МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет ИТМО"
(Университет ИТМО)

Факультет Систем управления
и Робототехники

Отчет № 3
по дисциплине
"Нелинейные системы управления"

по теме:
АНАЛИЗ ЛИАНИРИЗУЕМОСТИ И ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ ПО СОСТОЯНИЮ

Студенты:

Группа № R3480	*И.Е. Мовчан*
Группа № R3436	*З.Р. Ибахаев*
Группа № R3435	*С.Э. Белоус*

Предподаватель:

преподаватель, кандидат технических наук , доцент *К.А. Зименко*

СОДЕРЖАНИЕ

1 АНАЛИЗ ЛИНЕАРИЗУЕМОСТИ ПО ВХОДУ-ВЫХОДУ

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3, \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 x_3 - x_2 + u, \tag{2}$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 + u, \tag{3}$$

$$y = x_3. \tag{4}$$

1.2. Линеаризуемость по входу-выходу

Для проверки линеаризуемости по входу-выходу необходимо вычислить относительную степень системы.

Запишем систему в стандартном виде:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x).$$

Определим функции $f(x)$ и $g(x)$:

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Выходная функция: $h(x) = x_3$.

Для проверки линеаризуемости по входу-выходу необходимо вычислить производные Ли функции $h(x)$ вдоль векторных полей $f(x)$ и $g(x)$:

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2(x) + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3(x),$$

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_1} g_1(x) + \frac{\partial h}{\partial x_2} g_2(x) + \frac{\partial h}{\partial x_3} g_3(x).$$

Так как $h(x) = x_3$, имеем

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x_3} = 1.$$

Подставим в формулы:

$$L_f h(x) = f_3(x) = -x_1, \quad L_g h(x) = g_3(x) = 1 \neq 0.$$

Следовательно,

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x) u = -x_1 + u.$$

Производные Ли:

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = [0, 0, 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Поскольку $L_g h(x) = 1 \neq 0$, относительная степень системы равна $r = 1$.

Вывод: Система является линеаризуемой по входу-выходу с относительной степенью $r = 1$.

1.3. Закон обратной связи

Для линеаризации канала вводим подстановку

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} \left(v - L_f^{\rho} h(x) \right).$$

Поскольку $\rho = 1$, $L_g h(x) = 1$ и $L_f h(x) = -x_1$, получаем

$$u = x_1 + v,$$

тогда

$$\dot{y} = v.$$

Таким образом, связь «вход–выход» полностью линеаризована.

1.4. Нормальная форма

Для системы с относительной степенью $r = 1$ нормальная форма имеет вид:

$$\dot{\xi} = \alpha(\xi, \eta) + \beta(\xi, \eta) u, \tag{5}$$

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta), \tag{6}$$

$$y = \xi \tag{7}$$

где $\xi = h(x) = x_3$, а η - внутренняя динамика.

Выберем координаты:

$$\xi = x_3, \tag{8}$$

$$\eta_1 = x_1, \tag{9}$$

$$\eta_2 = x_2 - x_3 \tag{10}$$

Обратное преобразование:

$$x_1 = \eta_1, \tag{11}$$

$$x_2 = \eta_2 + \xi, \tag{12}$$

$$x_3 = \xi \tag{13}$$

Проверим, что $L_g \eta_i = 0$:

$$L_g \eta_1 = \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} g_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0,$$

$$L_g \eta_2 = \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_3} g_3 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0.$$

Вычислим производные:

$$\dot{\xi} = \dot{x}_3 = -x_1 + u = -\eta_1 + u, \tag{14}$$

$$\dot{\eta}_1 = \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3 = -\eta_1 + (\eta_2 + \xi) - \xi = -\eta_1 + \eta_2, \tag{15}$$

$$\dot{\eta}_2 = \frac{d}{dt}(x_2 - x_3) = \dot{x}_2 - \dot{x}_3 \tag{16}$$

$$= (-x_1 x_3 - x_2 + u) - (-x_1 + u) = -x_1 x_3 - x_2 + x_1 \tag{17}$$

$$= -\eta_1 \xi - (\eta_2 + \xi) + \eta_1 = -\eta_1 \xi - \eta_2 - \xi + \eta_1 \tag{18}$$

Нормальная форма:

$$\dot{\xi} = -\eta_1 + u, \tag{19}$$

$$\dot{\eta}_1 = -\eta_1 + \eta_2, \tag{20}$$

$$\dot{\eta}_2 = -\eta_1 \xi - \eta_2 - \xi + \eta_1 \tag{21}$$

Область определения: Преобразование определено глобально, так как якобиан преобразования:

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta_1, \eta_2)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

имеет определитель $\det J = -1 \neq 0$ для всех $x \in R^3$.

1.5. Минимально-фазовость

Для проверки минимально-фазовости необходимо исследовать нулевую динамику системы.

Нулевая динамика получается при $y = \xi = 0$ и $u = \eta_1$ (чтобы удерживать $\xi \equiv 0$ из уравнения $\dot{\xi} = -\eta_1 + u$):

$$\dot{\eta}_1 = -\eta_1 + \eta_2, \tag{22}$$

$$\dot{\eta}_2 = -\eta_2 + \eta_1 \tag{23}$$

Матрица системы нулевой динамики:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Характеристический многочлен:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = (\lambda + 1)^2 - 1 = \lambda(\lambda + 2)$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$

Вывод: Поскольку одно из собственных значений равно нулю, нулевые динамики не асимптотически устойчивы и система не является минимально-фазовой (нулевая динамика не экспоненциально устойчива из-за нулевого собственного значения).

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1 x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_1 x_2 - 2x_3. \end{cases}$$

Предполагается, что состояние $x = (x_1, x_2, x_3)$ полностью измеримо.

2.2. Преобразование координат

Выполним преобразование

$$s_1 = x_3 - \frac{x_1^2}{2}, \quad s_2 = x_1, \quad s_3 = x_2.$$

2.3. Динамика в новых координатах

$$\dot{s}_1 = \dot{x}_3 - x_1 \dot{x}_1 = (x_1 + x_1 x_2 - 2x_3) - x_1(-x_1 + x_2) \tag{24}$$

$$= x_1^2 + x_1 - 2x_3 = s_2 - 2s_1, \tag{25}$$

$$\dot{s}_2 = \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 = -s_2 + s_3, \tag{26}$$

$$\dot{s}_3 = \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1 x_3 + u \tag{27}$$

$$= s_2 - s_3 - s_2 \left(s_1 + \frac{s_2^2}{2} \right) + u \tag{28}$$

$$= s_2 - s_3 - s_1 s_2 - \frac{s_2^3}{2} + u. \tag{29}$$

Итак,

$$\dot{s}_1 = s_2 - 2s_1, \tag{30}$$

$$\dot{s}_2 = -s_2 + s_3, \tag{31}$$

$$\dot{s}_3 = s_2 - s_3 - s_1 s_2 - \frac{s_2^3}{2} + u. \tag{32}$$

2.4. Синтез управления

Выберем управление

$$u = -s_2 + s_3 + s_1 s_2 + \frac{s_2^3}{2} + v.$$

Тогда

$$\dot{s}_1 = s_2 - 2s_1, \quad \dot{s}_2 = -s_2 + s_3, \quad \dot{s}_3 = v,$$

то есть получена линейная система

$$\dot{s} = As + Bv, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.5. Управляемость

$$H = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det H = 1 \neq 0,$$

следовательно, пара (A, B) полностью управляема — можно расставить корни произвольно.

2.6. Замкнутая система и выбор усилений

Положим $v = -Ks$, где $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$. Тогда

$$A - BK = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix}.$$

Базовый выбор - взять $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ с $\alpha > 0$.
Тогда

$$\sigma(A - BK) = \{-2, -1, -\alpha\},$$

и система в координатах s экспоненциально устойчива.