Научно-исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №4
Метод бэкстеппинга

Выполнили студенты — Мовчан Игорь Евгеньевич
Ибахаев Зубайр Руслан-Бекович
Белоус Савва Эрнестович
Преподаватель — Зименко Константин Александрович

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Первая система

Рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + \sin x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + (2 + \sin x_1)u \end{cases}$$

Предположим весь вектор состояния измеримым. Задачей поставим стабилизацию центра координат системы регулятором, синтезированным методом бэкстеппинга.

Для начала стабилизируем подсистему

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + \sin x_1 + x_2$$

Она достигается выбором в качестве виртуального входа переменной состояния x_2 и закона управления

$$a(x_1) = x_2 = -x_1^2 - \sin x_1 - k_1 x_1$$

Так как тогда функция Ляпунова $V_1 = x_1^2/2$ имеет производной

$$\dot{V}_1 = -k_1 x_1^2 \leqslant 0$$

Теперь введем ошибку на переменную x_2:

$$z_2 = x_2 - a(x_1) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = -k_1 x_1 + z_2$$

При нулевой введенной ошибки $x_1 \to 0$. Для обеспечения этого расширим функцию Ляпунова до

$$V_2 = \frac{x_1^2}{2} + \frac{z_2^2}{2}$$

$$\dot{V}_2 = x_1 \dot{x}_1 + z_2 \dot{z}_2$$

Распишем первое слагаемое:

$$x_1 \dot{x}_1 = x_1(-k_1 x_1 + z_2) = -k_1 x_1^2 + x_1 z_2$$

А также второе:

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{a} = x_1^2 + (2 + \sin x_1)u - \dot{a}$$

Откуда:

$$\begin{gathered}\dot{V}_2 = -k_1 x_1^2 + x_1 z_2 + z_2 x_1^2 + z_2(2 + \sin x_1)u - z_2\dot{a} = \\ = -k_1 x_1^2 + z_2(x_1 + x_1^2 + (2 + \sin x_1)u - \dot{a})\end{gathered}$$

Хотим получить отрицательную производную, поэтому

$$x_1 + x_1^2 + (2 + \sin x_1)u - \dot{a} = -k_2 z_2$$

В итоге синтезированное управление:

$$u = \frac{-x_1 - x_1^2 - k_2 z_2 + \dot{a}}{2 + \sin x_1}$$

При этом производная от a по времени и ошибка z_2:

$$\dot{a}(x_1) = \frac{\partial a}{\partial x_1}\dot{x}_1 = (-2x_1 - \cos x_1 - k_1)(-k_1 x_1 + z_2)$$

$$z_2 = x_2 + x_1^2 + \sin x_1 + k_1 x_1$$

Отлично, стабилизирующее управление найдено! Причем центр координат получилось сделать *глобально* устойчивым, так как расширенная функция Ляпунова V_2 радиально неограничена и имеет отрицательную (определенную) производную всюду, кроме 0.

Наконец, проверим управление в действии, проведя моделирование при начальных условиях

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

и значениях параметров регулятора $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. На рисунках 1-3 представлены графики состояний системы, ошибки z_2, а также синтезированного управляющего воздействия u.

По результатам моделирования видим, что все переменные состояния и ошибка z_2 сходятся к нулю, а управляющее воздействие остаётся ограниченным. Это подтверждает асимптотическую устойчивость центра координат и корректность синтеза управления.

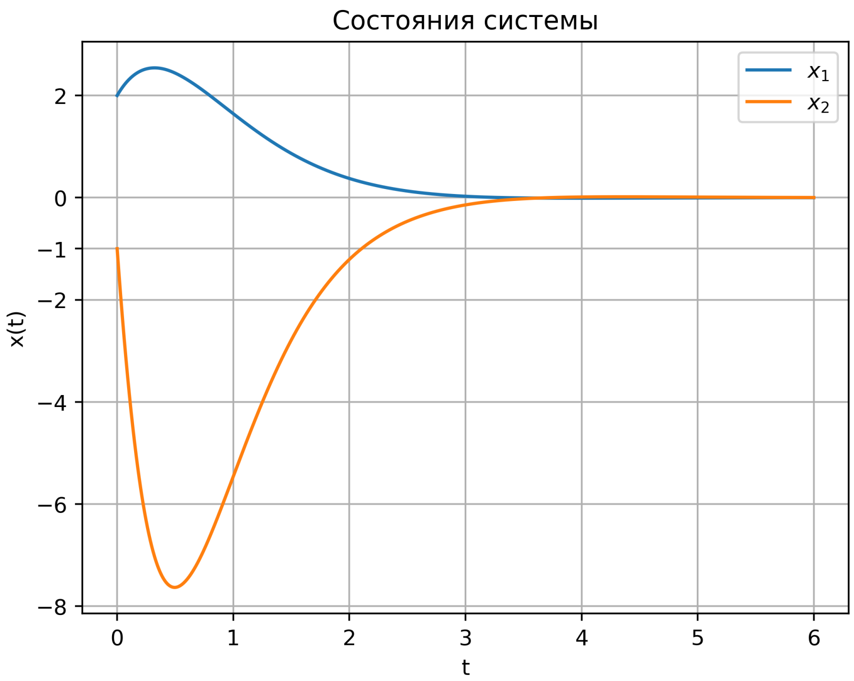

Рис. 1: Графики состояний $x(t)$ нелинейной системы

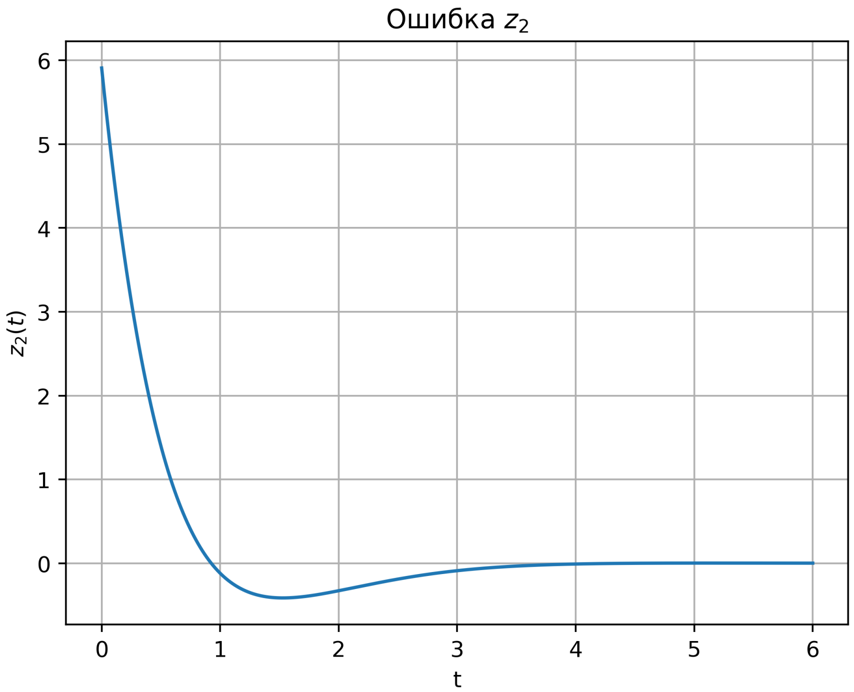

Рис. 2: График невязки $z_2 = x_2 - a(x_1)$ нелинейной системы

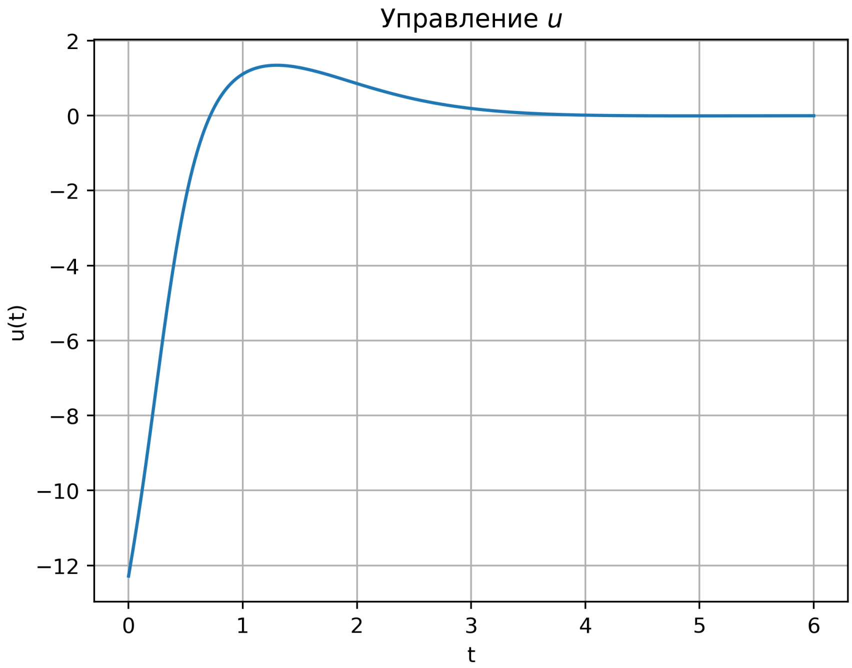

Рис. 3: Графики синтезированного управления и нелинейной системы

2 Вторая система

Аналогично проведем синтез стабилизирующего регулятора для нелинейной системы вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases}$$

Рассмотрим первую подсистему:

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2$$

Будем считать переменную x_2 виртуальным управлением, стабилизирующим точку $x_1 = 0$. Здесь заметим, что при

$$a(x_1) = x_2 = 0$$

Система уже является устойчивой, однако нам всё же хочется иметь регулируемую динамику, поэтому проведем чуть более сложные вычисления для виртуального входа:

$$a(x_1) = x_2 = x_1^3 - k_1 x_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_1 = -k_1 x_1^2 \leqslant 0$$

В выводе аналогично предыдущему пункту было взято $V_1 = x_1^2/2$.

Далее введем ошибку виртуального управления, которая со временем должна будет сойтись к нулю:

$$z_2 = x_2 - a(x_1) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = -k_1 x_1 + z_2$$

Для этого примем расширенную функцию Ляпунова V_2 и проанализируем её производную по времени:

$$V_2 = \frac{x_1^2}{2} + \frac{z_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_2 = x_1 \dot{x}_1 + z_2 \dot{z}_2$$

Первая часть:

$$x_1 \dot{x}_1 = -k_1 x_1^2 + x_1 z_2$$

Для ошибки z_2:

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{a} = x_1 + u - \dot{a}$$

В итоге полная функция Ляпунова:

$$\dot{V}_2 = -k_1 x_1^2 + 2x_1 z_2 + z_2 u - z_2 \dot{a} = -k_1 x_1^2 + z_2(2x_1 + u - \dot{a})$$

Хотим получить всюду отрицательную производную, поэтому

$$2x_1 + u - \dot{a} = -k_2 z_2 \quad \Rightarrow \quad u = -2x_1 - k_2 z_2 + \dot{a}$$

При этом производная от a по времени и ошибка z_2 равны

$$\dot{a}(x_1) = \frac{\partial a}{\partial x_1} \dot{x}_1 = (3x_1^2 - k_1)(-k_1 x_1 + z_2)$$

$$z_2 = x_2 - x_1^3 + k_1 x_1$$

Также промоделируем замкнутую найденным регулятором систему при параметрах $k_1 = k_2 = 5$ и начальных условиях

$$x(0) = \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix}^T$$

Результаты отображены на рисунках 4-6. На них можем видеть, что обе переменные состояния монотонно сходятся к 0, как и ошибка виртуального управления z_2 - управление корректно.

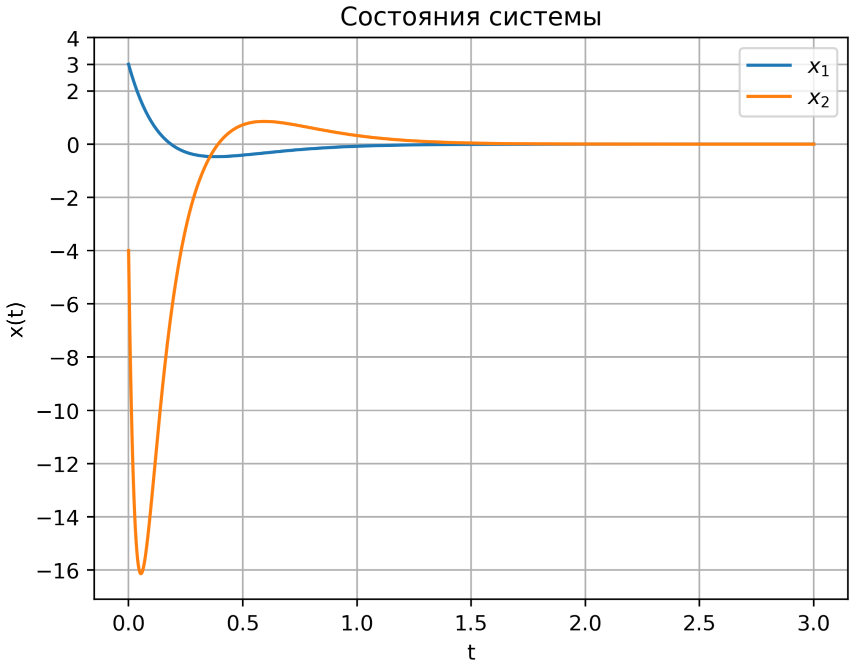

Рис. 4: Графики состояний $x(t)$ второй системы

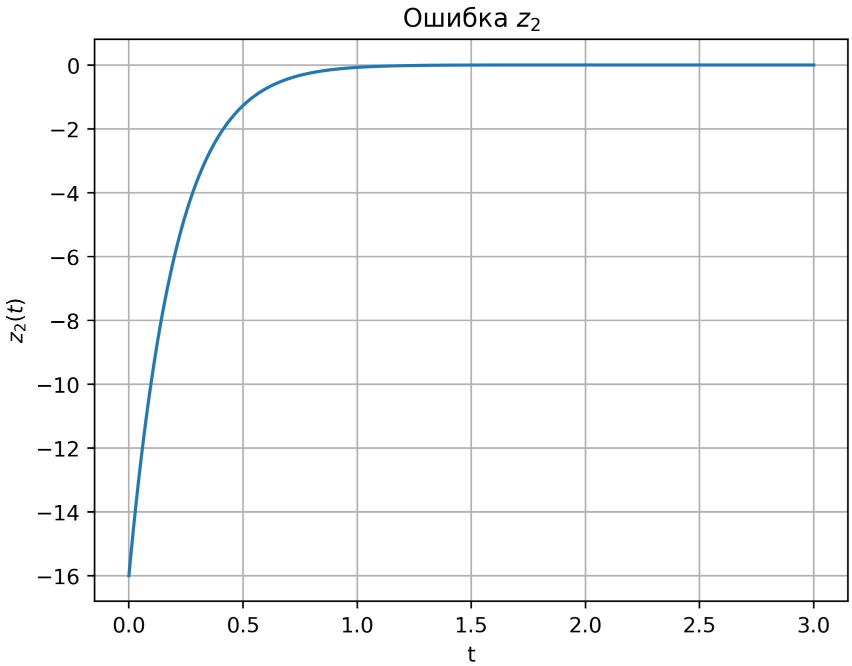

Рис. 5: График невязки $z_2 = x_2 - a(x_1)$ второй системы

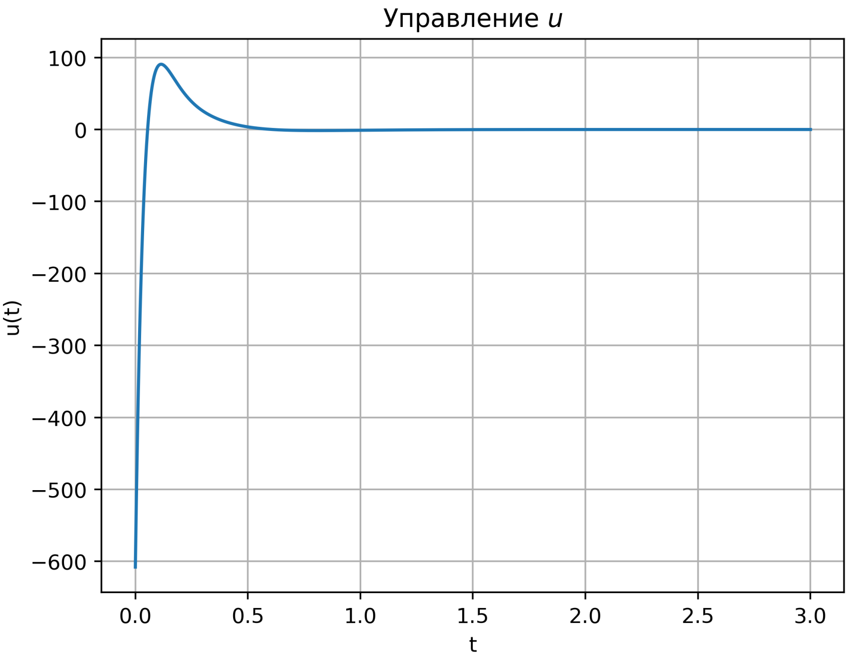

Рис. 6: Графики синтезированного управления $u(t)$ второй системы

3 Третья система

Наконец, рассмотрим нелинейную систему четвертого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3 + (2 - \sin x_3) x_4 \\ \dot{x}_4 = x_2 x_3 + 2u \end{cases}$$

Она, как и прежде, имеет сторого треугольную структуру (каждая подсистема $\dot{x}_i$ зависит от x_{i+1} линейно с ненулевым коэффициентом, и не зависит от состояний более высокого порядка) - бэкстеппинг можно применить напрямую.

Начнём со стабилизации подсистемы для x_1:

$$\dot{x}_1 = \cos x_1 - x_2$$

Выберем в качестве виртуального управления

$$a_1(x_1) = x_2 = \cos x_1 + k_1 x_1$$

Тогда для $V_1 = x_1^2/2$:

$$\dot{x}_1 = -k_1 x_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_1 = -k_1 x_1^2 \leqslant 0$$

Что даёт глобальную асимптотическую устойчивость в $x_1 = 0$. Далее, выберем ошибкой управления

$$z_2 = x_2 - a_1(x_1)$$

Из этого получаем:

$$\dot{x}_1 = -k_1 x_1 - z_2$$

Для гарантии нулевой ошибки расширим функцию Ляпунова до

$$V_2 = \frac{x_1^2}{2} + \frac{z_2^2}{2}$$

Её производная:

$$\dot{V}_2 = -k_1 x_1^2 - x_1 z_2 + z_2(\dot{x}_2 - \dot{a}_1) = -k_1 x_1^2 + z_2(x_3 - \dot{a}_1)$$

Мы хотим:

$$x_3 - \dot{a}_1 = -k_2 z_2$$

Поэтому стабилизирующее виртуальное управление x_3 для второй подсистемы имеет вид:

$$a_2 = x_3 = \dot{a}_1 - k_2 z_2$$

Введем новую ошибку на управление:

$$z_3 = x_3 - a_2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = z_3 + a_2$$

Опять же расширим функцию Ляпунова до V_3, для краткости используем рекурсивное определение через предыдущее значение V_2:

$$V_3 = V_2 + \frac{z_3^2}{2}$$

$$\dot{V}_2 = -k_1 x_1^2 + z_2(z_3 + a_2 - \dot{a}_1) = -k_1 x_1^2 - k_2 z_2^2 + z_2 z_3$$

Её производная:

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_2 + z_3 \dot{z}_3 = -k_1 x_1^2 - k_2 z_2^2 + z_2 z_3 + z_3(\dot{x}_3 - \dot{a}_2)$$

Распишем отдельно выражние для динамики z_3:

$$\dot{z}_3 = \dot{x}_3 - \dot{a}_2 = x_1 x_3 + (2 - \sin x_3) x_4 - \dot{a}_2$$

Хотим получить:

$$z_2 z_3 + z_3(x_1 x_3 + (2 - \sin x_3) x_4 - \dot{a}_2) = -k_3 z_3^3$$

Поэтому в качестве стабилизирующего виртуального управления третьей подсистемы выберем

$$(2 - \sin x_3) x_4 = -x_1 x_3 + \dot{a}_2 + z_2$$

$$a_3 = x_4 = \frac{-x_1 x_3 + \dot{a}_2 - z_2 - k_3 z_3}{2 - \sin x_3}$$

Снова введем ошибку управления

$$z_4 = x_4 - a_3$$

Финальное расширим функцию Ляпунова до

$$V_4 = V_3 + \frac{z_4^2}{2}$$

$$\dot{V}_3 = -k_1 x_1^2 - k_2 z_2^2 - k_3 z_3^2 + z_3 z_4$$

Её производная:

$$\dot{V}_4 = -k_1 x_1^2 - k_2 z_2^2 - k_3 z_3^2 + z_3 z_4 + z_4 \dot{z}_4$$

Распишем динамику для

$$\dot{z}_4 = \dot{x}_4 - \dot{a}_3 = x_2 x_3 + 2u - a_3$$

Хотим получить отрицательную производную с дополнительным слагаемым $-k_4 x_4^2$ в функции Ляпунова V_4, поэтому

$$z_3 z_4 + z_4(x_2 x_3 + 2u - \dot{a}_3) = -k_4 z_4^2$$

Отсюда финальное выражение

$$u = \frac{-x_2 x_3 + \dot{a}_3 - z_3 - k_4 z_4}{2}$$

Моделирование переходных процессов при начальном состоянии

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

и параметрах регулятора $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 4$ и $k_4 = 5$ приведено на рисунках 7-9. Можем видеть, что регулятор сводит все ошибки управления к нулю, как и состояния системы x_i при $i \neq 3$. x_2 сходится к единице по причине устройства динамики системы: при $x_1 \to 0$ стабилизирующее управление $a_1(x_1) \to 1$.

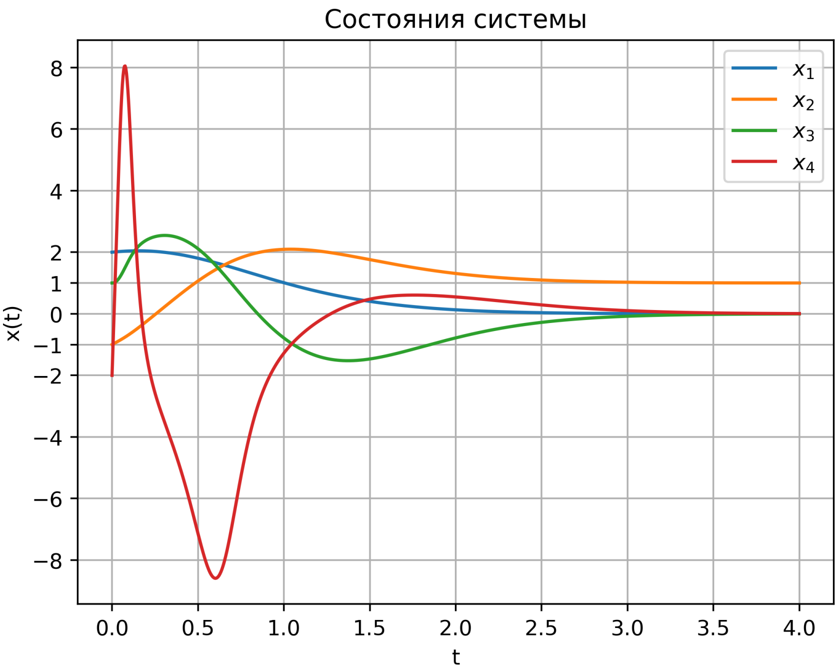

Рис. 7: Графики состояний $x(t)$ системы четвертого порядка

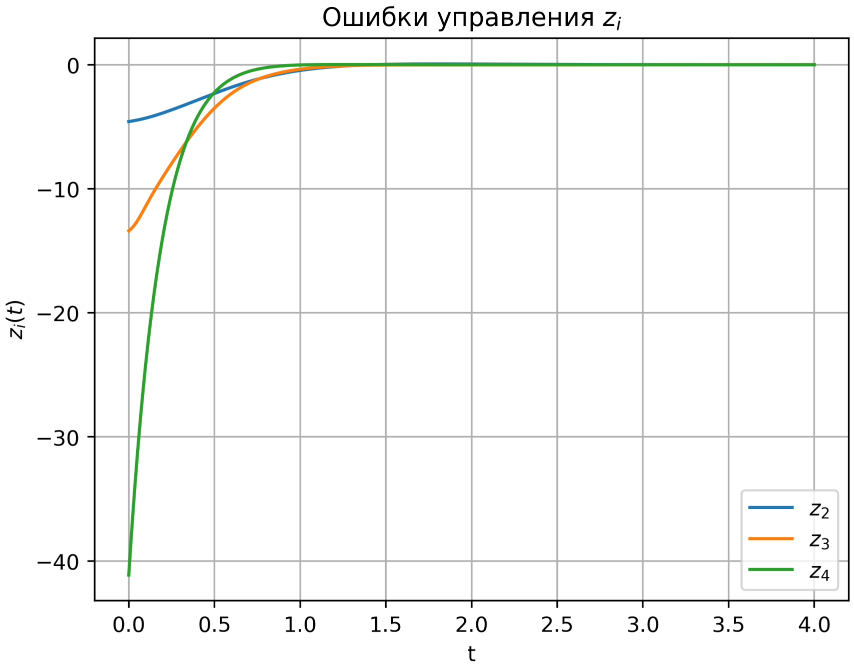

Рис. 8: Графики невязок $z_i = x - a_i$ системы четвертого порядка

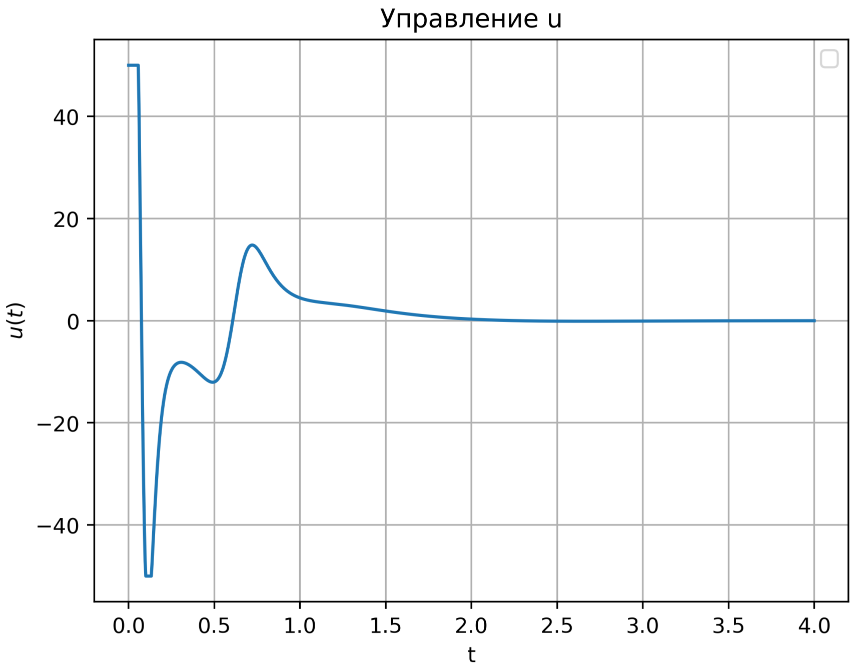

Рис. 9: Графики управления $u(t)$ системы четвертого порядка

Также нулевая точка является в целом асимптотически недостижимой, так как тогда должно выполняться одновременное стремление $x_1 \to 0$ и $x_1 \sim t \to \infty$, что, конечно же, противоречиво.

Отметим также, что точка $x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ является естественной точкой равновесия, а синтезированное вокруг неё стабилизирующее управление корректно работает *глобально*, так как производная функции Ляпунова V_4 отрицательно определена для любых точек, кроме x'. Синтез регулятора проведен корректно.

4 Выводы

В ходе лабораторной работы метод бэкстеппинга успешно применён для синтеза стабилизирующих регуляторов трёх нелинейных систем — от второго до четвёртого порядка. Для каждой системы построена рекурсивная функция Ляпунова и получен закон управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость (во всех случаях — глобальную). Результаты моделирования подтвердили корректность синтеза: ошибки управления сходятся к нулю, а состояния к требуемым (достижимым) точкам равновесия, управляющее воздействие остаётся ограниченным.