

НАУЧНО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по лабораторной работе №2
Преобразование Фурье

Выполнил студент группы Р3380
Преподаватели

Мовчан И. Е.
Пашенко А.В., Перегудин А. А.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Вещественное	2
1.1 Прямоугольная функция	2
1.2 Треугольная функция	5
1.3 Кардинальный синус	8
1.4 Функция Гаусса	10
1.5 Двустороннее затухание	13
2 Комплексное	16
3 Музыкальное	19
4 Общие выводы	21
5 Приложение	22

1 Вещественное

Будем рассматривать функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, а использовать универсальное преобразование Фурье к угловой частоте ω , то есть

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

где $\hat{f}(\omega)$ задаёт Фурье-образ. Рассмотрим каждую по отдельности.

1.1 Прямоугольная функция

Функция имеет следующий вид ($a, b > 0$):

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| > b. \end{cases}$$

Её вид представляет из себя П-образный симметричный «горбик» (собственно, именно поэтому она так и называется). Но об этом всём после, для начала же найдём Фурье-образ нашей функции:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b a e^{-i\omega t} dt = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} \Big|_{t=-b}^{t=b} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{i\omega} = \\ &= a \sqrt{\frac{2 \sin(\omega b)}{\pi \omega}} = ab \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sinc}(\omega b) = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(wb). \end{aligned}$$

Параметр ab в нашем случае отвечает за амплитуду колебаний графика Фурье-образа (чем он больше, тем выше «размах», например, в 0), b - за частоту (чем больше b , тем чаще происходят сами колебания, присутствующие в знаменателе, синусе). Данное подтверждает и графиками на рисунках 1 и 2 при параметрах $a = 1$ и $b = 1$, $a = 1$ и $b = 2$, $a = 2$ и $b = 1$. При вариации a вдвое увеличивись

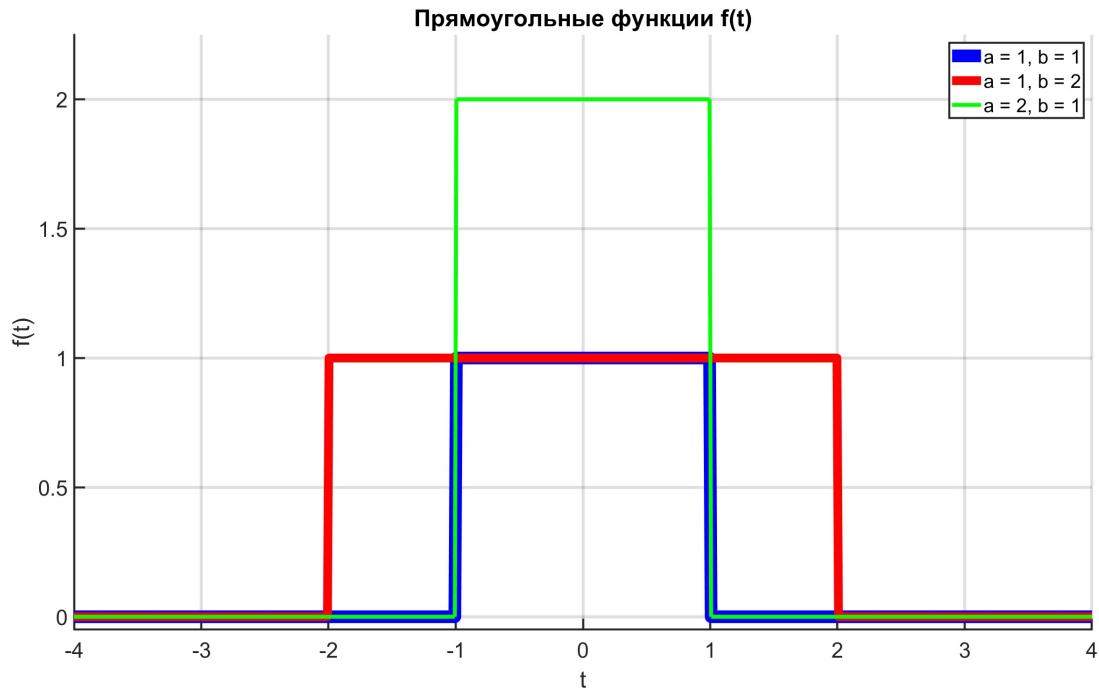


Рис. 1: Сравнение прямоугольных функций

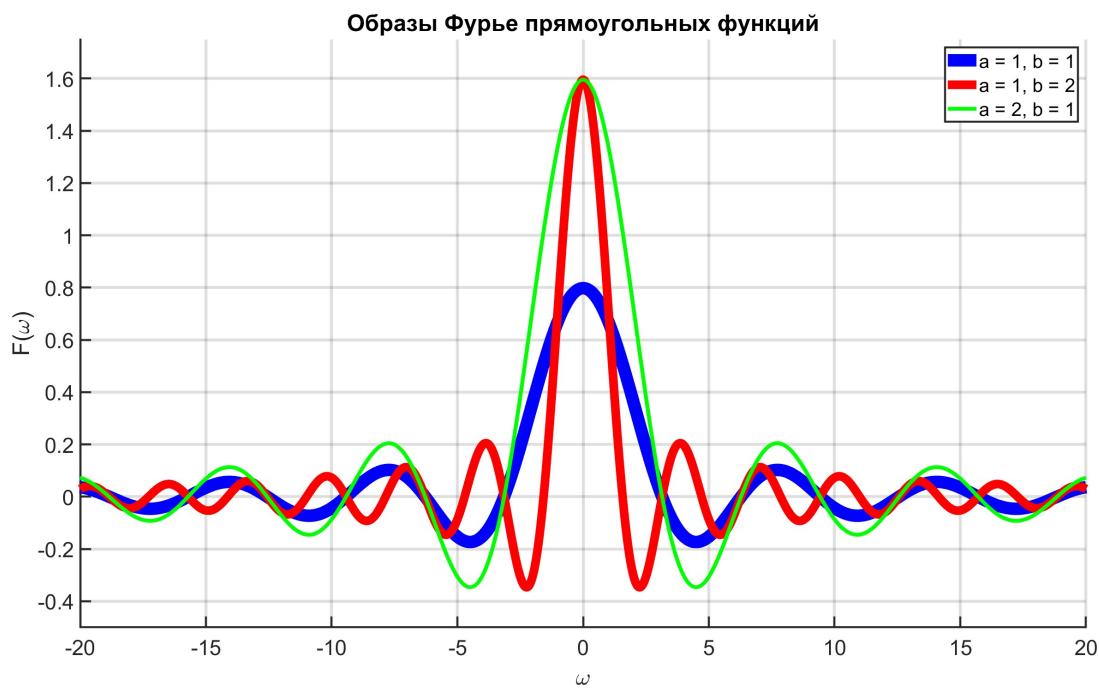


Рис. 2: Сравнение образов Фурье прямоугольных функций

значения как во временной оси, так и в частотной (при этом частота Фурье-образа, как и ожидалось, никак не изменилась), та же вариация, но параметра b , увеличила как амплитуду, так и частоту спектра, а также ширину задаваемого сигнала по времени.

С помощью свойств преобразования Фурье данные явления можно объяснить следующим образом (вторая формула демонстрирует принцип неопределённости и говорит о том, что сужение временной области в b раз даёт расширение частотной с тем же коэффициентом, к тому же увеличивает ещё амплитуду образа; и наоборот, расширение временной области даёт сужение частотной, то есть в нашем случае увеличением параметра b мы добились расширения по времени, а значит и сужения частотной области, увеличения частоты sinc и его амплитуды; F - оператор преобразования Фурье):

$$F\{af(t)\} = aF\{f(t)\}, \quad F\{f(bt)\} = \frac{1}{b}\hat{f}\left(\frac{\omega}{b}\right), \quad \hat{f}(\omega) = F\{f(t)\}.$$

Проверим также равенство Парсеваля, то есть выполняется ли

$$E_{time} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\{x(t)\}|^2 d\omega = E_{freq}.$$

Будем делать это численными способами, для каждого из наборов параметров, используя функцию **trapz** в matlab:

- $a = 1, b = 1$: $E_{time} = 2.0021, E_{freq} = 1.9975$;
- $a = 1, b = 2$: $E_{time} = 4.0042, E_{freq} = 3.9975$;
- $a = 1, b = 1$: $E_{time} = 8.0083, E_{freq} = 7.9901$.

Можно видеть, что всё выполнилось, а значит было действительно использовано унитарное преобразование Фурье (так как оно сохраняет «энергию» без необходимости дополнительного масштабирования). Небольшие различия можно скинуть на аппаратную часть, так как исследовались лишь приближения интегралов, ограниченные как по шагу, так и по исследуемому промежутку, а не они сами.

1.2 Треугольная функция

Пусть задана функция ($a, b > 0$)

$$f(t) = \begin{cases} a - |at/b|, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| > b; \end{cases} = \begin{cases} a - a|t|/b, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| > b. \end{cases}$$

Как и прежде, найдём её преобразование. Поскольку исследуемая функция чётная, её образ Фурье выражается через только через преобразование, использующее косинус, а рассматривать можем только положительную временную ось, предварительно умножив на 2:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b \left(a - \frac{a}{b}t \right) \cos(\omega t) dt = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b \left(1 - \frac{t}{b} \right) \cos(\omega t) dt.$$

Раскроем интеграл как

$$\int_0^b \left(1 - \frac{t}{b} \right) \cos(\omega t) dt = \int_0^b \cos(\omega t) dt - \frac{1}{b} \int_0^b t \cos(\omega t) dt$$

Первый случай совсем простой:

$$\int_0^b \cos(\omega t) dt = \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \Big|_0^b = \frac{\sin(\omega b)}{\omega}$$

А вот со вторым придётся повозиться, используя интегрирование по частям (пусть $u = t$, $dv = \cos(\omega t) dt$, тогда $du = dt$, $v = \sin(\omega t)/\omega$):

$$\int_0^b t \cos(\omega t) dt = \frac{t \sin(\omega t)}{\omega} \Big|_0^b - \int_0^b \frac{\sin(\omega t)}{\omega} dt = \frac{t \sin(\omega t)}{\omega} \Big|_0^b + \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2} \Big|_0^b$$

Откуда:

$$\int_0^b t \cos(\omega t) dt = \left(\frac{t \sin(\omega t)}{\omega} + \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2} \right) \Big|_0^b = \frac{b \sin(\omega b)}{\omega} + \frac{\cos(\omega b) - 1}{\omega^2}$$

В итоге интеграл сводится к следующему:

$$\int_0^b \left(1 - \frac{t}{b} \right) \cos(\omega t) dt = \frac{\sin(\omega b)}{\omega} - \frac{1}{b} \left(\frac{b \sin(\omega b)}{\omega} + \frac{\cos(\omega b) - 1}{\omega^2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - \cos(\omega b)}{b\omega^2} = \frac{2 \sin^2(\omega b/2)}{b\omega^2} = \frac{\sin^2(\omega b/2)}{\omega^2 b/2} = \frac{b}{2} \cdot \frac{\sin^2(\omega b/2)}{\omega^2 b^2/4} = \\
 &= \frac{b}{2} (\operatorname{sinc}^2(\omega b/2)).
 \end{aligned}$$

И тогда конечный интеграл принимает форму

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{b}{2} (\operatorname{sinc}^2(\omega b/2)) = \frac{ab}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}^2(wb/2).$$

Действие параметров a и b схоже с ситуацией прямоугольных функций. Посмотрим на это, построив графики треугольных во временной области и соответствующих им Фурье-образов в частотной при все тех же наборах параметров $a = 5$ и $b = 5$, $a = 5$ и $b = 6$, $a = 6$ и $b = 5$. Результаты показаны на рисунках 3 и 4.

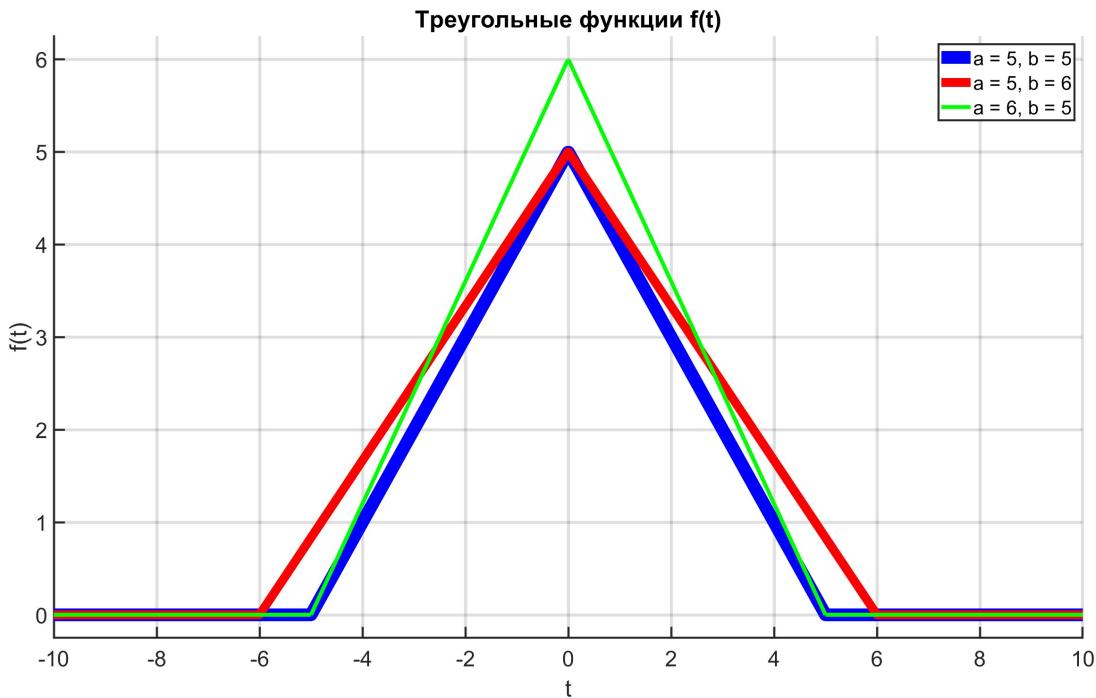


Рис. 3: Сравнение треугольных функций

Можем видеть, что параметр a масштабирует амплитуду функции и её образа (возрастание одного влечёт возрастание другого).

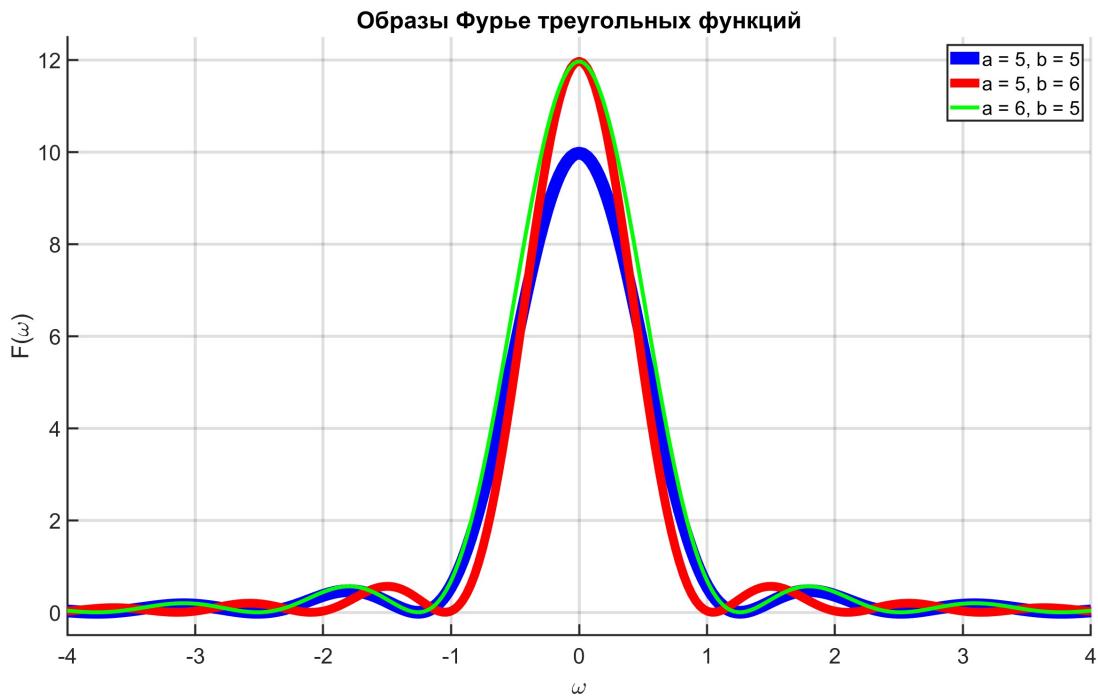


Рис. 4: Сравнение образов Фурье треугольных функций

Параметр b же влияет на ширину треугольной функции: при увеличении b : $f(t)$ становится шире и ниже по высоте, а $\hat{f}(\omega)$ — уже и выше, а при уменьшении $f(t)$ становится уже и выше, спектр $\hat{f}(\omega)$ — шире и ниже (здесь аналогично предыдущему пункту работает принцип неопределённости — сжатие временной области влечёт растягивание частотной и наоборот). Данное можно также записать через уже знакомые нам свойства преобразований:

$$F\{af(t)\} = aF\{f(t)\}, \quad F\{f(bt)\} = \frac{1}{b}\hat{f}\left(\frac{\omega}{b}\right), \quad \hat{f}(\omega) = F\{f(t)\}.$$

Теперь проверим равенство Парсеваля, формула уже была дана, так что приводить её заново не будем:

- $a = 5, b = 5$: $E_{time} = 83.3332, E_{freq} = 83.3333$;
- $a = 5, b = 6$: $E_{time} = 99.9999, E_{freq} = 100.0000$;
- $a = 6, b = 5$: $E_{time} = 119.9998, E_{freq} = 120.0000$.

Значения очень близки, так что теорема о сохранении норм, квадраты которых мы и сравниваем, работает, и равенство достигается!

1.3 Кардиальный синус

Теперь рассмотрим функцию (по прежнему $a, b > 0$)

$$f(t) = a \cdot \text{sinc}(bt) = a \cdot \frac{\sin(bt)}{bt}.$$

Известно, что образ Фурье кардиального синуса (в этом определении, без обычно вводящихся коэффициентов π в аргументе) имеет следующий вид:

$$F \left\{ b \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sinc}(bt) \right\} = \Pi \left(\frac{\omega}{2b} \right),$$

где прямоугольная функция Π определяется как:

$$\Pi \left(\frac{\omega}{2b} \right) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq b, \\ 0, & |\omega| > b. \end{cases}$$

Откуда по свойствам вынесения постоянной можно получить:

$$F \{ \text{sinc}(bt) \} = \frac{1}{b} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Pi \left(\frac{\omega}{2b} \right),$$

А учитывая амплитудный коэффициент a , имеем:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Pi \left(\frac{\omega}{2b} \right).$$

Ситуация с параметрами здесь чуть иная (преимущественно в Фурье-образе), поэтому давайте сперва зададимся ими и проанализируем графики при вариации каждого из них, чтобы точно понять, что же в нашем случае происходит. Итак, графики самих функций

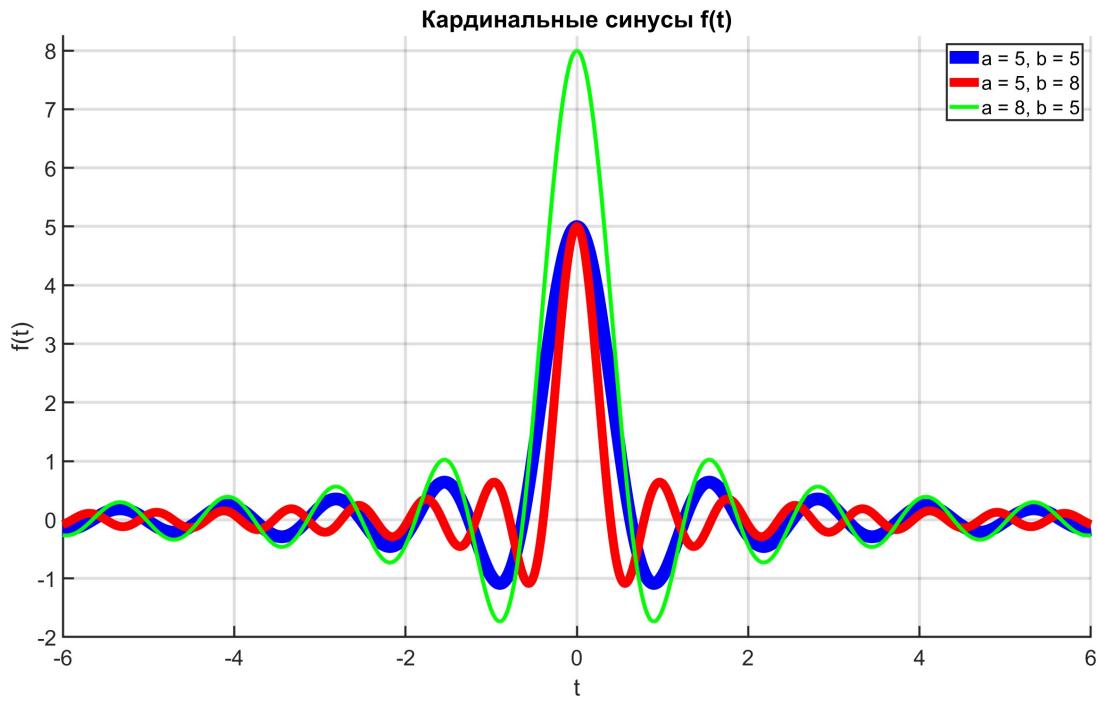


Рис. 5: Сравнение кардинальных синусов во временной области

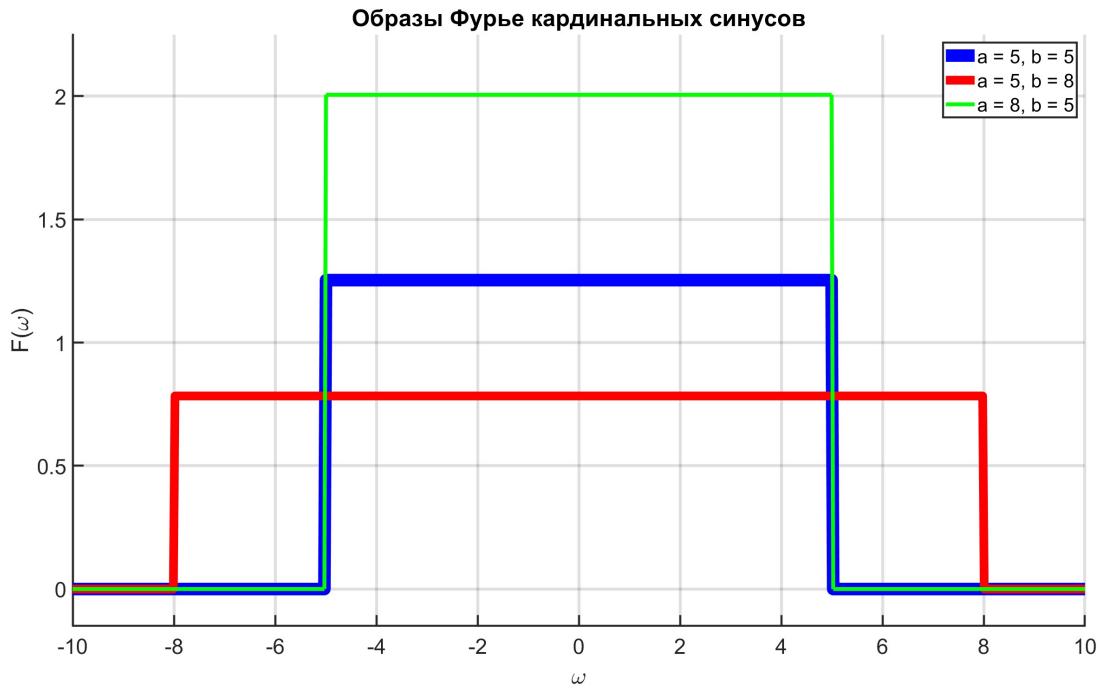


Рис. 6: Сравнение образов Фурье кардинальных синусов

и их спектров при параметрах $a = 5$ и $b = 5$, $a = 5$ и $b = 8$, $a = 8$ и $b = 5$ изображены на рисунках 5 и 6.

Получается, параметр a масштабирует амплитуду функции $f(t)$ и $\hat{f}(\omega)$ линейно. b же обратно влияет на ширину функции во времени (увеличивает её частоту при возрастании) и прямо пропорционально в спектре (опять-таки сужение одного растягивает другое), также при увеличении параметра b снижается амплитуда получающейся при преобразовании прямоугольной функции. Всё это опять-таки можно описать с помощью формул свойств (второе здесь даже работает более явно, чем в предыдущих случаях, где нужно было ещё покопаться, чтобы найти его):

$$F\{af(t)\} = aF\{f(t)\}, \quad F\{f(bt)\} = \frac{1}{b}\hat{f}\left(\frac{\omega}{b}\right), \quad \hat{f}(\omega) = F\{f(t)\}.$$

Проверка равенства Парсеваля осуществляется всё тем же способом, результаты ниже (всё сошлось до машинной точности):

- $a = 5, b = 5$: $E_{time} = 15.6980, E_{freq} = 15.7411$;
- $a = 5, b = 8$: $E_{time} = 9.8136, E_{freq} = 9.8112$;
- $a = 8, b = 5$: $E_{time} = 40.1868, E_{freq} = 40.2971$.

Вообще, вся эта ситуация очень связана с прямоугольной функцией, рассмотренной ранее, так как одно переходит в другое и обратно. Соответственно, наблюдаются и похожие общие для всех преобразований явления и проявления свойств.

1.4 Функция Гаусса

Пусть дана функция при положительных параметрах a и b

$$f(t) = ae^{-bt^2}.$$

Подставим $f(t)$ в формулу унитарного преобразования Фурье к угловой частоте, приведенную в начале (также вынесем a):

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt^2 - i\omega t} dt.$$

Преобразуем выражение, заданное в экспоненте:

$$-bt^2 - i\omega t = -b \left(t^2 + \frac{i\omega}{b}t \right) = -b \left(t + \frac{i\omega}{2b} \right)^2 + \frac{\omega^2}{4b}.$$

Тогда имеем:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(t+\frac{i\omega}{2b})^2} dt.$$

Теперь заметим, что смещение на комплексное число никак не влияет на значение оставшегося интеграла (так как мы всегда можем занести его в dt в виде постоянной), и следовательно, пользуясь знаниями из теории вероятности, получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(t+\frac{i\omega}{2b})^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{b}}.$$

А итоговое перепишется в виде:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{b}} = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}} = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\left(\frac{\omega}{2\sqrt{b}}\right)^2}.$$

Рассмотрим три набора параметров: $a = 1$ и $b = 1$, $a = 1$ и $b = 4$, $a = 2$ и $b = 1$. Соответствующие им функция задаются уж очень красиво (по моим меркам), так что приведём их отдельно:

- при $a = 1$ и $b = 1$: $f(t) = e^{-t^2}$, а $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4}$;
- при $a = 1$ и $b = 4$: $f(t) = e^{-4t^2}$, а $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2} e^{-\omega^2/16}$;
- при $a = 2$ и $b = 1$: $f(t) = 2e^{-t^2}$, а $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2} e^{-\omega^2/4}$.

Их графики по времени и образа по угловой частоте изображены на рисунках 7 и 8. Сравнение наборов 1 и 2 даёт типичное проявление принципа неопределённости Фурье - при увеличении b получаем более узкую по времени функцию, зато широкую по частоте (а также с меньшей амплитудой), то есть b управляет шириной функции.

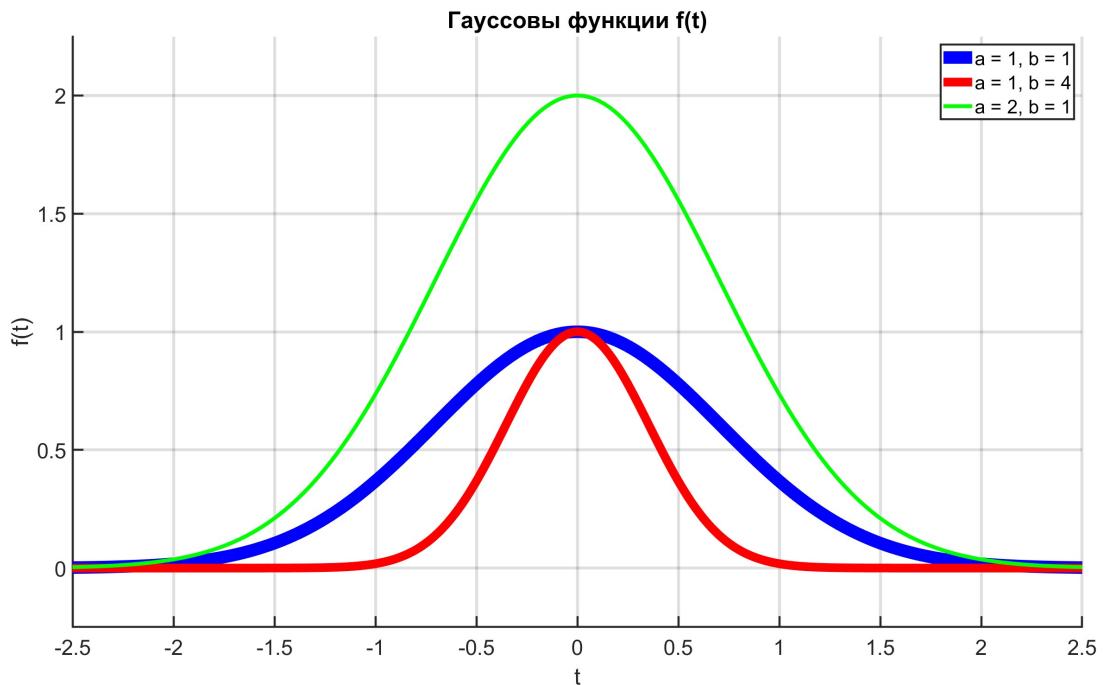


Рис. 7: Сравнение Гауссовых функций во временной области

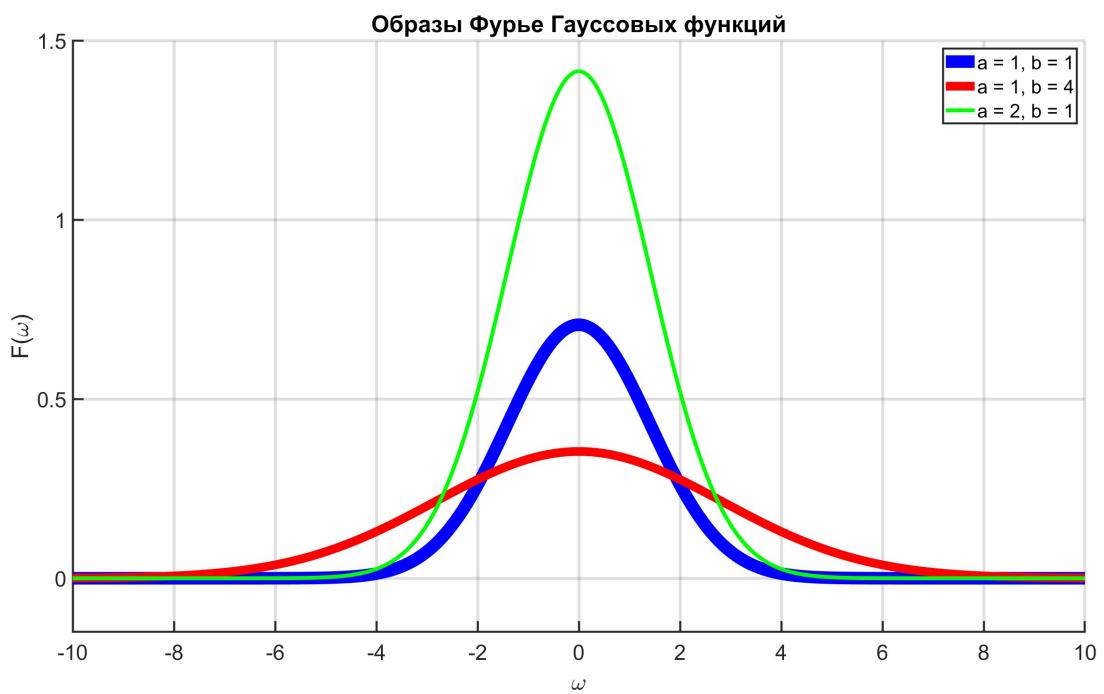


Рис. 8: Сравнение образов Фурье функций Гаусса

Сравнение же 1 и 3 позволяет понять роль параметра a - он лишь увеличивает амплитуды, никак не воздействуя на быстроту затухания. В общем, всё согласуется с уже приведёнными свойствами Фурье: широкие по времени функции переходят в сжатые по частоте, а амплитуда может быть вынесена по свойствам интеграла, увеличив его значение соответствующим образом.

Проверим равенство Парсеваля для всех случаев:

- $a = 1, b = 1$: $E_{time} = 1.2533, E_{freq} = 1.2533$;
- $a = 1, b = 4$: $E_{time} = 0.6267, E_{freq} = 0.6267$;
- $a = 2, b = 1$: $E_{time} = 5.0133, E_{freq} = 5.0133$.

Все значения получились равны (конечно, с точностью до округления)! Скорее всего, это связано с тем, что функция очень гладкая, быстро затухает, а её основные не близкие к нулю значения расположены возле 0 (соответственно, необходимо брать меньшую область по времени для интегрирования).

Вообще, исследуемая функция известна нам с теории вероятности. Её замечательное свойство (проявляющееся у очень немногих) состоит в том, что образ Фурье является её же «сородичем», то есть тоже Гауссовой функцией. А при определённых параметрах (например, при $a = 1$, а $b = 1/2$) она может перейти сама в себя!

1.5 Двустороннее затухание

Наконец зададимся функцией при $a > 0, b > 0$

$$f(t) = ae^{-b|t|}.$$

Найдём её Фурье-образ:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-b|t|} e^{-i\omega t} dt$$

Раскрывая модуль, разделим интеграл по областям:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{bt} e^{-i\omega t} dt + \int_0^\infty e^{-bt} e^{-i\omega t} dt \right)$$

Преобразуем каждый из кусочков и найдём спектр:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(b-i\omega)t} dt + \int_0^\infty e^{-(b+i\omega)t} dt \right) = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\left(\frac{e^{(b-i\omega)t}}{b-i\omega} \right) \Big|_{-\infty}^0 + \left(\frac{-e^{-(b+i\omega)t}}{b+i\omega} \right) \Big|_0^\infty \right) = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(b+i\omega) + (b-i\omega)}{b^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2b}{b^2 + \omega^2} = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(b^2 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

Теперь аналогично всем предыдущим пунктам зададимся положительными наборами чисел: $a = 1$ и $b = 1$, $a = 1$ и $b = 4$, $a = 2$ и $b = 1$. Все необходимые графики приведены на рисунках 9 и 10. При увеличении b функция $f(t)$ становится уже (более сконцентрированной вокруг $t = 0$), спектр становится шире. Параметр a влияет только на амплитуду причем прямо и линейно (соответственно, чем большие значения a мы берём, тем большие амплитуды выходят).

Результат интересен также и тем, что из прерывной функции получилась гладкая (так как интегралу как математическому объекту безразлично на значение в одной точке, важна её окрестность). Если же не брать во внимание точку 0, то $f(t)$ получается абсолютно гладкой, соответственно, её образ Фурье убывает очень быстро (ровно такая же ситуация возникала и при остальных функциях - это связь гладкости и скорости убывания, и данное работает в две стороны).

Таким образом, были исследованы влияния параметров при каждом случае задания функции $f(t)$, проверены выполнения некоторых свойств преобразования Фурье, доказано их прямое существование на примерах.

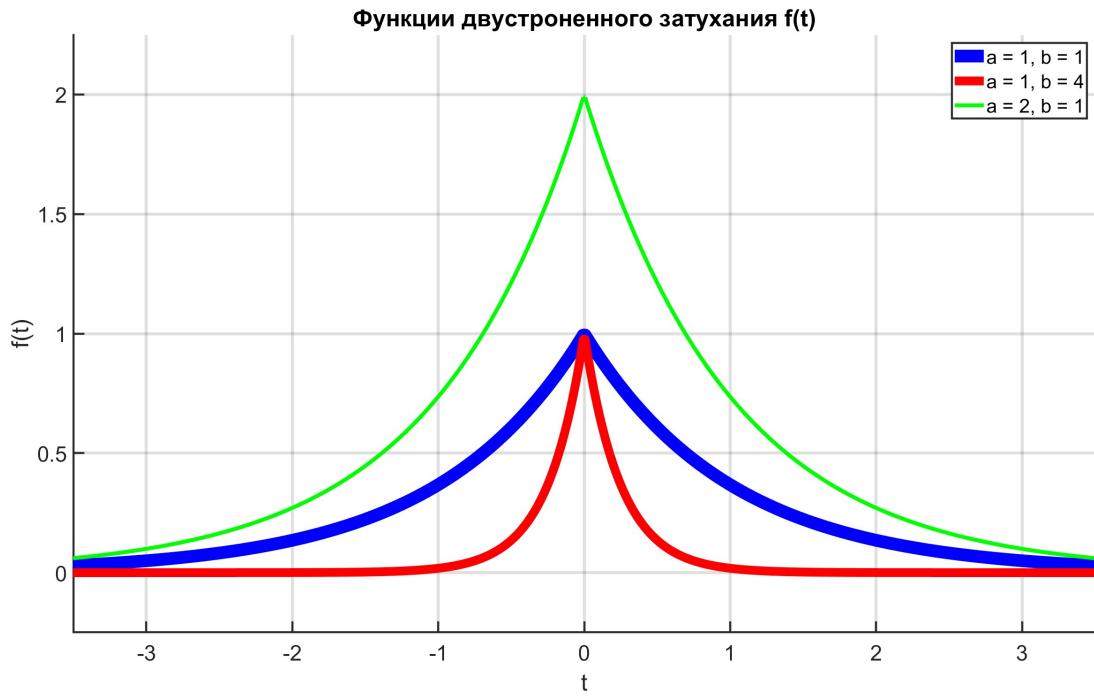


Рис. 9: Сравнение функций двустороннего затухания во временной области

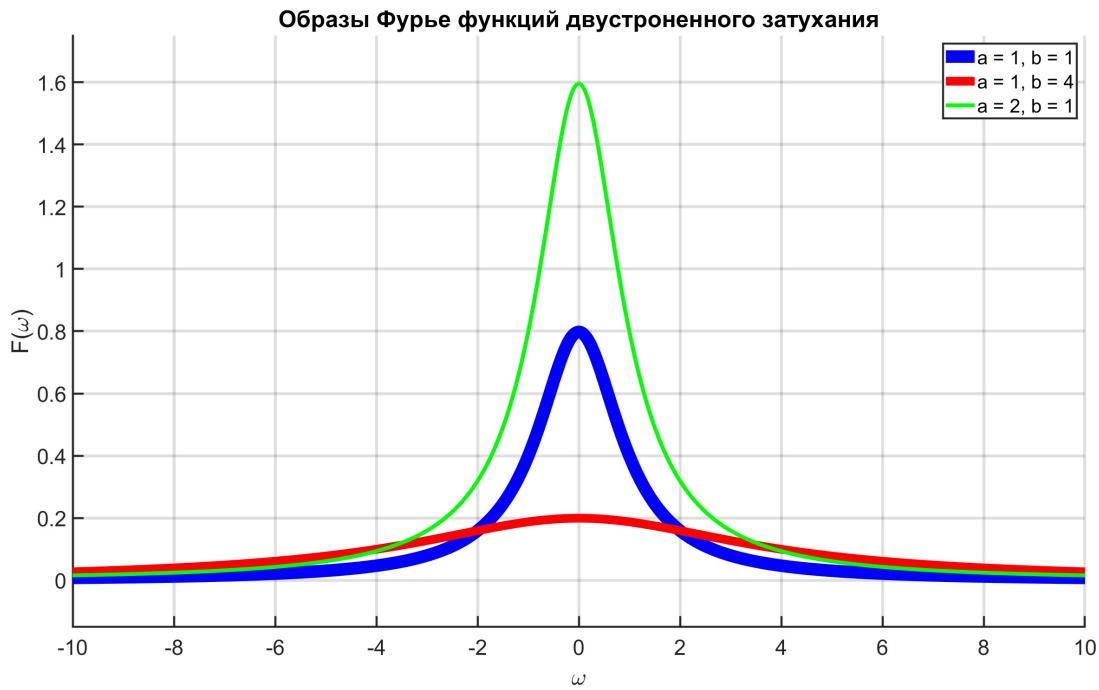


Рис. 10: Сравнение образов Фурье функций двустороннего затухания

Проверка равенства Парсеваля для случая двустороннего затухания приведена ниже (всё выполнилось, причём с большой точностью, аналогично ситуации с Гауссовой функцией):

- $a = 1, b = 1$: $E_{time} = 1.0000, E_{freq} = 1.0000$;
- $a = 1, b = 4$: $E_{time} = 0.2499, E_{freq} = 0.2500$;
- $a = 2, b = 1$: $E_{time} = 3.9999, E_{freq} = 4.0000$.

2 Комплексное

Выберем Гауссову функцию $f(t)$ с параметрами $a = 1$ и $b = 1$ и рассмотрим сдвинутую функцию $g(t) = f(t + c)$ с параметром c , то есть зададимся

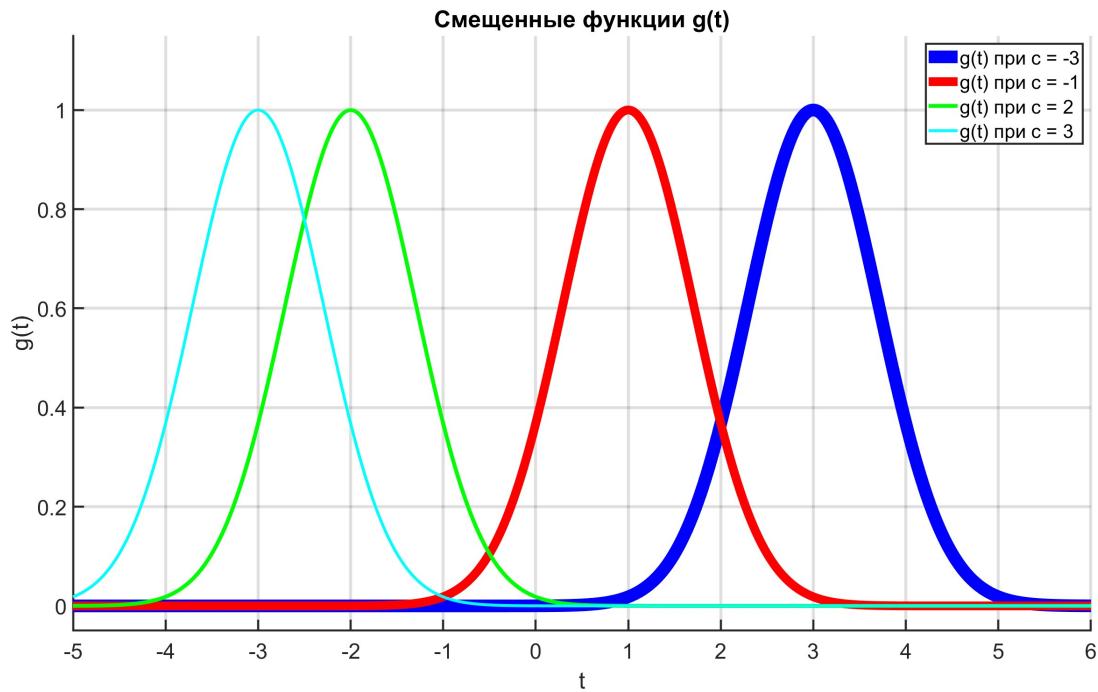
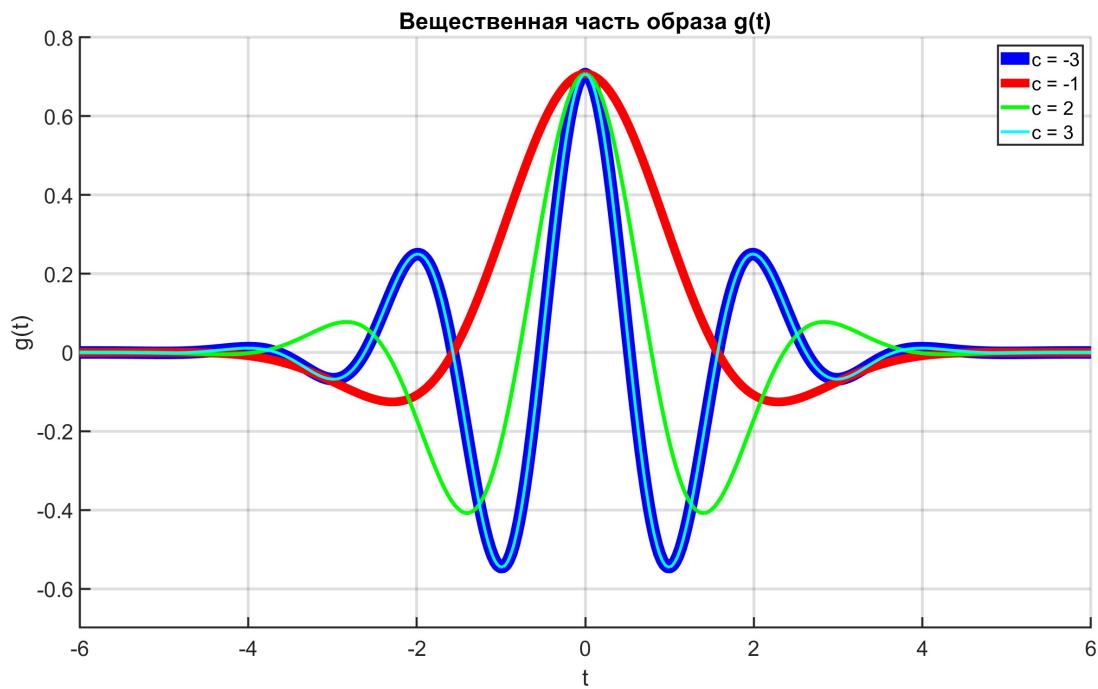
$$g(t) = e^{-(t+c)^2}.$$

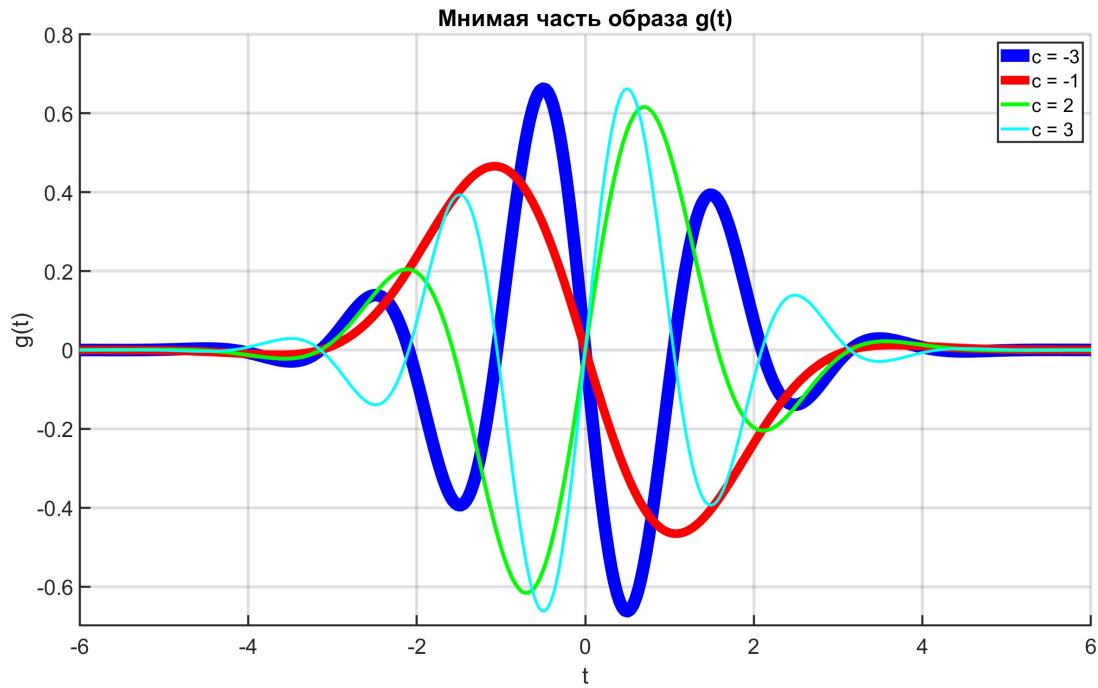
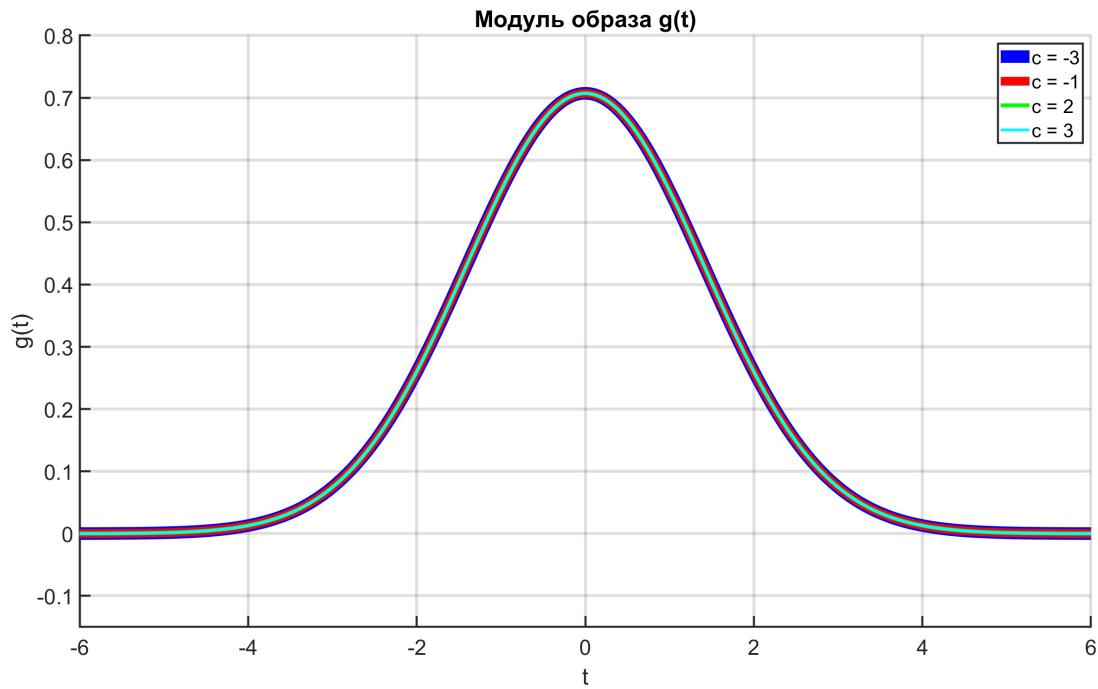
Аналитический вывод её образа следующий (обозначим $u = t + c$, тогда $t = u - c$, и $dt = du$ и сделаем замену переменной):

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+c)^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} e^{-i\omega(u-c)} du = \\ &= \frac{e^{i\omega c}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} e^{-i\omega u} du = e^{i\omega c} \cdot \hat{f}(\omega) = \frac{e^{i\omega c}}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4} = \\ &= \frac{e^{-\omega^2/4}}{\sqrt{2}} (\cos(\omega c) + i \sin(\omega c)).\end{aligned}$$

То есть результат представляет из себя уже комплексную функцию, хотя работали мы с вещественной. Для более детального изучения поэкспериментируем с параметром $c \neq 0$: выберем 4 значения $c_1 = -3, c_2 = -1, c_3 = 2, c_4 = 3$ и построим графики оригиналов $g(t)$, компонент Фурье-образов $\operatorname{Re}(\hat{g}(\omega)), \operatorname{Im}(\hat{g}(\omega))$ и модулей $|\hat{g}(\omega)|$ (соответственно, приведены на рисунках 11, 12, 13 и 14).

Можно видеть, что параметр c сдвигает функцию по оси времени влево (при $c > 0$) или вправо ($c < 0$). Причем тем больше, чем выше значение. Амплитуда и форма при этом остаются теми же.

Рис. 11: Сравнение функций $g(t)$ при разных c Рис. 12: Сравнение вещественных частей образа $g(t)$ при разных c

Рис. 13: Сравнение мнимых частей образа $g(t)$ при разных c Рис. 14: Сравнение модулей образов $g(t)$ при разных c

Вещественные и мнимые части образа Фурье, как можно было понять, тоже зависят от введённого параметра. При больших $|c|$ наблюдаем более сильные колебания в обоих частях, ведь частота синуса и косинуса прямо зависит от c (мнимая экспонента вносит более серьёзный вклад около 0). Также, так как вещественная часть чётная (произведение косинуса на чётную функцию), то и результаты при $c = \pm 3$ получились идентичными, а вот в мнимой части наоборот - противоположными по знаку.

Модули функций при всём этом остались теми же, ведь основное тригонометрическое тождество никуда не пропадало, а амплитуда экспоненты $e^{i\omega c}$ равна 1 (то есть модуль не зависит от c и всегда будет равен исходно взятой $\hat{f}(\omega) = e^{-\omega^2/4}/\sqrt{2}$).

3 Музыкальное

Пришло время практики! Загрузим запись музыкального аккорда из предложенных данных (рисунок 15).

А после найдём его спектр (рисунок 16). Как известно, преобразование Фурье помогает разложить сложное на гармоники - а в нашем случае поможет понять, что за аккорд сейчас играет. Итак, в модуле образа найдём пики (чем они больше, тем большее участие ноты приняла в образовании), аргументы которых как раз и будут давать нужные частоты, соответствующие нотам. Выделенные значения, их частоты и приближенные ноты:

- $v_1 = 130, a_1 = 0.0006, \text{C3};$
- $v_2 = 164, a_2 = 0.0014, \text{E3};$
- $v_3 = 196, a_3 = 0.0036, \text{G3};$
- $v_4 = 232, a_4 = 0.0009, \text{ля-диез малой октавы};$
- $v_5 = 262, a_5 = 0.0015, \text{C4};$
- $v_6 = 294, a_6 = 0.0018, \text{D4};$

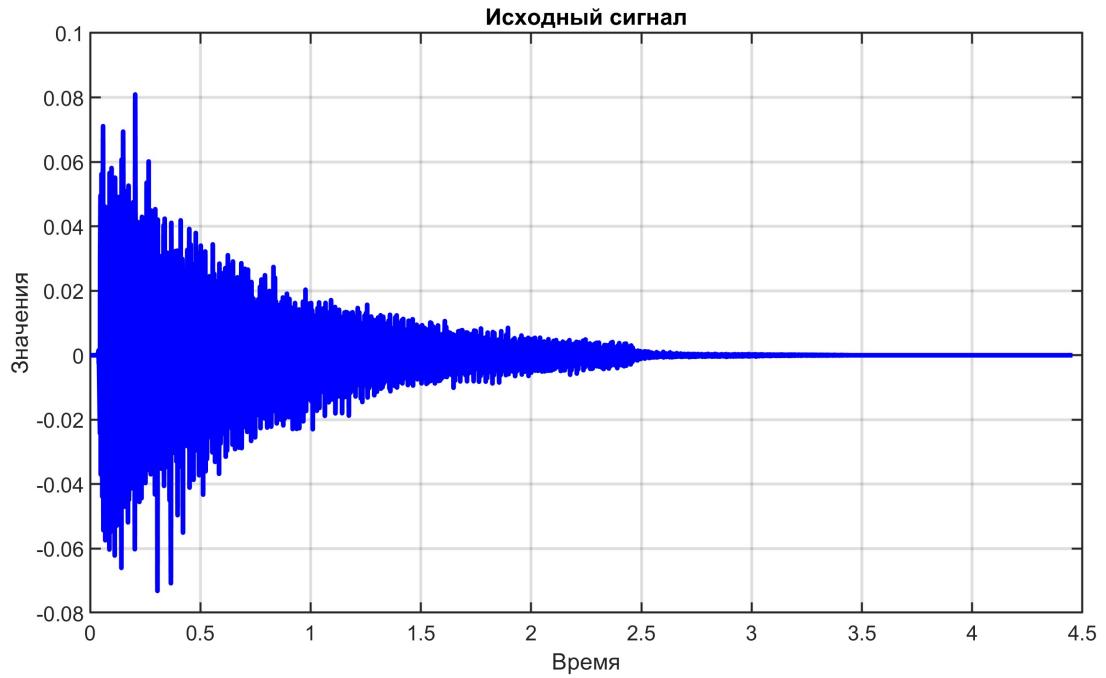


Рис. 15: Запись аккорда

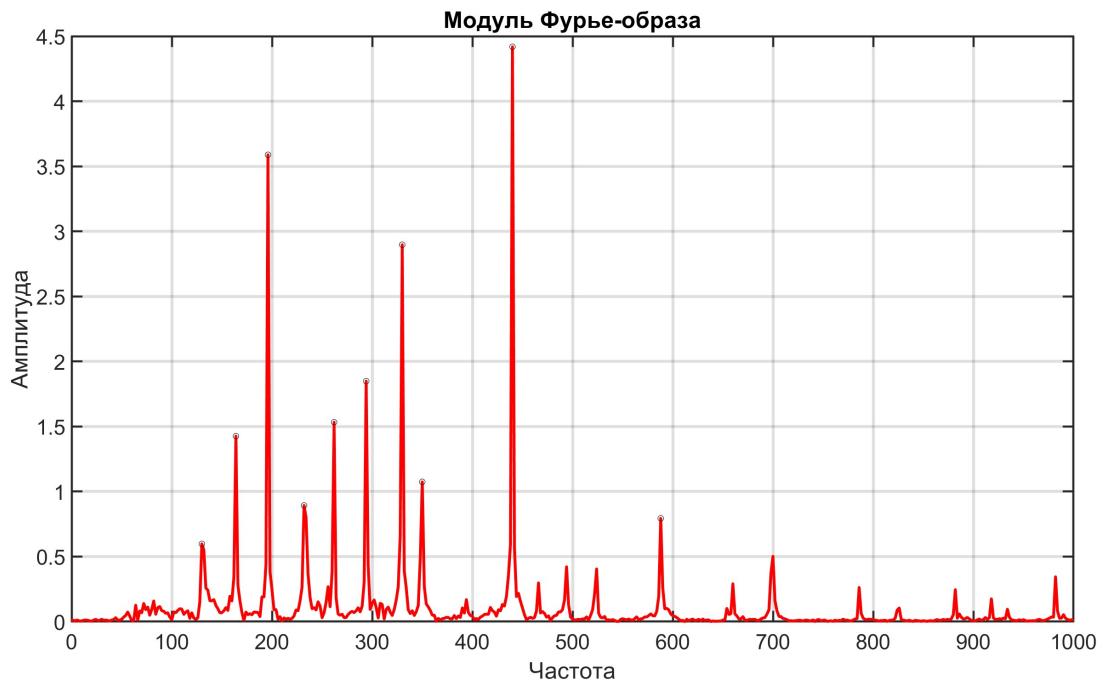


Рис. 16: Модуль образа Фурье аккорда

- $v_7 = 330, a_7 = 0.0029, \text{E}4;$
- $v_8 = 350, a_8 = 0.0011, \text{F}4;$
- $v_9 = 440, a_9 = 0.0044, \text{A}4;$
- $v_{10} = 588, a_{10} = 0.0008, \text{D}5;$

Сопоставление с таблицей нот-частот показало, что сигнал представляет собой Dm11 аккорд (D–F–A–C–E–G) с возможной добавкой из С мажора (C–E–G).

4 Общие выводы

В ходе лабораторной работы были исследованы преобразования Фурье для ряда вещественных функций: прямоугольной, треугольной, кардиального синуса, функции Гаусса и функции с двусторонним экспоненциальным затуханием. Для каждой из них были получены образы, построены графики при различных наборах параметров a и b , исследовано их влияние, а также проверено выполнение равенства Парсеваля. Во втором задании было изучено влияние временного сдвига на спектр функции, проанализированы изменения модуля, вещественной и мнимой частей образа при изменении параметра c . В музыкальной части по построенному спектру записи, были получены основные ноты и аккорды, которые её образуют.

5 Приложение

Листинг 1: Код для вещественного

```

1 T = 100;
2 N = 16384;
3 t = linspace (-T, T, N);
4 dt = t(2) - t(1);
5 omega = 2*pi*(-N/2:N/2-1)/(N*dt);
6
7 params = [1, 1; 1, 4; 2, 1];
8 colors = ['b', 'r', 'g'];
9 widths = [13, 9, 4];
10
11 ...
12
13 a = params(i,1);
14 b = params(i,2);
15 %f_t = a * double(abs(t) ≤ b);
16
17 %f_t = zeros(size(t));
18 %f_t(abs(t) ≤ b) = a * (1 - abs(t(abs(t) ≤ b)) / b);
19
20 %f_t = a * sinc(b * t/pi);
21
22 %f_t = a * exp(-b * t.^2);
23
24 f_t = a * exp(-b * abs(t));
25
26 ...
27
28 a = params(i,1);
29 b = params(i,2);
30 %F_w = 2*a*b/(sqrt(2*pi))*sinc(omega*b/pi);
31
32 %F_w = (a*b/sqrt(2*pi))*(sinc(omega*b/(2*pi))).^2;
33
34 %F_w = (a/b)*sqrt(pi/2)*double(abs(omega) ≤ b);
35
36 %F_w = a / sqrt(2*b)*exp(-omega.^2 / (4*b));
37
38 F_w = (2*a*b) ./ (sqrt(2*pi)*(b.^2 + omega.^2));
39
40 ...
41
42 a = 2;
43 b = 1;
44 %f_t = a * double(abs(t) ≤ b);

```

```
45 %F_w = 2*a*b/(sqrt(2*pi))*sinc(omega*b/pi);  
46  
47 %f_t = zeros(size(t));  
48 %f_t(abs(t) <= b) = a * (1 - abs(t(abs(t) <= b)) / b);  
49 %F_w = (a * b / sqrt(2*pi)) * (sinc(omega * b / (2*pi))).^2;  
50  
51 %f_t = a * sinc(b * t/pi);  
52 %F_w = (a / b) * sqrt(pi / 2) * double(abs(omega) <= b);  
53  
54 %f_t = a * exp(-b * t.^2);  
55 %F_w = a * sqrt(1 / (2*b)) * exp(-omega.^2 / (4*b));  
56  
57 f_t = a * exp(-b * abs(t));  
58 F_w = (2*a*b) ./ (sqrt(2*pi)*(b.^2 + omega.^2));  
59  
60 E_time = trapz(t, abs(f_t).^2)  
61 E_freq = trapz(omega, abs(F_w).^2)
```

Листинг 2: Код для комплексного

```

1 T = 100;
2 N = 16384;
3 t = linspace (-T, T, N);
4 dt = t(2) - t(1);
5 omega = 2*pi*(-N/2:N/2-1)/(N*dt);
6
7 c_values = [-3, -1, 2, 3];
8 colors = ['b', 'r', 'g', 'cyan'];
9 widths = [13, 9, 4, 3];
10
11 ...
12
13 c = c_values(i);
14 g = exp(-(t + c).^2);
15
16 ...
17
18 c = c_values(i);
19 hatg = exp(1i*omega*c).*exp(-omega.^2/4)/sqrt(2);
20 rhatg = real(hatg);
21
22 ...
23
24 c = c_values(i);
25 hatg = exp(1i*omega*c).*exp(-omega.^2/4)/sqrt(2);
26 imhatg = imag(hatg);
27
28 ...
29
30 c = c_values(i);
31 hatg = exp(1i*omega*c).*exp(-omega.^2/4)/sqrt(2);
32 abshatg = abs(hatg)

```

Листинг 3: Код для музыкального

```
1 [y, Fs] = audioread('ac.mp3');
2 y = y(:,1);
3 y = y(:).';
4 factor = 2;
5 y = y(1:factor:end);
6 Fs = Fs / factor;
7 t = (0:length(y)-1)/Fs;
8
9 V = 1000;
10 dv = 2;
11 v = 0:dv:V;
12
13 Y = zeros(size(v));
14 for k = 1:length(v)
15     Y(k) = trapz(t, y .* exp(-1i*2*pi*v(k)*t));
16 end
17
18 [peaks, locs] = findpeaks(abs(Y), v, 'MinPeakHeight', ...
    0.125*max(abs(Y)));
19
20 peaks
21 locs
22
23 magY = abs(Y);
```