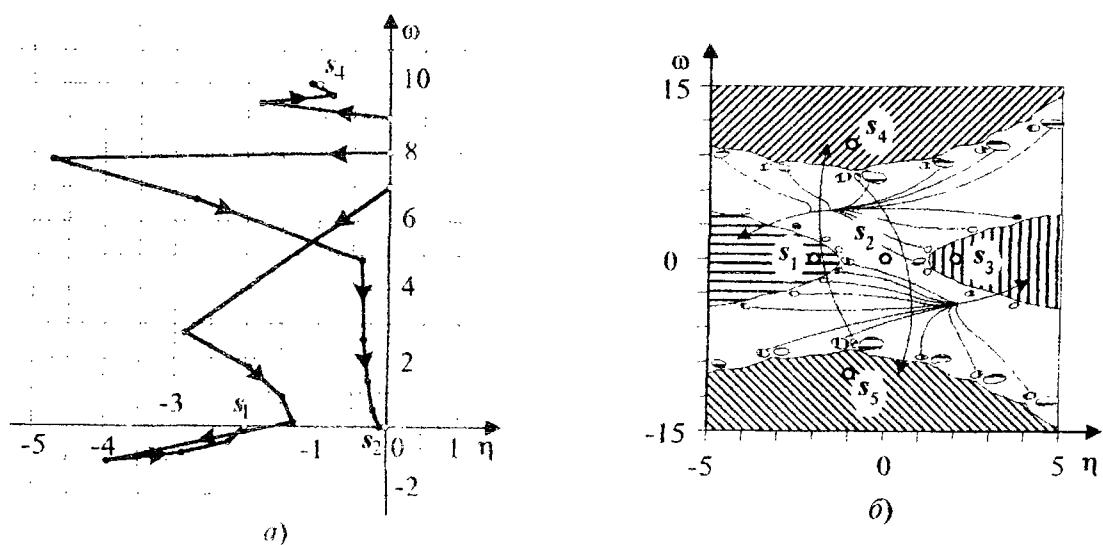


Рис. 2.21

Существует группа итерационных методов нахождения множителей $A_i(s)$ заданного полинома вместо его корней. Их рекомендуется применять, если конечной целью является не вычисление спектра полинома, а разложение его на множители $A(s) = \prod_i A_i(s)$.

В ряде случаев (полином четной степени с комплексными корнями или с кратными действительными корнями) данные методы, работающие с действительными числами, эффективнее комплексных вариантов корневых методов. Если полином разложен до простых множителей первой и второй степеней, то расчет его корней прост.

Таким образом, объектом настройки является приведенный полином в линейной $B(s) = s + b_0$ или квадратичной $B(s) = s^2 + b_1 s + b_0$ формах. Начальное приближение $B^{(0)}(s)$ рекомендуется выбирать по старшим коэффициентам полинома $A(s)$: $B^{(0)}(s) \approx s + a_{n-1}/a_n$ или $B^{(0)}(s) \approx s^2 + (a_{n-1}/a_n)s + a_{n-2}/a_n$. В ходе итерационного процесса рассчитываются приближения $B^{(k)}(s)$. Условия остановки этого процесса на N -й итерации аналогичны (2.16) для каждого коэффициента множителя.

Если найденный множитель $B^{(N)}(s)$ имеет вторую степень, то далее определяется тип его корней по знаку дискриминанта $d = b_1^2 - 4b_0$. При $d \geq 0$ $B(s)$ имеет два действительных корня и разлагается на два множителя первой степени. В противном случае $B(s)$ является простым множителем второй степени. Далее по алгоритму (2.9) выполняется деление полиномов $C(s) = A(s)/B(s)$ и ищется множитель полинома частного $C(s)$, являющийся и множителем $A(s)$. Процесс разложения заканчивается, когда полином остатка имеет первую или вторую степень.

Если имеет место сходимость для начальных приближений $B^{(0)}(s)$ и первой, и второй степеней, можно использовать несовпадающие делители обоих полученных множителей для понижения степени $A(s)$.

2.5.4.4. Метод Лина

Вычисления на каждой итерации настройки полинома $B(s)$ первой или второй степени очень просты:

- 1) по алгоритму (2.9) полином $A(s)$ делится на $sB^{(k)}(s)$;
- 2) полученный полином остатка $D(s)$ такой же степени, что и $B(s)$, делением на d_1 или d_2 приводится к виду $B^{(k+1)}(s) = s + b_0^{(k+1)}$ или $B^{(k+1)}(s) = s^2 + b_1^{(k+1)}s + b_0^{(k+1)}$.

Условия сходимости последовательности $B^{(k)}(s)$ к $B(s) = (s - s_i)(s - s_j)$ имеют вид $r_{\bar{y},v} = |C(s_v)/c_0 - 1| < 1$. Скорость сходимости оценивается знаменателем геометрической прогрессии $q_{\bar{y}} \approx 1 / \max_{\mu \in \{i,j\}} \{r_{\bar{y},\mu}\}$. При $q_{\bar{y}} < 1$ алгоритм расходится. Таким образом, метод Лина, как и все локальные методы, не гарантирует получения результата наверняка. В случае расходимости или зацикливания последовательности полиномов $B^{(k)}(s)$ первой степени следует повторить алгоритм для множителя второй степени.

Пример 2.11. Разложить полином (2.8) на множители методом Лина с погрешностями расчета коэффициентов $\epsilon_a = \epsilon_o = 10^{-6}$.

Решение. Анализируя выполнение условий сходимости для множителей первой степени $r_{1,1} = 199 > 1$, $r_{2,2} = 4,96 \cdot 10^{-4} < 1$ и $r_{3,3} = 217,16 > 1$, заключаем, что можно получить

лишь один такой множитель $B(s) = s - s_2 = s + 0,02$. Ни одна из пар $\{r_{1,1} = 1, r_{1,2} = -0,0096\}$, $\{r_{3,1} = 100, r_{3,3} = 108,08\}$, $\{r_{2,1} = -0,0104, r_{2,3} = 1,16\}$ и $\{r_{4,1} = r_{4,5} = 12988\}$ не удовлетворяет условиям сходимости. Следовательно, нельзя получить ни одного множителя второй степени. Выводы анализа подтверждаются графиками итерационных процессов на рис. 2.22:

a) выбрав начальное приближение $B^{(0)}(s) = s + 101/50$, получим быструю сходимость за 5 итераций к $B(s) = s + 0,02$ (график 1). Экспериментальная проверка показала, что любое начальное приближение $B^{(0)}(s) = s + b_0^{(0)}$ приводит к тому же результату;

b) никакое начальное приближение $B^{(0)}(s) = s^2 + b_1^{(0)}s + b_0^{(0)}$ не дает

установившегося полинома. Например, при $B^{(0)}(s) = s^2 + 2,2s + 96,04$ итерационный процесс зацикливается на полиномах $s^2 + 6,47 \cdot 10^{-4}s + 1,29 \cdot 10^{-5}$ и $s^2 + 85,515s + 1,303$.

Таким образом, найдены первый множитель $A_1(s) = s + 0,02$ и полином частного $C(s) = 50s^4 + 100s^3 + 4800s^2 - 400s - 20000$. Принимая $B^{(0)}(s) = s + 2$, сразу получаем нулевой остаток от деления $C(s)$ на $B^{(0)}(s)$, следующее частное $C(s) = 50s^3 + 4800s^2 - 10000$ и второй множитель $A_2(s) = s + 2$. Начиная с $B^{(0)}(s) = s$, получим за 6 итераций (график 2 на рис. 2.22, a) третий множитель $A_3(s) = s - 2$ и очередное частное $C(s) = 50s^2 + 100s + 5000 = A_4(s)$. Это последний множитель второй степени с отрицательным дискриминантом. В результате разложение полинома (2.8) имеет вид $A(s) = (s + 0,02)(s + 2)(s - 2)(50s^2 + 100s + 5000)$. \square

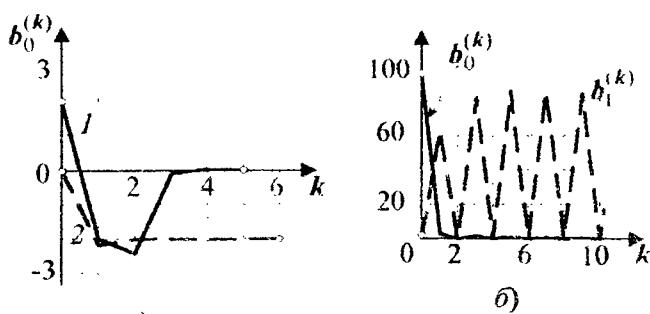


Рис. 2.22

2.5.4.5. Метод Бэрстоу

Метод итерационного уточнения множителя $B(s)$ первой или второй степени основан на линеаризации коэффициентов полинома остатка $D(s)$ и вычислении приращения $B(s)$ так, чтобы свести остаток к нулю. Итерация настройки включает три шага, выполняемые с помощью алгоритма (2.9):

- 1) вычисляем полиномы частного $C^{(k)}(s)$ и остатка $D(s) = d_0$ или $D(s) = d_0 + d_1 s$ от деления $A(s)$ на $B^{(k)}(s)$;
- 2) вычисляем полином остатка $E(s) = e_0$ или $E(s) = e_0 + e_1 s$ от деления $C^{(k)}(s)$ на $B^{(k)}(s)$;
- 3) обновляем множитель первой степени по формуле $b_0^{(k+1)} = b_0^{(k)} + d_0/e_0$, а для $B(s)$ второй степени решаем систему линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} e_0 & -e_1 b_0^{(k)} \\ e_1 & e_0 - e_1 b_1^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_0^{(k)} \\ \Delta b_1^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta b_0^{(k)} \\ \Delta b_1^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_0 & -e_1 b_0^{(k)} \\ e_1 & e_0 - e_1 b_1^{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

и обновляем его коэффициенты $b_0^{(k+1)} = b_0^{(k)} + \Delta b_0^{(k)}$, $b_1^{(k+1)} = b_1^{(k)} + \Delta b_1^{(k)}$.

Как и все алгоритмы ньютоновского типа, данный алгоритм является локальным, имеет сложные условия и квадратичную скорость сходимости.

 **Пример 2.12.** Разложить полином (2.8) на множители методом Бэрсту с погрешностями расчета коэффициентов $\epsilon_a = \epsilon_o = 10^{-6}$.

Решение. Приняв $B^{(0)}(s) = s + 2,02$, получим очень быструю сходимость за 2 итерации к первому множителю $A_1(s) = s + 2$ первой степени. Начиная с $B^{(0)}(s) = s^2 + 2,02s + 96$, метод также быстро сходится за 3 итерации к множителю $A_2(s) = s^2 + 2s + 100$ второй степени, не имеющему общих корней с $A_1(s)$. Разделив $A(s)$ на произведение множителей $A_1(s)A_2(s) = s^3 + 4s^2 + 104s + 200$, получим полином частного $C(s) = 50s^2 - 99s - 2$ второй степени с положительным дискриминантом, имеющий множители $A_3(s) = 50(s - 2)$ и $A_4 = s + 0,02$. \square

2.5.4.6. Улучшение сходимости итерационных методов

Любой метод итерационного уточнения какого-либо параметра p (им может быть корень полинома s_i или коэффициент множителя b_i) дает последовательность приближений $p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots$. Часто эта последовательность сходится очень медленно или колебательно, и требуется сделать очень много итераций до выполнения условий остановки (2.16). Тем не менее процесс имеет скрытые закономерности, обнаружив которые по уже вычисленным приближениям, можно существенно ускорить дальнейшую сходимость.

Таким образом, итерационный процесс состоит из двух частей:

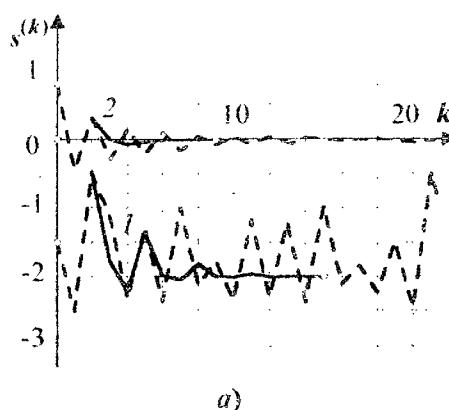
- по основному алгоритму настройки вычисляется необходимое число приближений параметров;
- оценивается закономерность их появления, и выполняется расчет следующего приближения.

Последовательность $\{p^{(k)}\}$, сходящаяся к числу p^* как геометрическая прогрессия $p^{(k)} - p^* \approx (p^{(k-1)} - p^*)/q$, оценивается знаменателем прогрессии q . Вычитая из этого соотношения аналогичное равенство $p^{(k-1)} - p^* \approx (p^{(k-2)} - p^*)/q$, получим трехточечные оценки знаменателя и параметра:

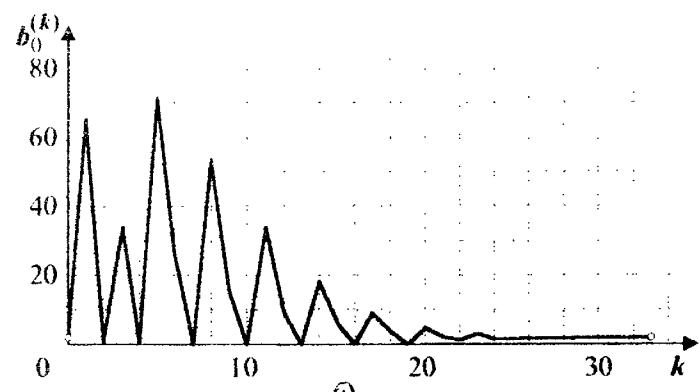
$$q \approx \frac{p^{(k-1)} - p^{(k-2)}}{p^{(k)} - p^{(k-1)}}, \quad p^* \approx \frac{p^{(k-1)} - qp^{(k-2)}}{1-q} = \frac{p^{(k)}p^{(k-2)} - (p^{(k-1)})^2}{p^{(k)} - 2p^{(k-1)} + p^{(k-2)}}. \quad (2.18a)$$

Вместо вычисления $p^{(k+1)}$ по основному алгоритму положим $p^{(k+1)} = p^*$ и продолжим итерационный процесс далее. После расчета новой пары приближений $\{p^{(k+2)}, p^{(k+3)}\}$ выполняется оценка $p^{(k+4)}$ и т.д.

Последовательность $\{p^{(k)}\}$ с квадратичной сходимостью оценивается параметром $q \approx (p^{(k)} - p^{(k-1)}) / (p^{(k-1)} - p^{(k-2)})^2$. Полагая его независимым от номера итерации, получим трехточечную оценку приближения



a)



б)

Рис. 2.23

$$p^{(k+1)} \approx p^{(k)} + q(p^{(k)} - p^{(k-1)})^2 = p^{(k)} + \frac{(p^{(k)} - p^{(k-1)})^3}{(p^{(k-1)} - p^{(k-2)})^2}, \quad (2.186)$$

вычисляемую по данной формуле вместо основного алгоритма настройки.

На рис. 2.23 показана эффективность алгоритма (2.18а). Процессы 1 и 2 соответствуют аналогичным процессам уточнения корней s_1 и s_2 методом итерации (рис. 2.19, б).

В первом случае несходящийся процесс $\{s_1^{(k)}\}$ (изображен пунктиром) сошелся за 15 итераций. Во втором случае медленная сходимость $\{s_2^{(k)}\}$ за 70 итераций (изображена пунктиром) ускорена до 9 итераций. Процесс 3 на рис. 2.23, б улучшает изображение на рис. 2.22, б настройку коэффициента b_1 методом Лина. Применение на каждой третьей итерации формулы корректировки (2.18а) позволило достигнуть сходимости за 33 итерации к множителю $B(s) = s^2 + 2,02s + 0,04 = (s+2)(s+0,02)$.

ГЛАВА 3. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Dинамические свойства элементов и систем оцениваются их *временными характеристиками* (ВХ) - реакциями на типовые входные воздействия: гармоническое, импульсное и ступенчатое. При гармоническом входном воздействии динамика системы характеризуется изменением амплитуды и фазовым сдвигом установившегося выходного сигнала, то есть ПФ и ЧХ системы.

Рассмотрим методы расчета ВХ системы при подаче на ее вход импульсного и ступенчатого входных воздействий. Среди множества различных методов расчета переходных процессов в инженерной практике наиболее распространен **операторный метод** преобразования Лапласа. Согласно (1.18), основные моменты этого метода заключены в прямом преобразовании $X(s) = L\{x(t)\}$ входного сигнала (*оригинала*) и обратном преобразовании $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$ *изображения* выходного сигнала.

3.1. ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Uзображения большого числа экспоненциально ограниченных временных сигналов $f(t); |f(t)| \leq M e^{mt} \forall t \geq 0$ (степенных, экспоненциальных, гармонических) имеют вид дробно-рациональных функций

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad B(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i, \quad A(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i \quad (3.1)$$

с действительными полиномами $B(s)$ и $A(s)$ степеней m и n соответственно. Известная в теории функций комплексного переменного [1,2,3,9,10] формула обратного преобразования Лапласа с абсциссой сходимости $c > m$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

математически сложна и потому имеет ограниченное применение. Рассмотрим более практические методы получения изображений как вручную, так и с помощью программ.

Правильность расчета оригинала проверяется по *пределным формулам* для начального и конечного значений:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s), \quad f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s). \quad (3.2)$$

Истинное установившееся значение $f(\infty)$ совпадает с оценкой (3.2), *только если* в (3.1) изображение $F(s)$ имеет все левые полюсы.

3.1.1. Метод разложения Хевисайда

Для вычисления несобственного интеграла дробно-рациональной функции $F(s)$ разложим полином ее знаменателя $A(s)$, имеющий v различных корней s_i кратностей $n_i \geq 1$, на множители:

$$A(s) = a_n \prod_{i=1}^v (s - s_i)^{n_i}, \quad \sum_{i=1}^v n_i = n. \quad (3.3)$$

Оригинал изображения $F(s)$ может быть вычислен по *формуле разложения Хевисайда*:

$$f(t) = \sum_{i=1}^v e^{s_i t} \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{t^{n_i-1-k}}{k!(n_i-1-k)!} \frac{d^k}{ds^k} \left[(s - s_i)^{n_i} F(s) \right]_{s=s_i}. \quad (3.4)$$

Сложная на первый взгляд формула имеет простую структуру:

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{i=1}^v c_i(t) e^{s_i t}, \quad c_i(t) = \sum_{k=0}^{n_i-1} c_{ik} t^k = c_{i0} + c_{i1} t + \dots + c_{i,n_i-1} t^{n_i-1}, \\ c_{i,n_i-1-k} = \frac{1}{k!(n_i-1-k)!} \frac{d^k}{ds^k} \left[(s - s_i)^{n_i} F(s) \right]_{s=s_i}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Оригинал есть сумма v экспонент $e^{s_i t}$, умноженных на полиномы времени $c_i(t)$. При вычислении полинома $c_i(t)$ степени n_i-1 сначала находится *вычет* $F(s)$ по n_i -кратному полюсу s_i путем исключения из $A(s)$ множителя $(s - s_i)^{n_i}$. Вычет дифференцируется n_i-1 раз по s , в полученные производные k -го порядка подставляется $s = s_i$, и они делятся на произведение факториалов $k!(n_i-1+k)!$. В результате получаются в *обратном порядке* числовые коэффициенты $c_{i,n_i-1}, \dots, c_{i1}, c_{i0}$.

Более простой метод, не требующий дифференцирования вычетов по кратным полюсам, заключается в расщеплении $F(s)$ на *сумму* изображений $F_i(s)$ по числу различных полюсов - корней полинома $A(s)$ в (3.3):

$$F(s) = \sum_{i=1}^v F_i(s). \quad (3.6)$$

Рассмотрим возможные типы слагаемых $F_i(s)$.

1. Если степени полиномов $B(s)$ и $A(s)$ связаны условием $m \geq n$, то в (3.6) есть изображение $F_i(s)$, порождающее оригинал $f_i(t)$:

$$F_i(s) = c_{i0} + c_{i1}s + \dots + c_{i,m-n}s^{m-n}, \quad f_i(t) = c_{i0}\delta(t) + c_{i1}\delta'(t) + \dots + c_{i,m-n}\delta^{(m-n)}(t). \quad (3.7)$$

Если $F(s)$ рассматривать как ПФ системы, то при $m \geq n$ существует прямая связь между входом $x(t)$ и выходом $y(t)$. При $m < n$ прямой связи нет.

2. Если в изображении полюс s_i - *действительный и простой* ($n_i = 1$), то в (3.6) есть изображение $F_i(s)$, порождающее оригинал $f_i(t)$:

$$F_i(s) = \frac{c_{i0}}{s - s_i}, \quad f_i(t) = c_{i0}e^{s_i t}. \quad (3.8a)$$

Подставив $s = s_i$ в вычет $(s - s_i)F(s)$, получим коэффициент

$$c_{i0} = (s - s_i)F(s) \Big|_{s=s_i} = B(s_i)/A'(s_i), \quad A'(s) = dA(s)/ds. \quad (3.8b)$$

3. Если в изображении полюс s_i - *действительный и кратный* ($n_i > 1$), то в (3.6) есть

изображение $F_i(s)$, порождающее оригинал $f_i(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_i(s) = \frac{g_{i0}}{s-s_i} + \frac{g_{i1}}{(s-s_i)^2} + \dots + \frac{g_{in_i}}{(s-s_i)^{n_i}} = \sum_{k=0}^{n_i} \frac{g_{ik}}{(s-s_i)^k}, \\ f_i(t) = (c_{i0} + c_{i1}t + \dots + c_{in_i-1}t^{n_i-1})e^{s_i t} = e^{s_i t} \sum_{k=0}^{n_i-1} c_{ik} t^k. \end{array} \right. \quad (3.9a)$$

Коэффициенты g_{ik} и c_{ik} вычисляются в обратном порядке:

$$g_{ik} = (s-s_i)^k \left[F(s) - \sum_{j=k+1}^{n_i} \frac{g_{ij}}{(s-s_i)^j} \right]_{s=s_i}, \quad c_{i,k-1} = \frac{g_{ik}}{(k-1)!} \quad \forall k = n_i, 1. \quad (3.9b)$$

Сначала находятся коэффициенты $g_{in_i} = (s-s_i)^{n_i} F(s) \Big|_{s=s_i}$ (вычет $F(s)$ по n_i -кратному полюсу s_i) и $c_{i,n_i-1} = g_{in_i} / (n_i-1)!$. Сократив $F(s) - g_{in_i} / (s-s_i)^{n_i}$ на $s-s_i$, получим изображение $\bar{F}(s)$ с n_i-1 -кратным полюсом s_i . Теперь можно вычислить коэффициенты $g_{i,n_i-1} = (s-s_i)^{n_i-1} \bar{F}(s) \Big|_{s=s_i}$ и $c_{i,n_i-2} = g_{i,n_i-1} / (n_i-2)!$. Повторяя этот прием, последними определяем коэффициенты $g_{i0} = c_{i0}$.

4. Если в изображении комплексно-сопряженные полюсы $s_i = \eta_i + j\omega_i$ и $\bar{s}_i = \eta_i - j\omega_i$ - простые, то в (3.6) есть изображение $F_i(s)$, порождающее оригинал $f_i(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_i(s) = \frac{p_i + jq_i}{s-s_i} + \frac{p_i - jq_i}{s-\bar{s}_i} = \frac{g_{i0} + g_{i1}s}{s^2 - 2\eta_i s + \eta_i^2 + \omega_i^2}, \\ f_i(t) = (p_i + jq_i)e^{s_i t} + (p_i - jq_i)\bar{e}^{\bar{s}_i t} = 2e^{\eta_i t} (p_i \cos(\omega_i t) - q_i \sin(\omega_i t)) = c_i e^{\eta_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i), \end{array} \right. \quad (3.10a)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{i0} = -2(\eta_i p_i + \omega_i q_i), \quad g_{i1} = 2p_i, \quad p_i = g_{i1}/2, \\ q_i = (g_{i0} + \eta_i g_{i1})/2\omega_i, \quad c_i = 2\sqrt{p_i^2 + q_i^2}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_i) = q_i/p_i. \end{array} \right. \quad (3.10b)$$

Коэффициенты p_i и q_i можно получить аналогично (3.8б)

$$p_i + jq_i = B(s_i)/A'(s_i) \text{ или } p_i - jq_i = B(\bar{s}_i)/A'(\bar{s}_i) \quad (3.10в)$$

как комплексные вычеты $F(s)$ по простым полюсам s_i либо \bar{s}_i . Ввиду неудобства сокращения действительного полинома $A(s)$ на комплексные полиномы $s-s_i$ и $s-\bar{s}_i$, или $s-\bar{s}_i = s-\eta_i + j\omega_i$, сократим $A(s)$ на действительный полином $(s-s_i)(s-\bar{s}_i) = s^2 - 2\eta_i s + \eta_i^2 + \omega_i^2$. Тогда

$$(s-s_i)(s-\bar{s}_i)F(s) \Big|_{s=\bar{s}_i} = g_{i0} + g_{i1}\bar{s}_i = -2\omega_i(q_i + jp_i).$$

откуда

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = -\operatorname{Im} \left\{ \left(s^2 - 2\eta_i s + \eta_i^2 + \omega_i^2 \right) F(s) \Big|_{s=s_i} \right\} / 2\omega_i, \\ q_i = -\operatorname{Re} \left\{ \left(s^2 - 2\eta_i s + \eta_i^2 + \omega_i^2 \right) F(s) \Big|_{s=s_i} \right\} / 2\omega_i. \end{array} \right. \quad (3.10r)$$

5. Наконец, если комплексные полюсы $s_i = \eta_i + j\omega_i$ и $\bar{s}_i = \eta_i - j\omega_i$ имеют кратность $n_i > 1$, то в (3.6) есть изображение $F_i(s)$, порождающее оригинал $f_i(t)$:

$$F_i(s) = \sum_{k=1}^{n_i} \left(\frac{p_{ik} + jq_{ik}}{(s-s_i)^k} + \frac{p_{ik} - jq_{ik}}{(s-\bar{s}_i)^k} \right), \quad f_i(t) = e^{\eta_i t} \sum_{k=0}^{n_i-1} c_{ik} \cos(\omega_i t + \phi_{ik}). \quad (3.11a)$$

Параметры p_{ik} , q_{ik} , c_{ik} и ϕ_{ik} находятся аналогично (3.9б) и (3.10б):

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{ik} + jq_{ik} = (s - s_i)^k \left[F(s) - \sum_{v=k+1}^{n_i} \frac{p_{iv} + jq_{iv}}{(s - s_i)^v} \right] \Big|_{s=s_i}, \\ c_{ik} = 2\sqrt{p_{i,k+1}^2 + q_{i,k+1}^2} / k!, \quad \operatorname{tg}(\phi_{ik}) = q_{i,k+1} / p_{i,k+1}. \end{array} \right. \quad (3.11б)$$

Пример 3.1. Найти оригинал изображения $F(s) = \frac{8(5+s)}{s^2(1+s)(1-s)^3(5+2s+s^2)}$.

Решение. Полюсы изображения и их кратности равны: $s_1 = 0$, $n_1 = 2$; $s_2 = -1$, $n_2 = 1$; $s_3 = 1$, $n_3 = 3$; $s_{4,5} = -1 \pm j2$ ($\eta_4 = -1$, $\omega_4 = 2$), $n_4 = n_5 = 1$. Вычислим коэффициенты разложения

$$F(s) = \frac{g_{11}}{s} + \frac{g_{12}}{s^2} + \frac{c_{20}}{s+1} + \frac{g_{31}}{s-1} + \frac{g_{32}}{(s-1)^2} + \frac{g_{33}}{(s-1)^3} + \frac{g_{40} + g_{41}s}{s^2 + 2s + 5};$$

$$g_{12} = s^2 F(s) \Big|_{s=0} = 8, \quad c_{20} = (s+1) F(s) \Big|_{s=-1} = 1, \quad g_{33} = (s-1)^3 F(s) \Big|_{s=1} = -3;$$

$$\begin{aligned} \bar{F}(s) &= F(s) - \frac{8}{s^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{(s-1)^3} = \frac{s^7 + 7s^6 - s^5 - 11s^4 - 72s^3 + 4s^2 + 72s}{s^2(s+1)(1-s)^3(s^2 + 2s + 5)} = \\ &= \frac{-s^4 - 7s^3 + 4s^2 + 72}{s(1-s)^2(s^2 + 2s + 5)} = \frac{g_{11}}{s} + \frac{g_{31}}{s-1} + \frac{g_{32}}{(s-1)^2} + \frac{g_{40} + g_{41}s}{s^2 + 2s + 5}; \end{aligned}$$

$$g_{11} = s \bar{F}(s) \Big|_{s=0} = 14,4, \quad g_{32} = (s-1)^2 \bar{F}(s) \Big|_{s=1} = 8,5;$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{F}}(s) &= \bar{F}(s) - \frac{14,4}{s} - \frac{8,5}{(s-1)^2} = \frac{-15,4s^4 - 15,5s^3 - 45,8s^2 + 76,7s}{s(s-1)^2(s^2 + 2s + 5)} = \frac{-15,4s^2 - 30,9s - 76,7}{(s-1)(s^2 + 2s + 5)} = \\ &= \frac{g_{31}}{s-1} + \frac{g_{40} + g_{41}s}{s^2 + 2s + 5}; \quad g_{31} = (s-1) \bar{\bar{F}}(s) \Big|_{s=1} = -15,375; \end{aligned}$$

$$\frac{g_{40} + g_{41}s}{s^2 + 2s + 5} = \bar{F}(s) + \frac{15,375}{s-1} = \frac{-0,025s - 0,175}{s^2 + 2s + 5}.$$

Вычислим по (3.8б) - (3.10б) коэффициенты оригинала:

$$f(t) = (c_{10} + c_{11}t)e^{st} + c_{20}e^{s_2 t} + (c_{30} + c_{31}t + c_{32}t^2)e^{s_3 t} + c_4 e^{\eta_4 t} \cos(\omega_4 t + \phi_4);$$

$$c_{10} = g_{11} = 14,4, \quad c_{11} = g_{12} = 8, \quad c_{20} = 1, \quad c_{30} = g_{31} = -15,375, \quad c_{31} = g_{32} = 8,5,$$

$$c_{32} = g_{33}/2! = -1,5, \quad p_4 = g_{41}/2 = -0,0125, \quad q_4 = (g_{40} + \eta_4 g_{41})/2\omega_4 = -0,0375,$$

$$c_4 = 2\sqrt{p_4^2 + q_4^2} = 0,079, \quad \phi_4 = \arctg(q_4/p_4) = -1,893 \text{ рад} = -108,4^\circ.$$

Таким образом, получили временную функцию

$$f(t) = 14,4 + 8t + e^{-t} - (15,375 - 8,5t + 1,5t^2)e^t + 0,079e^{-t} \cos(2t - 1,893). \quad (1)$$

3.1.2. Табличный метод преобразований Лапласа

Вычисления $F(s)$ по (1.16) и $f(t)$ по (3.4) - (3.11) достаточно сложны. Популярность операторного метода в том, что изображения большого числа временных функций давно вычислены и протабулированы. Если бы в докомпьютерную эпоху этого не было сделано, то высокая трудоемкость выполнения интегральных преобразований в каждой отдельной задаче не позволила бы операционному исчислению стать мощным инструментом решения самых разнообразных математических и технических задач.

Приведенные в прил. 1 таблицы преобразований Лапласа заимствованы из учебника-справочника [1, табл. П.1.2 и 4.1]. Необходимость дублирования таблиц в данной книге объясняется желанием автора сделать их более доступными для работы, так как справочная литература по автоматическому управлению стала в наше прагматическое время библиографической редкостью. Подробные таблицы преобразований Лапласа приведены также в [19, табл. 8.4-1 и 8.4-2].

Изображения наиболее часто встречающихся временных функций приведены в табл. П.1, а табл. П.2 удобнее использовать для обратного преобразования Лапласа дробно-рациональных функций. Возможности этих таблиц расширяются благодаря использованию свойств оригиналов и изображений, перечисленных в табл. П.3.

Согласно устоявшейся в ТАУ терминологии, в табл. П.1 и П.2 использованы следующие обозначения параметров (с индексами и без них) оригиналов, изображений и формулы их связи:

α и β - показатели затухания экспоненциальных функций;

T и τ - постоянные времени типовых звеньев;

ω - частота колебаний звена второго порядка;

$0 \leq \xi < 1$ - коэффициент демпфирования звена второго порядка;

$$\alpha T = 1, \quad \beta T = \xi, \quad \omega T = \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (\beta^2 + \omega^2)T^2 = 1.$$

В табл. П.2, начиная с пункта 72, встречаются выражения типа $\text{angle} = \arctg(q/p)$, в которых знаменатель p может быть нулевым или отрицательным. Во избежание сингулярности (при $p=0$) или ошибки (при $p<0$) вычисления фазового угла функции $\sin(\omega t + \phi)$ нужна коррекция главного значения, возвращаемого функцией \arctg , с учетом знаков p и q :

$$\Phi = \begin{cases} 0 & \text{при } p=0 \text{ и } q=0, \\ \pi/2 & \text{при } p=0 \text{ и } q>0, \\ -\pi/2 & \text{при } p=0 \text{ и } q<0, \\ \text{angle} + \pi & \text{при } p<0 \text{ и } q>0, \\ \text{angle} - \pi & \text{при } p<0 \text{ и } q<0. \end{cases} \quad (3.12)$$

3.1.3. Программный метод преобразований Лапласа

В настоящее время появились компьютерные программы типа MathCAD, имеющие в своем арсенале высокоразвитое интеллектуальное средство - символьический процессор, способный выполнять множество сложных символьных операций, в том числе и преобразования Лапласа - прямое и обратное. Теперь пользователю (студенту, инженеру, академику) не обязательно иметь под рукой справочник с таблицами для решения задач операторным методом. Достаточно овладеть несложными навыками работы с программой и далее испытывать бесконечное удовольствие от быстро полученного результата.

Символические преобразования в среде MathCAD (версии 6 и выше) можно выполнить, по крайней мере, двумя способами:

а) вводим преобразуемое выражение (оригинал $f(t)$ или изображение $F(s)$), устанавливаем курсор на переменной t либо s и выбираем пункт меню «Symbolics→Transform→[Inverse] Laplace». Результат преобразования появляется строкой ниже. Далее его можно скопировать в буфер и присвоить функции $F(s)$ или $f(t)$;

б) набрав $f(t) :=$ либо $F(s) :=$, вводим справа преобразуемую функцию. Ниже печатаем выражение $F(s) := f(t)$ или $f(t) := F(s)$ и выделяем его *правую*

часть. Нажав кнопку меню , выбираем в палитре символьических вычислений функцию «laplace» либо «invlaplace». В пустое поле (после запятой) полученного шаблона

$F(s) := f(t) \text{ laplace}, \rightarrow$ или $f(t) := F(s) \text{ invlaplace}, \rightarrow$ вводим параметр преобразования t либо s . Нажав «F9» или установив курсор вне формулы, справа от стрелки « \rightarrow » получим результат, который одновременно присвоен функции $F(s)$ либо $f(t)$. Последнее действие выгодно отличает данный способ преобразования от первого: любое следующее изменение структуры или параметров преобразуемого выражения автоматически обновляет результат.

Если символьический процессор не может выполнить необходимое преобразование, то результат повторяет исходное выражение.

Ниже приведен листинг MathCAD-программы обратного преобразования изображения $F(s) = \frac{1+ts}{s(1+2\xi Ts + T^2 s^2)}$ с параметрами $\tau=1$, $T=10$ и $\xi=0,2$. Для сравнения

оригинал вычисляется тремя способами:

1) функция $f_1(t)$ получена символьическим процессором. Результат всегда выводится на экран с полным разрешением чисел без переноса строки, поэтому пришлось его обрезать. С меньшим числом значащих цифр оригинал имеет вид $f_1(t)=1-0,102062e^{-0,02t} \sin(0,09798t)-e^{-0,02t} \cos(0,09798t)$;

2) функция $f_2(t)$ вычисляется по табл. П.2 (пункт 74) без коррекции угла по (3.12). В итоге получен фазовый угол $\phi=-84,172^\circ$ и неверный оригинал;

3) функция $f_3(t)$ вычисляется таблично с коррекцией угла, поскольку $\tau-\beta T^2=-1<0$. Правильное значение угла $\psi=\phi+180^\circ=95,828^\circ$. Корректное вычисление угла возложено на функцию $\operatorname{atg}(q, p)$.

Отметим, что при $\tau=2$ получим $\tau-\beta T^2=0$ и сообщение «**Found a singularity. You may be dividing by zero**» при вычислении угла $\phi := \operatorname{atan}\left(\frac{\omega \cdot T^2}{\tau - \beta \cdot T^2}\right)$, что и означает деление на нуль.

$$\text{atg}(q, p) := \begin{cases} \text{atan}\left(\frac{q}{p}\right) + (\text{p} < 0) \cdot \text{if}(q > 0, \pi, -\pi) & \text{if } p \\ \text{if}(q > 0, 1, \text{if}(q, -1, 0)) \cdot \pi \cdot 0.5 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tau := 1.0 \quad T := 10 \quad \xi := 0.2$$

$$\beta := \frac{\xi}{T} \quad \omega := \sqrt{1 - \frac{\xi \cdot \xi}{T^2}}$$

$$C := \frac{\sqrt{\tau^2 + (1 - 2 \cdot \beta \cdot \tau) \cdot T^2}}{\omega \cdot T^2} \quad \phi := \text{atan}\left(\frac{\omega \cdot T^2}{\tau - \beta \cdot T^2}\right)$$

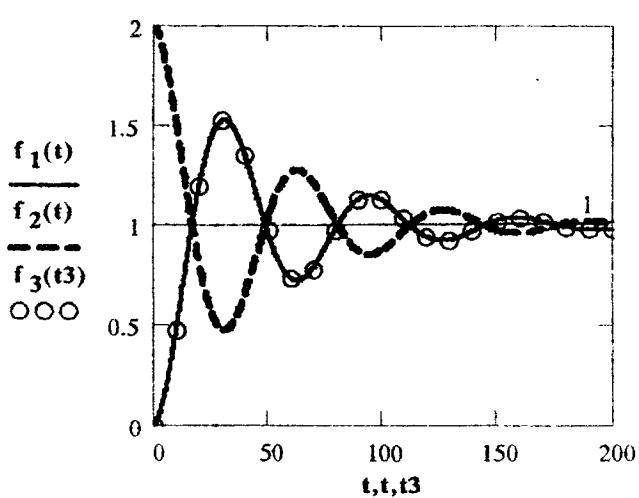
$$\psi := \text{atg}(\omega \cdot T^2, \tau - \beta \cdot T^2)$$

$$f_2(t) := 1 + C \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$$

$$f_3(t) := 1 + C \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi) \quad F(s) := \frac{1 + \tau \cdot s}{s \cdot (1 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + T^2 \cdot s^2)}$$

$$f_1(t) := F(s) \text{ invlaplace}, s \rightarrow 1 - .10206207261596575409 \exp(-.020000000000($$

$$t := 0, 0.1.. 200 \quad t3 := 0, 10.. 200$$



$$\beta = 0.02$$

$$\omega = 0.098$$

$$C = 1.005$$

$$\phi = -84.172 \text{ }^\circ\text{deg}$$

$$\psi = 95.828 \text{ }^\circ\text{deg}$$

$$\tau - \beta \cdot T^2 = -1$$

3.2. ИМПУЛЬСНАЯ И ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Импульсное (ударное) воздействие в момент времени τ бесконечно малой длительности и бесконечно большой амплитуды описывается **дельта-функцией**, являющейся пределом конечной функции $x(t, \epsilon)$ (рис. 3.1):

$$\delta(t-\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(t, \epsilon) = \begin{cases} \infty & \text{при } t=\tau, \\ 0 & \text{при } t \neq \tau. \end{cases}$$

Воздействия импульсного типа в электронных схемах вырабатываются устройствами синхронизации, возникают при разрядах конденсаторов, при дребезге контактов переключателей, в результате электромагнитных наводок и т.п. Сигнал можно считать импульсным, если его конечная длительность существенно (на несколько порядков) меньше минимальной постоянной времени элементов системы.

Дельта-функция $\delta(t)$ принадлежит классу **обобщенных функций** и является недифференцируемым пределом при $\epsilon \rightarrow 0$ непрерывных функций $x(t, \epsilon)$, имеющих следующие свойства:

- четность относительно аргумента t : $x(t, \epsilon) = x(-t, \epsilon)$;
- начальное и конечное значения $x(-\infty, \epsilon) = x(\infty, \epsilon) = 0$;
- площадь под функцией равна 1 при любых значениях ϵ ;
- предел $x(0, \epsilon \rightarrow 0) \rightarrow \infty$, а ширина функции при $\epsilon \rightarrow 0$ стремится к 0.

Примерами приближающих функций являются функции плотности вероятности:

$x(t, \epsilon) = e^{-t^2/2\epsilon^2}/\epsilon\sqrt{2\pi}$ - Гаусса, $x(t, \epsilon) = 1/\pi\epsilon(1+t^2/\epsilon^2)$ - Коши, $x(t, \epsilon) = e^{-|t|/\epsilon}/2\epsilon$ - Лапласа.

«На дельта-функцию нужно смотреть как на удобное обозначение, которое всегда может быть записано в равносильном, но более громоздком виде» (П. Дирак).

Свойства смещенной дельта-функции $\delta(t-\tau)$:

- 1) четность относительно аргумента $t-\tau$: $\delta(t-\tau) = \delta(\tau-t)$;
- 2) дифференцирование: $d\delta(t-\tau)/dt = 0$. Это неочевидное свойство иллюстрируется на примере предела при $\epsilon \rightarrow 0$ производной функции плотности Гаусса:

$$x'_t(t, \epsilon) = \frac{-t}{\epsilon^3 \sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\epsilon^2}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x'_t(t, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-3\epsilon}{\epsilon^3 t^3 \sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\epsilon^2} = 0.$$

Производная $\delta'_t(t-\tau)$ состоит из двух δ -подобных функций, действующих в момент времени τ и дающих в сумме 0 (рис. 3.2). Но нельзя игнорировать $\delta'_t(t-\tau)$, если она интегрируется в произведении с некоторой гладкой функцией $x(t)$ (см. пятое свойство). И вообще, нужно рассматривать n -ю производную $\delta_t^{(n)}(t-\tau)$ тоже как обобщенную функцию;

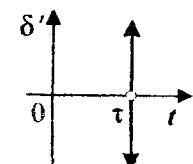


Рис. 3.2

3) интегрирование $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) dt = 1$ - площадь под δ -функцией равна 1. В конечных

пределах интегрирования $\int_a^b \delta(t-\tau) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } a \leq \tau \leq b, \\ 0 & \text{при } \tau < a \text{ или } \tau > b; \end{cases}$

4) $x(t)\delta(t-\tau) = x(\tau)\delta(t-\tau)$ - фиксация сомножителя $x(t)$ произведения функции $x(t)$ и δ -функции;

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)dt = x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)dt = x(\tau) - \text{фильтрация значения } x(\tau)$$

функции $x(t)$. В конечных пределах интегрирования

$$\int_a^b x(t)\delta(t-\tau)dt = \begin{cases} x(\tau) & \text{при } a \leq \tau \leq b, \\ 0 & \text{при } \tau < a \text{ или } \tau > b. \end{cases}$$

Интеграл произведения $x(t)$ и $\delta'_t(t-\tau)$ берется по частям:

$$\int x(t)\delta'(t-\tau)dt = x(t)\delta(t-\tau) - \int x'(t)\delta(t-\tau)dt = x(\tau)\delta(t-\tau) - x'(\tau) \int \delta(t-\tau)dt.$$

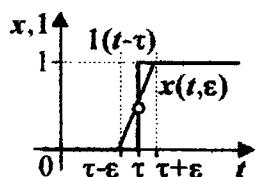
По индукции получаем формулу интегрирования произведения $x(t)$ с $\delta_t^{(n)}(t-\tau)$:

$$\int x(t)\delta_t^{(n)}(t-\tau)dt = \sum_{i=0}^n (-1)^i x^{(i)}(\tau)\delta_t^{(n-i)}(t-\tau) = x(\tau)\delta_t^{(n-1)}(t-\tau) - x'(\tau)\delta_t^{(n-2)}(t-\tau) + \dots + (-1)^{n-1} x^{(n-1)}(\tau)\delta(t-\tau) + (-1)^n x^{(n)}(\tau) \int \delta(t-\tau)dt;$$

$$6) L\{\delta(t-\tau)\} = \int_0^\infty e^{-st} \delta(t-\tau)dt = e^{-s\tau} - \text{изображение смещенной } \delta\text{-функции. Для не-смещенной } \delta\text{-функции } L\{\delta(t)\} = e^0 = 1.$$

Импульсная характеристика (ИХ) $w(t)$ - это реакция системы на действие на ее входе несмещенного дельта-импульса $\delta(t)$ при нулевых начальных условиях. Согласно (1.18), при этих условиях изображение ИХ системы равно ее ПФ $W(s)$. И, наоборот, $w(t)$ есть оригинал $W(s)$:

$$L\{w(t)\} = W(s), \quad w(t) = L^{-1}\{W(s)\}. \quad (3.13)$$



Единичное (ступенчатое) воздействие в момент времени τ с бесконечно малой длительностью фронта описывается **единичной функцией Хевисайда** - пределом функции $x(t, \varepsilon)$ (рис. 3.3):

$$1(t-\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq \tau, \\ 0 & \text{при } t < \tau. \end{cases}$$

Рис. 3.3

Ступенчатые воздействия в электронных схемах возникают при переключении напряжения питания, скачкообразном изменении нагрузки, характерны для выходных напряжений реле, триггеров и других дискретных элементов. Сигнал можно считать ступенчатым, если конечная длительность его фронта существенно меньше минимальной постоянной времени элементов системы.

Единичная функция $1(t)$ принадлежит классу **обобщенных функций** и является не-дифференцируемым пределом при $\varepsilon \rightarrow 0$ непрерывных функций $x(t, \varepsilon)$, имеющих следующие свойства:

- $x(-\infty, \varepsilon) = 0$, $x(0, \varepsilon) = 0,5$ и $x(\infty, \varepsilon) = 1$;
- кососимметричность относительно среднего значения $x(0, \varepsilon)$;
- интервал изменения $x(t, \varepsilon)$ от 0,05 до 0,95 сужается до 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Примеры приближающих функций - функции распределения вероятности:

$$x(t, \varepsilon) = 0,5 + \Phi(t/\varepsilon) - Гаусса, \quad x(t, \varepsilon) = 0,5 + \arctg(t/\varepsilon)/\pi - Коши, \quad x(t, \varepsilon) = 0,5 \{1 + \operatorname{sgn}(t)(1 - e^{-|t|/\varepsilon})\}$$

- Лапласа.

Свойства смещенной единичной функции $\mathbf{l}(t-\tau)$ и ее связь с дельта-функцией:

- 1) инвертирование при изменении знака аргумента: $\mathbf{l}(t-\tau) = \mathbf{l} - \mathbf{l}(\tau-t)$;
- 2) дифференцирование: $d\mathbf{l}(t-\tau)/dt = \delta(t-\tau)$, $d\mathbf{l}(\tau-t)/dt = -\delta(t-\tau)$;
- 3) интегрирование (неопределенное):

$$\int \mathbf{l}(t-\tau) dt = (t-\tau)\mathbf{l}(t-\tau) + C, \quad \int \mathbf{l}(\tau-t) dt = (t-\tau)\mathbf{l}(\tau-t) + C;$$

- 4) формализация третьего свойства дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^t \delta(v-\tau) dv = \mathbf{l}(t-\tau), \quad \int_t^{\infty} \delta(v-\tau) dv = \mathbf{l}(\tau-t);$$

- 5) дифференцирование разрывных функций:

$$\frac{d}{dt}(x(t)\mathbf{l}(t-\tau)) = x'(t)\mathbf{l}(t-\tau) + x(\tau)\delta(t-\tau), \quad \frac{d}{dt}(x(t)\mathbf{l}(\tau-t)) = x'(t)\mathbf{l}(\tau-t) - x(\tau)\delta(t-\tau);$$

- 6) интегрирование разрывных функций:

$$\int_a^b x(t)\mathbf{l}(t-\tau) dt = \mathbf{l}(b-\tau) \int_{\max(a,\tau)}^b x(t) dt, \quad \int_a^b x(t)\mathbf{l}(\tau-t) dt = \mathbf{l}(\tau-a) \int_a^{\min(b,\tau)} x(t) dt;$$

$$7) \quad L\{\mathbf{l}(t-\tau)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \mathbf{l}(t-\tau) dt = \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-s\tau}}{s} \quad - \text{изображение смещенной единичной}$$

функции. Для несмещенной функции $L\{\mathbf{l}(t)\} = e^0/s = 1/s$.

Переходная характеристика (ПХ) $h(t)$ - это реакция системы на действие на ее входе несмещенной единичной функции $\mathbf{l}(t)$ при нулевых начальных условиях. Согласно (1.18), при этих условиях изображение $H(s)$ и ПХ $h(t)$ системы находятся как

$$L\{h(t)\} = H(s) = W(s)/s, \quad h(t) = L^{-1}\{W(s)/s\}. \quad (3.14)$$

Из (3.13) и (3.14) следуют соотношения связи между ИХ и ПХ:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau. \quad (3.15)$$

Вычисления ВХ выполняются любым методом обратного преобразования Лапласа. Если при расчете ИХ можно напрямую использовать формулу Хевисайда (3.4) для ПФ $W(s) = B(s)/A(s)$, то ПХ находится обращением изображения

$$H(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{B(s)}{sA(s)} = B(s) \left/ a_n \sum_{i=1}^v (s-s_i)^{n_i} \right., \quad \sum_{i=1}^v n_i = n+1. \quad (3.16)$$

В (3.16) числа v и n_i отличаются от тех же чисел в $W(s)$ из-за дополнительного нулевого полюса изображения $1/s$ единичной функции. По аналогии с (3.4) получим

$$h(t) = \sum_{i=1}^v \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{t^{n_i-1-k}}{k!(n_i-1-k)!} \frac{d^k}{ds^k} \left[(s-s_i)^{n_i} \frac{B(s)}{sA(s)} \right] \Big|_{s=s_i}. \quad (3.17)$$

В ПФ статической системы нет нулевых полюсов, а изображение $H(s)$ имеет простой полюс $s_1 = 0$ входного сигнала. Согласно (3.8а), он порождает составляющую ПХ

$$c_1 e^{0t} = c_1 = \left. \frac{sB(s)}{sA(s)} \right|_{s=0} = W(0), \text{ которая является установившимся значением } h(t) \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Правильность расчета ВХ проверяется по предельным формулам (3.2):

$$w(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sW(s), \quad w(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s), \quad h(0) = W(\infty), \quad h(\infty) = W(0). \quad (3.18)$$

Истинные установившиеся значения ВХ совпадают с оценками (3.18) *только* при отсутствии в ПФ правых полюсов.

☞ **Пример 3.2.** Методом разложения Хевисайда рассчитать ВХ схемы моста Вина

- Робинсона (пример 1.6) с ПФ $W(s) = \frac{1+T^2 s^2}{3(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$, где $T = 1/100\pi \approx 3,183 \text{ мс}$,

$$T_1 = (3 + \sqrt{5})T/2 \approx 8,333 \text{ мс и } T_2 = (3 - \sqrt{5})T/2 \approx 1,216 \text{ мс}.$$

Решение. Вычислив полюсы ПФ $s_1 = -1/T_1 = -120$ и $s_2 = -1/T_2 = -822,5$, найдем сначала ПХ схемы (рис. 3.4, а), представив ее изображение в виде

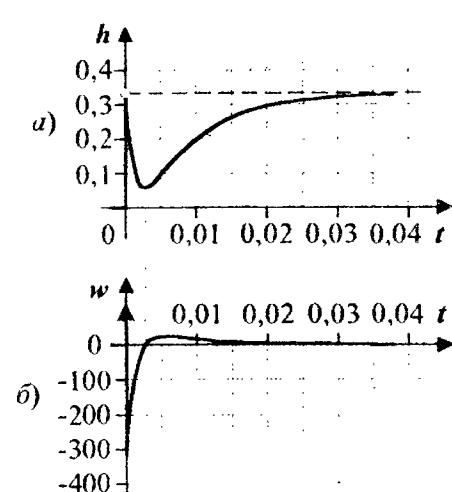


Рис. 3.4

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{W(s)}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{T}{3s - (1+T_1 s)(1+T_2 s)} \\ h(t) &= \frac{1}{3} e^{0t} - \frac{T}{T_1(1+T_2 s_1)} e^{-t/T_1} - \frac{T}{T_2(1+T_1 s_2)} e^{-t/T_2} = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{T}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} = \\ &= 1/3 + \left(e^{-t/T_2} - e^{-t/T_1} \right) / \sqrt{5} \approx \\ &\approx 0,333 + 0,447 \left(e^{-822t} - e^{-120t} \right). \end{aligned}$$

Границные значения $h(0) = h(\infty) = 1/3$ точно совпадают с оценками (3.18).

Импульсную характеристику (рис. 3.4, б) получим по (3.15) с учетом скачка ее начального значения с $h(-0) = 0$ до $h(+0) = 1/3$:

$$w(t) = \frac{1}{3} \delta(t) + \frac{T}{T_1(T_1 - T_2)} e^{-t/T_1} - \frac{T}{T_2(T_1 - T_2)} e^{-t/T_2} \approx 0,333 \delta(t) + 53,67 e^{-120t} - 367,8 e^{-822t}.$$

Границные значения $w(0) = \infty$ и $w(\infty) = 0$ совпадают с оценками (3.18). ☞

☞ **Пример 3.3.** Рассчитать табличным методом временные характеристики системы «тележка - маятник» и объяснить их физический смысл.

Решение. Используя выводы примера 2.4, запишем обе ПФ системы с перевернутым маятником в виде

$$W_d(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{sD(s)} (\text{см/Н}), \quad W_\phi(s) = \frac{b_3 s}{D(s)} (\text{град/Н}), \quad (3.19)$$

где $D(s) = (1+T_1 s)(1-T_3 s)(1+T_5 s)$; $T_1 = 1,72 \text{ с}$; $T_3 = 0,397 \text{ с}$; $T_5 = 0,244 \text{ с}$; $b_0 = 10$; $b_1 = b_2 = -1,333$; $b_3 = 0,573$. Проиллюстрируем использование табличного обращения Лапласа при вычислении ИХ $w_d(t) = L^{-1}\{b_0/sD(s)\} + L^{-1}\{b_1/D(s)\} + L^{-1}\{b_2 s/D(s)\}$. В табл. П.2 (пункты 57, 56 и 59) находим необходимые составляющие изображения $W_d(s)$ и их оригиналы:

$$L^{-1} \left\{ \frac{b_0}{sD(s)} \right\} = b_0 - \frac{b_0 T_1^2}{(T_1 + T_3)(T_1 - T_5)} e^{-T_1} - \frac{b_0 T_3^2}{(T_3 + T_1)(T_3 + T_5)} e^{+T_3} - \frac{b_0 T_5^2}{(T_5 - T_1)(T_5 + T_3)} e^{-T_5} =$$

$$= 10 - 9,468e^{-0,58t} - 1,162e^{2,52t} + 0,63e^{-4,1t},$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{b_1}{D(s)} \right\} = \frac{b_1 T_1}{(T_1 + T_3)(T_1 - T_5)} e^{-T_1} - \frac{b_1 T_3}{(T_3 + T_1)(T_3 + T_5)} e^{+T_3} - \frac{b_1 T_5}{(T_5 - T_1)(T_5 + T_3)} e^{-T_5} =$$

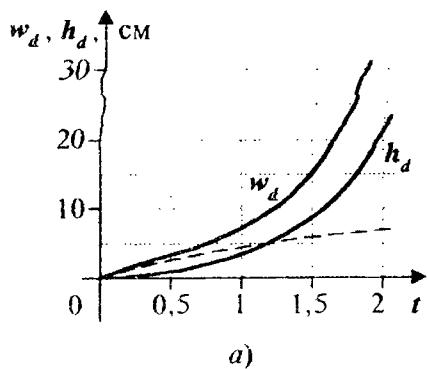
$$= -0,734e^{-0,58t} + 0,39e^{2,52t} + 0,344e^{-4,1t},$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{b_2 s}{D(s)} \right\} = - \frac{b_2}{(T_1 + T_3)(T_1 - T_5)} e^{-T_1} - \frac{b_2}{(T_3 + T_1)(T_3 + T_5)} e^{+T_3} - \frac{b_2}{(T_5 - T_1)(T_5 + T_3)} e^{-T_5} =$$

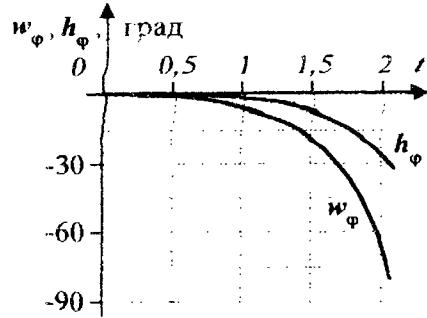
$$= 0,427e^{-0,58t} + 0,982e^{2,52t} - 1,409e^{-4,1t}.$$

Суммируя составляющие, получим $w_d(t)$, а по аналогии и остальные ВХ на рис. 3.5:

$$\begin{cases} w_d(t) = 10 - 9,775e^{-0,58t} + 0,211e^{2,52t} - 0,436e^{-4,1t}, \\ h_d(t) = 10t - 17 + 16,81e^{-0,58t} + 0,0846e^{2,52t} + 0,106e^{-4,1t}, \\ w_\phi(t) = -0,183e^{-0,58t} - 0,422e^{2,52t} + 0,606e^{-4,1t}, \\ h_\phi(t) = 0,315e^{-0,58t} - 0,168e^{2,52t} - 0,148e^{-4,1t}. \end{cases} \quad (3.20)$$



a)



б)

Рис. 3.5

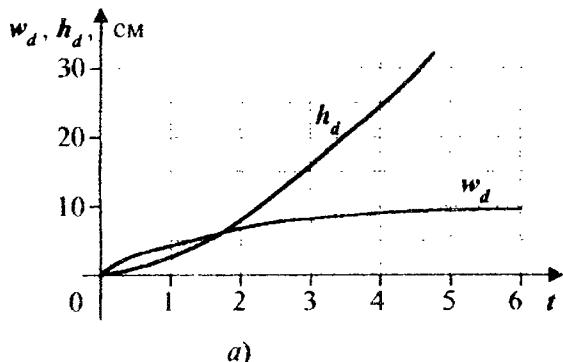
Нулевые начальные значения всех ВХ совпадают с оценками (3.18), а оценки уставновившихся значений ВХ неверны, так как ПФ (3.19) имеют правый полюс $s_3 = +2,54$.

Физическое объяснение возникающих движений следующее. В исходном (номинальном) положении тележка стоит на отметке $d=0$ см, а маятник находится в состоянии неустойчивого равновесия вертикально вверх при $\phi=0^\circ$. Под действием импульсной силы единичной энергии (например, 100 Н в течение 0,01 с) тележка скачком приобретает начальную скорость $w'_d(0)=8$ см/с, а далее катится с торможением и через $3/0,58=5,2$ с остановилась бы в точке $d=10$ см. Маятник после удара, сохранив по инерции свое положение, отклоняется влево ($\phi < 0$), теряет равновесие и падает (отклонение $\phi = -90^\circ$ достигается за 2,12 с), толкая при этом тележку вперед и разгоняя ее. Похожие процессы $h_d(t)$ и $h_\phi(t)$ происходят и при действии ступенчатой единичной силы.

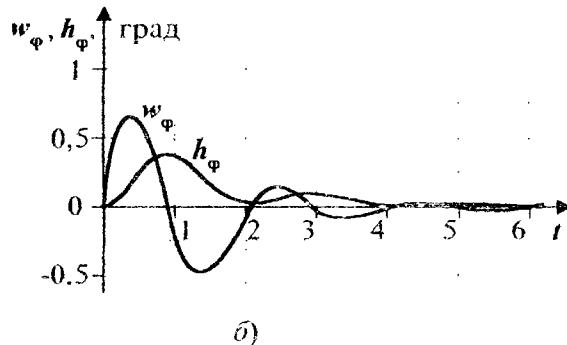
Таким образом, в окрестности номинального состояния неустойчивого равновесия системы с перевернутым маятником имеет расходящиеся ВХ (3.20). Причина неустойчивости - правый полюс $s_3 = +2,54$. Пунктиром на рис. 3.5, а изображена ИХ $w_d(t)$ без неустойчивой составляющей $0,211e^{2,52t}$ и соответствующая системе с жестко закрепленным вертикальным маятником.

В системе с обычным маятником ПФ имеют вид (3.19) со следующими параметрами: $D(s) = (1+T_1 s)(1+2\xi_3 T_3 s + T_3^2 s^2)$, $T_1 = 1,678$ с., $T_3 = 0,316$ с., $\xi_3 = 0,245$, $b_0 = 10$, $b_1 = b_2 = 1,333$, $b_3 = 0,573$. Используя табл. П.2 (пункты 99, 101 и 94), получим ВХ на рис. 3.6:

$$\begin{cases} w_d(t) = 10 - 10,275e^{-0.596t} + 0,73e^{-0.782t} \sin(3,075t + 0,375), \\ h_d(t) = \int_0^t w_d(\tau) d\tau = 10t - 17 + 17,23e^{-0.596t} + 0,23e^{-0.782t} \sin(3,075t - 1,445), \\ w_\varphi(t) = -0,216e^{-0.596t} - 1,151e^{-0.782t} \sin(3,075t - 2,953), \\ h_\varphi(t) = 0,362e^{-0.596t} + 0,363e^{-0.782t} \sin(3,075t - 1,631). \end{cases} \quad (3.21)$$



a)



б)

Рис. 3.6

Предельные значения устойчивых ВХ (3.21) совпадают с оценками (3.18).

Физическое объяснение возникающих движений следующее. В исходном устойчивом положении равновесия маятника под действием импульсной силы тележка начинает катиться с торможением и примерно через $3/0,596=5$ с останавливается в точке 0,1 м. Маятник совершает затухающие колебания с частотой $f_k = 3,075/2\pi \approx 0,5$ Гц или с периодом $T_k = 2$ с, максимальным отклонением от вертикали на $0,66^\circ$ и временем затухания $3/0,782=3,84$ с. Эти очень малые колебания маятника слабо воздействуют на тележку ввиду близости комплексных полюсов $-0,782 \pm j3,075$ и нулей $-0,5 \pm j2,69$ ПФ $W_d(s)$.

Под действием единичной ступенчатой силы тележка разгоняется и далее катится с постоянной скоростью. Маятник в это время совершает слабые несимметричные затухающие колебания. Графики ВХ на рис. 3.6 свидетельствуют, что в окрестности состояния устойчивого равновесия система с обычным маятником нейтральна по выходу d и устойчива по выходу φ . \square

Практическое построение ВХ позволяет сделать следующие выводы.

1. При равенстве полюса s_i и нуля λ_j можно сокращать полиномы ПФ на одинаковые сомножители $(s-s_i)$ и $(s-\lambda_j)$ благодаря полной компенсации составляющей $c_i e^{s_i t}$, при которой вычет $W(s)$ по полюсу s_i имеет сомножитель $s_i - \lambda_j = 0$.

2. Нуль λ_j , близко расположенный к полюсу s_i , частично компенсирует составляющую $c_i e^{s_i t}$ ($c_i \neq 0$) за счет $s_i - \lambda_j \approx 0$.

3. Начальные и установившиеся значения ВХ для систем без правых полюсов удовлетворяют предельным условиям (3.18) и могут быть найдены по ПЧ без расчета самих характеристик.

3.3. ВЗАИМОСВЯЗЬ ЧАСТОТНЫХ И ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Функция времени $y(t)$ и ее КЧХ (спектр) $Y(j\omega)$ связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$Y(j\omega) = \int_0^\infty y(t)e^{-j\omega t} dt \quad \text{и} \quad y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty Y(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.22)$$

Условия сходимости несобственных интегралов в (3.22):

- 1) $|y(t)| < \infty \forall t \geq 0$ - ограниченность оригинала $y(t)$ при $t \geq 0$;
- 2) $y(t) = 0 \forall t < 0$ - нулевой оригинал при $t < 0$;
- 3) все полюсы изображения $Y(s)$ - левые;
- 4) $|Y(j\omega)| \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Подставив комплексную функцию $Y(j\omega) = P_y(\omega) + jQ_y(\omega)$ и комплексную экспоненту $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$ в (3.22), получим для $t \geq 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\{P_y(\omega)\cos(\omega t) - Q_y(\omega)\sin(\omega t)\}}_{\text{Четная функция } \omega} d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\{P_y(\omega)\sin(\omega t) + Q_y(\omega)\cos(\omega t)\}}_{\text{Нечетная функция } \omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \{P_y(\omega)\cos(\omega t) - Q_y(\omega)\sin(\omega t)\} d\omega. \end{aligned} \quad (3.23)$$

По этой формуле методом численного интегрирования можно рассчитать временной сигнал по его спектру. Функции $P_y(\omega)$ и $Q_y(\omega)$ определяются по амплитудной и фазовой частотным характеристикам сигнала:

$$\begin{cases} P_y(\omega) - A_y(\omega)\cos(\phi_y(\omega)) = 10^{0.05L_y(\omega)} \cos(\phi_y(\omega)), \\ Q_y(\omega) - A_y(\omega)\sin(\phi_y(\omega)) = 10^{0.05L_y(\omega)} \sin(\phi_y(\omega)). \end{cases} \quad (3.24)$$

Возможно [2] упрощение формулы (3.23) благодаря условию $y(t) = 0 \forall t < 0$. Заменив в ней t на $-t$, получим взаимосвязь частотных характеристик $P_y(\omega)$ и $Q_y(\omega)$:

$$y(-t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \{P_y(\omega)\cos(\omega t) + Q_y(\omega)\sin(\omega t)\} d\omega = 0 \quad \forall t > 0. \quad (3.25)$$

Складывая и вычитая (3.23) и (3.25), получим зависимости $y(t)$ отдельно от вещественной $P_y(\omega)$ и мнимой $Q_y(\omega)$ ЧХ сигнала:

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P_y(\omega)\cos(\omega t) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q_y(\omega)\sin(\omega t) d\omega.$$

Установим зависимости между ЧХ и ВХ системы. При нулевых начальных условиях

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= W(j\omega)X(j\omega) - \{P(\omega) + jQ(\omega)\}\{P_x(\omega) + jQ_x(\omega)\} = \\ &= \{P(\omega)P_x(\omega) - Q(\omega)Q_x(\omega)\} + j\{P(\omega)Q_x(\omega) + Q(\omega)P_x(\omega)\}, \end{aligned}$$

откуда $P_y(\omega) = P(\omega)P_x(\omega) - Q(\omega)Q_x(\omega)$, $Q_y(\omega) = P(\omega)Q_x(\omega) + Q(\omega)P_x(\omega)$. Если входной сигнал $x(t) = \delta(t)$, то $X(j\omega) = 1$, $P_x(\omega) = 1$, $Q_x(\omega) = 0$, $P_y(\omega) = P(\omega)$, $Q_y(\omega) = Q(\omega)$ и вы-

ходной сигнал есть ИХ, связанная с ВЧХ и МЧХ соотношениями

$$w(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos(\omega t) d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin(\omega t) d\omega : \quad (3.26)$$

Если входной сигнал $x(t) = l(t)$, то $X(j\omega) = j/\omega$, $P_x(\omega) = 0$, $Q_x(\omega) = -l/\omega$, $P_y(\omega) = Q(\omega)/\omega$, $Q_y(\omega) = -P(\omega)/\omega$ и выходной сигнал есть ПХ, связанная с ВЧХ и МЧХ соотношениями

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin(\omega t)}{\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos(\omega t)}{\omega} d\omega . \quad (3.27)$$

По формулам (3.26) и (3.27) методом численного интегрирования на ЭВМ можно рассчитать ВХ системы по ее ВЧХ и МЧХ, которые определяются по АЧХ и ФЧХ, аналогично (3.24): $P(\omega) = 10^{0,05L(\omega)} \cos(\phi(\omega))$, $Q(\omega) = 10^{0,05L(\omega)} \sin(\phi(\omega))$. Подставив в (3.22) $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ и $\frac{W(j\omega)}{j\omega} = \frac{A(\omega)}{\omega}e^{j\{\phi(\omega)-\pi/2\}}$ вместо $Y(j\omega)$, получим зависимости ВХ от АЧХ и ФЧХ:

$$w(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega , \quad h(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))}{\omega} d\omega . \quad (3.28)$$

Исследуем, как изменяются ВХ системы при трансформации ее ЧХ по амплитуде и частоте. Для этого введем эталонную КЧХ $W_1(j\omega)$, которой соответствуют ВХ $w_1(t)$ и $h_1(t)$. Пусть $W_\alpha(j\omega) = \alpha W_1(j\omega)$ - КЧХ, полученная из $W_1(j\omega)$ умножением на константу α , что эквивалентно последовательному соединению системы с широкополосным усилителем. Соответствующие ВХ $w_\alpha(t)$ и $h_\alpha(t)$ изображены на рис. 3.7:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \alpha w_1(t), \\ h_\alpha(t) = \int_0^t w_\alpha(\tau) d\tau = \alpha \int_0^t w_1(\tau) d\tau = \alpha h_1(t). \end{array} \right.$$

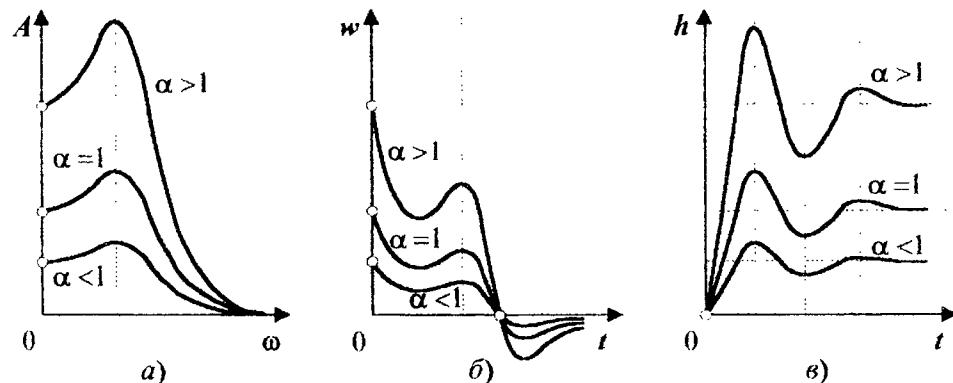


Рис. 3.7

Вывод. Умножение КЧХ системы на константу приводит к пропорциональной трансформации ВХ по амплитуде.

Пусть $W_\beta(j\omega) = W_1(j\omega/\beta)$ - КЧХ, полученная из $W_1(j\omega)$ трансформацией по частоте в β раз. При $\beta > 1$ это эквивалентно расширению полосы частот КЧХ, а при $\beta < 1$ - сужению. Соответствующие ВХ $w_\beta(t)$ и $h_\beta(t)$ изображены на рис. 3.8:

$$\begin{cases} w_\beta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(j\omega/\beta) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(j\omega) e^{j\omega\beta t} d\omega = \beta w_1(\beta t), \\ h_\beta(t) = \int_0^t w_\beta(\tau) d\tau = \beta \int_0^t w_1(\beta\tau) d\tau = h_1(\beta t). \end{cases}$$

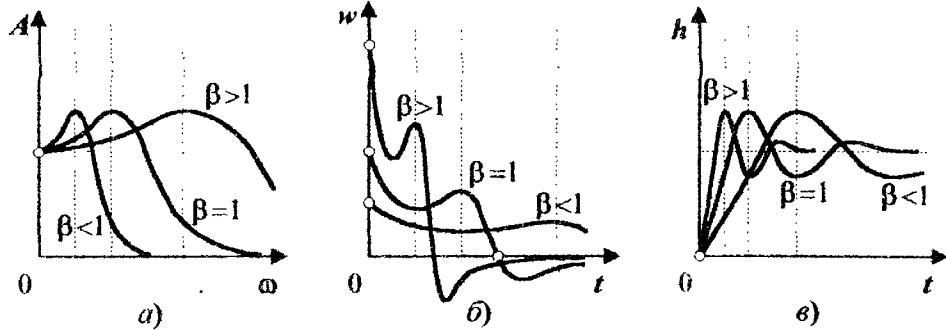


Рис. 3.8

Выход. Трансформация КЧХ системы по частоте приводит к пропорциональной трансформации ИХ по амплитуде и обратно пропорциональной трансформации обеих ВХ по времени.

При трансформации КЧХ $W_{\alpha\beta}(j\omega) = \alpha W_1(j\omega/\beta)$ одновременно по амплитуде в α и частоте в β раз ВХ изменяются следующим образом:

$$w_{\alpha\beta}(t) = \alpha \beta w_1(\beta t), \quad h_{\alpha\beta}(t) = \alpha h_1(\beta t). \quad (3.29)$$

3.4*. АППРОКСИМАЦИОННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

При численном интегрировании по формулам (3.26)-(3.28) неизбежны методические погрешности из-за усечения бесконечного интервала конечным и трудности подбора оптимального шага интегрирования функций, изменяющихся с переменной частотой. Рассмотрим численно-аналитический метод расчета ВХ по кусочно-линейной аппроксимации ВЧХ $P(\omega)$ и формулам (3.26), (3.27). Для сходимости несобственных интегралов необходимо, чтобы ВЧХ была интегрируемой, то есть абсолютно ограниченной и стремящейся к нулю при $\omega \rightarrow \infty$.

Для системы с треугольной ВЧХ $P_\Delta(\omega) = \begin{cases} 1-\omega & \forall 0 \leq \omega \leq 1, \\ 0 & \forall \omega > 1 \end{cases}$ (рис. 3.9,а) рассчитаем нормированные ИХ $w_\Delta(t)$ (рис. 3.9,б), $h_\Delta(t)$ (рис. 3.9,в) и их параметры:

$$w_\Delta(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-\omega) \cos(\omega t) d\omega = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(\omega t)}{t} - \frac{\cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t)}{t^2} \right) \Big|_{\omega=0}^{\omega=1} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(t/2)}{t/2} \right)^2, \quad (3.30a)$$

$w_\Delta(0) = 1/\pi$ и $w_\Delta(\infty) = 0$ - начальное и установившееся значения ИХ, время сходимости

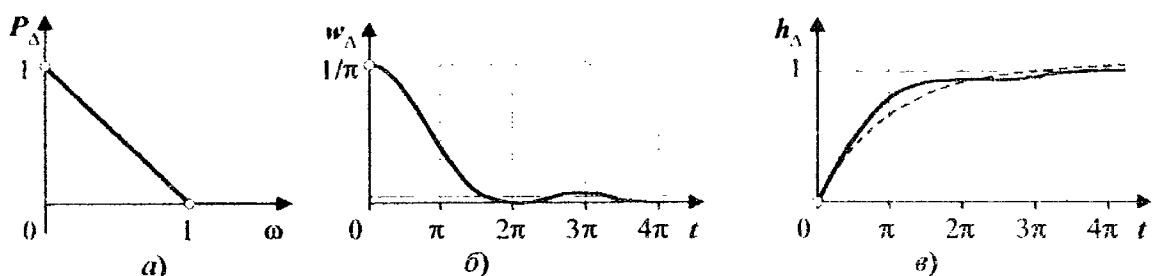


Рис. 3.9

ИХ к уровню $0.05w_{\Delta}(0)=0.016$ не более 3π с;

$$h_{\Delta}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{\omega}} \frac{1-\omega}{\omega} \sin(\omega t) d\omega = \frac{2}{\pi} \left(\text{Si}(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right) \Big|_{\omega=0}^{\omega=1} = \frac{2}{\pi} \left(\text{Si}(t) - \frac{1-\cos(t)}{t} \right), \quad (3.306)$$

$h_{\Delta}(0)=0$ и $h_{\Delta}(\infty)=1$ - начальное и установившееся значения ПХ, время монотонной сходимости ПХ к уровню $0.95h_{\Delta}(\infty)=0.95$ не более 4π с. В первом приближении $h_{\Delta}(t)$ можно аппроксимировать функцией $1-e^{-t/\pi}$. Интегральный синус в (3.306) вычисляется разложением в степенной ряд

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx = t - \frac{t^3}{3 \cdot 3!} + \frac{t^5}{5 \cdot 5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$$

и медленно сходится к $\pi/2$. В [1, табл. 4.6] приведены значения функции $h_{\Delta}(t)$.

Пусть имеются расчетные или снятые экспериментально ЛЧХ $L(\omega)$ и $\Phi(\omega)$. По формуле $P(\omega) = 10^{0.05L(\omega)} \cos(\Phi(\omega))$ рассчитаем ВЧХ и аппроксимируем ее непрерывной кусочно-линейной функцией из n отрезков $[(P_{i-1}, \omega_{i-1}), (P_i, \omega_i)] \forall i=1, n$ так, чтобы было $\omega_0=0$ и $P_n=0$ (рис. 3.10, a). Представим эту характеристику суммой треугольных ВЧХ $\alpha_i P_{\Delta}(\omega/\beta_i)$ с коэффициентами трансформации по амплитуде $\alpha_i = (P'_{i+1} - P'_i)\omega_i$ и частоте $\beta_i = \omega_i/1 = \omega_i$, где $P'_i = (P_i - P_{i-1})/(\omega_i - \omega_{i-1})$ - тангенс угла наклона i -го отрезка к частотной оси. Для единообразия расчета коэффициента $\alpha_n = -P'_n \omega_n$ введем дополнительную

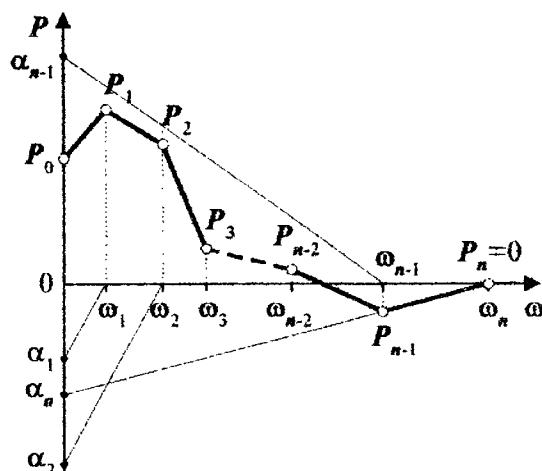


Рис. 3.10

точку $P_{n+1}=0$ на частоте $\omega_{n+1}>\omega_n$. В соответствии с закономерностями (3.29) изменения ВХ при трансформации ЧХ запишем суммарное действие всех n отрезков ВЧХ:

$$w(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i w_{\Delta}(\beta_i t) = \sum_{i=1}^n W_i w_{\Delta}(\omega_i t), \quad h(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_{\Delta}(\beta_i t) = \sum_{i=1}^n H_i h_{\Delta}(\omega_i t), \quad (3.31)$$

где $W_i = (P'_{i+1} - P'_i)\omega_i^2$ и $H_i = (P'_i - P'_{i-1})\omega_i$ - весовые коэффициенты.

Таким образом, ВХ системы есть взвешенные суммы нормированных ВХ (3.30), сжатых пропорционально частотам ω_i сопряжения отрезков, аппроксимирующих ВЧХ. Весовые коэффициенты W_i и H_i пропорциональны изменениям наклона отрез-

ков, квадрагам частот (для W_i) или самим частотам сопряжения (для H_i).

При невыполнении условий интегрируемости интегралы (3.26)-(3.28) расходятся. Это бывает, когда ПФ имеет не все строго левые полюсы или степень полинома числителя ПФ не меньше степени полинома знаменателя. В таком случае необходимо выделить из ПФ $W(s) = W_u(s) + W_n(s)$ интегрируемую и неинтегрируемую части, порождающие устойчивые, нейтральные и расходящиеся (неустойчивые) слагаемые ВХ:

$$w(t) = w_y(t) + w_u(t) + w_p(t), \quad h(t) = h_y(t) + h_u(t) + h_p(t). \quad (3.32)$$

Устойчивые слагаемые ВХ рассчитываются по изложенной методике для интегрируемой части ПФ $W_u(s)$. Нейтральные и расходящиеся слагаемые, порождаемые неинтегрируемой частью ПФ $W_n(s)$, имеют следующий вид:

$$W_n(s) = K \Rightarrow w_n(t) = K\delta(t), \quad h_n(t) = K \cdot l(t); \quad (3.33a)$$

$$W_n(s) = K/s \Rightarrow w_n(t) = K \cdot l(t), \quad h_n(t) = Kt; \quad (3.33b)$$

$$W_n(s) = K/(1+T^2 s^2) \Rightarrow w_n(t) = (K/T) \sin(t/T), \quad h_n(t) = K(1 - \cos(t/T)); \quad (3.33c)$$

$$W_n(s) = K/(1-Ts) \Rightarrow w_n(t) = -(K/T)e^{t/T}, \quad h_n(t) = K(1 - e^{t/T}); \quad (3.33d)$$

$$W_n(s) = \frac{K}{1-2\xi Ts + T^2 s^2} \Rightarrow w_n(t) = \left(\frac{K}{T} \sqrt{1-\xi^2} \right) e^{\xi t/T} \sin \left(\left(\sqrt{1-\xi^2}/T \right) t \right), \\ h_n(t) = K - \left(\frac{K}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) e^{\xi t/T} \cos \left(\left(\sqrt{1-\xi^2}/T \right) t - \arctg \left(\xi / \sqrt{1-\xi^2} \right) \right). \quad (3.33d)$$

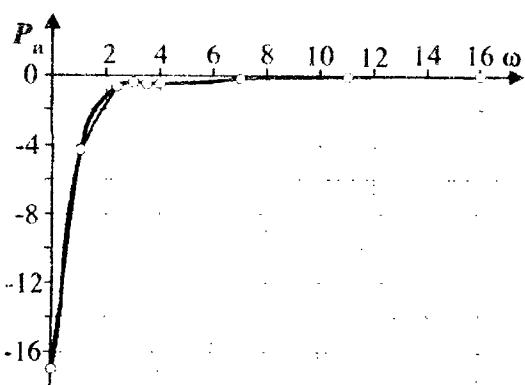
Пример 3.4. Рассчитать аппроксимационным методом все ВХ системы «тележка - обычный маятник» с ПФ (3.19)

$$W_d(s) = \frac{10+1,333s+1,333s^2}{s+1,833s^2+0,36s^3+0,167s^4}, \quad W_\Phi(s) = \frac{0,573s}{1+1,833s+0,36s^2+0,167s^3}.$$

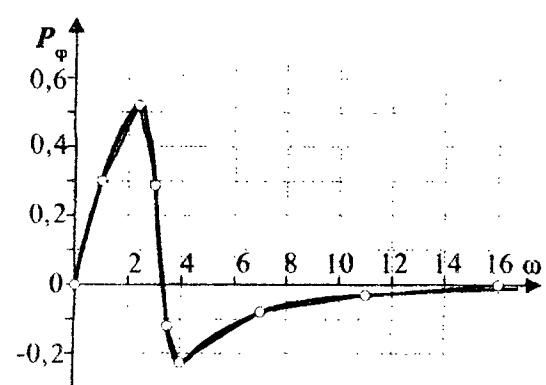
Решение. Учитывая, что ПФ $W_d(s)$ неинтегрируемая, представим ее суммой

$$W_d(s) = \frac{10}{s} + W_u(s), \quad \text{где } W_u(s) = -\frac{17+2,267s+1,667s^2}{1+1,833s+0,36s^2+0,167s^3}.$$

Построим ВЧХ $P_u(\omega)$ и $P_\Phi(\omega)$ (рис. 3.11). Они хорошо аппроксимируются восемью



a)



b)

Рис. 3.11

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ω_i	0	1	2,4	3	3,5	4	7	11	16
P_{ui}	-17	-4,264	-0,623	-0,386	-0,482	-0,468	-0,166	-0,067	0
P'_{ui}		12,736	2,6	0,397	-0,194	0,03	0,1	0,025	0,013
W_{ui}		-10,136	-12,694	-5,313	2,736	1,134	-3,704	-1,398	-3,412
H_{ui}		-10,136	-5,289	-1,771	0,782	0,284	-0,529	-0,127	-0,213
$P_{\varphi i}$	0	0,3	0,52	0,286	-0,12	-0,226	-0,079	-0,03	0
$P'_{\varphi i}$		0,3	0,157	-0,39	-0,812	-0,212	0,049	0,012	0,006
$W_{\varphi i}$		-0,142	-3,153	-3,795	7,348	4,175	-1,795	-0,77	-1,532
$H_{\varphi i}$		-0,142	-1,314	-1,265	2,099	1,044	-0,256	-0,07	-0,096

мью отрезками. В табл. 3.1 приведены параметры отрезков и расчет весовых коэффициентов W_i и H_i для $P_u(\omega)$ и $P_\varphi(\omega)$. Используя табличные данные, на основе (3.31), (3.32) и (3.33б) построим требуемые графики ВХ системы:

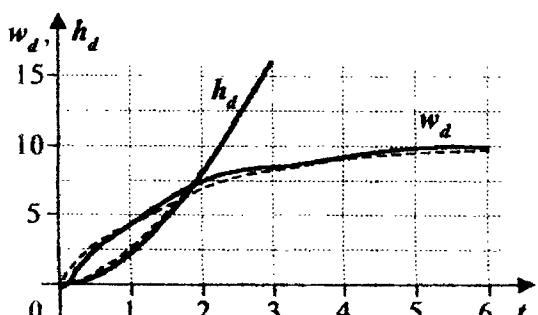
$$w_d(t) = 10 - 10,136w_\Delta(t) - 12,694w_\Delta(2,4t) - 5,313w_\Delta(3t) + 2,736w_\Delta(3,5t) + 1,134w_\Delta(4t) - 3,704w_\Delta(7t) - 1,398w_\Delta(11t) - 3,412w_\Delta(16t),$$

$$h_d(t) = 10t - 17 - 10,136h_\Delta(t) - 5,289h_\Delta(2,4t) - 1,771h_\Delta(3t) + 0,782h_\Delta(3,5t) + 0,284h_\Delta(4t) - 0,529h_\Delta(7t) - 0,127h_\Delta(11t) - 0,213h_\Delta(16t),$$

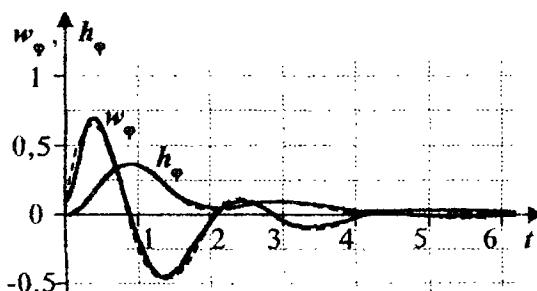
$$w_\varphi(t) = -0,142w_\Delta(t) - 3,153w_\Delta(2,4t) - 3,795w_\Delta(3t) + 7,348w_\Delta(3,5t) + 4,175w_\Delta(4t) - 1,795w_\Delta(7t) - 0,77w_\Delta(11t) - 1,532w_\Delta(16t),$$

$$h_\varphi(t) = -0,142h_\Delta(t) - 1,314h_\Delta(2,4t) - 1,265h_\Delta(3t) + 2,099h_\Delta(3,5t) + 1,044h_\Delta(4t) - 0,256h_\Delta(7t) - 0,07h_\Delta(11t) - 0,096h_\Delta(16t).$$

Они очень близки к истинным графикам ВХ (рис. 3.6,б), построенным на рис. 3.12 пунктиром. \square



a)



б)

Рис. 3.12

3.5. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

САУ И ИХ ОЦЕНКА

Для оценки способности САУ отрабатывать с необходимым качеством произвольные входные воздействия используется ПХ $h(t)$. По характеру протекания переходных процессов ПХ бывают:

- с перерегулированием (рис. 3.13, а) и без него (рис. 3.13, б);
- апериодические (1) и колебательные (2) (рис. 3.13, а, б).

Основные показатели качества ПХ:

1) начальное $h_0 = \lim_{t \rightarrow 0} h(t)$ и установившееся

$h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ значения;

2) точность регулирования $\Delta_p = 0,05|h_\infty - h_0|$ в установившемся режиме;

3) время регулирования t_p : $|h(t) - h_\infty| \leq \Delta_p \quad \forall t \geq t_p$

- время окончательного вхождения ПХ в трубку $h_\infty \pm \Delta_p$ шириной $2\Delta_p$ вокруг установившегося

значения h_∞ ;

4) перерегулирование - мера выброса ПХ за установившееся значение:

$$\sigma = \frac{|h_{\max} - h_\infty|}{|h_\infty - h_0|} 100\%; \quad (3.34a)$$

5) отрицательное перерегулирование - мера выброса ПХ за начальное значение (пунктирный график (3) на рис. 3.13, а):

$$\sigma_- = \frac{|h_0 - h_{\min}|}{|h_\infty - h_0|} 100\%; \quad (3.34b)$$

6) параметры колебаний (рис. 3.13, в): частота $f_k = \omega_k / 2\pi$ Гц; период $T_k = 1/f_k = 2\pi/\omega_k$ с; число колебаний в переходном процессе $N_k = t_p/T_k$; степень затухания колебаний за период

$$\zeta_k = \frac{\sigma_i - \sigma_{i+1}}{\sigma_i}. \quad (3.35)$$

Совокупность статических (h_0, h_∞) и динамических ($t_p, \sigma, \sigma_-, f_k, T_k, N_k, \zeta$) показателей качества образует допустимую область протекания переходных процессов, ограниченную мажорантой $h_M(t)$ и минорантой $h_m(t)$ (верхней и нижней границами):

$$h_m(t) \leq h(t) \leq h_M(t).$$

Расчет $h(t)$ дает точные значения ее показателей качества, но он, как известно, очень трудоемок. Существуют косвенные методы **оценки** показателей качества, позволяющие быстро получить представление о статических и динамических свойствах системы без построения ее ВХ. Некоторое представление о таких оценках мы уже получили при построении ВХ и изучении влияния на них трансформации ЧХ по амплитуде и частоте.

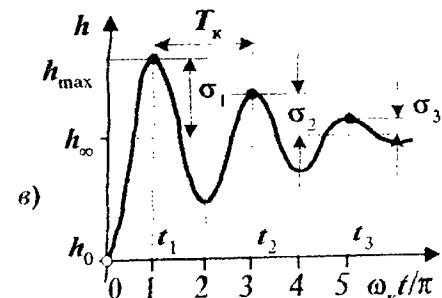
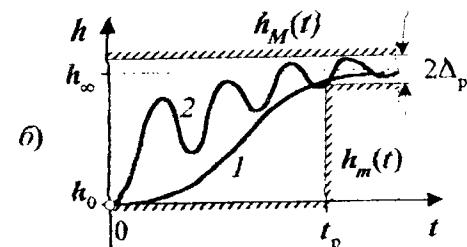
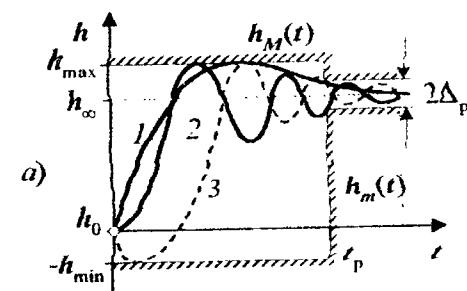


Рис. 3.13

3.5.1. Спектральные оценки качества переходных процессов

Спектральные оценки качества основаны на анализе расположения полюсов s_i и нулей λ_j ПФ системы $W(s) = B(s)/A(s) = b_m \prod_{j=1}^m (s - \lambda_j) / a_n \prod_{i=1}^n (s - s_i)^{n_i}$ на комплексной плоскости. Согласно (3.17), ПХ $h(t)$ есть сумма экспоненциальных составляющих $c_i(t)e^{s_i t}$ и по (3.18) сходится к конечному значению $h(\infty) = W(0)$, только если все полюсы ПФ левые. Чем левее полюс s_i , тем быстрее сходится порождаемая им составляющая $e^{s_i t}$. Если не все полюсы ПФ левые, то ПХ не сходится к конечному значению: она расходится или совершает незатухающие колебания. Чем правее полюс s_i , тем быстрее расходится составляющая $e^{s_i t}$. Характер расходимости (апериодический или колебательный) определяется типом правого полюса.

К основным спектральным параметрам относятся:

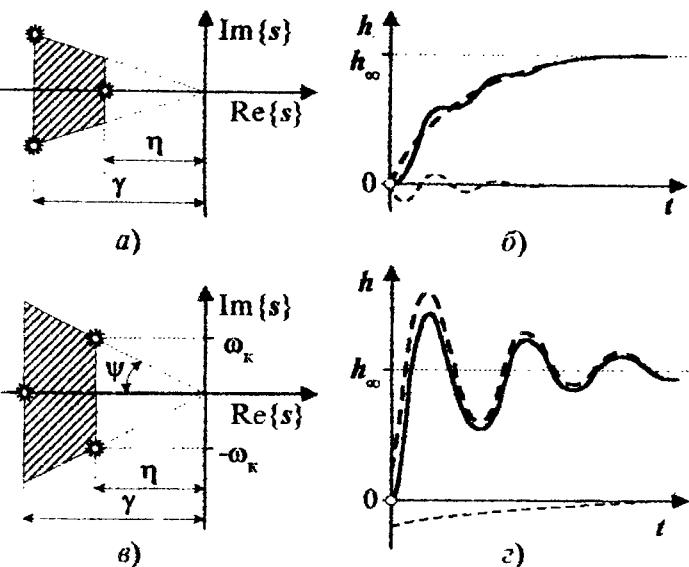


Рис. 3.14

1) **степень устойчивости**
 $\eta = \min |\operatorname{Re}(s_i)|$ - расстояние от мнимой оси до ближайшего левого полюса ПФ при отсутствии не левых полюсов. В ПХ доминируют самые медленные составляющие, характеризующие длительность реакции системы на входные воздействия:

а) для действительного полюса $s_i = -\eta$ (рис. 3.14, а) - апериодическая составляющая $c_i e^{-\eta t}$ (рис. 3.14, б);

б) для пары комплексных полюсов $s_{i,i+1} = -\eta \pm j\omega_k$ (рис. 3.14, в) - колебательная составляющая $c_i e^{-\eta t} \cos(\omega_k t + \phi_k)$ (рис. 3.14, г);

2) **степень быстродействия** $\gamma = \max |\operatorname{Re}(s_i)|$ - расстояние от мнимой оси до наиболее удаленного левого полюса ПФ. В ПХ составляющая $c_i e^{-\eta t}$ изменяется быстрее остальных и характеризует скорость реакции системы на входные воздействия;

3) **степень жесткости** $r = \gamma/\eta$ - отношение показателей затухания самой быстрой к самой медленной составляющей ПХ. Если $r > 10$, то система является жесткой. При численном расчете переходных процессов в жестких системах возникают проблемы с выбором периода временного квантования, удовлетворяющего противоречивым требованиям достаточной частоты дискретизации (зависит от параметра γ) и уменьшения времени расчета (зависит от параметра η);

4) **степень колебательности** $\mu = \operatorname{tg}(\psi) = \omega_k/\eta$ - тангенс угла раствора для ближайших к мнимой оси левых комплексных полюсов $-\eta \pm j\omega_k$.

Основные спектральные оценки качества устойчивой ПХ следующие.

1. Оценки времени регулирования: верхней границей t_p является степень устойчивости η , а нижней - степень быстродействия γ :

$$3/\gamma < t_p \leq 3/\eta . \quad (3.36)$$

Действительно, поскольку функция $e^{\operatorname{Re}(s_1)t}$ - монотонная, то, например, для $s_1 = -\eta$ она сходится к нулю с точностью 5% (то есть к стандартному уровню 0,05) за время

$$t_p \cdot e^{-\eta t_p} = 0,05 \Rightarrow t_p = \ln(20)/\eta \approx 3/\eta .$$

Если доминирующим в ПФ системы является типовое звено с ПФ $K/(1+Ts)$, то $\eta = 1/T$ и $t_p \leq 3T$. В случае доминирования колебательного звена с ПФ $K/(1+2\xi Ts + T^2 s^2)$ получим $\eta = \xi/T$ и $t_p \leq 3T/\xi$.

2. Верхняя оценка перерегулирования определяется степенью колебательности:

$$\sigma \leq e^{-\pi/\mu} 100\%. \quad (3.37)$$

Действительно, если ближайшими к мнимой оси являются комплексно-сопряженные полюсы $-\eta \pm j\omega_k$ с углом раствора $\psi = \operatorname{arctg}(\omega_k/\eta)$, то в ПХ доминирует колебательная составляющая $h(t) \approx h_\infty \left\{ 1 - e^{-\eta t} \sin(\omega_k t + \psi) / \sin(\psi) \right\}$. Из условия $h'(t) = 0$ получим значения $h(t_i)$ в точках максимумов $h(t)$, чередующихся с точками минимумов (рис. 3.13,б):

$$h'(t) \approx (h_\infty / \sin(\psi)) e^{-\eta t} \left\{ \eta \sin(\omega_k t + \psi) - \omega_k \cos(\omega_k t + \psi) \right\} = 0,$$

откуда $\operatorname{tg}(\omega_k t + \psi) = \operatorname{tg}(\psi)$ и $t_i = (2i-1)/\omega_k$ - моменты i -х максимумов $h(t)$. Значение первого максимума в момент времени $t_1 = \pi/\omega_k$ равно

$$h(t_1) = h_{i=1} = h_\infty \left\{ 1 - e^{-\eta t_1} \sin(\pi + \psi) / \sin(\psi) \right\} = h_\infty \left(1 + e^{-\pi/\mu} \right),$$

откуда по определению (3.34а) находим перерегулирование

$$\sigma = (h_{i=1} / h_\infty - 1) 100\% = \left(1 + e^{-\pi/\mu} - 1 \right) 100\% = e^{-\pi/\mu} 100\%.$$

3. Оценка степени затухания также зависит от степени колебательности:

$$\zeta = 1 - e^{-2\pi/\mu} 100\%. \quad (3.38)$$

Действительно, из предыдущего пункта находим значение i -го максимума ПХ в момент времени t_i и перерегулирование σ_i в i -м периоде:

$$h_{i=1} = h(t_i) = h_\infty \left(1 + e^{-(2i-1)\pi/\mu} \right), \quad \sigma_i = e^{-(2i-1)\pi/\mu}.$$

Тогда, по определению (3.35), $\zeta = 1 - \sigma_{i+1}/\sigma_i = 1 - e^{-(2i+1)\pi/\mu + (2i-1)\pi/\mu} = 1 - e^{-2\pi/\mu}$.

Измерив перерегулирования σ_i на графике колебательной ПХ, по обратной к (3.38) формуле можно найти параметр $\mu = -2\pi/\ln(1-\zeta)$.

4. Оценка числа колебаний в переходном процессе определяется как

$$N_k \approx \mu/2. \quad (3.39)$$

Действительно, ближайшие к мнимой оси комплексно-сопряженные полюсы $-\eta \pm j\omega_k$ дают период колебаний $T_k = 2\pi/\omega_k$. С учетом оценки (3.36) по определению находим $N_k \cdot t_p / T_k \approx 3\omega_k / 2\pi\eta \approx \mu/2$.

5. Оценки влияния нулей ПФ на качество переходных процессов:

- нуль λ_j , близкий к полюсу s_i , компенсирует составляющую $c_i e^{\lambda_j t}$, порождающую этим полюсом. Условие близости λ_j и s_i имеет вид $|\lambda_j - s_i| \ll \max\{|\lambda_j|, |s_i|\}$. Действительно, при выполнении этого условия в (3.17) получим $B(s_i) \approx 0$, так как $B(\lambda_j) \neq 0$, благодаря чему коэффициент $c_i \approx 0$. *Оценки качества (3.36)-(3.39), выполненные по скомпенсированному полюсу, являются недостоверными;*

- нули ПФ, не компенсирующие близкие полюсы, как правило, ухудшают параметры качества переходного процесса. Действительно, при невыполнении условия близости значение $|B(s_i)|$ в (3.17) тем больше, чем дальше полюс s_i удален от нулей λ_j ;

- правый нуль с $\operatorname{Re}\{\lambda_j\} > 0$ может привести к отрицательному перерегулированию ПХ (3.34б) из-за инверсии знаков $B(s_i - \lambda_j)$ в некоторых вычетах (3.17) по сравнению со случаем всех левых нулей. Отрицательное перерегулирование означает наличие в переходном процессе попутного движения и затягивает его длительность.

3.5.2. Частотные оценки качества переходных процессов

Частотные оценки качества могут быть получены по ПФ $W(s)$, ВЧХ $P(\omega)$ и зависимости (3.27) переходной характеристики от ВЧХ:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P(\omega) \sin(\omega t)}{\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P(v/t) \sin(v)}{v} dv. \quad (3.40)$$

1. Оценки начального значения ПХ h_0 :

- в соответствии с (3.18) по коэффициентам ПФ определяем

$$h_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } m < n, \\ b_n/a_n & \text{при } m = n, \\ \operatorname{sgn}(b_m/a_n)\infty & \text{при } m > n; \end{cases} \quad (3.41a)$$

- подставив в (3.40) значение $t = 0$, получаем оценку h_0 по ВЧХ:

$$h_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P(\infty) \sin(v)}{v} dv = \frac{2P(\infty)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(v)}{v} dv = P(\infty), \quad (3.41b)$$

так как интегральный синус сходится к $\pi/2$.

2. Оценки установившегося значения ПХ h_∞ :

- в соответствии с (3.18) по коэффициентам ПФ определяем

$$h_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} W(s) = \begin{cases} b_0/a_0 & \text{при } a_0 \neq 0, \\ \operatorname{sgn}(b_0)\infty & \text{при } a_0 = 0; \end{cases} \quad (3.42a)$$

- подставив в (3.40) значение $t = \infty$, получаем оценку h_∞ по ВЧХ:

$$h_\infty = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P(0) \sin(v)}{v} dv = \frac{2P(0)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(v)}{v} dv = P(0). \quad (3.42b)$$

Следующие оценки динамических показателей качества выполняются на основе ВЧХ, построенных для интегрируемой части ПФ $H_u(s)$. Соответственно это будут оценки устойчивой части ПХ $h_v(t)$.

3. Оценки времени регулирования t_p :

- по частоте **полосы пропускания** ВЧХ ω_n : $\{P(\omega) \leq 0.05|P(0)| \forall \omega \geq \omega_n\}$ (рис. 3.15).

Так как нормированная ПХ (3.30б) сходится за время 4π с, то самая быстрая составляющая $h(t)$ сходится за $4\pi/\omega_n$ с. Получаем *нижнюю границу* быстродействия системы

$$t_p \geq 4\pi/\omega_n. \quad (3.43a)$$

Если ПФ имеет дифференцирующие свойства и $P(0)=0$, то допуск $\Delta_p = 5\%$ берется от максимального модуля ВЧХ $|P_{\max}|$. Полученная оценка быстродействия согласуется с выводом (3.29) о том, что чем шире полоса пропускания системы, тем более она быстродействующая;

- по частоте ω_1 : $\{P(\omega) - P(0) \leq 0.05|P(0)| \forall \omega \leq \omega_1\}$ первого резкого перегиба ВЧХ (если он есть) (рис. 3.15). По (3.31) определяем самую медленную составляющую ПХ $H_1 h_A(\omega_1 t) = (P'_1 - P_1) \omega_1 h_A(\omega_1 t)$, которая сходится за $4\pi/\omega_1$ с. Получаем *верхнюю границу* быстродействия системы

$$t_p \leq 4\pi/\omega_1. \quad (3.43b)$$

4. Оценки перерегулирования σ :

- если ВЧХ $P(\omega)$ - абсолютно убывающая ($|P'(\omega)| < 0$) и выпуклая вниз ($P''(\omega) > 0$) функция частоты (рис. 3.16), то ПХ удовлетворяет условию монотонности $\sigma=0$. Действительно, перерегулирование в $h(t)$ возможно, когда в (3.31) коэффициенты H_i разных знаков, так как нормированная ПХ $h_A(t)$ монотонна. При выполнении условий, наложенных на $P(\omega)$, получим $P'_i < P'_{i+1}$ и $H_i = (P'_{i+1} - P'_i)\omega_i > 0 \forall i$, что дает монотонную функцию $h(t)$;

- если ВЧХ имеет $|P(0)| = \max|P(\omega)|$ (рис. 3.17), то перерегулирование удовлетворяет условию

$$\sigma \leq 18\%. \quad (3.44a)$$

Действительно, если $|P(\omega)| \leq |P(0)| \forall \omega \geq 0$, то из (3.40) и (3.41б) следует $h(t) \leq 2P(0)\max|Si(x)|/\pi = 2P(0) \cdot 1.85/\pi \approx 1.18P(0) = 1.18h_\infty$;

- если ВЧХ $P(\omega)$ - однозначная функция, имеющая пик P_{\max} (рис. 3.18, а), то ПХ имеет перерегулирование

$$\sigma \leq \frac{1.18P_{\max} - P(0)}{P(0)} \cdot 100\%. \quad (3.44b)$$

Для доказательства представим $P(\omega)$ и $h(t)$ в виде $P(\omega) = P_1(\omega) + P_2(\omega)$ и $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$ (рис. 3.18, б, в). Так как $h_2(t)$ порождается низкочастотной ВЧХ $P_2(\omega)$,

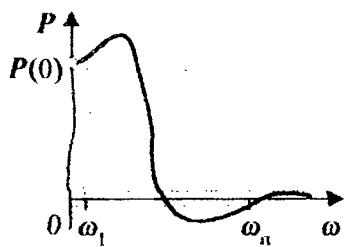


Рис. 3.15

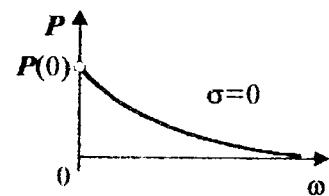


Рис. 3.16

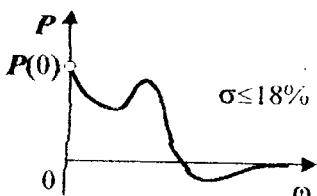


Рис. 3.17

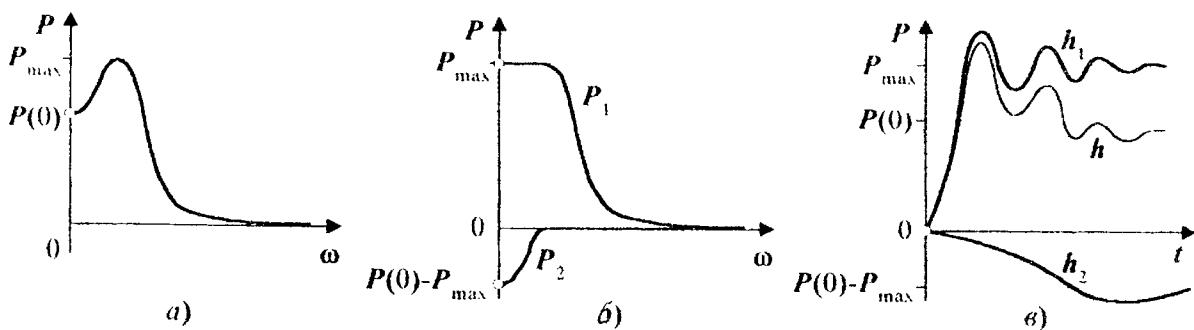


Рис. 3.18

то перерегулирование $h(t)$ определяется только функцией $h_1(t)$, и из (3.44а), (3.42б) следует $\max\{h(t)\} \approx \max\{h_1(t)\} \leq 1,18P_{\max}$, $h_{\infty} = h_{1\infty} + h_{2\infty} = P(0)$. По определению (3.34а), $\sigma \leq (h_{\max}/h_{\infty} - 1)100\% = (1,18P_{\max}/P_0 - 1)100\%$;

- если ВЧХ имеет экстремумы P_{\max} и P_{\min} разных знаков (рис. 3.19), то ПХ имеет перерегулирование

$$\sigma \leq \frac{1,18P_{\max} + 0,27P_{\min} - P(0)}{P(0)} 100\%. \quad (3.44\text{в})$$

5. Оценки параметров колебаний ПХ:

- острый пик $P(\omega)$ на частоте ω_p с коэффициентом резонанса $\delta_p = P_{\max}/P(0)$ (рис. 3.19) свидетельствует о затухающих колебаниях ПХ с оценками качества

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_k \approx \sqrt{1+1/4\delta_p} \omega_p, f_k = \omega_k/2\pi, T_k \approx 2\pi \sqrt{4\delta_p/(1+4\delta_p)} / \omega_p, \\ t_p < 12\delta_p/\omega_p, \sigma < e^{-\pi/4\delta_p} 100\%, \zeta > 1 - e^{-\pi/2\delta_p}, N_k < 2\delta_p. \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Получение этих оценок параметров колебаний основано на аппроксимации ПФ в окрестности частоты ω_p колебательным звеном с ПФ $P(0)/(1+2\xi Ts+T^2 s^2)$ и ВЧХ

$$P(\omega) = \frac{P(0)(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}. \quad \text{Из условия } P'(\omega_p) = 0 \quad \text{определяем максимум ВЧХ}$$

$P_{\max} = P(0)/4\xi(1-\xi)$ на частоте $\omega_p = \sqrt{1-2\xi}/T$. Корень квадратного уравнения $4\xi(1-\xi) = 1/\delta_p$ есть коэффициент демпфирования $\xi = 0,5(1 - \sqrt{1-1/\delta_p}) < 0,5$. Найдем параметры полинома $1+2\xi Ts+T^2 s^2$ как функции δ_p и ω_p :

$$T = \sqrt{1-2\xi}/\omega_p = \sqrt{1-1/\delta_p}/\omega_p \quad \text{- постоянная времени;}$$

$$\eta = \xi/T = \omega_p / 2\sqrt{\delta_p + \sqrt{\delta_p - 1}} \sqrt{\delta_p(\delta_p - 1)} \quad \text{- показатель затухания колебаний;}$$

$$\omega_k = \sqrt{1-\xi^2}/T = \sqrt{0,5 + (2\delta_p + 1)}/4\sqrt{\delta_p(\delta_p - 1)}\omega_p \quad \text{- частота колебаний;}$$

$$\mu = \sqrt{1-\xi^2}/\xi = \sqrt{\delta_p + \sqrt{\delta_p - 1}} \sqrt{2\delta_p + 1 + 2\sqrt{\delta_p(\delta_p - 1)}} \quad \text{- степень колебательности.}$$

При остром резонансном пике ($\delta_p \gg 1$) заменим $\delta_p - i$ на δ_p , тогда $\eta \approx \omega_p / 4\delta_p$, $\omega_k \approx \sqrt{1+1/4\delta_p} \omega_p$, $\mu \approx 4\delta_p$. Подставляя эти оценки в (3.36)-(3.39), получим оценки параметров ПХ в (3.45).

Если комплексные полюсы ПФ не являются доминирующими в ее спектре, то резонансный пик ВЧХ располагается в среднечастотной части и коэффициент резонанса δ_p показывает усиление на частоте ω_p по сравнению с близкими частотами, где пик ВЧХ отсутствует. Быстрые колебания ПХ совершаются вокруг медленно изменяющейся во времени апериодической функции, определяемой доминирующим действительным полюсом (рис. 3.14,б). Оценки параметров колебаний t_p , σ , ζ и N_k , выполненные по (3.45), являются, скорее всего, слишком грубыми;

- разрыв непрерывности ВЧХ на частоте ω_p (рис. 3.20) свидетельствует о *незатухающих* колебаниях ПХ с частотой $\omega_k = \omega_p$ вокруг среднего значения $P(0)$. Действительно, при $\delta_p = \infty$ из (3.45) следует $t_p = \infty$, $\sigma = 100\%$, $\zeta = 0$, $N_k = \infty$, а это параметры незатухающих колебаний нейтральной системы с чисто мнимыми полюсами $\pm j\omega_k$.

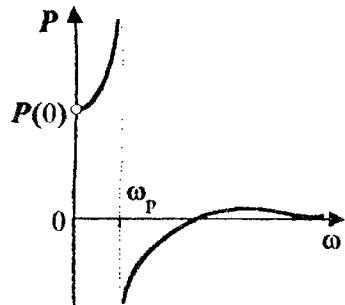


Рис. 3.20

Пример 3.5. $W(s) = \frac{100-20s+10s^2}{50+102s+5s^2+2s^3}$. Полюсы и нули ПФ (рис. 3.21): $s_1 = -0,5$, $s_{2,3} = -1 \pm j7$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm j3$. Параметры спектра: $\eta = 0,5$, $\gamma = 1$, $r = 2$, $\mu = 7$. Спектральные оценки качества ПХ, выполненные по (3.36)-(3.39): $3 \leq t_p \leq 6$ с, $\sigma \leq 63,8\%$, $\omega_k = 7$ рад/с, $f_k = 1,11$ Гц, $T_k = 0,9$ с, $\zeta = 0,59$, $N_k = 3,5$. Поскольку комплексные полюсы $s_{2,3}$ - не доминирующие, то оценка σ может оказаться слишком завышенной. Правые нули $\lambda_{1,2}$ могут ухудшить показатели качества, в частности, дать отрицательное перерегулирование σ_- из-за переворота фазы колебаний.

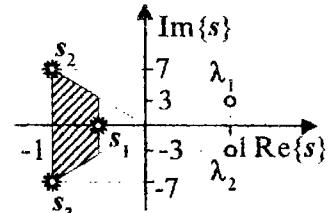


Рис. 3.21

Построим ВЧХ (рис. 3.22,а) $P(\omega) = \frac{50(10-\omega^2)^2 - 40\omega^2(51-\omega^2)}{25(10-\omega^2)^2 + 4\omega^2(51-\omega^2)}$ с параметрами $P(0) = 2$, $P(\infty) = 0$, $\delta_p \approx 4$, $\omega_p \approx 7,3$, $\omega_n \approx 16,9$. Частотные оценки качества ПХ по (3.41б), (3.42б), (3.43а), (3.44а): $h_0 = 0$, $h_\infty = 2$, $t_p \geq 0,74$ с, $\sigma \leq 18\%$. Частотные оценки качества ПХ по (3.45) $f_k = 1,2$ Гц, $T_k = 0,84$ с, $t_p < 6,58$ с, $\sigma \leq 82,2\%$, $\zeta > 0,32$, $N_k < 8$ могут быть не-

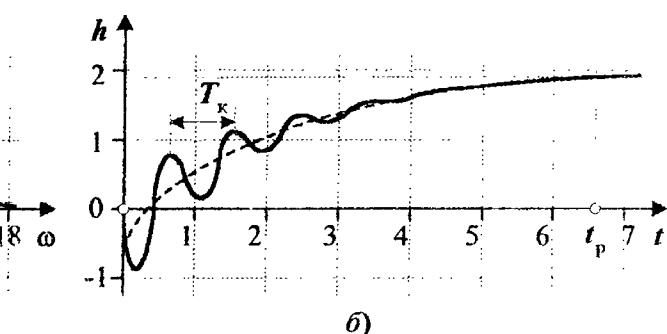
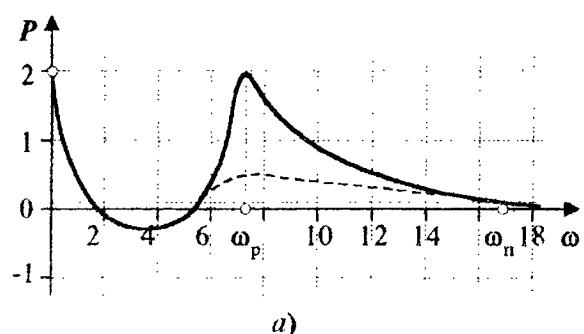


Рис. 3.22

достоверными, так как пик ВЧХ находится в среднечастотной области (его величина сравнивается с условным значением изображенной пунктиром ВЧХ без резонансного пика). Истинные показатели качества ПХ определим, построив оригинал $h(t)$ по изображению $W(s)/s$ (табл. П.2): $h(t) = 2 - 2.607e^{-0.5t} - 0.943e^t \sin(7t + 0.7) \Rightarrow h_0 = 0, h_\infty = 2, t_p = 6.6 \text{ с}, \sigma = 0\%, \sigma_- = 46.6\%, f_k = 1.11 \text{ Гц}, T_k = 0.9 \text{ с}, \zeta = 0.61, N_k = 4$ (рис. 3.22, б).

Оценки и истинные значения показателей качества $h(t)$ сведены в табл. 3.2. Сравнение этих данных свидетельствует о практическом совпадении оценок с истинными показателями, за исключением времени регулирования. Небольшая затяжка длительности переходного процесса объясняется наличием правых нулей ПФ. По этой же причине ПХ имеет и относительно большое отрицательное перерегулирование. [3]

Таблица 3.2

Показатели качества	Спектральные оценки	Частотные оценки	Истинные значения
Начальное значение		$h_0 = 0$	$h_0 = 0$
Установившееся значение		$h_\infty = 2$	$h_\infty = 2$
Время регулирования	$3 \leq t_p \leq 6 \text{ с}$	$0.74 \leq t_p < 6.58 \text{ с}$	$t_p = 6.6 \text{ с}$
Перерегулирование	$\sigma \leq 63.8\%$	$\sigma \leq 18\%$	$\sigma = 0\%$
Период колебаний	$T_k = 0.9 \text{ с}$	$T_k = 0.84 \text{ с}$	$T_k = 0.9 \text{ с}$
Степень затухания колебаний	$\zeta = 0.59$	$\zeta > 0.32$	$\zeta = 0.61$
Число колебаний	$N_k = 3.5$	$N_k < 8$	$N_k = 4$

Сопоставляя эти показатели с их оценками, делаем следующие *выводы*:

1) спектральные оценки t_p и σ согласуются с истинными значениями лишь для доминирующих полюсов ПФ и в отсутствие правых нулей;

2) спектральные оценки f_k , T_k и ζ точно совпадают с истинными значениями. Состав спектра ПФ помогает определить частоты гармонических колебаний переходного процесса системы по мнимым частям комплексных полюсов;

3) спектральные методы не дают оценок статических параметров h_0 и h_∞ ;

4) спектральные методы не дают оценок амплитуд составляющих ПХ, поэтому оценки t_p и σ , сделанные не по доминирующему полюсам, могут быть грубыми;

5) частотные (по ВЧХ) методы дают точные оценки параметров h_0 и h_∞ только для устойчивых систем;

6) частотные оценки параметров колебаний ПХ близки к истинным значениям лишь при низкочастотном расположении пика ВЧХ относительно ее других изменений. В других случаях оценки могут стать недостоверными.

ГЛАВА 4. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В результате изучения в третьей главе методов расчета ВХ стало понятно, что характер их изменения целиком зависит от ПФ системы, а именно от расположения корней полинома ее знаменателя. Продолжим более глубокое исследование качественных свойств элементов и систем САУ, определяющих их работоспособность во времени и пространстве.

4.1. ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Устойчивость является важнейшим и самым необходимым условием работоспособности автоматических систем, так как включает в себя требование затухания переходных процессов во времени. Система с расходящимся переходным процессом неработоспособна. Устойчивость САУ означает, что ее реакция на любое ограниченное воздействие также является ограниченной. Понятие устойчивости нелинейной динамической системы и условия устойчивости установлены А.М. Ляпуновым.

Как показано в п. 1.4, модель объекта в виде системы нелинейных ДУ (1.6) может быть линеаризована в операторной форме $A(p)\Delta y(t) = B(p)\Delta x(t)$ с отклонениями $\Delta y(t) = y(t) - y_n(t)$ и $\Delta x(t) = x(t) - x_n(t)$ от номинальных режимов $y_n(t)$ и $x_n(t)$. Номинальное движение является невозмущенным. Согласно (1.18) и (1.19), изображение отклонения выхода объекта равно

$$\Delta Y(s) = W(s)\Delta X(s) + \frac{P(s)-Q(s)}{A(s)}. \quad (4.1)$$

Устойчивость - это свойство, присущее сугубо объекту и не зависящее от внешних воздействий. Полагая в (4.1) $\Delta X(s)=0$ и $Q(s)=0$, получим уравнение

$$\Delta Y_{cb}(s) = P(s)/A(s) \quad (4.2)$$

с полиномами $A(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$, $P(s) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i$, $p_i = \sum_{j=i+1}^n a_j \Delta y^{(j-i-1)}(0) \quad \forall i=0, n-1$, описывающее свободное движение объекта из ненулевых начальных отклонений $\Delta y(0), \dots, \Delta y^{(n-1)}(0)$ от невозмущенного движения.

Аналитическое определение понятия *устойчивости по Ляпунову* (рис. 4.1): *невозмущенное движение $y_n(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_i(\varepsilon) > 0 : |\Delta y_{cb}^{(i)}(0)| < \delta_i(\varepsilon) \Rightarrow |\Delta y_{cb}(t)| < \varepsilon \quad \forall t > 0.$$

В неустойчивой системе малейший выход из номинального режима приводит к неограниченному движению (в реальности - к насыщению по мощности или к разрушению объекта). Если $\Delta y_{cb}(t \rightarrow \infty) \neq 0$, то такое движение называется *асимптотически устойчивым*. Асимптотически устойчивое движение называется *экспоненциально устойчивым*, если $|\Delta y_{cb}(t)| < M e^{-mt}$, где $M < \infty$; $m > 0$. Движение, асимптотически устойчивое

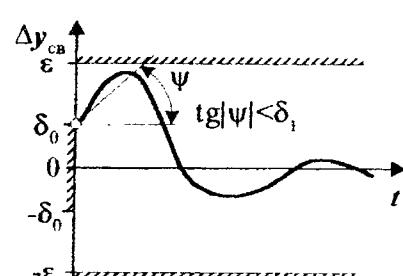


Рис. 4.1

при любых начальных отклонениях, называется *устойчивым в целом*. Иначе существуют определенные границы начальных отклонений, внутри которых движение будет *устойчивым в малом*.

4.2. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

Оценка устойчивости есть оценка возможности осуществлять управление, поэтому с нее начинается исследование любой САУ. Для установления условий устойчивости линеаризованной системы (4.1) в силу принципа суперпозиции рассмотрим отдельно движения, вызванные начальными отклонениями и входным воздействием. Без потери общности примем невозмущенное движение нулевым: $y_n(t)=0$, $x_n(t)=0$.

Из (4.2) вытекает, что свободное движение полностью определяется полиномом $A(s)$ знаменателя ПФ, а формула разложения Хевисайда (3.4) раскрывает его характер:

$y_{cb}(t)=\sum_{i=1}^v c_i(t)e^{s_i t}$. Отсюда следует *спектральное необходимое и достаточное условие устойчивости* (НиДУУ) линеаризованных систем:

$$\operatorname{Re}\{s_i\} < 0 \quad \forall i=1, v. \quad (4.3)$$

Для устойчивости линеаризованной системы необходимо и достаточно, чтобы все полюсы ее ПФ были левыми.

Мнимая ось $\operatorname{Im}\{s\}$ является *границей устойчивости*. Если в процессе работы устойчивой системы в результате дрейфа ее параметров хотя бы один полюс перейдет в правую полуплоскость s , то система станет неустойчивой. Точка $s=0$ мнимой оси называется *aperiodической границей устойчивости*, а полюс $s_i=0$ кратности n_i порождает в свободном движении составляющую $y_{icb}(t)=c_i(t)e^{0t}=c_{i0}+c_{i1}t+\dots+c_{in_i-1}t^{n_i-1}$ неколебательного характера. Остальные точки мнимой оси составляют *колебательную границу устойчивости*, а пара мнимых полюсов $\pm j\omega_k$ кратности n_i порождает колебательную составляющую $y_{icb}(t)=c_i(t)\sin(\omega_k t + \phi_k)$.

Системы, имеющие полюсы слева и на границе устойчивости, называются *нейтральными*. Стого говоря, переходные процессы в нейтральных системах не расходятся, только если граничные полюсы - простые. Поэтому понятие границы устойчивости весьма условное и при проектировании САУ необходимо добиваться безусловной устойчивости с определенным *запасом*, задаваемым степенью устойчивости η . Если выполнено условие устойчивости с запасом $\operatorname{Re}\{s_i\} \leq -\eta \quad \forall i$, то свободное движение затухает за время не более $3/\eta$ с.

Аналогично свободному ведет себя возмущенное движение, вызванное ненулевыми начальными отклонениями $\Delta x(0), \dots, \Delta x^{(m-1)}(0)$.

Рассмотрим *вынужденное движение*, вызванное входным воздействием $x(t)$. Его изображение в (4.1) равно $Y_{вын}(s)=W(s)X(s)$. По теореме свертывания [1,2] произведению изображений $W(s)X(s)$ соответствуют оригиналы - интегралы Дионеля

$$\int_0^t w(\tau)x(t-\tau)d\tau, \int_0^t w(t-\tau)x(\tau)d\tau. \quad (4.4)$$

Действительно, по определению преобразования Лапласа (1.16), имеем

$$\begin{aligned}
 W(s)X(s) &= \int_0^\infty e^{-st}w(t)dt \int_0^\infty e^{-s\phi}x(\phi)d\phi = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(t+\phi)}w(t)x(\phi)dtd\phi = \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st}w(t)x(t-\tau)dtd\tau = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t w(\tau)x(t-\tau)d\tau dt = L \left\{ \int_0^\infty w(\tau)x(t-\tau)d\tau \right\}.
 \end{aligned}$$

Ввиду симметричности t и τ справедлив и второй оригинал в (4.4). Пусть входное воздействие абсолютно ограничено: $|x(t)| \leq M \forall t \geq 0$. Тогда выходной сигнал должен удовлетворять условию

$$|y_{\text{вын}}(t)| = \int_0^t |w(\tau)| |x(t-\tau)| d\tau \leq M \int_0^t |w(\tau)| d\tau < \infty.$$

Отсюда следуют **временные условия устойчивости** линеаризованной системы. Необходимое и достаточное условие - абсолютная интегрируемость ее ИХ. Необходимое, но не достаточное условие - сходимость ИХ к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0. \quad (4.5a)$$

В соответствии с предельными формулами (3.18) это необходимое условие равносильно требованию к ПФ

$$\lim_{s \rightarrow 0} \{sW(s)\} = 0. \quad (4.5b)$$

На примере системы с перевернутым маятником и ее ПФ (3.19) можно убедиться, что выполнение второго предельного условия (3.18) для $w(\infty)$ не гарантирует устойчивости, если не все полюсы левые.

Условия устойчивости САУ требуют расчета полюсов ПФ, что для систем высокого порядка представляет сложную задачу. Однако нужно знать не сами полюсы, а их расположение на комплексной плоскости относительно мнимой оси. *Правила, позволяющие исследовать устойчивость системы без вычисления полюсов ее ПФ, называются критериями устойчивости (КУ),* которые делятся на две группы:

- алгебраические (Рауса, Гурвица и Льенара - Шипара);
- частотные (Михайлова и Найквиста).

Математически все КУ эквивалентны, так как устанавливают условия принадлежности полюсов ПФ левой полуплоскости s . С их помощью оценивают влияние параметрических или структурных изменений на устойчивость, определяют границы допустимых изменений параметров, при которых в САУ сохраняется устойчивость или желаемые показатели качества.

4.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

 Алгебраические КУ работают с *характеристическим полиномом* (ХП)

$$C(s) = c_0 + c_1 s + \dots + c_n s^n = \sum_{i=0}^n c_i s^i \quad (4.6)$$

- полиномом знаменателя ПФ той системы, устойчивость которой исследуется. Получим ПФ $W_1(s)$ и ХП $C_p(s)$ и $C_s(s)$ разомкнутой и замкнутой систем (рис. 4.2):

а) в разомкнутой системе $W(s) = B(s)/A(s)$, $C_p(s) = A(s)$;

б) в замкнутой системе с единичной ОС $W(s) = B(s)/A(s)$, $W_3(s) = W(s)/(1 \pm W(s))$,

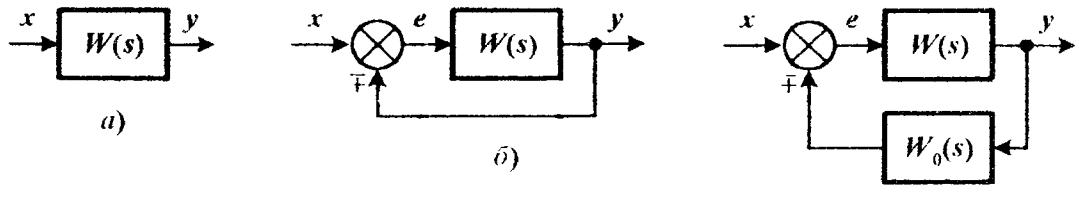


Рис. 4.2

$$C_3(s) = A(s) \pm B(s);$$

в) в замкнутой системе с неединичной ОС $W(s) = B(s)/A(s)$, $W_0(s) = B_0(s)/A_0(s)$, $W_1(s) = W(s)/(1 \pm W(s)W_0(s))$, $C_3(s) = A(s)A_0(s) \pm B(s)B_0(s)$.

В обозначениях « \mp » и « \pm » верхние знаки соответствуют ООС, а нижние - ПОС.

Полином, все корни которого - левые, называется устойчивым. Если коэффициенты ХП - числа, то алгебраические КУ устанавливают факт устойчивости или неустойчивости системы с данным ХП. Если некоторые коэффициенты ХП зависят от параметров, то КУ дают соотношения для построения областей устойчивости системы в пространстве параметров.

4.3.1. Необходимые условия устойчивости

Необходимые условия устойчивости (НУУ) полинома: все его коэффициенты должны быть одного знака, то есть

$$\{c_i > 0 \ \forall i = \overline{0, n}\} \cup \{c_i < 0 \ \forall i = \overline{0, n}\}. \quad (4.7)$$

□ **Доказательство.** Используем формулы Виета

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 + s_2 + \dots + s_n = -c_{n-1}/c_n, \\ s_1 s_2 + s_1 s_3 + \dots + s_{n-1} s_n = c_{n-2}/c_n, \\ \dots \\ s_1 s_2 \dots s_n = (-1)^n c_0/c_n, \end{array} \right. \quad (4.8a)$$

связывающие коэффициенты полинома с его корнями. Для k -й формулы Виета

$$\sum_{j=1}^k s_{v_j} = (-1)^k c_{n-k}/c_n \quad \forall k = \overline{1, n}. \quad (4.8b)$$

Суммирование в (4.8b) ведется по всем C_n^k возможным сочетаниям произведений k разных корней полинома (кратные корни считаются разными).

Допустим противное: в устойчивом полиноме существует хотя бы один коэффициент c_{n-k} , знак которого противоположен коэффициенту c_n . Если k - четно, то в (4.8b) слева сумма произведений четного количества левых корней положительна, а справа $c_{n-k}/c_n < 0$. Если k - нечетно, то слева сумма произведений нечетного количества левых корней отрицательна, а справа $-c_{n-k}/c_n > 0$. Полученные противоречия доказывают необходимость условий (4.7) для устойчивости полинома. □

Например, система «тележка - перевернутый маятник» с ПФ (1.11) имеет ХП $C(s) = 600s + 940s^2 - 216s^3 - 100s^4$ с коэффициентами разных знаков, к тому же $c_0 = 0$. Условия (4.7) не выполнены, что подтверждается наличием не левых корней $s_1 = 0$ и $s_4 = 2,52$.

Приведем пример неустойчивого полинома с положительными коэффициентами

$$C(s) = 68 + 9s + 2s^2 + s^3 = (4+s)(17 - 2s + s^2), \quad (4.9)$$

имеющего левый действительный корень $s_1 = -4$ и пару правых комплексно-сопряженных корней $s_{2,3} = +1 \pm 4j$. Правое расположение именно комплексных, а не действительных корней неустойчивого полинома с коэффициентами одного знака является не частным случаем, а *правилом*: если выполняются НУУ (4.7), то все действительные корни полинома - обязательно левые. Комплексные корни могут и не быть все левыми.

Достаточные условия устойчивости (ДУУ) полинома устанавливают дополнительные ограничения на его коэффициенты, которые совместно (по правилу «И») с НУУ составляют полный набор ограничений.

4.3.2. Критерий устойчивости Рауса - Гурвица

Следуя вопрос о расположении корней полинома (4.6) с действительными коэффициентами, Раус и независимо от него Гурвиц доказали **теорему 2.5**, гласящую: *число правых корней действительного полинома $C(s)$ равно числу инверсий знака в последовательности*

$$M = \{c_n, M_1, M_1 M_2, M_2 M_3, \dots, M_{n-1} M_n\}, \quad (4.10)$$

где M_i есть i -й главный минор $n \times n$ -матрицы Гурвица Γ :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & \dots & M_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ c_n & c_{n-2} & c_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_{n-1} & c_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_n & c_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_2 & c_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} M_1 &= c_{n-1}, \\ M_2 &= \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-3} \\ c_n & c_{n-2} \end{vmatrix} = c_{n-1}c_{n-3} - c_n c_{n-3}, \\ M_3 &= \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\ c_n & c_{n-2} & c_{n-4} \\ 0 & c_{n-1} & c_{n-3} \end{vmatrix}, \dots, M_n = c_0 M_{n-1}. \end{aligned}$$

Как частный случай, из теоремы следует **критерий Рауса - Гурвица** устойчивости действительного полинома (условия, при которых число его правых корней равно нулю): *для устойчивости действительного полинома необходимо и достаточно, чтобы все элементы последовательности (4.10) были одного знака*:

$$(\operatorname{sgn} c_n)^i M_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (4.11)$$

Если $c_n > 0$, то все главные миноры должны быть положительны. Если $c_n < 0$, то знаки миноров должны чередоваться, начиная с $M_1 = c_{n-1} < 0$. Можно сменить знаки коэффициентов c_i (от этого спектр полинома не меняется) и к полученному полиному применить критерий устойчивости (4.11) для положительных коэффициентов.

Границам устойчивости соответствует любое обнуление неравенств в (4.7) и (4.11). Например, при простых корнях ХП значение $c_0 = 0$ дает $M_n = c_0 M_{n-1} = 0$ - *апериодическую границу устойчивости*. Если $c_0 \neq 0$, а $M_{n-1} = 0$, то $M_n = c_0 M_{n-1} = 0$ - *колебательная граница устойчивости*.

Для ХП первой степени $C(s) = c_0 + c_1 s$ НиДУУ имеет вид $(\operatorname{sgn} c_1)c_0 > 0$, то есть коэффициенты c_0 и c_1 должны быть одного знака.

Для ХП второй степени $C(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2$ к требованию однозначности коэффициентов c_0 , c_1 и c_2 приводят НиДУУ $\{(sgnc_2)c_1 > 0\} \cap \left\{ (sgnc_2)^2 \begin{vmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & c_0 \end{vmatrix} = c_1 c_0 > 0 \right\}$.

Для ХП третьей степени $C(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3$ НиДУУ имеют вид $\{(sgnc_3)c_2 > 0\} \cap \{M_2 > 0\} \cap \{(sgnc_3)^3 M_2 c_0 > 0\}$, то есть c_0 , c_2 и c_3 должны быть одного знака и $M_2 = c_2 c_1 - c_3 c_0 > 0$.

Пример 4.1. Проверим по критерию (4.11) устойчивость полинома (4.9) с положительными коэффициентами: $sgn(c_3) = sgn(1) > 0$, $M_1 = c_2 - 2 > 0$, $M_2 = c_2 c_1 - c_3 c_0 = -50 < 0$, $M_3 = c_0 M_2 = -3400 < 0$. Условия (4.11) не выполняются, поэтому полином (4.9) неустойчив. \square

Пример 4.2. $C(s) = 4 + 4s + s^2 + s^3$ - НУУ (4.7) выполнены. Составив матрицу Гурвица $P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$,

по ее минорам $M_1 = 1 > 0$, $M_2 = 1 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 0$ и коэффициенту $c_0 = 4 \neq 0$ делаем вывод о колебательной границе устойчивости. Действительно, полином $C(s) = (1+s)(4+s^2)$ имеет один левый корень $s_1 = -1$ и пару мнимых корней $s_{2,3} = \pm 2j$. \square

В альтернативной форме критерия, предложенной Раусом, строится таблица из $n+1$ строк в виде перевернутого ступенчатого треугольника:

$$P = \left| \begin{array}{c|ccc} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n_1} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & & \\ P_{n+1,1} & P_{n+1,2} & & \end{array} \right|, \quad \begin{aligned} p_{11} &= c_n, \quad p_{12} = c_{n-2}, \dots, \quad p_{1n_1} = c_{n+2-2v_1}, \\ p_{21} &= c_{n-1}, \quad p_{22} = c_{n-3}, \dots, \quad p_{2n_2} = c_{n+1-2v_2}, \\ p_{ij} &= p_{i-2,j+1} - p_{i-1,j+1} p_{i-2,1} / p_{i-1,1}, \end{aligned}$$

где $v_1 = 1 + [n/2]$, $v_2 = 1 + [(n+1)/2]$, а $[x]$ - целая часть числа x . В [11] показано, что элементы первого столбца таблицы Рауса составляют последовательность $p_{11} = c_n$, $p_{21} = c_{n-1} = M_1$, $p_{31} = M_2/M_1$, ..., $p_{i+1,1} = M_i/M_{i-1}$ с числом инверсий знака таким же, как у последовательности (4.10). По Раусу *критерием устойчивости действительного полинома является постоянство знаков всех элементов первого столбца таблицы Рауса*. Число инверсий знака у элементов первого столбца равно числу правых корней полинома.

Очевидно, что в НиДУУ Рауса - Гурвица (4.11) почти не используются более простые НУУ (4.7) и в то же время требуется вычислять $n-2$ главных минора $M_2 \div M_{n-1}$ (миноры $M_1 = c_{n-1}$ и $M_n = c_0 M_{n-1}$ элементарны), что затруднительно для полиномов высоких степеней. *Льенаром и Шипаром* получены НиДУУ, использующие НУУ (4.7) и миноры либо с четными, либо нечетными индексами [11]. *Действительный полином со всеми коэффициентами $c_i > 0$ устойчив, если либо $M_{2k} > 0$, либо $M_{2k+1} > 0$. Полином со всеми коэффициентами $c_i < 0$ устойчив, если либо $M_{2k} > 0$, либо $M_{2k+1} < 0$.*

Критерий Льенара - Шипара дает свободу выбора анализируемых миноров. Нужно так выбирать индексы, чтобы уменьшить количество и степени вычисляемых миноров. Например, при $n=8$ достаточно найти либо M_2 , M_4 , M_6 , M_8 , либо M_3 , M_5 , M_7 . Очевидно, что второй набор миноров предпочтительнее как по количеству, так и по максимальной степени.

4.4. ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Собой интерес представляет полином, коэффициенты которого зависят от одного или нескольких параметров:

$$C(s, \bar{p}) = c_0(\bar{p}) + c_1(\bar{p})s + \dots + c_n(\bar{p})s^n = \sum_{i=0}^n c_i(\bar{p})s^i. \quad (4.12)$$

При изменении вектора параметров \bar{p} могут нарушаться НидУУ (4.11). Такие системы называются *условно устойчивыми*. Системы, в которых условия устойчивости выполняются при любых физически допустимых значениях параметров, называются *безусловно устойчивыми*. Системы, в которых НидУУ не выполняются ни при каких физически допустимых значениях параметров, называются *структурно неустойчивыми*. Множество точек в пространстве параметров полинома, в которых выполняются НидУУ, составляют *область устойчивости* полинома.

Пример 4.3. Исследовать устойчивость разомкнутой (РС) и замкнутой (ЗС) единичной ООС систем в зависимости от параметра p ПФ РС

$$W_p(s) = \frac{3p-10+2ps}{(p-6)+(p+6)s+(p-2)s^2+2ps^3}.$$

Решение. $C_p(s, p) = \underbrace{p-6}_{c_{p0}(p)} + \underbrace{(p+6)s}_{c_{p1}(p)} + \underbrace{(p-2)s^2}_{c_{p2}(p)} + \underbrace{2ps^3}_{c_{p3}(p)}$. Область устойчивости РС O_p

удовлетворяет условиям (рис. 4.3)

$$\begin{aligned} & \left\{ c_{pi}(p) > 0 \quad \forall i=0,2,3 \right\} \cup \left\{ c_{pi}(p) < 0 \quad \forall i=0,2,3 \right\} \\ & \cap \\ & \left\{ M_{p2}(p) > 0 \right\}. \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M_{p2}(p) &= c_{p1}(p)c_{p2}(p) - c_{p0}(p)c_{p3}(p) = \\ &= (p+6)(p-2) - 2p(p-6) = -(p-0,8)(p-15,2). \end{aligned}$$

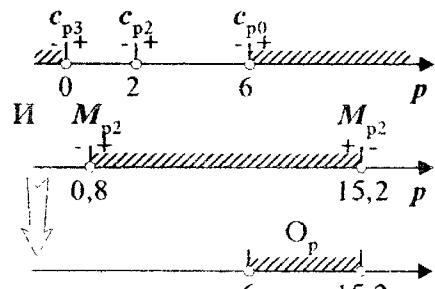


Рис. 4.3

Таким образом, РС устойчива при $p \in (6, 15,2)$.

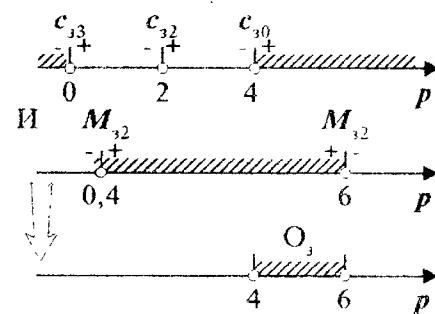
В ЗС $C_3(s, p) = \underbrace{4(p-4)}_{c_{30}(p)} + \underbrace{3(p+2)s}_{c_{31}(p)} + \underbrace{(p-2)s^2}_{c_{32}(p)} + \underbrace{2ps^3}_{c_{33}(p)}$, а область устойчивости ЗС O_3

удовлетворяет условиям (рис. 4.4)

$$\begin{aligned} & \left\{ c_{3i}(p) > 0 \quad \forall i=0,2,3 \right\} \cup \left\{ c_{3i}(p) < 0 \quad \forall i=0,2,3 \right\} \\ & \cap \\ & \left\{ M_{32}(p) > 0 \right\}. \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M_{32}(p) &= c_{31}(p)c_{32}(p) - c_{30}(p)c_{33}(p) = \\ &= 3(p+2)(p-2) - 8p(p-4) = -5(p-0,4)(p-6). \end{aligned}$$



Таким образом, ЗС устойчива при $p \in (4, 6)$.

Рис. 4.4

Общей области устойчивости РС и ЗС нет, так как $O_p \cap O_i = \emptyset$. [1]

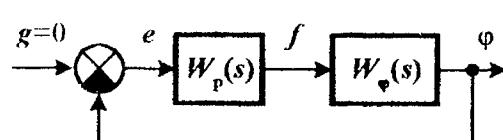


Рис. 4.5

Решение. Запишем ПФ объекта управления и регулятора:

$$W_\phi(s) = \frac{6s}{600 + 940s - 216s^2 - 100s^3} = \frac{B_\phi(s)}{D(s)}, \quad W_p(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3} = \frac{B_p(s)}{A_p(s)}.$$

Замкнутая система имеет ХП

$$C_3(s) = D(s)A_p(s) + B_\phi(s)B_p(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + c_3s^3 + c_4s^4 + c_5s^5 \quad (4.13a)$$

с коэффициентами $c_0 = 600a_0$, $c_1 = 940a_0 + 600a_1 + 6b_0$, $c_2 = -216a_0 + 940a_1 + 600a_2 + 6b_1$, $c_3 = -100a_0 - 216a_1 + 940a_2 + 6b_2$, $c_4 = -100a_1 - 216a_2$, $c_5 = -100a_2$.

В соответствии с ограничениями на ПФ регулятора ее полином $A_p(s)$ должен иметь коэффициенты a_i одного знака. Но тогда коэффициенты c_i не будут удовлетворять НУУ (4.7) при степенях $A_p(s)$, равных 1 и 2. Единственно возможная структура ПФ регулятора допускает полином $A_p(s) = a_0$ нулевой степени. Полагая $a_0 = 1$, получим $W_p(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2$ и ХП замкнутой системы $C_3(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + c_3s^3$ с коэффициентами $c_0 = 600$, $c_1 = 940 + 6b_0$, $c_2 = -216 + 6b_1$, $c_3 = -100 + 6b_2$. Так как $c_0 = 600 > 0$ - константа, то НиДУУ ($c_2 > 0 \cap c_3 > 0 \cap M_2 = c_1c_2 - c_0c_3 > 0$) имеют вид

$$b_1 > 36, \quad b_2 > 16,7, \quad (b_0 + 156,7)(b_1 - 36) - 100(b_2 - 16,7) > 0. \quad (4.13b)$$

С целью графического изображения области устойчивости в пространстве параметров регулятора $\{b_0, b_1, b_2\}$ выполним перенос осей координат:

$$\beta_0 = b_0 + 156,7, \quad \beta_1 = b_1 - 36, \quad \beta_2 = b_2 - 16,7.$$

В новых осях область устойчивости удовлетворяет неравенствам $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_0\beta_1 > 100\beta_2$. Уравнение $\beta_0\beta_1 = 100\beta_2$ описывает поверхность гиперболического параболоида, а неравенства (4.13b) - область первого октанта пространства $\beta_0 \times \beta_1 \times \beta_2$ между поверхностью параболоида и плоскостью $\beta_2 = 0$ (рис. 4.6).

Регулятор с ПФ $W_p(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2$ требует измерения угла φ отклонения маятника от вертикали (если из области устойчивости выбрать $b_0 \neq 0$), обязательного измерения или вычисления угловой скорости $\dot{\varphi}'$ и углового ускорения $\ddot{\varphi}''$. [1]

Алгебраические критерии позволяют определить наличие в системе заданной степени устойчивости η . Для этого в (4.12) подставим $s=z-\eta$ и получим условия, при которых все корни полинома $C(z, \bar{p})$ лежат левее оси $\text{Im}\{z\}$, а полинома $C(s, \bar{p})$ - левее прямой $s=-\eta$ на плоскости s . Для получения **пределного быстродействия** t_{\min} необходимо найти максимальное значение $\eta > 0$, при котором область устойчивости полинома $C(z-\eta, \bar{p})$ стягивается в точку. Тогда оценка быстродействия $t_{\min} \approx 3/\eta_{\max}$.

Пример 4.5. Построить допустимую область изменения коэффициентов ПФ регулятора минимальной сложности $W_p(s)=b_1 s + b_2 s^2$ из примера 4.4, в которой ЗС устойчива с временем регулирования $t_p < 3$ с. Найти параметры регулятора, доставляющие системе предельное быстродействие.

Решение. По (3.36) определяем степень устойчивости $\eta = 3/t_p = 1$. Подставим $s=z-\eta$ в (4.13a):

$$C_s(z-\eta) = 600 + 940(z-\eta) + (6b_1 - 216)(z-\eta)^2 + (6b_2 - 100)(z-\eta)^3 = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + h_3 z^3, \quad (4.13b)$$

где $h_0 = 6b_1\eta^2 - 6b_2\eta^3 + 600 - 940\eta - 216\eta^2 + 100\eta^3$; $h_1 = -12b_1\eta + 18b_2\eta^2 + 940 + 432\eta - 300\eta^2$; $h_2 = 6b_1 - 18b_2\eta - 216 + 300\eta$; $h_3 = 6b_2 - 100$. Подставив $\eta=1$ в условия устойчивости

$$\{(h_0 > 0)(h_2 > 0)(h_3 > 0) \cup (h_0 < 0)(h_2 < 0)(h_3 < 0)\} \cap (h_1 h_2 > h_0 h_3),$$

получим область О, заштрихованную на рис. 4.7,а. Значению $\eta=0$ соответствует область устойчивости (ограничена пунктиром), целиком включающая область степени устойчивости $\eta=1$.

Для определения предельного быстродействия на рис. 4.7,б построена поверхность границы устойчивости полинома (4.13в) в пространстве параметров $b_1 \times b_2 \times \eta$. Поверхность имеет ступенчатый характер из-за того, что параметр η изменялся с шагом $\Delta\eta=0.1$. Основанию полученной «пирамиды» соответствует область устойчивости системы при $\eta=0$. Десятая ступенька ограничивает область степени устойчивости $\eta=1$. Вершина пирамиды в точке ($b_1 = 117,24$, $b_2 = 31,24$) соответствует максимальной степени устойчивости $\eta_{\max} = 1,9$ и предельному быстродействию $t_{\min} \approx 3/1,9 = 1,58$ с.

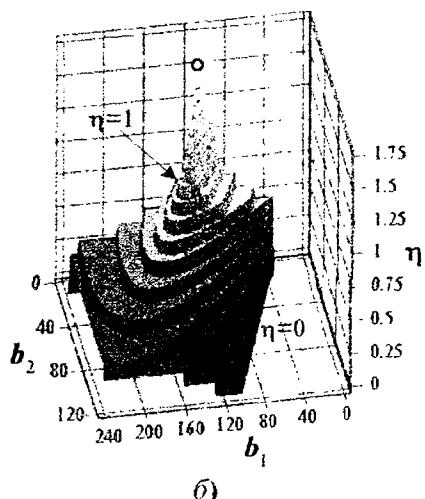
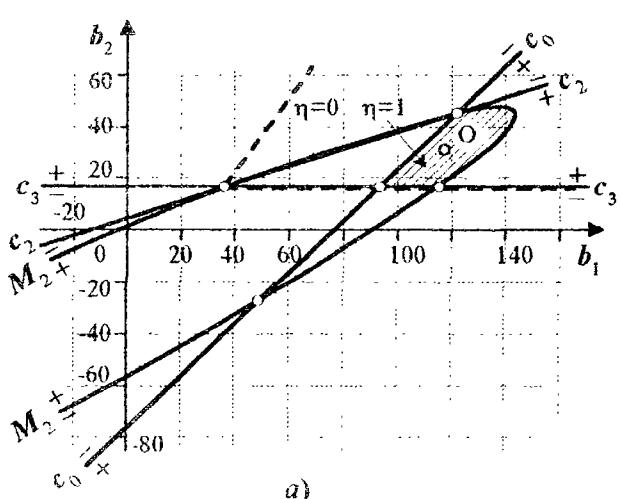


Рис. 4.7

4.5. ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МИХАЙЛОВА

Частотные критерии устойчивости работают с ХП $C(s)$ или ПФ $W(s)$ после построения необходимых ЧХ. Подставив в (4.6) $s=j\omega$, получим КЧХ $C(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)$ с четной ВЧХ $P(\omega)$ и нечетной МЧХ $Q(\omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\omega) = c_0 - c_2 \omega^2 + c_4 \omega^4 - \dots = \sum_{i=0}^{n_p} (-1)^i c_{2i} \omega^{2i}, \quad n_p = [n/2], \\ Q(\omega) = c_1 \omega - c_3 \omega^3 + c_5 \omega^5 - \dots = \sum_{i=0}^{n_q} (-1)^i c_{2i+1} \omega^{2i+1}, \quad n_q = [(n+1)/2]. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Годограф $C(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ называется *годографом Михайлова*. Он имеет следующие *предельные свойства*:

1) начальное значение $C(j0)=P(0)+jQ(0)=c_0+j0=c_0$ - годограф Михайлова начинается на действительной оси $\text{Re}\{C(j\omega)\}$;

2) конечное значение $C(j\infty) \rightarrow c_n j^n (\infty)^n$ - годограф стремится асимптотически в бесконечность под углом $\text{sgn}(c_n) \pi n / 2$ к действительной оси.

Выполнив разложение $C(s)=c_n \prod_{i=1}^n (s-s_i)$ и $C(j\omega)=c_n \prod_{i=1}^n (j\omega-s_i)$, найдем приращения (разности между конечными и начальными значениями) фазовых углов Δ_i комплексных функций $d_i(j\omega)=j\omega-s_i$ при изменении ω от 0 до ∞ для корней s_i различных типов (рис. 4.8):

- a) если s_i - действительный корень, то $\Delta_- = \pi/2 - 0 = \pi/2$ для левого корня и $\Delta_+ = \pi/2 - \pi = -\pi/2$ для правого;
- б) если s_i и \bar{s}_i - комплексно-сопряженная пара корней, то сумма приращений аргумента равна $2\Delta_- = \Delta_1 + \Delta_2 = \pi$ для левой пары и $2\Delta_+ = \Delta_3 + \Delta_4 = -\pi$ для правой.

Пусть полином $C(s)$ степени n имеет ровно n_+ правых, n_- левых корней и ни одного корня на мнимой оси. Тогда суммарные изменения аргумента комплексной функции $C(j\omega)$ в радианах $\Delta\phi$ и квадрантах Δk равны

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi = n_+ \Delta_+ + n_- \Delta_- = (n_- - n_+) \pi / 2 = (2n_- - n) \pi / 2 = (n - 2n_+) \pi / 2, \\ \Delta k = n_- - n_+ = 2n_- - n = n - 2n_+. \end{array} \right. \quad (4.15)$$

По этим формулам можно найти число правых и левых корней полинома $C(s)$, построив годограф $C(j\omega)$ и определив приращение фазового угла $\Delta \arg\{C(j\omega)\}$:

$$n_+ = n/2 - \Delta\phi/\pi = (n - \Delta k)/2, \quad n_- = n/2 + \Delta\phi/\pi = (n + \Delta k)/2. \quad (4.16)$$

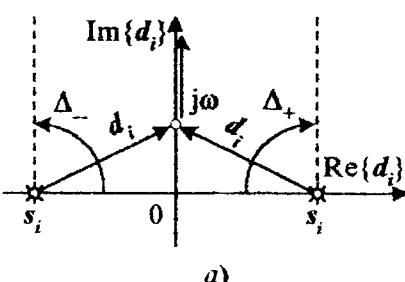
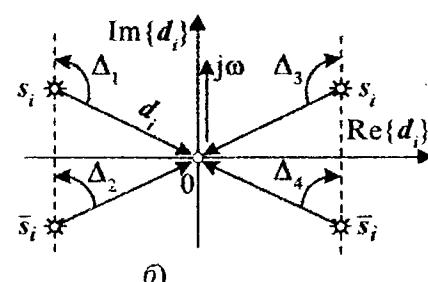


Рис. 4.8



Если $C(s)$ имеет корни на мнимой оси, то годограф Михайлова на частоте $\omega = 0$ (при $s_1 = 0$) или $\omega = \omega_k$ (при $s_{1,2} = \pm j\omega_k$) проходит через начало координат, а $\arg\{C(j\omega)\}$ не определен. В таких случаях ХП может быть нейтральным.

Для устойчивости полинома $C(s)$ потребуем, чтобы его годограф $C(j\omega)$ нигде не проходил через начало координат и было $n_+ = 0$. Тогда из (4.15) следует $\Delta\phi = n\pi/2$ или $\Delta k = n$. Отсюда получаем **критерий устойчивости Михайлова**: для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы изменение аргумента годографа ее ХП степени n было определенным и составляло $n\pi/2$ рад или n квадрантов при изменении частоты от 0 до ∞ . При выполнении критерия Михайлова годограф $C(j\omega)$, начинаясь на действительной оси, проходит последовательно n квадрантов против часовой стрелки, нигде не обращаясь в нуль.

Прохождение годографа через начало координат является **необходимым** (есть корни полинома на мнимой оси), но не **достаточным** (могут быть и правые корни) условием нейтральности полинома. Для разрешения граничной неопределенности используем **метод вариации коэффициентов ХП**, разрешив им изменяться ($c_i \pm \epsilon_i$, $\epsilon_i \approx 0$). При этом граничные корни ХП сдвинутся влево или вправо от мнимой оси, а годограф сместится от начала координат. На рис. 4.9 приведены годографы нейтрального ХП (1) третьей степени и неустойчивого ХП (2)

четвертой степени. Исходный годограф соответствует нейтральной системе, если хотя бы один из двух модифицированных годографов, изображенных пунктиром и не проходящих через начало координат, удовлетворяет условиям устойчивости. График 1 на рис. 4.9, а соответствует апериодической, а на рис. 4.9, б - колебательной нейтральности.

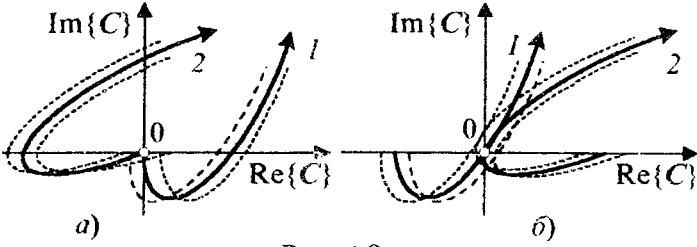


Рис. 4.9

Построим годографы для полинома $C_p(s, p) = p - 6 + (p + 6)s + (p - 2)s^2 + 2ps^3$ из примера 4.3 для значений параметра $p \in \{-6, 0, 8, 6, 10, 15, 20\}$ (рис. 4.10). В соответствии с рис. 4.3 лишь ХП $C_p(s, 10)$ устойчив, что подтверждается его годографом.

При $p = -6$ и $p = 20$ изменения аргумента годографа равны $\Delta k = -1$, что по (4.16) дает число правых корней $C_p(s, -6)$ и $C_p(s, 20)$, равное $n_+ = 2$, а соответствующие ХП делают неустойчивыми.

При $p = 0,8$ годограф проходит через начало координат, а небольшие изменения $p = 0,8 \pm 0,2$ дают $n_+ = 1$ ($p = 0,6$) и $n_+ = 3$ ($p = 1$). Следовательно, при $p = 0,8$ система является не нейтральной, а неустойчивой. При $p = 6$ годограф выходит из начала координат. Вариации параметра $p = 6 \pm 1$ смещают годограф влево (неустойчивость при $p = 5$) или вправо (устойчивость при $p = 7$). Следовательно, при $p = 6$ система нейтральна. При $p = 15,2$ годограф также претендует на нейтральность. Вариации $p = 15,2 \pm 2$ дают $n_+ = 0$ (устойчивость при $p = 17,2$) и $n_+ = 2$ (неустойчивость при $p = 13,2$). Следовательно, значение параметра $p = 15,2$ доставляет системе с ХП $C_p(s, 15,2)$ нейтральные свойства устойчивости.

Перейдем к математической формулировке критерия, позволяющей исследовать устойчивость как числовых полиномов $C(s)$, так и параметрических $C(s, \bar{p})$. Пронумеруем корни полиномов (4.14) в порядке чередования:

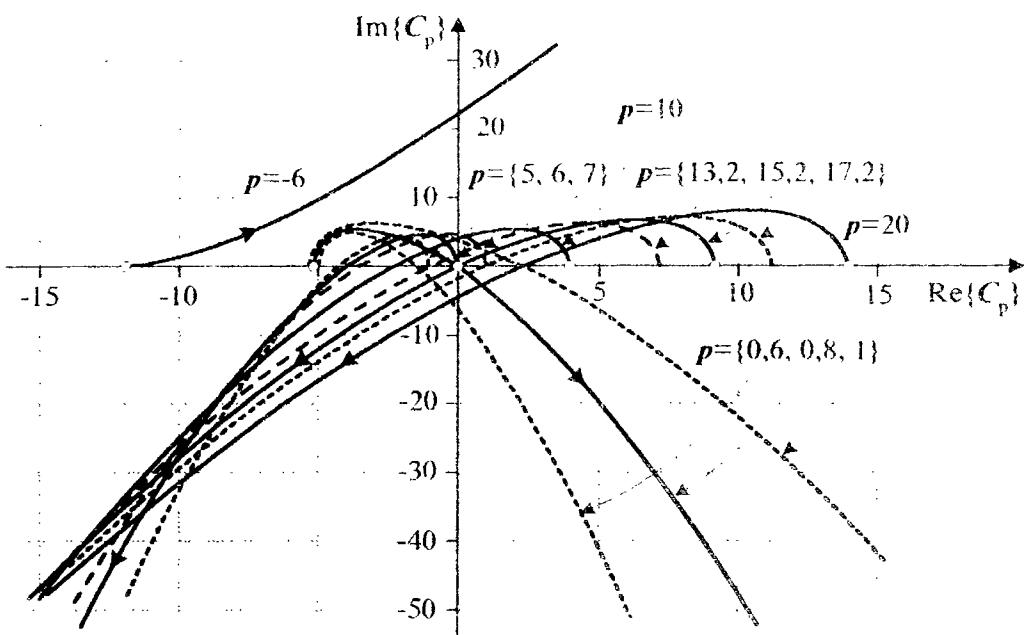


Рис. 4.10

$$P(\omega, \bar{p}) = 0 \text{ при } \omega = \omega_1(\bar{p}) < \omega_3(\bar{p}) < \dots < \omega_{2n_p-1}(\bar{p}),$$

$$Q(\omega, \bar{p}) = 0 \text{ при } \omega = \omega_0 = 0 < \omega_2(\bar{p}) < \dots < \omega_{2n_q}(\bar{p}).$$

При нахождении $\omega_i(\bar{p})$ решаются алгебраические уравнения относительно ω^2 и из полученных корней выбираются только допустимые:

$$\text{ОДЗ: } \omega_i^2(\bar{p}) > 0 \quad \forall i=1, n-1. \quad (4.17)$$

Требование к годографу начинаться на действительной оси удовлетворяется автоматически в силу действительности коэффициентов полинома $C(s)$: годограф начинается в точке c_0 . Требование к годографу поочередно пересекать оси при возрастании частоты ω от 0 до ∞ налагает на параметры полинома $n-1$ ограничений - неравенств, полностью поглощающих условия (4.17):

$$0 = \omega_0^2 < \omega_1^2(\bar{p}) < \dots < \omega_{n-1}^2(\bar{p}). \quad (4.18)$$

Требование к годографу вращаться против часовой стрелки в сторону увеличения аргумента $\phi(\omega) = \arctg(Q(\omega)/P(\omega))$ означает $\phi'(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \geq 0$, где

$$\phi'(\omega) = \frac{P^2(\omega)}{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \frac{Q'(\omega)P(\omega) - Q(\omega)P'(\omega)}{P^2(\omega)} = \frac{Q'(\omega)P(\omega) - Q(\omega)P'(\omega)}{|C(j\omega)|^2}.$$

Подставив сюда производные частотных функций (4.14) при $\omega = 0$, получим условие однозначности ненулевых коэффициентов ХП c_0 и c_1 :

$$\phi'(0) = c_1(\bar{p})c_0(\bar{p})/c_0^2(\bar{p}) = c_1(\bar{p})/c_0(\bar{p}) > 0 \Rightarrow c_0(\bar{p})c_1(\bar{p}) > 0. \quad (4.19)$$

Таким образом, получена математическая формулировка критерия устойчивости Михайлова: для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты c_0 и c_1 ее ХП $C(s)$ были ненулевыми и одного знака, а корни ω_i уравнения

ний $\operatorname{Re}\{C(j\omega)\}=0$ и $\operatorname{Im}\{C(j\omega)\}=0$ чередовались по возрастанию в соответствии с (4.18).

Для ХП первой степени НиДУУ (4.18) и (4.19) имеют вид $c_0c_1 > 0$, то есть коэффициенты c_0 и c_1 должны быть ненулевыми и одного знака. Для ХП второй степени $\{\omega_1^2 = c_0/c_2 > 0\} \cap \{c_0c_1 > 0\}$, то есть c_0, c_1 и c_2 должны быть ненулевыми и одного знака. Для ХП третьей степени $\{\omega_1^2 = c_0/c_2 > 0\} \cap \{c_0/c_2 < \omega_2^2 = c_1/c_3\} \cap \{c_0c_1 > 0\}$, то есть пары коэффициентов $\{c_0, c_1\}, \{c_0, c_2\}, \{c_2, c_3\}$ должны быть одного знака и $c_1c_2 > c_0c_3$. Таким образом, НиДУУ Михайлова совпадают с НиДУУ Рауса - Гурвица: коэффициенты c_i - ненулевые одного знака и $M_2 = c_1c_2 - c_0c_3 > 0$.

\checkmark **Пример 4.6.** Исследовать устойчивость числовых полиномов:

a) $C(s) = 5 + 14s + 14s^2 + 6s^3 + s^4: P(\omega) = 5 - 14\omega^2 + \omega^4 = 0$ при $\omega_1^2 = 0,37$ и $\omega_3^2 = 13,6$;

$Q(\omega) = 14\omega - 6\omega^3 = 0$ при $\omega_0^2 = 0$ и $\omega_2^2 = 2,33$. Так как корни $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ чередуются, а также $c_0 = 5 > 0$ и $c_1 = 14 > 0$, то годограф $C(j\omega)$ (кривая 1 на рис. 4.11) обходит последовательно $n=4$ квадранта против часовой стрелки, а полином устойчив;

b) $C(s) = 68 + 9s + 2s^2 + s^3: P(\omega) = 68 - 2\omega^2 = 0$ при

$\omega_1^2 = 34; Q(\omega) = 9\omega - \omega^3$ при $\omega_0^2 = 0$ и $\omega_2^2 = 9$. Так как корни $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ не чередуются, хотя $c_0 = 68 > 0$ и $c_1 = 9 > 0$, то годограф не обходит последовательно $n=3$ квадранта против часовой стрелки (кривая 2 на рис. 4.11), поэтому полином неустойчив. Изменение аргумента годографа $\Delta k = -1$. По нему определяем, что из трех корней полинома число правых корней $n_+ = (3+1)/2 = 2$, а левых $n_- = (3-1)/2 = 1$. \square

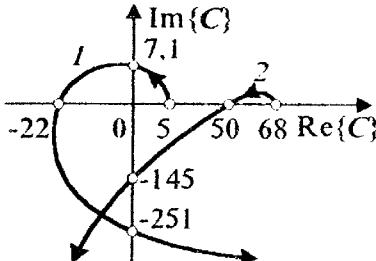


Рис. 4.11

\checkmark **Пример 4.7.** Исследовать, при каких значениях параметров K, T_1 и T_2 разомкнутая и замкнутая единичной ООС системы будут устойчивыми. Передаточная функция РС есть $W_p(s) = K/s(1+T_1s)(1+T_2s)$.

Решение. Характеристический полином РС равен

$$C_p(s) = s(1+T_1s)(1+T_2s) = s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1T_2s^3.$$

Так как $c_{p0} = 0$, то один полюс $W_p(s)$ - нулевой, поэтому РС устойчивой быть не может. Она может быть нейтральной, если полином $\bar{C}_p(s) = C_p(s)/s = 1 + (T_1 + T_2)s + T_1T_2s^2$ устойчив. Определим корни его вещественной и мнимой функций: $Q(\omega) = (T_1 + T_2)\omega = 0$ при $\omega_0 = 0$; $P(\omega) = 1 - T_1T_2\omega^2 = 0$ при $\omega_3^2 = 1/T_1T_2$. Критерий Михайлова (4.18), (4.19) дает $\{1/T_1T_2 > 0\} \cap \{T_1 + T_2 > 0\}$: при $T_1 > 0$ и $T_2 > 0$ полином $\bar{C}_p(s)$ устойчив, а РС нейтральна. При остальных T_1 и T_2 она неустойчива.

В ЗС с единичной ООС $C_3(s) = K + s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1T_2s^3, Q(\omega) = \omega - T_1T_2\omega^3 = 0$ при $\omega_0 = 0, \omega_3^2 = 1/T_1T_2; P(\omega) = K - (T_1 + T_2)\omega^2 = 0$ при $\omega_1^2 = K/(T_1 + T_2)$. Критерий Михайлова дает условия устойчивости $\{T_1 > 0\} \cap \{T_2 > 0\} \cap \{0 < K < K_{rp}\}$. Превышение коэффициентом K граничного значения $K_{rp} = 1/T_1 + 1/T_2$ ведет к неустойчивости ЗС.

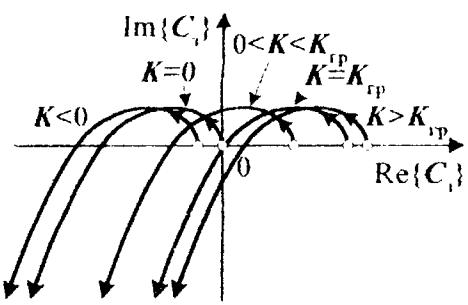


Рис. 4.12

Годографы $C_1(j\omega)$, построенные на рис. 4.12 для различных значений K , удовлетворяют правилу огибания начала координат на три квадранта против часовой стрелки только при $0 < K < K_{rp}$. При $K=0$ годограф выходит из начала координат и соответствует апериодической границе устойчивости, а при $K=K_{rp}$ пересекает его - это колебательная граница устойчивости.

4.6. ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА

Метод проверки устойчивости, разработанный Г. Найквистом, определяет устойчивость *замкнутой* системы по ЧХ *разомкнутой*. Метод широко применяется в радиоавтоматике благодаря его простоте и возможности использовать экспериментально полученные ЧХ фактически без знания ПФ. Критерий имеет простой физический смысл и дает условия, при которых отрицательная ОС превращается в положительную и делает ЗС неустойчивой.

4.6.1. Вывод критерия Найквиста

Рассмотрим систему, образованную замыканием объекта с ПФ $W(s) = B(s)/A(s)$ контуром ООС, имеющим ПФ $W_0(s) = B_0(s)/A_0(s)$ (рис. 4.13). Замкнутая система имеет ХП $C_3(s) = A(s)A_0(s) + B(s)B_0(s)$ и ПФ $W_3(s) = B(s)A_0(s)/C_3(s)$ от входа x до выхода y . Временно разорвем ООС в точке z и определим *контурные* ПФ и ХП разомкнутого контура от входа x до выхода z :

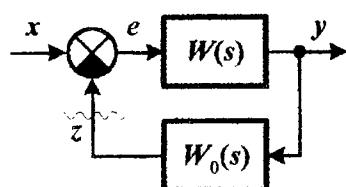


Рис. 4.13

$$W_k(s) = W(s)W_0(s) = \frac{B(s)B_0(s)}{C_k(s)}, \quad C_k(s) = A(s)A_0(s).$$

Сформируем операторную функцию Найквиста:

$$N(s) = 1 + W_k(s) = \frac{A(s)A_0(s) + B(s)B_0(s)}{A(s)A_0(s)} = \frac{C_3(s)}{C_k(s)}. \quad (4.20)$$

Вектор Найквиста $N(j\omega) = 1 + W_k(j\omega)$ соединяет на комплексной плоскости *точку Найквиста* $N = (-1, j0)$ с точкой годографа $W_k(j\omega)$ (рис. 4.14). Допустим, ПФ $W_k(s)$ имеет n_+ , а ПФ $W_3(s)$ - n_{3+} правых полюсов. Из (4.20) и (4.15) получим изменение аргумента вектора Найквиста в квадрантах при изменении частоты ω от 0 до ∞ :

$$\Delta k_N = \Delta k_3 - \Delta k = (n - 2n_{3+}) - (n - 2n_+) = 2(n_+ - n_{3+}). \quad (4.21)$$

Построив годограф $C_k(j\omega)$, определим изменение его аргумента Δk , а по (4.16) - число n_+ правых корней $C_k(s)$.

Далее потребуем, чтобы ХП ЗС $C_3(s)$ был устойчивым, то есть не имел правых корней ($n_{3+}=0$). Тогда из (4.21) следует *критерий устойчивости Найквиста*: для устойчивости

ЗС с контурной ПФ $W_k(s)$, имеющей n_+ правых полюсов, необходимо и достаточно, чтобы вектор Найквиста $N(j\omega) = 1 + W_k(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ имел изменение аргумента $2n_+$ квадрантов ($180^\circ n_+$ или πn_+ рад).

Если критерий Найквиста не выполняется, то ЗС неустойчива или нейтральна. В первом случае число правых полюсов ее ПФ можно определить по (4.21) и (4.16):

$$n_{++} - n_+ - \Delta k_N / 2 = (n - \Delta k - \Delta k_i) / 2.$$

Прохождение годографа через точку N является **необходимым** (есть полюсы $W_k(s)$ на мнимой оси), но **не достаточным** (могут быть и правые корни) условием **нейтральности** ЗС. Для разрешения граничной неопределенности используем **метод вариации коэффициентов ПФ**, разрешив им изменяться в малых окрестностях. При этом граничные полюсы ПФ отойдут от мнимой оси, а годограф сместится от точки Найквиста. Исходный годограф соответствует нейтральной системе, если хотя бы один из двух модифицированных годографов, изображенных на рис. 4.15 пунктиром и не проходящих через N , удовлетворяет условиям устойчивости.

Назовем **охватыванием точки** изменение угла поворота вектора, проведенного из этой точки, на четыре квадранта (360° или 2π рад) против часовой стрелки. Тогда условие изменения аргумента вектора N на $2n_+$ квадрантов можно заменить альтернативным условием **охватывания годографом $W_k(j\omega)$ точки Найквиста ровно $n_+/2$ раз**.

Третье альтернативное условие устойчивости использует **значения переходов** годографа $W_k(j\omega)$ через действительную ось левее точки N (рис. 4.16). Знак перехода равен знаку изменения аргумента. Очевидно, что число охватов годографом точки N равно сумме переходов им через действительную ось левее этой точки. Таким образом, мы получили четвертую альтернативную формулировку частотного критерия устойчивости Найквиста, не требующую подсчета изменения аргумента вектора N : **для устойчивости ЗС с контурной ПФ $W_k(s)$, имеющей n_+ правых полюсов, необходимо и достаточно, чтобы годограф разомкнутого контура $W_k(j\omega)$ пересекал действительную ось левее точки Найквиста в сумме $n_+/2$ раз**.

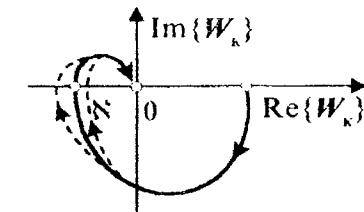


Рис. 4.15

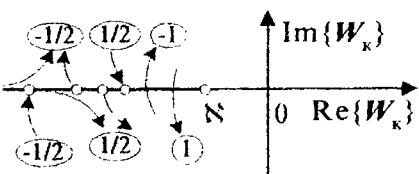


Рис. 4.16

На что надо обратить внимание, применяя критерий Найквиста?

1. Число правых полюсов контурной ПФ $W_k(s)$ можно найти по (4.16), построив годограф Михайлова $C_k(j\omega)$: $n_+ = (n - \Delta k) / 2$, где Δk — изменение угла поворота годографа при изменении частоты от 0 до ∞ .

2. Особенно аккуратно надо строить годограф $W_k(j\omega)$ в окрестности точки Найквиста. Если годограф проходит точно через эту точку и при небольшой вариации формы удовлетворяет критериям устойчивости, то ЗС находится на границе устойчивости.

3. Пересечения годографом действительной оси правее точки Найквиста в сумме переходов не учитываются.

4. Если ПФ $W_k(s) = B_k(s)/A_k(s)$ имеет порядок астатизма v , то $A_k(s) = s^v D_k(s)$, где $D_k(s) = a_v + a_{v+1}s + \dots + a_n s^{n-v}$, и при $\omega \rightarrow 0$ годограф $W_k(j\omega)$ начинается в бесконечности под углом $\phi(0) = (\text{sgn}(b_0/a_v) - v - 1)90^\circ$, что затрудняет определение охвата годографом точки Найквиста. Для преодоления этого заменим прямую линию $s = j\omega$ при

$0 \leq \omega \leq \epsilon$ на начальном участке мнимой оси дугой окружности радиуса ϵ (рис. 4.17, а): $s = \epsilon e^{j\psi}$, где $\epsilon \rightarrow 0$; $0 \leq \psi = \omega\pi/2\epsilon \leq \pi/2$. При этом полюс $s_1 = 0$ должен оставаться левее направления обхода. Теперь годограф при $0 \leq \omega \leq \epsilon$ имеет вид

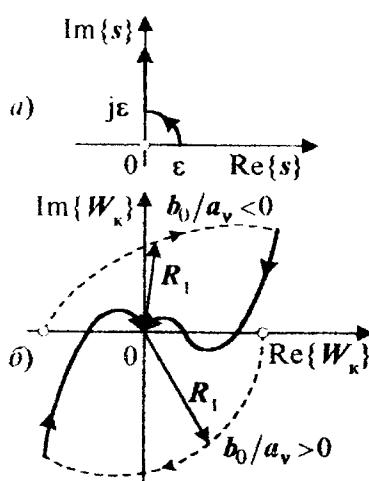


Рис. 4.17

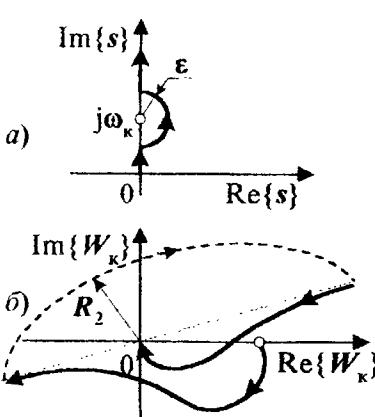


Рис. 4.18

$$W_k(j\omega) = \frac{B_k(j\omega)}{\epsilon^v D_k(j\omega)} e^{-j\omega\pi/2\epsilon} \approx \frac{b_0}{\epsilon^v a_v} e^{-j\omega\pi/2\epsilon}.$$

На малых частотах он представляет собой *дугу окружности* радиуса $R_1 = |b_0/\epsilon^v a_v|$, начинающуюся на положительной (при $b_0/a_v > 0$) либо отрицательной (при $b_0/a_v < 0$) действительной полуоси $\text{Re}\{W_k\}$ и описывающую угол $-\pi/2$ *по часовой стрелке* (рис. 4.17, б). В пределе при $\epsilon \rightarrow 0$ радиус $R_1 \rightarrow \infty$, но начальное направление и угол поворота сохраняются. Принято такую дугу бесконечного радиуса изображать пунктиром и называть *пунктирным дополнением* астатического годографа.

5. Если $W_k(s)$ имеет пару мнимых полюсов $s_{1,2} = \pm j\omega_k$, то $A_k(s) = (s^2 + \omega_k^2)G_k(s)$ и при $\omega \rightarrow 0$ годограф $W_k(j\omega)$ разрывается на две ветви, асимптотически сходящиеся в бесконечности к прямой, проходящей под углом $\phi(\omega_k) = \arg\{B_k(j\omega_k)/G_k(j\omega_k)\}$. Как и в случае астатической ПФ, заменим $s = j\omega$ в малой ϵ -окрестности частоты ω_k дугой окружности радиуса $\epsilon \rightarrow 0$ (рис. 4.18, а): $s = j\omega_k + \epsilon e^{j\psi}$, где $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$. При этом полюс $s_1 = j\omega_k$ должен оставаться левее направления обхода.

Годограф $W_k(j\omega)$ на частотах $\omega_k - \epsilon \leq \omega \leq \omega_k + \epsilon$ представляет собой *дугу полуокружности* радиуса R_2 , описывающую угол 180° *по часовой стрелке* от одного конца асимптоты до противоположного (рис. 4.18, б). В пределе при $\epsilon \rightarrow 0$ радиус *колебательного пунктирного дополнения* $R_2 \rightarrow \infty$.

Два последних замечания позволяют сделать следующие *выводы*.

Если пунктирное дополнение годографа астатической или колебательной ПФ начинается на действительной оси левее точки $(-1, j0)$ или пересекает ее, то такие отрицательные переходы должны быть включены в общую сумму переходов годографа.

Во многих учебниках по автоматике истинными критериями устойчивости Найквиста объявляются формулировки, которые являются лишь частными случаями рассмотренных выше альтернативных форм этого критерия:

1) при единичной ООС ($W_0(s)=1$) контурная ПФ $W_k(s)$ равна ПФ РС $W(s)$. С ней и работает критерий Найквиста;

2) если контурная ПФ не имеет правых полюсов, то есть $n_+ = 0$, то годограф $W_k(j\omega)$ должен иметь нулевую сумму переходов через действительную ось левее точки $(-1, j0)$, то есть не охватывать эту точку.

4.6.2. Логарифмический критерий устойчивости Найквиста

Логарифмическая форма критерия Найквиста основана на однозначном соответствии амплитудно-фазовой и логарифмических ЧХ. Интервалу $(-\infty, -1)$ оси $\text{Re}\{W_k(j\omega)\}$ соответствуют значения фазы $\phi = \pi + 2\pi k$ и амплитуды $A > 1$, то есть $L > 0$. Переходу годографа через действительную ось левее точки Найквиста соответствует пересечение ЛФЧХ $\Phi_k(\omega)$ уровней $\pi \pm 2\pi k$ только при $L_k(\omega) > 0$. Знаки перехода и изменения фазы совпадают. Если $W_k(s)$ имеет нулевые или мнимые полюсы, то в разрывах ЛФЧХ проводятся пунктирные дополнения сверху вниз - в сторону уменьшения фазы. После построения ЛЧХ и выделения интервалов частот, где $L_k(\omega) > 0$, необходимо подсчитать на этих интервалах сумму переходов $\Phi_k(\omega)$ через граничные уровни $\phi_{rp} = 180^\circ \pm 360^\circ k$, руководствуясь рис. 4.19.

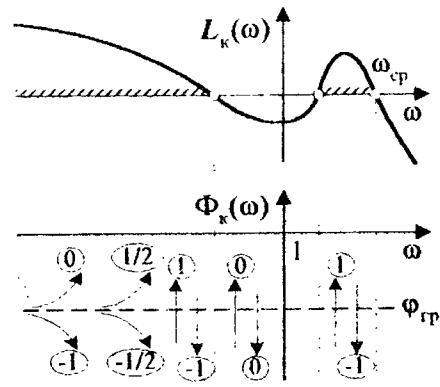


Рис. 4.19

Логарифмический критерий устойчивости Найквиста: для устойчивости ЗС с контурной ПФ $W_k(s)$, имеющей n_+ правых полюсов, необходимо и достаточно, чтобы на интервалах частот, где $L_k(\omega) > 0$, число пересечений $\Phi_k(\omega)$ граничных уровней фазы $\phi_{rp} = 180^\circ \pm 360^\circ k$ составляло в сумме $n_+/2$. При устойчивом разомкнутом контуре логарифмический критерий Найквиста требует, чтобы сумма фазовых переходов через ϕ_{rp} при $L_k(\omega) > 0$ была нулевой либо этих переходов не было совсем.

Частота последнего перехода $L_k(\omega)$ вниз через ось частот называется **частотой среза** ω_{cp} . Она определяет рабочий диапазон частот системы, или **полосу пропускания**. Высокочастотные гармоники уставки с частотами $\omega_g > \omega_{cp}$ отрабатываются системой тем хуже, чем меньше значение $L_k(\omega_g) < 0$. **Частота среза определяет предельное быстродействие ЗС**, а именно: время регулирования t_p ограничено снизу неравенством, аналогичным (3.43а):

$$t_p \geq \pi / \omega_{cp} \text{ (с).} \quad (4.22)$$

Поведение ЛЧХ вблизи критических переходов $L_k(\omega) = 0$ и $\Phi_k(\omega) = \phi_{rp}$ определяет устойчивость ЗС. Частоту перехода ЛФЧХ через граничный фазовый уровень назовем **граничной частотой устойчивости** ω_{rp} . Если ПФ $W_k(s)$ состоит только из минимально-фазовых типовых звеньев и имеет порядок $n < 5$, то частота ω_{rp} может быть только одна.

При совпадении частот $\omega_{cp} = \omega_{rp}$ ЗС находится на границе устойчивости, если небольшое смещение $L_k(\omega)$ вниз или вверх дает необходимую для ее устойчивости сумму переходов $\Phi_k(\omega)$ через уровень ϕ_{rp} . Сформулируем **логарифмический критерий Найквиста для устойчивых разомкнутых систем** в виде следующих математических условий:

$$\begin{cases} \{\omega_{cp} < \omega_{rp}\} \cap \{L_k(\omega_{rp}) < 0\}, \\ \omega_{cp}: L_k(\omega_{cp}) = 0, \omega_{rp}: \Phi_k(\omega_{rp}) = \phi_{rp}. \end{cases} \quad (4.23)$$

Пример 4.8. Определить устойчивость ЗС с единичной ООС и ПФ разомкнутого контура $W_p(s) = (100s - s^2) / (1 + 2s + 2s^2 + 40s^3)$.

Решение. Получим число правых полюсов $W_p(s)$ по критерию устойчивости Михайлова: $C_p(s) = 1 + 2s + 2s^2 + 40s^3$, $P(\omega) = 1 - 2\omega^2 = 0$ при $\omega_1^2 = 0,5$, $Q(\omega) = 2\omega - 40\omega^3 = 0$ при

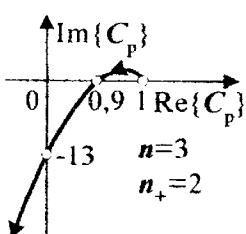


Рис. 4.20

$\omega_0^2 = 0$ и $\omega_2^2 = 0,05$. Так как коэффициенты $c_0 = 1$ и $c_1 = 2$ - ненулевые и одного знака, но не выполняются условия (4.18) чередования частот $0 < \omega_1 < \omega_2$, то РС неустойчива. Построив годограф Михайлова $C_p(j\omega)$ (рис. 4.20), определим изменение его аргумента $\Delta k = -1$ и по (4.16) число правых полюсов РС $n_+ = (3+1)/2 = 2$. Тот же результат получим по критерию Рауса - Гурвица, подсчитав число $n_+ = 2$ инверсий знака в последовательности (4.10)

$$\{c_3, M_1, M_1 M_2, M_2 M_3\} = \{40, 2, -72, 1296\}.$$

Для определения устойчивости ЗС по критерию Найквиста разложим контурную ПФ $W_k(s) = W_p(s) = Ks(1 - T_3s) / (1 + T_1s)(1 - 2\xi_2 T_2 s + T_2^2 s^2)$ на типовые звенья с параметрами $K = 100$, $T_1 = 4$, $\omega_1 = 0,25$, $T_2 = 3,16$, $\omega_2 = 0,316$, $\xi_2 = 0,316$, $T_3 = 0,01$, $\omega_3 = 100$. Построим ЛЧХ и годограф для $W_k(s)$ (рис. 4.21). Единственный переход $\Phi_k(\omega)$ через уровень $\Phi_{rp} = 180^\circ$ на интервале положительности $L_k(\omega)$ и переход годографа $W_k(j\omega)$ через действительную ось левее точки $(-1, j0)$ равны 1. По критерию Найквиста они должны быть равны $n_+/2 = 1$. Следовательно, ЗС устойчива. \square

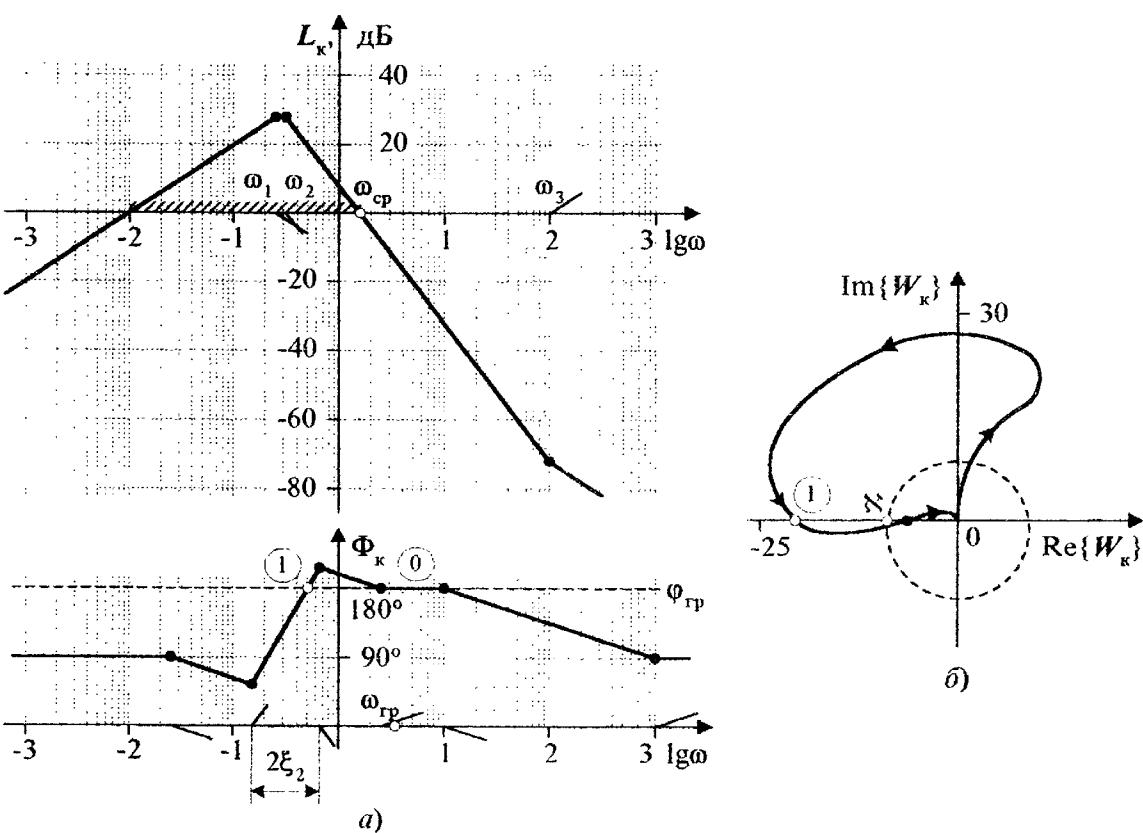


Рис. 4.21

Пример 4.9. Определить устойчивость ЗС с прямой и обратной ПФ $W(s) = (1+0,25s^2)/(1+s)(1+s^2)$ и $W_0(s) = 1/s$.

Решение. Разложим контурную ПФ $W_k(s) = W(s)W_0(s) = (1+T_2^2s^2)/s(1+T_1s)(1+T_2^2s^2)$

на типовые звенья с параметрами $T_1 = 1$, $\omega_1 = 1$, $T_2 = 1$, $\omega_2 = 1$, $\xi_2 = 0$, $T_3 = 0,5$, $\omega_3 = 2$, $\xi_3 = 0$. Звенья с ПФ $1/(1+T_2^2s^2)$ и $1+T_3^2s^2$ разрывают ЛАЧХ и ЛФЧХ (рис. 4.22,а) на частотах ω_2 и ω_3 . Переход $\Phi_k(\omega_2)$ через уровень $\varphi_{rp} = -180^\circ$ равен -1. Звено с колебательной ПФ $1/(1+T_2^2s^2)$ разрывает годограф (рис. 4.22,б) на частоте ω_2 на две ветви. Пунктирное дополнение разрыва дает переход, равный -1.

Таким образом, контурная ПФ не имеет правых полюсов, а сумма переходов ненулевая. Следовательно, ЗС неустойчива. Если строить годограф без пунктирного дополнения, то сумма переходов будет нулевой, что даст неверное заключение об устойчивости системы. Для проверки исследуем ее устойчивость по точному алгебраическому критерию Льенара - Шипара:

$$C_k(s) = 1 + 0,25s^2 + s(1+s)(1+s^2) = 1 + s + 1,25s^2 + s^3 + s^4,$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1,25 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1,25 & 1 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1,25 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,25 - 1 - 1 = -0,75.$$

Все коэффициенты ХП положительны, и $M_3 < 0$, значит, ХП и ЗС неустойчивы. [1]

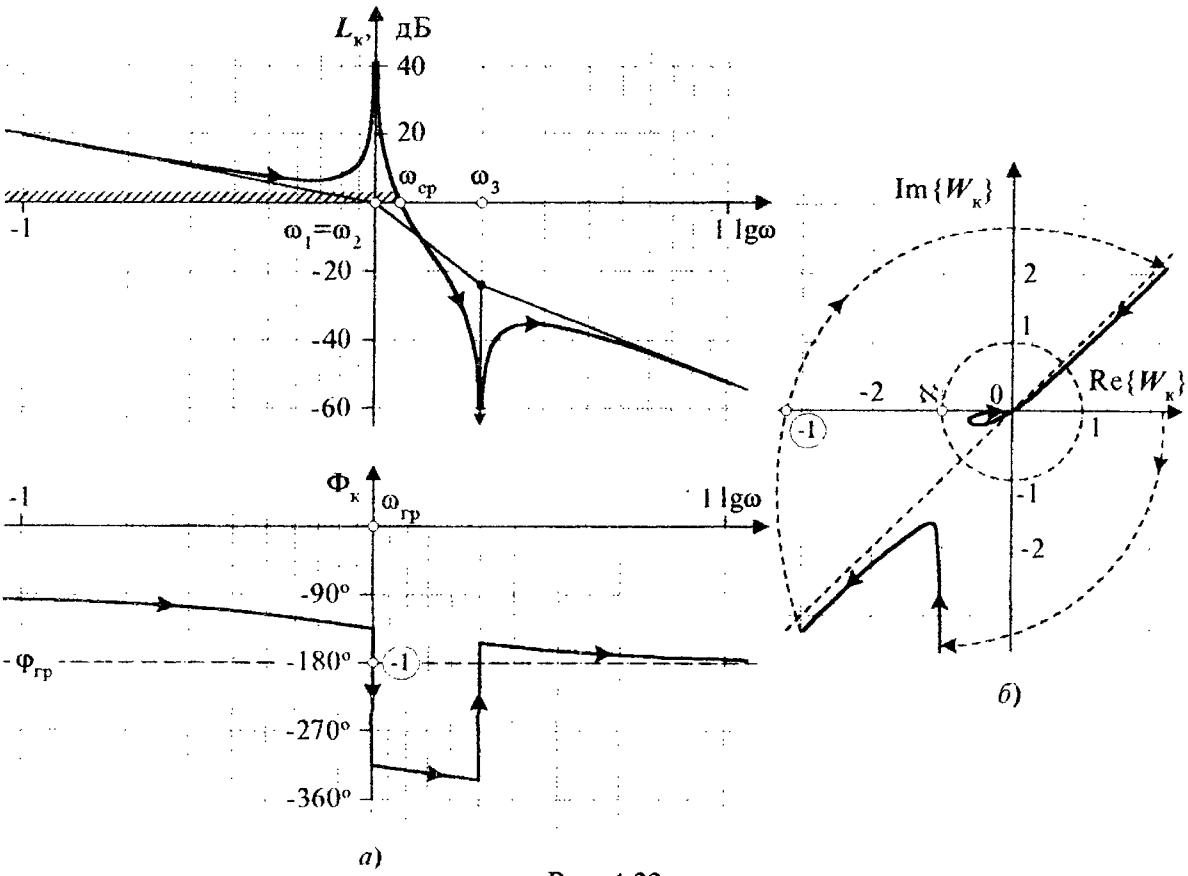


Рис. 4.22

IV) Пример 4.10. Исследовать устойчивость ЗС с прямой ПФ $W(s) = \frac{10s}{1+6s+5s^2}$ в зависимости от коэффициента ООС $W_0(s) = K$.

Решение. Разомкнутая система устойчива ($\mu_1 > 0$), так как имеет левые полюсы $s_1 = -1/T_1$ и $s_2 = -1/T_2$ контурной ПФ $W_k(s) = 10K(1-T_3s)/(1+T_1s)(1+T_2s)$ с параметрами $T_1 = 5$, $\omega_1 = 0,2$, $T_2 = 1$, $\omega_2 = 1$, $T_3 = 0,1$, $\omega_3 = 10$. Влияние параметра K на ЛЧХ заключается в подъеме или спуске ЛАЧХ $L_k(\omega)$ без изменения ЛФЧХ $\Phi_k(\omega)$. При инверсии знака K ЛФЧХ сдвигается по вертикали на 180° без изменения ЛАЧХ. Влияние K на годограф $W_k(j\omega)$ заключается в изменении модулей его точек относительно начала координат при сохранении аргументов, как при надувании воздушного шара. При инверсии знака K годограф поворачивается на 180° .

Построим АЛЧХ и годографы для $K=1$ и $K=-1$ (рис. 4.23).

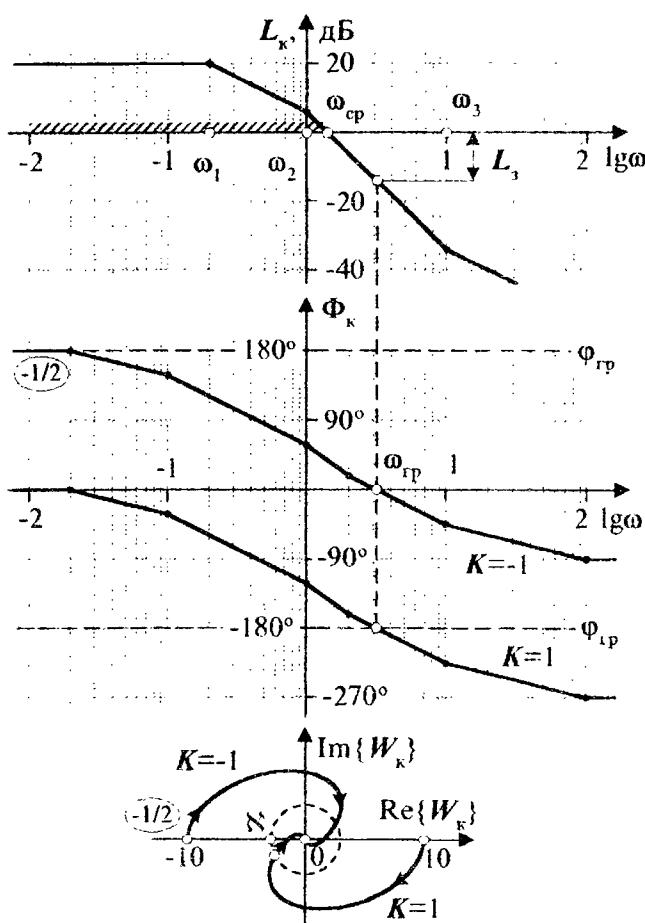


Рис. 4.23

При $K=-1$ годограф, начинаясь в точке $(-10, j0)$ левее точки Найквиста, дает $-1/2$ перехода, следовательно, ЗС неустойчива. Чтобы получить нейтральный годограф, проходящий через N , параметр K необходимо уменьшить в 10 раз.

Вывод. По логарифмическому критерию Найквиста приближенно определили, что ЗС устойчива при $-0,1 < K < 5$. Точный ответ дает критерий Рауса - Гурвица для ХП второго порядка $C_1(s) = K(10-s)+(1+s)(1+5s)=1+10K+(6-K)s+5s^2 : \{1+10K>0\} \cap \{6-K>0\}$. откуда получаем $-0,1 < K < 6$. \square

При $K=1$ значение ЛФЧХ $\Phi_{tp} = -180^\circ$ достигается на частоте $\lg(\omega_{tp}) = 0,5$ с запасом по амплитуде $L_3 = 14$ дБ, а на частотах, меньших $\lg(\omega_{cp}) = 0,15$, где $L_k(\omega) > 0$, переходов ЛФЧХ через Φ_{tp} нет, поэтому ЗС устойчива. Подняв ЛАЧХ на 14 дБ, то есть увеличив K в $10^{14/20} = 5$ раз, получим границу устойчивости ЗС. Дальнейшее увеличение K приводит к ее неустойчивости.

При $K=1$ годограф не охватывает точку Найквиста (и не должен ее охватывать), поэтому ЗС устойчива. При $\Phi_k = -180^\circ$ модуль годографа равен $0,167 = 1/6 < 1$. Увеличив K в 6 раз, получим граничный годограф, проходящий через точку N . Дальнейшее увеличение K дает неустойчивый годограф, охватывающий N .

При $K=-1$ ЛФЧХ начинается с уровня $\Phi_{tp} = 180^\circ$ при $L_k(\omega) = 20 > 0$, что дает $-1/2$ перехода и делает ЗС неустойчивой. Опустив ЛАЧХ на 20 дБ (уменьшив K в 10 раз), получим граничную, а при $-0,1 < K < 0$ - устойчивую ЗС.

Логарифмический критерий, пожалуй, *единственный*, пригодный для исследования устойчивости систем, ПФ которых неизвестны, но могут быть экспериментально получены ЛЧХ, например, анализатором спектра или с помощью САПР электронных схем (программа MicroCAP или ей подобные). Если нельзя экспериментально снять ЛФЧХ $\Phi(\omega)$, то ее можно восстановить по ЛАЧХ $L_a(\omega)$ при условии, что ПФ $W_k(s)$ не имеет правых полей и полюсов, то есть является **минимально-фазовой**.

Методика восстановления минимально-фазовой ЛФЧХ $\Phi(\omega)$ и ПФ $W(s)$ по ЛАЧХ $L(\omega)$ следующая.

1. Логарифмическая АЧХ заменяется кусочно-линейной АЛАЧХ $L_a(\omega)$, отрезки которой горизонтальны или имеют наклоны, кратные ± 20 дБ/дек.

2. По начальному участку $L_a(\omega)$ и изменениям наклонов ее отрезков определяются ПФ $W_i(\omega)$ типовых звеньев, произведение которых дает ПФ системы $W(s)$.

3. С помощью табл. 2.2 определяются ЛФЧХ $\Phi_i(\omega)$ типовых звеньев, сумма которых дает ЛФЧХ системы $\Phi(\omega)$.

▷ **Пример 4.11.** По экспериментальной ЛАЧХ усилителя звуковой частоты (рис. 4.24,а) определить ПФ усилителя и построить его ЛФЧХ.

Решение. Так как размерность частоты f - герц, то постоянные времени типовых звеньев ПФ усилителя определяются по частотам сопряжения f_i как $T_i = 1/2\pi f_i$ (с).

Обозначим некоторые характерные точки ЛАЧХ буквами А-Г. Начальный участок $L(f)$, асимптота которого $L_a(f)$ проходит через точку А ($f_0 \approx 10$ Гц, $L_0 \approx 0$ дБ) с наклоном 20 дБ/дек, дает ПФ $W_0(s) = Ks$, где $20\lg(K) = L(\omega = 1) = L(f = 1/2\pi) = L_0 - 20\lg(2\pi f_0)$, откуда $K = 1/20\pi = 0,016$.

В точке В ($f_1 \approx 50$ Гц, $L_1 \approx -6$ дБ) имеется впадина. Значит, в ПФ усилителя есть форсирующее звено $W_1(s) = 1 + 2\xi_1 T_1 s + T_1^2 s^2$ с постоянной времени $T_1 = 1/2\pi f_1 = 3,18$ мс, а коэффициент демпфирования ξ_1 определяется по (2.3): $20\lg(1/2\xi_1) = L_a(f_1) - L(f_1) = 20$ дБ, откуда $\xi_1 = 0,05$. Вправо от точки $L_a(f_1) = 14$ дБ проводим асимптоту $L_a(f)$ с наклоном $20+40=60$ дБ/дек.

В точке С ($f_2 \approx 100$ Гц, $L_2 \approx 40$ дБ) у ЛАЧХ наблюдается резонансный пик. Значит, в ПФ усилителя имеется колебательное звено $W_2(s) = 1/(1 + 2\xi_2 T_2 s + T_2^2 s^2)$ с параметрами $T_2 = 1/2\pi f_2 = 1,6$ мс и $\xi_2 = 10^{-0.05(L(f_2) - L_a(f_2))} / 2 = 10^{-0.4} / 2 = 0,2$. Вправо от точки $L_a(f_2) = 32$ дБ проводим асимптоту с наклоном 20 дБ/дек.

В точке Д ЛАЧХ $L(f)$ сходится к горизонтальной асимптоте 40 дБ, которая между точками С и Д сопрягается с уже построенной АЛАЧХ на частоте $f_3 \approx 250$ Гц. Типовое звено, уменьшающее наклон на 20 дБ/дек, имеет ПФ $W_3(s) = 1/(1 + T_3 s)$ с постоянной времени $T_3 = 1/2\pi f_3 = 0,64$ мс.

В точке Е ($f_4 \approx 3,16$ кГц, $L_4 \approx 45$ дБ) ЛАЧХ имеет резонансный пик. Значит, в ПФ усилителя имеется колебательное звено $W_4(s) = 1/(1 + 2\xi_4 T_4 s + T_4^2 s^2)$ с параметрами $T_4 = 1/2\pi f_4 = 50$ мкс и $\xi_4 = 10^{-0.25} / 2 = 0,28$. Вправо от точки $L_a(f_4) = 40$ дБ проводим асимптоту с наклоном -40 дБ/дек.

Конечный участок ЛАЧХ имеет в точке Г ($f_6 \approx 20$ кГц, $L_6 \approx 0$ дБ) установившийся наклон -60 дБ/дек. Эта асимптота пересекается с уже построенной АЛАЧХ на частоте $f_5 \approx 10$ кГц. Следовательно, последнее типовое звено есть $W_5(s) = 1/(1 + T_5 s)$ с постоянной

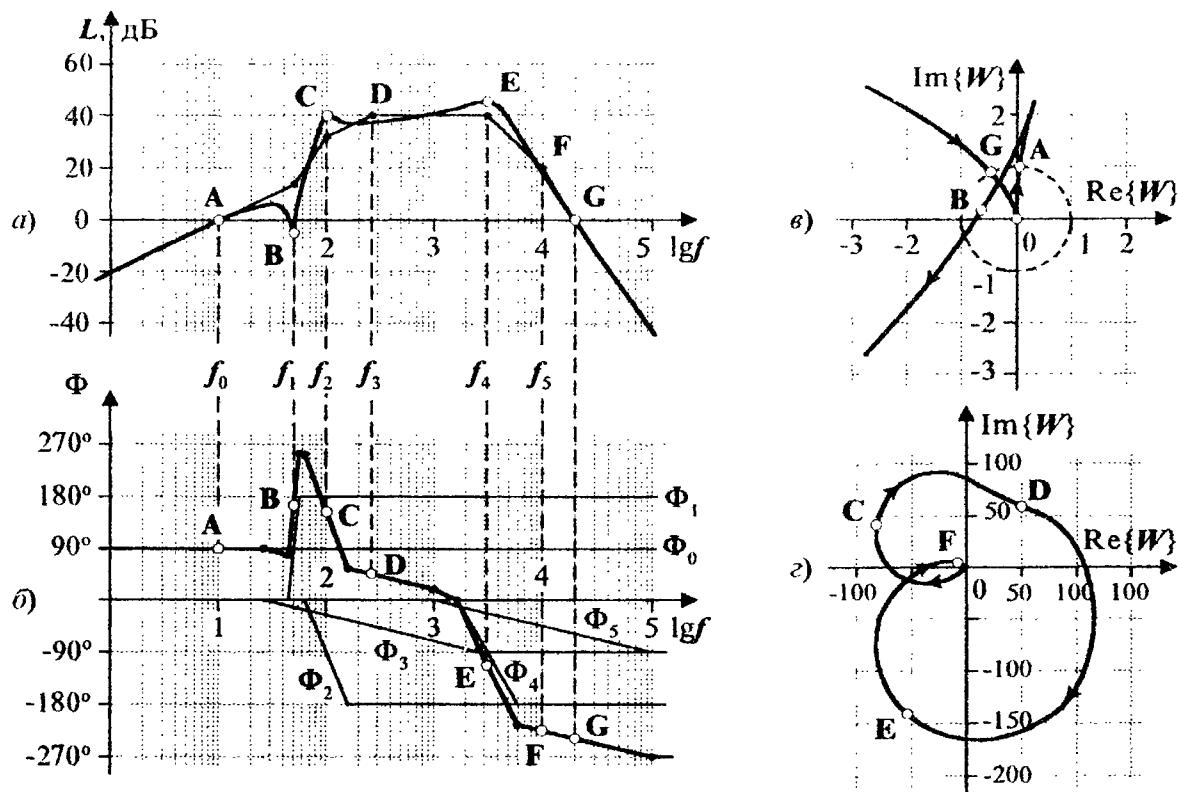


Рис. 4.24

времени $T_5 = 1/2\pi f_5 = 16$ мкс.

Из полученных ПФ типовых звеньев $W_i(s)$ формируем ПФ усилителя:

$$W(s) = \prod_{i=0}^5 W_i(s) = \frac{Ks(1+2\xi_1 T_1 s + T_1^2)}{(1+2\xi_2 T_2 s + T_2^2)(1+T_3 s)(1+2\xi_4 T_4 s + T_4^2)(1+T_5 s)} = \\ = \frac{0,016s + 5 \cdot 10^{-6}s^2 + 1,61 \cdot 10^{-7}s^3}{1 + 1,31 \cdot 10^{-3}s + 3 \cdot 10^{-6}s^2 + 1,75 \cdot 10^{-9}s^3 + 8,02 \cdot 10^{-14}s^4 + 4,94 \cdot 10^{-18}s^5 + 6,55 \cdot 10^{-23}s^6}.$$

На основе минимально-фазовых типовых звеньев (табл. 2.2) построим АЛФЧХ усилителя как сумму АЛФЧХ $\Phi_0 - \Phi_5$ типовых звеньев (рис. 4.24, б). По графикам ЛЧХ на рис. 4.24, в, г построены годографы $W(j\omega)$ в крупном и мелком масштабах. □

При исследовании радиоэлектронных схем целесообразно выполнять *временное масштабирование* $t_m = m_t t$, в котором масштабный коэффициент m_t переводит время из реального t в модельное t_m . Например, масштаб $m_t = 1000$ переводит 1 с в 1 мс. Так как оператор Лапласа s одновременно является и символом дифференцирования d/dt , то $s = m_t d/dt_m = m_t s_m$, где новый оператор $s_m = d/dt_m$ масштабирует частоту в $1/m_t$ раз.

Масштабирование позволяет получить более удобную форму записи ПФ высокочастотных систем. Например, при $m_t = 1000$ ПФ усилителя из примера 4.11 преобразуется в

$$W(s) = \frac{16s_m + 5s_m^2 + 161s_m^3}{1 + 1,31s_m + 3s_m^2 + 1,75s_m^3 + 8,02 \cdot 10^{-2}s_m^4 + 4,94 \cdot 10^{-3}s_m^5 + 6,55 \cdot 10^{-5}s_m^6}.$$

4.7. ЗАПАСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Запасы устойчивости необходимы для гарантированного обеспечения устойчивой работы системы при возможных отклонениях модели САУ от ее реального прототипа. Запасы устойчивости ЗС определяются по ЛЧХ ее разомкнутого контура $L(\omega)$ и $\Phi(\omega)$. Далее будем считать контурную ПФ системы устойчивой.

Запас устойчивости по амплитуде L_3 гарантирует, на сколько децибел может быть поднята $L(\omega)$ до совпадения частот $\omega_{\text{ср}}$ и $\omega_{\text{гр}}$, то есть до границы устойчивости (рис. 4.25, а). Условие запаса устойчивости по амплитуде, не меньшего, чем L_3 , имеет вид $L(\omega_{\text{гр}}) \leq -L_3$. Подъем ЛАЧХ на L_3 дБ означает увеличение коэффициента усиления разомкнутого контура в $K_3 = 10^{0.05L_3}$ раз, при котором замкнутая САУ будет гарантированно устойчива.

Запас устойчивости по фазе φ_3 гарантирует, на сколько градусов отстоит $\Phi(\omega)$ от граничных уровней устойчивости $\varphi_{\text{гр}}$ на частотах, где $L(\omega) > 0$ (рис. 4.25, б):

$$|\Phi(\omega) - \varphi_{\text{гр}}| \geq \varphi_3 \quad \forall \omega: L(\omega) > 0.$$

Часто при проектировании САУ задаются оба запаса устойчивости L_3 и φ_3 . В этом случае требования к ЛЧХ разомкнутого контура сводятся к неравенствам

$$\begin{cases} L(\omega) \leq -L_3 \quad \forall \omega: |\Phi(\omega) - \varphi_{\text{гр}}| < \varphi_3, \\ |\Phi(\omega) - \varphi_{\text{гр}}| \geq \varphi_3 \quad \forall \omega: L(\omega) > -L_3. \end{cases} \quad (4.24)$$

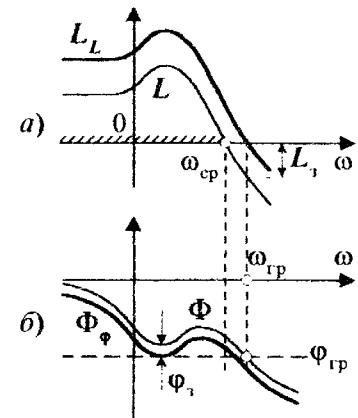


Рис. 4.25

Представляет интерес алгебраическое определение возможности иметь в ЗС запас устойчивости по амплитуде L_3 . Для этого необходимо исследовать на устойчивость по Гурвицу или Михайлову приведенный по амплитуде ХП $C_{L_3}(s) = K_3 B(s) + A(s)$, где $20 \lg K_3 = L_3$. Он соответствует ЗС, у которой ПФ разомкнутого контура равна $W_L(s) = K_3 \frac{B(s)}{A(s)}$, а ЛАЧХ $L_L(\omega) = L(\omega) + L_3$. Устойчивость $C_{L_3}(s)$ означает наличие в ЗС запаса устойчивости по амплитуде L_3 .

Получим алгебраическое условие возможности иметь в ЗС запас устойчивости по фазе φ_3 . Для этого сдвинем ЛФЧХ $\Phi(\omega)$ на угол φ_3 , не изменяя при этом ЛАЧХ $L(\omega)$. Полученными ЛЧХ $L(\omega)$ и $\Phi_\varphi(\omega)$ обладает разомкнутый контур с КЧХ

$$W_\varphi(j\omega) = W(j\omega) e^{-j\varphi_3} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} e^{-j\varphi_3} = \frac{B(j\omega) \cos(\varphi_3) - jB(j\omega) \sin(\varphi_3)}{A(j\omega)}.$$

Комплексная ЧХ замкнутого контура равна

$$W_{\varphi_1}(j\omega) = \frac{B(j\omega) \cos(\varphi_3) - jB(j\omega) \sin(\varphi_3)}{A(j\omega) + B(j\omega) \cos(\varphi_3) - jB(j\omega) \sin(\varphi_3)} = \frac{B^2(j\omega) + A(j\omega)B(j\omega) \cos(\varphi_3) - jA(j\omega)B(j\omega) \sin(\varphi_3)}{A^2(j\omega) + 2A(j\omega)B(j\omega) \cos(\varphi_3) + B^2(j\omega)}.$$

Характер порождаемой ей комплексной ИХ определяется действительным *приведенным по фазе ХП* $C_{\Phi_3}(s) = A^2(s) + 2A(s)B(s)\cos(\varphi_3) + B^2(s)$, алгебраическая устойчивость которого означает наличие в исходной системе запаса устойчивости по фазе φ_3 .

Алгебраический анализ возможности иметь оба запаса устойчивости L_3 и φ_3 , сводится к проверке устойчивости действительного *приведенного по амплитуде и фазе ХП*

$$C_{L\Phi_3}(s) = A^2(s) + 2 \cdot 10^{0.05L_3} A(s)B(s)\cos(\varphi_3) + 10^{0.1L_3} B^2(s). \quad (4.25)$$

В отсутствие любого из запасов L_3 или φ_3 его нужно занулить. Тогда ХП (4.25) эквивалентен $C_{\Phi_3}(s)$ (при $L_3=0$), $C_{L_3}(s)$ (при $\varphi_3=0$) либо $C_3(s)$ (при $L_3=0$ и $\varphi_3=0$).

При запасе по фазе $\varphi_3 \neq 0$ корни ХП (4.25) имеют следующие *свойства*:

1) общее количество корней равно $2\max\{n, m\}$, где n и m - степени полиномов $A(s)$ и $B(s)$;

2) все действительные корни имеют четную кратность (2, 4, ...) и являются общими корнями полиномов $A(s)$ и $B(s)$;

3) остальные корни являются комплексно-сопряженными.

Эти свойства вытекают из представления действительного полинома (4.25) в виде произведения комплексно-сопряженных полиномов

$$C_{L\Phi_3}(s) = P(s)\bar{P}(s), \quad P(s) = A(s) + K_3 B(s)\cos(\varphi_3) + jK_3 B(s)\sin(\varphi_3).$$

Степень $P(s)$ равна $\max\{n, m\}$, что доказывает первое утверждение. Если действительное число s_i есть корень $P(s)$, то оно также и корень $\bar{P}(s)$. Отсюда следует четная кратность этого корня полинома $C_{L\Phi_3}(s)$. Если действительное число s_i есть корень $P(s)$, то оно является решением системы уравнений

$$\begin{cases} A(s_i) + K_3 B(s_i)\cos(\varphi_3) = 0 \\ K_3 B(s_i)\sin(\varphi_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow A(s_i) = 0, \quad B(s_i) = 0,$$

то есть общим корнем полиномов $A(s)$ и $B(s)$. Наконец, как и все корни действительного полинома, комплексные корни $C_{L\Phi_3}(s)$ сопряжены.

Типовые значения запасов устойчивости: $L_3 = 6 \div 20$ дБ, $\varphi_3 = 30 \div 60^\circ$.

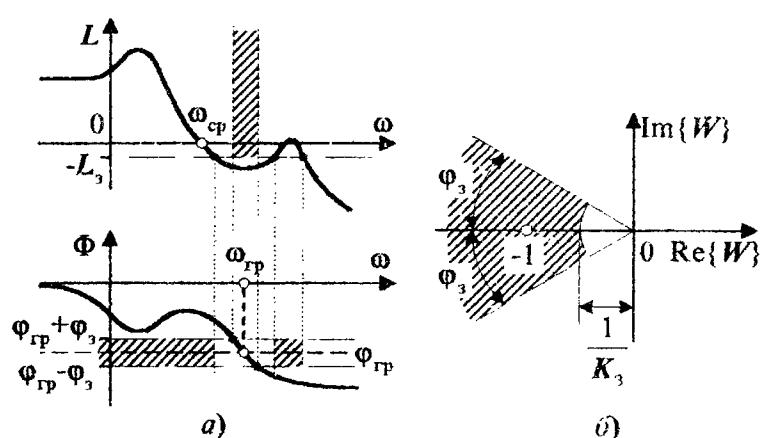


Рис. 4.26

Области ЛЧХ, не удовлетворяющие условиям (4.24), называются *запретными зонами*. Графики ЛЧХ не должны заходить в запретные зоны (рис. 4.26, a), иначе не будут обеспечиваться требуемые запасы устойчивости или сама устойчивость. Запретная зона есть и на комплексной плоскости годографа $W(j\omega)$ (рис. 4.26, б). Она имеет вид внешнего сектора, ограниченного лучами $\Phi_{\text{гр}} - \varphi_3$, $\Phi_{\text{гр}} + \varphi_3$ и дугой окружности радиуса

$|1/K_1| = 10^{-0.05L_1} < 1$. Аналогичная (4.24) разрешенная область годографа удовлетворяет условиям запасов устойчивости

$$\begin{cases} A(\omega) \leq 1/K_1, \forall \omega: |\phi(\omega) - \phi_{1p}| < \varphi_1, \\ |\phi(\omega) - \phi_{1p}| \geq \varphi_1, \forall \omega: A(\omega) > 1/K_1. \end{cases} \quad (4.26)$$

✓ **Пример 4.12.** Для контурной ПФ $W_p(s) = K \frac{1-6s+100s^2}{s(1+s)^2}$ определить значения K , при которых ЗС будет: а) устойчива; б) иметь запасы устойчивости $L_3 \geq 6$ дБ, $\varphi_3 \geq 60^\circ$.

Решение. Полиномы ПФ равны $A(s) = s(1+s)^2$, $B(s) = K(1-6s+100s^2)$.

Алгебраические критерии дают точные решения задач:

а) характеристический полином ЗС $C_3(s) = A(s) + B(s) = K + (1-6K)s + (2+100K)s^2 + s^3$ устойчив по Гурвицу при $0 < K < 0,1652 = K_{1p}$;

б) определяем $K_3 = 10^{6/20} \approx 2$ и $\cos(\varphi_3) = 0,5$. Приведенный ХП (4.25)

$$C_{L\varphi_3}(s) = A^2(s) + 2A(s)B(s) + 4B^2(s) = \sum_{i=0}^6 c_i(K)s^i$$

с параметрическими коэффициентами

$$\begin{aligned} c_0(K) &= 4K^2, & c_1(K) &= 2K(1-24K), & c_2(K) &= 944K^2 - 8K + 1, \\ c_3(K) &= -4800K^2 + 178K + 4, & c_4(K) &= 400K^2 + 388K + 6, \\ c_5(K) &= 200K + 4, & c_6(K) &= 1 \end{aligned}$$

устойчив по Лъенару - Шипару, если выполняются необходимые $c_i(K) > 0 \forall i = \overline{0,5}$ (отсюда $0 < K < 0,05285$) и достаточные условия

$$M_3(K) = \begin{vmatrix} c_5 & c_3 & c_1 & 0 & 0 \\ c_6 & c_4 & c_2 & c_0 & 0 \end{vmatrix} > 0 \cap M_5(K) = \begin{vmatrix} c_5 & c_3 & c_1 & 0 & 0 \\ c_6 & c_4 & c_2 & c_0 & 0 \\ 0 & c_5 & c_3 & c_1 & 0 \\ 0 & c_6 & c_4 & c_2 & c_0 \\ 0 & 0 & c_5 & c_3 & c_1 \end{vmatrix} > 0$$

с решением $0 < K < 0,03466 = K_y$. Степени полиномов $M_3(K)$ и $M_5(K)$ равны соответственно 6 и 9, поэтому аналитическое решение неравенств весьма затруднительно. Практически целесообразнее в среде MathCAD построить графики $M_3(K)$ и $M_5(K)$ в интервале допустимых значений $0 < K < 0,05285$ и найти удовлетворяющий обоим условиям интервал $0 < K < K_y$ (рис. 4.27).

Быстрое приближенное решение по критерию Найквиста полу-

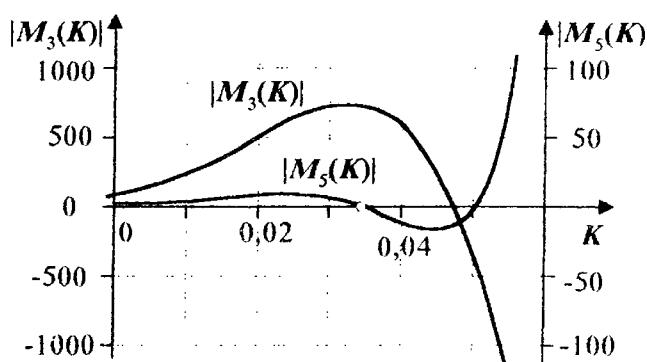


Рис. 4.27

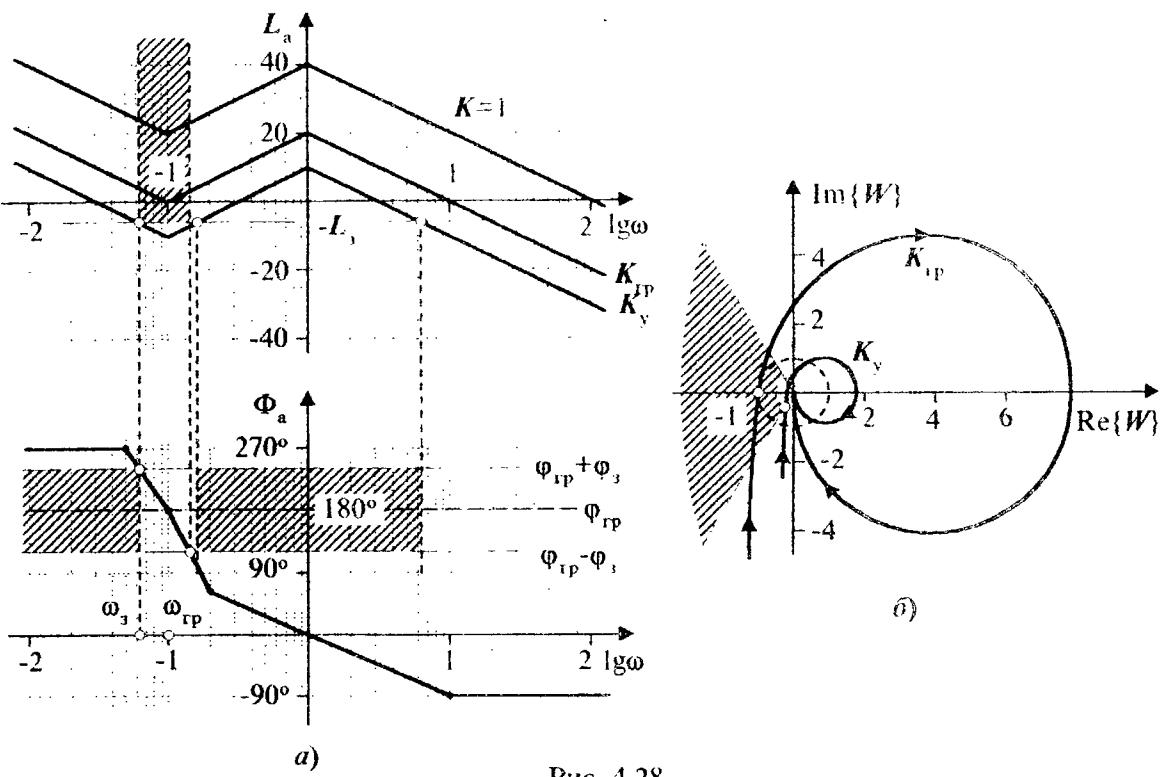


Рис. 4.28

чим по асимптотическим ЛЧХ (рис. 4.28). Построим их для $K=1$:

а) асимптотическая ЛФЧХ $\Phi_a(\omega)$ пересекает граничный фазовый уровень $\Phi_{rp}=180^\circ$ на частоте $\omega_{rp}=0,1$, где $L_a(\omega_{rp})=20$ дБ. Для устойчивости ЗС АЛАЧХ нужно опустить вниз не менее чем на 20 дБ, то есть значение K уменьшить в 10 и более раз. Таким образом, ЗС устойчива при $0 < K < 0,1 \approx K_{rp}$;

б) по графику $\Phi_a(\omega)$ определим частоту запаса ω_3 из условия равенства в (4.24) $\Phi_a(\omega_3)=\Phi_{rp}+\phi_3=240^\circ$: $1g\omega_3=-1-0,3 \cdot 90^\circ/60^\circ=-1,2$, откуда $\omega_3=0,0632$. При $K=1$ значение $L_a(\omega_3)=20+20 \cdot 0,2=24$ дБ. Для обеспечения заданных запасов устойчивости L_3 и ϕ_3 АЛАЧХ нужно опустить вниз на $24+6=30$ дБ, то есть уменьшить K в 31,6 раза. Таким образом, запасы устойчивости обеспечиваются при $0 < K < 0,0316 \approx K_y$. Приближенность результатов связана с погрешностями аппроксимации ЛЧХ.

Точное частотное решение получим по аналитическим формулам ЛЧХ

$$\begin{cases} L(\omega)=20\lg K+10\lg(-164\omega^2+10000\omega^4)-20\lg\omega-20\lg(1+\omega^2), \\ \Phi(\omega)=-\arctg\left(\frac{6\omega}{1-100\omega^2}\right)-90^\circ-2\arctg(\omega); \end{cases}$$

а) $\Phi(\omega_{rp})=180^\circ$ при $\omega_{rp}=0,094$, откуда получаем $L(\omega_{rp})=15,64$ дБ, $K_{rp}=10^{-15,64/20}=0,1652$, а устойчивость ЗС обеспечивается при $0 < K < 0,1652$;

б) $\Phi(\omega_3)=240^\circ$ при $\omega_3=0,0532$, откуда получаем $L(\omega_3)=23,35$ дБ, $K_y=10^{-(23,35+6)/20}=0,03408$, а заданные запасы устойчивости ЗС обеспечиваются при $0 < K < 0,03408$. \square

4.8*. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Практически в любой системе точки приложения управляющих воздействий пространственно разделены с точками измерения выходных координат. Из-за конечной скорости распространения сигналов любой участок системы имеет транспортное **запаздывание**, которое обычно не учитывается либо в силу идеальности ньютоновской физики, либо для упрощения математической модели объекта.

Звено чистого запаздывания на время τ секунд имеет ВХ $w(t) = \delta(t - \tau)$, $h(t) = l(t - \tau)$, ПФ $W(s) = L\{\delta(t - \tau)\} = e^{-\tau s}$ и ЧХ $W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos(\tau\omega) - j\sin(\tau\omega)$, $P(\omega) = \cos(\tau\omega)$, $Q(\omega) = -\sin(\tau\omega)$, $A(\omega) = 1$, $L(\omega) = 0$, $\Phi(\omega) = \operatorname{arctg}(-\tan(\tau\omega)) = -\tau\omega$. Разделяя выполняемую объектом функцию от задержки ее проявления на выходе объекта, запишем его ПФ в виде $W(s)e^{-\tau s}$, где $W(s) = B(s)/A(s)$ - линейная часть ПФ без учета чистого запаздывания $e^{-\tau s}$. Тогда ХП ЗС с неединичной ООС, имеющей ПФ $W_0(s)e^{-\tau_0 s}$, равен

$$C_3(s) = A(s)A_0(s) + B(s)B_0(s)e^{-\tau_K s}, \quad (4.27)$$

где $\tau_K = \tau + \tau_0$ - суммарное контурное запаздывание системы. Эта трансцендентная функция раскладывается в бесконечный ряд Тейлора по степеням s , поэтому спектральные НидУУ (4.3) и алгебраические НидУУ (4.11) неприменимы. Благодаря существованию ЧХ звена с чистым запаздыванием, исследование устойчивости таких систем успешно выполняется по критериям Михайлова и Найквиста [1,2].

Подставив в (4.27) $s = j\omega$, получим комплексную частотную функцию

$$\begin{aligned} C_3(j\omega) &= A(j\omega)A_0(j\omega) + B(j\omega)B_0(j\omega)(\cos(\tau_K\omega) - j\sin(\tau_K\omega)) = \\ &= P_3(\omega, \cos(\tau_K\omega), \sin(\tau_K\omega)) + jQ_3(\omega, \cos(\tau_K\omega), \sin(\tau_K\omega)). \end{aligned}$$

Для устойчивости ЗС ее годограф $C_3(j\omega)$ с колебательными действительной и мнимой составляющими должен по критерию Михайлова огибать начало координат против часовой стрелки, нигде не обращаясь в нуль. На границах устойчивости при определенных критических значениях частоты ω_{kp} и запаздывания τ_{kp} выполняются условия

$$P_3(\omega_{kp}, \cos(\tau_{kp}\omega_{kp}), \sin(\tau_{kp}\omega_{kp})) = Q_3(\omega_{kp}, \cos(\tau_{kp}\omega_{kp}), \sin(\tau_{kp}\omega_{kp})) = 0, \quad (4.28)$$

определяющие границы областей устойчивости ЗС в пространстве ее параметров.

По критерию устойчивости Найквиста строится годограф $W_{k0}(j\omega)$ для линейной части $W_{k0}(s) = W(s)W_0(s)$ контурной ПФ $W_k(s) = W_{k0}(s)e^{-\tau_K s}$. Влияние запаздывания на годограф $W_k(j\omega) = A_{k0}(\omega)e^{j\Phi_{k0}(\omega)}e^{-j\tau_K\omega} = A_{k0}(\omega)e^{j\{\Phi_{k0}(\omega) - \tau_K\omega\}}$ проявляется в его спиральном «закручивании» по часовой стрелке (в сторону уменьшения аргумента) на угол $\tau_K\omega$, пропорциональный частоте, без изменения амплитуды (рис. 4.29, a). Эффект «закручивания» не нарушает условий устойчивости замкнутой системы (неохватывание точки Найквиста годографом $W_k(j\omega)$), только если $A_{k0}(\omega) < 1 \forall \omega \geq 0$, то есть когда весь годограф $W_k(j\omega)$ лежит внутри единичной окружности.

В остальных случаях запаздывание может привести к неустойчивости ЗС, в том числе и для минимально-фазовых систем первого и второго порядков, которые без запаздывания безусловно устойчивы.

Астатические системы с запаздыванием всегда условно устойчивы, так как на низких частотах имеют АЧХ $A_{k0}(\omega) > 1$.

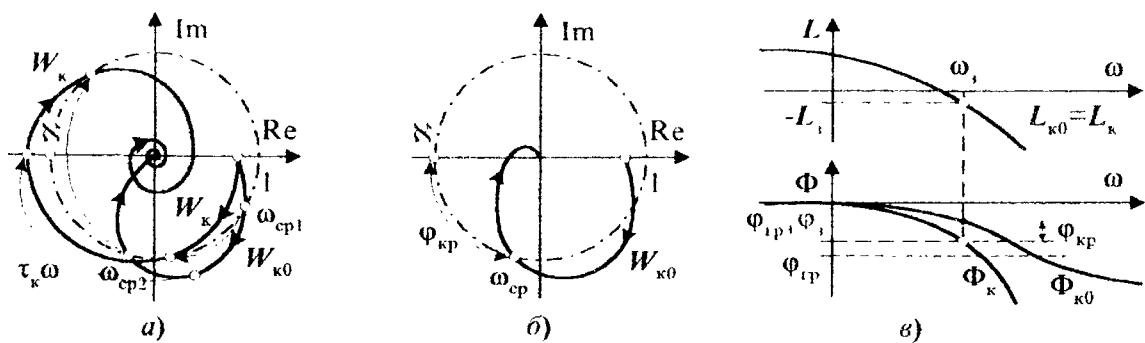


Рис. 4.29

Рассчитаем критическое запаздывание τ_{kp} для системы с устойчивым годографом $W_k(j\omega)$ так, чтобы при $\tau_k < \tau_{kp}$ ЗС оставалась устойчивой. При $\tau_k = 0$ годограф $W_k(j\omega)$ совпадает с $W_{k0}(j\omega)$ и тоже устойчив, то есть не охватывает точку Найквиста (рис. 4.29,б). При увеличении τ_k точка пересечения $W_k(j\omega)$ с единичной окружностью приближается к точке Найквиста, а при достижении критического запаздывания совпадает с ней. Это есть граница устойчивости на частоте среза ω_{cp} : $W_k(j\omega_{cp})=1$, где $A_{k0}(\omega_{cp})=1$ и $\Phi_{k0}(\omega_{cp})-\tau_{kp}\omega_{cp}=\varphi_{tp}$. Отсюда найдем

$$\tau_{kp} = \frac{\Phi_{k0}(\omega_{cp}) - \varphi_{tp}}{\omega_{cp}} = \frac{\Phi_{kp}}{\omega_{cp}}, \quad (4.29a)$$

где $\Phi_{kp} = \Phi_{k0}(\omega_{cp}) - \varphi_{tp}$ - запас устойчивости по фазе системы без запаздывания. Для обеспечения запасов устойчивости L_3 и φ_3 найдем частоту ω_3 : $A_{k0}(\omega_3)=10^{-0.05L_3}$ и из условия $\Phi_{k0}(\omega_3)-\tau_{kp}\omega_3-\varphi_3=\varphi_{tp}$ получим критическое запаздывание

$$\tau_{kp} = \frac{\Phi_{k0}(\omega_3) - \varphi_{tp} - \varphi_3}{\omega_3}. \quad (4.29b)$$

При использовании логарифмического критерия Найквиста строятся ЛЧХ $L_{k0}(\omega)$ и $\Phi_{k0}(\omega)$ системы без запаздывания (рис. 4.29,в). Из условия $L_{k0}(\omega_3)=-L_3$ вычисляется частота запаса ω_3 и на ней допустимое уменьшение фазы $\Phi_{k0}(\omega_3)-\varphi_{tp}-\varphi_3$. Критическое запаздывание определяется по (4.29б). При $\tau_k > \tau_{kp}$ ЛФЧХ $\Phi_k(\omega)=\Phi_{k0}(\omega)-\tau_k\omega$ быстрее пересечет уровень $\varphi_{tp}+\varphi_3$, чем ЛАЧХ $L_k(\omega)$ станет меньше уровня $-L_3$.

Пример 4.13. Для контурной ПФ $W_k(s)=2Kse^{-\tau s}/(1+s)^2$ с запаздыванием построить области устойчивости в пространстве параметров K и $\tau \geq 0$ методами Михайлова и Найквиста.

Решение. По методу Михайлова составим ХП (4.27) в операторной и комплексной формах: $C_3(s)=1+2(1+Ke^{-\tau s})s+s^2$, $C_3(j\omega)=P_3(\omega)+jQ_3(\omega)$, где $P_3(\omega)=1-\omega^2+2K\omega \sin(\tau\omega)$; $Q_3(\omega)=2\omega(1+K\cos(\tau\omega))$. На границе устойчивости систему уравнений (4.28)

$$\begin{cases} P_3(\omega_{kp})=1-\omega_{kp}^2+2K_{kp}\omega_{kp}\sin(\tau_{kp}\omega_{kp})=0, \\ Q_3(\omega_{kp})=2\omega_{kp}(1+K_{kp}\cos(\tau_{kp}\omega_{kp}))=0 \end{cases}$$

имеет параметрические (от $\omega_{kp}>0$ и $i=0,1,2,\dots$) решения (получите их самостоятельно)

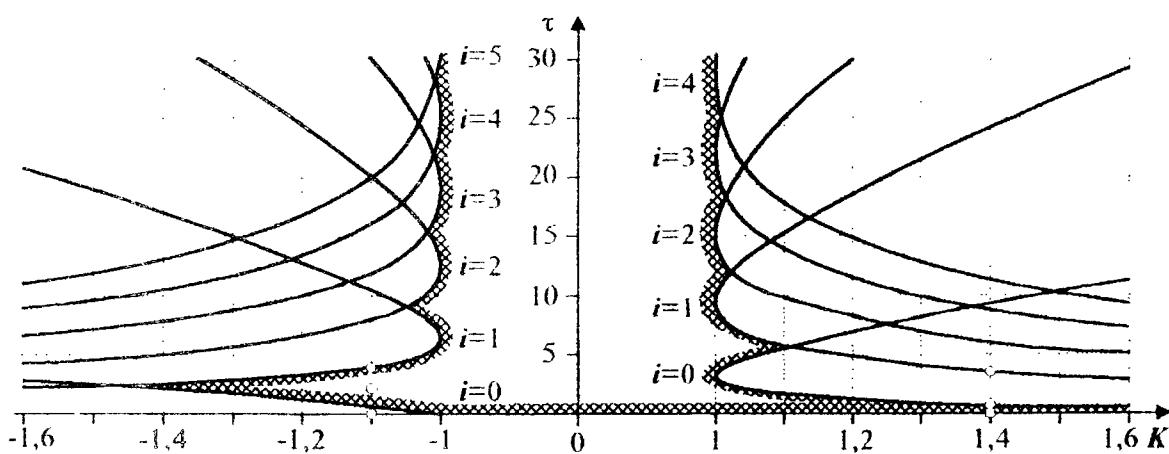


Рис. 4.30

$$\begin{cases} \tau_{kp} = \frac{(3+4i)\pi - 4\arctg(\omega_{kp})}{2\omega_{kp}}, K_{kp} = (\omega_{kp}^2 + 1)/2\omega_{kp} > 0; \\ \tau_{kp} = \frac{(1+4i)\pi - 4\arctg(\omega_{kp})}{2\omega_{kp}}, K_{kp} = -(\omega_{kp}^2 + 1)/2\omega_{kp} < 0. \end{cases}$$

Исключая критические частоты $\omega_{kp} = |K_{kp}| \pm \sqrt{|K_{kp}|^2 - 1}$, получим зависимости критического запаздывания от критического коэффициента усиления ПФ:

$$\tau_{kp} = \frac{\{2 + \operatorname{sgn}(K_{kp}) + 4i\}\pi - 4\arctg(|K_{kp}| \pm \sqrt{|K_{kp}|^2 - 1})}{2(|K_{kp}| \pm \sqrt{|K_{kp}|^2 - 1})} \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.30)$$

При $|K| < 1$ критические частоты отсутствуют, а ЗС устойчива при любом запаздывании τ . При $|K|=1$ есть единственное значение $\omega_{kp}=1$, при котором набор критических запаздываний равен $\tau_{kp}=(1+2i)\pi= \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ при $K=1$ и $\tau_{kp}=2i\pi=2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ при $K=-1$. При $|K| > 1$ существуют две критические частоты $\omega_{kp1}=|K|+\sqrt{|K|^2-1}$, $\omega_{kp2}=|K|-\sqrt{|K|^2-1}$ и соответствующие им по (4.30) два критических запаздывания $\tau_{kp1} < \tau_{kp2}$, формирующие на плоскости $\{K, \tau\}$ границы заштрихованных областей устойчивости ЗС (рис. 4.30).

На рис. 4.31 построены годографы $C_3(j\omega)$ для шести пар $\{K, \tau\}$, отмеченных точками на рис. 4.30: $\{K=-1, 1, \tau \in \{0, 2, 3, 76\}\}$ и $\{K=1, 4, \tau \in \{0, 1, 3, 64\}\}$. Очевиден циклический характер изменения $C_3(j\omega)$.

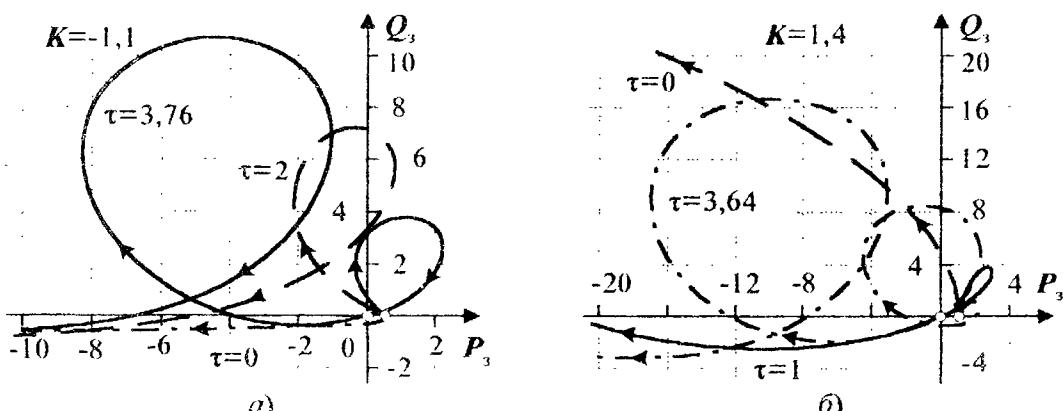


Рис. 4.31

ский характер годографа системы с ненулевым запаздыванием. Сплошные графики, проходящие через начало координат и при малой вариации имеющие положительное направление, соответствуют нейтральной системе; пунктирные, огибающие начало координат в положительном направлении, - устойчивой, а штрих-пунктирные - неустойчивой ЗС. Годограф для $\{K=1,4, \tau=3,64\}$ на втором цикле проходит через начало координат, но, тем не менее, является не граничным, а неустойчивым, так как на первом цикле имеет отрицательное направление.

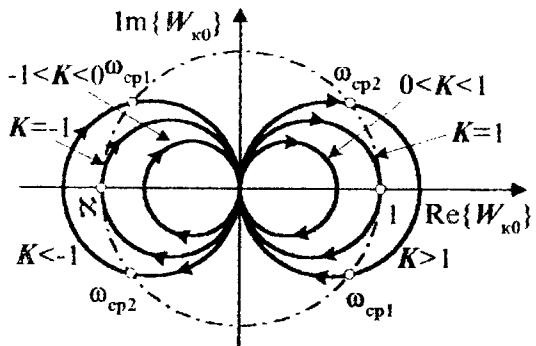


Рис. 4.32

Для оценки влияния параметра K на устойчивость по методу Найквиста построим (рис. 4.32) годографы линейной части ПФ $W_{k0}(s) = \frac{2K}{(1+s)^2}$ по АЧХ $A(\omega) = \frac{2|K|\omega}{(1+\omega^2)}$ и ФЧХ $\phi(\omega) = \text{sgn}(K)\pi/2 - 2\arctg(\omega)$, откуда видно, что при $|K| < 1$ никакое запаздывание не может закрутить годограф так, чтобы он охватил точку Найквиста. Поэтому ЗС устойчива.

При $|K|=1$ годограф касается единичной окружности на единственной частоте

среза ω_{cp} : $A(\omega_{cp}) = 2\omega_{cp}/(1+\omega_{cp}^2) = 1 \Rightarrow \omega_{cp} = 1$, $\phi(\omega_{cp}) = \{\text{sgn}(K)-1\}\pi/2$. По (4.29) находим набор фиксированных критических запаздываний:

$$\tau_{kp} = \frac{\phi(\omega_{cp}) - \Phi_{kp}}{\omega_{cp}} = \{\text{sgn}(K)-1\}\pi/2 + 2\pi i = \begin{cases} \pi + 2\pi i = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots \text{при } K=1, \\ 2\pi i = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \text{при } K=-1. \end{cases}$$

При $|K| > 1$ годограф $W_{k0}(j\omega)$ дважды пересекает единичную окружность на частотах ω_{cp1} и ω_{cp2} :

$$A(\omega_{cp}) = 2|K|\omega_{cp}/(1+\omega_{cp}^2) = 1 \Rightarrow \omega_{cp1} = |K| + \sqrt{K^2 - 1}, \omega_{cp2} = |K| - \sqrt{K^2 - 1}.$$

Им соответствуют критические запаздывания (4.30), формирующие на плоскости $\{K, \tau\}$ границы заштрихованных областей устойчивости ЗС (рис. 4.30).

Построенные на рис. 4.33 годографы РС с запаздыванием имеют спиральный характер при $\tau > 0$. Выводы об устойчивости ЗС совпадают с результатами анализа устойчивости методом Михайлова для соответствующих параметров $\{K, \tau\}$. \square

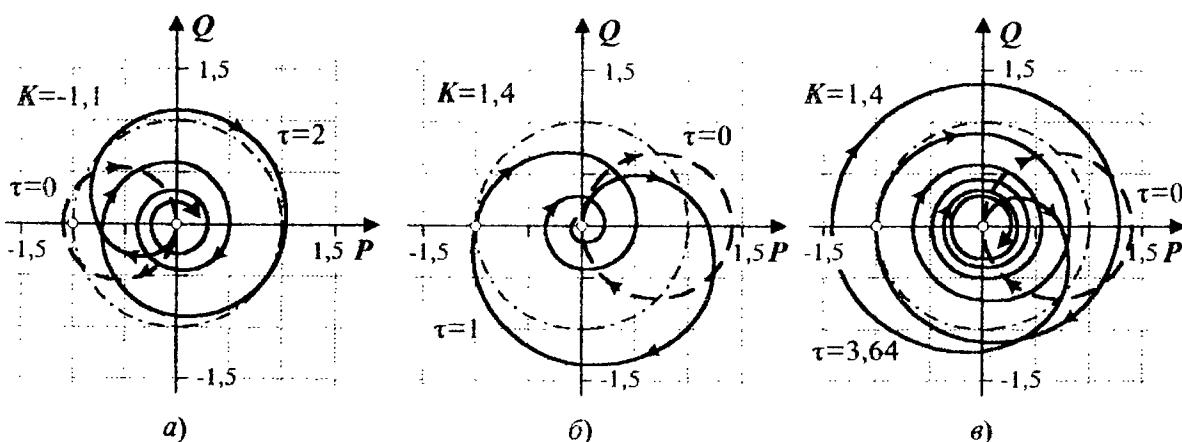


Рис. 4.33

ГЛАВА 5. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Расчет переходных процессов является одной из основных задач анализа САУ, позволяющей моделировать поведение реальной системы в различных условиях эксплуатации, предусмотреть аварийные ситуации или повышенные нагрузки на элементы системы без риска их разрушения. Будем использовать символ s как оператор Лапласа и вместо символа p как оператор дифференцирования d/dt , тем более что при переходе от ДУ к ПФ оператор p формально заменяется на s .

5.1. СТРУКТУРА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Движение состояния системы во времени осуществляется в форме *движения*. Внешне проявляемое как единое целое, движение в действительности складывается из ряда составляющих, порождаемых различными причинами. Классификация основных видов движений приведена на рис. 5.1.

Движение, вызванное влиянием на объект внешнего воздействия, называется *вынужденным* (возмущенным) движением. При длительном (большем времени регулирования t_p) установившемся характере внешних воздействий объект функционирует в *установившемся* режиме вынужденного движения, при котором параметры его состояния (значения координат, скорости их изменения, амплитуды и фазы колебаний и т.п.) постоянны во времени.

Установившийся режим включает в себя *состояние равновесия* (покоя) - это установившийся режим в отсутствие внешних воздействий. Характер состояния покоя определяется корнями ХП $A(s)$ - знаменателя ПФ объекта $W(s) = B(s)/A(s)$. Тривиальное состояние равновесия - *нулевое* $y = y' = \dots = y^{(n-1)} = 0$, удовлетворяющее ДУ объекта

$$A(s)y(t) = B(s)x(t), \quad A(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i, \quad B(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i \quad (5.1)$$

при $x(t) = 0$. Если все корни ХП левые, то нулевое состояние покоя - устойчивое. Нулевой корень ХП при остальных левых корнях дает неопределенное состояние покоя. Пара мнимых корней при остальных левых корнях дает колебательное равновесие. Достаточно одного правого корня ХП, чтобы равновесие стало неустойчивым.

Переходным режимом называется движение объекта между двумя установившимися режимами. В устойчивых системах переходный режим заканчивается за время t_p после окончания внешнего воздействия или установления его постоянных параметров. *Свободным* называется движение объекта из *ненулевого* состояния в состояние равновесия без учета внешнего воздействия. *Собственным* называется движение во время перехода из одного установившегося режима в другой без учета *свободного движения*. На

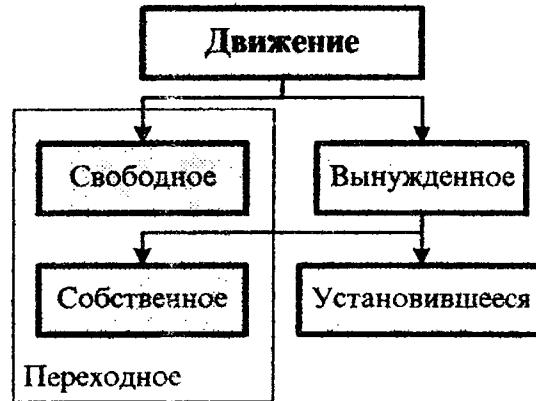
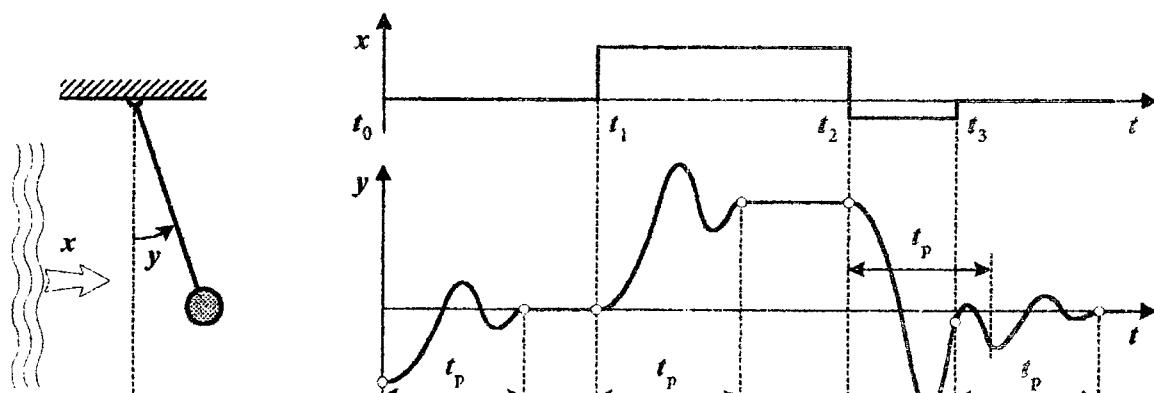


Рис. 5.1

рис. 5.2 показано соотношение движений системы на примере колебаний маятника в вязкой движущейся среде.

При расчете переходного процесса определенный момент времени t_0 выбирается начальным. Состояние объекта при $t=t_0$ называется **начальным состоянием** или **начальными условиями (НУ)**. Начальное состояние с нулевыми значениями координат объекта и их производных называется **нулевыми НУ**. В некоторые моменты времени t_0, t_1, t_2, \dots входное воздействие $x(t)$ может изменять свое описание, иметь разрывы, изломы и т.д. При определенных свойствах системы это даст разрывы в функции $y(t)$ и ее производных $y^{(i)}(t)$. Например, если в ПФ полиномы $A(s)$ и $B(s)$ имеют равные степени $n=m$, то коэффициент прямой связи входа с выходом равен $D=b_n/a_n$, а скачки входного сигнала $\Delta x(t_i)$ дают выходные скачки $\Delta y(t_i)=D\Delta x(t_i)$. В связи с этим НУ $y^{(i)}(t_0)=\lim_{\epsilon \rightarrow 0} y^{(i)}(t_0+\epsilon)$ могут отличаться от **предначальных условий (предНУ)** $y^{(i)}(t_0-0)=\lim_{\epsilon \rightarrow 0} y^{(i)}(t_0-\epsilon)$ на величины скачков $\Delta y^{(i)}(t_0)=y^{(i)}(t_0)-y^{(i)}(t_0-0)$. Переходный процесс рассчитывается как последовательность процессов на интервалах постоянства описания $x(t)$. В конце k -го интервала моделирования $[t_{k-1}, t_k]$ формируются предНУ $y^{(i)}(t_k-0)$ для следующего $k+1$ -го интервала $[t_k, t_{k+1}]$.

Аналитические методы расчета переходных процессов САУ делятся на частотные и временные. **Частотные** методы выполняют обратное преобразование Лапласа изображения выходного сигнала с помощью таблиц или по формуле разложения Хевисайда. К основным **временным** методам относятся методы вариации произвольных постоянных, интеграла Дюамеля и пространства состояний.



Состояние покоя		+					+
Свободное движение	+				+	+	
Вынужденное движение			+	+	+	+	
Собственное движение			+		+	+	
Установившийся режим				+			

Рис. 5.2

5.2. МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

\mathcal{U}

зображение выходного сигнала формируется по структурной схеме на рис. 5.3 в соответствии с формулой (1.18)

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} X(s) + \frac{P(s) - Q(s)}{A(s)}. \quad (5.2)$$

Изображение $X(s)$ входного сигнала $x(t)$ вычисляется по формуле (1.16) или по таблице прямого преобразования Лапласа. Полиномы $P(s)$ и $Q(s)$ формируются по (1.17) на основе предНУ входного и выходного сигналов:

$$P(s) = p_0 + p_1 s + \dots + p_{n-1} s^{n-1},$$

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(-0) \\ y'(-0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(-0) \end{bmatrix},$$

$$Q(s) = q_0 + q_1 s + \dots + q_{m-1} s^{m-1},$$

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ b_2 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(-0) \\ x'(-0) \\ \vdots \\ x^{(m-1)}(-0) \end{bmatrix}.$$

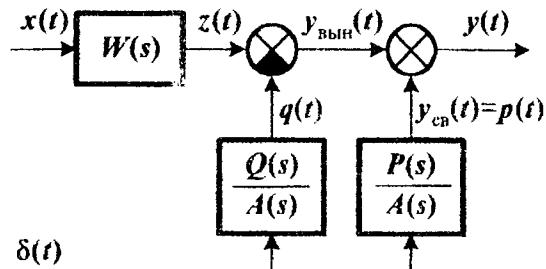


Рис. 5.3

Рассмотрим структуру движения и свойства его составных частей.
Свободное движение системы

$$y_{\text{ев}}(t) = L^{-1} \left\{ P(s)/A(s) \right\} = \sum_{i=1}^v c_{i\text{ев}}(t) e^{\chi_i t} \quad (5.3a)$$

порождается *ненулевыми* предНУ $y^{(i)}(-0) \forall i=\overline{0,m-1}$, возбуждающими систему только в начальный момент времени, что отражено на структурной схеме дельта-функцией. Оно непрерывно, без скачков продолжает предначальное движение, что следует из первой предельной формулы (3.2):

$$y_{\text{ев}}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s P(s)/A(s) = p_{n-1}/a_n = y(-0).$$

Вынужденное движение системы

$$y_{\text{вын}}(t) = L^{-1} \left\{ W(s)X(s) - Q(s)/A(s) \right\} = \sum_{i=1}^{v_{\text{вын}}} c_{i\text{вын}}(t) e^{\chi_i t} \quad (5.3b)$$

порождается входным воздействием $x(t)$ с изображением $X(s) = B_x(s)/A_x(s)$ и его *ненулевыми* предНУ $x^{(i)}(-0) \forall i=\overline{0,m-1}$. Структура вынужденного движения определяется кратностью и расположением $v_{\text{вын}}$ корней χ_i полинома $A_{\text{вын}}(s) = A(s)A_x(s)$. Начальное значение вынужденного движения определим также по формуле (3.2):

$$y_{\text{вын}}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ W(s)x(0) - Q(s)/A(s) \right\} = (b_m/a_n) \Delta x(0) \lim_{s \rightarrow \infty} s^{m-n} =$$

$$= \begin{cases} (b_m/a_n) \Delta x(0) & \text{при } n=m, \\ 0 & \text{при } n>m, \\ \text{sgn}(b_m/a_n) \infty & \text{при } n<m. \end{cases}$$

С учетом непрерывности свободного движения *полное движение* системы

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_{\text{вын}}(t) \mathbf{l}(t) \quad (5.4)$$

корректно вычисляет начальное $y(0)$ и предначальное $y(-0)$ значения. Скачок выходного сигнала равен $\Delta y(0) = y_{\text{св}}(0) + y_{\text{вын}}(0) - y_{\text{св}}(-0) - y_{\text{вын}}(0)$. При $n < m$ система имеет коэффициент статической прямой связи $D = b_n/a_n$, а входной скачок $\Delta x(0)$ дает на выходе скачок $D\Delta x(0)$. При $n > m$ выходной скачок отсутствует, а при $n < m$ ПФ имеет прямую связь дифференцирующего типа и входной скачок порождает на выходе дельта-функцию и ее производные.

При вычислении оригиналов в (5.3) числители и знаменатели дробно-рациональных функций допускается сокращать на общие множители, так как вычеты по полюсам, совпадающим с нулями ПФ, равны нулю. В то же время не рекомендуется *посспешное сокращение полиномов ПФ на одинаковые множители*, так как в (5.3a) будет потеряна составляющая свободного движения $c_{icb}(t)e^{st_i}$, соответствующая сокращенному полюсу s_i .

В реальных системах входное воздействие $x(t)$ имеет свое описание $x_k(t)$ на каждом из N интервалов времени $[t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, N}$, в том числе скачки на границах интервалов. *Алгоритм расчета переходного процесса* в системе с ПФ $W(s)$, кусочно определенным входным воздействием $x(t)$ и заданными предНУ $y^{(i)}(-0) \forall i = \overline{0, n-1}$ включает следующие шаги в цикле $k = \overline{1, N}$.

- 1. По предНУ $y^{(i)}(t_{k-1}-0)$ и $x^{(i)}(t_{k-1}-0)$ вычисляются полиномы $P(s)$ и $Q(s)$.
- 2. По оригиналу $x_k(t)$ в смещенном времени $\tau = t - t_k$ находится изображение $X_k(s)$.
- 3. По формуле (5.2) вычисляется изображение $Y_k(s)$.
- 4. С помощью формулы разложения Хевисайда или таблицы преобразований Лапласа определяются оригиналы $y_k(\tau)$ в смещенном и $y_k(t)$ в реальном времени.
- 5. Рассчитываются предНУ $y^{(i)}(t_k-0)$ и $x^{(i)}(t_k-0)$ для следующего временного интервала $[t_k, t_{k+1}]$ как конечные условия текущего интервала. □

Основные недостатки данного алгоритма заключаются в необходимости вычислять на каждом интервале производные функции и предНУ для следующего интервала. Можно избежать этих трудоемких операций, представив входной сигнал суммой полу бесконечных *смещенных* составляющих:

$$x(t) = \sum_{k=0}^N x_k(t-t_k) \mathbf{l}(t-t_k), \quad 0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N, \quad (5.5)$$

в которой t_k - моменты изменения описания входного сигнала. Изображения входного и выходного сигналов с учетом запаздываний t_k равны

$$X(s) = \sum_{k=0}^N X_k(s) e^{-st_k}, \quad Y(s) = \sum_{k=0}^N W(s) X_k(s) e^{-st_k} + \frac{P(s) - Q(s)}{A(s)} = \sum_{k=0}^N Y_k(s) e^{-st_k} + Y_{-0}(s),$$

где $X_k(s)$ и $Y_k(s) = W(s)X_k(s)$ - изображения *несмешенных* сигналов входа $x_k(t)$ и выхода $y_k(t)$, а $Y_{-0}(s)$ - изображение реакции системы на ненулевые НУ по входу и выходу в нулевой момент времени. Отсюда получаем формулу расчета выходного сигнала

$$y(t) = \sum_{k=0}^N y_k(t-t_k) l(t-t_k) + y_{-0}(t), \quad (5.6)$$

где $y_k(t) = L^{-1}\{W(s)X_k(s)\}$ - несмешенная реакция на несмешенную k -ю составляющую входного сигнала; $y_{-0}(t) = L^{-1}\{(P(s)-Q(s))/A(s)\} = y_{\text{cb}}(t) - q(t)$ - реакция на предНУ.

В отличие от предыдущего алгоритма в (5.6) не требуется вычислять производные, а предНУ используются только один раз для получения $y_{-0}(t)$. Еще более простой, но *приближенный* метод построения переходного процесса основан на *кусочно-постоянной аппроксимации* входного сигнала (рис. 5.4):

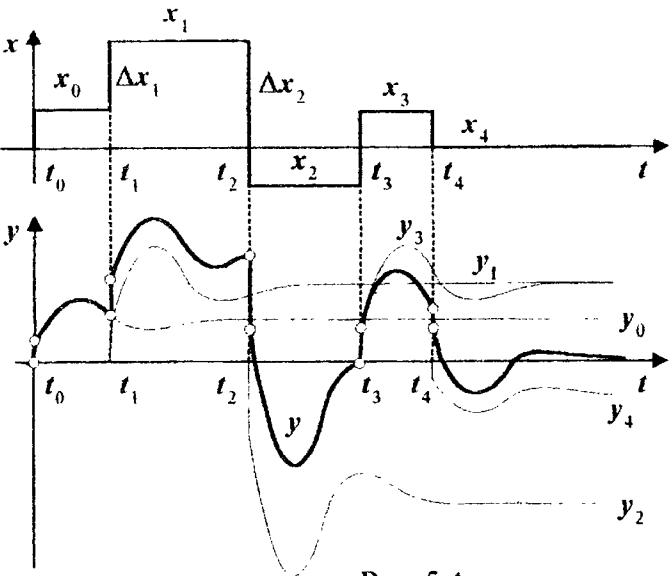
$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 l(t-t_0) + \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} (x_k - x_{k-1}) l(t-t_k), \\ t_0 < t_1 < \dots < t_N. \end{aligned}$$

Подставив в (5.6) реакции системы на ступенчатые составляющие входного воздействия $y_0(t) = x_0 h(t-t_0)$ и $y_k(t) = \Delta x_k h(t-t_k)$, где $h(t)$ - переходная характеристика, получим формулу

$$y(t) = x_0 h(t-t_0) + \sum_{k=1}^{N-1} \Delta x_k h(t-t_k) + y_{-0}(t), \quad (5.7)$$

особенно простую при нулевых предНУ, когда $y_{-0}(t)=0$.

Для численного расчета переходного процесса нужно дискретизировать входной сигнал по времени и уровню. Тогда выходной сигнал (5.7) есть *взвешенная сумма смещенных во времени ПХ и реакции на ненулевые предНУ*.



Для численного расчета переходного процесса нужно дискретизировать входной сигнал по времени и уровню. Тогда выходной сигнал (5.7) есть *взвешенная сумма смещенных во времени ПХ и реакции на ненулевые предНУ*.

П р и м е р 5.1. Объект описывается ДУ $y'' + 3y' + 2y = x' + x$ с полиномами ПФ $A(s) = 2 + 3s + s^2 = (1+s)(2+s)$, $B(s) = 1+s$ и предНУ $y(-0) = 1$, $y'(-0) = 0$. Входное воздействие имеет вид (рис. 5.5)

$$x(t) = (t+1)l(t) - (t+1)l(t-2) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0, \\ t+1 & \forall 0 \leq t < 2, \\ 0 & \forall t \geq 2. \end{cases}$$

Решение. В спектре ПФ $W(s) = (1+s)(2+s)/(1+s)$ полюс $s_1 = -1$ совпадает с нулем $\lambda_1 = -1$. Рассчитаем составляющие движения, зависящие от произвольных предНУ:

$$P(s) = a_1 y(-0) + a_2 y'(-0) + a_2 y(-0)s = 3y(-0) + y'(-0) + y(-0)s,$$

$$Q(s) = b_1 x(-0) = x(-0),$$

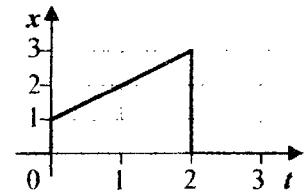


Рис. 5.5

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{cb}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{3y(-0) + y'(-0) + y(-0)s}{(1+s)(2+s)} \right\} = \\ = \frac{3y(-0) + y'(-0) - y(-0)}{2-1} e^{-t} + \frac{3y(-0) + y'(-0) - 2y(-0)}{1-2} e^{-2t} \\ = [2y(-0) + y'(-0)] e^{-t} - [y(-0) + y'(-0)] e^{-2t}, \\ q(t) = L^{-1} \left\{ \frac{x(-0)}{(1+s)(2+s)} \right\} = x(-0) (e^{-t} - e^{-2t}) \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Отметим, что если бы мы сократили полиномы ПФ на общий множитель $(1+s)$, то новая ПФ $W(s) = 1/(2+s)$ дала бы в (5.8) $y_{cb}(t) = y(-0)e^{-2t}$ и $q(t) = 0$.

На *первом временном интервале* $0 \leq t < 2$, $x(t) = t+1$, $X(s) = 1/s^2 + 1/s$,

$$W(s)X(s) = \frac{(1+s)^2}{s^2(1+s)(2+s)} = \frac{0,5}{s^2} + \frac{0,25}{s} - \frac{0,25}{2+s}. \text{ Подставив в (5.8) предНУ } y(-0)=1, y'(-0)=0 \text{ и}$$

$x(-0)=0$, получим $y_{cb}(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$, $q(t) = 0$ и с учетом (5.4) полное движение объекта

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} + (0,5t + 0,25 - 0,25e^{-2t})l(t), \quad (5.9)$$

в котором $0,5t + 0,25$ есть установившаяся, а $-0,25e^{-2t}$ - собственная составляющая вынужденного движения. Вычислив производную

$$\begin{aligned} y'(t) &= -2e^{-t} + 2e^{-2t} + (0,5 + 0,5e^{-2t})l(t) + (0,5t + 0,25 - 0,25e^{-2t})\delta(t) = \\ &= -2e^{-t} + 2e^{-2t} + (0,5 + 0,5e^{-2t})l(t), \end{aligned}$$

найдем предНУ для второго интервала времени:

$$y(2-0) \approx 1,498, y'(2-0) \approx 0,275, x(2-0) = 3. \quad (5.10)$$

Проверим правильность полученного решения (5.9) подстановкой его в ДУ объекта $y'' + 3y' + 2y = x' + x$ при $x(t) = (t+1) \cdot l(t)$ и $x'(t) = l(t) + \delta(t)$:

$$y''(t) = 2e^{-t} - 4e^{-2t} - e^{-3t} l(t) + \delta(t), \quad y'' + 3y' + 2y = (t+2) l(t) + \delta(t) = x' + x.$$

Если в (5.4) и (5.9) опустить функции $l(t)$, то получим $y(t) = 0,5t + 0,25 + 2e^{-t} - 1,25e^{-2t}$, $y'(t) = 0,5 - 2e^{-t} + 2,5e^{-2t}$, $y''(t) = 2e^{-t} - 5e^{-2t}$ и $y'' + 3y' + 2y \neq x' + x$.

На *втором временном интервале* $t \geq 2$, $x(\tau) = 0$, $X(s) = 0$, где $\tau = t-2$ - смещенное время. Подставив в (5.8) предНУ (5.10), получим $y_{cb}(\tau) = 3,271e^{-\tau} - 1,773e^{-2\tau}$, $q(\tau) = 3(e^{-\tau} - e^{-2\tau})$ и полное движение объекта

$$y(\tau) = 3,271e^{-\tau} - 1,773e^{-2\tau} + (3e^{-2\tau} - 3e^{-\tau})l(\tau), \quad (5.11)$$

сходящееся за 3 с к нулевой установившейся составляющей. Проверим правильность решения (5.11) подстановкой его в ДУ объекта при $x(\tau) = 0$ и $x'(\tau) = -3\delta(\tau)$:

$$y'(\tau) = -3,271e^{-\tau} + 2,1773e^{-2\tau} + (-6e^{-2\tau} + 3e^{-\tau})l(\tau),$$

$$y''(\tau) = 3,271e^{-\tau} - 4,1773e^{-2\tau} + (12e^{-2\tau} - 3e^{-\tau})l(\tau) - 3\delta(\tau),$$

$$y''(\tau) + 3y'(\tau) + 2y(\tau) = -3\delta(\tau), \quad x' + x = -3\delta(\tau).$$

Составим из уравнений (5.9) и (5.11) формулу переходного процесса в едином времени t по интервалам функционального описания $x(t)$ (рис. 5.6, а):

$$y(t) = \begin{cases} 0,5t + 0,25 + 2e^{-t} - 1,25e^{-2t} & \forall 0 \leq t < 2, \\ 0,271e^{-(t-2)} + 1,227e^{-2(t-2)} & \forall t \geq 2. \end{cases} \quad (5.12a)$$

Для расчета по формуле (5.6) представим входное воздействие в виде (5.5)

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) - 3x_1(t-2) - x_2(t-2), \quad x_1(t) = l(t), \quad x_2(t) = l(t)t.$$

Вычислим реакции объекта на составляющие $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= h(t) = L^{-1}\{W(s)/s\} = L^{-1}\{1/s(2+s)\} = 0,5(-e^{-2t})l(t), \\ y_2(t) &= \int_0^t h(\tau)d\tau = L^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s^2}\right\} = L^{-1}\left\{1/s^2(2+s)\right\} = 0,25(2t - 1 + e^{-2t})l(t). \end{aligned}$$

Переходный процесс на выходе объекта (рис. 5.6, б) с учетом свободного движения описывается единой формулой

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{\text{св}}(t) + y_1(t) + y_2(t) - 3y_1(t-2) - y_2(t-2) = \\ &= 2e^{-t} - e^{-2t} + 0,25(2t + 1 - e^{-2t})l(t) - 0,25(2t + 1 - e^{-2(t-2)})l(t-2), \end{aligned} \quad (5.12б)$$

которая в интервальной записи совпадает с (5.12а). \square

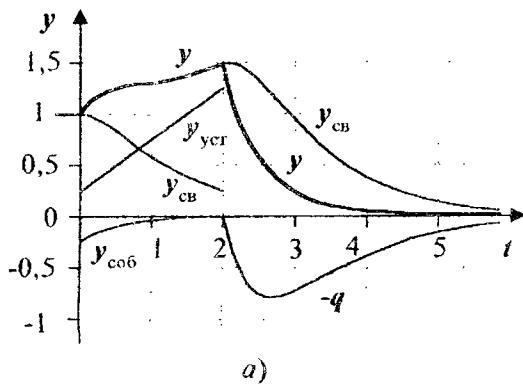
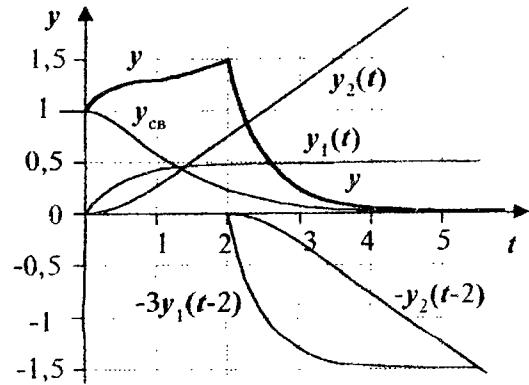


Рис. 5.6 а)



б)

Метод преобразования Лапласа, несомненно, наиболее быстр и удобен для расчета переходного процесса в динамической системе при наличии соответствующей таблицы. В отсутствие таблицы использование формул прямого и обратного преобразований Лапласа весьма трудоемко. Рассмотрим некоторые альтернативные методы моделирования движения систем при произвольных входных воздействиях.

5.3. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

Классический временной *метод вариации произвольных постоянных*, применяемый для расчета переходного процесса в системе, описываемой ДУ (5.1) с вектором предНУ

$$Y_{-0} = [y(-0) \ y'(-0) \ \dots \ y^{(n-1)}(-0)]^T, \quad (5.13)$$

включает следующие этапы.

1. Находятся корни s_i XII системы $A(s) = a_n \prod_{i=1}^v (s - s_i)^{n_i}$, где v - количество различных корней, а n_i - кратность корня s_i , причем $\sum_{i=1}^v n_i = n$.

2. Формируется **фундаментальный вектор-столбец** $Y(t) = [y_1(t) \dots y_n(t)]^T$ решений однородного ДУ $A(s)y(t) = 0$ со следующими элементами:

- простому действительному корню s_i соответствует решение $e^{s_i t}$;

- n_i -кратному действительному корню s_i соответствуют n_i линейно независимых решений $e^{s_i t}, te^{s_i t}, \dots, t^{n_i-1}e^{s_i t}$;

- паре простых комплексно-сопряженных корней $s_{i,i+1} = \eta_i \pm j\omega_i$ соответствуют два линейно независимых решения $e^{\eta_i t} \cos(\omega_i t)$ и $e^{\eta_i t} \sin(\omega_i t)$;

- n_i -кратной паре простых комплексно-сопряженных корней $s_{i,i+1} = \eta_i \pm j\omega_i$ соответствуют n_i пар линейно независимых решений

$$\begin{cases} e^{\eta_i t} \cos(\omega_i t), te^{\eta_i t} \cos(\omega_i t), \dots, t^{n_i-1}e^{\eta_i t} \cos(\omega_i t), \\ e^{\eta_i t} \sin(\omega_i t), te^{\eta_i t} \sin(\omega_i t), \dots, t^{n_i-1}e^{\eta_i t} \sin(\omega_i t). \end{cases}$$

Решение однородного ДУ с точностью до произвольных постоянных c_i , составляющих вектор-строку $C = [c_1 \dots c_n]$, имеет вид

$$y_o(t) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t) = CY(t). \quad (5.14)$$

3. Составляется невырожденная $n \times n$ -матрица **Вронского**

$$V(t) = a_n \begin{bmatrix} y_1(t) & y'_1(t) & \dots & y_1^{(n-1)}(t) \\ y_2(t) & y'_2(t) & \dots & y_2^{(n-1)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n(t) & y'_n(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = a_n \begin{bmatrix} Y(t) & Y'(t) & \dots & Y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

с $\det\{V(t)\} \neq 0$, так как функции $y_i(t)$ и их производные линейно независимы.

4. Для получения решения неоднородного ДУ (5.1) произвольные константы c_i заменяются переменными функциями $c_i(t)$, производные которых находятся решением системы n линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c'_1(t)y_1(t) + \dots + c'_n(t)y_n(t) = 0, \\ c'_1(t)y'_1(t) + \dots + c'_n(t)y'_n(t) = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ c'_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + \dots + c'_n(t)y_n^{(n-1)}(t) = B(s)x(t)/a_n, \end{cases}$$

или в матричной форме $C'(t)V(t) = [0 \dots 0 \ 1]B(s)x(t)$, откуда

$$C'(t) = [0 \dots 0 \ 1]V^{-1}(t)B(s)x(t) = V_n(t)B(s)x(t), \quad (5.15)$$

где $V_n(t)$ - последняя строка матрицы

$$V^{-1}(t) = \begin{bmatrix} V_1(t) \\ \vdots \\ V_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11}(t) & \dots & v_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{n1}(t) & \dots & v_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Интегрированием системы (5.15) с точностью до постоянного вектора K находим

$$\text{вектор } C(t) = K + \int_0^t V_n(\tau) B(s)x(\tau)d\tau.$$

5. Подстановка $C(t)$ в (5.14) вместо вектора C дает решение неоднородного ДУ (5.1):

$$y(t) = KY(t) + \left(\int_0^t V_n(\tau) B(s)x(\tau)d\tau \right) Y(t).$$

6. Из этого выражения и его $n-1$ производных при $t=-0$ находится вектор K на основе предНУ (5.13): $Y_{-0}^T = KV(-0)/a_n \Rightarrow K = a_n Y_{-0}^T V^{-1}(-0)$.

7. Решение неоднородного ДУ (5.1) с предНУ (5.13) имеет вид

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{a_n Y_{-0}^T V^{-1}(-0) Y(t)}_{y_{\text{св}}(t)} + \underbrace{\left(\int_0^t V_n(\tau) B(s)x(\tau)d\tau \right) Y(t)}_{y_{\text{вын}}(t)} = \\ &= a_n \sum_{i=1}^n y_i(t) \sum_{j=1}^n y_{ji}(-0) y^{(j-1)}(-0) + \sum_{i=1}^n y_i(t) \int_{-0}^t v_{ni}(\tau) \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Свободная составляющая $y_{\text{св}}(t)$ переходного процесса (5.16) порождается ненулевыми предНУ (5.13). Как вектор $Y(t)$ фундаментальных решений однородного ДУ и матрица Вронского $V(t)$, так и структура свободного движения системы и его устойчивость зависят только от коэффициентов ХП $A(s)$.

Вынужденная составляющая $y_{\text{вын}}(t)$ переходного процесса порождается ненулевым входным воздействием $x(t)$ и его производными. Зависимость от m производных обусловлена степенью полинома $B(s)$, равной m . Из-за дифференцирования скачков $x(t)$ или его производных вынужденное движение может включать скачки и дельта-функции. В связи с этим полное движение системы должно записываться в виде (5.4).

Как и в частотном методе, расчет переходного процесса можно выполнять отдельно по интервалам функционального описания входного воздействия либо целиком на всем интервале моделирования. В последнем случае предНУ учитываются только один раз и не требуется сопряжения интервалов друг с другом по конечным и начальным условиям.

Пример 5.2. Решить пример 5.1 методом вариации произвольных постоянных.

Решение. Во избежание потери составляющих свободного движения нельзя сокращать полиномы $A(s)$ и $B(s)$ на $(1+s)$. Система второго порядка имеет следующие полюсы ПФ, фундаментальную систему решений, прямую и обратную матрицы Вронского: $s_1 = -1$, $s_2 = -2$, $y_1(t) = e^{-t}$, $y_2(t) = e^{-2t}$, $V(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{-2t} & -2e^{-2t} \end{bmatrix}$, $V^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t & -e^{2t} \\ e^t & -e^{2t} \end{bmatrix}$. По (5.16) получаем:

- свободное движение, совпадающее с (5.8):

$$y_{\text{св}}(t) = [y(-0) \ y'(-0)] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = (2y(-0) + y'(-0))e^{-t} - (y(-0) + y'(-0))e^{-2t} = 2e^{-t} - e^{-2t};$$

- вынужденное движение при

$$x(t) = (t+1) l(t) - (t+1) l(t-2), \quad x'(t) = l(t) + \delta(t) \cdot l(t-2) - 3\delta(t-2),$$

$$B(s)x(t) = x(t) + x'(t) = (t+2) l(t) + \delta(t) \cdot (t+2) l(t-2) - 3\delta(t-2);$$

$$y_{\text{вын}}(t) = \int_0^t [e^\tau - e^{-2\tau}] (x(\tau) + x'(\tau)) d\tau = \left[\frac{e^{-\tau}}{2} \right]_0^t - 0,25(2t+1 - e^{-2t})l(t) - 0,25(2t+1 - 5e^{-2(t-2)})l(t-2);$$

- полное движение (5.4), совпадающее с (5.12):

$$\begin{aligned} y(t) &= 2e^{-t} - e^{-2t} + 0,25(2t+1 - e^{-2t})l(t) - 0,25(2t+1 - 5e^{-2(t-2)})l(t-2) = \\ &= \begin{cases} 0,5t + 0,25 + 2e^{-t} - 1,25e^{-2t} & \forall 0 \leq t < 2, \\ 0,271e^{-(t-2)} + 1,227e^{-2(t-2)} & \forall t \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

□

5.4. МЕТОД ИНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ

Второй альтернативный метод расчета переходного процесса без применения преобразования Лапласа использует ИХ $w(t)$ блока, через который проходит входной сигнал $x(t)$ [1,2,3]. Выход этого блока *при нулевых начальных условиях*

$$z(t) = \int_0^t w(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t x(\tau)w(t-\tau)d\tau \quad (5.17)$$

называется *интегралом Дюамеля* (4.4) с *ядром* $w(t)$. Благодаря встречным направлениям интегрирования ядра и входного сигнала, выражения (5.17) называются также *интегралами свертки*. В соответствии с выводом, следуемым после (4.4), $z(t)$ есть оригинал изображения $Z(s) = W(s)X(s)$, где $W(s)$ - передаточная функция блока.

Согласно (5.4) и структурной схеме на рис. 5.3, выход системы формируется как $y(t) = y_{\text{св}}(t) + \{z(t) - q(t)\} l(t)$ из следующих интегралов Дюамеля:

- *свободного движения* $y_{\text{св}}(t) = \int_0^t p(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = p(t)$ с ядром $p(t)$ - импульсной ха-

рактеристикой блока с ПФ $P(s)/A(s)$, возбуждающего систему ненулевыми предНУ выхода $y^{(i)}(-0) \forall i = \overline{0, n-1}$. Функция $p(t)$ является решением ДУ $A(s)p(t) = P(s)\delta(t)$;

- части вынужденного движения $\int_0^t q(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = q(t)$ с ядром $q(t)$ - импульсной ха-

рактеристикой блока с ПФ $Q(s)/A(s)$, возбуждающего систему ненулевыми предНУ входа $x^{(i)}(-0) \forall i = \overline{0, m-1}$. Функция $q(t)$ является решением ДУ $A(s)q(t) = Q(s)\delta(t)$;

- части вынужденного движения $z(t) = \int_0^t w(\tau)x(t-\tau)d\tau$ с ядром $w(t)$, являющимся

решением ДУ $A(s)w(t) = B(s)\delta(t)$.

Для выделения в *вынужденном движении* собственной $y_{\text{соб}}(t)$ и установившейся $y_{\text{уст}}(t)$ составляющих запишем

$$y_{\text{вын}}(t) = \int_0^t w(\tau)x(t-\tau)d\tau - q(t) = \int_0^t x(\tau)w(t-\tau)d\tau - q(t) \quad (5.18)$$

относительно момента начала внешнего воздействия $t_0 = 0$:

$$y_{\text{вын}}(t) = \int_{t_0}^t x(\tau)w(t-\tau)d\tau - q(t).$$

Установившийся процесс в устойчивой системе в момент времени t равен [2]

$$y_{\text{уст}}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} y_{\text{вын}}(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)w(t-\tau)d\tau - \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} q(t) = \int_0^{t-t_0} w(v)x(t-v)dv, \quad (5.19)$$

так как вследствие необходимого условия устойчивости (4.5а)

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} q(t) = \lim_{t-t_0 \rightarrow \infty} q(t) = 0.$$

Вычитая (5.19) из (5.18), получим *собственное движение*

$$y_{\text{соб}}(t) = - \int_t^\infty w(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (5.20)$$

Отсюда видно, что *в устойчивой системе собственное движение (5.20) затухает, а вынужденное сходится к установившемуся:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{соб}}(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} y_{\text{вын}}(t) = y_{\text{уст}}(t).$$

Как и в ранее описанных методах, если входной сигнал не имеет единого функционального описания на всем интервале моделирования, то, представив его в виде (5.5), получим выходную переменную (5.6) в виде

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t w(t-\tau) \sum_{k=0}^N x_k(\tau-t_k) \delta(\tau-t_k) d\tau + y_{-0}(t) = \sum_{k=0}^N \int_{t_k}^t w(t-\tau) x_k(\tau-t_k) d\tau + y_{-0}(t) = \\ &= \sum_{k=0}^N \int_0^{t-t_k} w(t-t_k-\tau) x_k(\tau) d\tau + y_{-0}(t) = \sum_{k=0}^N y_k(t-t_k) \delta(t-t_k) + y_{-0}(t). \end{aligned}$$

где интегралы Дюамеля $y_k(t) = \int_0^t w(t-\tau) x_k(\tau) d\tau$ есть реакции системы на *несмещенные* входные сигналы $x_k(t)$ при нулевых начальных условиях. В частности, кусочно-постоянное описание $x(t)$ (рис. 5.4) дает формулу (5.7).

Пример 5.3. Решить пример 5.1 методом интеграла Дюамеля.

Решение. Предварительно по формуле интегрирования по частям получим выражение $\int f(t)\delta'(t)dt = f(0)\delta(t) - f'(0)$. Определим необходимые ИХ решением соответствующих ДУ:

$$1) w''(t) + 3w'(t) + 2w(t) = \delta'(t) + \delta(t).$$

$$w(t) = \int_{-0}^t \left[e^{\tau} - e^{2\tau} \right] (\delta(\tau) + \delta'(\tau)) d\tau = \left[\frac{e^{-t}}{1-2t} \right] = \left[\delta(t) 1 - \delta(t) \right] \left[\frac{e^{-t}}{1-2t} \right] = e^{-2t};$$

$$2) p''(t) + 3p'(t) + 2p(t) = y(-0)\delta'(t) + (3y(-0) + y'(-0))\delta(t) = \delta'(t) + 3\delta(t).$$

$$p(t) = \int_0^t [e^{\tau} - e^{-2\tau}] (3\delta(\tau) + \delta'(\tau)) d\tau = \left[\frac{e^{-\tau}}{-2} \right]_0^t - [2 + \delta(t) - 1 - \delta(t)] \left[\frac{e^{-\tau}}{-2} \right]_0^t = 2e^{-t} - e^{-2t};$$

$$3) q''(t) + 3q'(t) + 2q(t) = x(-0)\delta(t) \Rightarrow q(t) = 0.$$

Рассчитаем интегралы Диоамеля для входных воздействий $x_1(t) = l(t)$ и $x_2(t) = l(t)t$:

$$y_1(t) = \int_0^t w(\tau) l(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = 0.5(1 - e^{-2t})l(t),$$

$$y_2(t) = \int_0^t w(\tau)(t-\tau) l(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-2\tau}(t-\tau) d\tau = 0.25(2t - 1 + e^{-2t})l(t).$$

Переходный процесс на выходе объекта описывается формулой (5.126). \square

5.5. МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

Современные методы анализа и синтеза САУ предполагают использование компьютеров для решения трудоемких в вычислительном плане задач. К таким задачам относится моделирование переходных процессов при произвольных входных воздействиях. Разработано множество алгоритмов решения разнообразных ДУ. Каждый алгоритм требует определенной формы задания исходных параметров системы для моделирования ее движения.

Метод моделей в пространстве состояний (МПС) основан на представлении ДУ $A(s)y(t) = B(s)x(t)$, в котором степень m полинома числителя $B(s)$ не превышает степени n полинома знаменателя $A(s)$, в виде системы n линейных ДУ первого порядка

$$\begin{cases} v'_1(t) = a_{11}v_1(t) + \dots + a_{1n}v_n(t) + b_1x(t), \\ \dots \\ v'_n(t) = a_{n1}v_1(t) + \dots + a_{nn}v_n(t) + b_nx(t) \end{cases} \quad (5.21a)$$

и алгебраического уравнения выходной переменной

$$y(t) = c_1v_1(t) + \dots + c_nv_n(t) + Dx(t). \quad (5.21b)$$

Эти уравнения имеют эквивалентную векторную форму

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + Bx(t), \\ v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \dots c_n], \end{cases} \quad (5.22)$$

в которой $v_i(t) \forall i=1,n$ - *переменные состояния* модели, однозначно и достаточно определяющие изменение ее выхода $y(t)$ в зависимости от изменения входа $x(t)$ и вектора начального состояния $v(-0)$. Матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ и коэффициент D связывают переменные состояния с входной и выходной переменными.

Векторная форма МПС позволяет компактно записать аналогичное (5.16) решение задачи моделирования:

$$v(t) = e^{At} v(-0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bx(\tau) d\tau, \quad y(t) = Ce^{At} v(-0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bx(\tau) d\tau + Dx(t). \quad (5.23)$$

Матричная экспонента $e^M = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{i!}$ - абсолютно сходящийся ряд,

вычисляемый за конечное число шагов с любой наперед заданной точностью; I - единичная матрица размерности $n \times n$.

В (5.22) и (5.23) требуется знать вектор предначального состояния $v(-0)$. Для его получения составим систему n предначальных векторных уравнений

$$\begin{cases} y(-0) = Cv(-0) + Dx(-0), \\ y'(-0) = Cv'(-0) + Dx'(-0) = CAv(-0) + CBx(-0) + Dx'(-0), \\ \dots \\ y^{(n-1)}(-0) = CA^{n-1}v(-0) + CA^{n-2}Bx(-0) + \dots + CBx^{(n-2)}(-0) + Dx^{(n-1)}(-0), \end{cases}$$

имеющую решение

$$v(-0) = H^{-1} \begin{bmatrix} y(-0) \\ y'(-0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(-0) \end{bmatrix} - H^{-1} L \begin{bmatrix} x(-0) \\ x'(-0) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(-0) \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

с блочными матрицами

$$H = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CB & D & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & \dots & CB & D \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Матрица H называется *матрицей наблюдаемости*. Ее невырожденность позволяет оценить вектор состояния модели по измерениям входа и выхода системы. Совокупность формул (5.23)-(5.25) дает аналитическое решение задачи построения переходного процесса в МПС с известными параметрами $\{A, B, C, D\}$ и заданными предНУ входной и выходной переменных.

Рассмотрим *методы получения параметров МПС*. Основная трудность заключается в выборе переменных состояния. Согласно (5.21), они должны представлять процессы, в которых скорости изменения некоторых величин зависят от значений этих же величин и входного воздействия. Количество различных МПС бесконечно из-за свободы выбора переменных состояния. Из множества возможных параметров $\{A, B, C, D\}$, имеющих всего $n^2 + 2n + 1$ коэффициент, можно выделить некоторые особенные *канонические* (регулярные) формы (*КФ*). Число независимых коэффициентов КФ должно быть равно $n + m + 1$ - числу коэффициентов *приведенной ПФ* системы

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}, \quad (5.26)$$

полученной делением полиномов ПФ $W(s) = B(s)/A(s)$ на старший коэффициент $a_n \neq 0$ полинома $A(s)$ и дополнением полинома числителя фиктивными слагаемыми $b_{m+1}s^{m+1} = \dots = b_n s^n = 0$. Остальные $n^2 + n - m$ параметров КФ - числа 0 и 1.

В первой главе рассмотрена последовательность получения канонической струк-

турной схемы динамического объекта. Применим к ПФ (5.26) она изображена на рис. 5.7, а ее уравнения состояния (5.21) и параметры МПС (5.22) принимают вид

$$\begin{cases} v'_1 = v_2, \\ \dots \\ v'_{n-1} = v_n, \\ v'_n = -a_0 v_1 - \dots - a_{n-1} v_n + x, \\ y = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n + D x, \end{cases} \quad (5.27)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [c_1 \dots c_n], \quad c_i = b_{i-1} - a_{i-1} b_n, \quad D = b_n. \quad (5.28)$$

Заметим, что прямая связь от входа к выходу существует лишь при равных степенях полиномов $B(s)$ и $A(s)$, так как при $m=n$ в (5.27) и (5.28) получим $D \neq 0$. При $m < n$ прямая связь отсутствует ($D=0$), а при $m < n-1$ матрица C имеет нулевые коэффициенты $c_{m+2} \dots c_n$. Таким образом, КФ имеет $n+m+1$ независимый параметр.

Полученная МПС не вполне удобна для расчета переходных процессов по (5.23) и (5.24), так как ее матрица наблюдаемости H - общего вида. Целесообразно строить МПС с единичной H . Для этого нужна матрица $C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ и структурная схема на рис. 5.8. Уравнения состояния этой модели имеют следующий вид:

$$\begin{cases} v'_1 = v_2 + \beta_1 x, \\ \dots \\ v'_{n-1} = v_n + \beta_{n-1} x, \\ v'_n = -a_0 v_1 - \dots - a_{n-1} v_n + \beta_n x, \\ y = v_1 + D x. \end{cases} \quad (5.29)$$

Рис. 5.8

Рассчитаем параметры модели, выразив переменные состояния в (5.29) через входную и выходную переменные:

$$v_i = s^{i-1} y - \sum_{j=0}^{i-2} \beta_{i-1-j} s^j x - D s^{i-1} x \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Подставив эти зависимости в формулу $s v_n = -a_0 v_1 - \dots - a_{n-1} v_n + \beta_n x$ и сгруппировав подобные слагаемые, получим уравнение

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i y + s^n y = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\beta_{n-i} + \sum_{j=i+1}^{n-1} a_i \beta_{j-i} + a_i D \right) s^i x + D s^n x.$$

Сравнивая его с операторным уравнением $\sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i y + s^n y = \sum_{i=0}^n b_i s^i x$, получим рекуррентную и матричную формулы расчета параметров МПС:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad D = b_n,$$

$$\beta_i = b_n - \sum_{j=1}^{i-1} a_{n-i+j} \beta_j - a_{n-i} b_n \quad \forall i = 1, n, \quad (5.30)$$

$$\begin{bmatrix} D \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Это решение всегда существует, так как обращается треугольная матрица с единичной диагональю. Коэффициент прямой связи $D \neq 0$ лишь при $m=n$. При $m < n$ прямая связь отсутствует, а при $m < n-1$ матрица B имеет нулевые коэффициенты $\beta_1 \div \beta_{n-m-1}$. Таким образом, КФ имеет $n+n-(n-m-1)=n+m+1$ независимый параметр.

Каноническую модель (5.29), (5.30) удобно использовать для расчета переходных процессов программным методом, например, в среде пакета MathCAD, имеющего широкий набор встроенных функций для решения обыкновенных ДУ и удобные графические средства отображения результатов вычислений. Несмотря на различные методы решения, каждая функция требует задания следующих величин:

- само ДУ в каноническом виде $v'(t) = F(v, t, \dots)$. Должна быть определена векторная функция $F(v, t, \dots) \in \mathbb{R}^n$ векторного аргумента $v \in \mathbb{R}^n$, времени t и, возможно, других ранее определенных аргументов, например, входного воздействия $x(t)$. Вместо единичной функции $I(t)$ можно использовать аналогичную функцию MathCAD $\Phi(t)$;
- границы временного интервала $t \in [t_0, t_K]$ и число K подинтервалов между точками вывода решения $t_k = t_0 + \frac{t_K - t_0}{K} k$;
- начальное значение вектора $v(t_0)$;
- при необходимости матрица Якоби J размерности $n \times (n+1)$: $J = \left[\frac{\partial F}{\partial t} \mid \frac{\partial F}{\partial v} \right]$.

В результате расчета функции возвращают $(K+1) \times (n+1)$ -матрицу (рис. 5.9), левый столбец которой содержит отсчеты времени от t_0 до t_K , а строки оставшейся части заполнены векторами решений $v(t_k)$.

Перечислим функции MathCAD, предназначенные для решения обыкновенных ДУ:

1) rkfixed(v, t_0, t_K, K, F) - использует хорошо зарекомендовавший себя метод Рунге - Кутта четвертого порядка с постоянным шагом интегрирования $(t_K - t_0)/K$;

2) Rkadapt(v, t_0, t_K, K, F) - аналогична функции rkfixed, но выполняет адаптацию шага интегрирования к скорости изменения решения, что повышает точность на быстрых и ускоряет расчет на медленных участках решения;

3) Bulstoer(v, t_0, t_K, K, F) - дает повышенную точность для гладких решений;

4) Stiffb(v, t_0, t_K, K, F, J) - использует метод функции Bulstoer для решения жест-

	t_0	$v(t_0)$	\vdots	t_1	$v(t_1)$	\vdots	t_K	$v(t_K)$

Рис. 5.9

ких ДУ;

5) Stiffr(v, t_0, t_K, K, F, J) - использует метод Розенброка для решения жестких ДУ.

При построении графика переходного процесса по оси абсцисс откладываются значения t_k первого столбца матрицы решений (рис. 5.9), а по оси ординат - значения $y(t_k) = v_1(t_k) + Dx(t_k)$, формируемые из элементов второго столбца и дискрет входного воздействия.

□ **Пример 5.4.** Решить пример 5.1 методом пространства состояний с помощью программы MathCAD.

Решение. Ниже приведен листинг MathCAD-программы с решением задачи моделирования переходного процесса.

 $a := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $Y0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $X0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $p := \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot b$

$tk := 6$ $K := 600$ $x(t) := (t + 1) \cdot \Phi(t) \cdot \Phi(2 - t)$

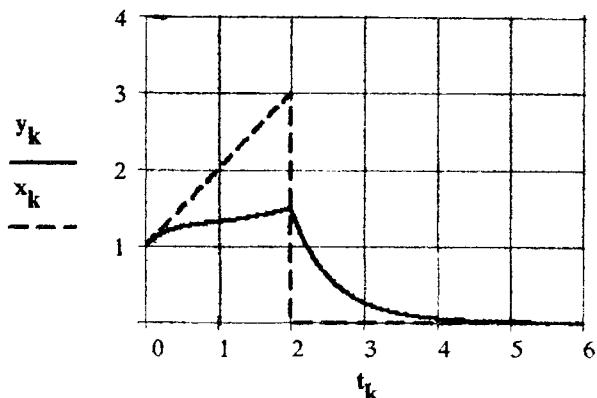
$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$ $B := \text{submatrix}(p, 1, 2, 0, 0)$ $C := (1 \ 0)$ $D := p_0$

$L := \begin{bmatrix} D & 0 \\ (C \cdot B)_0 & D \end{bmatrix}$ $F(t, v) := A \cdot v + B \cdot x(t)$ $v0 := Y0 - L \cdot X0$

$M := Rkadapt(v0, 0, tk, K, F)$

$k := 0..K$ $t_k := M_{k, 0}$

$x_k := x(t_k)$ $y_k := M_{k, 1} + D \cdot x_k$



$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ L &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & v0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Результат моделирования полностью совпадает с графиками $y(t)$, полученными другими методами. □

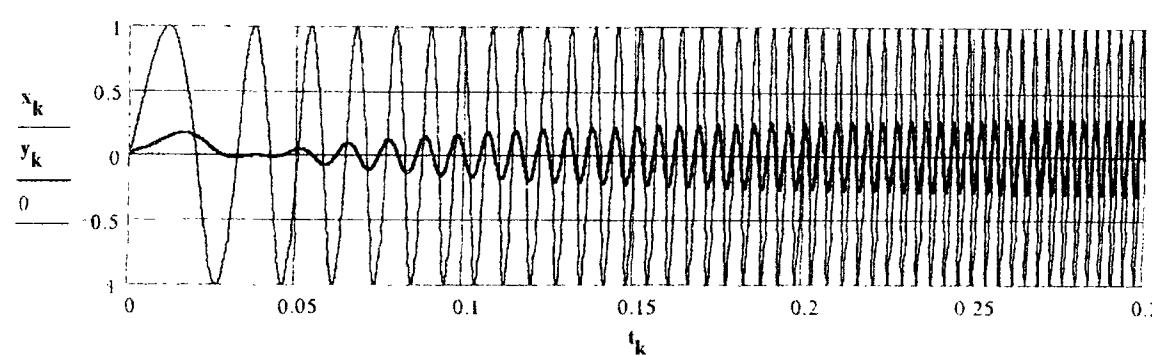
□ **Пример 5.5.** Рассчитать переходный процесс на выходе схемы моста Вина - Робинсона (пример 1.6), описываемой ДУ (1.14) $3y + 9Ty' + 3T^2y'' = x + T^2x''$. Входное напряжение представляет собой линейно частотно-модулированное (ЛЧМ) колебание единичной амплитуды: $x(t) = \sin((\omega_0 + \Omega t)t)$, где ω_0 - начальное значение частоты при $t=0$, а $\Omega = (\omega_K - \omega_0)/t_K$ - скорость изменения частоты с ω_0 до ω_K за время t_K . По-

строить графики $x(t)$ и $y(t)$ для следующих исходных данных: $\omega_c = 1/T = 100\pi$ рад/с, $\omega_0 = \omega_c/\Delta$, $\omega_K = \omega_c\Delta$, $\Delta \approx 3.16$, $t_K = 0.3$ с. Проанализировать полученные результаты совместно с ЧХ схемы (пример 2.2).

Решение. Ниже приведен листинг MathCAD-программы с решением задачи расчета переходного процесса на выходе схемы моста Вина - Робинсона методом переменных состояния. Параметр девиации частоты $\Delta = \sqrt{10}$ задан так, чтобы диапазон частот ЛЧМ сигнала $\omega_0 \leq \omega(t) \leq \omega_K$ составлял 1 дек, а частота ω_c , на которой согласно ЛАЧХ (рис. 2.11) происходит полное подавление колебаний, располагалась в его середине (в логарифмическом масштабе).

В результате моделирования наглядно проявляются свойства схемы моста как режекторного фильтра, согласующиеся с ее ЛЧХ. Увеличение частоты входного сигнала при $\omega(t) < \omega_c$ приводит к постепенному уменьшению амплитуды выходных колебаний от 0,333 вплоть до их полного исчезновения. Дальнейшее увеличение частоты вновь увеличивает амплитуду до предельного уровня 0,333, что равно коэффициенту усиления схемы на высоких частотах. Что касается фазового сдвига, то при $\omega(t) < \omega_c$ он отрицательный (выходной сигнал отстает от входного), а при $\omega(t) > \omega_c$ - положительный (пики $y(t)$ опережают пики $x(t)$), что также соответствует построенной на рис. 2.11 ЛФЧХ $\Phi(\omega)$.

$$\begin{aligned}
 M & \quad \Gamma_{\text{ц}} = 2\pi \quad \omega_c = 50 \cdot \Gamma_{\text{ц}} \\
 a & := \begin{bmatrix} \omega_c^2 \\ 3 \cdot \omega_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} \omega_c^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p := \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot b \quad \Delta := \sqrt{10} \\
 A & := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & a_1 \end{bmatrix} \quad B := \text{submatrix}(p, 1, 2, 0, 0) \\
 C & := (1 \ 0) \quad D := p_0 \quad \omega_0 = 15.811 \cdot \Gamma_{\text{ц}} \quad \omega_c = 50 \cdot \Gamma_{\text{ц}} \quad \omega_k = 158.114 \cdot \Gamma_{\text{ц}} \\
 t_k & := 0.3 \quad K := 3000 \quad \omega(t) := \omega_0 + \frac{\omega_k - \omega_0}{t_k} \cdot t \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.87 \cdot 10^4 & -942.478 \end{bmatrix} \\
 x(t) & := \sin(\omega(t) \cdot t) \quad F(t, v) := A \cdot v + B \cdot x(t) \quad k := 0..K \\
 M & := \text{Rkadapt}(v, 0, t_k, K, F) \quad t_k := M_{k,0} \quad B = \begin{bmatrix} 314.159 \\ 2.961 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \\
 x_k & := x(t_k) \quad y_k := M_{k,1} + D \cdot x_k \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0.333
 \end{aligned}$$



ГЛАВА 6. ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

6.1. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ЧАСТОТНОГО СИНТЕЗА САУ

Сложная проблема создания САУ с хорошими статическими и динамическими свойствами включает следующие *основные задачи*:

1) *обеспечение устойчивости* (стабилизация) системы и повышение запаса ее устойчивости;

2) *повышение точности регулирования в статическом режиме*, или обеспечение астатизма;

3) *улучшение показателей качества переходных процессов* (уменьшение времени регулирования, перерегулирования и колебательности).

Исходя из требований к статическим и динамическим свойствам САУ необходимо найти оптимальную с точки зрения выбранных критериев структуру (состав элементов системы) и определить параметры элементов. Эти данные позволяют определить *желаемые характеристики* системы на основе *компромисса* между качеством и точностью, с одной стороны, и простотой технической реализации - с другой.

Обеспечение устойчивости и желаемого качества регулирования в САУ достигается двумя способами:

1) целенаправленным выбором основных элементов системы. К функционально необходимым элементам САУ относятся датчики сигналов, измерительные устройства, усилители мощности, преобразователи сигналов, исполнительные устройства. Они выбираются по каталогам на основе требований к развиваемой мощности, быстродействию, предельным скоростям и ускорениям, допустимым статическим погрешностям, помехоустойчивости и т.д.;

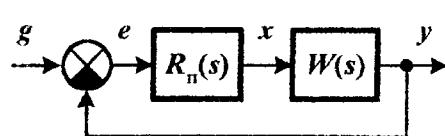
2) если имеющаяся система не удовлетворяет желаемым характеристикам, то наиболее действенным способом обеспечения желаемых свойств САУ является введение в нее дополнительного элемента, который исправляет (корректирует) поведение системы в нужном направлении.

Корректирующее устройство (регулятор) - это функциональный элемент САУ, доставляющий ЗС необходимые свойства: устойчивость и желаемые показатели качества переходных процессов.

Как отмечалось во введении, регулятором в широком смысле является вся САУ, за исключением объекта. Задачей регулятора в узком смысле является выполнение аналоговых, логических и арифметических операций по расчету управления.

Рассмотрим *основные типы регуляторов* в САУ и их свойства.

1. *Последовательный регулятор* с ПФ $R_n(s)$ (рис. 6.1) включается в прямую цепь системы непосредственно после сравнивающего элемента или после предварительного усилителя. Передаточная функция ЗС с последовательным регулятором равна



$$W_3(s) = \frac{R_n(s)W(s)}{1 + R_n(s)W(s)}. \quad (6.1)$$

Данное устройство может, например, формировать производную от ошибки регулирования $e(t)$, что, как мы увидим ниже, увеличивает запас устойчивости и улучшает качество переходного процесса.

При использовании интеграла и производной $e(t)$ обеспечивается астатизм системы управления (ошибка $e_{уст} = 0$), устойчивость и качество переходного процесса. Применяются и более сложные последовательные регуляторы.

Рис. 6.1

2. Прямой параллельный регулятор с ПФ $R_{\text{пп}}(s)$ (рис. 6.2) включается параллельно какой-либо подсистеме $W_1(s)$ в прямой цепи системы $W(s) = W_1(s)W_2(s)$. Сравнивая (6.1) с ПФ ЗС с данным типом регулятора

$$W(s) = \frac{W_1(s) + R_{\text{пп}}(s)W_2(s)}{1 + W(s) + R_{\text{пп}}(s)W_2(s)}, \text{ получим условия эквивалентности регуляторов}$$

$$R_{\text{пп}}(s) = 1 + R_{\text{пп}}(s)/W_1(s), \quad R_{\text{пп}}(s) = (R_{\text{пп}}(s) - 1)W_1(s), \quad (6.2a)$$

позволяющие перейти от одного типа регулятора к другому, возможно, более простому в технической реализации.

Прямой параллельный регулятор может быть полезным, например, для устранения в подсистеме с ПФ $W_1(s) = (1 - \tau_1 s)/(1 + T_1 s)$ правого нуля $\lambda_1 = +1/\tau_1$, дающего в переходном процессе отрицательное перерегулирование, выбором

$$R_{\text{пп}}(s) = K_{\text{пп}} > \frac{\tau_1}{T_1} \Rightarrow W_1(s) + K_{\text{пп}} = \frac{1 + K_{\text{пп}} + (K_{\text{пп}} T_1 - \tau_1)s}{1 + T_1 s}, \quad \lambda_{\text{пп}} = -\frac{1 + K_{\text{пп}}}{K_{\text{пп}} T_1 - \tau_1} < 0$$

или для придания подсистеме форсирующих свойств без использования дифференциаторов, усиливающих помехи:

$$W_1(s) = \frac{K_1}{1 + T_1 s}, \quad R_{\text{пп}}(s) = K_{\text{пп}} \Rightarrow W_1(s) + K_{\text{пп}} = \frac{K_1 + K_{\text{пп}} + K_{\text{пп}} T_1 s}{1 + T_1 s}.$$

3. Обратный параллельный регулятор $R_{\text{он}}(s)$ (рис. 6.3) охватывает локальной ПОС или ООС какой-либо элемент системы, чаще всего оконечный каскад усилителя или исполнительный элемент.

Сравнивая с (6.1) ПФ

$$W_3(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s) + R_{\text{он}}(s)W_2(s)}$$

ЗС с данным типом регулятора, получим условия эквивалентности регуляторов

$$R_{\text{пп}}(s) = \frac{1}{1 \pm R_{\text{он}}(s)W_2(s)}, \quad R_{\text{он}}(s) = \pm \frac{1 - R_{\text{пп}}(s)}{R_{\text{пп}}(s)W_2(s)}. \quad (6.2b)$$

Локальная ПОС используется для увеличения статического коэффициента усиления элемента в существенно большем диапазоне, чем при последовательном включении усилителя. Например, охватив подсистему $W_2(s) = K_2/(1 + T_2 s)$ контуром ПОС с ПФ усилителя $R_{\text{он}}(s) = K_{\text{он}} < 1/K_2$, получим

$$\frac{W_2(s)}{1 - W_2(s)R_{\text{он}}(s)} = \frac{K}{1 + T_2 s}, \quad K = \frac{K_2}{1 - K_2 K_{\text{он}}} \gg K_2.$$

При выборе $K_{\text{он}} > 1/K_2$ подсистема приобретает инвертирующее свойство: $K < 0$.

Локальная ООС широко применяется в автоматике для стабилизации и улучшения качества работы элементов системы, склонных к неустойчивости или слишком инерционных (с большой постоянной времени). При этом неустойчивые или близкие к границе

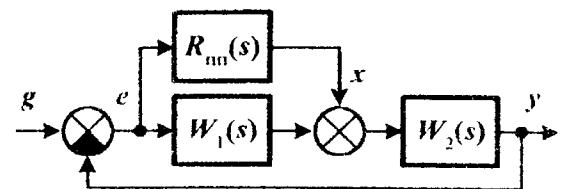


Рис. 6.2

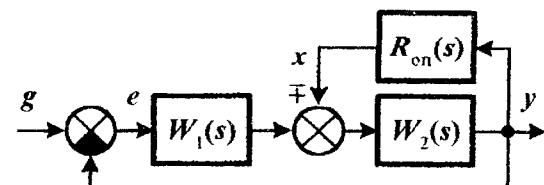


Рис. 6.3

устойчивости полюсы ПФ $W_2(s)$, охваченной локальной ООС, сдвигаются влево, что либо делает систему устойчивой, либо повышает степень устойчивости, быстродействие и уменьшает колебательность:

а) $W_2(s) = \frac{K_2}{1-T_2 s}$, $R_{\text{он}}(s) = T_{\text{он}} s$ при $T_{\text{он}} > \frac{T_2}{K_2} \Rightarrow \frac{W_2}{1+W_2 R_{\text{он}}} = \frac{K}{1+Ts}$ с постоянной времени $T = K_2 T_{\text{он}} - T_2 > 0$ устойчивого звена;

б) $W_2(s) = \frac{K_2}{1+T_2 s}$, $R_{\text{он}}(s) = K_{\text{он}}$ $\Rightarrow \frac{W_2}{1+W_2 R_{\text{он}}} = \frac{K}{1+Ts}$ с $T = \frac{T_2}{1+K_2 K_{\text{он}}} < T_2$;

в) $W_2(s) = \frac{K_2}{1+2\xi_2 T_2 s + T_2^2 s^2}$, $R_{\text{он}}(s) = T_{\text{он}} s \Rightarrow \frac{W_2}{1+W_2 R_{\text{он}}} = \frac{K_2}{1+2\xi_2 T_2 s + T_2^2 s^2}$ с коэффициентом демпфирования $\xi = \xi_2 + K_2 T_{\text{он}} / 2T_2 > \xi_2$. Выбрав постоянную времени гибкой ООС $T_{\text{он}} > 2(1-\xi_2)T_2/K_2$, можно из колебательного звена получить два апериодических, так как теперь $\xi > 1$.

Если в системе с локальной ООС в рабочем диапазоне частот выполняется условие $|W_2(j\omega)R_{\text{он}}(j\omega)| \gg 1$ или $L_2(\omega) + L_{\text{он}}(\omega) \geq 20 \text{ дБ}$, то ООС является *глубокой*. Тогда ПФ подсистемы, охваченной глубокой ООС,

равна $\frac{W_2(s)}{1+W_2(s)R_{\text{он}}(s)} \approx \frac{1}{R_{\text{он}}(s)}$, а изменения параметров этой подсистемы слабо влияют на свойства системы, определяемые только параметрами обратного параллельного регулятора. Например, неидеальный ОУ с коэффициентом усиления $K_y < \infty$, охваченный четырехполюсником с ПФ $W_0(s)$ (рис. 6.4, а), имеет структурную схему с ПФ $W(K_y) = K_y / (1 + K_y W_0)$ (рис. 6.4, б).

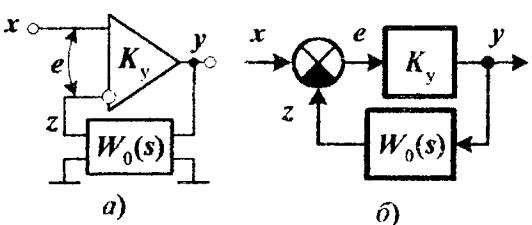


Рис. 6.4

Чем качественней ОУ ($K_y \rightarrow \infty$), тем ближе ПФ устройства к $W(\infty) = 1/W_0$. Принцип глубокой ООС – основной способ навязывания системе желаемых динамических и статических свойств и подавления нежелательных свойств.

4. Регулятор в обратной связи системы с ПФ $R_o(s)$ (рис.

6.5) является обобщением локальной ООС на всю систему и выполняет аналогичные функции применительно ко всей системе. Эквивалентность регулятора в ООС и последовательного регулятора устанавливается формулами

$$R_n(s) = \frac{1}{1 + (R_o(s) - 1)W(s)}, \quad R_o(s) = \frac{1 + R_n(s)(W(s) - 1)}{R_n(s)W(s)}. \quad (6.2b)$$

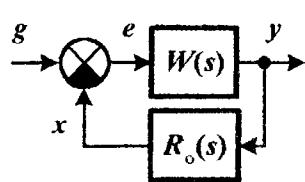


Рис. 6.5

Из всех типов регуляторов регулятор в ООС наиболее удобен при проектировании следящих систем с масштабированием уставки (роботов, манипуляторов, тренажеров, прецизионных устройств микроэлектроники), где требуется точное воспроизведение формы задающего воздействия с увеличением или уменьшением масштаба. Получим условия инвариантности воспроизведения уставки $g(t)$ на выходе ЗС $y(t)$ с масштабом M и требуемую ПФ регулятора в ООС:

$$W_3(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)R_o(s)} = M \Rightarrow R_o(s) = \frac{1}{M} - \frac{1}{W(s)}.$$

Отсюда при $M=1$ следует условие точного воспроизведения уставки на выходе системы: $R_o(s) = 1 - 1/W(s)$. По формулам эквивалентности (6.2в) получим ПФ соответствующего последовательного регулятора $R_{\text{п}}(s) = \frac{M}{1-M} \frac{1}{W(s)}$, откуда видно, что при $M=1$ в принципе невозможно точное слежение за изменяющейся во времени уставкой с помощью последовательного регулятора.

Как правило, условия инвариантности выполнимы лишь в определенном диапазоне частот. Если этот диапазон накрывает полосу пропускания системы, то при любых уставках $g(t)$ на выходе системы будет $y(t) \approx Mg(t)$. Удовлетворив условие инвариантности только на частоте $\omega=0$ выбором $R_o(s) = 1/M - 1/W(0)$, получим астатическую систему масштабного слежения без введения в контур управления интегратора, обычно замедляющего переходные процессы.

5. *Комбинированный регулятор по уставке и ошибке* (рис. 6.6) формирует управляющее воздействие $x(t) = x_g(t) + x_e(t)$ с изображением $X(s) = R_{\text{п}}(s)E(s) + R_g(s)G(s)$. Слагаемое $x_e(t) = R_{\text{п}}(s)e(t)$ есть *управление по ошибке* и решает главную задачу стабилизации системы. Второе слагаемое $x_g(t) = R_g(s)g(t)$ в виде прямой связи уставки с входом объекта есть *управление по уставке* и решает задачу улучшения динамических свойств ЗС.

Рассчитав ПФ ЗС

$$W_3(s) = \frac{(R_{\text{п}}(s) + R_g(s))W(s)}{1 + R_{\text{п}}(s)W(s)}.$$

сделаем три вывода:

1) введение в САУ регулятора по уставке $R_g(s)$ доставляет ей форсирующие свойства, увеличивая быстродействие в отработке уставки;

2) *условие инвариантности воспроизведения уставки* $W_3(s)=1$ дает ПФ регулятора по уставке $R_g(s)=1/W(s)$, точно отслеживающего любые изменения уставки $g(t)$. Удовлетворив условие статической инвариантности $W_3(0)=1$, получим ПФ регулятора $R_g(s)=K_g=1/W(0)$ системы слежения без введения в контур управления интегратора, замедляющего переходные процессы;

3) сравнивая $W_3(s)$ с (6.1), получим формулу перехода от комбинированной системы с регуляторами $R_{\text{п}}(s)$ и $R_g(s)$ к системе с последовательным регулятором, имеющим ПФ

$$R_{\text{посл}}(s) = \frac{R_{\text{п}}(s) + R_g(s)}{1 - W(s)R_g(s)}. \quad (6.2\Gamma)$$

6. *Комбинированный регулятор по возмущению и ошибке* с ПФ $R_b(s)$ и $R_{\text{п}}(s)$ предназначен для компенсации действующих на объект внешних (не управляющих) воздействий. Пусть точка приложения возмущения $f(t)$, проходящего через фильтр с ПФ $W_b(s)$, делит систему на две подсистемы с ПФ $W_1(s)$ и $W_2(s)$ (рис. 6.7). Система управления может включать ранее спроектированный регулятор по ошибке, например, последовательного типа $R_{\text{п}}(s)$.

Для компенсации возмущения необходимо, во-первых, его знать или измерить, а во-вторых, сформировать дополнительное управление, противодействующее возмуще-

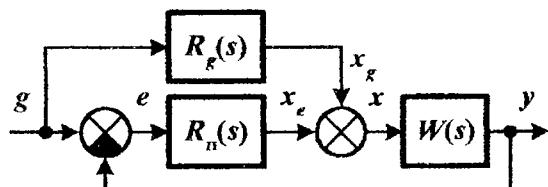


Рис. 6.6

нию. Записав операторное уравнение выхода системы $Y(s) = W_1(s)G(s) + W_f(s)F(s)$ с ПФ

$$W_1(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} \Big|_{f=0} = \frac{R_n(s)W(s)}{1+R_n(s)W(s)}, \quad W_f(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} \Big|_{g=0} = \frac{R_b(s)W(s) + W_b(s)W_2(s)}{1+R_n(s)W(s)},$$

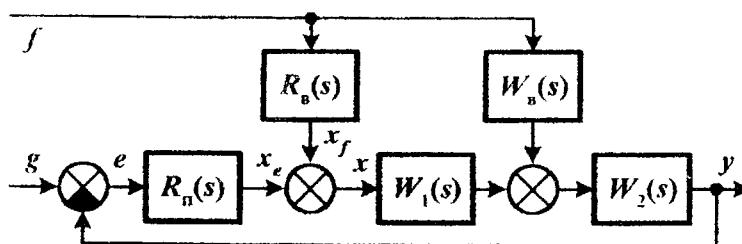


Рис. 6.7

сделаем два вывода:

1) *условие инвариантности по возмущению* $W_f(s) = 0$ дает ПФ регулятора по возмущению $R_b(s) = -W_b(s)/W_1(s)$, полностью компенсирующего любое возмущение $f(t)$. Удовлетворив *условие статической инвариантности*

$W_f(0) = 0$, получим ПФ регулятора $R_b(s) = K_b = -W_b(0)/W_1(0)$, полностью компенсирующего *постоянное* возмущение f_0 в установленном режиме;

2) проектирование главного регулятора по ошибке $R_n(s)$ может проводиться независимо от регулятора по возмущению $R_b(s)$, так как последний даже при неполной инвариантности слабо влияет на ХП ЗС, а значит, и на показатели ее качества.

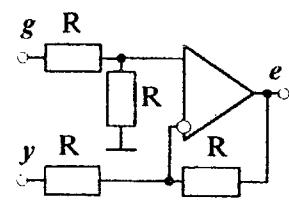


Рис. 6.8

В САУ применяются также сочетания различных типов регуляторов. Далее мы будем рассматривать системы управления с последовательным регулятором $R(s)$, имея в виду, что другие типы регуляторов могут быть пересчитаны к последовательному типу по формулам эквивалентности (6.2). Используемое во всех замкнутых САУ сравнивающее устройство, вычисляющее ошибку регулирования $e = g - y$, имеет простейшую реализацию на одном ОУ (рис. 6.8).

Исходными данными для проектирования регулятора являются:

1) передаточная функция $W(s)$ разомкнутого контура системы;

2) желаемые показатели качества функционирования ЗС: время регулирования t_p , перерегулирование σ , статические ошибки регулирования, запасы устойчивости по амплитуде L_3 и фазе Φ_3 и т.д.

Методика синтеза регулятора основана на соотношениях

$$W_{*}(s) = R(s)W(s), \quad L_{*}(\omega) = L_p(\omega) + L(\omega), \quad \Phi_{*}(\omega) = \Phi_p(\omega) + \Phi(\omega),$$

в которых индекс «*» обозначает *желаемые* ПФ и ЧХ разомкнутого контура, и на зависимости свойств ЗС (главное из них - устойчивость) от ЛЧХ разомкнутой. Отдельные участки ЛЧХ избирательно влияют на показатели качества.

Низкочастотная (НЧ) часть определяет погрешности регулирования в установленном режиме, от **среднечастотной (СЧ)** части зависят устойчивость, запасы устойчивости L_3 и Φ_3 , динамические показатели качества t_p и σ , а **высокочастотная (ВЧ)** часть должна максимально ослаблять влияние шумов на работу САУ. Каждая из задач обеспечения отдельного показателя качества решается соответствующими методами. Иногда несколько частных задач могут быть решены совместно, в других случаях они оказываются противоречивыми. В зависимости от приоритетов разработчик принимает компромиссное решение выбора варианта, облегчая второстепенные, на его взгляд, требования к системе управления.

6.2. МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ СТАТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ (низкочастотный синтез регуляторов)

6.2.1. Коэффициенты статических ошибок

Установившийся режим системы управления определяется НЧ частью ее ЛЧХ. Рассмотрим ПФ ошибки регулирования $e(t)$ в замкнутой САУ, разомкнутый контур которого имеет ПФ $W_{\infty}(s)$:

$$W_{\infty}(s) = \frac{B_{\infty}(s)}{A_{\infty}(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}, \quad e(t) = g(t) - y(t) = W_e(s)g(t),$$

$$W_e(s) = 1 - W_{\infty}(s) = \frac{1}{1 + W_{\infty}(s)} = \frac{A_{\infty}(s)}{A_{\infty}(s) + B_{\infty}(s)}.$$

Разложим ПФ ошибки в ряд Тейлора по степеням s :

$$W_e(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i s^i, \quad c_i = \frac{1}{i!} W_e^{(i)}(0) \left. \frac{d^i}{ds^i} \left\{ \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots}{a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)s + (a_2 + b_2)s^2 + \dots} \right\} \right|_{s=0}. \quad (6.3)$$

Тогда изображение и оригинал ошибки регулирования, а также выход системы при нулевых начальных условиях имеют вид

$$\begin{cases} E(s) = W_e(s)G(s) = c_0 G(s) + c_1 s G(s) + c_2 s^2 G(s) + \dots, \\ e(t) = L^{-1}\{E(s)\} = c_0 g(t) + c_1 g'(t) + c_2 g''(t) + \dots, \\ y(t) = g(t) - e(t) = (1 - c_0)g(t) - c_1 g'(t) - c_2 g''(t) - \dots. \end{cases} \quad (6.4)$$

Коэффициенты c_i называются *коэффициентами ошибок* и характеризуют относительное содержание уставки $g(t)$ и ее производных в функции ошибки $e(t)$. Конечно, эти коэффициенты можно вычислить по (6.3) непосредственным дифференцированием ПФ $W_e(s)$. Удобнее, однако, получить нужное количество коэффициентов $c_1 \dots c_N$ (обычно их требуется немного) делением полинома $A_{\infty}(s)$ на полином $A_{\infty}(s) + B_{\infty}(s)$:

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots \left| \begin{array}{c} a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)s + (a_2 + b_2)s^2 + \dots \\ c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots \end{array} \right. ,$$

$$c_0 = \frac{a_0}{a_0 + b_0}, \quad c_1 = \frac{a_1 - (a_1 + b_1)c_0}{a_0 + b_0}, \quad c_2 = \frac{a_2 - (a_1 + b_1)c_1 - (a_2 + b_2)c_0}{a_0 + b_0}. \quad (6.5a)$$

По индукции следуют рекуррентная и матричная формулы

$$c_i = \frac{1}{a_0 + b_0} \left(a_i - \sum_{j=1}^i (a_j + b_j) c_{i-j} \right) \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.5b)$$

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 + b_1 & a_0 + b_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_N + b_N & \dots & a_1 + b_1 & a_0 + b_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}. \quad (6.5b)$$

Недостающие в (6.5) коэффициенты a_i или b_i равны 0. Нижняя треугольная матрица в (6.5в) всегда не вырождена и имеет обратную.

6.2.2. Статические системы управления

Система управления, в которой коэффициент ошибки $c_0 \neq 0$, называется статической. Из (6.5) следует, что признак статизма - коэффициент $a_0 \neq 0$. Допустим, на входе статической системы действует постоянная уставка $g(t) = g_0$ (рис. 6.9). Тогда ошибка

регулирования, выход системы в установившемся режиме и относительная погрешность регулирования равны

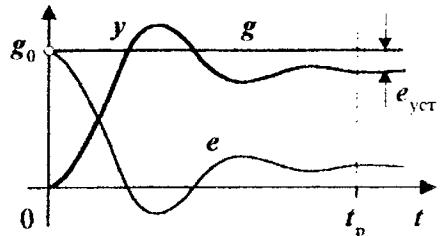


Рис. 6.9

$$e_{\text{уст}} = c_0 g_0 \neq 0,$$

$$y_{\text{уст}} = (1 - c_0) g_0 = g_0 - e_{\text{уст}} \neq g_0,$$

$$\delta_0 = \left| \frac{g_0 - y_{\text{уст}}}{g_0} \right| 100\% = |c_0| 100\%.$$

В статических САУ в принципе недостижимы нулевая статическая ошибка и точное слежение выхода за уставкой. По значениям коэффициента статической ошибки $c_0 \neq 0$ или относительной погрешности δ_0 статические САУ делятся на группы:

- *грубые*, в которых $|c_0| > 0,05$ или $\delta_0 > 5\%$;
- *обычные*, в которых $0,02 < |c_0| \leq 0,05$ или $2\% < \delta_0 \leq 5\%$;
- *точные*, в которых $0,01 < |c_0| \leq 0,02$ или $1\% < \delta_0 \leq 2\%$;
- *прецзионные*, в которых $|c_0| \leq 0,01$ или $\delta_0 \leq 1\%$.

Пусть $K = W(0)$ и $K_* = b_0/a_0 = W_*(0)$ - коэффициенты статического усиления исходной и желаемой систем, связанные по (6.5а) с соответствующими коэффициентами статических ошибок формулами $c_0^0 = 1/(1+K)$ и $c_0 = 1/(1+K_*)$. Для уменьшения статической ошибки $e_{\text{уст}}$ нужно увеличивать значение $K_* = KR(0)$. Так как ПФ $W(s)$ неизменяется, то увеличение K_* возлагается на регулятор $R(s)$. Это реализуется, например, включением в САУ последовательных регуляторов следующих видов.

1. Простейшее решение состоит в выборе *широкополосного усилителя* (рис. 6.10,а) с ПФ $R(s) = K_n > 1$, реализующего закон пропорционального (П) управления $x(t) = K_n e(t)$. Значение K_n , гарантирующее коэффициент ошибки $c_0 \leq c_0^0$, удовлетворяет условию

$$K_n \geq (1/c_0 - 1)/(1/c_0^0 - 1) = (1/c_0 - 1)/K. \quad (6.6a)$$

Влияние усилителя на ЧХ системы проявляется в подъеме ЛАЧХ на величину $L_n(\omega) = 20 \lg K_n > 0$ дБ при неизменности ЛФЧХ (рис. 6.10,б). При этом частота среза $\omega_{\text{ср}}$, смещающаяся вправо, может превысить граничную частоту ω_{t_p} , тем самым нарушая условия (4.23) устойчивости по Найквисту. Следовательно, существует и верхняя граница K_n , определяемая требованием устойчивости ЗС. С учетом желаемых запасов устойчивости по амплитуде L_3 и фазе ϕ_3 , верхняя граница усиления K_n вычисляется следующим образом:

1) определяется частота запаса ω_3 , на которой $\Phi(\omega_3) = \Phi_{1p} + \Phi_3$;

2) вычисляется амплитуда $L(\omega_3)$ и ее приращение $\Delta L = -L_3 - L(\omega_3) > 0$ до уровня L_3 ;

3) верхняя граница коэффициента усиления K_n находится как

$$K_n \leq 10^{0.05\Delta L}. \quad (6.66)$$

В случае несовместности неравенств (6.6) задача не имеет решения и требуется либо задать большее значение коэффициента c_0 , либо выбрать более сложную ПФ $R(s)$.

Пример 6.1. Дан объект с ПФ

$$\begin{cases} W(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s)}, \\ K = 2, T_1 = 50 \text{ с}, T_2 = 10 \text{ с}, T_3 = 1 \text{ с}. \end{cases} \quad (6.7)$$

Определить алгебраическими и частотными методами:

а) устойчивость, *раздельные* запасы устойчивости L_3^0 , Φ_3^0 и коэффициент статической ошибки c_0^0 в САУ без регулятора;

б) условия устойчивости ЗС в зависимости от значений K_n коэффициента усиления П-регулятора;

в) значения $K_n > 1$, при которых обеспечиваются *совместные* запасы устойчивости

$$L_3 \geq 6 \text{ дБ}, \Phi_3 \geq 30^\circ; \quad (6.8)$$

г) минимум коэффициента статической ошибки c_0 при запасах устойчивости (6.8).

Решение:

а) в соответствии с *алгебраическим* критерием Рауса - Гурвица, ХП ЗС без регулятора $C_3^0(s) = K + (1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s) = 3 + 61s + 560s^2 + 500s^3$ устойчив, так как все его коэффициенты одного знака (положительны) и $M_2 = 61 \cdot 560 - 3 \cdot 500 = 32660 > 0$.

Аналитическое решение по нелинейным ЛЧХ

$$L(\omega) = 20 \lg K - 10 \sum_{i=1}^3 \lg (1+T_i^2 \omega^2), \quad \Phi(\omega) = - \sum_{i=1}^3 \operatorname{arctg}(T_i \omega); \quad (6.9)$$

$$L(\omega_{cp}^0) = 0 \Rightarrow \omega_{cp}^0 = 0,0324 \text{ рад/с}, \quad \Phi(\omega_{cp}^0) = -78^\circ, \quad \Phi_3^0 = 102^\circ > 30^\circ;$$

$$\Phi(\omega_{1p}) = -180^\circ \Rightarrow \omega_{1p} = 0,349 \text{ рад/с}, \quad L(\omega_{1p}) = -30,5 \text{ дБ}, \quad L_3^0 = 30,5 \text{ дБ} > 6 \text{ дБ}.$$

Так как $\omega_{cp}^0 < \omega_{1p}$, то ЗС без регулятора устойчива и оба запаса устойчивости (6.8) в раздельности обеспечиваются.

Приближенное графическое решение по АЛЧХ получим с помощью подобных треугольников (три из них заштрихованы на рис. 6.11) с наклонами участков АЛАЧХ и АЛФЧХ, кратными -20 дБ/дек и -45 град/дек , и вычислив $20 \lg K = 6 \text{ дБ}$, $\lg(1/T_1) = -1,7$, $\lg(1/T_2) = -1$ и $\lg(1/T_3) = 0$:

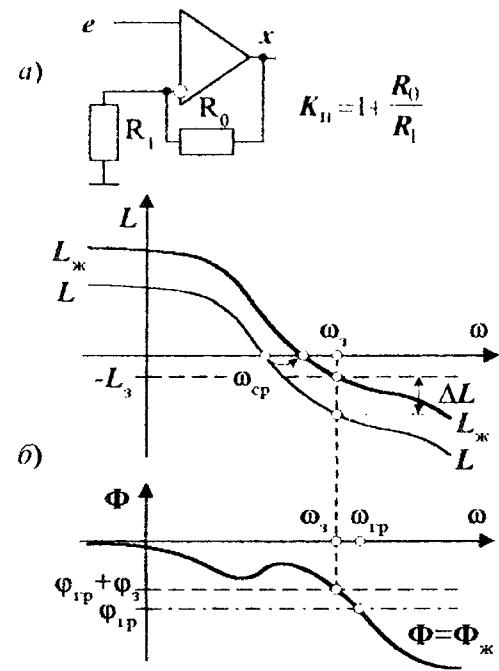


Рис. 6.10

$$L(\omega_{cp}^0) = 0 \Rightarrow \lg \omega_{cp}^0 = \lg(1/T_1) + \lg K = -1,4, \omega_{cp}^0 \approx 0,04 \text{ рад/с},$$

$$\Phi(\omega_{cp}^0) = 0^\circ - 45^\circ \cdot 0,7 - 90^\circ \cdot 0,6 = -85,5^\circ \Rightarrow \varphi_3^0 = 94,5^\circ > 30^\circ;$$

$$\Phi(\omega_{rp}) = -180^\circ \Rightarrow \lg \omega_{rp} = -45/90 = -0,5, \omega_{rp} \approx 0,316 \text{ рад/с},$$

$$L(\omega_{rp}) = 6 - 20 \cdot 0,7 - 40 \cdot 0,5 = -28 \text{ дБ} \Rightarrow L_3^0 = 28 \text{ дБ} > 6 \text{ дБ}.$$

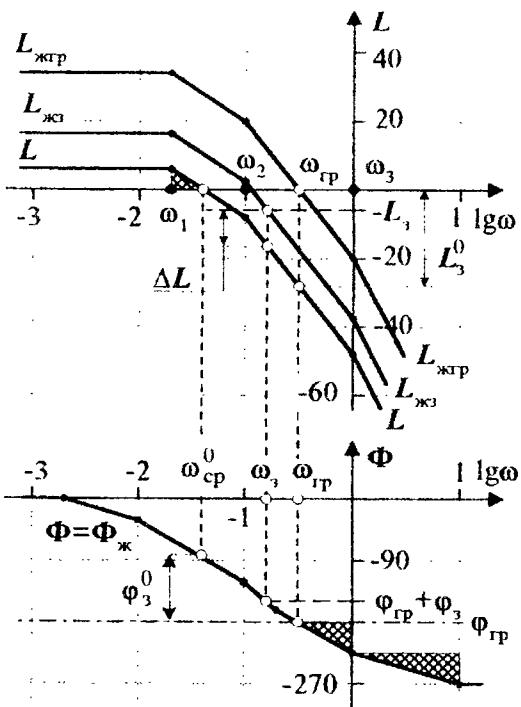


Рис. 6.11

где $K_{ж} = K_n K = 2K_n$. Учитывая требование $K_n > 1$, получим алгебраические условия устойчивости $2 < K_{ж} < 67,32$ и $1 < K_n < 33,66$.

Аналитическое решение получим на основе (6.9) по ЛЧХ разомкнутого контура с П-регулятором $L_{ж}(\omega) = 20\lg K_n + L(\omega)$, $\Phi_{ж}(\omega) = \Phi(\omega)$ из условий обеспечения границы устойчивости по Найквисту

$$\{\omega_{cp} = \omega_{rp} = 0,349 \text{ рад/с}\} \cap \{L_{ж}(\omega_{cp}) = 0\} \cap \{\Phi_{ж}(\omega_{rp}) = -180^\circ\}:$$

$$20\lg K_{жrp} = 10\lg \prod_{i=1}^3 (1+T_i^2 \omega_{rp}^2) \Rightarrow K_{жrp} = \sqrt{\prod_{i=1}^3 (1+T_i^2 \omega_{rp}^2)} = 67,32, K_{n rp} = 33,66.$$

Продолжая *графическое решение по АЛЧХ* (рис. 6.11), поднимем $L(\omega)$ вверх на $L_3^0 = 28 = 40 - 6 - 6$ дБ до выполнения условия $\omega_{cp} = \omega_{rp}$. Это эквивалентно введению в контур управления последовательного усилителя с коэффициентом усиления $K_{n rp} = 100/2/2 = 25$, что недалеко от истинного значения $K_{n rp} = 33,66$;

в) подставив ЧХ объекта

$$A(\omega) = K \sqrt{\prod_{i=1}^3 (1+T_i^2 \omega^2)}, \varphi(\omega) = -\sum_{i=1}^3 \operatorname{arctg}(T_i \omega) \quad (6.10)$$

Вычисленные приближенные значения ω_{cp}^0 , ω_{rp} , L_3^0 и φ_3^0 , во-первых, близки к их точным величинам, во-вторых, подтверждают, что ЗС без регулятора устойчива и оба запаса (6.8) в раздельности обеспечиваются.

Значение коэффициента статической ошибки $c_0^0 = 1/(1+K) = 0,33$ показывает, что *без регулятора ЗС является очень грубой* с относительной погрешностью воспроизведения постоянной уставки $\delta_0^0 = 33\%$;

б) характеристический полином ЗС с П-регулятором

$$\begin{aligned} C_3(s) &= K_n K + (1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s) = \\ &= K_{ж} + 1 + (T_1 + T_2 + T_3)s + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)s^2 + \\ &\quad + T_1 T_2 T_3 s^3 \end{aligned}$$

устойчив по Гурвицу при

$$-1 < K_{ж} < (T_1 + T_2 + T_3) \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) - 1 = 67,32,$$

с параметрами (6.7) и значения $K_s = 10^{0.05L_3} = 2$, $\varphi_{rp} = -180^\circ$, $\varphi_3 = 30^\circ$ в условия (4.26), взятые в форме нелинейных уравнений для границы устойчивости приведенной по амплитуде и фазе системы, определим частоту ω_3 и верхнюю границу коэффициента K_{ks} :

$$\varphi_{ks}(\omega_3) = -150^\circ \Rightarrow \omega_3 = 0,16 \text{ рад/с.}$$

$$A_{ks}(\omega_3) = 0,5 \Rightarrow K_{ks} = 0,5 \sqrt{\prod_{i=1}^3 (1+T_i^2 \omega_3^2)} = 7,734 \Rightarrow K_{ns} = 3,867 \text{ и } 1 < K_n \leq 3,867.$$

При этом частота среза $\omega_{cp} = 0,104 < \omega_{rp} = 0,349$.

Графическое решение на рис. 6.11: $\Phi(\omega_3) = -150^\circ$, $\Phi(0,1) = -45^\circ$, $0,7 - 90^\circ = -121,5^\circ \Rightarrow \lg \omega_3 = -1 + 28,5/135 = -0,789$, $L(\omega_3) = 6 - 20 \cdot 0,7 - 40 \cdot 0,211 = -16,44 \text{ дБ}$. Условия $A_{ks}(\omega_3) = 0,5$ и $\varphi_{ks}(\omega_3) = -150^\circ$ достигаются подъемом $L(\omega)$ вверх на $\Delta L = -L_3 - L(\omega_3) = 10,44 \text{ дБ}$, то есть вводом в контур управления усилителя с коэффициентом усиления $K_{ns} = 3,328$.

Таким образом, для совместного обеспечения запасов устойчивости П-регулятор должен иметь коэффициент усиления $1 < K_n \leq 3,328$, что близко к истинному интервалу $1 < K_n \leq 3,867$;

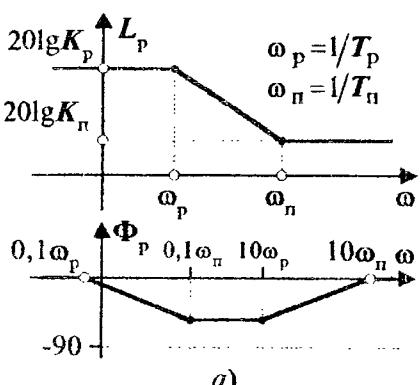
г) минимуму коэффициента статической ошибки c_0 соответствуют наивысшее допустимое положение $L_{ks}(\omega) = L_{ks}(\omega)$ и максимум $K_n = K_{ns}$. Тогда $c_0 = 1/(1+7,734) = 0,114$, то есть *минимальная относительная погрешность в системе (6.7) с П-регулятором составляет 11,4%*, что больше стандартной погрешности 5%. Полученная САУ является грубой. \square

2. При втором способе уменьшения статической ошибки, сохраняющем условия устойчивости, используется регулятор с ПФ и ЛЧХ (рис. 6.12, а)

$$\begin{cases} R(s) = K_p (1+T_n s)/(1+T_p s) = K_n (s+\omega_n)/(s+\omega_p), \\ L_p(\omega) = 20 \lg K_p + 10 \lg (1+T_n^2 \omega^2) - 10 \lg (1+T_p^2 \omega^2), \\ \Phi_p(\omega) = \arctg(T_n \omega) - \arctg(T_p \omega). \end{cases} \quad (6.11)$$

Он имеет схему реализации на рис. 6.12, б и отличается от П-регулятора дополнительным подъемом НЧ части ЛАЧХ на частотах, меньших ω_n , и завалом ЛФЧХ в центре диапазона частот $[0,1\omega_p, 10\omega_p]$ максимум на угол $\arctg \sqrt{K_p/K_n} - \arctg \sqrt{K_n/K_p} < 90^\circ$.

Четыре параметра K_p , K_n , T_p и T_n ПФ регулятора (6.11) связаны соотношением



a)

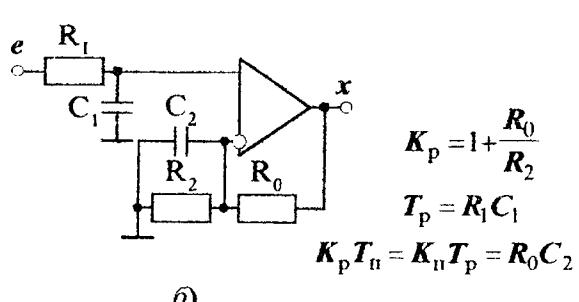


Рис. 6.12

$K_p/K_n = T_p/T_n = \omega_n/\omega_p$, то есть при знании любых трех из них всегда можно вычислить четвертый. Коэффициент статического усиления K_p находится по формуле (6.6а) обеспечения желаемой статической точности c_0 :

$$K_p \geq (1/c_0 - 1)/K_n. \quad (6.12a)$$

Выбор двух из трех оставшихся параметров должен обязательно обеспечить устойчивость ЗС с **желаемыми запасами устойчивости** L_3 и φ_3 . На границе устойчивости приведенной по амплитуде и фазе системы неравенства (4.26) обращаются в систему двух нелинейных уравнений с тремя неизвестными ω_3 , T_p и T_n :

$$\begin{cases} A(\omega_3)K_p \sqrt{1+T_n^2\omega_3^2}/\sqrt{1+T_p^2\omega_3^2} = 1/K_n, \\ \varphi(\omega_3) + \arctg(T_n\omega_3) - \arctg(T_p\omega_3) - \varphi_{rp} = \varphi_3. \end{cases} \quad (6.12b)$$

Задавая свободно параметр ω_3 в некотором диапазоне частот, возможно разрешить эту систему относительно $T_p(\omega_3)$ и $T_n(\omega_3)$.

Недоопределенность системы (6.12b) позволяет оптимизировать замкнутую САУ по дополнительному критерию. Например, можно выбрать решение с минимальным отношением $\tau = T_p/T_n$, что дает **минимальное отклонение желаемой ЛФЧХ $\Phi_x(\omega)$ от исходной $\Phi(\omega)$** после введения регулятора. По другому **критерию максимального быстродействия** минимизируется длительность переходного процесса $t_p \geq \pi/\omega_{cp}$, где частота среза есть корень нелинейного уравнения $A_x(\omega_{cp})=1$:

$$\omega_{cp} : A(\omega_{cp})K_p \sqrt{1+T_n^2\omega_{cp}^2}/\sqrt{1+T_p^2\omega_{cp}^2} = 1.$$

По третьему **критерию минимума скоростной ошибки** c_1 выбирается параметр ω_3 , при котором значение этого коэффициента ошибки из (6.5а) становится минимальным.

Подводя итог сказанному, приходится признать, что многопараметрический синтез ПФ регулятора (6.11) является весьма сложной задачей, требующей многократного решения системы нелинейных уравнений (6.12b) и оптимизации полученных решений по дополнительному критерию, который необходимо заранее задать. При многокритериальной оптимизации ищется определенный компромисс между решениями, оптимизирующими отдельные критерии.

Метод **приближенного расчета** параметров K_n и T_n (отсюда $T_p = T_n K_p / K_n$) заключается в выборе, во-первых, коэффициента общего усиления K_n из условия (6.6б) обеспечения запасов устойчивости на частоте ω_3 : $\Phi(\omega_3) = \varphi_{rp} + \varphi_3$, во-вторых, постоянной времени $T_n = 1/\omega_n$ из свойства совпадения $\Phi(\omega)$ и $\Phi_x(\omega)$ на частотах $\omega \geq \omega_3 \geq 10\omega_n$:

$$T_n \geq 10/\omega_3. \quad (6.12b)$$

Конечно, из-за погрешностей аппроксимации ЛЧХ такое быстрое решение не гарантирует точно заданных запасов устойчивости. В частности, запас φ_3 может, согласно (2.1), уменьшиться на величину до $5,71^\circ$.

■ **Пример 6.2.** Для объекта (6.7) разработать последовательный регулятор, доставляющий ЗС устойчивость с запасами (6.8) и относительной статической погрешностью $\delta_0 \leq 1\%$.

Решение. Для уменьшения коэффициента $c_0 = 0,33$ до желаемого значения $c_0 = 0,1$, согласно (6.6а), коэффициент статического усиления должен быть равен $K_p = (100 - 1)/2 = 49,5$. Остальные параметры регулятора найдем аналитическим и приближенным частотными методами.

Аналитическое решение. Построим с помощью MathCAD зависимости критериев $\tau(\omega_3)$, $t_p(\omega_3)$ и $c_1(\omega_3) = \frac{\sum T_i + T_p(\omega_3) - (\sum T_i + T_p(\omega_3) + K K_p T_n(\omega_3)) c_0}{1 + K K_p}$ от параметра $\omega_3 \in [0,022, 0,16]$ (рис. 6.13). По графику $c_1(\omega_3)$ выбираем оптимальную частоту запаса $\omega_3 = 0,11$ рад/с со значениями критериев $\tau = 24,69$, $t_p = 44,92$ с и $c_{1\min} = 7,58$ с. При этом параметры регулятора и ПФ (6.11) равны $K_p = 49,5$, $T_p = 734,16$ с, $T_n = 29,72$ с, $K_n = 2,01$,

$$R(s) = \frac{49,5(1+29,72s)}{1+734,16s} \quad (6.13a)$$

В приближенном решении (рис. 6.14) используем результаты задачи в) примера 6.1.

Вначале найдем уровень подъема статического участка ЛАЧХ желающей системы $L_*(0) = 20 \lg K_* = 39,91$ дБ.

Далее определяем, что для обеспечения обоих запасов устойчивости на частоте $\omega_3 = 10^{-0,789} = 0,1626$ рад/с нужен общий подъем ЛАЧХ на $\Delta L = -L_3 - L(\omega_3) = 10,44$ дБ, откуда $K_n = 3,328$. Выберем по (6.12в) постоянную времени $T_n = 61,5$ с, соответствующую частоте $\omega_n = 0,1\omega_3 = 0,01626$. Правее ω_n проводим $L_*(\omega)$ параллельно $L(\omega)$ и выше ее на 10,44 дБ.

Левее ω_n проводим участок $L_*(\omega)$ с наклоном -20 дБ/дек до пересечения с горизонтальным участком на уровне 39,91 дБ в точке $\lg \omega_p = -1,789 - \frac{39,91 - 16,44}{20} = -2,963$. Отсюда находим частоту $\omega_p \approx 0,00109$ и постоянную времени $T_p = 1/\omega_p = T_n K_p / K_n = 914,7$ с.

Таким образом, ПФ последовательного регулятора (6.11) примерно равна

$$R(s) = \frac{49,5(1+61,5s)}{1+914,7s} \quad (6.13b)$$

Истинные значения запасов устойчивости на частоте $\omega_3 = 0,1626$ рад/с составляют $7,49 > 6$ дБ по амплитуде и $24,04^\circ < 30^\circ$ по фазе. Γ

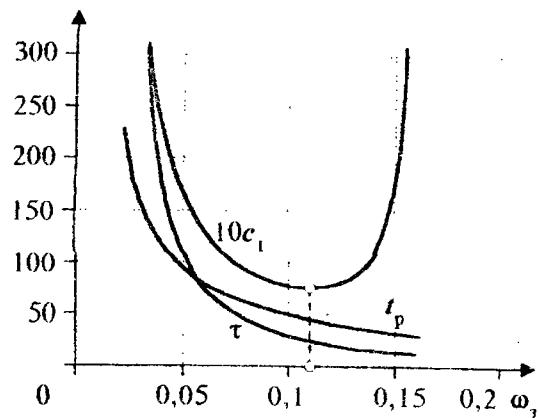


Рис. 6.13

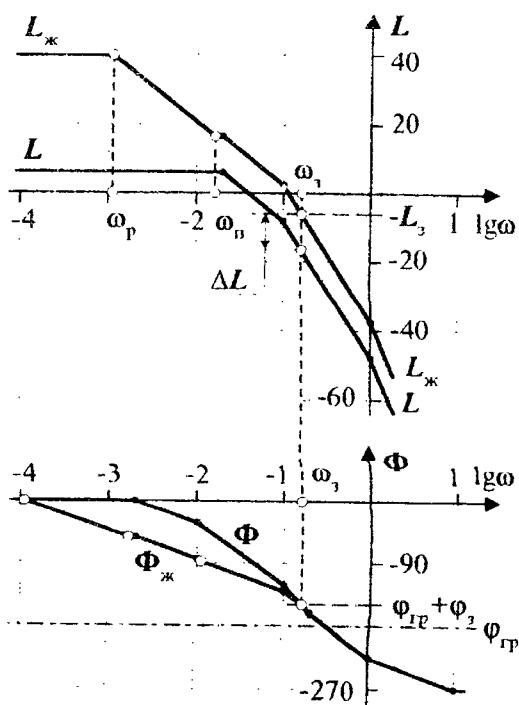


Рис. 6.14

6.2.3. Астатические системы управления

С помощью последовательного регулятора можно в принципе свести к нулю коэффициенты ошибок c_0, \dots, c_{v-1} , навязав системе *астатизм v-го порядка*. Изучим свойства систем с астатизмом низших порядков. Из (6.5) следует, что признаком астатизма v-го порядка является наличие в ПФ РС коэффициентов $a_0 = \dots = a_{v-1} = 0$.

Допустим, на входе САУ с астатизмом первого порядка ($v=1, c_0=0, c_1=a_1/b_0 \neq 0$)

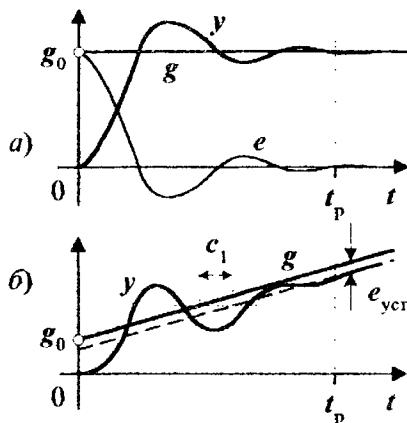


Рис. 6.15

действует постоянная уставка $g(t)=g_0$ (рис. 6.15, а). Тогда, согласно (6.4), ошибка регулирования, выход системы в установившемся режиме и относительная погрешность регулирования равны

$$e_{\text{уст}} = c_0 g_0 = 0, \delta_0 = 0\%, y_{\text{уст}} = (1 - c_0) g_0 = g_0.$$

Если уставка является линейной временной функцией (например, угол поворота локатора или вала двигателя) $g(t)=g_0 + g_1 t$ (рис. 6.15, б), то в установившемся режиме выход ЗС отстает от уставки на постоянное время, равное c_1 (с):

$$e_{\text{уст}} = c_1 g_1 \neq 0, y_{\text{уст}} = g(t) - c_1 g_1 = g_0 + g_1(t - c_1).$$

В САУ с астатизмом первого порядка коэффициент скорости ошибки c_1 имеет физический смысл отставания установленного выхода системы от линейной уставки.

В системе с астатизмом второго порядка ($v=2, c_0=c_1=0, c_2=a_2/b_0 \neq 0$) постоянная и линейная уставки отслеживаются точно, а равноускоренная $g(t)=g_0 + g_1 t + g_2 t^2$ - с постоянной ошибкой $e_{\text{уст}} = 2c_2 g_2 \neq 0$.

При астатизме v-го порядка полиномиальные уставки v-1-го порядка $g(t)=g_0 + g_1 t + \dots + g_{v-1} t^{v-1}$ отслеживаются точно, а уставки v-го порядка - с постоянной установившейся ошибкой $e_{\text{уст}} = v! c_v g_v \neq 0$, где $c_v = a_v/b_0$. В статических же системах полиномиальные уставки отслеживаются с нарастающей ошибкой. Понятно, что *статические системы непригодны для слежения за быстрыми целями*, для прецизионного управления технологическим оборудованием в микроэлектронике, микрохирургии, то есть там, где недопустимы любые ошибки, особенно статические.

Из уравнения (6.5в) следует, что *условием реализации в ЗС статической инвариантности v-го порядка $c_0=\dots=c_{v-1}=0, c_v \neq 0$ является астатизм разомкнутого контура v-го порядка $a_0=\dots=a_{v-1}=0, a_v \neq 0$* . Такая система имеет контурную ПФ

$$W_k(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{s^v (a_v + a_{v+1} s + \dots + a_n s^{n-v})},$$
 а ее структурная схема содержит v последовательно соединенных интеграторов. Замыкание астатической системы единичной ООС должно дать устойчивую САУ с ХП

$$C_3(s) = b_0 + b_1 s + \dots + b_{v-1} s^{v-1} + (a_v + b_v) s^v + \dots + (a_n + b_n) s^n, \quad (6.14)$$

имеющим желаемый спектр. Из НУУ (4.7) следует, что *все коэффициенты b_0, \dots, b_{v-1} и $a_v + b_v, \dots, a_n + b_n$ ХП (6.14) должны быть ненулевыми и одного знака*. Необходимые и достаточные условия устойчивости даны в (4.11).

Объект может сам иметь интегрирующие звенья. Тогда ЗС и без регулятора будет астатической. В отсутствие у объекта астатизма он должен быть создан регулятором, вносящим в спектр ПФ $W_{\infty}(s) = R(s)W(s)$ нужное количество нулевых полюсов.

Рассмотрим методы выбора последовательного регулятора, создающего в ЗС астатизм первого порядка, и свойства получаемых систем. Исходную систему полагаем статической с конечным коэффициентом статического усиления $K = W(0)$.

1. Простейшее решение состоит в использовании в контуре управления **интегратора** (рис. 6.16, а) с НФ $R(s) = K_u/s$, ЛАЧХ $L_p(\omega) = 20 \lg K_u - 20 \lg \omega$ и ЛФЧХ

$\Phi_p(\omega) = -90^\circ$, реализующего закон **интегрального управления** $x(t) = K_u \int_0^t e(\tau) d\tau$. Для достиженения желаемой скоростной ошибки c_1 нижняя граница коэффициента усиления интегратора K_u выбирается из условия

$$K_u \geq 1/Kc_1. \quad (6.15a)$$

Влияние интегратора на ЧХ системы проявляется в сдвиге ЛФЧХ вниз на 90° и изменении наклонов участков ЛАЧХ на -20 дБ/дек (рис. 6.16, б). При этом граничная частота ω_{rp} сдвигается далеко влево, что создает условия для неустойчивости ЗС даже при структурно устойчивом объекте. Следовательно, может существовать верхняя граница K_u , определяемая требованием устойчивости ЗС. С учетом желаемых запасов устойчивости L_3 и Φ_3 верхняя граница K_u вычисляется следующим образом (рис. 6.16, б):

1) строится ЛФЧХ $\Phi_{\infty}(\omega) = \Phi(\omega) - 90^\circ$;

2) определяется частота запаса ω_3 из условия

$$\Phi_{\infty}(\omega_3) = \Phi_{rp} + \Phi_3;$$

3) строится ЛАЧХ $L_{\infty}(\omega)$, проходящая через точку $(\omega_3, -L_3)$ с наклонами участков на 20 дБ/дек меньше, чем у ЛАЧХ $L(\omega)$. Низкочастотный участок $L_{\infty}(\omega)$ или его продолжение с наклоном -20 дБ/дек пересекаются с осью L в точке $20 \lg K_{\infty}$;

4) вычисляется разность амплитуд $\Delta L = 20 \lg K_{\infty} - L(0)$;

5) верхняя граница коэффициента усиления K_u задается условием

$$K_u \leq 10^{0.05 \Delta L}. \quad (6.15b)$$

Неравенства (6.15) могут оказаться несовместными из-за конфликта требований статической точности (поднимает $L_{\infty}(\omega)$) и устойчивости (опускает $L_{\infty}(\omega)$). В этом случае следует изменить требования к системе либо использовать иной метод обеспечения астатизма.

Серьезным недостатком И-управления является значительное снижение быстродействия ЗС в связи с обратной зависимостью $t_p \geq \pi/\omega_{cp}$ времени регулирования от частоты среза и уменьшением последней.

Пример 6.3. Для объекта (6.7) разработать последовательный И-регулятор, обеспечивающий в ЗС устойчивость с запасами (6.8) и минимальное значение коэффи-

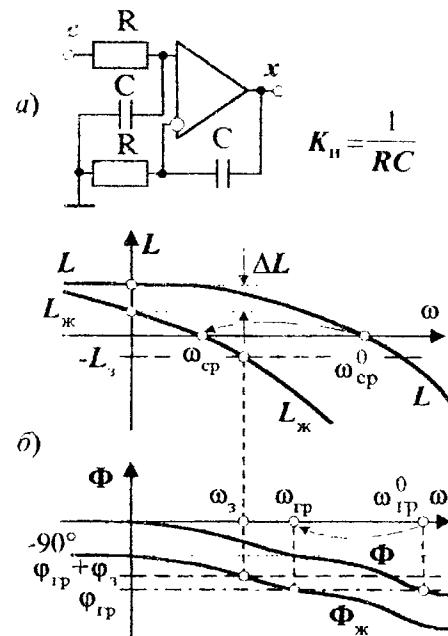


Рис. 6.16

циента скоростной ошибки c_1 . Оценить изменение быстродействия ЗС с И-регулятором по сравнению с системой, управляемой П-регулятором.

Решение. Разомкнутый контур с И-регулятором имеет ПФ $W_{\text{ж}}(s) = W(s)K_n/s$ и ЛЧХ $L_{\text{ж}}(\omega) = L(\omega) + 20\lg K_n - 20\lg \omega$, $\Phi_{\text{ж}}(\omega) = \Phi(\omega) - 90^\circ$. Из условий $\Phi_{\text{ж}}(\omega_1) = -150^\circ$ и $L_{\text{ж}}(\omega_1) = -6$ дБ с учетом (6.9) получим частоту запаса $\omega_1 = 0,0213$ рад/с и допустимый

$$\text{максимум } K_{\text{нз}} = \frac{10^{-0.05L_1}\omega_1}{K} \sqrt{\prod_{i=1}^3 (1+T_i^2\omega_1^2)} = 0,008 \text{ коэффициента усиления И-регулятора}$$

$0 < K_n \leq K_{\text{нз}}$, при котором астатическая ЗС имеет запасы устойчивости L_n и φ_3 .

При максимуме $K_n = K_{\text{нз}}$ достигается минимум коэффициента скоростной ошибки $c_{1\min} = 1/K_{\text{нз}} K = 62,8$ с. Такое запаздывание, очевидно, слишком велико из-за малого значения K_n .

Для оценки быстродействия системы с И-регулятором $R(s) = 0,008/s$ из условия $L_{\text{ж}}(\omega_{\text{ср}}) = 0$ определим частоту среза $\omega_{\text{ср}} = 0,0132$ рад/с. По (4.22) получим оценку $t_p \geq 238,4$ с, тогда как в статической системе без регулятора $t_p \geq 97$ с при $\omega_{\text{ср}}^0 = 0,0324$ рад/с, а в системе с П-регулятором $t_p \geq 30,2$ с при $\omega_{\text{ср}} = 0,104$ рад/с. Γ

Введение в контур управления интегратора делает ЗС астатической, но резко уменьшает ее быстродействие. Большая инерционность САУ с И-управлением обусловлена малым значением коэффициента усиления регулятора K_n , необходимым для обеспечения устойчивости.

2. Для сохранения устойчивости, быстродействия и создания астатизма первого порядка в качестве последовательного корректирующего устройства используется *изодромный регулятор* с ПФ и ЛЧХ (рис. 6.17, а)

$$\begin{cases} R(s) = K_n + K_n/s = K_n(1 + T_n s)/s, \\ L_p(\omega) = 20\lg K_n + 10\lg(1 + T_n^2\omega^2) - 20\lg \omega, \\ \Phi_p(\omega) = \arctg(T_n \omega) - 90^\circ, \end{cases} \quad (6.16)$$

имеющий схему на рис. 6.17, б и реализующий закон пропорционально-интегрального управления $x(t) = K_n e(t) + K_n \int_0^t e(\tau) d\tau$. На низких частотах $\omega \leq 0,1\omega_n$, в том числе в установленном режиме, ПИ-регулятор эквивалентен интегратору, создавая астатизм первого порядка. На высоких частотах $\omega > 10\omega_n$ он имеет свойства П-усилителя.

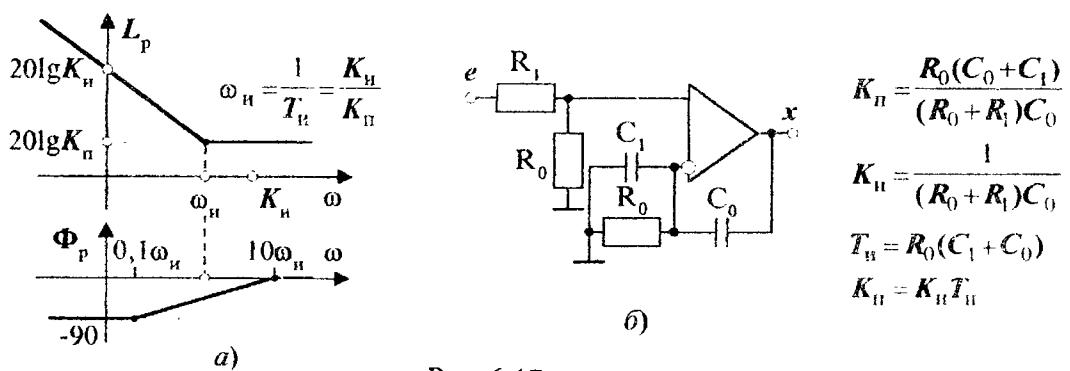


Рис. 6.17

Передаточная функция в (6.16) имеет три параметра K_{II} , K_{II} и T_{II} , два из которых независимы, а третий связан с ними соотношением $K_{\text{II}} = K_{\text{II}} T_{\text{II}}$. Соответственно можно поставить задачу синтеза ПИ-регулятора по двум желаемым требованиям к ЗС, а именно запасам устойчивости L_3 и φ_3 . Условия (4.26) приводят к аналогичной (6.126) системе двух нелинейных уравнений с тремя неизвестными ω_3 , K_{II} и T_{II} :

$$\begin{cases} A(\omega_3)K_{\text{II}}\sqrt{1+T_{\text{II}}^2\omega_3^2}/\omega_3 = 1/K_3, \\ \varphi(\omega_3) + \arctg(T_{\text{II}}\omega_3) - 90^\circ - \varphi_{\text{tp}} = \varphi_3. \end{cases} \quad (6.17)$$

Считая ω_3 свободным параметром, можно явно разрешить эту систему относительно параметров ПИ-регулятора:

$$\begin{cases} K_{\text{II}} = -\omega_3 \sin(\varphi(\omega_3) - \varphi_3)/K_3 A(\omega_3), \\ T_{\text{II}} = 1/\omega_3 \operatorname{tg}(\varphi(\omega_3) - \varphi_3), \\ K_{\text{II}} = K_{\text{II}} T_{\text{II}} = -\cos(\varphi(\omega_3) - \varphi_3)/K_3 A(\omega_3). \end{cases} \quad (6.18)$$

Как и в (6.126), недоопределенность системы (6.17) позволяет оптимизировать замкнутую САУ по некоторому дополнительному критерию. Например, по *критерию минимума скоростной ошибки* вычисляются частота ω_3 и соответствующий ей ПИ-регулятор, минимизирующий значение $c_1 = 1/K_{\text{II}} K$. По *критерию максимального быстродействия* минимизируется длительность переходного процесса $t_p \geq \pi/\omega_{\text{cp}}$, где частота среза желаемой системы является корнем нелинейного уравнения $A_{\text{ж}}(\omega_{\text{cp}}) = 1$:

$$\omega_{\text{cp}} : A(\omega_{\text{cp}})K_{\text{II}}\sqrt{1+T_{\text{II}}^2\omega_{\text{cp}}^2} = \omega_{\text{cp}}.$$

Быстрый приближенный расчет ПИ-регулятора с минимальным коэффициентом скоростной ошибки c_1 выполним с помощью ЛЧХ следующим образом (рис. 6.18):

1) определим частоту запаса ω_3 из условия

$$\Phi(\omega_3) = \varphi_{\text{tp}} + \varphi_3;$$

2) разность амплитуд $\Delta L = -L_3 - L(\omega_3)$ дает коэффициент усиления регулятора $K_{\text{II}} \leq 10^{0.05\Delta L}$, а частота $\omega_{\text{II}} = 0.1\omega_3$ - постоянную времени $T_{\text{II}} = 1/\omega_{\text{II}}$. Тогда $K_{\text{II}} = K_{\text{II}}/T_{\text{II}}$.

Для проверки расчетов можно построить ЛАЧХ $L_{\text{ж}}(\omega)$, проходящую через точку $(\omega_3, -L_3)$: правее частоты ω_{II} параллельно $L(\omega)$, а левее - с наклонами на 20 дБ/дек меньше, чем у $L(\omega)$. Отрезок, отсекаемый на оси L НЧ частями $L_{\text{ж}}(\omega)$ и $L(\omega)$, должен быть равен $20\lg K_{\text{II}}$.

Пример 6.4. Для объекта (6.7) разработать ПИ-регулятор, дающий ЗС астатизм первого порядка с запасами устойчивости (6.8) и минимум коэффициента скоростной ошибки c_1 . Оценить изменение быстродействия ЗС с ПИ-регулятором.

Решение. Подставив в (6.18) ЧХ объекта (6.10) и значения $K_3 = 2$, $\varphi_{\text{tp}} = -180^\circ$, $\varphi_3 = 30^\circ$, получим аналогичные рис. 6.13 графики $c_1(\omega_3)$ и $t_p(\omega_3)$, по которым выбираем оптимальную частоту запаса $\omega_3 = 0.107$ рад/с и минимальный коэффициент

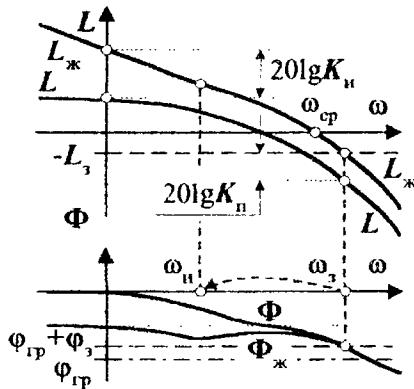


Рис. 6.18

$c_{\text{lim}} = 7,717$ с. При этом параметры ПИ-регулятора $K_{\text{II}} = 1,933$, $K_{\text{II}} = 0,0648$, $T_{\text{II}} = 29,83$ с., его ПФ в (6.16) равна

$$R(s) = \frac{1+29,83s}{15,43s}, \quad (6.19a)$$

частота среза $\omega_{\text{cp}} = 0,068$ рад/с и оценка быстродействия $t_p \geq 46,1$ с.

Приближенное решение по АЛЧХ: $\Phi(\omega_3) = -150^\circ$ при $\omega_3 = 0,1626$ рад/с, откуда $\omega_{\text{II}} = 0,01626$ рад/с и $T_{\text{II}} = 61,5$ с; $L(\omega_3) = -16,44$ дБ, откуда $\Delta L = 10,44$ дБ, $K_{\text{II}} = 3,328$ и $K_{\text{II}} = 0,0541$. Полученный изодромный регулятор с ПФ

$$R(s) = \frac{1+61,5s}{18,48s} \quad (6.19b)$$

дает коэффициент скоростной ошибки $c_l = 9,24$ с, частоту среза $\omega_{\text{cp}} = 0,104$ рад/с и время регулирования $t_p = 30,2$ с, что равно быстродействию системы с П-регулятором. [7]

Для практических приложений приближенное графическое решение задачи синтеза регуляторов с помощью АЛЧХ дает быстрый и вполне приемлемый результат.

Сравнение ПФ (6.11) с (6.16) и (6.13) с (6.19) показывает, что ПИ-регулятор может быть получен из регулятора (6.11) предельным переходом $\omega_p \rightarrow 0$, то есть при $K_p \rightarrow \infty$ и $T_p \rightarrow \infty$. При этом коэффициент ошибки $c_0 \rightarrow 0$, а система становится астатической, сохраняя все свойства устойчивости и быстродействия статической системы.

6.3. МЕТОДЫ УЛУЧШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ (среднечастотный синтез регуляторов)

Основная задача проектирования эффективной САУ - обеспечение ее устойчивого функционирования с учетом возможных изменений параметров объекта. Устойчивость ЗС по Найквисту определяется очередностью пересечения уровней $L(\omega_{\text{cp}}) = 0$ и $\Phi(\omega_{\text{cp}}) = \Phi_{\text{гр}}$ ЛЧХ РС. В частности, если разомкнутый контур имеет устойчивую ПФ, то для устойчивости ЗС должно выполняться условие $\omega_{\text{cp}} < \omega_{\text{гр}}$. Если нужной для устойчивости последовательности чередования частот нет либо недостаточны запасы устойчивости, то в контур управления необходимо включить последовательный регулятор, корректирующий желаемые ЛЧХ в сторону перестановки или раздвигания частот ω_{cp} и $\omega_{\text{гр}}$ друг от друга. Если запасы устойчивости без регулятора обеспечиваются с избытком, то назначение регулятора - улучшить показатели качества переходных процессов за счет допустимого уменьшения запасов.

Рассмотрим некоторые возможные способы стабилизации замкнутых САУ, устойчивых в разомкнутом состоянии.

1. Простейшее решение состоит в выборе усилителя (рис. 6.19,а) с ПФ $R(s) = K_{\text{II}} < 1$, опускающего ЛАЧХ на $L_{\text{II}}(\omega) = 20 \lg K_{\text{II}} < 0$ дБ при неизменности ЛФЧХ (рис. 6.19,б). При этом частота ω_{cp} , смещающаяся влево, должна встать левее частоты $\omega_{\text{гр}}$, тем самым восстанавливая условие $\omega_{\text{cp}} < \omega_{\text{гр}}$ устойчивости по Найквисту. С учетом желаемых запасов устойчивости по амплитуде L_3 и фазе Φ_3 верхняя граница K_{II} вычисляется в следующей последовательности:

1) из условия $\Phi(\omega_3) = \Phi_{\text{гр}} + \Phi_3$ определяется частота запаса ω_3 ;

2) находится необходимое уменьшение амплитуды $\Delta L = L(\omega_3) + L_3$, до уровня $-L_3$;

3) верхняя граница коэффициента усиления K_n задается условием

$$K_n \leq 10^{-0.05\Delta L}. \quad (6.20)$$

Недостатки стабилизации с помощью П-регулятора: увеличение коэффициентов статических ошибок в $1/K_n$ раз из-за сдвига ЛАЧХ вниз; уменьшение быстродействия ЗС из-за сдвига влево частоты ω_{cp} .

Если позволяет ЛАЧХ РС, то *П-регулятор можно использовать для повышения быстродействия и уменьшения статических ошибок САУ* примерно в K_n раз путем поднятия ЛАЧХ на величину $\Delta L = L_3 - L(\omega_3) > 0$ дБ. При этом вычисленное по (6.20) значение $K_n > 1$, а схема реализации регулятора изображена на рис. 6.19, а.

□ **Пример 6.5.** Для объекта (6.7) с $K = 200$ определить:

- а) устойчивость ЗС без регулятора;
- б) условия устойчивости ЗС от коэффициента усиления П-регулятора $K_n > 0$;
- в) значения $K_n > 0$, обеспечивающие запасы устойчивости (6.8);
- г) минимальный коэффициент статической ошибки c_0 при заданных запасах устойчивости.

Решение:

а) характеристический полином ЗС без регулятора $C_3^0(s) = 201 + 61s + 560s^2 + 500s^3$ неустойчив по Гурвицу, так как $M_2 = 61 \cdot 560 - 201 \cdot 500 = -66340 < 0$.

По критерию устойчивости Найквиста, использующему ЛЧХ (6.9), ЗС также неустойчива, поскольку $\omega_{cp}^0 = 0,583 > \omega_{rp} = 0,349$;

б) в ЗС с П-регулятором полином $C_3(s) = 200K_n + 1 + 61s + 560s^2 + 500s^3$ устойчив по Гурвицу при условии $0 < K_n < K_{npr} = (61 \cdot 560 / 500 - 1) / 200 = 0,337$.

Аналитическое решение по ЛЧХ: для устойчивости ЗС нужно опустить $L(\omega)$ более чем на $L(\omega_{rp}) = 9,46$ дБ с помощью П-регулятора с коэффициентом усиления $K_n < K_{npr} = 10^{-0.05 \cdot 9,46} = 0,337$;

в) для обеспечения обоих запасов устойчивости (6.8) на частоте $\omega_3 = 0,16$ рад/с нужно опустить $L(\omega)$ более чем на $L(\omega_3) + L_3 = 28,25$ дБ. Тогда по (6.20) получим допустимые значения $K_n < K_{n3} = 10^{-0.05 \cdot 28,25} = 0,0387$;

г) минимально возможные коэффициент статической ошибки в системе с П-регулятором $c_{0min} = 1 / (1 + 200K_{n3}) = 0,114$ и относительная погрешность $\delta_{0min} = 11,4\%$ совпадают с результатами примера 6.1.

Полученный регулятор $R(s) = 0,0387$ для системы (6.7) с $K = 200$ дает ЗС, полностью эквивалентную системе с регулятором $R(s) = 3,87$ и $K = 2$. □

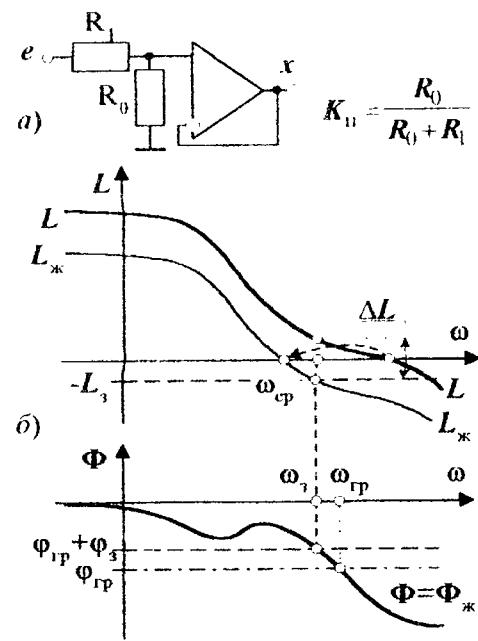


Рис. 6.19

2. Широко распространен способ стабилизации САУ с помощью фильтра низких частот (**ФНЧ**), имеющего схему реализации на рис. 6.20,*a*, ПФ $R(s) = 1/(1+T_p s)$ и ЛЧХ $L_p(\omega) = -10 \lg(1+T_p^2 \omega^2)$, $\Phi_p(\omega) = -\arctg(T_p \omega)$. Фильтр демифирирует (сглаживает) ВЧ колебания за счет уменьшения наклонов ЛАЧХ на 20 дБ/дек на частотах $\omega > \omega_p = 1/T_p$. Выбором параметра T_p можно добиться, чтобы частота ω_{cp} стала меньше частоты ω_{rp} , восстановив условие устойчивости по Найквисту (рис. 6.20,*b*). При достаточно малой частоте ω_p можно обеспечить и желаемые запасы устойчивости L_3 и Φ_3 .

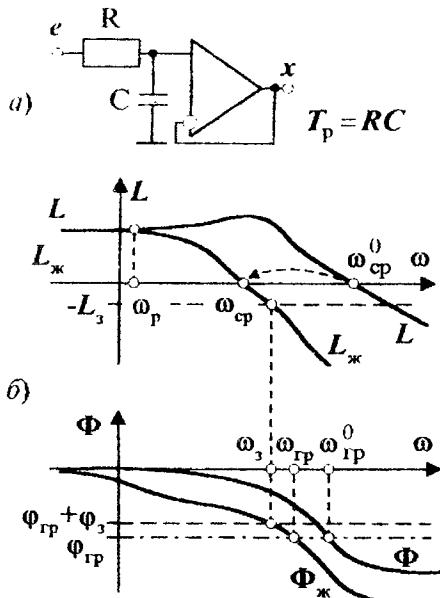


Рис. 6.20

При использовании ФНЧ сохраняется коэффициент статической ошибки c_0 , но увеличиваются, то есть ухудшаются, остальные коэффициенты c_i , инерционность и время регулирования t_p .

Графический приближенный расчет постоянной времени ФНЧ T_p может быть выполнен методом последовательных приближений.

Шаг 1. Начальное значение $T_p = \infty$, откуда ЛФЧХ $\Phi_\infty(\omega) = \Phi(\omega) - 90^\circ$.

Шаг 2. Определим частоту ω_3 из условия $\Phi_\infty(\omega_3) = \Phi_{rp} + \Phi_3$.

Шаг 3. Через точку $(\omega_3, -L_3)$ проведем ЛАЧХ $L_\infty(\omega) = L(\omega) - 20 \lg \omega$ с наклонами асимптот на 20 дБ/дек меньше, чем у $L(\omega)$.

Шаг 4. Определим частоту $\omega_p < \omega_3$ в точке пересечения асимптот $L_\infty(\omega)$ и $L(\omega)$, новые приближения $T_p = 1/\omega_p$ и $\Phi_\infty(\omega) = \Phi(\omega) - \arctg(T_p \omega)$.

Шаг 5. Если $\omega_p > 0,1\omega_3$, то идти на шаг 2, иначе конец.

Пример 6.6. Для объекта (6.7) с $K = 200$ определить:

а) условия устойчивости ЗС от постоянной времени ФНЧ T_p ;

б) значения T_p , обеспечивающие запасы устойчивости (6.8);

в) максимальное быстродействие ЗС с ФНЧ при заданных запасах устойчивости.

Решение:

а) характеристический полином ЗС с ФНЧ $C_3(s) = K + (1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s)(1+T_p s) =$

$= 201 + (T_p + 61)s + (61T_p + 560)s^2 + (560T_p + 500)s^3 + 500T_p s^4$ устойчив по алгебраическому критерию Льенара - Шипара при условиях

$$\{T_p > 0\} \cap \{M_3 = 33660T_p^3 - 60666740T_p^2 - 93150400T_p - 33170000 > 0\},$$

откуда следует область устойчивости ЗС $T_p > T_{p_{\text{пр}}} \approx 1803,87$ с.

Аналитическое частотное решение, совпадающее с алгебраическим решением, получим по (6.21) при $L_3 = 0$, $\Phi_3 = 0^\circ$, $K_3 = 1$, $\varphi_{1p} = -180^\circ$, $\omega_3 = \omega_{cp}$ и ЧХ (6.10) при $K = 200$:

$$\Phi(\omega_{cp}) - \arctg \sqrt{A^2(\omega_{cp}) - 1} = -180^\circ \Rightarrow \omega_{cp} = 0,043 \text{ рад/с}, T_{p_{\text{пр}}} = \sqrt{A^2(\omega_{cp}) - 1} = 1803,87 \text{ с};$$

б) применение алгебраического критерия устойчивости неэффективно из-за высокой (восьмой) степени приведенного по амплитуде и фазе ХП (4.25) с $B(s) = 200$, $A(s) = 1 + (T_p + 61)s + (61T_p + 560)s^2 + (560T_p + 500)s^3 + 500T_p s^4$, $K_3 = 2$, $\cos \varphi_3 = \sqrt{3}/2$.

Аналитическое частотное решение. Так как $\Phi_*(\omega) = \Phi(\omega) - \arctg(T_p \omega)$ - монотонно уменьшающаяся функция, то запасы устойчивости обеспечиваются значениями $T_p \geq T_{p_3}$, где T_{p_3} находится по (6.21) и (6.22) при $K_3 = 2$:

$$\Phi(\omega_3) - \arctg \sqrt{4A^2(\omega_3) - 1} = -150^\circ \Rightarrow \omega_3 = 0,0214 \text{ рад/с}, T_{p_3} = \sqrt{4A^2(\omega_{cp}) - 1} = 12450 \text{ с};$$

в) решая уравнение $A(\omega_{cp}) / \sqrt{1 + T_{p_3}^2 \omega_{cp}^2} = 1$, определяем частоту $\omega_{cp} = 0,0133$ рад/с и оценку времени регулирования $t_p \geq 236,9$ с, что равно быстродействию системы с И-управлением и в 7,8 раза больше, чем в системе с П-регулятором.

Приближенное графическое решение (рис. 6.21):

а) опустим $\Phi(\omega)$ вниз на 90° . Из условия $\Phi(\omega_{rp}) - 90^\circ = -180^\circ$ определим $\lg \omega_{rp} = -1,35$. Через точку $(\omega_{rp}, 0)$ проведем граничную ЛАЧХ $L_{\text{жир}}(\omega)$ с наклонами на 20 дБ/дек меньше, чем у $L(\omega)$, до пересечения с $L(\omega)$ на частоте $\lg \omega_{p_{\text{пр}}} = -3,3 < \lg \omega_{rp} - 1$. Таким образом, за одну итерацию получили частоту $\omega_{p_{\text{пр}}} = 0,0005$ рад/с и постоянную времени $T_{p_{\text{пр}}} = 2000$ с, что близко к истинному значению $T_{p_{\text{пр}}} = 1803,87$ с;

б) из условия $\Phi(\omega_3) - 90^\circ = -150^\circ$ найдем $\lg \omega_3 = -1,68$. Через точку $(\omega_3, -6 \text{ дБ})$ проведем ЛАЧХ $L_*(\omega)$ с наклонами на 20 дБ/дек меньше, чем у $L(\omega)$, до пересечения с $L(\omega)$ на частоте $\lg \omega_{p_3} = -4,28 < \lg \omega_3 - 1$. Таким образом, за одну итерацию получили час-

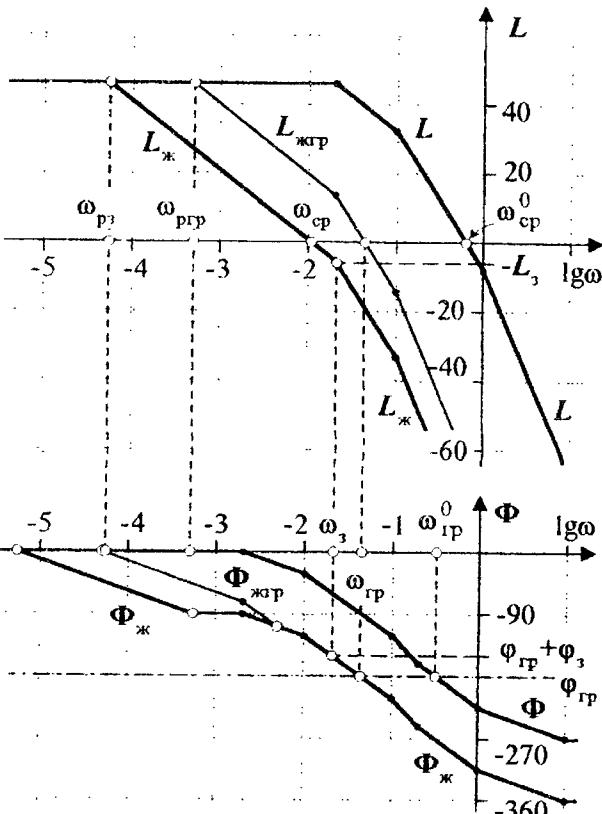


Рис. 6.21

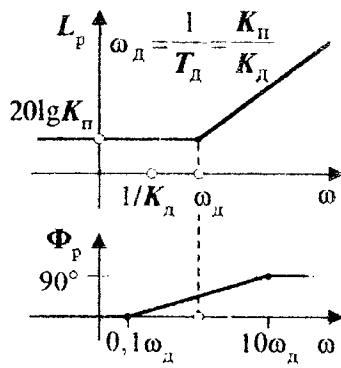
тоту $\omega_{\text{пр}} = 0,000052$ рад/с и постоянную времени $T_{\text{пр}} = 19200$ с, что недалеко от истинного значения $T_p = 12460$ с;

в) определяем частоту среза $\lg \omega_{\text{ср}} = -1,98 \Rightarrow \omega_{\text{ср}} = 0,0105$ рад/с и оценку быстродействия ЗС $t_p \geq 300$ с.

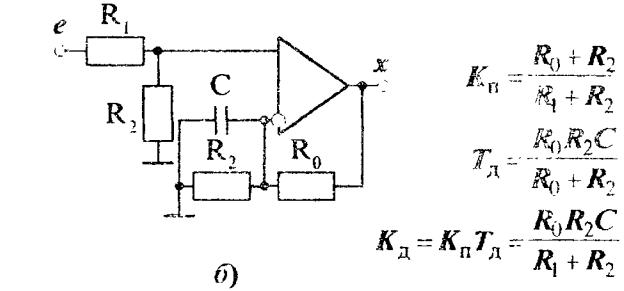
3. Наилучшим средством стабилизации САУ является форсирующее устройство с ПФ и ЛЧХ (рис. 6.22, а)

$$\begin{cases} R(s) = K_n + K_d s = K_n(1 + T_d s), \\ L_p(\omega) = 20 \lg K_n + 10 \lg(1 + T_d^2 \omega^2), \\ \Phi_p(\omega) = \arctg(T_d \omega), \end{cases} \quad (6.23)$$

имеющую схему на рис. 6.22, б и реализующее закон пропорционально-дифференциального управления $x(t) = K_n e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}$. Форсирующий ПД-регулятор сдвигает по вертикали всю ЛАЧХ на $20 \lg K_n$ дБ и, кроме того, правее частоты ω_d пропорционально удалению от нее. В диапазоне частот $\omega > 0,1\omega_d$ ЛФЧХ поднимается на угол от 0 до 90° . Благодаря этим изменениям, во-первых, повышается быстродействие ЗС из-за сдвига вправо частоты среза $\omega_{\text{ср}}$, во-вторых, улучшаются условия устойчивости за счет еще большего сдвига вправо частоты $\omega_{\text{тр}}$ при правильном выборе параметров ПД-регулятора. Более того, ПД-регулятор может сделать ЗС абсолютно устойчивой благодаря отсутствию граничной частоты $\omega_{\text{тр}}$.



а)



б)

Рис. 6.22

Передаточная функция в (6.23) имеет три параметра K_n , K_d и T_d , два из которых независимы, а третий связан с ними условием $K_d = K_n T_d$. Соответственно можно поставить задачу синтеза ПД-регулятора по двум желаемым требованиям к ЗС, которыми можно считать запасы устойчивости L_3 и φ_3 . Условия (4.26) приводят к аналогичной (6.17) системе двух нелинейных уравнений с тремя неизвестными ω_3 , K_n и T_d :

$$\begin{cases} A(\omega_3) K_n \sqrt{1 + T_d^2 \omega_3^2} = 1/K_3, \\ \varphi(\omega_3) + \arctg(T_d \omega_3) - \varphi_{\text{тр}} = \varphi_3. \end{cases}$$

Принимая ω_3 свободным параметром, можно явно разрешить эту систему относительно параметров ПИ-регулятора:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_d = -\operatorname{tg}(\phi(\omega_3) - \phi_3)/\omega_3, \\ K_n = -\cos(\phi(\omega_3) - \phi_3)/K_n A(\omega_3), \\ K_d = K_n T_d = \sin(\phi(\omega_3) - \phi_3)/\omega_3 K_n A(\omega_3). \end{array} \right. \quad (6.24)$$

Как и в (6.17), недоопределенность системы (6.24) позволяет оптимизировать ЗС по некоторому дополнительному критерию. Например, по *критерию максимального быстродействия* минимизируется длительность переходного процесса $t_p \geq \pi/\omega_{cp}$, где частота среза желаемой системы является корнем нелинейного уравнения $A_k(\omega_{cp})=1$:

$$\omega_{cp}: A(\omega_{cp}) K_n \sqrt{1+T_d^2 \omega_{cp}^2} = 1. \quad (6.25)$$

Если разомкнутый контур системы устойчив, то ПД-регулятор улучшает показатели качества переходного процесса: повышает быстродействие и запасы устойчивости при выборе частоты сопряжения ω_d вблизи и немного левее частоты среза ω_0^0 . Для значительного увеличения быстродействия можно включать последовательно несколько форссирующих устройств. Первый каскад предназначен для стабилизации, а остальные - для повышения качества переходных процессов системы.

Недостаток ПД-регулятора - в усиении дифференцирующих свойств системы, проявляющихся в снижении помехоустойчивости и соотношения сигнал/шум.

Быстрый графический расчет стабилизирующего ПД-регулятора с максимальным быстродействием выполним с помощью ЛЧХ следующим образом (рис. 6.23):

1) из условия $\Phi(\omega_3)+90^\circ=\varphi_{rp}+\phi_3$ определим частоту запаса ω_3 ;

2) разность амплитуд $\Delta L = -L_3 - L(\omega_3)$ дает коэффициент усиления регулятора $K_n \leq 10^{0.05\Delta L-1}$, а частота $\omega_d = 0.1\omega_3$ - постоянную времени $T_d = 1/\omega_d$. Тогда $K_d = K_n T_d$.

Для проверки расчетов можно построить ЛАЧХ $L_k(\omega)$, проходящую через точку $(\omega_3, -L_3)$: левее частоты ω_d параллельно $L(\omega)$, а правее - с наклонами на 20 дБ/дек больше, чем у $L(\omega)$. Отрезок, отсекаемый на оси L НЧ частями $L_k(\omega)$ и $L(\omega)$, должен быть равен $20\lg K_n$.

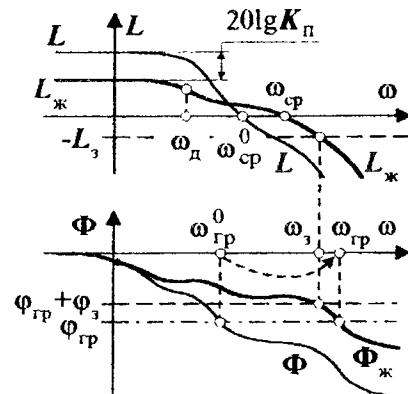


Рис. 6.23

Пример 6.7. Для объекта (6.7) с $K=200$:

а) определить область устойчивости ЗС с ПД-регулятором в пространстве его параметров $K_n > 0$ и $K_d > 0$;

б) рассчитать первый каскад регулятора, дающий запасы устойчивости (6.8) и минимальное значение коэффициента статической ошибки c_0 ;

в) с помощью второго форссирующего каскада увеличить быстродействие ЗС в 10 раз, восстановив исходное значение c_0 .

Решение:

а) характеристический полином ЗС с ПД-регулятором

$$C_3(s) = K(K_n + K_d s) + (1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s) = 200K_n + 1 + (200K_d + 61)s + 560s^2 + 500s^3$$

устойчив по Гурвицу при

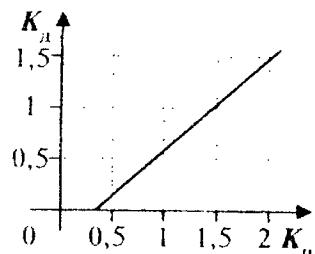


Рис. 6.24

$$\{K_{\text{н}} > -0,05\} \cap \{K_{\text{д}} > -0,305\} \cap \{M_2 = 1,12K_{\text{д}} - K_{\text{н}} + 0,3366 > 0\}.$$

С учетом $K_{\text{н}} > 0$ и $K_{\text{д}} > 0$ получим в плоскости $\{K_{\text{н}}, K_{\text{д}}\}$ (рис. 6.24) область устойчивости САУ с ПД-регулятором $\{0 < K_{\text{н}} < 1,12K_{\text{д}} + 0,3366\} \cap \{K_{\text{д}} > 0\}$.

Анализ устойчивости частотным методом Найквиста в пространстве двух параметров затруднителен;

б) аналитическое решение по (6.24) и (6.25) с ЧХ (6.10) при $K = 200$ дает в диапазоне частот $\omega_s \in [0,165, 1,955]$ зависимости $c_0(\omega_s)$ и $t_p(\omega_s)$, подобные графикам на рис. 6.13. Оптимальные значения: частота запаса $\omega_s = 1,325$ рад/с, минимальный коэффициент статической ошибки $c_{0\min} = 0,00641$, частота среза $\omega_{cp1} = 0,858$ рад/с, оценка максимального быстродействия $t_p \geq 3,66$ с, параметры первого каскада регулятора $K_{n1} = 0,775$, $K_{d1} = 2,701$, $T_{d1} = 3,483$ с, частота сопряжения $\omega_{d1} = 0,287$ рад/с и ПФ $R_1(s) = 0,775(1+3,483s)$. На рис. 6.25 построены ЛЧХ объекта $L(\omega)$, $\Phi(\omega)$ и желаемого разомкнутого контура $L_{\text{ж1}}(\omega)$, $\Phi_{\text{ж1}}(\omega)$ системы с первым каскадом регулятора;

в) для расчета параметров ПФ второго форссирующего каскада $R_2(s) = K_{d2}(1+T_{d2}s)$ используем два условия:

- 1) желаемая частота среза должна быть равна $\omega_{cp} = 10\omega_{cp1} = 8,58$ рад/с;
- 2) для восстановления исходного коэффициента c_0 ПФ должна иметь параметр $K_{n2} = 1/K_{n1} = 1,29$. Постоянную времени T_{d2} определим из условия $A_{\text{ж2}}(\omega_{cp}) = 1$:

$$T_{d2} = \frac{1}{\omega_{cp}} \sqrt{\frac{1}{A^2(\omega_{cp})(1+T_{d2}^2\omega_{cp}^2)}} - 1 = 6,2 \text{ с.}$$

На рис. 6.25 построены ЛЧХ $L_{\text{ж2}}(\omega)$, $\Phi_{\text{ж2}}(\omega)$ желаемой системы с двумя каскадами регулятора.

Таким образом, полная ПФ регулятора равна

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = 1 + 9,68s + 21,59s^2,$$

а замкнутая этим регулятором система имеет следующие свойства:

1) оценка $t_p \geq 0,366$ с, что в 82,5 и 650,3 раз лучше, чем, соответственно, в системах с П-регулятором и ФНЧ. Реальное быстродействие, полученное по ПХ ЗС, составило $t_p \approx 1,38$ с при отсутствии перерегулирования. Отличие этой цифры от оценки $t_p \geq \pi/\omega_{cp}$ примерно в 4 раза объясняется тем, что оценка (4.22) является практически гарантированной, полученной с большим запасом для подавляющего числа реальных систем;

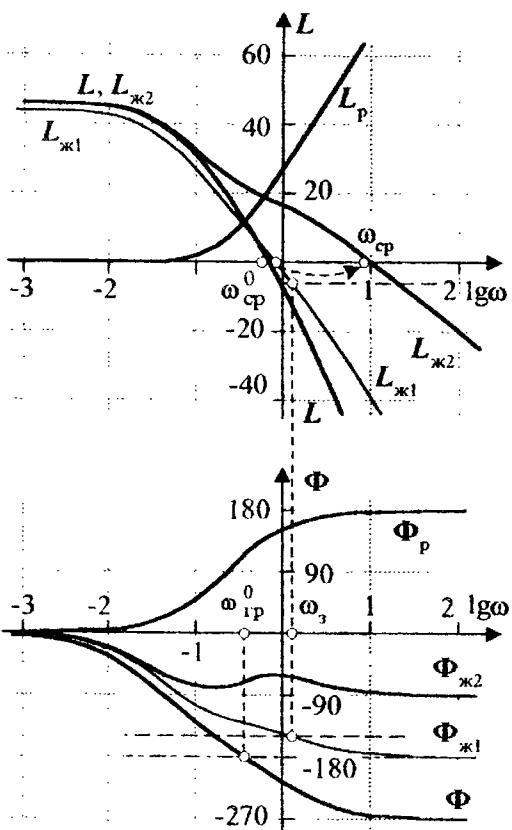


Рис. 6.25

2) относительная погрешность регулирования $\delta_0 = 0,498\%$ в 23 раза меньше, чем в системе с П-регулятором, и совпадает с САУ с ФНЧ;

3) абсолютная устойчивость и запасы устойчивости $L_s = \infty$ и $\varphi_s > 90^\circ$, недостижимые другими регуляторами. [1]

Рассмотренные методы синтеза позволяют получить ПФ последовательного регулятора, решая частные задачи регулирования в НЧ и СЧ диапазонах. Точное решение этих задач требует расчета корней нелинейных уравнений, что достаточно сложно. Приближенное графическое решение кроме наглядности дает приемлемый результат и рекомендуется для качественных, быстрых расчетов, уточняемых затем аналитическими методами.

Резюмируя сказанное, выбираем *наилучшие типы регуляторов*:

- в НЧ диапазоне частот **ПИ-регулятор** с ПФ (6.16) $R_h(s) = K_h(1+T_h s)/s$;
- в СЧ диапазоне частот **ПД-регулятор** с ПФ (6.23) $R_c(s) = K_c(1+T_c s)$.

Полная ПФ последовательного регулятора имеет ПИД-свойства

$$R(s) = R_h(s)R_c(s) = \frac{K_h K_c (1+T_h s)(1+T_c s)}{s} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s.$$

Влияние пропорциональной, интегральной и дифференциальной составляющих регулируется коэффициентами K_p , K_i и K_d . В ВЧ диапазоне для уменьшения уровня шумов желательно включать ФНЧ с ПФ $R_b(s) = 1/(1+T_b s)$ и постоянной времени $T_b \leq 0,1/\omega_{cp}$.

6.4. БЫСТРЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Методика быстрого расчета ПФ последовательного регулятора включает в себя следующие этапы (рис. 6.26).

На *первом этапе* строятся логарифмические (достаточно строить асимптотические) ЧХ, соответствующие ПФ $W(s)$.

Наиболее сложным является *второй этап* формализации желаемых свойств ЗС в виде *желаемых ЛЧХ* $L_*(\omega)$ и $\Phi_*(\omega)$. Их формирование производится отдельно на разных частотных диапазонах (рис. 6.27). *Низкочастотная часть* желаемой ЛАЧХ

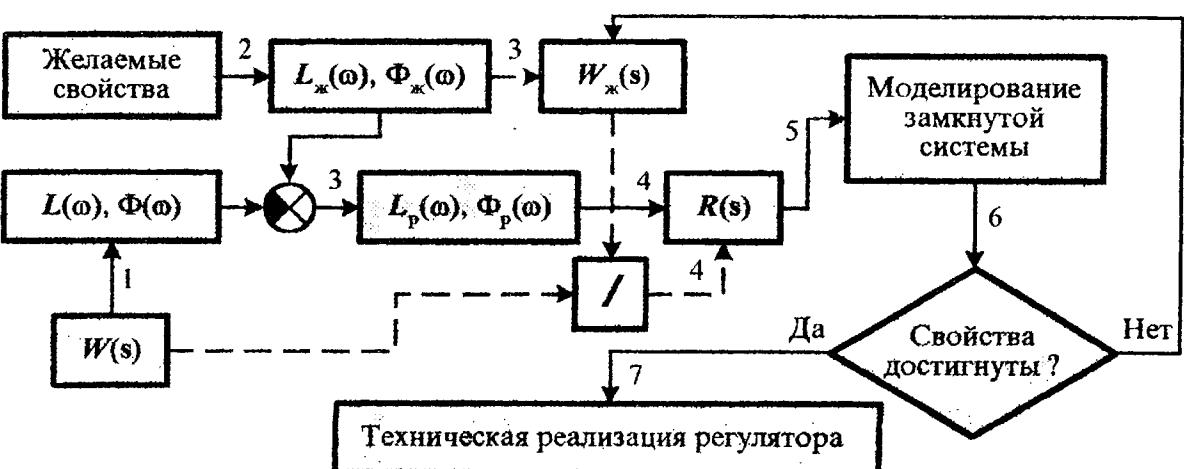


Рис. 6.26

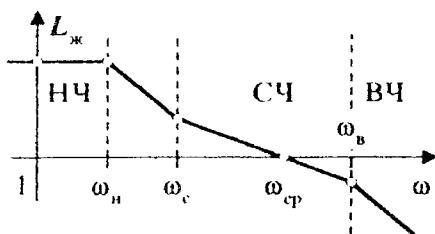


Рис. 6.27

на интервале частот $0 \leq \omega \leq \omega_n$ должна иметь наклон 0 или -20 дБ/дек и отсекать на оси L желаемое значение $L_*(l)$. Среднечастотная часть желаемой ЛАЧХ на интервале $\omega_c \leq \omega \leq \omega_v$ должна иметь наклон -20 или -40 дБ/дек и пересекать ось ω на желаемой частоте среза ω_{cr} . Низко- и среднечастотная части соединяются на интервале частот $\omega_n < \omega < \omega_c$ сопрягающей частью с наклоном -40 или -60 дБ/дек. Высокочастотная часть желаемой ЛАЧХ при $\omega > \omega_v$ должна иметь отрицательный наклон от -40 дБ/дек и более, так как она предназначена для максимального ослабления влияния высокочастотных шумов на работу системы управления.

При формировании желаемой ЛАЧХ необходимо стремиться максимально совмещать частоты сопряжения и изменения наклонов АЛАЧХ $L(\omega)$ и $L_*(\omega)$ для упрощения (исключения лишних звеньев) ПФ регулятора $R(s)$.

На третьем этапе графическим вычитанием

$$L_p(\omega) = L_*(\omega) - L(\omega), \Phi_p(\omega) = \Phi_*(\omega) - \Phi(\omega) \quad (6.26)$$

находятся ЛЧХ регулятора, по которым на четвертом этапе восстанавливаются типовые звенья и ПФ регулятора $R(s)$ по следующей методике:

1) начальному НЧ участку $L_p(\omega)$ с наклоном $\pm 20v_0$ дБ/дек соответствует типовое звено $R(s) = \oplus K_0 s^{\pm v_0}$, усиление которого $K_0 = 10^{0.05L_p(l)}$ определяем по координате $L_p(l)$, отсекаемой на оси L НЧ асимптотой $L_p(\omega)$ или ее продолжением;

2) смещааясь слева направо по оси ω , фиксируем частоты сопряжения ω_i АЛАЧХ $L_p(\omega)$. Каждому изменению ее наклона в точке ω_i на $\pm 20v_i$ дБ/дек соответствует типовое звено регулятора с ПФ $R_i(s) = (1 \oplus s/\omega_i) s^{\pm v_i}$. Символ \oplus означает плюс для минимально-фазовых звеньев и минус - для неминимально-фазовых;

3) составляем из типовых звеньев ПФ регулятора $R(s) = \prod_{i=0}^N R_i(s)$.

Назначение пятого этапа проектирования регулятора - получение фактических показателей качества ЗС путем моделирования ее ПХ $h(t) = L^{-1}\{W_3(s)/s\}$, где ПФ $W_3(s)$ вычисляется по (6.1). Статические и динамические свойства ПХ на шестом этапе сравниваются с желаемыми. Если в процессе проектирования желаемые свойства ЗС достигнуты, то на седьмом этапе выполняется техническая реализация полученной ПФ регулятора: последовательный регулятор преобразуется к желаемому типу, и разрабатывается устройство, реализующее регулятор в требуемой элементной базе. Иначе желаемые ЛЧХ корректируются и цикл проектирования повторяется со второго этапа.

На рис. 6.26 пунктиром обозначена модификация алгоритма синтеза регулятора. На третьем этапе по желаемым ЛЧХ восстанавливается ПФ желаемой системы $W_*(s)$, а на четвертом вычисляется ПФ последовательного регулятора $R(s) = W_*(s)/W(s)$.

По сравнению с описанными ранее аналитическими методами ускорение расчета регулятора достигается:

- 1) за счет использования кусочно-линейных АЛАЧХ, быстро строящихся по ПФ и позволяющих быстро восстанавливать ПФ по ЛЧХ;
- 2) применения номограмм, заменяющих с достаточной точностью решение нелинейных уравнений.

Рассмотрим подробнее правила построения частей желаемой ЛАЧХ разомкнутого контура на основе требований, предъявляемых к свойствам ЗС.

Низкочастотная часть ЛАЧХ определяет статическую точность САУ в установившемся режиме и характеризуется верхней частотой ω_u пропускания сигналов без ослабления (для статических систем), коэффициентом усиления K и коэффициентом астатизма v_u (рис. 6.28). Начальный участок НЧ части $L_*(\omega)$ должен иметь:

а) наклон 0 дБ/дек, если проектируется статическая САУ.

По допустимой относительной погрешности $\delta_0\%$ определяются коэффициенты статической ошибки $c_0 = \delta_0/100\%$ и $K = W_*(0)$ - статического усиления разомкнутого контура:

$$K \geq 1/c_0 - 1; \quad (6.27a)$$

б) наклон $-20v_u$ дБ/дек, если проектируется астатическая САУ. Порядок астатизма v_u выбирается из условия точного воспроизведения в установившемся режиме уставки $g(t)$ в виде полинома степени $v_u - 1$. Коэффициент усиления статической части ПФ $K = W_*(1)$ выбирается из условия обеспечения в ЗС желаемого коэффициента статической ошибки c_0 :

$$K \geq 1/c_{v_u}. \quad (6.27b)$$

Большой класс следящих систем работает при гармонически изменяющихся уставках $g(t) = A_i \sin(\omega_r t + \phi_i)$. В установившемся режиме на выходе ЗС также будут гармонические колебания $y(t) = A_y \sin(\omega_r t + \phi_y)$, а ошибка регулирования равна $e(t) = A_e \sin(\omega_r t + \phi_e)$. Определим, каким условиям должна удовлетворять ЛАЧХ $L_*(\omega)$, чтобы гарантировать **желаемый коэффициент гармонической ошибки** $c_t = A_e/A_y$:

$$A_e = |W_e(j\omega_r)| A_t = \left| \frac{1}{1 + W_*(j\omega_r)} \right| A_t \approx \frac{A_t}{|W_*(j\omega_r)|} \Rightarrow c_t = \frac{1}{|W_*(j\omega_r)|} = \frac{1}{A_*(\omega_r)}.$$

Следовательно, при заданном минимальном коэффициенте гармонической ошибки c_t АЧХ $A_*(\omega)$ разомкнутого контура должна удовлетворять условию $A_*(\omega_r) \geq 1/c_t$, а ЛАЧХ $L_*(\omega)$ проходить не ниже точки $(\omega_r, -20\lg c_t)$ (рис. 6.28). Если проектируется САУ с порядком астатизма v_u , то коэффициент K выбирается из условия

$$K \geq \omega_r^{v_u} / c_t. \quad (6.27b)$$

Среднечастотная часть ЛАЧХ $L_*(\omega)$ с наклоном $-20v_c$ дБ/дек (рис. 6.29) определяет устойчивость и динамическое качество ЗС. Для обеспечения условия устойчивости по Найквисту $\omega_{cp} < \omega_r$ разомкнутый контур в окрестности частоты среза ω_{cp} должен иметь свойства абсолютно устойчивого минимально-фазового звена первого ($v_c=1$) или, в крайнем случае, второго ($v_c=2$) порядка. Частота ω_{cp} выбирается по заданным показателям качества переходного процесса (t_p и σ) с помощью изображенных на рис. 6.30 **номограмм** $t_p \omega_{cp} (P_{max}/P_0)$ и $\sigma (P_{max}/P_0)$, где P_{max} и P_0 - максимальное и начальное значения ВЧХ ЗС $P_s(\omega)$, задающей вспомогательный аргумент P_{max}/P_0 .

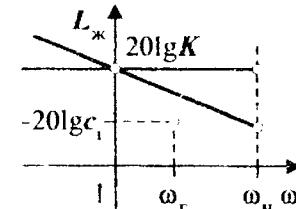


Рис. 6.28

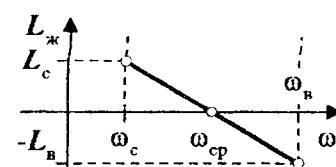


Рис. 6.29

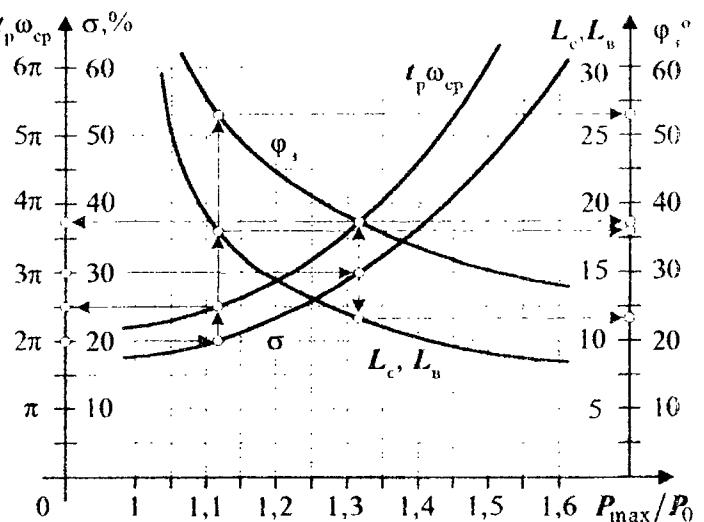


Рис. 6.30

$L_c = L_{*}(\omega_c)$ и $L_v = L_{*}(\omega_v)$ (дБ), по которым можно определить границы СЧ диапазона

$$\omega_c \leq 10^{-L_c/20v_c} \omega_{cp}, \quad \omega_v \geq 10^{L_v/20v_c} \omega_{cp}. \quad (6.28a)$$

Для обеспечения достаточного запаса устойчивости ширина СЧ диапазона должна быть не менее декады, а частота среза - примерно в его середине:

$$\omega_v/\omega_c \geq 10, \quad 2 \leq \omega_{cp}/\omega_c \leq 4. \quad (6.28b)$$

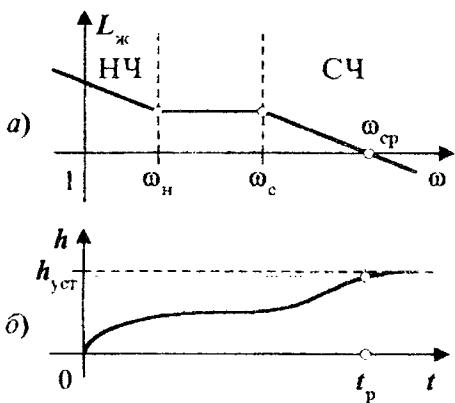


Рис. 6.31

Впрочем, если наклон СЧ части ЛАЧХ равен -40 дБ/дек (в этом случае система в СЧ диапазоне имеет свойства колебательного звена), то частоту среза желательно выбирать ближе к частоте ω_c .

Низкочастотная и среднечастотная части ЛАЧХ в диапазоне $\omega \in [\omega_h, \omega_c]$ соединяются *сопрягающей частью*, имеющей наклон -40 или -60 дБ/дек. Сопряжение горизонтальным участком длиной более половины декады (рис. 6.31,α) нежелательно, так как он дает затягивание переходного процесса на промежуточном уровне с большой статической ошибкой (рис. 6.31,β). Этот недостаток устраняется дополнительным сдвигом вверх НЧ части ЛАЧХ, что также уменьшает статические ошибки.

Высокочастотная часть желаемой ЛАЧХ строится вправо от частоты ω_v , повторяя наклоны $L(\omega)$. Создание необходимого для фильтрации шумов наклона не менее -40 дБ/дек достигается введением ФНЧ с постоянной времени $T_v \leq 1/\omega_v$.

С целью упрощения структуры регулятора рекомендуется сдвигать найденные частоты сопряжения асимптот $L_{*}(\omega)$, совмещая их с частотами сопряжения $L(\omega)$. В этом случае ЛЧХ регулятора в (6.26) будут иметь минимальное число перегибов, ПФ $R(s) = W_{*}(s)/W(s)$ - минимум типовых звеньев, а схема реализации - простейшую структуру и стоимость.

Последовательность использования номограмм показана стрелками. По желаемому перерегулированию σ (%) находим аргумент P_{max}/P_0 и соответствующее ему произведение $t_p \omega_{cp}$. Деля последнее на желаемое время регулирования t_p (с), получим частоту среза ω_{cp} (рад/с). По дополнительным номограммам $\phi_3(P_{max}/P_0)$ и $L_c, L_v(P_{max}/P_0)$ оцениваются запас устойчивости по фазе (запас по амплитуде полагается равным 6 дБ) и минимальные значения краевых амплитуд

VI / Пример 6.8. Для объекта (6.7) с $K = 200$ рассчитать и реализовать на ОУ последовательный регулятор, дающий ЗС астатизм первого порядка с коэффициентом скоростной ошибки $c_1 = 0,1 \text{ с}^{-1}$, показателями качества $t_p \leq 2 \text{ с}$, $\sigma \leq 20\%$ и запасами устойчивости (6.8) $L_c \geq 6 \text{ дБ}$ и $\Phi_s \geq 30^\circ$.

Решение. Построив на рис. 6.32 АЛЧХ объекта $L(\omega)$ и $\Phi(\omega)$, из условия (6.27б) определим коэффициент усиления статической части желаемой системы $K_{\text{ж}} = 1/c_1 = 10$. Влево от точки (1, 20) проводим пунктиром НЧ асимптоту ЛАЧХ с наклоном -20 дБ/дек . По номограммам для $\sigma = 20\%$ определяем $t_p \omega_{cp} \approx 2,5 \approx 8$ и частоту среза $\omega_{cp} \approx 4 \text{ рад/с}$ ($\lg \omega_{cp} \approx 0,6$). Через точку $(\omega_{cp}, 0)$ проводим СЧ асимптоту ЛАЧХ также с наклоном -20 дБ/дек . По номограмме определяем $L_c = L_b \approx 18 \text{ дБ}$, а по (6.28а) - границы СЧ диапазона

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_c \leq 0,504 \text{ рад/с,} \\ \omega_b \geq 31,8 \text{ рад/с.} \end{array} \right. \quad (6.29)$$

Так как НЧ и СЧ части $L_{\text{ж}}(\omega)$ не пересекаются, то нужна сопрягающая часть с наклоном -40 дБ/дек . Совместим ее левую границу с частотой сопряжения ЛАЧХ объекта $\omega_2 = 0,1 \text{ рад/с}$, тогда сопрягающая и СЧ асимптоты пересекаются на частоте $\lg \omega_p = -0,6$, откуда $\omega_p = 0,25 \text{ рад/с}$, $T_p = 4 \text{ с}$, что удовлетворяет условию (6.29). Также по (6.29) выберем частоту $\omega_b = 40 \text{ рад/с}$ сопряжения СЧ и ВЧ частей, откуда $T_b = 0,025 \text{ с}$. На рис. 6.32 изображены ЛЧХ $L_{\text{ж}}(\omega)$ и $\Phi_{\text{ж}}(\omega)$, по которым восстановим ПФ желаемого разомкнутого контура:

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{W_{\text{ж}}(1+T_p s)}{s(1+T_2 s)(1+T_b s)} = \frac{10(1+4s)}{s(1+10s)(1+0,025s)}.$$

Рассчитаем *реальные показатели* полученной ЗС:

1) переходная характеристика

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{W_{\text{ж}}(s)}{s(1+W_{\text{ж}}(s))} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1+4s}{s(1+4,1s+1,0025s^2+0,025s^3)} \right\} = \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1+4s}{s(1+3,84s)(1+0,028s)(1+0,231s)} \right\} = 1 + 0,044e^{-0,26t} + 0,14e^{-35,5t} - 1,19e^{-4,33t} \end{aligned}$$

имеет апериодический характер, перерегулирование $\sigma = 0\%$, быстродействие $t_p = 0,6 < 2 \text{ с}$ и нулевую статическую ошибку $e_{\text{ст}} = 0$;

2) по ЛЧХ $L_{\text{ж}}(\omega) = 20\lg(K_{\text{ж}}) + 10\lg(1+T_p^2\omega^2) - 10\lg(1+T_2^2\omega^2) - 10\lg(1+T_b^2\omega^2) - 20\lg\omega$ и

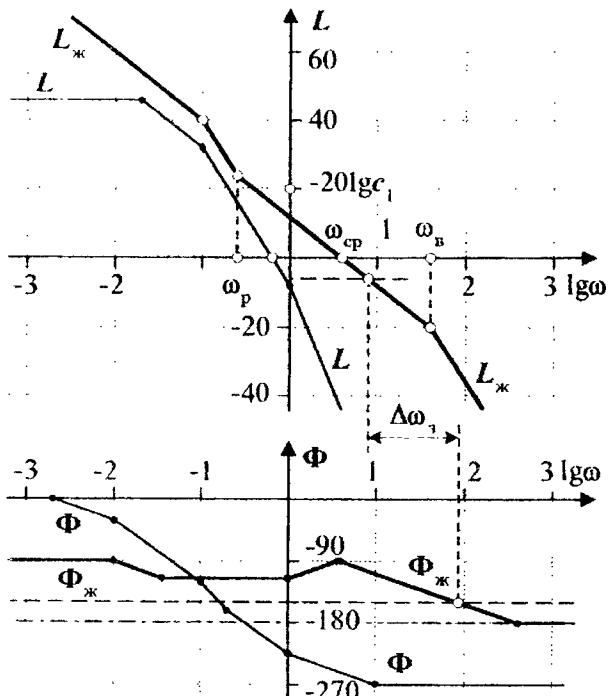


Рис. 6.32

$\Phi_{\infty}(\omega) = \arctg(T_p\omega) - \arctg(T_2\omega) - \arctg(T_b\omega) - 90^\circ$ проверим существование частотного диапазона $\Delta\omega_3 = [\omega_{31}, \omega_{32}]$, на границах которого один из фактических запасов устойчивости обеспечивается точно:

$$L_{\infty}(\omega_{31}) = -6 \text{ дБ} \Rightarrow \omega_{31} = 7,84 \text{ рад/с}, \Phi_{\infty}(\omega_{32}) = -150^\circ \Rightarrow \omega_{32} = 68,9 \text{ рад/с}.$$

Так как $\{\omega_{31} < \omega_{32}\} \cap \{\Phi_{\infty}(\omega_{31}) = -102^\circ > -150^\circ\} \cap \{L_{\infty}(\omega_{32}) = -30,7 < -6 \text{ дБ}\}$, то желаемые запасы устойчивости в системе обеспечиваются в диапазоне частот $[\omega_{31}, \omega_{32}]$.

Желаемые свойства ЗС достигнуты за одну итерацию. Вычислив коэффициент статического усиления $K_p = K_{\infty}/K = 0,05$ и ПФ последовательного регулятора

$$R(s) = \frac{W_{\infty}(s)}{W(s)} = \frac{K_p(1+T_p s)(1+T_1 s)(1+T_3 s)}{s(1+T_b s)} = \frac{0,05(1+4s)(1+50s)(1+s)}{s(1+0,025s)},$$

конструируем схему регулятора на ОУ с помощью табл. 1.3 (рис. 6.33).

Рис. 6.33

6.5. УПРАВЛЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВЫМИ ОБЪЕКТАМИ

До сих пор мы изучали частотные методы управления объектами, устойчивыми в разомкнутом состоянии. В соответствии с логарифмическим критерием Найквиста для устойчивости ЗС регулятор $R(s)$, спектр которого не имеет правых полюсов, должен обеспечивать нулевую сумму переходов ЛФЧХ через граничный уровень фазы на интервале частот с положительной ЛАЧХ.

Неустойчивость разомкнутого контура порождается наличием хотя бы одного правого полюса в спектре его ПФ. Рассмотрим возможные *способы принудительной стабилизации* ЗС.

1. В числитель ПФ регулятора включаются звенья, совпадающие с неустойчивыми звенами знаменателя ПФ. Тем самым в контурной ПФ $W_k(s) = R(s)W(s)$ все правые полюсы *теоретически* компенсируются равными им правыми нулями. Оставшаяся часть регулятора должна обеспечить устойчивость ЗС при устойчивой разомкнутой, то есть нулевую сумму переходов по критерию Найквиста. *Недостаток* данного способа – в возможном *фактическом количественном* несовпадении компенсируемых полюсов и нулей из-за временного дрейфа параметров объекта или неточного их расчета. Это *качественно* меняет задачу регулятора в смысле обеспечения уже *ненулевой* суммы переходов. Ясно, что одно и то же устройство не может решать противоположные задачи.

2. Регулятор изначально конструируется под неустойчивый объект с n_+ правыми полюсами, обеспечивая $n_+/2$ переходов $\Phi_k(\omega)$ через граничный уровень фазы при $L_k(\omega) > 0$ с учетом *пунктирного дополнения*. Для получения дробного числа переходов, возможно, придется включить в регулятор инвертор, изменяющий сумму переходов на $1/2$. Предусмотрев желаемые запасы устойчивости, можно избежать качественной перестройки регулятора при количественном изменении параметров объекта.

В отличие от (4.24) условия обеспечения запасов устойчивости L_3 и φ_3 , принимают вид

$$\begin{cases} |L(\omega)| \geq L_3 \quad \forall \omega : |\Phi(\omega) - \varphi_{rp}| < \varphi_3, \\ |\Phi(\omega) - \varphi_{rp}| \geq \varphi_3 \quad \forall \omega : |L(\omega)| < L_3. \end{cases} \quad (6.30)$$

На рис. 6.34 заштрихованы запретные области, куда не должны заходить контурные ЛЧХ $L_k(\omega)$, $\Phi_k(\omega)$ и годограф $W_k(j\omega)$ при условии, что достигается необходимая сумма переходов $n_+/2$ вне запретных областей. В противном случае ввиду изменения значения n_+ в результате дрейфа параметров возможна потеря устойчивости ЗС.

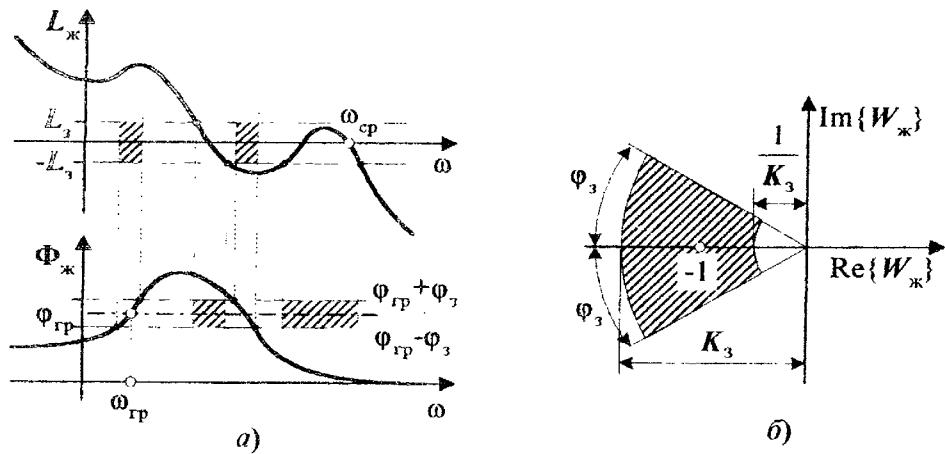


Рис. 6.34

Пример 6.9. Для описанного в примере 1.5 объекта «тележка - перевернутый маятник» разработать астатическую систему слежения угла отклонения маятника $\varphi(t)$ за уставкой $g(t)$ с быстродействием $t_p \leq 0,5$ с, перерегулированием $\sigma \leq 30\%$, коэффициентом скоростной ошибки $c_1 \leq 0,01$ с, запасами устойчивости $L_3 \geq 6$ дБ и $\varphi_3 \geq 30^\circ$. Построить графики $f(t)$ (Н), $d(t)$ (см) и $\varphi(t)$ (град) движения ЗС с нулевых начальных условий при уставке $g(t) = 10(l(t) - l(t-2))$.

Решение. Будем строить систему управления на основе критерия Найквиста для неустойчивых РС. Основная задача проектирования - обеспечение устойчивости системы «тележка - перевернутый маятник», *неустойчивой* в разомкнутом состоянии из-за наличия правого полюса $s_3 = 1/T_3 = +2,5$ в ПФ (2.5)

$$W_d(s) = \frac{K_d(1-T_2s)(1+T_4s)}{s(1+T_1s)(1-T_3s)(1+T_5s)} \text{ (см/Н)}, \quad W_\varphi(s) = \frac{K_\varphi s}{(1+T_1s)(1-T_3s)(1+T_5s)} \text{ (град/Н)}$$

с параметрами $K_d = 10$, $K_\varphi = 0,573$, $T_1 = 1,72$ с, $T_2 = 0,438$ с, $T_3 = 0,397$ с, $T_4 = 0,305$ с,

$T_5 = 0,244$ с. На рис. 2.13 и 6.35 построены ЛЧХ объекта $L_\phi(\omega)$ и $\Phi_\phi(\omega)$. Структура НФ последовательного регулятора формируется из следующих соображений:

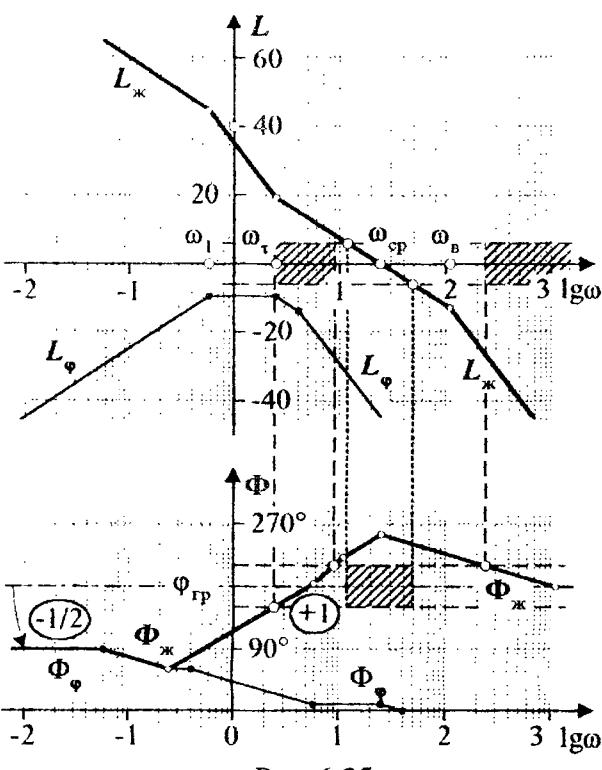


Рис. 6.35

1) для обеспечения астатизма первого порядка нужно изменить наклон НЧ части ЛАЧХ с +20 на -20 дБ/дек путем введения в регулятор двух изодромных каскадов с ПФ

$R_1(s) = (1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)/s^2$. При этом НЧ часть ЛФЧХ опустится вниз на угол от -180° до 0°;

2) для устойчивости по Найквисту необходимо, чтобы на частотах, где $L_\star(\omega) > 0$, сумма переходов $\Phi_\star(\omega)$ через уровень $\Phi_{\text{тр}} = 180^\circ$ была равна $+1/2$ с учетом пунктирного дополнения НЧ части ЛФЧХ. Для этого введем в регулятор следующие элементы:

- инвертор, сдвигающий всю ЛФЧХ вверх на 180° без изменения ЛАЧХ. Теперь пунктирное дополнение будет начинаться с уровня $\Phi_{\text{тр}}$ вниз, что дает $-1/2$ перехода;

- форсирующее звено с ПФ $R_2(s) = K(1+\tau_3 s)$, поднимающее ВЧ часть ЛФЧХ на угол от 0 до 90° и изменяющее наклон ВЧ части ЛАЧХ на +20 дБ/дек. При соответствующем выборе параметров K , τ_1 , τ_2 и τ_3 это даст пересечение $\Phi_\star(\omega)$ уровня $\Phi_{\text{тр}}$ при $L_\star(\omega) > 0$. Тогда сумма переходов составит нужное значение $-1/2 + 1 = +1/2$;

3) для подавления ВЧ шумов нужно ввести в регулятор НЧ фильтр с ПФ $R_B(s) = 1/(1+\tau_B s)$.

Таким образом, мы получили необходимую структуру ПФ регулятора

$$R(s) = -R_1(s)R_2(s)R_B(s) = \frac{-K(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}{s^2(1+\tau_B s)}, \quad (6.31a)$$

параметры которой определим следующим образом (рис. 6.35):

1) построим НЧ часть $L_\star(\omega)$ с наклоном -20 дБ/дек, проходящую через точку $(1, 40)$ для удовлетворения требования скоростной ошибки $c_1 = 1/K_\phi K = 0,01$, откуда $K = 100/K_\phi = 174,533$;

2) по nomogrammам на рис. 6.30 для перерегулирования $\sigma = 30\%$ определяем $t_p \omega_{\text{ср}} \approx 3,72\pi \approx 11,7$ и частоту среза $\omega_{\text{ср}} \approx 23,4$ рад/с ($\lg \omega_{\text{ср}} \approx 1,37$). Через точку $(\omega_{\text{ср}}, 0)$ проводим СЧ асимптоту с наклоном -20 дБ/дек;

3) сопряжение НЧ и СЧ частей желаемой ЛАЧХ должно иметь наклон -40 дБ/дек. По nomogramme определяем $L_c = L_B = 13,4$ дБ, а по (6.28a) - границы СЧ диапазона $\omega_c \leq 5$ рад/с и $\omega_B = 1/\tau_B \geq 109,5$ рад/с. Проведем сопрягающую часть ЛАЧХ так, чтобы она пересекалась с СЧ частью на частоте $\omega_t = 1/\tau_1$, меньшей 5 рад/с. Для упрощения регулятора совместим частоту ω_1 первых перегибов $L(\omega)$ и $L_\star(\omega)$. Графически опреде-

ляем частоту пересечения $\lg \omega_n \approx 0,38$, откуда $\tau_1 = 1/\omega_n = 0,416$ с $\approx T_3$. Выбираем постоянную времени $\tau_1 = T_3 = 0,397$ с;

4) назначим частоту последнего перегиба ЛАЧХ $\omega_n = 125$ рад/с и постоянную времени ФНЧ $\tau_B = 0,008$ с. Правее ω_n проводим ВЧ часть ЛАЧХ с наклоном -40 дБ/дек;

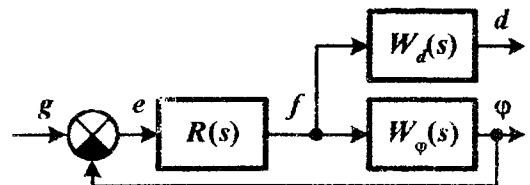
5) с учетом (6.31а) запишем ПФ желаемой РС

$$W_{\text{ж}}(s) = R(s)W_{\varphi}(s) = \frac{-100(1+T_3s)(1+\tau_2s)(1+\tau_3s)}{s(1+T_1s)(1-T_3s)(1+T_5s)(1+\tau_Bs)}.$$

Сравнив ее с восстановленной по ЛАЧХ на рис. 6.35 ПФ $\frac{-100(1+T_3s)}{s(1+T_1s)(1+\tau_Bs)}$, получим остальные параметры регулятора: $\tau_2 = T_3 = 0,397$ с, $\tau_3 = T_5 = 0,244$ с.

Таким образом, ПФ последовательного регулятора имеет вид

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{-K(1+T_3s)^2(1+T_5s)}{s^2(1+\tau_Bs)} = \\ &= \frac{-100(1+0,397s)^2(1+0,244s)}{s^2(1+0,008s)}. \quad (6.31b) \end{aligned}$$



В полученной замкнутой астатической системе коэффициент скоростной ошибки $c_1 = 1/KK_{\varphi} = 0,01$ и удовлетворяются запасы устойчивости, так как желаемые ЛЧХ на рис. 6.35 не заходят в запретные области, аналогичные областям на рис. 6.34, а.

Построим на рис. 6.36 графики переходных процессов в системе управления углом отклонения маятника с регулятором (6.31б) при нулевых предНУ (маятник вертикален и неподвижен, тележка неподвижна в начале координат d) и ступенчатой уставке $g(t) = 10(l(t) - l(t-2))$. В соответствии с принципом суперпозиции переходные процессы в системе имеют вид

$$f(t) = 10h_f(t) - 10h_f(t-2),$$

$$d(t) = 10h_d(t) - 10h_d(t-2),$$

$$\varphi(t) = 10h_{\varphi}(t) - 10h_{\varphi}(t-2),$$

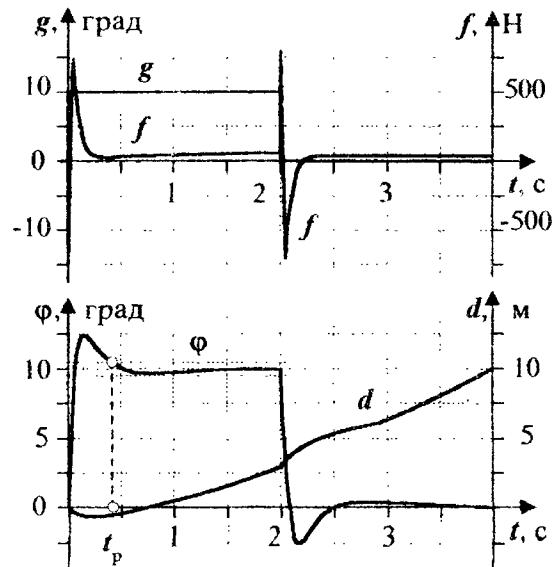


Рис. 6.36

где $h_f(t)$, $h_d(t)$ и $h_{\varphi}(t)$ - переходные характеристики ЗС в точках f , d и φ . Вычислим их методом разложения Хевисайда соответствующих изображений:

$$\begin{aligned} H_f(s) &= \frac{R(s)}{s(1+W_{\text{ж}}(s))} = \frac{K(1+T_1s)(1+T_3s)^2(1-T_3s)(1+T_5s)}{s^2(KK_{\varphi}(1+T_3s)^2 - s(1+T_1s)(1-T_3s)(1+\tau_Bs))} = \\ &= \frac{1,745 + 4,12s + 1,818s^2 - 0,359s^3 - 0,33s^4 - 0,0459s^5}{s^2(1+0,784s + 0,144s^2 + 0,00672s^3 + 0,0000546s^4)}, \end{aligned}$$

$$h_f(t) = (1,745t + 2,752 - 1034,9e^{-97,43t} + 196,2e^{-18,21t} - 3,439e^{-5,56t} - 0,232e^{-1,85t})l(t);$$

$$H_d(s) = \frac{R(s)W_d(s)}{s(1+W_{\Phi}(s))} = \frac{KK_d(1-T_2s)(1+T_3s)^2(1+T_4s)}{s^3(KK_{\Phi}(1+T_3s)^2 - s(1+T_1s)(1-T_3s)(1+\tau_Bs))} = \\ = \frac{17,453 + 11,533s + 1,423s^2 - 2,215s^3 - 0,367s^4}{s^3(1+0,784s+0,144s^2+0,00672s^3+0,0000546s^4)}$$

$$h_d(t) = (8,727t^2 - 2,153t - 2,255 - 0,883e^{-97,43t} + 5,111e^{-18,21t} - 1,5e^{-5,56t} - 0,473e^{-1,85t})l(t);$$

$$H_{\Phi}(s) = \frac{W_{\Phi}(s)}{s(1+W_{\Phi}(s))} = \frac{KK_{\Phi}(1+T_3s)^2}{s(KK_{\Phi}(1+T_3s)^2 - s(1+T_1s)(1-T_3s)(1+\tau_Bs))} = \\ = \frac{1+0,794s+0,158s^2}{s(1+0,784s+0,144s^2+0,00672s^3+0,0000564s^4)},$$

$$h_{\Phi}(t) = (1+0,3837e^{-97,43t} - 2,381e^{-18,21t} + 1,115e^{-5,56t} - 0,118e^{-1,85t})l(t).$$

Показатели качества $h_{\Phi}(t)$: $t_p \approx 0,425 < 0,5$ с, $\sigma \approx 24,1\% < 30\%$. Основные требования к частотным и временным показателям качества ЗС удовлетворены.

Обсудим характер переходных процессов в *устойчивой* ЗС с последовательным регулятором (6.31). Формула уставки $g(t) = 10(l(t) - l(t-2))$ означает, что устройству управления дано задание в течение 2 с удерживать угол отклонения *неустойчивого* маятника (рис. 1.28) на уровне 10° , а затем вернуть его в вертикальное положение. Какой должна быть сила $f(t)$, действующая на маятник массой $m=6$ кг косвенно через тележку массой $M=11$ кг, чтобы обеспечить заданный закон движения этой системы? Из физических соображений ясно, что для вывода маятника из нулевого состояния в положительном направлении необходимо краткое воздействие на тележку в направлении $d < 0$, а затем резкое изменение направления действия силы для стабилизации начавшегося падения маятника. Действительно, как видно из рис. 6.36, начальное значение $f(0) = -8396$ Н, а уже $f(0,0455) = +733,3$ Н. Дальнейшее изменение силы стабилизирует угол $\phi(t)$ в диапазоне $10^\circ \pm 0,5^\circ$ за время $t_p \approx 0,425$ с, и до момента времени $t = 2$ с тележка движется равноускоренно под действием линейно растущей силы $f_{\text{уст}}(t) = 17,45t + 27,52$. На втором временном интервале $t \geq 2$ с нулевой уставкой переходные процессы развиваются в противоположных направлениях и к моменту времени $t \approx 2,425$ с маятник возвращается в вертикальное положение, тогда как тележка движется равномерно вперед со скоростью 21,53 см/с.

На рис. 6.37 построена схема реализации ПФ регулятора (6.31) вместе со сравнивающим устройством на ОУ. Номиналы радиоэлементов удовлетворяют соотношениям $RC = 1$, $RC_1 = T_3 = 0,397$, $R_1C_2 = T_5 = 0,244$, $R_2C = \tau_B = 0,008$, $R_2/R_1 = K = 174,533$. [1]

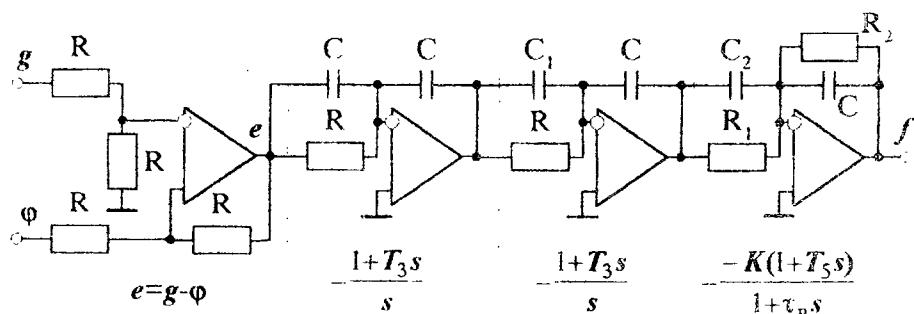


Рис. 6.37

6.6. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ

В п. 3.5.1 получены зависимости (3.36) - (3.39) оценок показателей качества ПХ (t_p , σ , ζ , N_k) от параметров (η , γ , μ , ω_k) спектра ПФ системы. Высокая достоверность этих оценок позволяет синтезировать регулятор, доставляющий ЗС желаемое качество, спектральным методом *навязывания ПФ $W_3(s)$ желаемого спектра, то есть распределения полюсов s_i и нулей λ_j* .

Расчет последовательного регулятора спектральным методом выполняется поэтапно (рис. 6.38).

1. На основе требований к желаемому качеству переходных процессов формируется спектр ЗС $\{s_i, \lambda_j\}$.

2. Требования к статической точности ЗС и последовательное соединение типовых звеньев $(1-s/\lambda_j)$ и $1/(1-s/s_i)$ дает ПФ $W_3(s) = B_3(s)/A_3(s)$.

3. Определяются фактические показатели качества ЗС путем моделирования ее ПХ $h(t) = L^{-1}\{W_3(s)/s\}$.

4. Статические и динамические свойства ПХ сравниваются с желаемыми. Если в ходе проектирования не достигнуты желаемые свойства ЗС, то нужно перейти на первый этап для изменения спектра или пересмотреть требования.

5. Определяется ПФ желаемого разомкнутого контура:

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{W_3(s)}{1-W_3(s)} = \frac{B_3(s)}{A_3(s)-B_3(s)} = \frac{B_{\text{ж}}(s)}{A_{\text{ж}}(s)}. \quad (6.32)$$

6. Определяется ПФ последовательного регулятора:

$$R(s) = \frac{W_{\text{ж}}(s)}{W(s)} = \frac{W_3(s)}{(1-W_3(s))W(s)} = \frac{B_3(s)A(s)}{(A_3(s)-B_3(s))B(s)}. \quad (6.33)$$

7. Выполняется техническая реализация полученной ПФ: последовательный регулятор преобразуется к желаемому типу, а далее разрабатывается устройство, реализующее регулятор в требуемой элементной базе.

Наиболее сложными являются первый и второй этапы формализации требуемых показателей качества ЗС в виде ее спектра и ПФ. Они включают выбор структуры ПФ (степеней полиномов $A_3(s)$ и $B_3(s)$) и ее параметров (коэффициентов полиномов). Син-

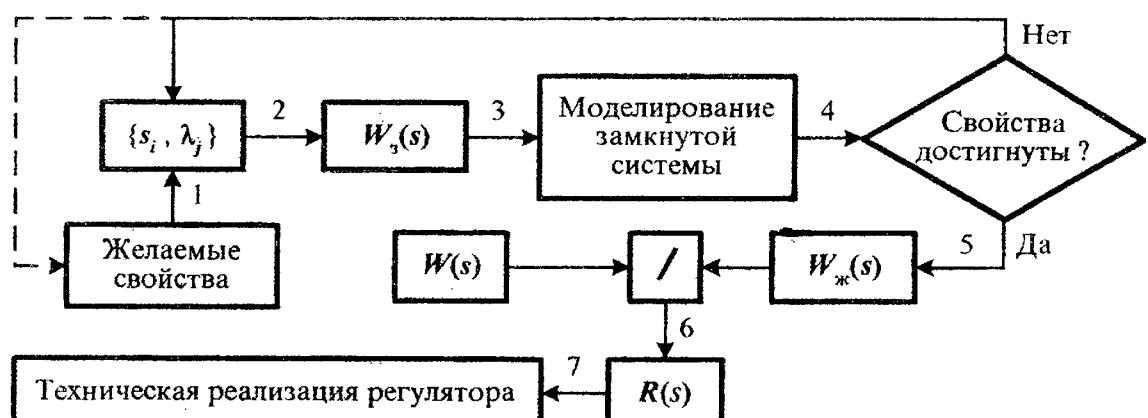


Рис. 6.38

тез $W_3(s)$ подразделяется на *статический*, обеспечивающий желаемые коэффициенты статических ошибок c_0, c_1, \dots из (6.5), и *динамический*, гарантирующий желаемые показатели качества переходного процесса t_p, σ и т.п.

Обозначим ПФ замкнутого и желаемого разомкнутого контуров

$$W_3(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}, \quad W_{\infty}(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_n s^n}, \quad \alpha_i = a_i - b_i. \quad (6.34)$$

При *статическом синтезе* в первую очередь задается порядок астатизма желаемой РС v , соответствующий желаемой степени полинома уставки $g(t) = g_0 + g_1 t + \dots + g_{v-1} t^{v-1}$, отслеживаемой с нулевой ошибкой.

Если проектируется статическая система ($v=0$), то задается максимальный модуль c_0 коэффициента статической ошибки:

$$\left| \frac{\alpha_0}{a_0} \right| = \left| \frac{a_0 - b_0}{a_0} \right| = |1 - W_3(0)| = |1 - K_3| \leq c_0.$$

Отсюда получаем связь коэффициентов a_0, b_0 и допустимый коэффициент статического усиления ЗС $K_3 = b_0/a_0$:

$$a_0 - a_0 c_0 \leq b_0 \leq a_0 + a_0 c_0, \quad 1 - c_0 \leq K_3 \leq 1 + c_0. \quad (6.35a)$$

Иногда дополнительно задается максимальный модуль c_1 коэффициента скоростной ошибки:

$$\left| \frac{\alpha_1 - \alpha_0 a_1 / a_0}{a_0} \right| = \left| \frac{a_1 K_3 - b_1}{a_0} \right| \leq c_1.$$

В итоге получим дополнительное условие связи параметров ПФ $W_3(s)$:

$$a_1 K_3 - a_0 c_1 \leq b_1 \leq a_1 K_3 + a_0 c_1. \quad (6.35b)$$

В общем случае, если задан $N+1$ максимальный модуль коэффициентов ошибок $c_0 \dots c_N$, то по (6.5в) степени полиномов $B_3(s)$ и $A_3(s)$ должны быть не менее N , а коэффициенты удовлетворять векторным неравенствам

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_N & \dots & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_N & \dots & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}. \quad (6.35b)$$

Если проектируется САУ с астатизмом v -го порядка, то в ПФ $W_{\infty}(s)$ должно быть $\alpha_0 = \dots = \alpha_{v-1} = 0$, $A_{\infty}(s) = s^v (\alpha_v + \dots + \alpha_n s^{n-v})$, а v младших коэффициентов ошибок равны $c_0 = \dots = c_{v-1} = 0$. Исключив их из (6.35в), получим условия связи параметров ПФ $W_3(s)$ для заданных максимальных модулей коэффициентов $c_v \dots c_N$:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_3 = 1, \quad a_i = b_i \quad \forall i = \overline{0, v-1}, \\ \begin{bmatrix} a_v \\ a_{v+1} \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_N & \dots & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_v \\ c_{v+1} \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_v \\ b_{v+1} \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_v \\ a_{v+1} \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_N & \dots & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_v \\ c_{v+1} \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (6.36a)$$

В частности, при $v=N=1$ проектируется САУ с астатизмом первого порядка и ограничением c_1 на модуль коэффициента скоростной ошибки. Тогда ее ПФ $W_3(s)$ должна иметь параметры, удовлетворяющие условиям

$$K_1=1, \quad a_0=b_0, \quad a_1-a_0c_1 \leq b_0 \leq a_1+a_0c_1. \quad (6.36b)$$

При $v=1$ и $N=2$ задаются ограничения c_1 и c_2 на коэффициенты ошибок по скорости и ускорению. Тогда ПФ ЗС должна иметь параметры, совместно удовлетворяющие условиям (6.36b) и

$$a_2-a_1c_1-a_0c_2 \leq b_2 \leq a_2+a_1c_1+a_0c_2. \quad (6.36b)$$

Таким образом, *статический синтез дает минимальные степени полиномов $B_3(s)$, $A_3(s)$ и соотношения между их коэффициентами, обеспечивающие заданную точность.*

Динамический синтез ПФ ЗС

$$W_3(s)=K_3 \prod_{j=1}^m \left(1-s/\lambda_j\right) / \prod_{i=1}^n \left(1-s/s_i\right)$$

заключается в назначении ее спектра (полюсов s_i и нулей λ_j) так, чтобы спектральные оценки качества ПХ $h(t)$ по (3.36) - (3.39) не превышали заданных значений времени регулирования t_p (с), перерегулирования σ (%), степени затухания колебаний ζ , числа колебаний в переходном процессе N_k . Дополнительно могут быть ограничены жесткость системы r , полоса пропускания f_n (Гц) и другие динамические показатели.

Полюсы s_i нужно размещать в области S левой полуплоскости, ограниченной степенью устойчивости η , степенью быстродействия γ и углами $\pm\psi = \pm\arctg(\mu)$, определяемыми степенью колебательности μ (рис. 6.39):

$$\begin{cases} 3/t_p \leq \eta \leq \min\{r\eta, 2\pi f_n\}, \\ \mu \leq \min\{-\pi/\ln(\sigma/100), -2\pi/\ln(1-\zeta), 2N_k\}. \end{cases} \quad (6.37)$$

Размещение полюсов в области S дает полином знаменателя ПФ $A_3(s) = \prod_{i=1}^n (1-s/s_i)$.

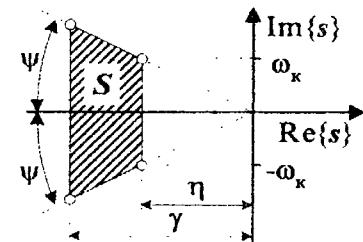


Рис. 6.39

Прямой алгебраический метод выбора $A_3(s)$ состоит в *анализе устойчивости ХП со смещенным аргументом*. Соответствующие (6.37) условия $-\gamma \leq \operatorname{Re}\{s_i\} \leq -\eta$ эквивалентны устойчивости полиномов $A_3(z-\eta)$ и $A_3(-z-\gamma)$, что налагает определенные ограничения-неравенства на коэффициенты $A_3(s)$. Дополнительные ограничения дают условий $\mu_i \leq \mu$, при которых степени колебательности $\mu_i = \omega_i/\eta_i$ комплексных полюсов $s_{i,i+1} = -\eta_i \pm j\omega_i$ не превосходят заданного значения μ . На основе формул Виета (4.8), связывающих корни полинома с его коэффициентами, составляются условия связи коэффициентов друг с другом и со значением μ . В пересечении с областями устойчивости полиномов $A_3(z-\eta)$ и $A_3(-z-\gamma)$ получим допустимые области коэффициентов $A_3(s)$.

При выборе $W_3(s)$ желательно выполнять следующие рекомендации.

1. На случай возможного разрыва цепи ОС рекомендуется *обеспечить устойчивость ХП $A_\infty(s) = A_3(s) - B_3(s)$ желаемого разомкнутого контура.*

2. Характеристический полином $A_3(s)$ должен иметь невысокую степень $n=2+4$ для облегчения размещения полюсов в допустимой области S , упрощения структуры переходного процесса и его расчета, увеличения грубости системы (слабого влияния малых изменений ее параметров на устойчивость).

3. Для упрощения структуры ПФ регулятора (6.33) полиномы $B_3(s)A(s)$ и $(A_3(s)-B_3(s))B(s)$ должны иметь совпадающие корни. Желательно в $W_3(s)$ сохранить полюсы $s_i^0 \leq -\eta$, а в $W_3(s)$ сохранить нули λ_j^0 от ПФ $W(s)$, то есть выбрать полиномы $B_3(s)$ и $B(s)$ кратными, если это не противоречит условиям (6.35)-(6.36).

4. Для уменьшения амплитуд составляющих ошибки регулирования и повышения быстродействия желательно близкие к минимуму оси полюсы компенсировать размещением рядом с ними нулей.

5. В $W_3(s)$ нежелательны правые нули, порождающие в ПХ отрицательное перегулирование.

6. Во избежание явления резонанса полюсы $W_3(s)$ необходимо удалять от комплексных полюсов изображения уставки $G(s)$.

Рассмотрим некоторые типовые ПФ $W_3(s)$ и методы расчета их параметров.

6.6.1. Замкнутая система второго порядка с ПФ

$$W_3(s) = K_3 \frac{1+b_1 s}{1+a_1 s + a_2 s^2} \quad (6.38)$$

устойчива при $\{a_1 > 0\} \cap \{a_2 > 0\}$. Степень числителя $m=1$ позволяет выполнить статический синтез по (6.35в) при $N \leq 1$:

$$\begin{cases} 1-c_0 \leq K_3 \leq 1+c_0, \\ a_1(1-c_0)-c_1 \leq K_3 b_1 \leq a_1(1+c_0)+c_1. \end{cases} \quad (6.39)$$

Получим прямые ограничения на допустимые значения a_1 и a_2 (рис. 6.40), эквивалентные размещению полюсов в области (6.37):

a) $\operatorname{Re}\{s_i\} \leq -\eta \Rightarrow A_3(z-\eta) = (1-\eta a_1 + \eta^2 a_2) + (a_1 - 2\eta a_2)z + a_2 z^2,$

$$\eta a_1 - \eta^2 a_2 \leq 1, \quad a_1 - 2\eta a_2 \geq 0, \quad a_2 > 0; \quad (6.40a)$$

б) $\operatorname{Re}\{s_i\} \geq -\gamma \Rightarrow A_3(-z-\gamma) = (1-\gamma a_1 + \gamma^2 a_2) - (a_1 - 2\gamma a_2)z + a_2 z^2,$

$$\gamma a_1 - \gamma^2 a_2 \leq 1, \quad a_1 - 2\gamma a_2 \leq 0, \quad a_2 > 0; \quad (6.40b)$$

в) для комплексных полюсов $s_{1,2} = -\eta_k \pm j\omega_k$ со степенью колебательности

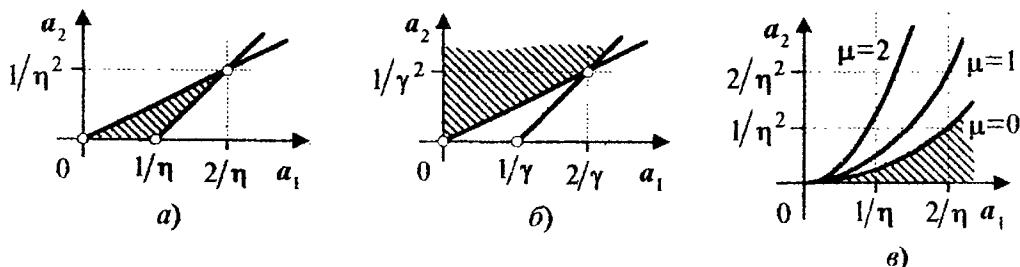


Рис. 6.40

$\mu_k = \omega_k / \eta_k$ по формулам Виста (4.8) $s_1 + s_2 = -2\eta_k = -a_1/a_2$ и $s_1 s_2 = \eta_k^2 (1 + \mu_k^2) = 1/a_2$ получим допустимое соотношение коэффициентов:

$$\mu_k \leq \mu \Rightarrow 4a_2/a_1^2 \leq \mu^2 + 1. \quad (6.40b)$$

На рис. 6.40,в заштрихована область коэффициентов полинома с действительными корнями, для которого $\mu_k = 0$.

Пересечение трех областей, изображенных на рис. 6.40, дает область расположения коэффициентов полинома $A_3(s)$, соответствующую желаемому спектру.

При размещении в области S двух полюсов возможны следующие варианты.

1. *Простые* полюсы $s_1 \neq s_2$ на отрезке $[-\gamma, -\eta] \in S$ действительной оси дают ХП $A_3(s) = (1 - s/s_1)(1 - s/s_2) = (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)$ с постоянными временем апериодических звеньев $T_i = -1/s_i$ и коэффициентами

$$a_1 = -1/s_1 - 1/s_2 = T_1 + T_2, \quad a_2 = 1/s_1 s_2 = T_1 T_2. \quad (6.41)$$

Переходная характеристика ЗС с действительными левыми простыми полюсами имеет апериодический характер:

$$h(t) = K_3 \left(1 + \sum_{i=1}^2 \frac{1+b_i s_i}{s_i(a_i + 2a_2 s_i)} e^{s_i t} \right) = K_3 \left(1 + \frac{b_1 - T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{b_1 - T_2}{T_2 - T_1} e^{-t/T_2} \right).$$

Исследуем влияние нуля $\lambda_1 = -1/b_1$ на свойства $h(t)$, считая для определенности $T_1 > T_2$. Анализ монотонности и экстремумов ПХ показывает, что при $0 \leq b_1 \leq T_1$ она монотонна с перерегулированием $\sigma = 0$, а увеличение b_1 форсирует (ускоряет) переходный процесс (рис. 6.41). При $b_1 > T_1$ $h(t)$ имеет по (3.33) *положительное перерегулирование*

$$\sigma = \left(\frac{T_1}{b_1/T_1 - 1} \right) \frac{T_1}{T_1 - T_2} \left(\frac{T_2}{b_1/T_2 - 1} \right) \frac{T_2}{T_2 - T_1}.$$

При $b_1 < 0$ ПХ имеет по (3.34) *нежелательное отрицательное перерегулирование*

$$\sigma_- = \left(1 - \frac{T_1}{b_1/T_1} \right) \frac{T_1}{T_1 - T_2} \left(1 - \frac{T_2}{b_1/T_2} \right) \frac{T_2}{T_2 - T_1} - 1.$$

Построим графики $\sigma(b_1)$, $\sigma_-(b_1)$ и $t_p(b_1)$ (рис. 6.42) для ПФ

$$W_3(s) = K_3 \frac{1+b_1 s}{(1+s)(1+0.5s)} \quad \text{с полюсами}$$

$s_1 = -1$, $s_2 = -2$ и постоянными времени $T_1 = 1$ с и $T_2 = 0.5$ с. Значение t_p определяется по вхождению $h(t)$ в трубку 5% от установившегося значения $h_{\text{уст}} = K_3$. Изучение влияния b_1 на показатели качества ПХ позволяет понять *обиций*

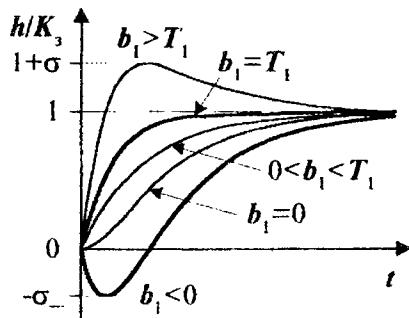


Рис. 6.41

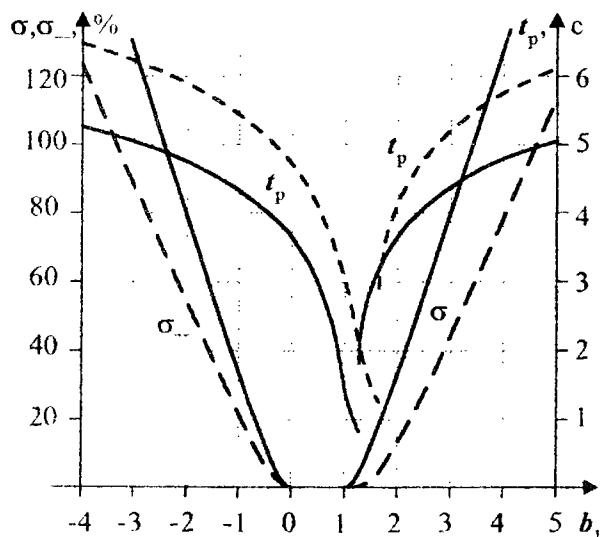


Рис. 6.42

Для повышения быстродействия без увеличения перерегулирования системы с действительными полюсами желательно размещать ее нули в интервале между крайними полюсами ближе к правой границе, а постоянную времени b_1 выбирать в интервале между крайними постоянными временем ближе к максимальной:

$$\min\{s_i\} \leq \lambda_j \leq \max\{s_i\} < 0, 0 < \min\{T_i\} \leq b_1 \leq \max\{T_i\}. \quad (6.42)$$

Допустимы также нули $\lambda_j \leq \min\{s_i\}$ ($0 < b_1 \leq \min\{T_i\}$): они не увеличивают перерегулирование, хотя и не форсируют переходный процесс. Нули $\max\{s_i\} < \lambda_j < 0$ ($b_1 > \max\{T_i\}$) дают положительное перерегулирование и уменьшают быстродействие. Нежелательны правые нули $\lambda_j > 0$ ($b_1 < 0$): они дают отрицательное перерегулирование и существенно затягивают переходный процесс во времени.

2. Разместив два действительных полюса в одной точке $-\gamma \leq s_1 = s_2 \leq -\eta$, получим коэффициенты

$$a_1 = -2/s_1 = 2T, \quad a_2 = 1/s_1^2 = T^2.$$

Переходная характеристика ЗС с действительным двукратным левым полюсом равна

$$h(t) = K_3 \left\{ 1 - \left[1 - s_1(1 + b_1 s_1)t \right] e^{s_1 t} \right\} = K_3 \left\{ 1 - \left[1 + (1 - b_1/T)t/T \right] e^{-t/T} \right\}.$$

Влияние коэффициента b_1 на показатели качества $h(t)$ аналогично случаю простых полюсов. На рис. 6.42 пунктиром изображены зависимости $\sigma = (b_1/T - 1)e^{\frac{-b_1}{T} - T}$ при $b_1 > T$, $\sigma_- = (1 - b_1/T)e^{\frac{T-b_1}{T}} - 1$ при $b_1 < 0$ и $t_p(b_1)$ для ЗС с ПФ $W_3(s) = K_3 \frac{1+b_1 s}{(1+s)^2}$. Нуль $\lambda_1 = -1/b_1$ желательно размещать слева и вблизи от полюса s_1 .

3. Разместив в области S пару комплексно-сопряженных полюсов $s_{1,2} = -\eta_k \pm j\omega_k$ с углом раствора $\pm\psi = \pm\arctg(\omega_k/\eta_k)$, получим коэффициенты ХП

$$\begin{cases} a_1 = -1/s_1 - 1/s_2 = 2\eta_k / (\eta_k^2 + \omega_k^2) = 2\xi_k T_k, \\ a_2 = 1/s_1 s_2 = 1 / (\eta_k^2 + \omega_k^2) = T_k^2, \end{cases}$$

где $T_k = 1/\sqrt{\eta_k^2 + \omega_k^2}$ и $\xi_k = \eta_k T_k = \cos(\psi_k)$ - постоянная времени и коэффициент демпфирования колебательного звена второго порядка. При выборе значений η_k , ω_k и ψ_k полезно знать, что по (3.37) перерегулирование не превышает 5%, если степень колебательности $\mu = \arctg(\psi) \leq -\pi/\ln(0.05) = 1.05 \approx 1$. Отсюда следуют простые условия выбора частоты колебаний ω_k и угла раствора ψ_k без учета расположения нуля ПФ (6.38), то есть при $b_1 = 0$:

$$\omega_k \leq \eta_k, \quad \psi_k \leq 45^\circ. \quad (6.43)$$

Переходная характеристика ЗС второго порядка с ПФ $W_3(s) = K_3 \frac{1+b_1 s}{1+2\xi_k T_k s + T_k^2 s^2}$

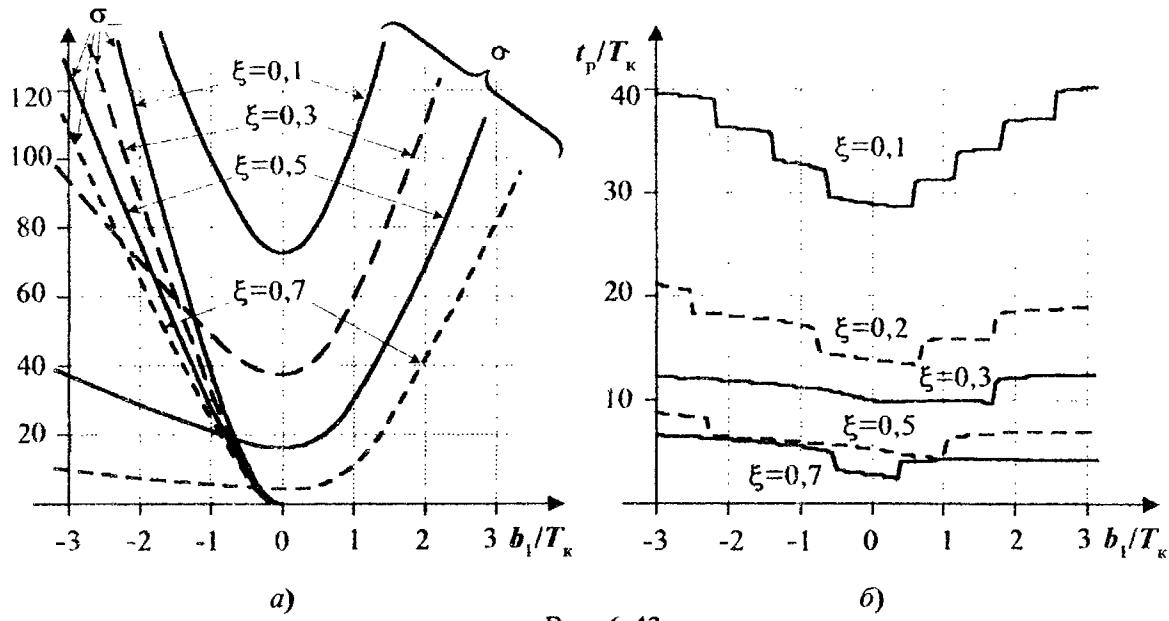


Рис. 6.43

и комплексно-сопряженными левыми полюсами имеет затухающий колебательный характер $h(t) = K_3 \{1 - H_k e^{-\eta_k t} \sin(\omega_k t + \Phi_k)\}$ с параметрами

$$H_k = \sqrt{(1 + \eta_k^2 / \omega_k^2)(\eta_k^2 + \omega_k^2)b_1^2 - 2\eta_k b_1 + 1} = \sqrt{(\beta^2 - 2\xi_k \beta + 1)/(1 - \xi_k^2)},$$

$$\Phi_k = \arctg \left(\frac{\omega_k}{\eta_k - (\eta_k^2 + \omega_k^2)b_1} \right) = \arctg \left(\frac{\sin(\psi_k)}{\cos(\psi_k) - \beta} \right), \quad \beta = b_1/T_k.$$

Изобразим на рис. 6.43 влияние коэффициента b_1 и коэффициента демпфирования колебаний ξ_k на динамические свойства $h(t)$. Анализ экстремумов ПХ показывает, что перерегулирование $\sigma = \sqrt{\beta^2 - 2\xi_k \beta + 1} e^{-(\pi + \psi_k - \Phi_k)/\mu_k} \neq 0$ при всех значениях b_1 и минимально при $b_1 = 0$, то есть при $\lambda_1 \rightarrow -\infty$: $\sigma_{min} = e^{-\pi/\mu_k}$. Это значит, что никакой действительный конечный нуль в принципе не может полностью компенсировать колебательность, порожденную комплексными полюсами.

Отрицательное перерегулирование $\sigma_- = \sqrt{\beta^2 - 2\xi_k \beta + 1} e^{-(\psi_k - \Phi_k)/\mu_k} - 1$ появляется только при выборе $b_1 < 0$, то есть *правого нуля* $\lambda_1 = -1/b_1 > 0$.

Начальная амплитуда колебаний $h(t)$ минимальна ($H_k = 1$) при $\beta^2 - 2\xi_k \beta + 1 = (\beta - \xi_k)^2 + 1 - \xi_k^2 \rightarrow \min$, откуда следуют оптимальные значения $\beta = \xi_k$, $b_1 = \xi_k T_k$, $\lambda_1 = -1/\xi_k T_k$. Зависимости быстродействия от b_1 и ξ_k (рис. 6.43, б) получены моделированием ПХ нормированной системы с ПФ $(1 + \beta s) / (1 + 2\xi_k s + s^2)$. С учетом поведения графиков на рис. 6.43, а (резкое увеличение перерегулирования при $b_1 > \xi_k T_k$) получаем области выбора значений $0 \leq b_1 \leq \xi_k T_k$ и $\lambda_1 \leq -1/\xi_k T_k$.

Положение нуля $\lambda_1 = -|s_1|/\cos(\psi_k)$, минимизирующее колебания $h(t)$ системы второго порядка, легко найти графически (рис. 6.44). Из подобия треугольников $\langle 0, s_1, \lambda_1 \rangle$

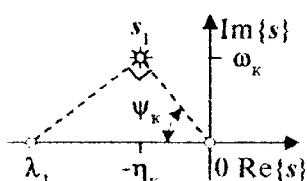


Рис. 6.44

На основании проведенного анализа сделаем следующие выводы относительно размещения нуля ПФ второго порядка.

Для уменьшения колебательности и повышения быстродействия системы с комплексными полюсами $s_{1,2} = -\eta_k \pm j\omega_k$ желательно размещать действительный нуль левее точки пересечения действительной оси с перпендикуляром к лучу $\langle 0, s_1 \rangle$:

$$\lambda_1 \leq -(\eta_k^2 + \omega_k^2)/\eta_k. \quad (6.44a)$$

Правый нуль $\lambda_1 > 0$ дает нежелательное отрицательное перерегулирование и является недопустимым. Неравенству (6.44а) соответствует следующее условие выбора постоянной времени b_1 :

$$0 \leq b_1 \leq \eta_k / (\eta_k^2 + \omega_k^2) = \xi_k T_k = a_1 / 2. \quad (6.44b)$$

Если ПФ высокого порядка содержит несколько пар комплексно-сопряженных полюсов, то частичная компенсация действительным левым нулем производится для пары с максимальным углом раствора ψ_k , дающей наименьшее затухание колебаний переходного процесса.

Таким образом, параметры ПФ второго порядка вычисляются следующим образом. Сначала по (6.37) строится область спектра S , а по (6.39) определяется коэффициент статического усиления K_3 . Далее находятся коэффициенты a_1 и a_2 : либо по (6.40), либо по (6.41) после выбора типа и размещения полюсов s_1 и s_2 . И, наконец, по (6.39), (6.42) и (6.44) выбирается коэффициент $b_1 = -1/\lambda_1$.

Пример 6.10. Для объекта (6.7) с $K=200$ и спектром $\{s_1^0 = -0,92, s_2^0 = -0,1, s_3^0 = -1\}$ рассчитать регулятор, дающий ЗС второго порядка астатизм первого порядка с коэффициентом скоростной ошибки $c_1 \leq 0,1$ с, показателями качества $t_p \leq 2$ с, $\sigma \leq 20\%$ и жесткостью $r \leq 10$.

Решение. Для создания астатизма первого порядка по (6.39) при $c_0 = 0$ определяем $K_3 = 1$. На основе (6.37) получим параметры допустимой области размещения полюсов ЗС (рис. 6.39):

$$S: \eta \geq 1,5, \gamma \leq 15, \mu \leq 1,952, \psi \leq 63^\circ. \quad (6.45)$$

Выберем действительный тип полюсов $-15 \leq s_2 < s_1 \leq -1,5$, дающих апериодический характер $h(t)$. Записав с помощью (6.32) и (6.41) ПФ замкнутой и желаемой разомкнутой систем как функции параметра b_1 и постоянных времени $T_1 = -1/s_1 > T_2 = -1/s_2$

$$W_z(s) = \frac{1+b_1 s}{1+(T_1+T_2)s+T_1 T_2 s^2}, \quad W_{*}(s) = \frac{1+b_1 s}{s(T_1+T_2-b_1+T_1 T_2 s)} = K_* \frac{1+b_1 s}{s(1+T_* s)},$$

где $K_* = 1/(T_1+T_2-b_1)$ и $T_* = T_1 T_2 / (T_1+T_2-b_1)$, перечислим условия, которым должны удовлетворять параметры b_1 , T_1 и T_2 .

К обязательным условиям относятся:

- 1) принадлежность полюсов s_1 и s_2 области (6.45), а параметров T_1 и T_2 -области

внутри и на границе треугольника (рис. 6.45):

$$\{s_1, s_2\} \subset S \Rightarrow 0,0667 \leq T_2 < T_1 \leq 0,667; \quad (6.46a)$$

2) условие (6.36б) обеспечения желаемой статической точности:

$$c_1 \leq 0,1 \Rightarrow T_1 + T_2 - 0,1 \leq b_1 \leq T_1 + T_2 + 0,1. \quad (6.46b)$$

К желательным условиям относятся:

1) условия (6.42) предпочтительного размещения нуля $\lambda_1 = -1/b_1$:

$$s_2 \leq \lambda_1 \leq s_1 \Rightarrow T_2 \leq b_1 \leq T_1; \quad (6.46b)$$

2) сохранение в ПФ $W_{\infty}(s)$ наиболее удаленного полюса $s_3^0 = -1$ объекта для повышения быстродействия ЗС и упрощения структуры ПФ регулятора:

$$T_{\infty} = T_3^0 = 1 \Rightarrow b_1 = T_1 + T_2 - T_1 T_2. \quad (6.46c)$$

Подстановка (6.46c) в (6.46b) и (6.46b) дополнительно к (6.46a) ограничивает выбор параметров T_1 и T_2 следующими неравенствами, отраженными на рис. 6.45 областями с пунктирными границами:

$$-0,1 \leq T_1 T_2 \leq 0,1, \quad T_1 \geq 1, \quad 0 \leq T_2 \leq 1. \quad (6.46d)$$

Видно, что желаемое неравенство $T_1 \geq 1$ несовместно с обязательным условием (6.46a) и должно быть заменено неравенствами $0 \leq T_1 \leq 1$, что в (6.46b) эквивалентно выбору $s_1 \leq \lambda_1 < 0$ и $b_1 \geq T_1$. В результате возможно увеличение перерегулирования и уменьшение быстродействия.

Выберем постоянные времени $T_1 = 0,4$ с и $T_2 = 0,2$ с (рис. 6.45), тогда

$$a_1 = T_1 + T_2 = 0,6, \quad a_2 = T_1 T_2 = 0,08, \quad b_1 = T_1 + T_2 - T_1 T_2 = 0,52, \quad K_{\infty} = 1/T_1 T_2 = 12,5,$$

$$W_3(s) = \frac{1+0,52s}{1+0,6s+0,08s^2}, \quad W_{\infty}(s) = \frac{12,5(1+0,52s)}{s(1+s)},$$

а ПФ последовательного регулятора имеет ПИД²-характер:

$$R(s) = \frac{W_{\infty}(s)}{W(s)} = \frac{(1+50s)(1+10s)(1+0,52s)}{16s} = \frac{0,0625}{s} + 3,7825 + 33,2s + 16,25s^2.$$

Замкнутая система имеет коэффициент скоростной ошибки $c_1 = 0,08 < 0,1$, полюсы $s_1 = -2,5$ и $s_2 = -5$ внутри области (6.45), жесткость $r = 2 < 10$ и ПХ

$$h(t) = 1 + \frac{b_1 - T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{b_1 - T_2}{T_2 - T_1} e^{-t/T_2} = \\ = 1 + 0,6e^{-2,5t} - 1,6e^{-5t}$$

с показателями качества $t_p = 0,83 < 2$ с и $\sigma = 5,6 < 20\%$ (рис. 6.46).

Все требования выполнены с большим запасом. \square

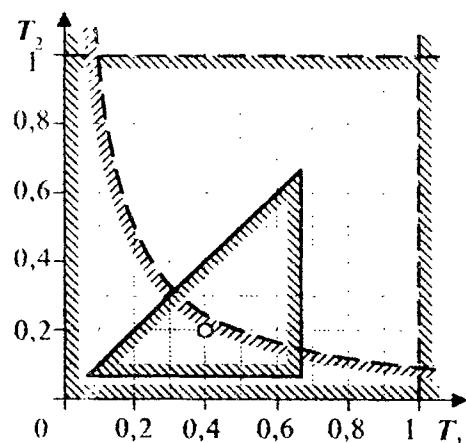


Рис. 6.45

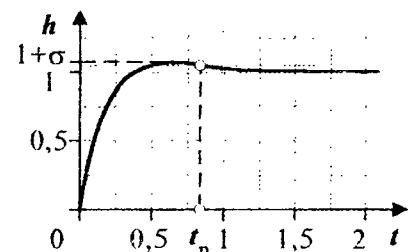


Рис. 6.46

6.6.2. Замкнутая система третьего порядка с ПФ

$$W_3(s) = K_3 \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3} \quad (6.47)$$

устойчива по критерию (4.11) при $\{a_2 > 0\} \cap \{a_1 a_2 > a_3 > 0\}$. Степень числителя $m=2$ позволяет выполнить статический синтез по (6.35в) при $N \leq 2$:

$$\begin{cases} 1 - c_0 \leq K_3 \leq 1 + c_0, \\ a_1(1 - c_0) - c_1 \leq K_3, b_1 \leq a_1(1 + c_0) + c_1, \\ a_2(1 - c_0) - a_1 c_1 - c_2 \leq K_3, b_2 \leq a_2(1 + c_0) + a_1 c_1 + c_2. \end{cases} \quad (6.48)$$

По **прямому методу динамического синтеза** получим ограничения на допустимые значения a_1 , a_2 и a_3 , эквивалентные размещению полюсов в области (6.37). При этом используем критерий (4.11) для полинома третьей степени с учетом положительности коэффициента a_3 :

a) $\operatorname{Re}\{s_i\} \leq -\eta \Rightarrow A_3(z-\eta) = (1 - \eta a_1 + \eta^2 a_2 - \eta^3 a_3) + (a_1 - 2\eta a_2 + 3\eta^2 a_3)z + (a_2 - 3\eta a_3)z^2 + a_3 z^3 = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3$ устойчив или нейтрален при

$$\begin{cases} \alpha_0 \geq 0 \Rightarrow \eta a_1 - \eta^2 a_2 + \eta^3 a_3 \leq 1, \\ \alpha_2 \geq 0 \Rightarrow a_2 - 3\eta a_3 \geq 0, \\ \alpha_3 > 0 \Rightarrow a_3 > 0, \\ \alpha_1 \alpha_2 \geq \alpha_0 \alpha_3 \Rightarrow (a_1 - 2\eta a_2 + 3\eta^2 a_3)(a_2 - 3\eta a_3) + (\eta a_1 - \eta^2 a_2 + \eta^3 a_3 - 1)a_3 \geq 0; \end{cases} \quad (6.49a)$$

б) $\operatorname{Re}\{s_i\} \geq -\gamma \Rightarrow A_3(-z-\gamma) = (1 - \gamma a_1 + \gamma^2 a_2 - \gamma^3 a_3) - (a_1 - 2\gamma a_2 + 3\gamma^2 a_3)z + (a_2 - 3\gamma a_3)z^2 - a_3 z^3 = \beta_0 - \beta_1 z + \beta_2 z^2 - \beta_3 z^3$ устойчив или нейтрален при

$$\begin{cases} \beta_0 \leq 0 \Rightarrow \gamma a_1 - \gamma^2 a_2 + \gamma^3 a_3 \geq 1, \\ \beta_2 \leq 0 \Rightarrow a_2 - 3\gamma a_3 \leq 0, \\ \beta_3 > 0 \Rightarrow a_3 > 0, \\ \beta_1 \beta_2 \leq \beta_0 \beta_3 \Rightarrow (a_1 - 2\gamma a_2 + 3\gamma^2 a_3)(a_2 - 3\gamma a_3) + (\gamma a_1 - \gamma^2 a_2 + \gamma^3 a_3 - 1)a_3 \leq 0; \end{cases} \quad (6.49b)$$

в) для комплексных полюсов $s_{1,2} = -\eta_K \pm j\omega_K$ со степенью колебательности $\mu_K = \omega_K / \eta_K$ и действительного полюса $s_3 = -\eta_J$ по формулам Виета (4.8) $-s_1 - s_2 - s_3 = \eta_J + 2\eta_K = -\frac{a_2}{a_3}$, $s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 = 2\eta_J \eta_K + \eta_K^2 (1 + \mu_K^2) = \frac{a_1}{a_3}$ и $-s_1 s_2 s_3 = \eta_J \eta_K^2 (1 + \mu_K^2) = \frac{1}{a_3}$ получим поверхности уровня μ в пространстве $\{a_1, a_2, a_3\}$, которые можно представить как семейство параметрических функций - границ областей S $\eta \leq \eta_K \leq \gamma$ и $\mu_K \leq \mu$:

$$\begin{cases} a_1 = \eta_K^2 (1 + \mu_K^2) a_3 + 2 / \eta_K (1 + \mu_K^2), \\ a_2 = 2 \eta_K a_3 + 1 / \eta_K^2 (1 + \mu_K^2). \end{cases} \quad (6.49b)$$

По **методу размещения** в области S трех полюсов возможны варианты:

1) действительные (в том числе и кратные) полюсы s_1 , s_2 и s_3 дают ХП $A_3(s) = (1 - s/s_1)(1 - s/s_2)(1 - s/s_3) = (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)$ с коэффициентами

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = -1/s_1 - 1/s_2 - 1/s_3 = T_1 + T_2 + T_3, \\ a_2 = 1/s_1 s_2 + 1/s_1 s_3 + 1/s_2 s_3 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3, \\ a_3 = -1/s_1 s_2 s_3 = T_1 T_2 T_3; \end{array} \right. \quad (6.50a)$$

2) один действительный полюс $s_1 = -\eta_d$ и пара комплексных полюсов $s_{2,3} = -\eta_k \pm j\omega_k$ дают ХП $A_3(s) = (1+T_d s)(1+2\xi_k T_k s + T_k^2 s^2)$ с коэффициентами

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1/\eta_d + 2\eta_k / (\eta_k^2 + \omega_k^2) = T_d + 2\xi_k T_k, \\ a_2 = (\eta_d + 2\eta_k) / \eta_d (\eta_k^2 + \omega_k^2) = (2\xi_k T_d + T_k) T_k, \\ a_3 = 1/\eta_d (\eta_k^2 + \omega_k^2) = T_d T_k^2, \end{array} \right. \quad (6.50b)$$

где $T_d = 1/\eta_d$; $T_k^2 = 1/(\eta_k^2 + \omega_k^2)$; $\xi_k = \eta_k T_k = \cos(\psi_k) = 1/\sqrt{1+\mu_k^2}$; $\mu_k = \omega_k / \eta_k$.

Для быстрого затухания колебаний комплексные полюсы желательно размещать у левой границы спектра: $\eta_k \leq \gamma$. Переходная характеристика системы с доминирующими комплексными полюсами будет иметь малое перерегулирование, если полюсы разместить согласно (6.43). Если доминирующим выбран действительный полюс, то угол раствора комплексных полюсов можно увеличить.

Степень полинома $B_3(s)$ ограничена снизу числом заданных коэффициентов ошибок $c_0 \div c_N$: $m \geq N$. Коэффициенты $b_1 \div b_m$, порождающие нули $\lambda_1 \div \lambda_m$, выбираются из желательных условий (6.42), (6.44), сохранения левых нулей объекта и подавления близких к мнимой оси полюсов.

Пример 6.11. Решить пример 6.10 для ЗС третьего порядка.

Решение. Выберем следующие типы и размещение полюсов ЗС в области спектра S , определенной в (6.45) (рис. 6.47):

а) действительный полюс $s_1 = -1,5$ (ему соответствует постоянная времени $T_d = 0,667$ с) разместим на правой границе S с дальнейшим расчетом частично или полностью скомпенсировать его нулем $\lambda_1 \approx s_1$;

б) комплексно-сопряженные полюсы $s_{2,3} = -15 \pm 15j$ ($\eta_k = \omega_k = 15$, $T_k = 0,0471$ с, $\mu_k = 1$, $\xi_k = 0,707$) разместим на левой границе S согласно рекомендациям (6.43).

Вычислив по (6.35а) при $c_0 = 0$ значение $K_3 = 1$, а по (6.50б) коэффициенты ПФ ЗС

$$a_1 = 0,733, a_2 = 0,0467, a_3 = 0,00148,$$

составим по (6.34) ПФ желаемого разомкнутого контура:

$$W_*(s) = \frac{1+b_1 s + b_2 s^2}{s(a_1 - b_1 + (a_2 - b_2)s + a_3 s^2)} = \frac{K_*(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{s(1+T_{*1}s)(1+T_{*2}s)}, \quad K_* = \frac{1}{a_1 - b_1}. \quad (6.51)$$

Получим параметры $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, $b_1 = \tau_1 + \tau_2 \geq 0$ и $b_2 = \tau_1 \tau_2 \geq 0$ полинома $B_3(s)$ из обязательного условия (6.36б) обеспечения желаемой статической точности

$$c_1 \leq 0,1 \Rightarrow a_1 - 0,1 \leq b_1 \leq a_1 + 0,1 \Rightarrow 0,633 \leq \tau_1 + \tau_2 \leq 0,833 \quad (6.52a)$$

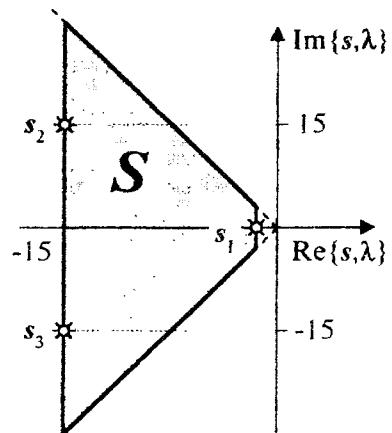


Рис. 6.47

и следующих желательных условий в приоритетном порядке:

- уменьшения перерегулирования и колебательности (6.44а):

$$\lambda_2 \leq \left(\eta_k^2 + \omega_k^2 \right) / \eta_k = -30 \Rightarrow 0 \leq \tau_2 \leq 0,0333 \text{ с} ; \quad (6.52\text{б})$$

- сохранения в ПФ $W_{*}(s)$ полюса $s_3^0 = -1$ РС:

$$a_1 - b_1 + (a_2 - b_2)s_3^0 + a_3(s_3^0)^2 = 0 \Rightarrow \tau_1 + \tau_2 - \tau_1\tau_2 = a_1 - a_2 + a_3 = 0,688; \quad (6.52\text{в})$$

- повышения быстродействия компенсацией полюса s_1 нулем λ_1 :

$$\tau_1 \approx T_d = 0,667 \text{ с} . \quad (6.52\text{г})$$

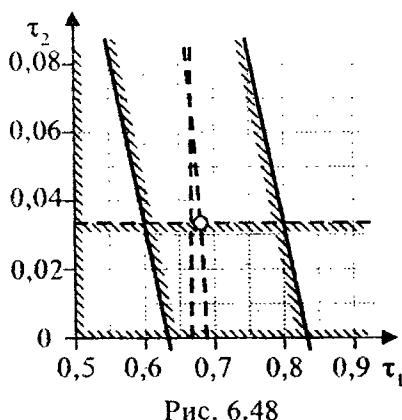


Рис. 6.48

Построив допустимую область значений τ_1 и τ_2 (рис. 6.48), отметим несовместность условий (6.52б) решению по равенствам (6.52в) и (6.52г). Примем компромиссное решение

$$\tau_2 = 0,0333 \text{ с}, \quad \tau_1 = (0,688 - \tau_2) / (1 - \tau_2) = 0,677 \text{ с},$$

удовлетворяющее (6.52б), (6.52в) и достаточно близкое к (6.52г). Тогда ЗС имеет параметры $b_1 = 0,711$, $b_2 = 0,0226$, ПФ

$$W_3(s) = \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2}{(1 + T_d s)(1 + 2\xi_k T_k s + T_k^2 s^2)},$$

коэффициент ошибки $c_1 = 1/K_* = a_1 - b_1 = 0,0226 < 0,1$, а ее ПХ

$$h(t) = L^{-1}\{W_3(s)/s\} = 1 + 0,0169e^{-1,5t} - 1,0169e^{-15t} \cos(15t + 0,05^\circ)$$

сходится за время $t_p = 0,219 < 2$ с с перерегулированием $\sigma = 8,16 < 20\%$. Желаемая система имеет ПФ (6.51) с параметрами $K_* = 44,237$, $T_{*1} = T_3 = 1$ с, $T_{*2} = 0,0655$ с, а ПФ последовательного регулятора имеет вид

$$R(s) = \frac{W_*(s)}{W(s)} = \frac{K_*}{K} \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{s(1 + T_{*2}s)}.$$

6.6.3. Замкнутая система n -го порядка с ПФ $W_3(s) = B_3(s)/A_3(s)$, имеющей характеристический полином Баттерворта

$$\begin{cases} A_3(s) = \prod_{i=1}^n (1 - s/s_i) \\ s_i = \omega_0 e^{j\Phi_i} = \omega_0 (\cos(\varphi_i) + j\sin(\varphi_i)), \quad \Phi_i = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{2i-1}{n} \right) \forall i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (6.53)$$

Его корни s_i , равномерно размещенные на окружности радиуса ω_0 в левой полуплоскости $\{s_i\}$, образуют *распределение Баттерворта* (рис. 6.49,а). Если n - нечетно, то $(n+1)/2$ -й корень действителен и равен $-\omega_0$, а остальные $n-1$ корней образуют комплексно-сопряженные пары. Если n - четно, то все корни являются комплексно-сопряженными парами с постоянными временем $T_0 = 1/\omega_0$.

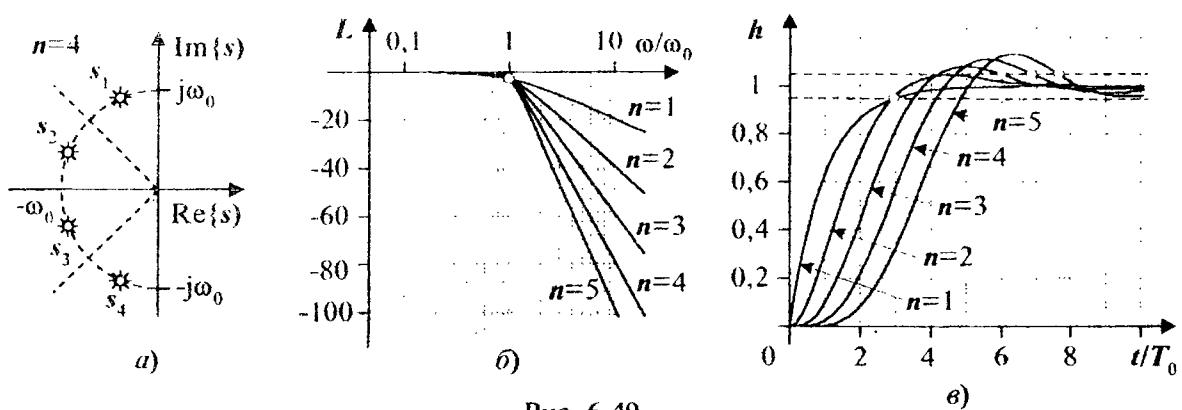


Рис. 6.49

Благодаря совпадению постоянных времени всех типовых звеньев в (6.53), система, имеющая ПФ фильтра Баттервортса $1/A_3(s)$, является наилучшим приближением к идеальному ФНЧ при больших степенях n :

$$|1/A_3(j\omega)| = 1/\sqrt{1+(T_0\omega)^{2n}} \approx \begin{cases} 1 & \forall 0 \leq \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \forall \omega > \omega_0 \end{cases}$$

Асимптоты ее ЛАЧХ имеют наклоны 0 дБ/дек при $0 \leq \omega \leq \omega_0$ и $-20n$ дБ/дек при $\omega > \omega_0$ (рис. 6.49, б). Частота ω_0 называется *частотой срыва* фильтра Баттервортса. Максимальная погрешность аппроксимации ЛАЧХ Баттервортса на частоте срыва не превышает 3 дБ по сравнению с 3n дБ для ФНЧ с ПФ $1/(1+T_0 s)^n$ и похожими ЧХ.

На рис. 6.49, в изображены ПХ фильтров Баттервортса для n от 1 до 5, имеющие перерегулирование не более 12,8% и быстродействие от $3T_0$ до $7,65T_0$.

Таблица 6.1

n	$\frac{\eta}{\omega_0}$	$\frac{\gamma}{\omega_0}$	$r = \frac{\gamma}{\eta}$	$\psi, {}^\circ$	μ	$\frac{a_1}{T_0}$	$\frac{a_2}{T_0^2}$	$\frac{a_3}{T_0^3}$	$\frac{a_4}{T_0^4}$	$\frac{a_5}{T_0^5}$	$\frac{t_p}{T_0}$	$\sigma, \%$
1	1	1	1	0	0	1					3	0
2	0,71	0,71	1	45	1	1,41	1				2,93	0
3	0,5	1	2	60	1,73	2	2	1			5,97	8,2
4	0,38	0,92	2,41	67,5	2,41	2,61	3,41	2,61	1		6,85	10,8
5	0,31	1	3,24	72	3,08	3,24	5,24	5,24	3,24	1	7,65	12,8

При выборе подходящей степени n и частоты срыва ω_0 необходимо разместить корни ХП Баттервортса в области спектра S (6.37), пользуясь табл. 6.1, в которой a_i - коэффициенты полинома Баттервортса n -й степени.

Коэффициенты полинома числителя $B_3(j\omega)$ находятся из обязательных условий статического синтеза (6.35), (6.36) и желательных условий повышения быстродействия, уменьшения перерегулирования и упрощения структуры ПФ регулятора.

6.6.4. Неустойчивая разомкнутая система

Спектральный метод синтеза регуляторов очень удобен для решения задачи стабилизации объектов, неустойчивых в разомкнутом состоянии, ввиду определенной независимости размещения желаемого спектра ЗС от спектра объекта. Особенностью спектра неустойчивой системы является наличие хотя бы одного правого полюса ее ПФ. Задача стабилизации такого объекта состоит в компенсации всех правых полюсов $W(s)$ равными им правыми нулями компенсирующего каскада регулятора с ПФ $R_k(s)$ (рис. 6.50). Собственно, регулирующий каскад с ПФ $R_p(s)$ решает задачу регулирования устойчивой системы с заданным качеством. Физический смысл введения компенсирующего каскада состоит в подавлении им неустойчивых составляющих переходного процесса, порожденных правыми полюсами.

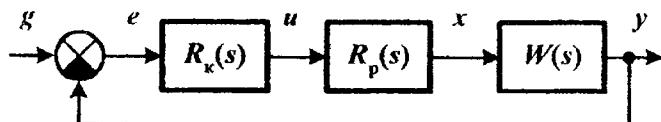


Рис. 6.50

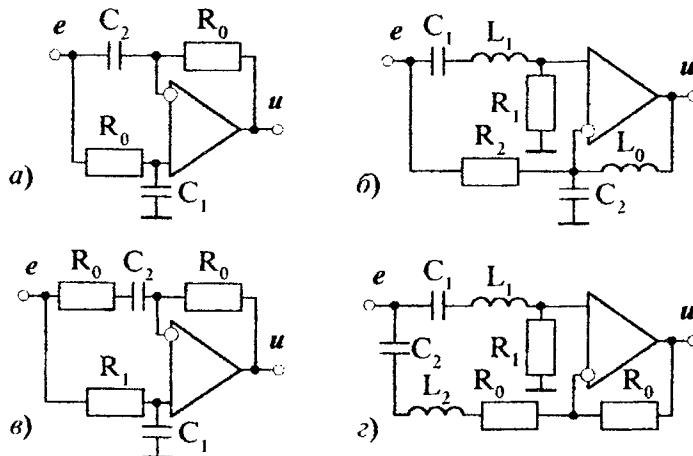


Рис. 6.51

а) схема с ПФ $R_k(s) = 1 - Ts$ с действительным правым нулем $\lambda_1 = 1/T_1 > 0$ и номиналами элементов $R_1C_1 = R_0C_2 = T$;

б) схема с ПФ $R_k(s) = 1 - 2\xi Ts + T^2 s^2$ с комплексно-сопряженными правыми нулями $\lambda_{1,2} = \xi/T \pm j\sqrt{1-\xi^2}/T$ и номиналами элементов $L_1/R_1 = L_0/R_2 = 2\xi T$, $R_1C_1 = T/2\xi$, $L_0C_2 = T^2$;

в) схема с ПФ $R_k(s) = (1-Ts)/(1+Ts)$ с равными по модулю правым нулем $\lambda_1 = 1/T > 0$ и левым полюсом $s_1 = -1/T < 0$ и с номиналами элементов $0,5R_1C_1 = R_0C_2 = T$;

г) схема с ПФ $R_k(s) = (1-2\xi Ts + T^2 s^2)/(1+2\xi Ts + T^2 s^2)$ с комплексно-сопряженными правыми нулями $\lambda_{1,2} = \xi/T \pm j\sqrt{1-\xi^2}/T$ и симметричными им левыми полюсами $s_{1,2} = -\xi/T \pm j\sqrt{1-\xi^2}/T$ и с номиналами элементов $L_1/R_1 = 2R_0C_2 = 4\xi T$, $L_2/R_0 = 2R_1C_1 = T/2\xi$.

Две последние схемы *фазовращателей* компенсируют своими правыми нулями равные им правые полюсы ПФ объекта и создают симметричные последним левые полюсы. Тем самым сохраняется порядок системы, а неустойчивость устраняется.

Пример 6.12. Для системы «тележка - перевернутый маятник» с выходом $\phi(t)$ разработать последовательный регулятор, обеспечивающий в ЗС астатизм первого порядка, коэффициент скоростной ошибки $c_1 \leq 0,1$ с, быстродействие $t_p \leq 1$ с, перерегулирование $\sigma \leq 5\%$ и жесткость $r \leq 3$.

Решение. Передаточная функция $W_\varphi(s)$ неустойчивого объекта (см. пример 6.9) имеет третий порядок с простыми действительными полюсами: двумя левыми $s_1^0 = -1/T_1 = -0,582$, $s_2^0 = -1/T_5 = -4,097$ и одним правым $s_3^0 = 1/T_3 = 2,518$. Выберем ЗС также третьего порядка с устойчивой ПФ (6.47) и прямой метод синтеза ее коэффициентов K_3 , $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, b_1 и b_2 . Из условия астатизма первого порядка $c_0 = 0$ по (6.48) получим $K_3 = 1$. Определим по (6.37) параметры области спектра S : $\eta = 3$, $\gamma = 9$, $\mu = 1,048 \approx 1$.

Перечислим условия, которым должны удовлетворять ПФ (6.47) и желаемой замкнутой (6.51) систем. К **обязательным** условиям относятся:

1) второе условие (6.48) обеспечения желаемой скоростной точности:

$$c_1 \leq 0,1 \Rightarrow -0,1 \leq a_1 - b_1 \leq 0,1; \quad (6.54a)$$

2) условия (6.49) размещения полюсов $s_1 \div s_3$ в желаемой области S :

$$\operatorname{Re}\{s_i\} \leq -3 \Rightarrow \begin{cases} h_0 = 3a_1 - 9a_2 + 27a_3 - 1 \leq 0, \\ h_1 = a_1 - 6a_2 + 27a_3, \quad h_2 = a_2 - 9a_3 \geq 0, \\ h_3 = h_1 h_2 + h_0 a_3 \geq 0, \end{cases} \quad (6.54b)$$

$$\operatorname{Re}\{s_i\} \geq -9 \Rightarrow \begin{cases} g_0 = 9a_1 - 81a_2 + 729a_3 - 1 \geq 0, \\ g_1 = a_1 - 18a_2 + 243a_3, \quad g_2 = a_2 - 27a_3 \leq 0, \\ g_3 = g_1 g_2 + g_0 a_3 \leq 0, \end{cases} \quad (6.54b)$$

$$\left| \frac{\operatorname{Im}\{s_i\}}{\operatorname{Re}\{s_i\}} \right| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2\eta_k^2 a_3 + 1/\eta_k, \\ a_2 = 2\eta_k a_3 + 1/2\eta_k^2. \end{cases} \quad (6.54c)$$

Уравнения (6.54c) определяют параметрическую кривую $m(\eta_k)$, ограничивающую в пространстве $\{a_1, a_2\}$ область со степенями колебательности $\mu_k \leq 1$.

К **желательным** условиям относятся:

1) сохранение в ПФ $W_\varphi(s)$ левого полюса s_2^0 и инвертирование правого полюса s_3^0 неустойчивого объекта:

$$\begin{cases} s_{1\infty} = s_2^0 \\ s_{2\infty} = -s_3^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - b_1 + (a_2 - b_2)s_2^0 + a_3(s_2^0)^2 = 0, \\ a_1 - b_1 - (a_2 - b_2)s_3^0 + a_3(s_3^0)^2 = 0; \end{cases} \quad (6.54d)$$

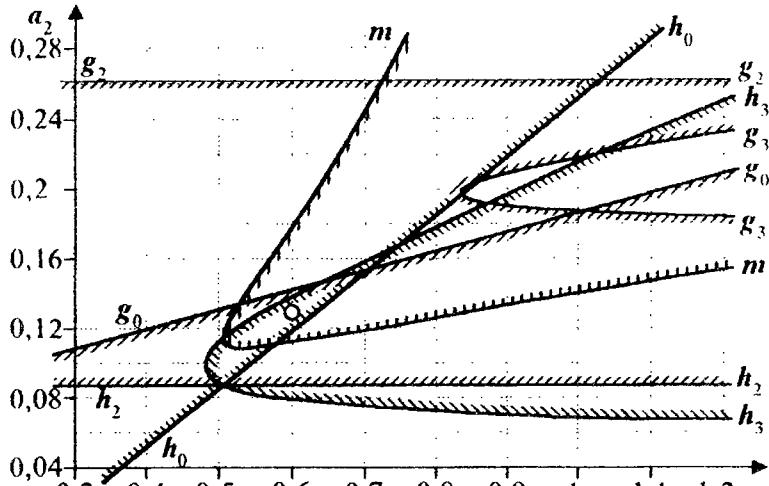
2) предпочтительное размещение нулей в соответствии с (6.42):

$$-\gamma \leq \lambda_j \leq -\eta < 0 \stackrel{(6.40)}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \eta b_1 - \eta^2 b_2 \leq 1 \\ b_1 - 2\eta b_2 \geq 0 \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{l} \gamma b_1 - \gamma^2 b_2 \leq 1 \\ b_1 - 2\gamma b_2 \leq 0 \end{array} \right\}. \quad (6.54e)$$

Система уравнений (6.54d) имеет решение

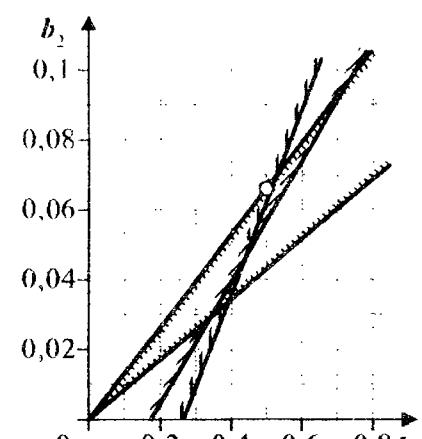
$$a_1 - b_1 = -s_2^0 s_3^0 a_3, \quad a_2 - b_2 = (s_3^0 - s_2^0) a_3. \quad (6.55)$$

В соответствии с (6.54a) выберем $a_1 - b_1 = c_1 = 0,1$, тогда $a_3 = -c_1 / s_2^0 s_3^0 = 0,0097$. Подставив это значение в (6.54b) - (6.54d), построим на рис. 6.52,а область допустимых значений коэффициентов a_1 и a_2 . Выбрав в ней точку $\{a_1 = 0,6, a_2 = 0,13\}$, получим ХП ЗС $A_3(s) = 1 + 0,6s + 0,13s^2 + 0,0097s^3$, корни которого $s_{1,2} = -3,79 \pm 1,89j$ и $s_3 = -5,83$ имеют спек-



a)

Рис. 6.52



б)

тральные параметры $\eta = 3,79 > 3$, $\gamma = 5,83 < 9$, $r = 1,54 < 3$, $\mu = 0,5 < 1$. Определив по (6.55) коэффициенты $b_1 = a_1 - 0,1 = 0,5$ и $b_2 = a_2 - (s_3^0 - s_2^0)a_3 = 0,066$ полинома $B_3(s)$, убедимся, что они удовлетворяют желаемым условиям (6.54e) (рис. 6.52, б).

Замкнутая система с полученной ПФ $W_3(s) = \frac{1+0,5s+0,066s^2}{1+0,6s+0,13s^2+0,0097s^3}$ имеет ПХ, аналогичную ПХ на рис. 6.46, с показателями качества $t_p = 0,317 < 1$ с, $\sigma = 3,8 < 5\%$, удовлетворяющими желаемым значениям. Последовательный регулятор имеет ПФ

$$R(s) = \frac{B_3(s)A_\Phi(s)}{(A_3(s)-B_3(s))B_\Phi(s)} = \frac{(1+b_1s+b_2s^2)(1+T_1s)(1-T_3s)(1+T_5s)}{c_1K_\Phi s^2(1+T_3s)(1+T_5s)} = \\ = \left(\frac{1-T_3s}{1+T_3s} \right) \left(\frac{1+T_1s}{c_1s} \right) \left(\frac{1+b_1s+b_2s^2}{K_\Phi s} \right)$$

и схему моделирования на ОУ (рис. 6.53) с номиналами радиоэлементов $0,5R_1C_1 = R_0C_2 = T_3$, $R_2C_0 = c_1$, $R_3C_0 = T_1$, $R_4C_0 = K_\Phi$, $R_5C_0 = b_1$ и $LC_0 = b_2$. \square

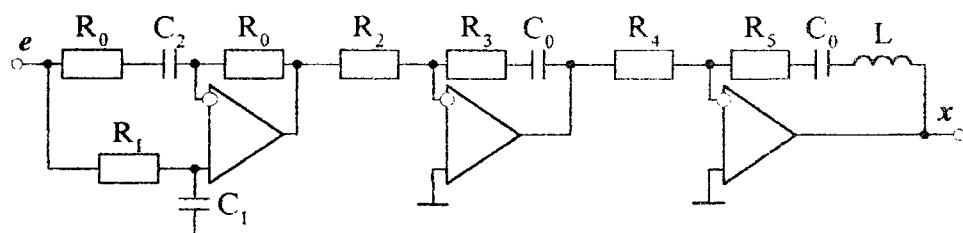


Рис. 6.53

Таблица I.1

Прямое преобразование Лапласа

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$1(t)$	$1/s$
3	t	$1/s^2$
4	t^n	$n!/s^{n+1}$
5	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha} = \frac{T}{1+Ts}$
6	$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)} = \frac{1}{s(1+Ts)}$
7	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2} = \frac{T^2}{(1+Ts)^2}$
8	$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}} = \frac{n!T^{n+1}}{(1+Ts)^{n+1}}$
9	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{T}{1+T^2 s^2}$
10	$t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
11	$t^2 \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega(3s^2-\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^3}$
12	$e^{-\beta t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+\beta)^2+\omega^2} = \frac{T\sqrt{1-\xi^2}}{1+2\xi Ts+T^2 s^2}$
13	$e^{-\beta t} t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega(s+\beta)}{(s+\beta)^2+\omega^2)^2}$
14	$e^{-\beta t} t^2 \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega(3(s+\beta)^2-\omega^2)}{(s+\beta)^2+\omega^2)^3}$
15	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \sin(\varphi) + \omega \cos(\varphi)}{s^2+\omega^2}$
16	$t \sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{(s^2-\omega^2)\sin(\varphi) + 2s\omega \cos(\varphi)}{(s^2+\omega^2)^2}$
17	$e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{(s+\beta)\sin(\varphi) + \omega \cos(\varphi)}{(s+\beta)^2+\omega^2}$

18	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{T^2 s}{1 + T^2 s^2}$
19	$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
20	$t^2 \cos(\omega t)$	$\frac{2s(s^2 - 3\omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^3}$
21	$e^{-\beta t} \cos(\omega t)$	$\frac{s + \beta}{(s + \beta)^2 + \omega^2} = \frac{T(\xi + Ts)}{1 + 2\xi Ts + T^2 s^2}$
22	$e^{-\beta t} t \cos(\omega t)$	$\frac{(s + \beta)^2 - \omega^2}{((s + \beta)^2 + \omega^2)^2}$
23	$e^{-\beta t} t^2 \cos(\omega t)$	$\frac{2(s + \beta)((s + \beta)^2 - 3\omega^2)}{((s + \beta)^2 + \omega^2)^3}$
24	$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}$
25	$t \cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{(s^2 - \omega^2) \cos(\varphi) - 2s\omega \sin(\varphi)}{(s^2 + \omega^2)^2}$
26	$e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{(s + \beta) \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{(s + \beta)^2 + \omega^2}$
27	$\sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t)$	$\frac{2\omega_1 \omega_2 s}{(s^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2)(s^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2)}$
28	$\sin(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)$	$\frac{\omega_1 (s^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2)}{(s^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2)(s^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2)}$
29	$\cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)$	$\frac{s(s^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)}{(s^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2)(s^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2)}$
30	$\operatorname{sh}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
31	$e^{-\beta t} \operatorname{sh}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + \beta)^2 - \omega^2}$
32	$\operatorname{ch}(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
33	$e^{-\beta t} \operatorname{ch}(\omega t)$	$\frac{s + \beta}{(s + \beta)^2 - \omega^2}$

Обратное преобразование Лапласа

№ п/п	Изображение $F(s)$	Оригинал $f(t)$
1	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
2	$\frac{1}{1+Ts}$	$\alpha e^{-\alpha t}$
3	$\frac{1}{s(1+Ts)}$	$1-e^{-\alpha t}$
4	$\frac{1+\tau s}{s(1+Ts)}$	$1+(\alpha\tau-1)e^{-\alpha t}$
5	$\frac{1}{s^2(1+Ts)}$	$T(e^{-\alpha t}-1)+t$
6	$\frac{1+\tau s}{s^2(1+Ts)}$	$(\tau-T)(1-e^{-\alpha t})+t$
7	$\frac{1+\tau s+gs^2}{s^2(1+Ts)}$	$A+t+Be^{-\alpha t}: A=\tau-T, B=g\alpha-\tau+T$
8	$\frac{1}{s^3(1+Ts)}$	$T^2(1-e^{-\alpha t})-Tt+t^2/2$
9	$\frac{1}{(1+Ts)^2}$	$\alpha^2 te^{-\alpha t}$
10	$\frac{1}{s(1+Ts)^2}$	$1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}$
11	$\frac{1}{s^2(1+Ts)^2}$	$2T(e^{-\alpha t}-1)+t(e^{-\alpha t}+1)$
12	$\frac{1}{s^3(1+Ts)^2}$	$3T^2(1-e^{-\alpha t})-Tt(2+e^{-\alpha t})+t^2/2$
13	$\frac{s}{(1+Ts)^2}$	$\alpha^2(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$
14	$\frac{1+\tau s}{(1+Ts)^2}$	$\alpha^2(\tau+(1-\alpha\tau)t)e^{-\alpha t}$
15	$\frac{1+\tau s}{s(1+Ts)^2}$	$1-(1+\alpha(1-\alpha\tau)t)e^{-\alpha t}$
16	$\frac{1+\tau s+gs^2}{s(1+Ts)^2}$	$1+(A-Bt)e^{-\alpha t}: A=g\alpha^2-1, B=g\alpha^3-\tau\alpha^2+\alpha$
17	$\frac{1}{(1+Ts)^3}$	$\alpha^3 t^2 e^{-\alpha t}/2$

18	$\frac{1}{s(1+Ts)^3}$	$1 - (1 + \alpha t + \alpha^2 t^2/2) e^{-\alpha t}$
19	$\frac{1}{s^2(1+Ts)^3}$	$t - 3T + (3T + 2t + \alpha t^2/2) e^{-\alpha t}$
20	$\frac{s}{(1+Ts)^3}$	$\alpha^3 t (1 - \alpha t/2) e^{-\alpha t}$
21	$\frac{s^2}{(1+Ts)^3}$	$\alpha^3 (1 - 2\alpha t + \alpha^2 t^2/2) e^{-\alpha t}$
22	$\frac{1}{(1+Ts)^4}$	$\alpha^4 t^3 e^{-\alpha t} / 6$
23	$\frac{1}{s(1+Ts)^4}$	$1 - (1 + \alpha t + \alpha^2 t^2/2 + \alpha^3 t^3/6) e^{-\alpha t}$
24	$\frac{s}{(1+Ts)^4}$	$\alpha^4 (t^2/2 - \alpha t^3/6) e^{-\alpha t}$
25	$\frac{s^2}{(1+Ts)^4}$	$\alpha^4 (t - \alpha t^2 + \alpha^2 t^3/6) e^{-\alpha t}$
26	$\frac{s^3}{(1+Ts)^4}$	$\alpha^4 (1 - 3\alpha t + 3\alpha^2 t^2/2 - \alpha^3 t^3/6) e^{-\alpha t}$
27	$\frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$	$\frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t})$
28	$\frac{s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$	$-C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 B e^{-\alpha_2 t}; C_i = \frac{1}{T_i(T_1 - T_2)}$
29	$\frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$	$C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}; C_i = \frac{T_i - \tau}{T_i(T_1 - T_2)}$
30	$\frac{1}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$	$1 - C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}; C_i = \frac{T_i}{T_1 - T_2}$
31	$\frac{1+\tau s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$	$1 - C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}; C_i = \frac{T_i - \tau}{T_1 - T_2}$
32	$\frac{1+\tau s+gs^2}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$	$1 - C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}; C_i = \frac{g - \tau T_i + T_i^2}{T_i(T_1 - T_2)}$
33	$\frac{1}{s^2(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$	$t - T_1 - T_2 + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}; C_i = \frac{T_i^2}{T_1 - T_2}$
34	$\frac{1}{s^3(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$	$A - Bt + t^2/2 - C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}; A = T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2, B = T_1 + T_2, C_i = \frac{T_i^3}{T_1 - T_2}$
35	$\frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}$	$C e^{-\alpha_1 t} - (Bt + C) e^{-\alpha_2 t}; C = \frac{T_1}{(T_1 - T_2)^2}, B = \frac{1}{T_2(T_1 - T_2)}$

36	$\frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}$	$C e^{-\alpha_1 t} - (Bt + C) e^{-\alpha_2 t}: C = \frac{T_1 - \tau}{(T_1 - T_2)^2}, B = \frac{T_2 - \tau}{T_2^2(T_1 - T_2)}$
37	$\frac{1+\tau s+gs^2}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}$	$C e^{-\alpha_1 t} + (A - Bt) e^{-\alpha_2 t}: C = \frac{g - \tau T_1 + T_1^2}{T_1(T_1 - T_2)^2},$ $A = \frac{g(T_1 - 2T_2) + (\tau - T_1)T_2^2}{T_2^2(T_1 - T_2)^2}, B = \frac{g - \tau T_2 + T_2^2}{(T_1 - T_2)T_2^3}$
38	$\frac{1}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}$	$1 - C e^{-\alpha_1 t} + (A + Bt) e^{-\alpha_2 t}: C = \frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)^2}, A = \frac{(2T_1 - T_2)T_2}{(T_1 - T_2)^2}, B = \frac{1}{T_1 - T_2}$
39	$\frac{1+\tau s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}$	$1 - C e^{-\alpha_1 t} + (A + Bt) e^{-\alpha_2 t}: C = \frac{(T_1 - \tau)T_1}{(T_1 - T_2)^2}, A = \frac{(2T_1 - T_2)T_2 - T_1\tau}{(T_1 - T_2)^2}, B = \frac{T_2 - \tau}{T_2(T_1 - T_2)}$
40	$\frac{1+\tau s+gs^2}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}$	$1 - C e^{-\alpha_1 t} + (A + Bt) e^{-\alpha_2 t}: C = \frac{g + (T_1 - \tau)T_1}{(T_1 - T_2)^2},$ $A = \frac{g - \tau T_1 + (2T_1 - T_2)T_2}{(T_1 - T_2)^2}, B = \frac{g + (T_2 - \tau)T_2}{(T_1 - T_2)T_2^2}$
41	$\frac{1}{s^2(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}$	$-A_1 + t + C e^{-\alpha_1 t} - (A_2 + Bt) e^{-\alpha_2 t}: A_1 = T_1 + 2T_2,$ $A_2 = \frac{(3T_1 - 2T_2)T_2^2}{(T_1 - T_2)^2}, B = \frac{T_2}{(T_1 - T_2)}, C = \frac{T_1^3}{(T_1 - T_2)^2}$
42	$\frac{s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}$	$-C e^{-\alpha_1 t} + (C + Bt) e^{-\alpha_2 t}: C = \frac{1}{(T_1 - T_2)^2}, B = \frac{1}{(T_1 - T_2)T_2^2}$
43	$\frac{s^2}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}$	$C e^{-\alpha_1 t} + (A - Bt) e^{-\alpha_2 t}: C = \frac{1}{(T_1 - T_2)^2 T_1}, A = \frac{T_1 - 2T_2}{(T_1 - T_2)^2 T_2^2}, B = \frac{1}{(T_1 - T_2)T_2^3}$
44	$\frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)^3}$	$A e^{-\alpha_1 t} - (A + Bt + Ct^2) e^{-\alpha_2 t}: A = \frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)^3}, B = \frac{T_1}{(T_1 - T_2)^2 T_2}, C = \frac{1}{2(T_1 - T_2)T_2^2}$
45	$\frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)^3}$	$A e^{-\alpha_1 t} - (A + Bt + Ct^2) e^{-\alpha_2 t}: A = \frac{(T_1 - \tau)T_1}{(T_1 - T_2)^3}, B = \frac{T_1 - \tau}{(T_1 - T_2)^2 T_2}, C = \frac{T_2 - \tau}{2(T_1 - T_2)T_2^3}$
46	$\frac{1+\tau s+gs^2}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)^3}$	$A e^{-\alpha_1 t} - (A + Bt + Ct^2) e^{-\alpha_2 t}: A = \frac{g - \tau T_1 + T_1^2}{(T_1 - T_2)^3},$ $B = \frac{g(2T_2 - T_1) + (T_1 - \tau)T_2^2}{(T_1 - T_2)^2 T_2^3}, C = \frac{g + (T_2 - \tau)T_2}{2(T_1 - T_2)T_2^4}$

47	$\frac{1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)^3}$	$1 - A_1 e^{-\alpha_1 t} + (A_2 + Bt + Ct^2) e^{-\alpha_2 t};$ $A_1 = \frac{T_1^3}{(T_1 - T_2)^3}, A_2 = A_1 - 1, B = \frac{2T_1 - T_2}{(T_1 - T_2)^2}, C = \frac{1}{2(T_1 - T_2)T_2}$
48	$\frac{1+\tau s}{s(1+T_1s)(1+T_2s)^3}$	$1 - A_1 e^{-\alpha_1 t} + (A_2 + Bt + Ct^2) e^{-\alpha_2 t}; A_1 = \frac{(T_1 - \tau)T_1^2}{(T_1 - T_2)^3},$ $A_2 = A_1 - 1, B = \frac{(2T_1 - T_2)T_2 - T_1\tau}{(T_1 - T_2)^2 T_2}, C = \frac{T_2 - \tau}{2(T_1 - T_2)T_2^2}$
49	$\frac{s}{(1+T_1s)(1+T_2s)^3}$	$-Ae^{-\alpha_1 t} + (A + Bt + Ct^2) e^{-\alpha_2 t};$ $A = \frac{T_1}{(T_1 - T_2)^3}, B = \frac{1}{(T_1 - T_2)^2 T_2}, C = \frac{1}{2(T_1 - T_2)T_2^3}$
50	$\frac{1}{(1+T_1s)^2(1+T_2s)^2}$	$(-A + Bt)e^{-\alpha_1 t} + (A + Bt)e^{-\alpha_2 t}; A = \frac{2T_1 T_2}{(T_1 - T_2)^3}, B = \frac{1}{(T_1 - T_2)^2}$
51	$\frac{1+\tau s}{(1+T_1s)^2(1+T_2s)^2}$	$(A + B_1 t)e^{-\alpha_1 t} - (A - B_2 t)e^{-\alpha_2 t};$ $A = \frac{(T_1 + T_2)\tau - 2T_1 T_2}{(T_1 - T_2)^3}, B_i = \frac{T_i - \tau}{(T_1 - T_2)^2 T_i}$
52	$\frac{1+\tau s + gs^2}{(1+T_1s)^2(1+T_2s)^2}$	$(A + B_1 t)e^{-\alpha_1 t} - (A - B_2 t)e^{-\alpha_2 t};$ $A = \frac{2g - \tau(T_1 + T_2) + 2T_1 T_2}{(T_2 - T_1)^3}, B_i = \frac{g + (T_i - \tau)T_i}{(T_1 - T_2)^2 T_i^2}$
53	$\frac{1}{s(1+T_1s)^2(1+T_2s)^2}$	$1 + (A_1 - B_1 t)e^{-\alpha_1 t} - (A_2 + B_2 t)e^{-\alpha_2 t};$ $A_1 = \frac{(3T_2 - T_1)T_1^2}{(T_1 - T_2)^3}, A_2 = \frac{(3T_1 - T_2)T_2^2}{(T_1 - T_2)^3}, B_i = \frac{T_i}{(T_1 - T_2)^2}$
54	$\frac{s}{(1+T_1s)^2(1+T_2s)^2}$	$(A - B_1 t)e^{-\alpha_1 t} - (A + B_2 t)e^{-\alpha_2 t};$ $A = \frac{T_1 + T_2}{(T_1 - T_2)^3}, B_i = \frac{1}{(T_1 - T_2)^2 T_i}$
55	$\frac{s^2}{(1+T_1s)^2(1+T_2s)^2}$	$-(A - B_1 t)e^{-\alpha_1 t} + (A + B_2 t)e^{-\alpha_2 t};$ $A = \frac{2}{(T_1 - T_2)^3}, B_i = \frac{1}{(T_1 - T_2)^2 T_i^2}$
56	$\frac{1}{\prod_{i=1}^3(1+T_is)}$	$\sum_{i=1}^3 C_i e^{-\alpha_i t}; C_1 = \frac{T_1}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)},$ $C_2 = \frac{T_2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)}, C_3 = \frac{T_3}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)}$
57	$\frac{1}{s \prod_{i=1}^3(1+T_is)}$	$1 - \sum_{i=1}^3 C_i e^{-\alpha_i t}; C_1 = \frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)},$ $C_2 = \frac{T_2^2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)}, C_3 = \frac{T_3^2}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)}$

58	$\frac{1}{s^2 \prod_{i=1}^3 (1+T_i s)}$	$t + \sum_{i=1}^3 (C_i e^{-\alpha_i t} - T_i)$. $C_1 = \frac{T_1^3}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)}$, $C_2 = \frac{T_2^3}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)}$, $C_3 = \frac{T_3^3}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)}$
59	$\frac{s}{\prod_{i=1}^3 (1+T_i s)}$	$\sum_{i=1}^3 C_i e^{-\alpha_i t}$: $C_1 = \frac{1}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)}$, $C_2 = \frac{1}{(T_1 - T_2)(T_2 - T_3)}$, $C_3 = \frac{1}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)}$
60	$\frac{s^2}{\prod_{i=1}^3 (1+T_i s)}$	$\sum_{i=1}^3 C_i e^{-\alpha_i t}$: $C_1 = \frac{1}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)T_1}$, $C_2 = \frac{1}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)T_2}$, $C_3 = \frac{1}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)T_3}$
61	$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$	$\sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}$: $C_i = \frac{T_i^{n-2}}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}$
62	$\frac{1}{s \prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$	$1 - \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}$: $C_i = \frac{T_i^{n-1}}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}$
63	$\frac{1}{s^2 \prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$	$-A + t + \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}$: $A = \sum_{i=1}^n T_i$, $C_i = \frac{T_i^n}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}$
64	$\frac{s}{\prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$	$-\sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}$: $C_i = \frac{T_i^{n-3}}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}$
65	$\frac{s^2}{\prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$	$\sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}$: $C_i = \frac{T_i^{n-4}}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}$
66	$\frac{1}{(1+Ts)^2 \prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$	$(-A + Bt)e^{-\alpha t} + \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}$: $A = \frac{T^{n-1}}{\prod_{i=1}^n (T - T_i)} \sum_{i=1}^n \frac{T_i}{T - T_i}$, $B = \frac{T^{n-2}}{\prod_{i=1}^n (T - T_i)}$, $C_i = \frac{T_i^n}{(T_i - T)^2 \prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}$

67	$\frac{1}{s(1+Ts)^2 \prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$	$1 - (A + Bt)e^{-at} - \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}; A = \frac{T^n \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{T_i}{T - T_i} \right)}{\prod_{i=1}^n (T - T_i)},$ $B = \frac{T^{n-1}}{\prod_{i=1}^n (T - T_i)}, C_i = \frac{T_i^{n+1}}{(T - T_i)^2 \prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}$
68	$\frac{1}{s^2(1+Ts)^2 \prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$	$-A + t + (C + Bt)e^{-at} + \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t};$ $A = 2T + \sum_{i=1}^n T_i, C = -\frac{T^{n+1} \left(2 + \sum_{i=1}^n \frac{T_i}{T - T_i} \right)}{\prod_{i=1}^n (T - T_i)},$ $B = \frac{T^n}{\prod_{i=1}^n (T - T_i)}, C_i = \frac{T_i^{n+2}}{(T - T_i)^2 \prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}$
69	$\frac{s}{(1+Ts)^2 \prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$	$(A - Bt)e^{-at} - \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}; A = -\frac{T^{n-2} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{T_i}{T - T_i} \right)}{\prod_{i=1}^n (T - T_i)},$ $B = -\frac{T^{n-3}}{\prod_{i=1}^n (T - T_i)}, C_i = \frac{T_i^{n+1}}{(T - T_i)^2 \prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}$
70	$\frac{s^2}{(1+Ts)^2 \prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$	$(-A + Bt)e^{-at} + \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}; A = -\frac{T^{n-3} \left(2 + \sum_{i=1}^n \frac{T_i}{T - T_i} \right)}{\prod_{i=1}^n (T - T_i)},$ $B = -\frac{T^{n-4}}{\prod_{i=1}^n (T - T_i)}, C_i = -\frac{T_i^{n+2}}{(T - T_i)^2 \prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)}$

71	$\frac{1}{1+2\xi Ts + T^2 s^2}$	$Ce^{-\beta t} \sin(\omega t)$: $C = \frac{1}{\omega T^2}$
72	$\frac{1+\tau s}{1+2\xi Ts + T^2 s^2}$	$Ce^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$: $C = \frac{\sqrt{(1-2\beta\tau)T^2 + \tau^2}}{\omega T^3}, \varphi = \arctg\left(\frac{\omega\tau}{1-\beta\tau}\right)$
73	$\frac{1}{s(1+2\xi Ts + T^2 s^2)}$	$1 - Ce^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$: $C = \frac{1}{\omega T}, \varphi = \arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$
74	$\frac{1+\tau s}{s(1+2\xi Ts + T^2 s^2)}$	$1 + Ce^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi)$: $C = \frac{\sqrt{\tau^2 + (1-2\beta\tau)T^2}}{\omega T^2}, \varphi = \arctg\left(\frac{\omega T^2}{\tau - \beta T^2}\right)$
75	$\frac{1+\tau s + gs^2}{s(1+2\xi Ts + T^2 s^2)}$	$1 + Ce^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$: $C = \frac{\sqrt{\omega^2(g-T^2)^2 + (\tau - \beta(g-T^2))^2}}{\omega T^2}, \varphi = \arctg\left(\frac{\omega(g-T^2)}{\tau - \beta(g+T^2)}\right)$
76	$\frac{1}{s^2(1+2\xi Ts + T^2 s^2)}$	$-A + t + Ce^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$: $A = 2\beta T^2, C = \frac{1}{\omega}, \varphi = 2\arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$
77	$\frac{s}{1+2\xi Ts + T^2 s^2}$	$-Ce^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi)$: $C = \frac{1}{\omega T^3}, \varphi = \arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$
78	$\frac{1}{(1+2\xi Ts + T^2 s^2)^2}$	$Ce^{-\beta t} (\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t))$: $C = -\frac{1}{2\omega^3 T^4}$
79	$\frac{1+\tau s}{(1+2\xi Ts + T^2 s^2)^2}$	$e^{-\beta t} (C \sin(\omega t) - C_1 t \cos(\omega t + \varphi))$: $C = \frac{1-\beta\tau}{2\omega^3 T^4}, C_1 = \frac{\sqrt{\tau^2 + T^2(1-2\beta\tau)}}{2\omega^2 T^5}, \varphi = \arctg\left(\frac{\omega\tau}{1-\beta\tau}\right)$
80	$\frac{1+\tau s + gs^2}{(1+2\xi Ts + T^2 s^2)^2}$	$e^{-\beta t} (C \sin(\omega t) + C_1 t \cos(\omega t + \varphi))$: $C = \frac{g + T^2(1-\beta\tau)}{2\omega^3 T^6}, C_1 = \frac{\sqrt{\omega^2(g-T^2)^2 + (\tau - \beta(g+T^2))^2}}{2\omega^2 T^5},$ $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega(g-T^2)}{\tau - \beta(g+T^2)}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$
81	$\frac{1}{s(1+2\xi Ts + T^2 s^2)^2}$	$1 + Ce^{-\beta t} (\omega T \cos(\omega t + 2\varphi) - \sin(\omega t + \varphi) + \omega t \cos(\omega t + \varphi))$: $C = \frac{1}{2\omega^3 T^3}, \varphi = \arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$
82	$\frac{s}{(1+2\xi Ts + T^2 s^2)^2}$	$Ce^{-\beta t} (-\beta T \sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t - \varphi))$: $C = \frac{1}{2\omega^3 T^5}, \varphi = \arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$
83	$\frac{s^2}{(1+2\xi Ts + T^2 s^2)^2}$	$Ce^{-\beta t} (\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t - \varphi))$: $C = \frac{1}{2\omega^3 T^6}, \varphi = 2\arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$

84	$\frac{1}{\left(1+2\xi_1 T_1 s + T_1^2 s^2\right) \times \frac{1}{\left(1+2\xi_2 T_2 s + T_2^2 s^2\right)}}$	$-C_1 e^{-\beta_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - C_2 e^{-\beta_2 t} \sin(\omega_2 t + \varphi_2);$ $C_i = \frac{1}{\omega_i \sqrt{\left(T_1^2 - T_2^2\right)^2 + 4(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 T_1^2 - \beta_2 T_2^2)} T_1^2 T_2^2},$ $\varphi_1 = \arctg \left(\frac{\omega_1 (T_1^2 - T_2^2)}{2\beta_2 T_2^2 - \beta_1 (T_1^2 + T_2^2)} \right) + \arctg \left(\frac{\omega_1}{\beta_1} \right),$ $\varphi_2 = \arctg \left(\frac{\omega_2 (T_2^2 - T_1^2)}{2\beta_1 T_1^2 - \beta_2 (T_1^2 + T_2^2)} \right) + \arctg \left(\frac{\omega_2}{\beta_2} \right)$
85	$\frac{1}{s \left(1+2\xi_1 T_1 s + T_1^2 s^2\right) \times \frac{1}{\left(1+2\xi_2 T_2 s + T_2^2 s^2\right)}}$	$1 + C_1 e^{-\beta_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 e^{-\beta_2 t} \sin(\omega_2 t + \varphi_2);$ $C_i = \frac{T_i}{\omega_i \sqrt{\left(T_1^2 - T_2^2\right)^2 + 4(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 T_1^2 - \beta_2 T_2^2)} T_1^2 T_2^2},$ $\varphi_1 = \arctg \left(\frac{\omega_1 (T_1^2 - T_2^2)}{2\beta_2 T_2^2 - \beta_1 (T_1^2 + T_2^2)} \right) + 2 \arctg \left(\frac{\omega_1}{\beta_1} \right),$ $\varphi_2 = \arctg \left(\frac{\omega_2 (T_2^2 - T_1^2)}{2\beta_1 T_1^2 - \beta_2 (T_1^2 + T_2^2)} \right) + 2 \arctg \left(\frac{\omega_2}{\beta_2} \right)$
86	$\frac{1}{s^2 \left(1+2\xi_1 T_1 s + T_1^2 s^2\right) \times \frac{1}{\left(1+2\xi_2 T_2 s + T_2^2 s^2\right)}}$	$-A + t - C_1 e^{-\beta_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - C_2 e^{-\beta_2 t} \sin(\omega_2 t + \varphi_2);$ $A = 2(\beta_1 T_1^2 + \beta_2 T_2^2)$ $C_i = \frac{T_i^2}{\omega_i \sqrt{\left(T_1^2 - T_2^2\right)^2 + 4(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 T_1^2 - \beta_2 T_2^2)} T_1^2 T_2^2},$ $\varphi_1 = \arctg \left(\frac{\omega_1 (T_1^2 - T_2^2)}{2\beta_2 T_2^2 - \beta_1 (T_1^2 + T_2^2)} \right) + 3 \arctg \left(\frac{\omega_1}{\beta_1} \right),$ $\varphi_2 = \arctg \left(\frac{\omega_2 (T_2^2 - T_1^2)}{2\beta_1 T_1^2 - \beta_2 (T_1^2 + T_2^2)} \right) + 3 \arctg \left(\frac{\omega_2}{\beta_2} \right)$
87	$\frac{s}{\left(1+2\xi_1 T_1 s + T_1^2 s^2\right) \times \frac{1}{\left(1+2\xi_2 T_2 s + T_2^2 s^2\right)}}$	$C_1 e^{-\beta_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 e^{-\beta_2 t} \sin(\omega_2 t + \varphi_2);$ $C_i = \frac{1}{\omega_i T_i \sqrt{\left(T_1^2 - T_2^2\right)^2 + 4(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 T_1^2 - \beta_2 T_2^2)} T_1^2 T_2^2},$ $\varphi_1 = \arctg \left(\frac{\omega_1 (T_1^2 - T_2^2)}{2\beta_2 T_2^2 - \beta_1 (T_1^2 + T_2^2)} \right),$ $\varphi_2 = \arctg \left(\frac{\omega_2 (T_2^2 - T_1^2)}{2\beta_1 T_1^2 - \beta_2 (T_1^2 + T_2^2)} \right)$

88

$$\frac{s^2}{\left(1+2\xi_1 T_1 s + T_1^2 s^2\right)^2} \times \\ \times \left(1+2\xi_2 T_2 s + T_2^2 s^2\right)$$

$$C_i = \frac{-C_1 e^{-\beta_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - C_2 e^{-\beta_2 t} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)}{1},$$

$$\omega_i T_i^2 \sqrt{(T_1^2 - T_2^2)^2 + 4(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 T_1^2 - \beta_2 T_2^2)} T_1^2 T_2^2,$$

$$\varphi_1 = \arctg \left(\frac{\omega_1 (T_1^2 - T_2^2)}{2\beta_2 T_2^2 - \beta_1 (T_1^2 + T_2^2)} \right) - \arctg \left(\frac{\omega_1}{\beta_1} \right),$$

$$\varphi_2 = \arctg \left(\frac{\omega_2 (T_2^2 - T_1^2)}{2\beta_1 T_1^2 - \beta_2 (T_1^2 + T_2^2)} \right) - \arctg \left(\frac{\omega_2}{\beta_2} \right)$$

89

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n \left(1+2\xi_i T_i s + T_i^2 s^2\right)}$$

$$\sum_{i=1}^n C_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i); C_i = \frac{T_i^{2(n-2)}}{\omega_i \sqrt{R_i}}, R_i = \prod_{k=1, k \neq i}^n R_{ik},$$

$$R_{ik} = (T_i^2 - T_k^2)^2 + 4(\beta_i - \beta_k)(\beta_i T_i^2 - \beta_k T_k^2) T_i^2 T_k^2,$$

$$\varphi_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \arctg \left(\frac{2\omega_i (\beta_i - \beta_k)}{(\beta_i - \beta_k)^2 - (\omega_i^2 - \omega_k^2)} \right)$$

90

$$\frac{1}{s \prod_{i=1}^n \left(1+2\xi_i T_i s + T_i^2 s^2\right)}$$

$$1 - \sum_{i=1}^n C_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i); C_i = \frac{T_i^{2n-3}}{\omega_i \sqrt{R_i}}, R_i = \prod_{k=1, k \neq i}^n R_{ik},$$

$$R_{ik} = (T_i^2 - T_k^2)^2 + 4(\beta_i - \beta_k)(\beta_i T_i^2 - \beta_k T_k^2) T_i^2 T_k^2,$$

$$\varphi_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \arctg \left(\frac{2\omega_i (\beta_i - \beta_k)}{(\beta_i - \beta_k)^2 - (\omega_i^2 - \omega_k^2)} \right) + \arctg \left(\frac{\omega_i}{\beta_i} \right)$$

91

$$\frac{1}{s^2 \prod_{i=1}^n \left(1+2\xi_i T_i s + T_i^2 s^2\right)}$$

$$-A + t + \sum_{i=1}^n C_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i);$$

$$A = 2 \sum_{i=1}^n \beta_i T_i^2, C_i = \frac{T_i^{2(n-1)}}{\omega_i \sqrt{R_i}}, R_i = \prod_{k=1, k \neq i}^n R_{ik},$$

$$R_{ik} = (T_i^2 - T_k^2)^2 + 4(\beta_i - \beta_k)(\beta_i T_i^2 - \beta_k T_k^2) T_i^2 T_k^2,$$

$$\varphi_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \arctg \left(\frac{2\omega_i (\beta_i - \beta_k)}{(\beta_i - \beta_k)^2 - (\omega_i^2 - \omega_k^2)} \right) + 2 \arctg \left(\frac{\omega_i}{\beta_i} \right)$$

92

$$\frac{s}{\prod_{i=1}^n \left(1+2\xi_i T_i s + T_i^2 s^2\right)}$$

$$-\sum_{i=1}^n C_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i); C_i = \frac{T_i^{2n-5}}{\omega_i \sqrt{R_i}}, R_i = \prod_{k=1, k \neq i}^n R_{ik},$$

$$R_{ik} = (T_i^2 - T_k^2)^2 + 4(\beta_i - \beta_k)(\beta_i T_i^2 - \beta_k T_k^2) T_i^2 T_k^2,$$

$$\varphi_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \arctg \left(\frac{2\omega_i (\beta_i - \beta_k)}{(\beta_i - \beta_k)^2 - (\omega_i^2 - \omega_k^2)} \right) - \arctg \left(\frac{\omega_i}{\beta_i} \right)$$

93	$\frac{s^2}{\prod_{i=1}^n (1+2\xi_i T_i s + T_i^2 s^2)}$	$\sum_{i=1}^n C_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$: $C_i = \frac{T_i^{2(n-3)}}{\omega_i \sqrt{R_i}}$, $R_i = \prod_{k=1, k \neq i}^n R_{ik}$, $R_{ik} = (T_i^2 - T_k^2)^2 + 4(\beta_i - \beta_k)(\beta_i T_i^2 - \beta_k T_k^2) T_i^2 T_k^2$, $\varphi_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \arctg \left(\frac{2\omega_i(\beta_i - \beta_k)}{(\beta_i - \beta_k)^2 - (\omega_i^2 - \omega_k^2)} \right) - 2\arctg \left(\frac{\omega_i}{\beta_i} \right)$
94	$\frac{1}{(1+2\xi T s + T^2 s^2)(1+T_1 s)}$	$C e^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi) + C_1 e^{-\alpha_1 t}$: $C = \frac{1}{\omega T \sqrt{T^2(1-2\beta T_1) + T_1^2}}$, $C_1 = \frac{T_1}{T^2(1-2\beta T_1) + T_1^2}$, $\varphi = \arctg \left(\frac{\omega T_1}{1-\beta T_1} \right)$
95	$\frac{1+\tau s}{(1+2\xi T s + T^2 s^2)(1+T_1 s)}$	$C e^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi) + C_1 e^{-\alpha_1 t}$: $C = \frac{1}{\omega T^2} \sqrt{\frac{T^2(1-2\beta\tau) + \tau^2}{T^2(1-2\beta T_1) + T_1^2}}$, $C_1 = \frac{T_1 - \tau}{T^2(1-2\beta T_1) + T_1^2}$, $\varphi = \arctg \left(\frac{\omega T_1}{1-\beta T_1} \right) - \arctg \left(\frac{\omega\tau}{1-\beta\tau} \right)$
96	$\frac{1+\tau s + g s^2}{(1+2\xi T s + T^2 s^2)(1+T_1 s)}$	$C e^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi) + C_1 e^{-\alpha_1 t}$: $C = \frac{1}{\omega T} \sqrt{\frac{\omega^2(2\beta g - \tau)^2 + (g(\beta^2 - \omega^2) - \beta\tau + 1)^2}{T^2(1-2\beta T_1) + T_1^2}}$, $C_1 = \frac{g + (T_1 - \tau)T_1}{T_1(T^2(1-2\beta T_1) + T_1^2)}$, $\varphi = \arctg \left(\frac{\omega T_1}{1-\beta T_1} \right) + \arctg \left(\frac{\omega(2\beta g - \tau)}{g(\beta^2 - \omega^2) - \beta\tau + 1} \right)$
97	$\frac{1}{s(1+2\xi T s + T^2 s^2)(1+T_1 s)}$	$1 - C e^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi) - C_1 e^{-\alpha_1 t}$: $C = \frac{1}{\omega \sqrt{T^2(1-2\beta T_1) + T_1^2}}$, $C_1 = \frac{T_1^2}{T^2(1-2\beta T_1) + T_1^2}$, $\varphi = \arctg \left(\frac{\omega T_1}{1-\beta T_1} \right) - \arctg \left(\frac{\omega}{\beta} \right)$
98	$\frac{1+\tau s}{s(1+2\xi T s + T^2 s^2)(1+T_1 s)}$	$1 - C e^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi) - C_1 e^{-\alpha_1 t}$: $C = \frac{1}{\omega T} \sqrt{\frac{T^2(1-2\beta\tau) + \tau^2}{T^2(1-2\beta T_1) + T_1^2}}$, $C_1 = \frac{(T_1 - \tau)T_1}{T^2(1-2\beta T_1) + T_1^2}$, $\varphi = \arctg \left(\frac{\omega T_1}{1-\beta T_1} \right) - \arctg \left(\frac{\omega T^2}{\beta T^2 - \tau} \right)$

99	$\frac{1+\tau s+gs^2}{s(1+2\xi Ts+T^2s^2)(1+T_1s)}$	$1+C e^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi) - C_1 e^{-\alpha_1 t}:$ $C = \frac{1}{\omega T} \sqrt{\frac{\omega^2(g-T^2)^2 + (\tau-\beta(g+T^2))^2}{T^2(1-2\beta T_1)+T_1^2}},$ $C_1 = \frac{g+(T_1-\tau)T_1}{T^2(1-2\beta T_1)+T_1^2},$ $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega T_1}{1-\beta T_1}\right) + \arctg\left(\frac{\omega(T^2-g)}{\tau-\beta(g+T^2)}\right)$
100	$\frac{1}{s^2(1+2\xi Ts+T^2s^2)^x}$ $\times \frac{1}{(1+T_1s)}$	$-A+t+C e^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi) + C_1 e^{-\alpha_1 t}:$ $C = \frac{T}{\omega \sqrt{T^2(1-2\beta T_1)+T_1^2}}, C_1 = \frac{T_1^3}{T^2(1-2\beta T_1)+T_1^2},$ $A = T_1 + 2\beta T^2, \varphi = \arctg\left(\frac{\omega T_1}{1-\beta T_1}\right) - 2\arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$
101	$\frac{s}{(1+2\xi Ts+T^2s^2)(1+T_1s)}$	$-C e^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi) - C_1 e^{-\alpha_1 t}:$ $C = \frac{1}{\omega T^2 \sqrt{T^2(1-2\beta T_1)+T_1^2}}, C_1 = \frac{1}{T^2(1-2\beta T_1)+T_1^2},$ $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega T_1}{1-\beta T_1}\right) + \arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$
102	$\frac{s^2}{(1+2\xi Ts+T^2s^2)(1+T_1s)}$	$C e^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi) + C_1 e^{-\alpha_1 t}:$ $C = \frac{1}{\omega T^3 \sqrt{T^2(1-2\beta T_1)+T_1^2}}, C_1 = \frac{1}{T_1(T^2(1-2\beta T_1)+T_1^2)},$ $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega T_1}{1-\beta T_1}\right) + 2\arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$
103	$\frac{1}{(1+2\xi Ts+T^2s^2)^x}$ $\times \frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$	$C e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}:$ $C = \frac{1}{\omega \sqrt{R_1 R_2}}, C_i = \frac{T_i^2}{(T_1 - T_2) R_i}, R_i = T^2(1-2\beta T_1) + T_i^2,$ $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega T_1}{\beta T_1 - 1}\right) + \arctg\left(\frac{\omega T_2}{\beta T_2 - 1}\right)$
104	$\frac{1+\tau s}{(1+2\xi Ts+T^2s^2)^x}$ $\times \frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$	$C e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}:$ $C = \frac{1}{\omega T} \sqrt{\frac{\tau^2 - 2\beta\tau T^2 + T^2}{R_1 R_2}}, C_i = \frac{T_i(T_i - \tau)}{(T_1 - T_2) R_i},$ $R_i = T^2(1-2\beta T_i) + T_i^2, \varphi = \sum_{i=1}^2 \arctg\left(\frac{\omega T_i}{\beta T_i - 1}\right) + \arctg\left(\frac{\omega\tau}{1-\beta\tau}\right)$

105	$\frac{1+\tau s+gs^2}{(1+2\xi Ts+T^2s^2)} \times \frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$	$-Ce^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t};$ $C = \frac{1}{\omega T} \sqrt{\frac{\omega^2(g-T^2)^2 + (\tau-\beta(g+T^2))^2}{R_1 R_2}} + T^2,$ $C_i = \frac{g-\tau T_i + T_i^2}{(T_1-T_2)R_i}, R_i = T^2(1-2\beta T_i) + T_i^2,$ $\varphi = \sum_{i=1}^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T_i}{\beta T_i - 1} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega(2\beta g - \tau)}{g(\omega^2 - \beta^2) + \tau\beta - 1} \right)$
106	$\frac{1}{s(1+2\xi Ts+T^2s^2)} \times \frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$	$1-Ce^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t};$ $C = \frac{T}{\omega \sqrt{R_1 R_2}}, C_i = \frac{T_i^3}{(T_1-T_2)R_i}, R_i = T^2(1-2\beta T_i) + T_i^2,$ $\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T_1}{\beta T_1 - 1} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T_2}{\beta T_2 - 1} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\beta} \right)$
107	$\frac{1+\tau s}{s(1+2\xi Ts+T^2s^2)} \times \frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$	$1-Ce^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t};$ $C = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\tau^2 - 2\beta\tau T^2 + T^2}{R_1 R_2}}, C_i = \frac{T_i^3}{(T_1-T_2)R_i}, R_i = T^2(1-2\beta T_i) + T_i^2,$ $\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T_1}{\beta T_1 - 1} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T_2}{\beta T_2 - 1} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T^2}{\beta T^2 - \tau} \right)$
108	$\frac{1+\tau s+gs^2}{s(1+2\xi Ts+T^2s^2)} \times \frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$	$1+Ce^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) - C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t};$ $C = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\omega^2(g-T^2)^2 + (\tau-\beta(g+T^2))^2}{R_1 R_2}},$ $C_i = \frac{T_i(g-\tau T_i + T_i^2)}{(T_1-T_2)R_i}, R_i = T^2(1-2\beta T_i) + T_i^2,$ $\varphi = \sum_{i=1}^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T_i}{\beta T_i - 1} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega(g-T^2)}{\tau-\beta(g+T^2)} \right)$
109	$\frac{s}{(1+2\xi Ts+T^2s^2)} \times \frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$	$-Ce^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) - C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t};$ $C = \frac{1}{\omega T \sqrt{R_1 R_2}}, C_i = \frac{T_i}{(T_1-T_2)R_i}, R_i = T^2(1-2\beta T_i) + T_i^2,$ $\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T_1}{\beta T_1 - 1} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T_2}{\beta T_2 - 1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\beta} \right)$
110	$\frac{s^2}{(1+2\xi Ts+T^2s^2)} \times \frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$	$Ce^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t};$ $C = \frac{1}{\omega T^2 \sqrt{R_1 R_2}}, C_i = \frac{1}{(T_1-T_2)R_i}, R_i = T^2(1-2\beta T_i) + T_i^2,$ $\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T_1}{\beta T_1 - 1} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T_2}{\beta T_2 - 1} \right) - 2\operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\beta} \right)$

111	$\frac{1}{(1+2\xi Ts+T^2 s^2)} \times$ $\times \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$	$C e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) + \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t};$ $C = \frac{(-T)^{n-2}}{\omega \sqrt{\prod_{i=1}^n R_i}}, \quad C_i = \frac{T_i^n}{R_i \prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)},$ $R_i = T^2 (1 - 2\beta T_i) + T_i^2, \quad \varphi = \sum_{i=1}^n \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T_i}{\beta T_i - 1} \right)$
112	$\frac{1}{s(1+2\xi Ts+T^2 s^2)} \times$ $\times \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$	$1 - C e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) - \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t};$ $C = \frac{(-T)^{n-1}}{\omega \sqrt{\prod_{i=1}^n R_i}}, \quad C_i = \frac{T_i^{n+1}}{R_i \prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)},$ $R_i = T^2 (1 - 2\beta T_i) + T_i^2, \quad \varphi = \sum_{i=1}^n \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T_i}{\beta T_i - 1} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\beta} \right)$
113	$\frac{1}{s^2(1+2\xi Ts+T^2 s^2)} \times$ $\times \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$	$-A + t + C e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) + \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t};$ $A = 2\beta T^2 + \sum_{i=1}^n T_i, \quad C = \frac{(-T)^n}{\omega \sqrt{\prod_{i=1}^n R_i}}, \quad C_i = \frac{T_i^{n+2}}{R_i \prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k)},$ $R_i = T^2 (1 - 2\beta T_i) + T_i^2, \quad \varphi = \sum_{i=1}^n \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T_i}{\beta T_i - 1} \right) + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\beta} \right)$
114	$\frac{s}{(1+2\xi Ts+T^2 s^2)} \times$ $\times \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$	$-C e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) - \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t};$ $C = (-T)^{n-3} / \omega \sqrt{\prod_{i=1}^n R_i}, \quad C_i = T_i^{n-1} / R_i \prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k),$ $R_i = T^2 (1 - 2\beta T_i) + T_i^2, \quad \varphi = \sum_{i=1}^n \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T_i}{\beta T_i - 1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\beta} \right)$
115	$\frac{s^2}{(1+2\xi Ts+T^2 s^2)} \times$ $\times \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+T_i s)}$	$C e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) + \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t};$ $C = (-T)^{n-4} / \omega \sqrt{\prod_{i=1}^n R_i}, \quad C_i = T_i^{n-2} / R_i \prod_{k=1, k \neq i}^n (T_i - T_k),$ $R_i = T^2 (1 - 2\beta T_i) + T_i^2, \quad \varphi = \sum_{i=1}^n \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega T_i}{\beta T_i - 1} \right) - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\beta} \right)$

<p>116</p> $\times \frac{\frac{1}{(1+Ts)} \times}{\prod_{i=1}^n (1+T_i s + T_i^2 s^2)}$	$Ce^{-\alpha t} - \sum_{i=1}^n C_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i);$ $C = \frac{T^{2n-1}}{\prod_{i=1}^n r_i}, \quad C_i = \frac{T_i^{2n-3}}{\omega_i \sqrt{r_i R_i}}, \quad r_i = (1-2\beta_i T)T_i^2 + T^2,$ $R_i = \prod_{k=1, k \neq i}^n \left((T_i^2 - T_k^2)^2 + 4(\beta_i - \beta_k)(\beta_i T_i^2 - \beta_k T_k^2) T_i^2 T_k^2 \right),$ $\varphi_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \operatorname{arctg} \left(\frac{2\omega_i (\beta_i - \beta_k)}{(\beta_i - \beta_k)^2 - (\omega_i^2 - \omega_k^2)} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_i T}{\beta_i T - 1} \right)$
<p>117</p> $\times \frac{\frac{1}{s(1+Ts)} \times}{\prod_{i=1}^n (1+T_i s + T_i^2 s^2)}$	$1 - Ce^{-\alpha t} + \sum_{i=1}^n C_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i);$ $C = \frac{T^{2n}}{\prod_{i=1}^n r_i}, \quad C_i = \frac{T_i^{2(n-1)}}{\omega_i \sqrt{r_i R_i}}, \quad r_i = (1-2\beta_i T)T_i^2 + T^2,$ $R_i = \prod_{k=1, k \neq i}^n \left((T_i^2 - T_k^2)^2 + 4(\beta_i - \beta_k)(\beta_i T_i^2 - \beta_k T_k^2) T_i^2 T_k^2 \right),$ $\varphi_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \operatorname{arctg} \left(\frac{2\omega_i (\beta_i - \beta_k)}{(\beta_i - \beta_k)^2 - (\omega_i^2 - \omega_k^2)} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_i T}{\beta_i T - 1} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_i}{\beta_i} \right)$
<p>118</p> $\times \frac{\frac{1}{s^2(1+Ts)} \times}{\prod_{i=1}^n (1+T_i s + T_i^2 s^2)}$	$-A + t + Ce^{-\alpha t} - \sum_{i=1}^n C_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i);$ $A = T + 2 \sum_{i=1}^n \beta_i T_i^2, \quad C = \frac{T^{2n+1}}{\prod_{i=1}^n r_i}, \quad C_i = \frac{T_i^{2n-1}}{\omega_i \sqrt{r_i R_i}}, \quad r_i = (1-2\beta_i T)T_i^2 + T^2,$ $R_i = \prod_{k=1, k \neq i}^n \left((T_i^2 - T_k^2)^2 + 4(\beta_i - \beta_k)(\beta_i T_i^2 - \beta_k T_k^2) T_i^2 T_k^2 \right),$ $\varphi_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \operatorname{arctg} \left(\frac{2\omega_i (\beta_i - \beta_k)}{(\beta_i - \beta_k)^2 - (\omega_i^2 - \omega_k^2)} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_i T}{\beta_i T - 1} \right) + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_i}{\beta_i} \right)$

119	$\frac{s}{(1+Ts)} \times$ $\times \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+T_i s + T_i^2 s^2)}$	$-Ce^{-\alpha t} + \sum_{i=1}^n C_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$: $C = \frac{T^{2(n-1)}}{\prod_{i=1}^n r_i}, \quad C_i = \frac{T_i^{2(n-2)}}{\omega_i \sqrt{r_i R_i}}, \quad r_i = (1-2\beta_i T) T_i^2 + T^2,$ $R_i = \prod_{k=1, k \neq i}^n \left((T_i^2 - T_k^2)^2 + 4(\beta_i - \beta_k)(\beta_i T_i^2 - \beta_k T_k^2) T_i^2 T_k^2 \right),$ $\varphi_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \arctg \left(\frac{2\omega_i(\beta_i - \beta_k)}{(\beta_i - \beta_k)^2 - (\omega_i^2 - \omega_k^2)} \right) + \arctg \left(\frac{\omega_i T}{\beta_i T - 1} \right) - \arctg \left(\frac{\omega_i}{\beta_i} \right)$
120	$\frac{s^2}{(1+Ts)} \times$ $\times \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+T_i s + T_i^2 s^2)}$	$Ce^{-\alpha t} - \sum_{i=1}^n C_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$: $C = \frac{T^{2n-3}}{\prod_{i=1}^n r_i}, \quad C_i = \frac{T_i^{2n-5}}{\omega_i \sqrt{r_i R_i}}, \quad r_i = (1-2\beta_i T) T_i^2 + T^2,$ $R_i = \prod_{k=1, k \neq i}^n \left((T_i^2 - T_k^2)^2 + 4(\beta_i - \beta_k)(\beta_i T_i^2 - \beta_k T_k^2) T_i^2 T_k^2 \right),$ $\varphi_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \arctg \left(\frac{2\omega_i(\beta_i - \beta_k)}{(\beta_i - \beta_k)^2 - (\omega_i^2 - \omega_k^2)} \right) + \arctg \left(\frac{\omega_i T}{\beta_i T - 1} \right) - 2 \arctg \left(\frac{\omega_i}{\beta_i} \right)$
121	$\frac{1}{(1+2\xi Ts + T^2 s^2)} \times$ $\times \frac{1}{(1+T_1 s)^2}$	$Ce^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi) + (A + Bt)e^{-\alpha_1 t}$: $C = \frac{1}{\omega r}, \quad B = \omega C, \quad A = 2T^2 T_1^2 (1-2\beta T_1) B^2,$ $r = (1-2\beta T_1) T^2 + T_1^2, \quad \varphi = 2 \arctg \left(\frac{\omega T_1}{1-\beta T_1} \right)$
122	$\frac{1}{s(1+2\xi Ts + T^2 s^2)} \times$ $\times \frac{1}{(1+T_1 s)^2}$	$1 - Ce^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi) + (A - Bt)e^{-\alpha_1 t}$: $C = \frac{T}{\omega r}, \quad B = \frac{T_1}{r}, \quad A = (4\beta T^2 T_1 - 3T^2 - T_1^2) B^2,$ $r = (1-2\beta T_1) T^2 + T_1^2, \quad \varphi = 2 \arctg \left(\frac{\omega T_1}{1-\beta T_1} \right) - \arctg \left(\frac{\omega}{\beta} \right)$
123	$\frac{s}{(1+2\xi Ts + T^2 s^2)} \times$ $\times \frac{1}{(1+T_1 s)^2}$	$-Ce^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi) + (A - Bt)e^{-\alpha_1 t}$: $C = \frac{1}{\omega Tr},$ $A = \frac{T_1^2 - T^2}{r^2}, \quad B = \frac{1}{T_1 r}, \quad r = (1-2\beta T_1) T^2 + T_1^2,$ $\varphi = 2 \arctg \left(\frac{\omega T_1}{1-\beta T_1} \right) + \arctg \left(\frac{\omega}{\beta} \right)$

124	$\frac{s^2}{(1+2\xi Ts + T^2 s^2)^2} \times \frac{1}{(1+T_1 s)^2}$	$Ce^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi) + (A+Bt)e^{-\alpha_1 t} : C = -\frac{T}{\omega T^2 r},$ $A = \frac{2(\beta T^2 - T_1)}{r^2}, B = \frac{1}{T_1^2 r}, r = (1-2\beta T_1)T^2 + T_1^2,$ $\varphi = 2\arctg\left(\frac{\omega T_1}{1-\beta T_1}\right) + 2\arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$
125	$\frac{1}{(1+2\xi Ts + T^2 s^2)^2} \times \frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}$	$-Ce^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 (A+t)e^{-\alpha_2 t} :$ $C = -\frac{T}{\omega r_2 \sqrt{r_1}}, C_1 = \frac{T_1^3}{(T_1 - T_2)^2 r_1}, C_2 = \frac{T_2}{(T_1 - T_2) r_2},$ $A = T_2 \left(\frac{2(1-\beta T_2)T^2}{r_2} + \frac{T_1}{T_1 - T_2} \right), r_i = (1-2\beta T_i)T^2 + T_i^2,$ $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega T_1}{\beta T_1 - 1}\right) + 2\arctg\left(\frac{\omega T_2}{\beta T_2 - 1}\right)$
126	$\frac{1}{s(1+2\xi Ts + T^2 s^2)^2} \times \frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}$	$1 + Ce^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) - C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 (A+t)e^{-\alpha_2 t} :$ $C = \frac{T^2}{\omega r_2 \sqrt{r_1}}, C_1 = \frac{T_1^4}{(T_1 - T_2)^2 r_1}, C_2 = \frac{T_2^2}{(T_1 - T_2) r_2},$ $A = T_2 \left(\frac{2(1-\beta T_2)T^2}{r_2} + \frac{2T_1 - T_2}{T_1 - T_2} \right), r_i = (1-2\beta T_i)T^2 + T_i^2,$ $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega T_1}{\beta T_1 - 1}\right) + 2\arctg\left(\frac{\omega T_2}{\beta T_2 - 1}\right) + \arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$
127	$\frac{s}{(1+2\xi Ts + T^2 s^2)^2} \times \frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}$	$Ce^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) - C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 (A+t)e^{-\alpha_2 t} :$ $C = \frac{1}{\omega r_2 \sqrt{r_1}}, C_1 = \frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)^2 r_1}, C_2 = \frac{1}{(T_1 - T_2) r_2},$ $A = T_2 \left(\frac{2(1-\beta T_2)T^2}{r_2} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \right), r_i = (1-2\beta T_i)T^2 + T_i^2,$ $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega T_1}{\beta T_1 - 1}\right) + 2\arctg\left(\frac{\omega T_2}{\beta T_2 - 1}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$
128	$\frac{s^2}{(1+2\xi Ts + T^2 s^2)^2} \times \frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)^2}$	$-Ce^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 (A+t)e^{-\alpha_2 t} :$ $C = \frac{1}{\omega T r_2 \sqrt{r_1}}, C_1 = \frac{T_1}{(T_1 - T_2)^2 r_1}, C_2 = \frac{1}{T_2(T_1 - T_2) r_2},$ $A = T_2 \left(\frac{2(1-\beta T_2)T^2}{r_2} + \frac{2T_2 - T_1}{T_1 - T_2} \right), r_i = (1-2\beta T_i)T^2 + T_i^2,$ $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega T_1}{\beta T_1 - 1}\right) + 2\arctg\left(\frac{\omega T_2}{\beta T_2 - 1}\right) - 2\arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$

Свойства оригиналов и изображений

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(s)$
1	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
2	$f(t)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
3	$f(t-\tau)$	$e^{-ts} F(s)$
4	$e^{-\alpha t} f(t)$	$F(s+\alpha)$
5	$t f(t)$	$-F'(s)$
6	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
7	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
8	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$
9	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$
10	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
11	$\sin(\omega t) f(t)$	$0,5 j(F(s+j\omega) - F(s-j\omega))$
12	$\cos(\omega t) f(t)$	$0,5 j(F(s+j\omega) + F(s-j\omega))$
13	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$	$F_1(s) F_2(s)$
14	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
15	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КУРСОВОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Здесь предлагаются варианты заданий для курсового проектирования, практических и лабораторных работ по курсу «Основы теории автоматического управления». Каждый студент выполняет индивидуальное задание. Номер варианта задания равен двум последним цифрам зачетной книжки (студенческого билета) и определяет состав исходных данных для проектирования согласно табл. П.5 - П.7.

Большое число (120) вариантов заданий достигается соединением шести видов типовых звеньев (табл. П.4) друг с другом небольшим числом способов (15), вариацией параметров звеньев и исходных данных для анализа и синтеза системы управления. Параметры типовых звеньев (коэффициенты усиления K , постоянные времени T , коэффициенты демпфирования ξ), составляющих устройство, указаны в скобках. Они являются числами, за исключением одного звена, параметр которого обозначен буквой K или T . Важнейшей составной частью курсовой работы является исследование устойчивости разомкнутой и замкнутой систем от этого буквенного параметра. Например, в варианте I задано устройство, структурная схема которого после подстановки численных параметров принимает вид, изображенный на рис. П.1. Переменным параметром исследования устойчивости является коэффициент усиления K дифференцирующего звена с ПФ K_s .

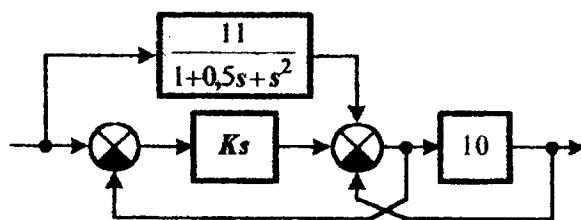


Рис. П.1

устойчивости разомкнутой и замкнутой систем от этого буквенного параметра. Например, в варианте I задано устройство, структурная схема которого после подстановки численных параметров принимает вид, изображенный на рис. П.1. Переменным параметром исследования устойчивости является коэффициент усиления K дифференцирующего звена с ПФ K_s .

План выполнения курсовой работы

1. Построить все частотные характеристики блоков структурной схемы и принципиальные схемы моделирования блоков на операционных усилителях.

Строится по семь (ВЧХ $P(\omega)$, МЧХ $Q(\omega)$, АЧХ $A(\omega)$, ФЧХ $\phi(\omega)$, годограф $A(\phi)$, ЛАЧХ $L(\omega)$ и ЛФЧХ $\Phi(\omega)$) характеристик каждого блока структурной схемы. Для блока с буквенным параметром в ПФ строятся по три ЧХ для значений параметра разных модулей и знаков. Для построения графика каждой ЧХ выводится ее формула. Оси на всех графиках должны быть обозначены и размечены. При синтезе схемы блока на ОУ используется методика, изложенная в пп. 1.3 и 1.5. Правильность схемы проверяется по табл. 1.3.

2. Получить ПФ $W_p(s)$ разомкнутой системы.

Вывод ПФ производится любым (или обоими) из методов алгебраических и структурных преобразований блок-схемы.

3. Исследовать устойчивость разомкнутой системы от буквенного параметра методами Гурвица и Михайлова.

4. Получить ПФ $W_3(s)$ системы, замкнутой единичной отрицательной обратной связью.

5. Исследовать устойчивость замкнутой системы от буквенного параметра методами Гурвица и Рауса. Получить диапазоны устойчивых и неустойчивых значений параметра в классе вещественных чисел.

В пунктах 3 и 5 анализы устойчивости каждой из систем от параметра разными независимыми друг от друга методами должны дать одинаковые результаты.

6. Сформировать набор значений параметра, включающий все граничные значения и по одному значению из каждого диапазона устойчивости и неустойчивости замкнутой системы.

Всего должно быть не более пяти значений параметра (исключая нулевое) из каждой области и границы устойчивости ЗС. Лишние значения параметра исключаются

из набора по согласованию с преподавателем. Нежелательно выбирать не граничные параметры очень близко к границам устойчивости во избежание затруднений с анализом устойчивости. После выбора параметров вернитесь в пункт 3 и постройте для них годографы Михайлова РС, которые будут необходимы в пункте 7.

7. Для каждого значения параметра из набора построить частотные характеристики, необходимые для исследования устойчивости замкнутой системы от параметра по критериям Найквиста и Михайлова.

Не менее трех пар ЛЧХ (ЛАЧХ+ЛФЧХ) должны быть построены вручную по типовым звеньям. Обязательно доказательство устойчивости по Найквисту и Михайловой, а не простая констатация фактов устойчивости. При анализе устойчивости ЗС по Найквисту можно использовать годографы из пункта 3.

8. Выбрать из набора параметров значение, при котором разомкнутая система устойчива, получить числовую ПФ системы с этим параметром и построить каноническую схему моделирования разомкнутой системы на операционных усилителях.

Если РС структурно не устойчива, то выбрать значение параметра, при котором устойчива ЗС.

9. Получить оценки качества временных характеристик разомкнутой системы спектральными и частотными методами.

10. Рассчитать частотными методами временные характеристики разомкнутой системы, построить их графики и сравнить показатели качества с оценками из пункта 9.

Одна из ВХ должна быть рассчитана вручную по формуле Хевисайда, вторая - по таблице преобразований Лапласа.

11. Рассчитать реакцию разомкнутой системы на нетиповое входное воздействие (табл. П.6) при нулевых начальных условиях. Построить графики входного и выходного сигналов.

12. Методом, соответствующим табл. П.7, рассчитать ПФ последовательного регулятора, доставляющего замкнутой системе желаемые показатели качества:

- астатизм первого порядка с коэффициентом статической ошибки c_1 минимум в 10 раз меньшим, чем коэффициент c_1 в РС;
- быстродействие t_p минимум в 10 раз лучше, чем в РС;
- перерегулирование σ не более 20%;
- запасы устойчивости $L_3 \geq 6$ дБ и $\phi_3 \geq 30^\circ$.

13. Рассчитать переходную характеристику замкнутой системы и сравнить ее статические и динамические показатели качества с желаемыми. Построить схему моделирования замкнутой системы управления с последовательным регулятором на операционных усилителях.

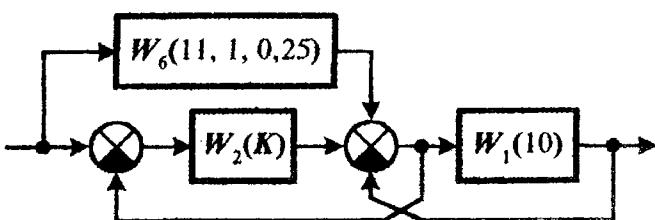
14. Исследовать с помощью MathCAD влияние параметров K_n , K_d и K_u последовательного ПИД-регулятора на устойчивость и показатели качества t_p и σ переходной характеристики замкнутой системы. Оптимизировать систему управления с ПИД-регулятором согласно желаемым показателям качества из пункта 12.

Таблица П.4

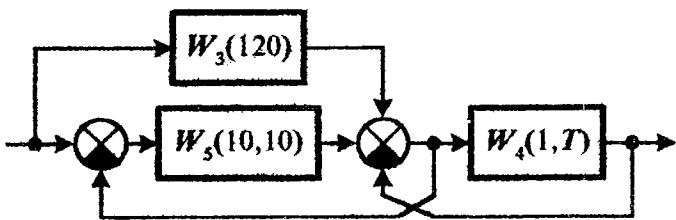
$W_1(K) = K$	$W_2(K) = Ks$	$W_3(K) = \frac{K}{s}$
$W_4(K, T) = \frac{K}{1 + Ts}$	$W_5(K, T) = K(1 + Ts)$	$W_6(K, T, \xi) = \frac{K}{1 + 2\xi Ts + T^2 s^2}$

Структурные схемы устройств

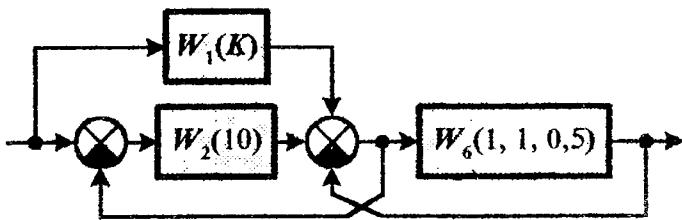
Номера вариантов



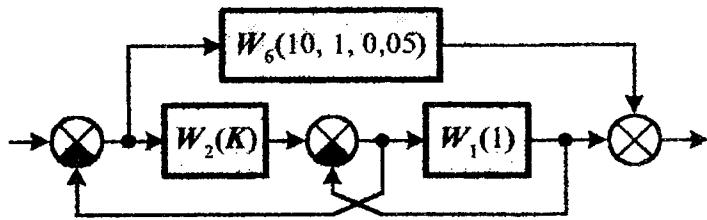
1	2
31	32
61	62
91	92



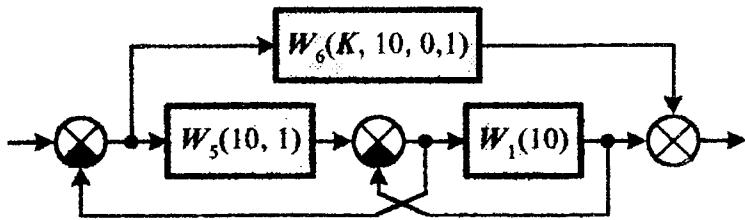
3	4
33	34
63	64
93	94



5	6
35	36
65	66
95	96



7	8
37	38
67	68
97	98

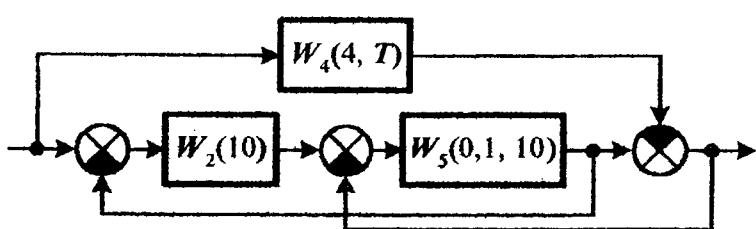


9	10
39	40
69	70
99	100

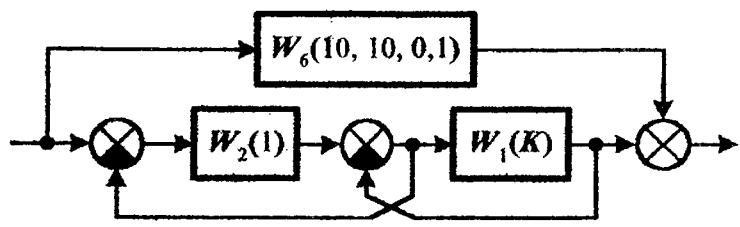
Структурные схемы устройств	Номера вариантов	
	11	12
	41	42
	71	72
	101	102
	13	14
	43	44
	73	74
	103	104
	15	16
	45	46
	75	76
	105	106
	17	18
	47	48
	77	78
	107	108
	19	20
	49	50
	79	80
	109	110

Структурные схемы устройств

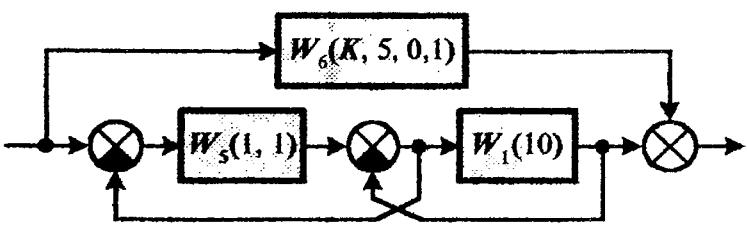
Номера вариантов



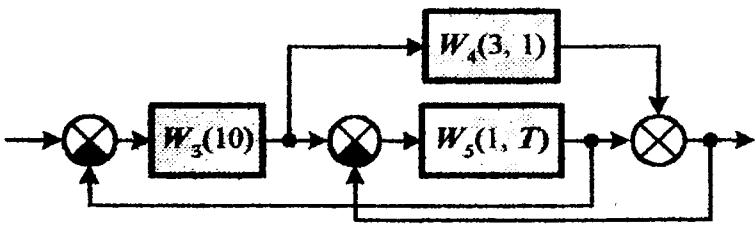
21	22
51	52
81	82
111	112



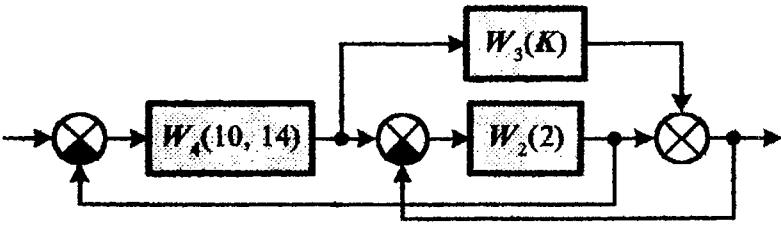
23	24
53	54
83	84
113	114



25	26
55	56
85	86
115	116



27	28
57	58
87	88
117	118



29	30
59	60
89	90
119	120

Таблица П.6

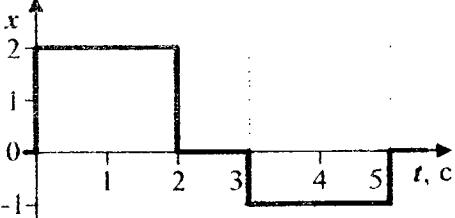
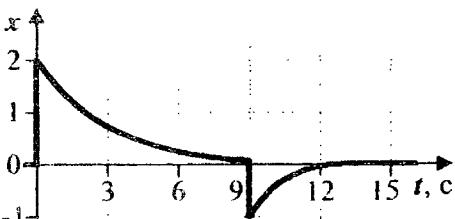
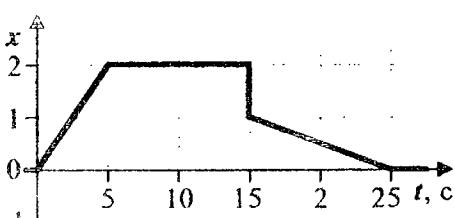
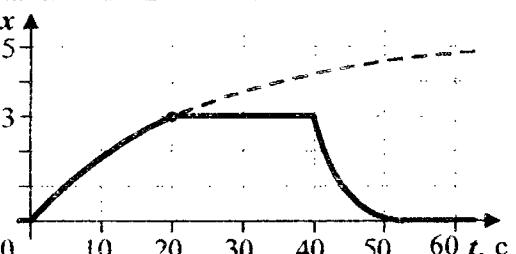
Входные воздействия	Номера вариантов
	1, 8, 11, 18, 21, 28, 33, 40, 43, 50, 53, 60, 62, 65, 72, 75, 82, 85, 94, 97, 104, 107, 114, 117
	2, 5, 12, 15, 22, 25, 34, 37, 44, 47, 54, 57, 66, 69, 76, 79, 86, 89, 91, 98, 101, 108, 111, 118
	6, 9, 16, 19, 26, 29, 31, 38, 41, 48, 51, 58, 63, 70, 73, 80, 83, 90, 92, 95, 102, 105, 112, 115
	3, 10, 13, 20, 23, 30, 32, 35, 42, 45, 52, 55, 64, 67, 74, 77, 84, 87, 96, 99, 106, 109, 116, 119
$2\sin(0,2t+30^\circ)-\cos(0,1t)$	4, 7, 14, 17, 24, 27, 36, 39, 46, 49, 56, 59, 61, 68, 71, 78, 81, 88, 93, 100, 103, 110, 113, 120

Таблица П.7

Методы синтеза регулятора	Номера вариантов
Логарифмических частотных характеристик	Четные
Спектральный	Нечетные

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные автоматические системы. - М.: Машиностроение, 1982. 504 с.
2. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. - М.: Наука, 1977. 560 с.
3. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. - М.: Наука, 1989. 304 с.
4. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Ч.1. - М.: Энергия, 1965. 396 с.
5. Математические основы теории автоматического регулирования/ Под ред. Б.К. Чемоданова. - М.: Выш. шк., 1977. 366 с.
6. Справочное пособие по теории систем автоматического регулирования и управления/ Под ред. Е.А. Санковского. - Минск: Вышайш. шк., 1973. 584 с.
7. Топчев Ю.И., Цыплаков А.П. Задачник по теории автоматического регулирования. - М.: Машиностроение, 1977. 592 с.
8. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. -М.: Мир, 1977. 650 с.
9. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1967. 304 с.
10. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применение. - М.: Выш. шк., 1988. 167 с.
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988. 548 с.
12. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. - М.: Наука, 1984. 318 с.
13. Алексенко А.Г., Шагурин И.И. Микросхемотехника. - М.: Радио и связь, 1990. 496 с.
14. Алексеев А.Г., Войшвилло Г.В. Операционные усилители и их применение. - М.: Радио и связь, 1989. 120 с.
15. Пейтон А., Волш В. Аналоговая электроника на операционных усилителях. - М.: Бином, 1994. 352 с.
16. Диоды: Справочник / О.П. Григорьев, В.Я. Замятин, Б.В. Кондратьев, С.Л. Пожидаев. - М.: Радио и связь, 1990. 336 с.
17. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. -М.: Наука, 1977. 228 с.
18. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учебное пособие. - М.: Финансы и статистика, 2000. 656 с.
19. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). - М.: Наука, 1978. 832 с.
20. Загускин В.Л. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1960. 216 с.