

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по лабораторной работе №1  
Нелинейные системы  
Точки равновесия и локальные регуляторы

Выполнили студенты  
Преподаватель

Мовчан Игорь Евгеньевич  
Ибахаев Зубайр Руслан-Бекович  
Белоус Савва Эрнестович  
Зименко Константин Александрович

Санкт-Петербург  
2025

## Содержание

<b>1 Точки равновесия систем</b>	<b>2</b>
1.1 Первая система . . . . .	2
1.2 Вторая система . . . . .	3
1.3 Третья система . . . . .	5
1.4 Четвёртая система . . . . .	6
1.5 Пятая система . . . . .	8
1.6 Шестая система. . . . .	10
1.7 Седьмая система . . . . .	11
<b>2 Фазовые портреты</b>	<b>13</b>
<b>3 Локально стабилизирующие регуляторы</b>	<b>16</b>
3.1 Первая система . . . . .	16
3.2 Вторая система . . . . .	27
<b>4 Выводы</b>	<b>31</b>

# 1 Точки равновесия систем

## 1.1 Первая система

Пусть система задана следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 = f_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 = f_2 \end{cases}$$

Найдем все её точки равновесия, учитывая определение  $\dot{x} = 0$ :

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_1^3 + x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1(x_1^2 - 1) = 0 \\ x_2 = -x_1 \end{cases}$$

Получаем следующие точки:

$$x_1^* = (0, 0), \quad x_2^* = (1, -1), \quad x_3^* = (-1, 1)$$

Определим типы изолированных состояний равновесия. Для этого дополнительно вычислим матрицу Якоби системы:

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 6x_1^2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим каждую точку в отдельности.

**Начнём с  $x_1^*$ .** Матрица Якоби:

$$J(x_1^*) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Откуда её собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_1^*)) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{12} = -1 \pm i \Rightarrow \Re(\lambda_{12}) = -1 < 0$$

Следовательно, тип состояния равновесия - **устойчивый фокус**.  
**Далее, возьмём  $x_2^*$  и  $x_3^*$** . Их матрица Якоби:

$$J(x_2^*) = J(x_3^*) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Из которой получаем собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_2^*)) = \det(\lambda I - J(x_3^*)) = \lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_{12} = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

Они имеют отрицательную и положительную вещественные части, а значит, точки являются **седловыми**.

## 1.2 Вторая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 \end{cases}$$

Найдём точки равновесия:

$$\begin{cases} x_1 + x_1 x_2 = 0 \\ -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения:  $x_1(1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$  или  $x_2 = -1$

**Случай 1:**  $x_1 = 0$ , тогда второе уравнение:

$$-x_2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2(x_2 - 1) = 0 \Rightarrow x_2 \in \{0; 1\}$$

**Случай 2:**  $x_2 = -1$ , тогда второе уравнение:

$$x_1^3 + x_1 - 2 = 0 \Rightarrow (x_1 - 1)(x_1^2 + x_1 + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

Итого, получаем все изолированные точки равновесия:

$$x_1^* = (0, 0), \quad x_2^* = (0, 1), \quad x_3^* = (1, -1)$$

Аналогично предыдущему пункту рассмотрим каждую из них в отдельности для определения типа равновесия. Для начала найдем линеаризацию системы через матрицу Якоби:

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 + x_2 & x_1 \\ x_2 - 3x_1^2 & -1 + 2x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

Теперь рассмотрим каждую точку.

**Начнём с  $x_1^*$ .** Матрица Якоби:

$$J(x_1^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа представлены явно на диагонали:

$$\lambda_{12} = \pm 1$$

Они имеют как положительные действительные части, так и отрицательные, поэтому точка равновесия является **седлом**.

**Далее, возьмём  $x_2^*$ .** Матрица Якоби:

$$J(x_2^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Откуда собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_2^*)) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1 \Rightarrow \Re(\lambda_{12}) > 0$$

Они имеют положительные вещественные части, поэтому точка имеет тип равновесия - **неустойчивый узел**.

**Наконец, примем  $x_3^*$ .** Матрица Якоби:

$$J(x_3^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_3^*)) = \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{12} = -1 \pm i\sqrt{3} \Rightarrow \Re(\lambda_{12}) = -1 < 0$$

Действительные части отрицательны, есть мнимые числа, поэтому тип равновесия рассматриваемой точки - **устойчивый фокус**.

### 1.3 Третья система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 + 0.1x_1^4) \end{cases}$$

Найдем точки равновесия, приравняв производные к нулю:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2(1 - x_1^2 + 0.1x_1^4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Получаем единственную точку:

$$x_1^* = (0, 0)$$

Линеаризуем систему, найдя матрицу Якоби:

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x_1x_2 + 0.4x_1^3x_2 & 1 - x_1^2 + 0.1x_1^4 \end{bmatrix}$$

Для определения типа равновесия изолированного состояния подставим точку в приближение:

$$J(x_1^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Найдём собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_1^*)) = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{12} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Re(\lambda_{12}) = \frac{1}{2} > 0$$

Следовательно, точка является **неустойчивым фокусом**.

## 1.4 Четвёртая система

Система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

Найдем точки равновесия, приравняв правые части к нулю:

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ (x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases}$$

**Случай 1:**  $1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$  (окружность)

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Все точки на окружности с центром  $x_0 = (0, 0)$  и радиусом  $R = 1$  являются точками равновесия.

**Случай 2:**  $1 - x_1^2 - x_2^2 \neq 0$ , тогда:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Решение:  $x_1 = 0, x_2 = 0$

Все точки равновесия:

$$x_1^* = (0, 0), \quad x_2^* = \text{точки на окружности } x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Причем отметим, что первая точка - изолированная, так как в окрестности неё нет других точек равновесия, а вторая - нет.

Определми тип изолированного состояния равновесия  $x_1^*$ . Для этого линеаризуем систему, вычислив матрицу Якоби системы в этой точке, предварительно сократив на ненулевой член  $1 - x_1^2 - x_2^2 \neq 0$ :

$$J(x_1^*) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Откуда собственные числа:

$$\lambda_{12} = 1 \pm i \Rightarrow \Re(\lambda_{12}) = 1 > 0$$

Следовательно, точка равновесия  $x_1^*$  - **неустойчивый фокус**.

Далее, перейдем к анализу неизолированного состояния равновесия  $x_2^*$  через переход к полярной системе координат:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\theta) \\ x_2 = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} r^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ \theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \end{cases}$$

**Вычислим производную  $\dot{r}$ :**

$$2r\dot{r} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

$$\dot{r} = \frac{x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2}{r}$$

Подставляем  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$ :

$$x_1\dot{x}_1 = x_1(x_1 - x_2)(1 - r^2) = (x_1^2 - x_1x_2)(1 - r^2)$$

$$x_2\dot{x}_2 = x_2(x_1 + x_2)(1 - r^2) = (x_1x_2 + x_2^2)(1 - r^2)$$

Складываем:

$$x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = (x_1^2 + x_2^2)(1 - r^2) = r^2(1 - r^2)$$

Таким образом:

$$\dot{r} = \frac{r^2(1 - r^2)}{r} = r(1 - r^2)$$

**Вычислим производную  $\dot{\theta}$ :**

$$\dot{\theta} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \cdot \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{x_1^2} = \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{r^2}$$

Посчитаем отдельно числитель:

$$x_1\dot{x}_2 = x_1(x_1 + x_2)(1 - r^2) = (x_1^2 + x_1x_2)(1 - r^2)$$

$$x_2 \dot{x}_1 = x_2(x_1 - x_2)(1 - r^2) = (x_1 x_2 - x_2^2)(1 - r^2)$$

Вычитаем:

$$x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 = (x_1^2 + x_2^2)(1 - r^2) = r^2(1 - r^2)$$

Таким образом:

$$\dot{\theta} = \frac{r^2(1 - r^2)}{r^2} = 1 - r^2$$

Итоговая система в полярной системе координат тогда:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 - r^2 \end{cases}$$

Проведем небольшой анализ движения системы:

- При  $0 < r < 1$ :  $\dot{r} > 0$  - траектории удаляются
- При  $r = 1$ :  $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$  - предельный цикл
- При  $r > 1$ :  $\dot{r} < 0$  - траектории приближаются к циклу

Значит, предельный цикл  $r = 1$  является **устойчивым**. Все точки цикла - точки равновесия.

Он также соответствует неизолированной системе точек равновесия  $x_2^*$ , поэтому для них можно сделать те же самые заключения.

## 1.5 Пятая система

Примем систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

Приравняем производную координат к нулю  $\dot{x} = 0$  и решим систему, найдя точки равновесия:

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1^3 \\ x_1(1 - x_1^8) = 0 \end{cases}$$

Рассматриваем только действительные переменные, поэтому итоговые точки равновесия:

$$x_1^* = (0, 0), \quad x_2^* = (1, 1), \quad x_3^* = (-1, -1)$$

Найдём их тип, используя линеаризацию через матрицу Якоби:

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим каждую точку в отдельности.

**Начнём с  $x_1^*$ .** Матрица Якоби в этой точке:

$$J(x_1^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_1^*)) = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{12} = \pm 1$$

Их вещественные части могут быть и положительными, и отрицательными, поэтому тип равновесия - **седло**.

**Перейдём к  $x_2^*$ .** Матрица Якоби:

$$J(x_2^*) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_2^*)) = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -4 \Rightarrow \Re(\lambda_{12}) < 0$$

Действительные части отрицательны, поэтому тип изолированной точки равновесия - **устойчивый фокус**.

**Наконец, рассмотрим  $x_3^*$ .**

Значение матрицы Якоби в ней будет давать те же результаты, что и в предыдущем случае, поэтому можно сделать те же выводы - точка является **устойчивым фокусом**.

## 1.6 Шестая система.

Система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_2^3 x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

Вычислим точки равновесия, приравняв правые части к 0:

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2^3 = 0 \\ x_2^3 x_1 - x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^3 = x_2^3 \\ x_2^3(x_1 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2(x_1 - 1) = 0 \end{cases}$$

Точки равновесия:

$$x_1^* = (0, 0), \quad x_2^* = (1, 1)$$

Линеаризуем систему через матрицу Якоби:

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 \\ x_2^3 & 3x_1 x_2^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

Определим тип каждой точки равновесия по очереди.

**Начнём с  $x_2^*$ .** Матрица Якоби:

$$J(x_2^*) = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Её собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_2^*)) = \lambda^2 + 3\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Вещественные части принимают как отрицательные, так и положительные значения, поэтому тип неизолированной точки равновесия - **седло**.

**Далее, рассмотрим  $x_1^*$ .** Матрица Якоби в этой точке:

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

По ней невозможно получить какую-либо информацию о типе - нужен более детальный разбор системы через функцию Ляпунова:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{4}x_2^4$$

Проверим её производную:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = x_1^3(-x_1^3 + x_2^3) + x_2^3(x_1 x_2^3 - x_2^3)$$

Раскроем скобки:

$$\dot{V} = -x_1^6 - x_2^6 + x_1^3 x_2^3 + x_1 x_2^6$$

Оценим знак в малой окрестности начала координат. Используем неравенство Юнга при  $p = q = 2$ :

$$|x_1^3 x_2^3| \leq \frac{1}{2}x_1^6 + \frac{1}{2}x_2^6$$

Также отметим, что  $x_1 x_2^6$  пренебрежимо мало в сравнении с другими членами более низких порядков. Таким образом:

$$\dot{V} \leq -x_1^6 - x_2^6 + \frac{1}{2}x_1^6 + \frac{1}{2}x_2^6 + O(\|x\|^7) = -\frac{1}{2}x_1^6 - \frac{1}{2}x_2^6 + O(\|x\|^7)$$

В достаточно малой окрестности начала координат при  $x \neq 0$ :

$$\dot{V} < 0$$

Значит, точка  $x_1^*$  является **асимптотически устойчивой**.

## 1.7 Седьмая система

Рассмотрим нелинейную систему с тремя переменными:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_3 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3 - x_2^3 - \sin x_1 \end{cases}$$

Найдём точки равновесия через решение системы на  $\dot{x} = 0$ :

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2^3 = 0 \\ x_1 + 3x_3 - x_2^3 = 0 \\ x_1x_3 - x_2^3 - \sin x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = (x_1^3 - x_1)/3 \\ x_1x_3 - x_2^3 - \sin x_1 = 0 \end{cases}$$

Подставляем в третье:

$$\frac{x_1^4 - x_1^2}{3} - x_1^3 - \sin x_1 = 0$$

$$x_1^4 - 3x_1^3 - x_1^2 - 3 \sin x_1 = 0$$

Откуда точки равновесия:

$$x_1^* = (0, 0, 0), \quad x_2^* \approx (3.2913, 3.2913, 10.7872)$$

Линеаризуем систему через матрицу Якоби:

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 & 0 \\ 1 & -3x_2^2 & 3 \\ x_3 - \cos x_1 & -3x_2^2 & x_1 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим каждую точку в отдельности.

**Начнём с  $x_2^*$ .** Матрица Якоби:

$$J(x_2^*) \approx \begin{bmatrix} -32.5 & 32.5 & 0 \\ 1 & -32.5 & 3 \\ 11.78 & -32.5 & 3.29 \end{bmatrix}$$

Численно найдем собственные числа:

$$\lambda_1 \approx -32.7, \quad \lambda_2 \approx -30.36, \quad \lambda_3 = 1.36$$

Вещественные части принимают как положительные, так и отрицательные значения, поэтому изолированная точка равновесия  $x_2^*$  является **седловой**.

Исследуем также  $x_1^*$ . Матрица Якоби:

$$J(x_1^*) \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Вычислим её собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_1^*)) = \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Все значения оказались равны 0, поэтому тип точки равновесия  $x_2^*$  не может быть корректно определён с помощью линеаризации.

## 2 Фазовые портреты

Проверим полученные результаты с помощью визуализации. Для этого построим фазовые потреты для каждой двумерной системы.

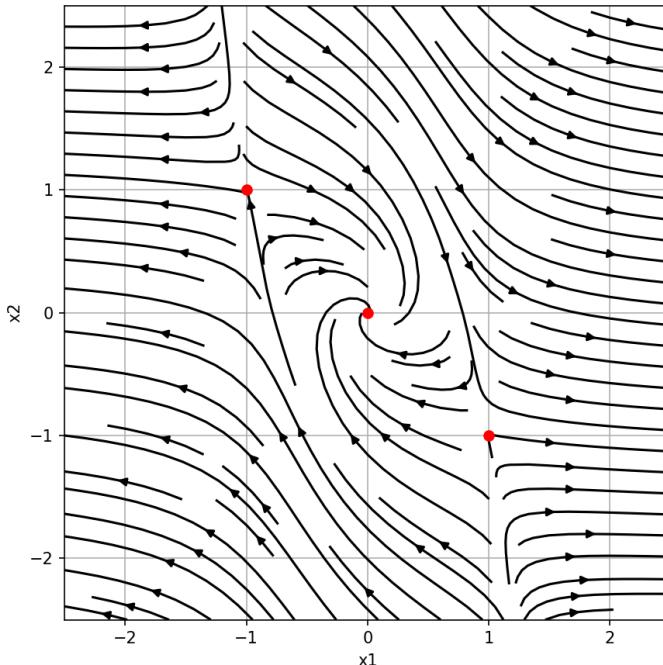
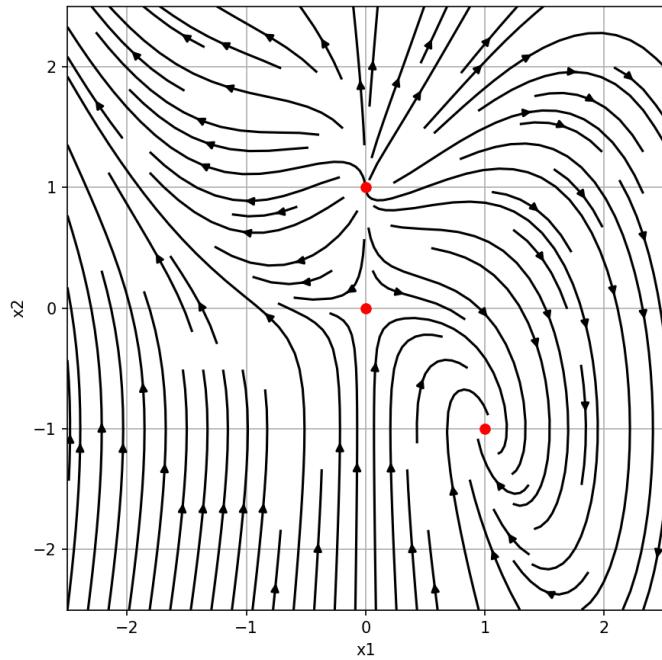
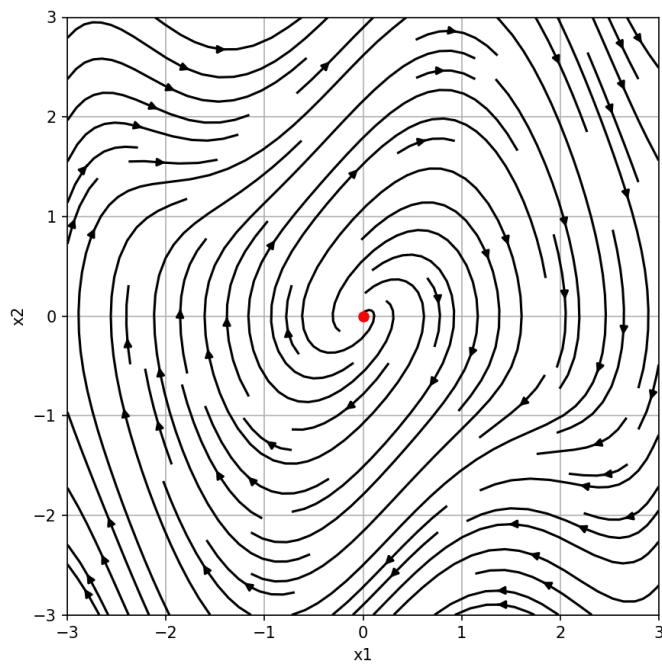


Рис. 1: Первая система:  $(0, 0)$  - устойчивый фокус,  $(1, -1)$  и  $(-1, 1)$  - седло



*Рис. 2: Вторая система:  $(0, 0)$  - седло,  $(0, 1)$  - неустойчивый узел и  $(1, -1)$  - устойчивый фокус*



*Рис. 3: Третья система:  $(0, 0)$  - неустойчивый фокус*

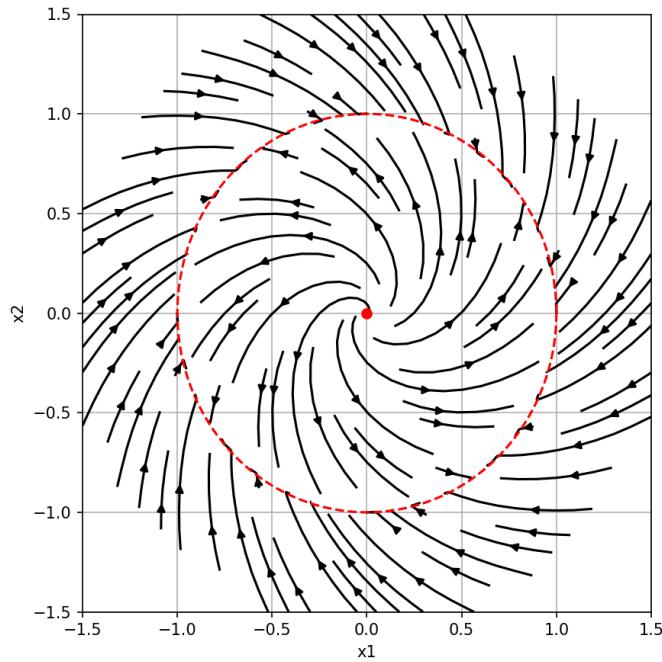


Рис. 4: Четвертая система:  $(0, 0)$  - неустойчивый фокус и устойчивые точки на окружности

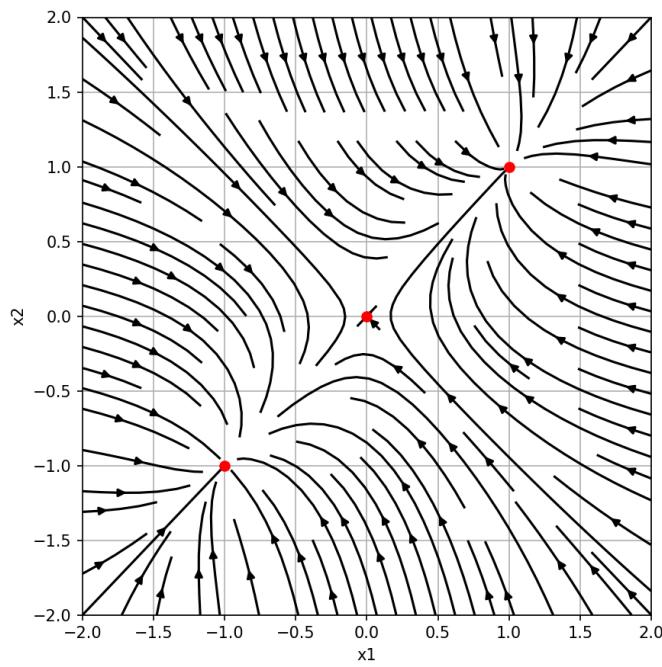


Рис. 5: Пятая система:  $(0, 0)$  - седло,  $(1, 1)$  и  $(-1, -1)$  - устойчивый фокус

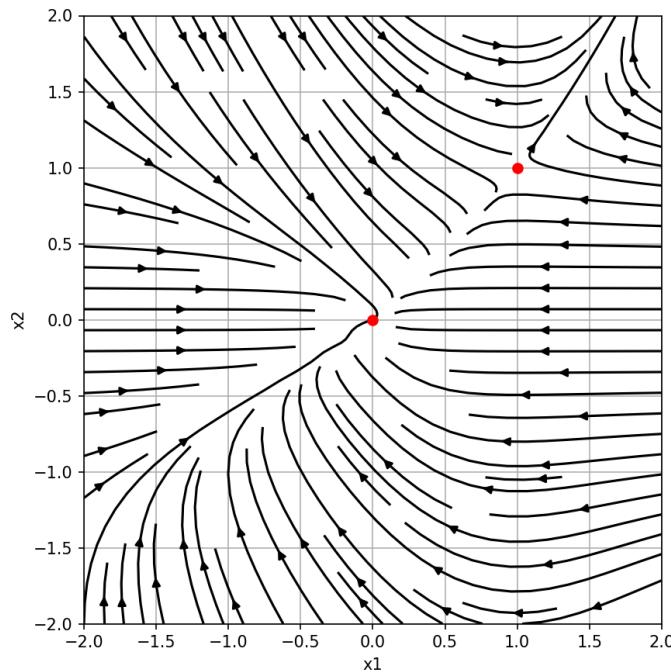


Рис. 6: Шестая система:  $(0, 0)$  - седло и  $(1, 1)$  - устойчивая точка

Можем видеть, что результаты визуализации, представленной на рисунках 1-6 полностью сходятся с аналитикой - успех!

### 3 Локально стабилизирующие регуляторы

#### 3.1 Первая система

Возьмём систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 + \sin u_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 3 \sin u_2 \end{cases}$$

При  $u = u_{ss} \equiv 0$  она приобретает вид системы, рассматриваемой в первом разделе, поэтому множество точек равновесия уже знаем:

$$x_1^* = (0, 0), \quad x_2^* = (1, -1), \quad x_3^* = (-1, 1)$$

Напомним, что тип состояния точки равновесия  $x_1^*$  - устойчивый фокус, поэтому задача синтеза локально стабилизирующего регулятора для него кажется неактуальной. Однако это всё же может дать более быструю сходимость и большую окрестность устойчивости.

Остальные точки являются седловыми, то есть по какому-то из направлений наблюдается неустойчивость - необходим регулятор, который мы будем строить по линеаризации модели:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0, u=0}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=0, u=0}$$

Можем видеть, что система линеаризуется возле нуля. Именно поэтому для решения задачи синтеза стабилизирующего регулятора возле *любой* точки равновесия будут вводиться новые координаты  $x_\delta = x - x_{ss}$  и  $u_\delta = u - u_{ss}$ , где  $x_{ss}$  соответствует точкам равновесия.

**Итак, как и прежде, начнём с  $x_1^* = (0, 0)$ .**

Линеаризация даёт следующие результаты:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_1^*, u=0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_1^*, u=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Синтезируем регулятор, минимизируя функционал качества при заданных параметрах  $Q = R = I$ :

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dx$$

То есть будем использовать LQR. В итоге получим матрицу обратных связей для линеаризованной системы:

$$K_{x_1^*} = \begin{bmatrix} 0.3897 & 0.0302 \\ 0.0907 & 0.7486 \end{bmatrix} \Rightarrow u = -K_{x_1^*} x_\delta$$

Замоделируем систему при различных начальных условиях системы  $x(0) = [-0.2, -0.3]$  и  $x(0) = [0.5, 0.4]$  и найденном регуляторе. Все графики приведены на рисунках 7-11.

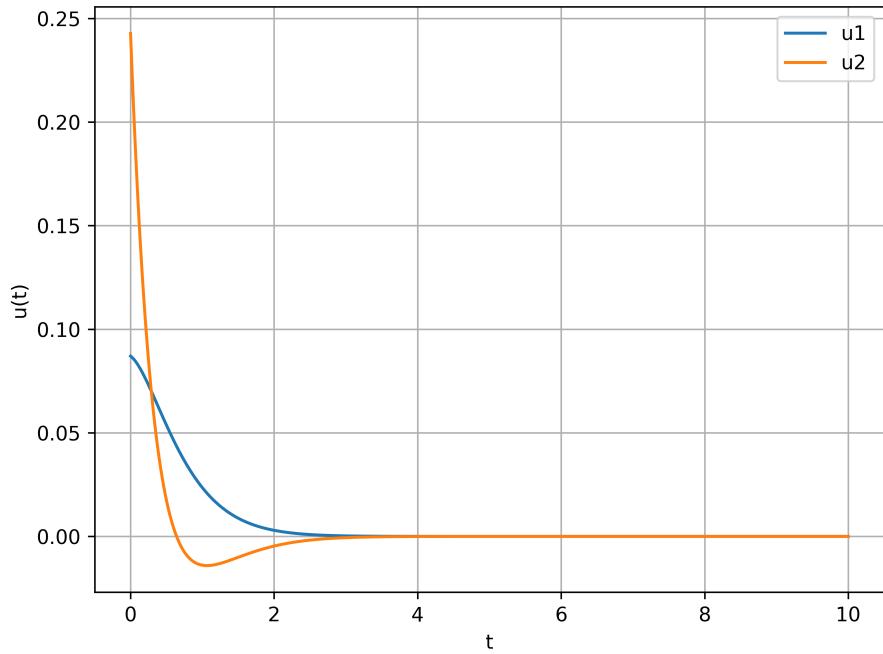


Рис. 7: График управления системы при  $x(0) = [-0.2, -0.3]$

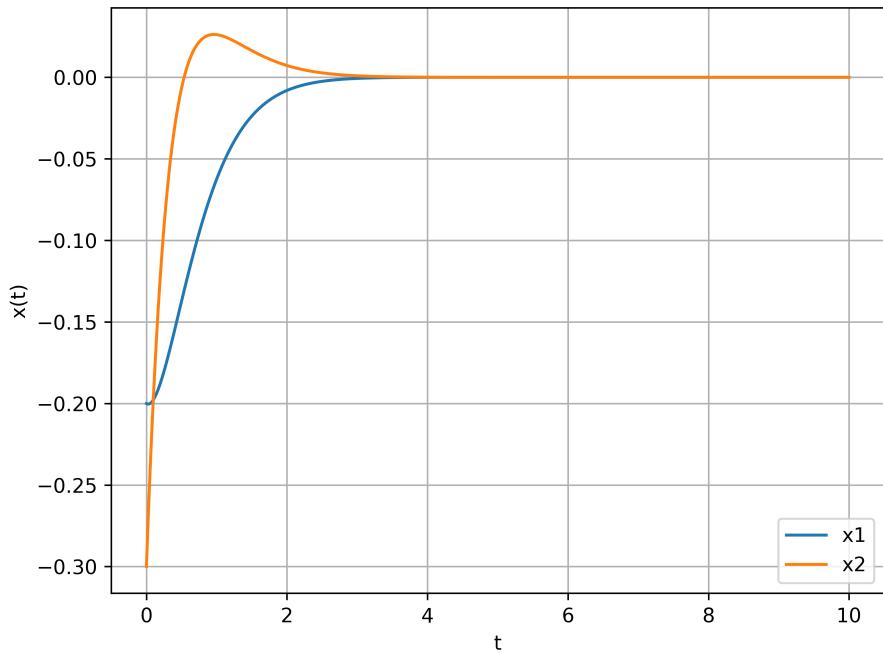
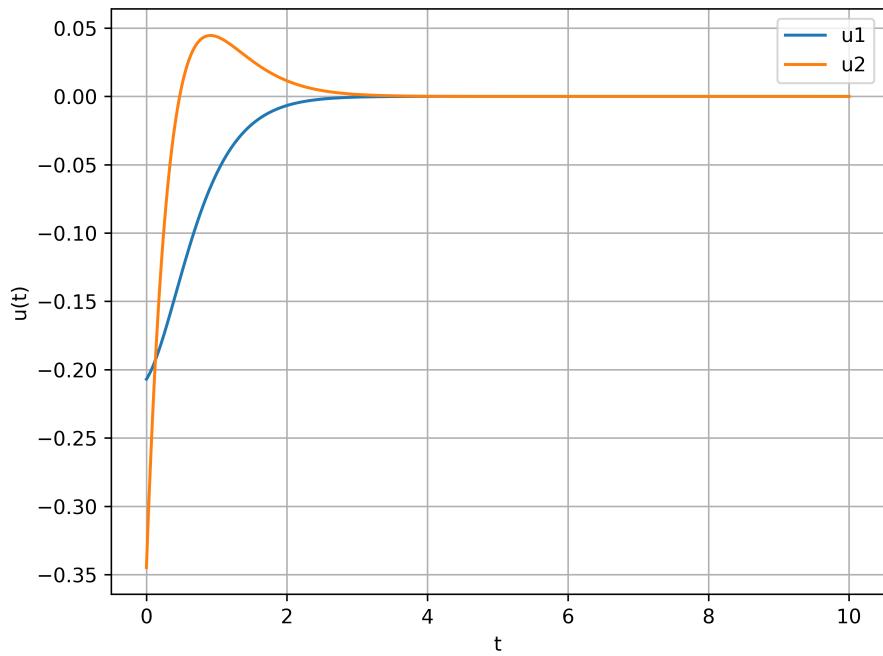
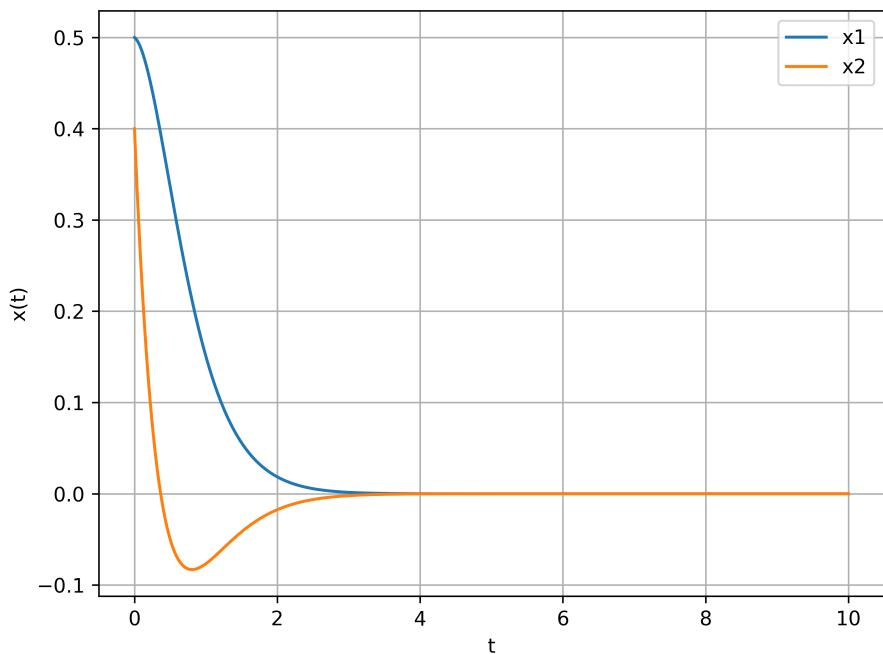


Рис. 8: График движения системы при  $x(0) = [-0.2, -0.3]$

Рис. 9: График управления системы при  $x(0) = [0.5, 0.4]$ Рис. 10: График движения системы при  $x(0) = [0.5, 0.4]$

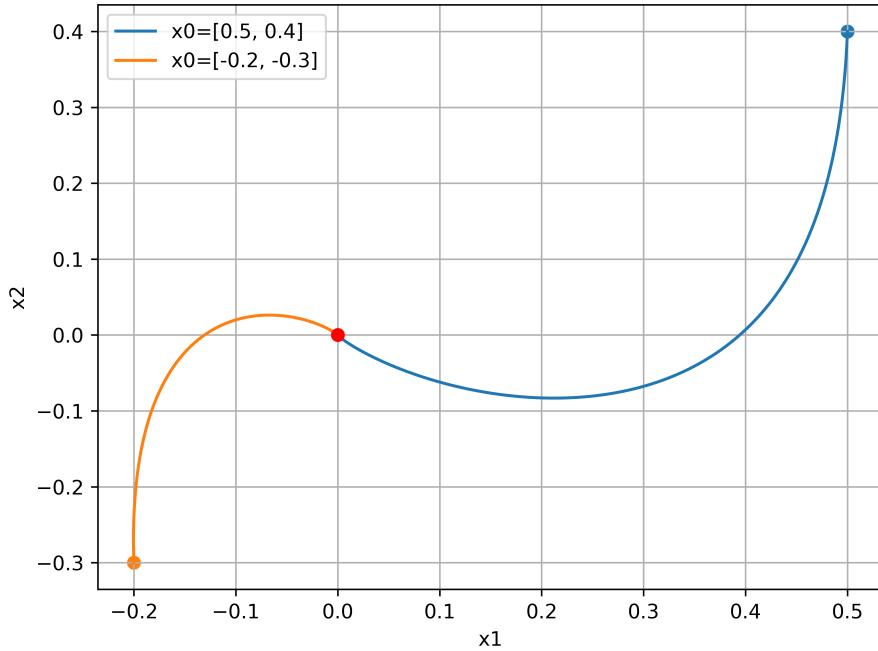


Рис. 11: Фазовый портрет системы при обратной связи  $-K_{x_1^*}$

Можем видеть, что замкнутая система является устойчивой.

**Проделаем аналогичные вычисления для  $x_2^* = (1, -1)$ .**

Но для начала переместим  $x_2^*$  в начало координат через сдвиг на этот вектор, получим:

$$x_\delta = x - x_2^*, \quad u_\delta = u - u_{ss} = u$$

Последнее верно, так как все точки равновесия были получены при нулевом входе. Откуда система:

$$\begin{cases} \dot{x}_{\delta 1} = -(x_{\delta 1} + 1) + 2(x_{\delta 1} + 1)^3 + (x_{\delta 2} - 1) + \sin(u_1) \\ \dot{x}_{\delta 2} = -(x_{\delta 1} + 1) - (x_{\delta 2} - 1) + 3 \sin(u_2) \end{cases}$$

В линейном виде:

$$x_\delta = Ax_\delta + Bu$$

Где матрицы

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x_\delta} \right|_{x_\delta=0, u=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_2^*, u=0} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_\delta=0, u=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_2^*, u=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Итак, можем синтезировать локально стабилизирующий регулятор, минимизирующий функционал качества при  $Q = R = I$ :

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dx$$

Получаем матрицу обратной связи:

$$K_{x_2^*} = \begin{bmatrix} 8.7854 & 1.0331 \\ 3.0992 & 1.1193 \end{bmatrix} \Rightarrow u = -K_{x_2^*} x_\delta$$

Теперь можем промоделировать систему при начальных условиях  $x_\delta(0) = (0.15, 0.15)$  и  $x_\delta(0) = (-0.1, -0.1)$  и найденном регуляторе. Все графики приведены на рисунках 12-16 - траектории сходятся к  $x_2^*$ , являющейся неустойчивой. Регулятор успешно стабилизирует!

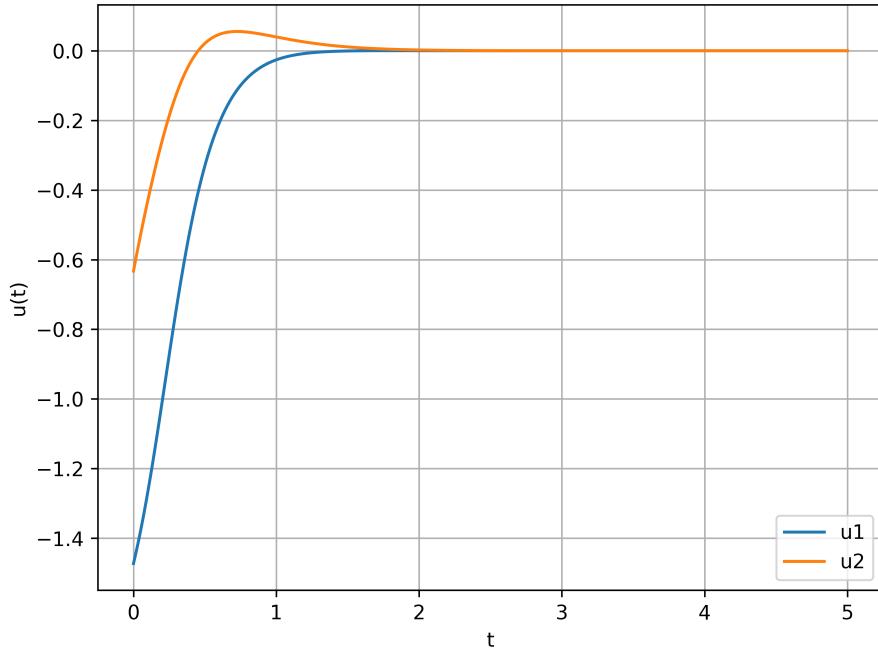
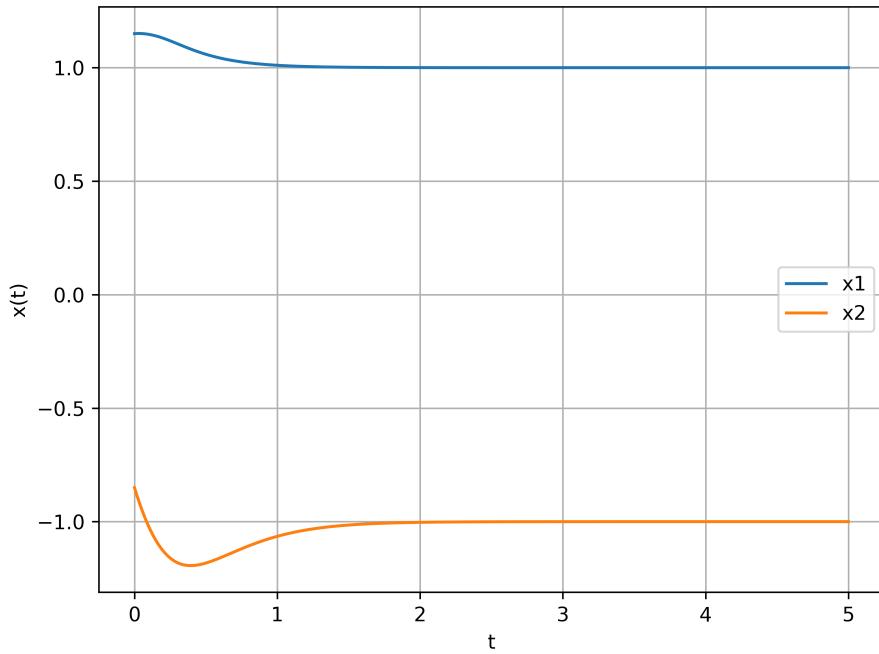
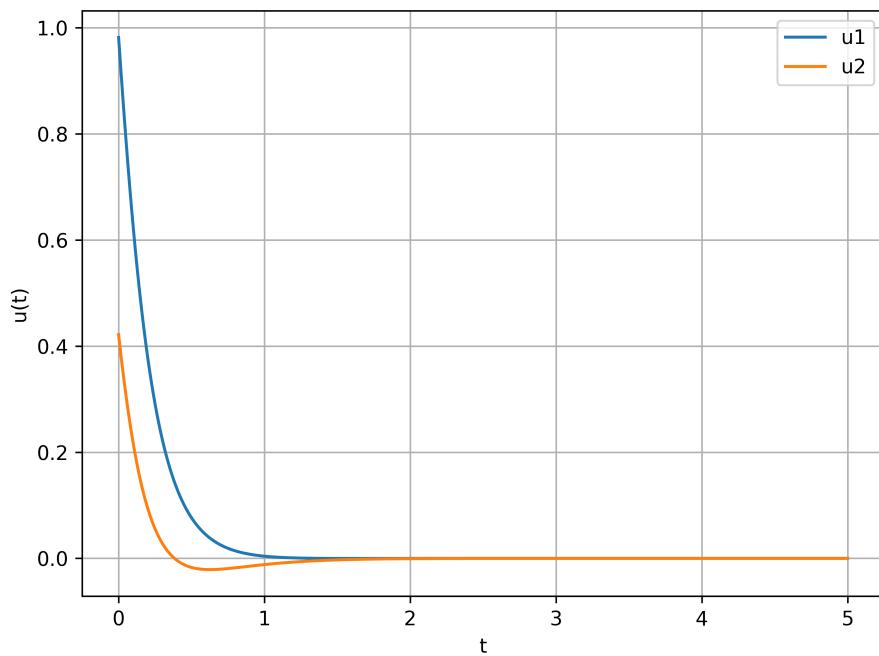


Рис. 12: График управления системы при  $x_\delta(0) = [0.15, 0.15]$

Рис. 13: График движения системы при  $x_\delta(0) = [0.15, 0.15]$ Рис. 14: График управления системы при  $x_\delta(0) = [-0.1, -0.1]$

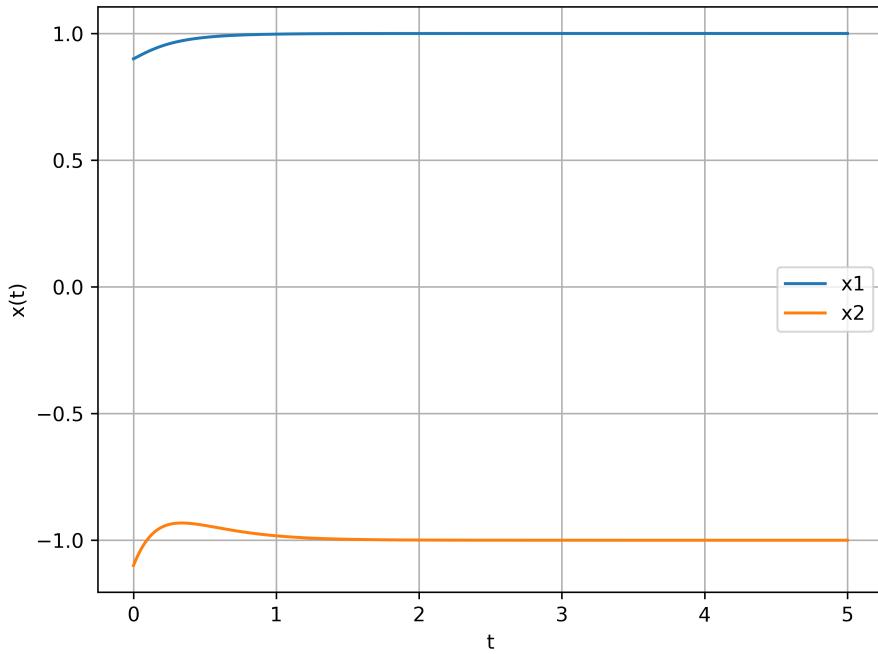


Рис. 15: График динамики системы при  $x_\delta(0) = [-0.1, -0.1]$

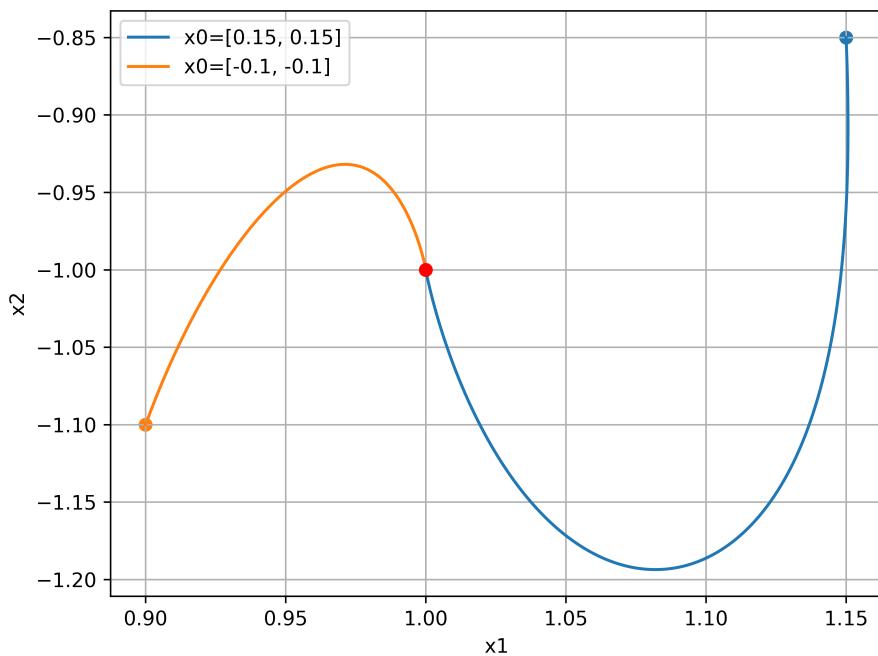


Рис. 16: Фазовый портрет системы при обратной связь  $-K_{x_2^*}$

**Наконец, исследуем точку  $x_3^* = (-1, 1)$ .**

Запишем систему в координатах  $x_\delta = x - x_3^*$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_{\delta 1} = -(x_{\delta 1} - 1) + 2(x_{\delta 1} - 1)^3 + (x_{\delta 2} + 1) + \sin u_1 \\ \dot{x}_{\delta 2} = -(x_{\delta 1} - 1) - (x_{\delta 2} + 1) + 3 \sin u_2 \end{cases}$$

В линейном виде:

$$x_\delta = Ax_\delta + Bu$$

Где матрицы

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_3^*, u=0} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_3^*, u=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Итак, можем синтезировать локально стабилизирующий регулятор, минимизирующий функционал качества при  $Q = 10I$  и  $R = I$ :

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dx$$

Получаем матрицу обратной связи:

$$K_{x_3^*} = \begin{bmatrix} 8.7854 & 1.0331 \\ 3.0992 & 1.1193 \end{bmatrix} \Rightarrow u = -K_{x_3^*} x_\delta$$

Итак, можно промоделировать нелинейную систему при начальных условиях  $x_\delta(0) = (0.1, 0.1)$  и  $x_\delta(0) = (-0.1, -0.15)$  и синтезированном регуляторе с отрицательной обратной связью  $K_{x_3^*}$ . Все графики представлены на рисунках 17 - 21.

По рисункам видим, что система успешно стабилизируется вблизи точки неустойчивой точки равновесия  $x_3^*$ , а значит, найденный регулятор успешно справляется со своей задачей.

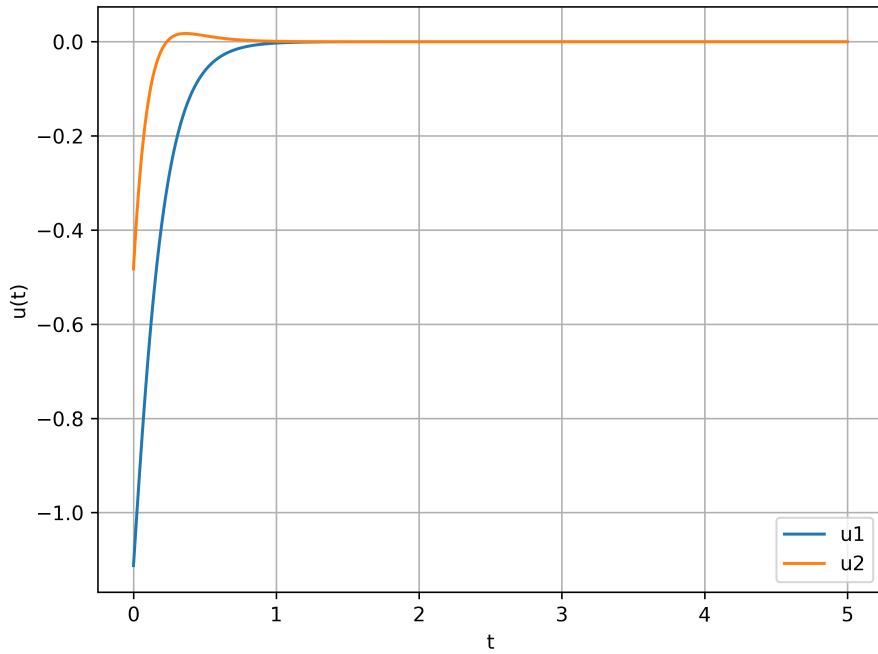


Рис. 17: График управления системы при  $x_\delta(0) = [0.1, 0.1]$

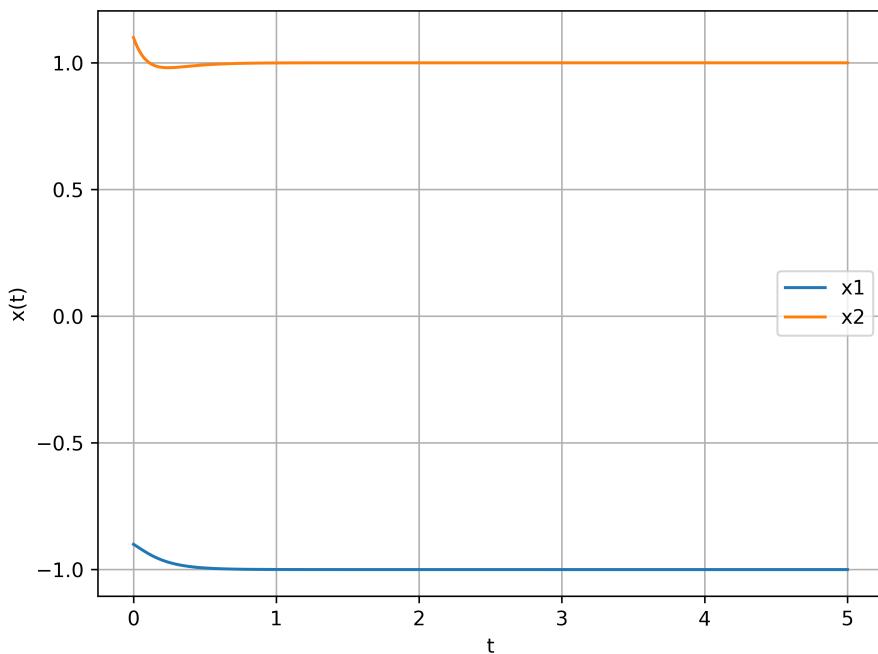


Рис. 18: График движения системы при  $x_\delta(0) = [0.1, 0.1]$

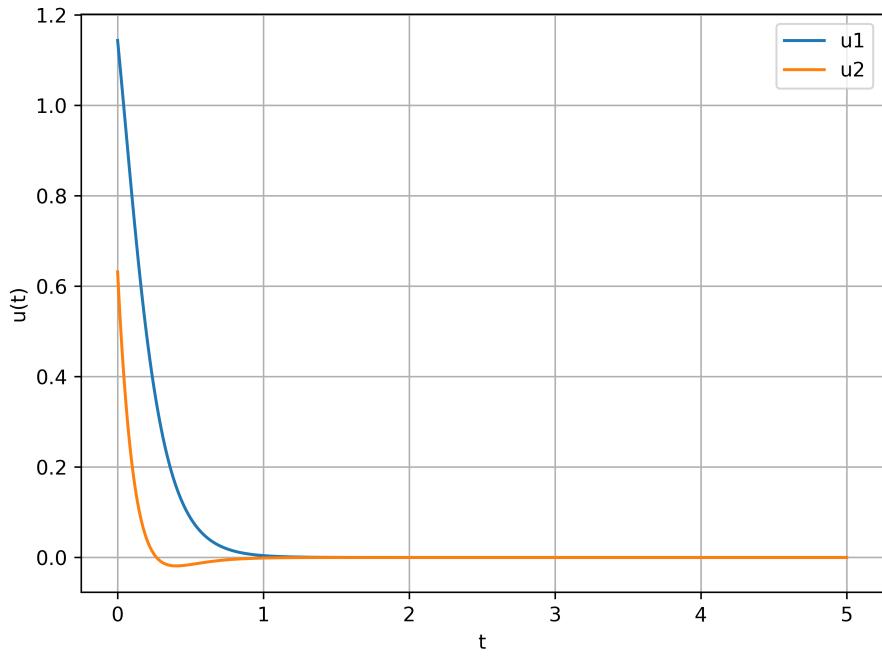


Рис. 19: График управления системы при  $x_\delta(0) = [-0.1, -0.15]$

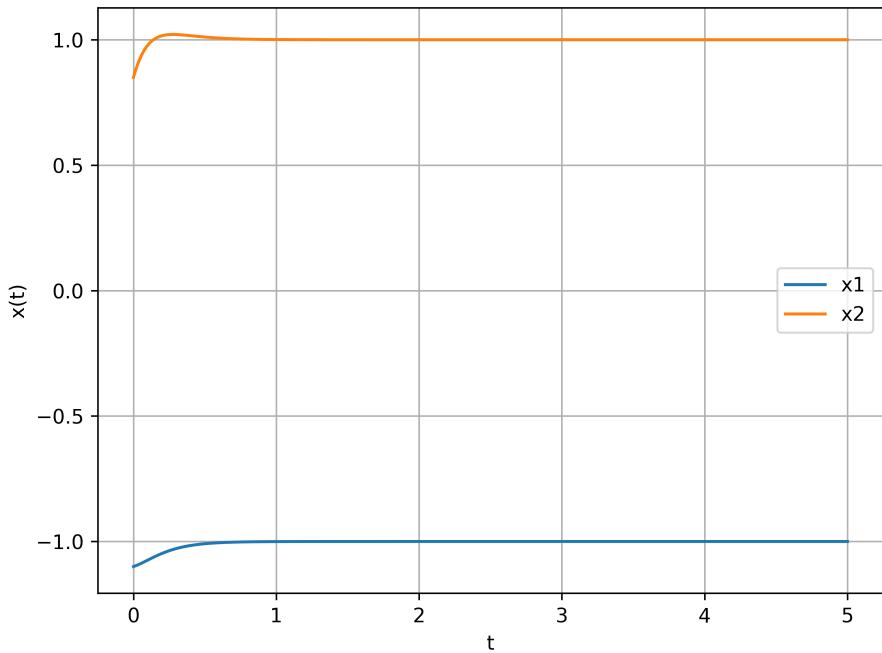


Рис. 20: График движения системы при  $x_\delta(0) = [-0.1, -0.15]$

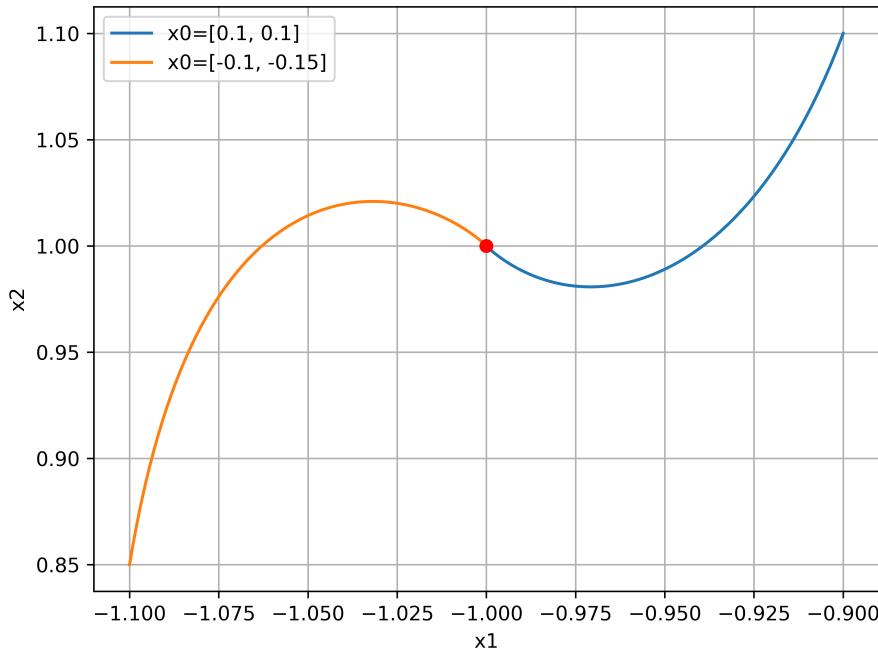


Рис. 21: Фазовый ортремт системы при обратной связи  $-K_{x_3^*}$

### 3.2 Вторая система

Итак, возьмем заключительную нелинейную систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2 + u^3 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 - x_1^3 + \sin u \end{cases}$$

Примем нулевое воздействие и найдем изолированные точки равновесия системы. Для этого приравняем производные к нулю:

$$\begin{cases} x_2 + x_1 x_2 = 0 \\ -x_2 + x_2^2 - x_1^3 = 0 \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение:

$$x_2 + x_1 x_2 = x_2(1 + x_1) = 0$$

Отсюда:

$$x_2 = 0 \quad \text{или} \quad x_1 = -1$$

Подставим  $x_2 = 0$  во второе уравнение:

$$x_1^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Теперь перейдем к  $x_1 = -1$ : Подставляем во второе уравнение:

$$-x_2 + x_2^2 - (-1)^3 = 0 \Rightarrow -x_2 + x_2^2 + 1 = 0$$

$$x_2^2 - x_2 + 1 = 0$$

У системы нет действительных корней, так что единственной изолированной точкой равновесия будет:

$$x_1^* = (0, 0)$$

Как прежде, сперва найдем линеаризацию:

$$x = Ax + Bu$$

Матрицы системы задаются через частные производные:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_1^*, u=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_1^*, u=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Аналогично предыдущему пункту синтезируем матрицу обратной связи через LQR при матрицах  $Q = I$  и  $R = 1$ :

$$K_{x_1^*} = [1 \ 1] \Rightarrow u = -K_{x_1^*}x$$

Замоделируем изначальную нелинейную систему при начальных условиях  $x(0) = (0.1, 0.1)$  и  $x(0) = (-0.1, -0.15)$  и регуляторе с матрицей  $K_{x_1^*}$ . Все графики приведены на рисунках 22 - 26.

Таким образом, в относительно малой окрестности начала координат (при различных начальных условиях) имеем притяжение к точке равновесия  $x_1^*$  - синтезированный регулятор справляется с поставленной задачей локальной стабилизации!

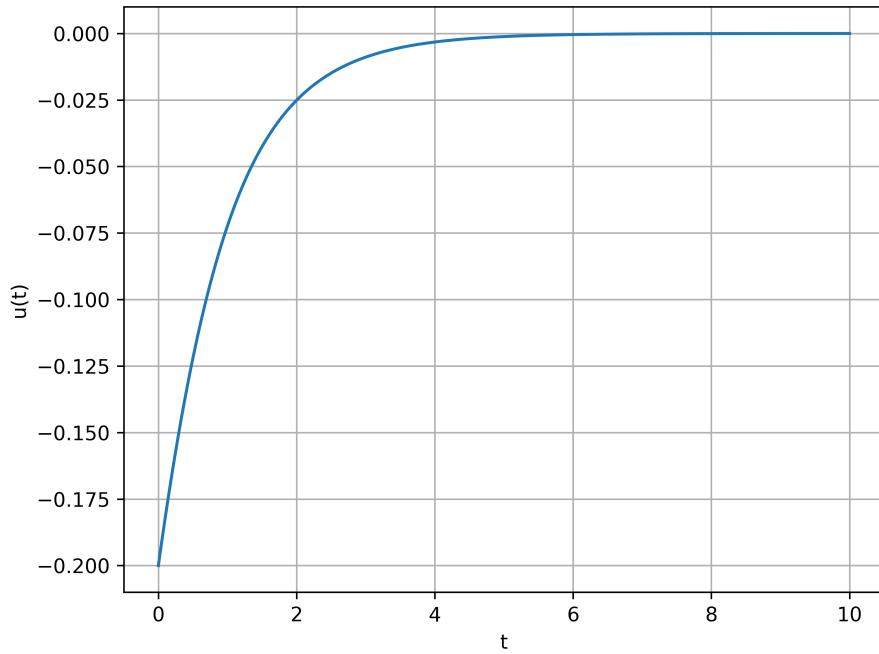


Рис. 22: График управления системы при  $x(0) = [0.1, 0.1]$

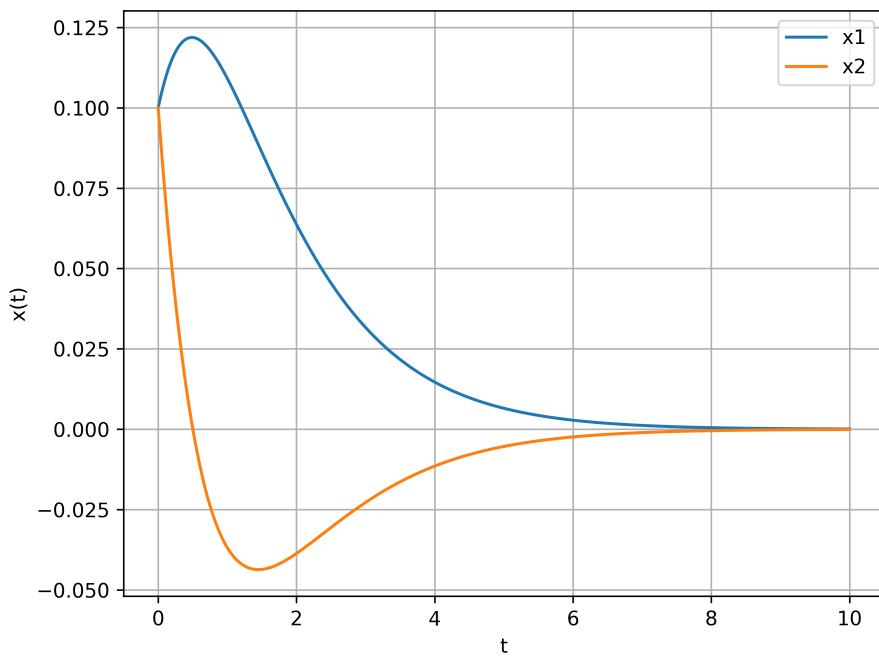


Рис. 23: График движений системы при  $x(0) = [0.1, 0.1]$

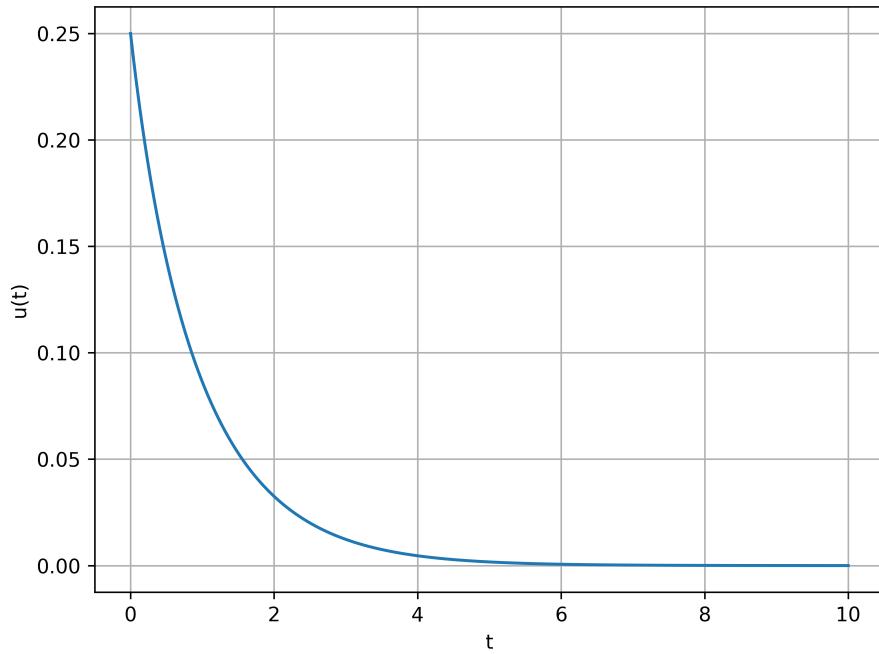


Рис. 24: График управления системы при  $x(0) = [-0.1, -0.15]$

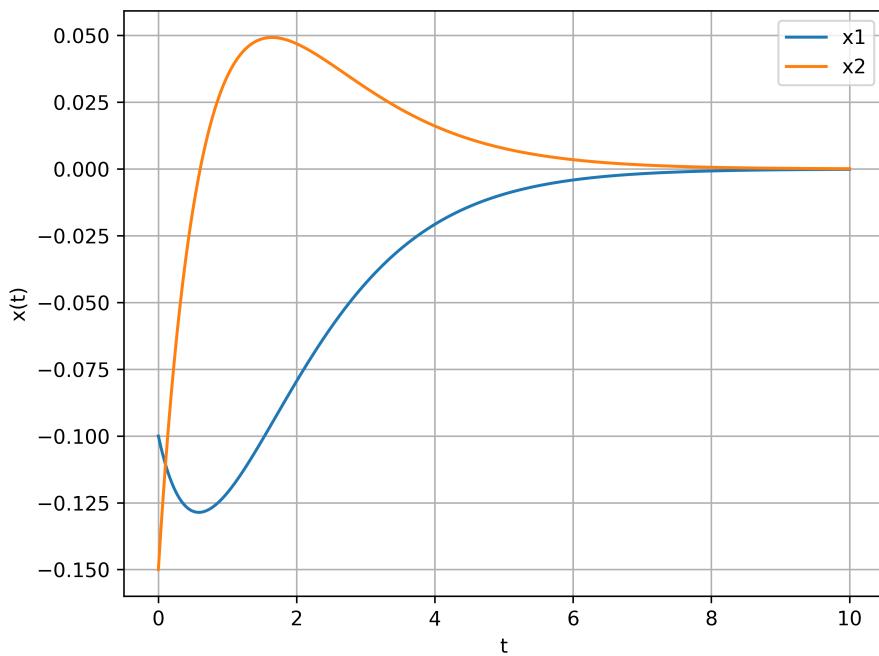
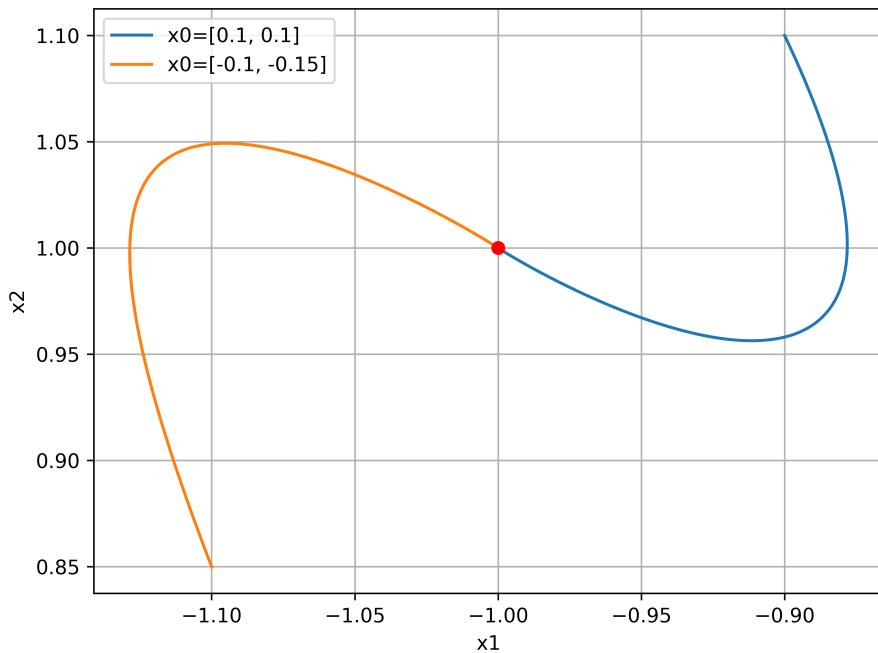


Рис. 25: График движения системы при  $x(0) = [-0.1, -0.15]$



*Рис. 26: Фазовый ортремт системы при обратной связи  $-K_{x_1^*}$*

## 4 Выводы

В ходе лабораторной работы успешно исследованы нелинейные системы на наличие точек равновесия и их типы с помощью линеаризации через матрицу Якоби.

Также были синтезированы локально стабилизирующие регуляторы, позволяющие изменить природу системы, сделав, например, неустойчивые узлы устойчивыми.