

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по курсовому проекту
Управление перевернутым маятником на тележке
Вариант 11

Выполнил студент группы R3480
Преподаватель

Мовчан Игорь Евгеньевич
Пашенко Артем Витальевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Построение математической модели	2
1.1 Вывод уравнений	2
1.2 Точки равновесия	6
1.3 Линеаризация системы	6
1.4 Выбор исходных данных	8
2 Анализ математической модели	9
2.1 Анализ матриц	9
2.2 Моделирование	12
3 Стабилизация: модальное управление	19
3.1 Синтез регулятора по состоянию	19
3.2 Исследование регулятора по состоянию	25
3.3 Синтез наблюдателя	31
3.4 Синтез регулятора по выходу	40
4 Стабилизация: заданная устойчивость	47
4.1 Синтез регулятора по состоянию	47
4.2 Исследование регулятора по состоянию	52
4.3 Регулятор по состоянию с ограничениями	57
4.4 Исследование регулятора с ограничениями	67
4.5 Синтез наблюдателя	72
4.6 Синтез регулятора по выходу	75
5 Слежение и компенсация	82
5.1 Решение задачи компенсации	82
5.2 Решение задачи слежения	87
6 Выводы	92

1 Построение математической модели

1.1 Вывод уравнений

Рассмотрим объект управления - перевернутый маятник на тележке (представлен на рисунке 1). В качестве переменных состояния выберем линейную координату тележки a , скорость тележки \dot{a} , угол отклонения маятника от вертикали φ , угловую скорость маятника $\dot{\varphi}$. В качестве управляющей переменной u примем горизонтальную силу, приложенную к тележке. В качестве внешнего возмущения f примем вращающий момент, действующий на маятник. В качестве выходных (измеряемых) величин примем $y_1 = a$ и $y_2 = \varphi$. Будем также считать, что трение в системе отсутствует, а масса маятника равномерно распределена вдоль стержня.

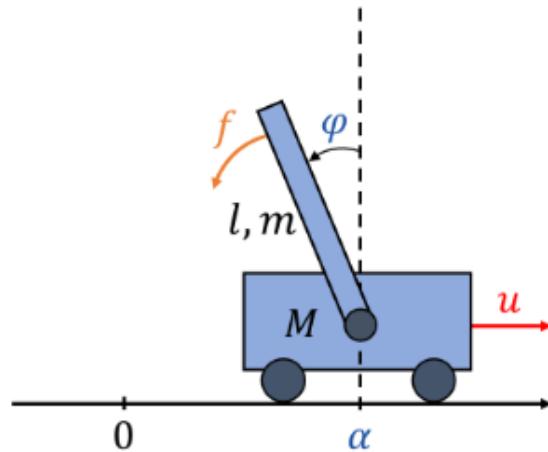


Рис. 1: Перевернутый маятник на тележке

Теперь выведем математическую модель перевернутого маятника на тележке. Для начала найдем координаты центра масс стержня:

$$x_G = a - \frac{l}{2} \sin \varphi, \quad y_G = \frac{l}{2} \cos \varphi \quad (1)$$

А также его скорости:

$$\dot{x}_G = \dot{a} - \frac{l}{2} \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{y}_G = -\frac{l}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \quad (2)$$

Откуда квадрат скорости стержня:

$$v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 = \dot{a}^2 - l \cos \varphi \dot{a} \dot{\varphi} + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 \quad (3)$$

Момент инерции однородного стержня через центр масс примем

$$I_G = \frac{1}{12} ml^2$$

По теореме Кёнига (аддитивность кинетической энергии):

$$T_{\text{стерж}} = \frac{1}{2} mv_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{a}^2 - l \cos \varphi \dot{a} \dot{\varphi} + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{1}{24} ml^2 \dot{\varphi}^2 \quad (4)$$

Сложим с кинетической энергией тележки $T_{\text{тел}} = M \dot{a}^2 / 2$:

$$T = T_{\text{стерж}} + T_{\text{тел}} = \frac{1}{2} (M + m) \dot{a}^2 - \frac{1}{2} ml \cos \varphi \dot{a} \dot{\varphi} + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\varphi}^2 \quad (5)$$

Потенциальная энергия стержня (ноль на уровне шарнира):

$$V = mg y_G = mg \frac{l}{2} \cos \varphi \quad (6)$$

Из кинетической и потенциальной энергий получим Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} (M + m) \dot{a}^2 - \frac{1}{2} ml \cos \varphi \dot{a} \dot{\varphi} + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\varphi}^2 - mg \frac{l}{2} \cos \varphi. \quad (7)$$

На систему действуют две силы:

$$Q_a = u, \quad Q_\varphi = f$$

Для координаты a :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = Q_a \quad (8)$$

Поскольку $\partial \mathcal{L} / \partial a = 0$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = (M + m) \dot{a} - \frac{ml}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = (M+m)\ddot{a} - \frac{ml}{2} (\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2) \quad (10)$$

Отсюда получаем первое уравнение:

$$(M+m)\ddot{a} - \frac{ml}{2} \cos \varphi \ddot{\varphi} + \frac{ml}{2} \sin \varphi \dot{\varphi}^2 = u \quad (11)$$

Для координаты φ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = Q_\varphi \quad (12)$$

Вычисления:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -\frac{ml}{2} \cos \varphi \dot{a} + \frac{ml^2}{3} \dot{\varphi} \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{ml}{2} (\sin \varphi \dot{\varphi} \dot{a} - \cos \varphi \ddot{a}) + \frac{ml^2}{3} \ddot{\varphi} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{ml}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \dot{a} + \frac{mgl}{2} \sin \varphi \quad (15)$$

Подставляя и сокращая, получаем второе уравнение:

$$\frac{ml^2}{3} \ddot{\varphi} - \frac{ml}{2} \cos \varphi \ddot{a} - \frac{mgl}{2} \sin \varphi = f. \quad (16)$$

Запишем полученную систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} M+m & -\frac{ml}{2} \cos \varphi \\ -\frac{ml}{2} \cos \varphi & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{a} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - \frac{ml}{2} \sin \varphi \dot{\varphi}^2 \\ f + \frac{mgl}{2} \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (17)$$

Из обратной матрицы получаем явные выражения:

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= \frac{\frac{ml^2}{3} \left(u - \frac{ml}{2} \sin \varphi \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{ml}{2} \cos \varphi \left(f + \frac{mgl}{2} \sin \varphi \right)}{\frac{ml^2}{3} (M+m) - \left(\frac{ml}{2} \cos \varphi \right)^2} \\ \ddot{\varphi} &= \frac{\frac{ml}{2} \cos \varphi \left(u - \frac{ml}{2} \sin \varphi \dot{\varphi}^2 \right) + (M+m) \left(f + \frac{mgl}{2} \sin \varphi \right)}{\frac{ml^2}{3} (M+m) - \left(\frac{ml}{2} \cos \varphi \right)^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Вспомним, что $x_1 = a$, $x_2 = \dot{a}$, $x_3 = \varphi$, $x_4 = \dot{\varphi}$. Тогда математическую модель можно записать в виде системы уравнений только с производными первых порядков:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{ml^2}{3} \left(u - \frac{ml}{2} \sin x_3 x_4^2 \right) + \frac{ml}{2} \cos x_3 \left(f + \frac{mgl}{2} \sin x_3 \right) \\ \quad \frac{ml^2}{3} \left(M + m \right) - \left(\frac{ml}{2} \cos x_3 \right)^2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{ml}{2} \cos x_3 \left(u - \frac{ml}{2} \sin x_3 x_4^2 \right) + (M+m) \left(f + \frac{mgl}{2} \sin x_3 \right) \\ \quad \frac{ml^2}{3} \left(M + m \right) - \left(\frac{ml}{2} \cos x_3 \right)^2 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases}$$

Можно также чуть упростить, сократив на общее ml :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{l}{3} \left(u - \frac{ml}{2} \sin x_3 x_4^2 \right) + \frac{\cos x_3}{2} \left(f + \frac{mgl}{2} \sin x_3 \right) \\ \quad \frac{l}{3} \left(M + m \right) - \frac{ml}{4} \cos^2 x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{ml}{2} \cos x_3 \left(u - \frac{ml}{2} \sin x_3 x_4^2 \right) + (M+m) \left(f + \frac{mgl}{2} \sin x_3 \right) \\ \quad \frac{ml^2}{3} \left(M + m \right) - \frac{m^2 l^2}{4} \cos^2 x_3 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (19)$$

Успех! Полученную модель назовем *исходной* либо *нелинейной*.

1.2 Точки равновесия

Точки равновесия системы задаются через условие $\dot{x} = 0$. При-
нимая вместе с этим $u \equiv 0$ и $f \equiv 0$ (отсутствие всякого внешнего
воздействия и управления), из того, что $\dot{x}_1 = 0$ и $\dot{x}_3 = 0$, имеем:

$$x_2 = 0 \quad \text{и} \quad x_4 = 0$$

Для $\dot{x}_2 = 0$ и $\dot{x}_4 = 0$ же обнуление производных вектора состоя-
ния и воздействий даёт систему уравнений относительно x_3 :

$$\begin{cases} \frac{mgl \sin x_3 \cos x_3}{4} = 0 \\ \frac{(M+m)mgl \sin x_3}{2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \sin x_3 \cos x_3 = 0 \\ \sin x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение целой системы есть пересечение решений приведенных
выше уравнений, следовательно:

$$\sin x_3 = 0 \implies x_3 = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

На $x_1 = a$ ограничений нет, поэтому она задается произвольно.
А значит, все точки равновесия задаются как:

$$\begin{cases} x_1 = a = a_0 \in \mathbb{R} \\ x_2 = \dot{a} = 0 \\ x_3 = \varphi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

То есть точки равновесия характеризуются тем, что тележка на-
ходится в любой произвольной позиции, скорости отсутствуют, а ма-
ятник вертикален и находится в верхнем или нижнем положениях.

1.3 Линеаризация системы

Линеаризуем уравнения около точки равновесия $(x, u, f) = 0$.
Для этого воспользуемся тем, что для малых x и $n \in \mathbb{N}$: $\sin x \approx x$,

$\cos x \approx 1$ и $x^{n+1} \approx 0$. Из этого также следует $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \approx 1$ для малых x . В итоге получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{l}{3}u + \frac{1}{2}\left(f + \frac{mgl}{2}x_3\right) \\ \dot{x}_3 = \frac{l}{3}(M+m) - \frac{ml}{4} \\ \dot{x}_4 = \frac{ml}{2}u + (M+m)\left(f + \frac{mgl}{2}x_3\right) \\ \dot{x}_4 = \frac{ml^2}{3}(M+m) - \frac{m^2l^2}{4} \end{cases}$$

Упростим полученную систему, домножив числитель и знаменатель на общее 12 и приведя подобные:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{4ul + 6f + 3mglx_3}{(4M+m)l} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{6mlu + (M+m)(12f + 6mglx_3)}{ml^2(4M+m)} \end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{4}{4M+m}u + \frac{6}{l(4M+m)}f + \frac{3mg}{4M+m}x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{6}{l(4M+m)}u + \frac{12(M+m)}{ml^2(4M+m)}f + \frac{6g(M+m)}{l(4M+m)}x_3 \end{cases} \quad (21)$$

Получим линейную или линеаризованную модель системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df \\ y = Cx \end{cases} \quad (22)$$

где A, B, C, D – постоянные матрицы, зависящие от значений постоянных M, m, g, l . Здесь $x = (x_1, \dots, x_4)$ – совокупный вектор состояния, $y = (y_1, y_2)$ – вектор измеряемых величин.

В выкладках выше уже разделили на составляющие, поэтому:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3mg}{4M+m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{6g(M+m)}{l(4M+m)} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ \frac{4M+m}{l(4M+m)} \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ \frac{l(4M+m)}{12(M+m)} \\ ml^2(4M+m) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4 Выбор исходных данных

Для получения значений массы тележки M , массы маятника m и длины стержня l выполним код при номере варианта $n = 11$:

```
1 rng(n, "philox");
2 M = randi([100000 1000000]) / 1000 / sqrt(2);
3 m = randi([1000 10000]) / 1000 * sqrt(3);
4 l = randi([100 1000]) / sqrt(5) / 100;
```

Таким образом, в приближенном виде получаем (единицами измерения пусть будут килограммы и метры):

$$M \approx 630.88 \text{ кг}, \quad m \approx 2.3642 \text{ кг}, \quad l \approx 1.7039 \text{ м}$$

Также примем ускорение свободного падения $g = 9.81 \text{ м/с}^2$.

2 Анализ математической модели

2.1 Анализ матриц

Проведем анализ устойчивости линеаризованной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df \\ y = Cx \end{cases}$$

с матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3mg}{4M+m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{6g(M+m)}{l(4M+m)} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ \frac{4M+m}{l(4M+m)} \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ \frac{l(4M+m)}{12(M+m)} \\ \frac{ml^2(4M+m)}{12(M+m)} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Для этого сначала найдем собственные числа матрицы A :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2.9429, \quad \lambda_4 = -2.9429$$

И соответствующие им собственные векторы:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.003 \\ 0.3217 \\ 0.9468 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} -0.001 \\ 0.003 \\ -0.3217 \\ 0.9468 \end{bmatrix}$$

Таким образом, имеется одно положительное собственное число, а значит, линеаризованная система является неустойчивой. В таком случае исходная нелинейная система тем более неустойчива.

Проанализируем теперь управляемость системы. Сделаем это с помощью критерия Калмана, вычислив матрицу управляемости:

$$U = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0.0016 & 0 & 0 \\ 0.0016 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0014 & 0 & 0.0121 \\ 0.0014 & 0 & 0.0121 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Откуда:

$$\text{rank}(U) = 4$$

Ранг найденной матрицы равен размерности вектора состояния, а значит, система полностью управляема, соответственно, и стабилизируема, так как не оказалось неуправляемых мод (направлений).

Проверим и наблюдаемость системы. Выполним это также с помощью критерия Калмана с вычислением матрицы наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.0275 & 0 \\ 0 & 0 & 8.6604 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0275 \\ 0 & 0 & 0 & 8.6604 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Откуда:

$$\text{rank}(V) = 4$$

Ранг матрицы наблюдаемости равен размерности вектора состояния, а значит, система полностью наблюдаема, следовательно, и обнаруживаема, так как полный ранг V говорит об отсутствии ненаблюдаемых направлений (мод) у системы.

Таким образом, хоть линеаризованная модель оказалась неустойчивой, но над ней можно строить регуляторы и наблюдатели (есть полная управляемость и наблюдаемость), которые позволяют, например, стабилизировать систему в окрестности точек равновесия и оценить ее вектор состояния в случае отсутствия прямых измерений.

Найдем и проанализируем ещё и передаточные матрицы системы:

$$W_{u \rightarrow y}(s) = C(sI - A)^{-1}B, \quad W_{f \rightarrow y}(s) = C(sI - A)^{-1}D \quad (25)$$

Откуда:

$$W_{u \rightarrow y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.002848s^2 - 0.01536}{s^2(s^2 - 5.525)} \\ \frac{0.001566}{s^2 - 5.525} \end{bmatrix}, \quad W_{f \rightarrow y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.001566}{s^2 - 5.525} \\ \frac{0.03632}{s^2 - 5.525} \end{bmatrix}$$

Передаточная матрица $W_{u \rightarrow y}(s)$ отражает динамическое влияние управляющего воздействия на ее выход — положение тележки и угол отклонения маятника, так как $y = Cx = (x_1, x_3)$. Каждый элемент этой матрицы представляет собой передаточную функцию от управления к одной из выходных координат, тем самым описывая, как управление влияет на соответствующую переменную.

Аналогично, матрица $W_{f \rightarrow y}(s)$ характеризует влияние внешнего возмущения на положение тележки и угол отклонения маятника.

Начнём с $W_{u \rightarrow y}(s)$.

Рассмотрим первый элемент передаточной матрицы:

$$W_{u \rightarrow y}(1, 1) = \frac{0.002848s^2 - 0.01536}{s^2(s^2 - 5.525)}$$

Его динамический порядок равен 4, относительный — равен 2. Нули — $\{\pm 2.9387\}$, полюса — $\{0, 0, \pm 2.9429\}$.

Соответственно, управляющее воздействие доходит до координаты тележки не сразу, а через инерцию и связь тележки с маятником.

Также наличие двух нулевых полюсов означает, что на тележку не действует сил трения, следовательно, в отсутствие внешних сил тележка сохраняет скорость — со временем без стабилизации тележка будет уезжать в сторону.

Близкие значения полюсов и нулей приводят к ослаблению влияния управления на положение тележки вблизи этих частот.

Действительный положительный полюс также говорит о неустойчивости системы, как минимум, вблизи точек равновесия.

Рассмотрим второй элемент передаточной матрицы:

$$W_{u \rightarrow y}(2, 1) = \frac{0.001566}{s^2 - 5.525}$$

Динамический и относительный порядки равны 2. Нули отсутствуют, так как числитель является константой, полюса - $\{\pm 2.9429\}$.

Таким образом, влияние управления на угол происходит с задержкой, связанной с инерцией и связью тележки с маятником.

Положительный полюс, как и прежде, говорит о неустойчивости положения маятника вблизи точек равновесия.

Перейдём ко второй передаточной матрице $W_{f \rightarrow y}(s)$.

Рассмотрим первый элемент:

$$W_{f \rightarrow y}(1, 1) = \frac{0.001566}{s^2 - 5.525}$$

Динамический и относительный порядки равны 2. Нули отсутствуют, полюса - $\{\pm 2.9429\}$.

В итоге внешнее возмущение f действует на координату тележки через динамику маятника, обладающую инерционным характером второго порядка. Наличие положительного полюса отражает неустойчивость системы при действии возмущений.

Рассмотрим второй элемент передаточной матрицы:

$$W_{f \rightarrow y}(2, 1) = \frac{0.03632}{s^2 - 5.525}$$

Динамический и относительный порядки равны 2. Нули отсутствуют, полюса - $\{\pm 2.9429\}$.

Числитель данного элемента значительно больше, чем у предыдущего, что указывает на более сильное влияние возмущения f на угол отклонения маятника по сравнению с перемещением тележки. Система остается неустойчивой, существует инерция.

2.2 Моделирование

Выполним моделирование свободного движения линеаризованного и нелинейного объекта при малых начальных условиях.

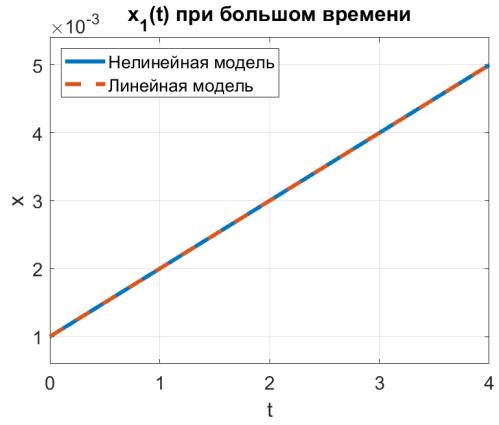
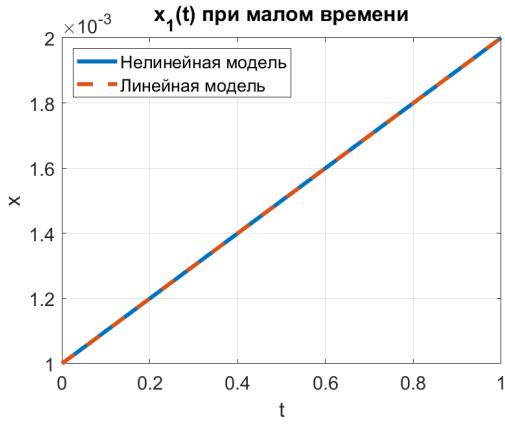


Рис. 2: $x_1(t) = a(t)$ с начальным состоянием $x_0 = [0.001 \quad 0.001 \quad 0 \quad 0]^T$

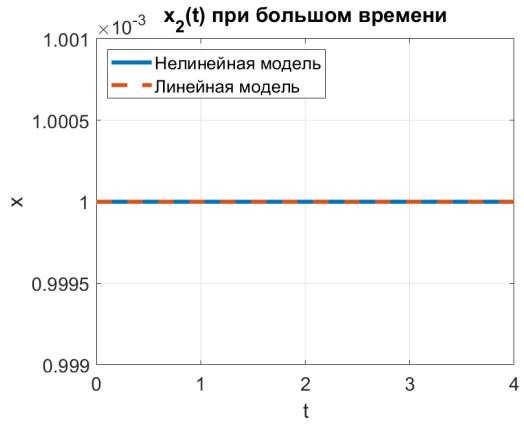
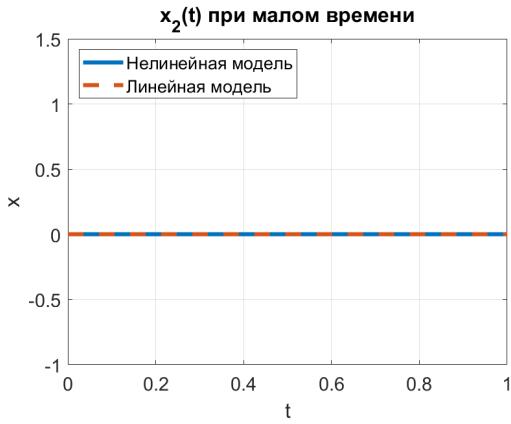


Рис. 3: $x_2(t) = \dot{a}(t)$ с начальным состоянием $x_0 = [0.001 \quad 0.001 \quad 0 \quad 0]^T$

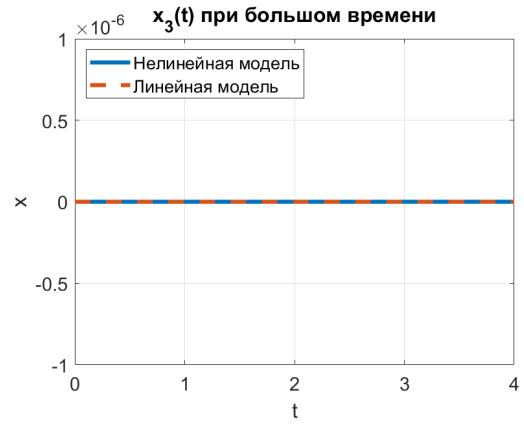
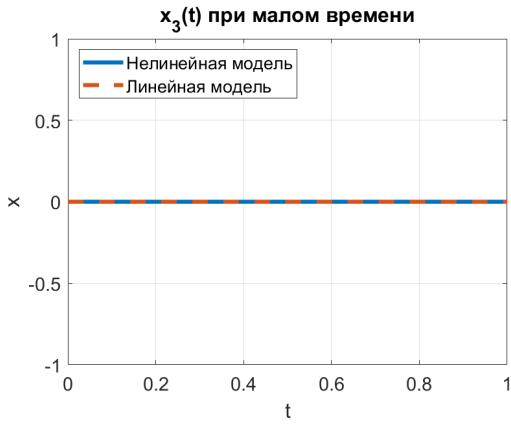


Рис. 4: $x_3(t) = \varphi(t)$ с начальным состоянием $x_0 = [0.001 \quad 0.001 \quad 0 \quad 0]^T$

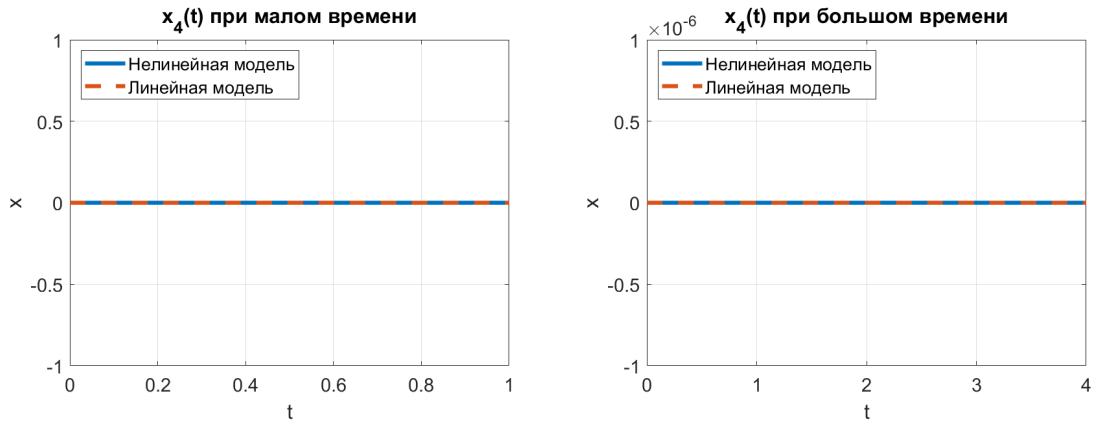


Рис. 5: $x_4(t) = \dot{\varphi}(t)$ с начальным состоянием $x_0 = [0.001 \quad 0.001 \quad 0 \quad 0]^T$

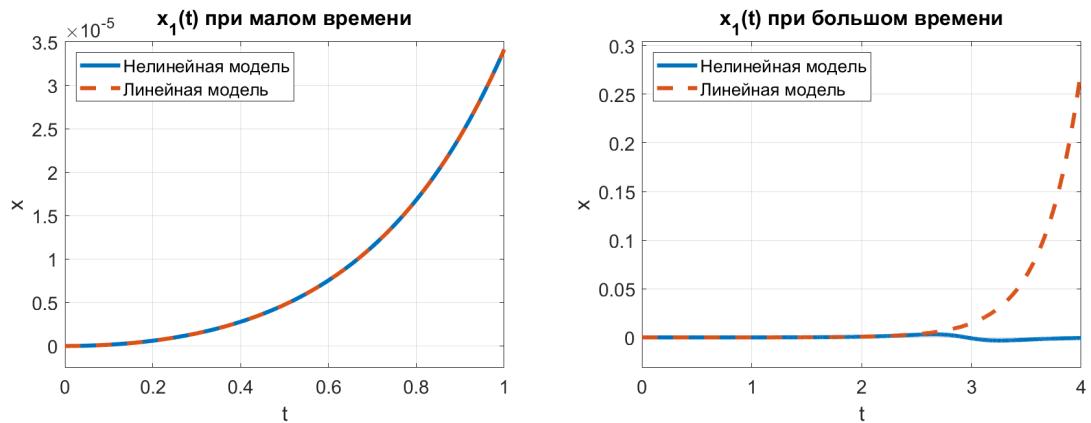


Рис. 6: $x_1(t) = a(t)$ с начальным состоянием $x_0 = [0 \quad 0 \quad 0.001 \quad 0.001]^T$

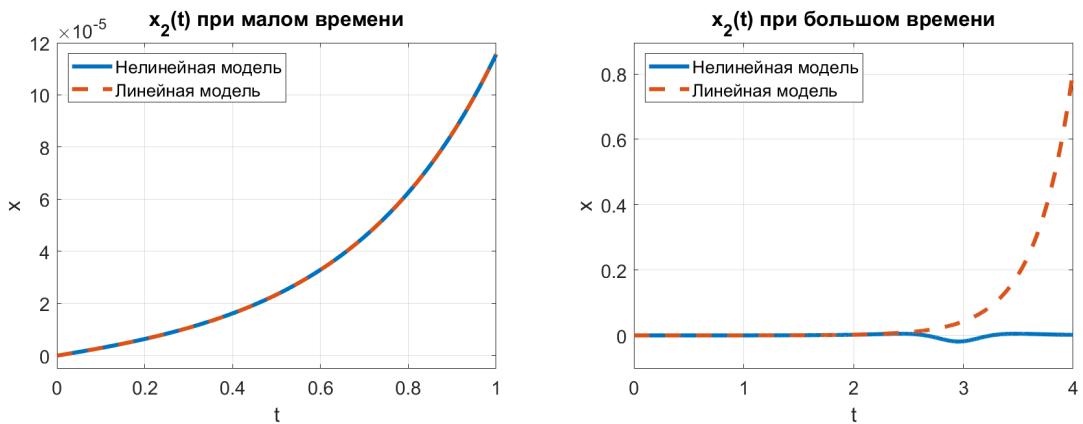


Рис. 7: $x_2(t) = \dot{a}(t)$ с начальным состоянием $x_0 = [0 \quad 0 \quad 0.001 \quad 0.001]^T$

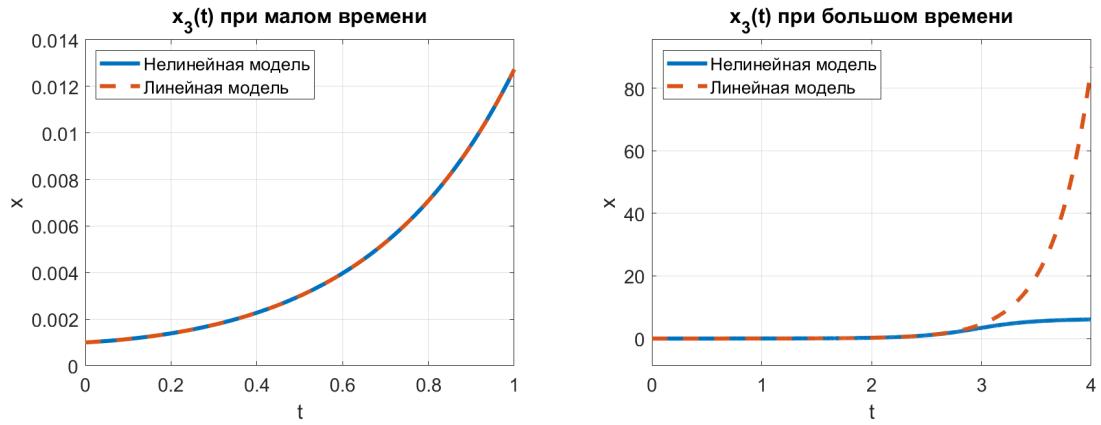


Рис. 8: $x_3(t) = \varphi(t)$ с начальным состоянием $x_0 = [0 \ 0 \ 0.001 \ 0.001]^T$

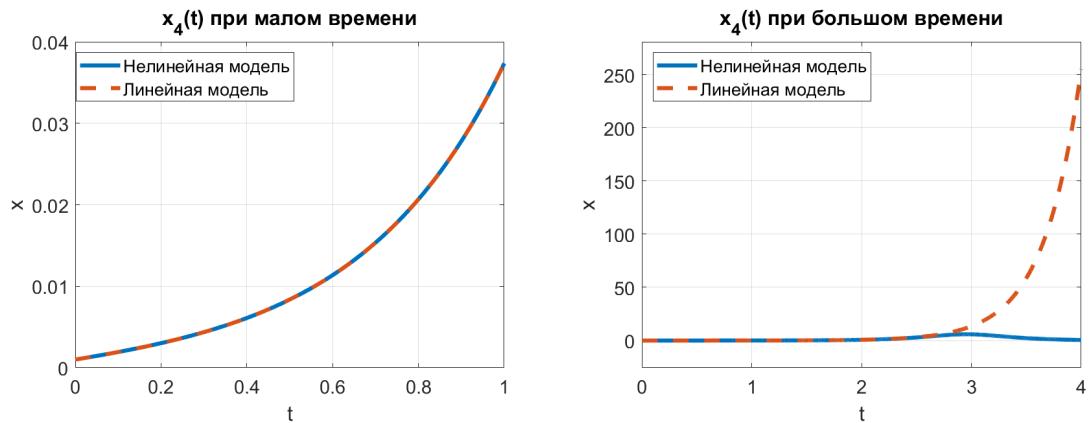


Рис. 9: $x_4(t) = \dot{\varphi}(t)$ с начальным состоянием $x_0 = [0 \ 0 \ 0.001 \ 0.001]^T$

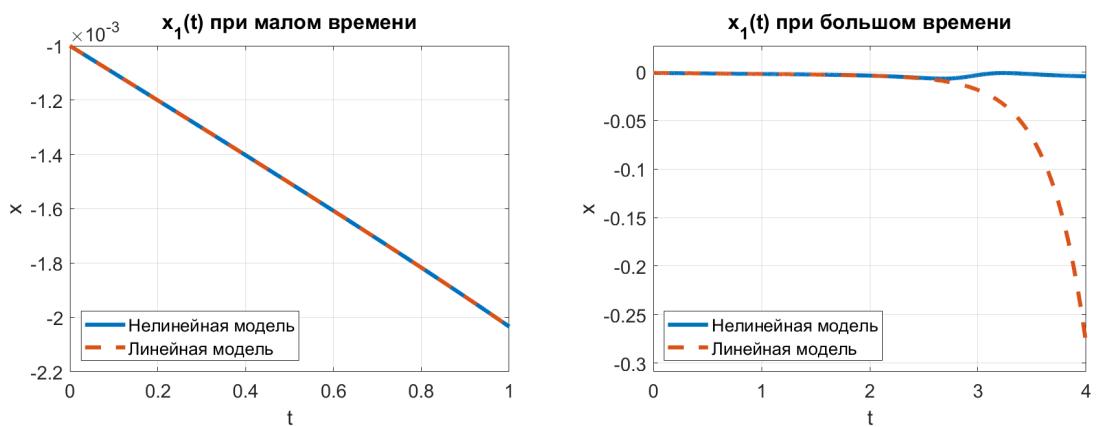


Рис. 10: $x_1(t) = a(t)$ с состоянием $x_0 = [-0.001 \ -0.001 \ -0.001 \ -0.001]^T$

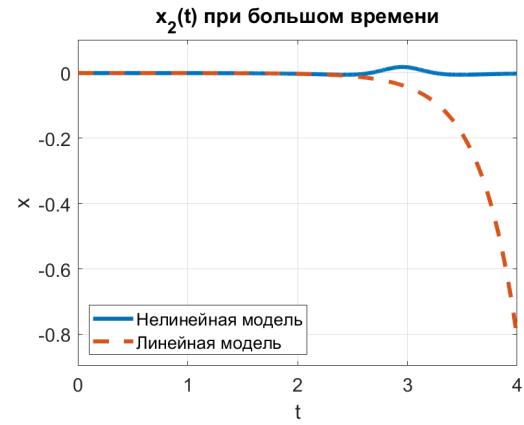
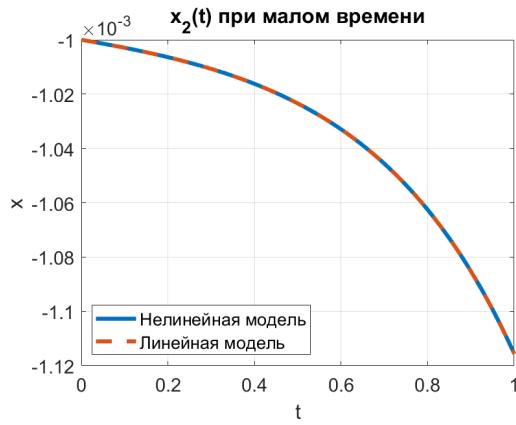


Рис. 11: $x_2(t) = \dot{a}(t)$ с состоянием $x_0 = [-0.001 \quad -0.001 \quad -0.001 \quad -0.001]^T$

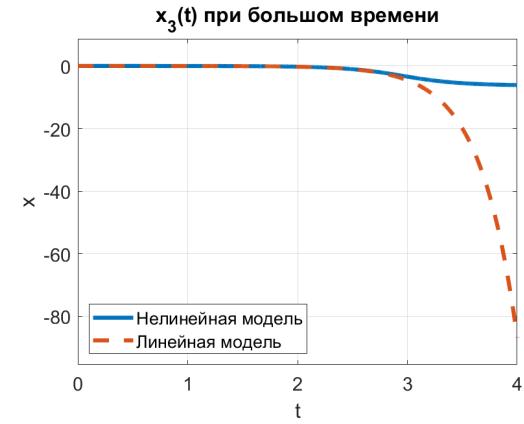
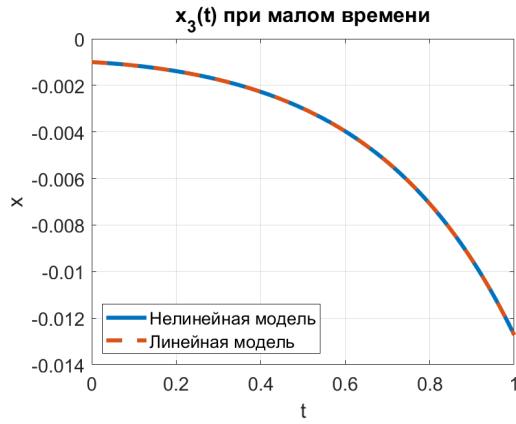


Рис. 12: $x_3(t) = \varphi(t)$ с состоянием $x_0 = [-0.001 \quad -0.001 \quad -0.001 \quad -0.001]^T$

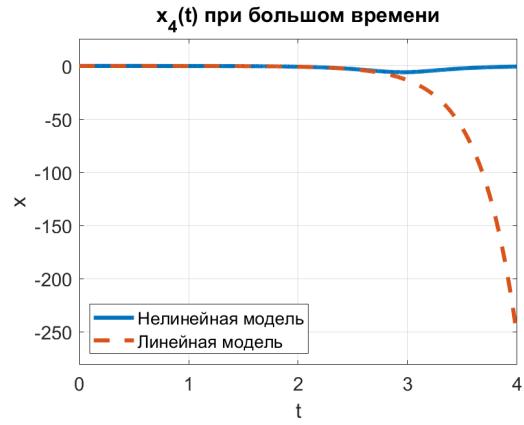
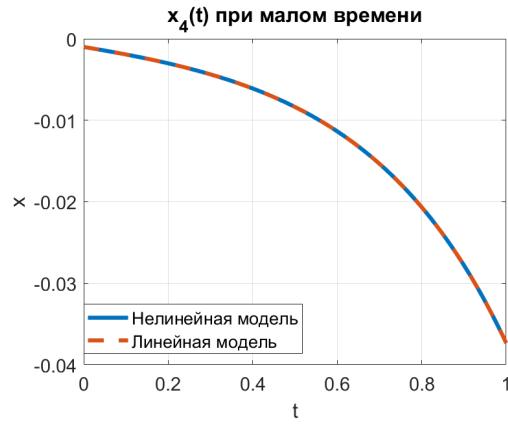


Рис. 13: $x_4(t) = \dot{\varphi}(t)$ с состоянием $x_0 = [-0.001 \quad -0.001 \quad -0.001 \quad -0.001]^T$

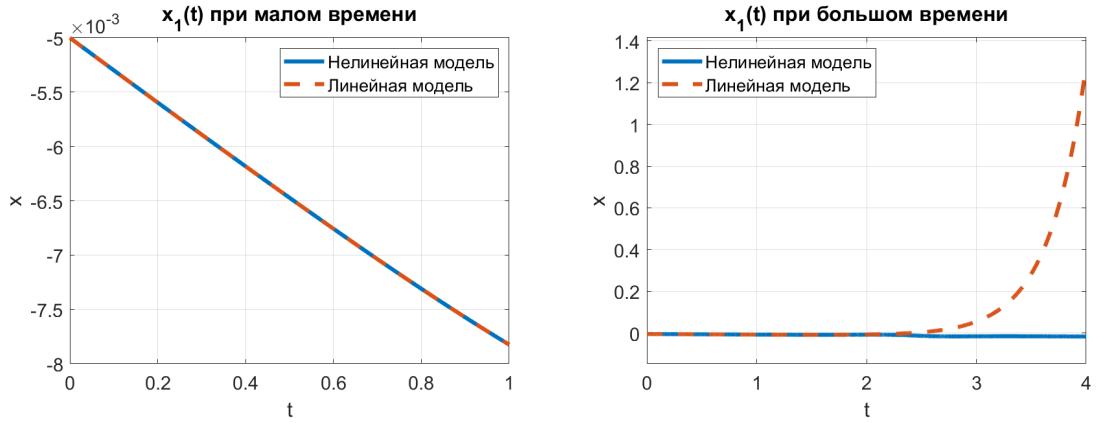


Рис. 14: $x_1(t) = a(t)$ с состоянием $x_0 = [-0.005 \quad -0.003 \quad 0.007 \quad -0.002]^T$

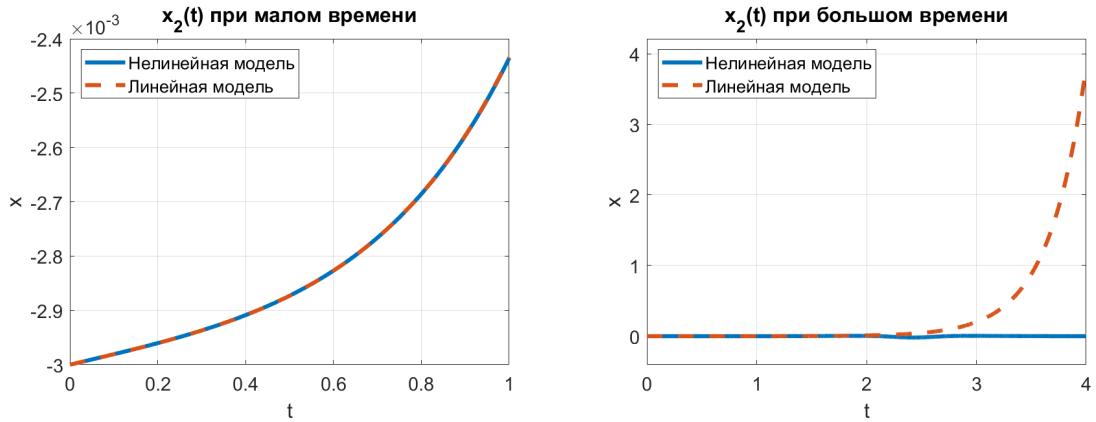


Рис. 15: $x_2(t) = \dot{a}(t)$ с состоянием $x_0 = [-0.005 \quad -0.003 \quad 0.007 \quad -0.002]^T$

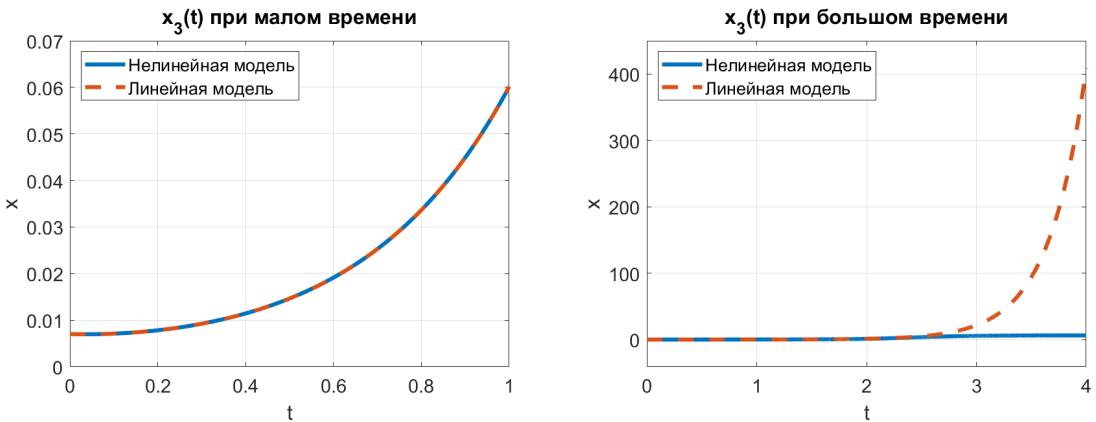


Рис. 16: $x_3(t) = \varphi(t)$ с состоянием $x_0 = [-0.005 \quad -0.003 \quad 0.007 \quad -0.002]^T$

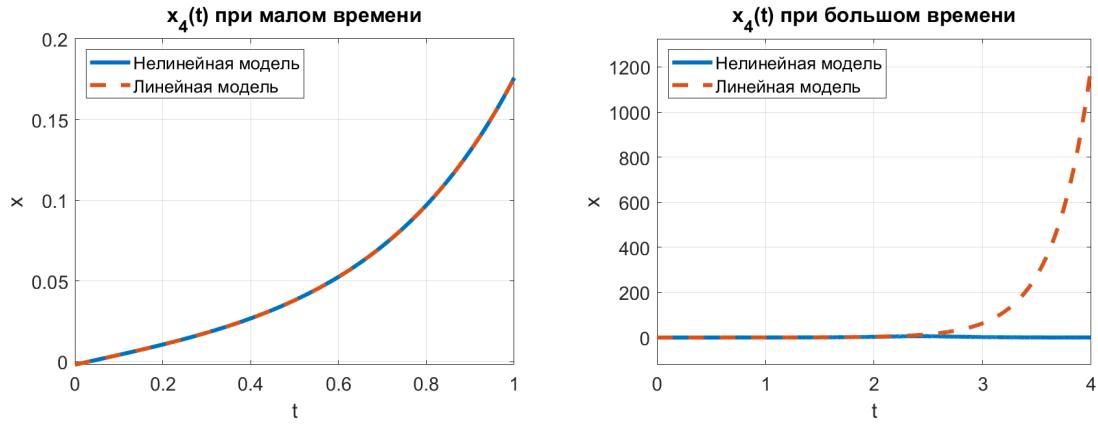


Рис. 17: $x_4(t) = \dot{\varphi}(t)$ с состоянием $x_0 = [-0.005 \ -0.003 \ 0.007 \ -0.002]^T$

На рисунках 2 - 17 можно наблюдать графики свободного движения систем при различных начальных условиях, не сильно отличающихся от нуля, при малом и большом времени моделирования.

Таким образом, линеаризованная система прекрасно приближает исходную в окрестности точек равновесия при малом времени моделирования. При увеличении последнего наблюдаются серьезные отклонения, так как из-за неустойчивости системы со временем происходит отдаление от точек равновесия.

Также можно заключить, что свободное движение тележки никак не влияет на движение маятника. А вот обратное не работает - маятник оказывает сильное влияние на движение тележки.

Кроме того, свободное движение линеаризованной системы полностью описывается линейно-порожденными функциями (оно и логично - она ведь линейна). В исходной же системе наблюдаются более сложные движения, присутствуют и некоторые колебания.

3 Стабилизация: модальное управление

3.1 Синтез регулятора по состоянию

Полученный объект управления оказался неустойчивым, поэтому актуальной становится задача стабилизации. Для её решения используем модальное управление и статический регулятор:

$$u = Kx \quad (26)$$

Все расчеты будем основывать на линеаризованной модели, а применять их к нелинейной (исходной) системе, пытаясь этим способом решить основную поставленную задачу стабилизации объекта.

Итак, имеем линеаризованную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df \\ y = Cx \end{cases}$$

с матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3mg}{4M+m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{6g(M+m)}{l(4M+m)} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ \frac{6}{l(4M+m)} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ \frac{l(4M+m)}{0} \\ \frac{12(M+m)}{ml^2(4M+m)} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Для нахождения матрицы обратной связи регулятора будем решать уравнение Сильвестра, а после находить K :

$$\begin{cases} AP - PG = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases} \quad (27)$$

Напомним условия существования единственного обратимого решения P (σ - спектр матрицы):

$$\begin{cases} \sigma(A) \cap \sigma(G) = \emptyset \\ (A, B) - \text{управляемая пара} \\ (Y, G) - \text{наблюдаемая пара} \end{cases} \quad (28)$$

Зададимся матрицами G и Y :

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad Y = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Таким образом, $\sigma(G) = \{-1, -2, -3, -4\}$.

С помощью введенных матриц получим K обратной связи:

$$K = [1754.8677 \ 3655.9743 \ -33311.0953 \ -11325.9253]$$

Теперь исследуем работоспособность синтезированного регулятора на нелинейной модели с различными начальными условиями в отсутствие внешних возмущений $f = 0$.

Итак, примем следующие начальные условия:

$$x_{0a} = [0.01 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad x_{0\dot{a}} = [0 \ 0.01 \ 0 \ 0]^T$$

$$x_{0\varphi} = [0 \ 0 \ 0.01 \ 0]^T, \quad x_{0\dot{\varphi}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0.01]^T$$

А также «ломающие» начальные условия, при которых регулятор уже не справляется со стабилизацией:

$$x'_{0a} = [20 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad x'_{0\dot{a}} = [0 \ 9 \ 0 \ 0]^T$$

$$x'_{0\varphi} = [0 \ 0 \ 1.1 \ 0]^T, \quad x'_{0\dot{\varphi}} = [0 \ 0 \ 0 \ 6]^T$$

Выполним моделирование. На рисунках 18 - 25 можно наблюдать состояния нелинейной модели при различных начальных условиях и выбранном регуляторе.

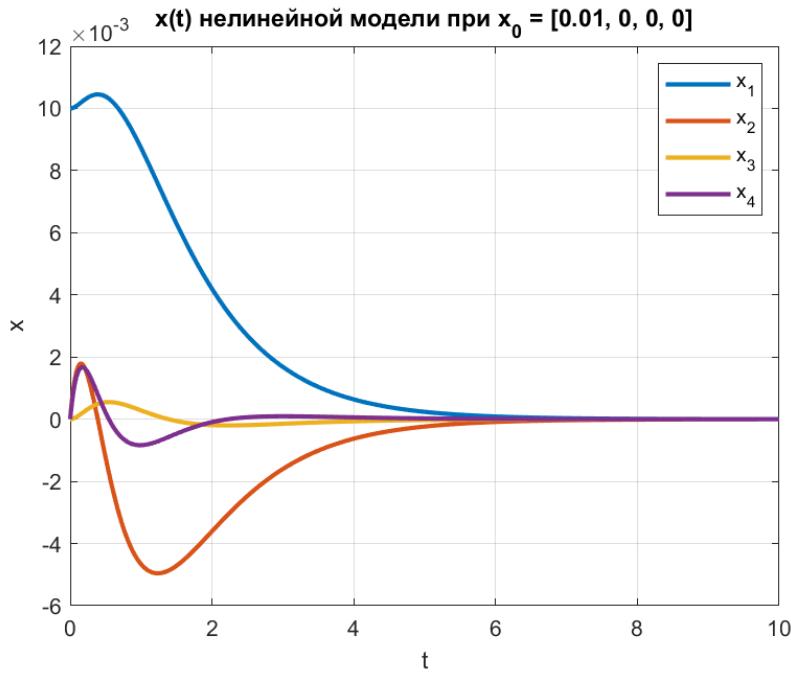


Рис. 18: Состояния нелинейной модели при $x_{0a} = [0.01 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

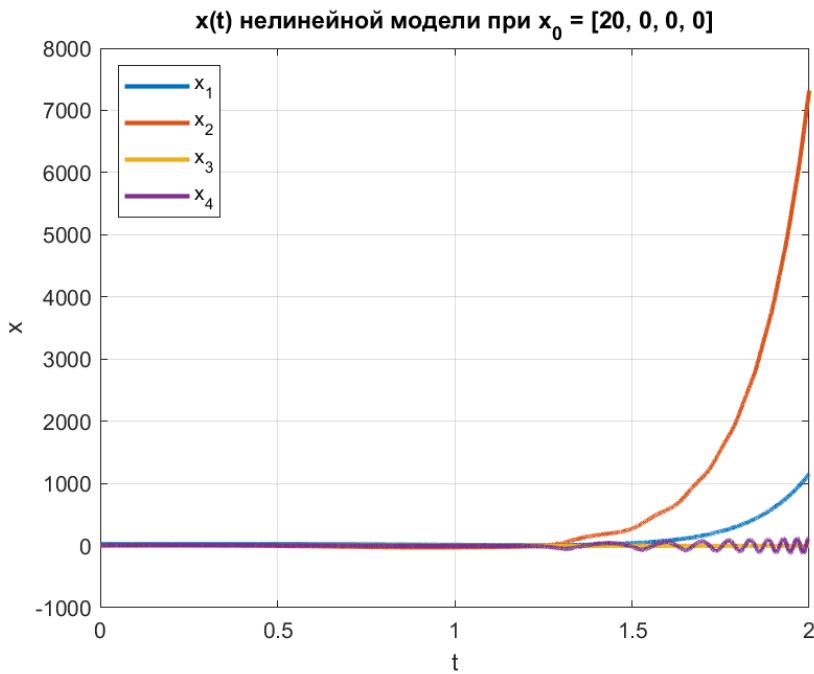


Рис. 19: Состояния нелинейной модели при ломающем $x'_{0a} = [20 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

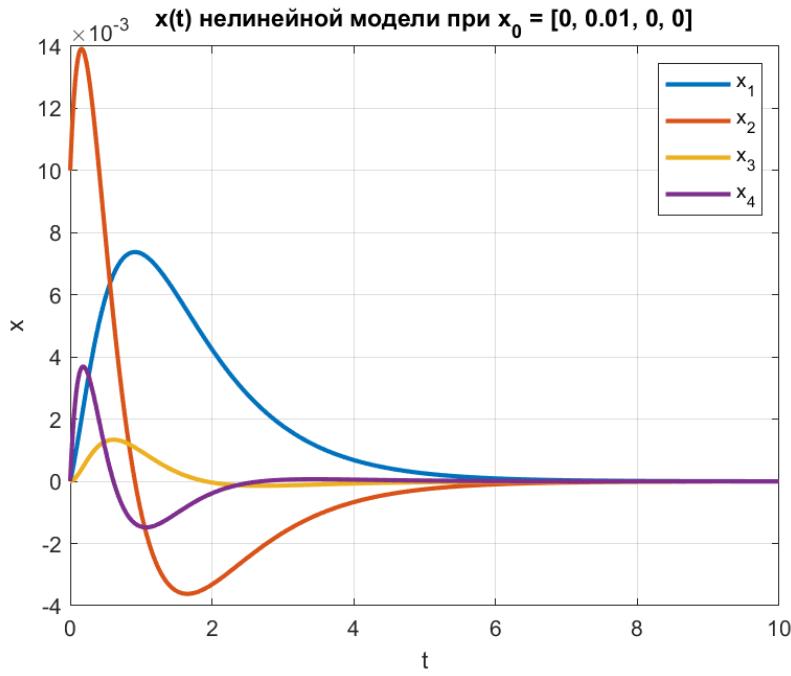


Рис. 20: Состояния нелинейной модели при $x_{0\dot{a}} = [0 \ 0.01 \ 0 \ 0]^T$

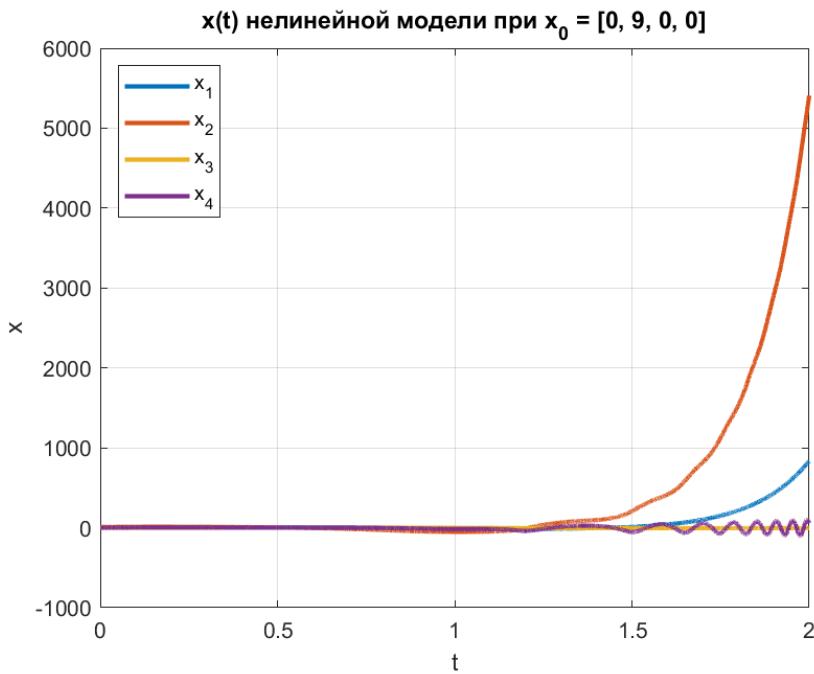


Рис. 21: Состояния нелинейной модели при ломающем $x'_{0\dot{a}} = [0 \ 9 \ 0 \ 0]^T$

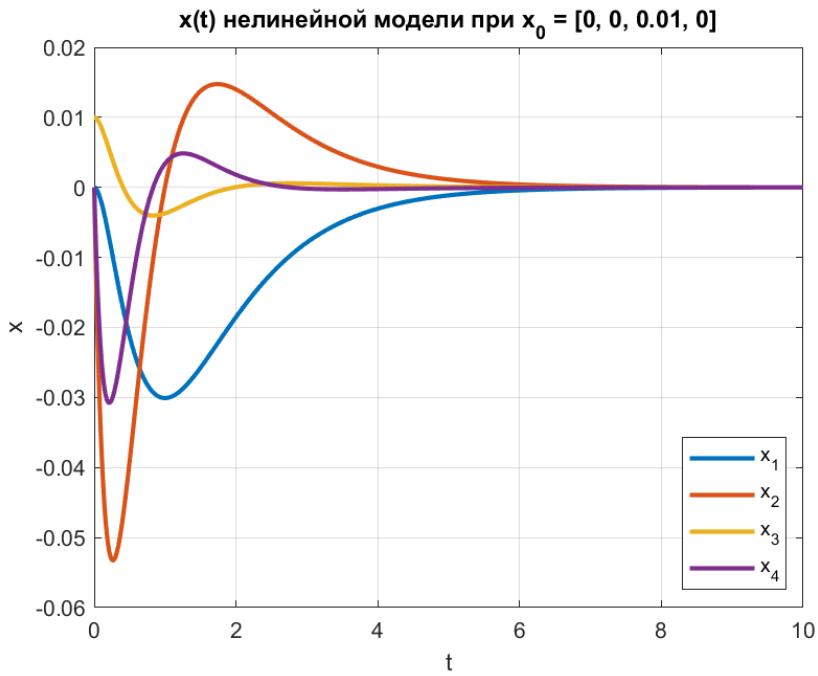


Рис. 22: Состояния нелинейной модели при $x_{0\varphi} = [0 \ 0 \ 0.01 \ 0]^T$

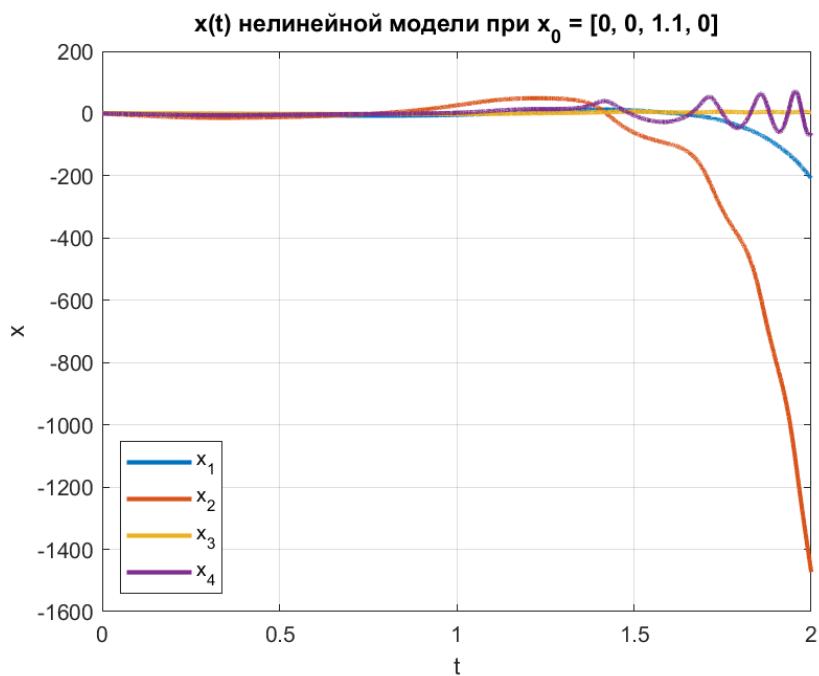


Рис. 23: Состояния нелинейной модели при ломающем $x'_{0\varphi} = [0 \ 0 \ 1.1 \ 0]^T$

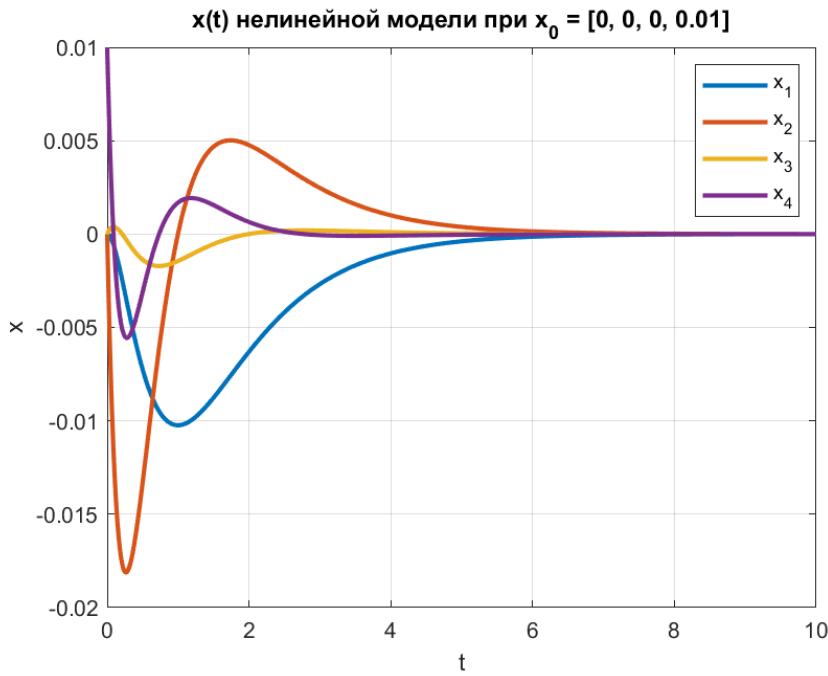


Рис. 24: Состояния нелинейной модели при $x_{0\dot{\varphi}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0.01]^T$

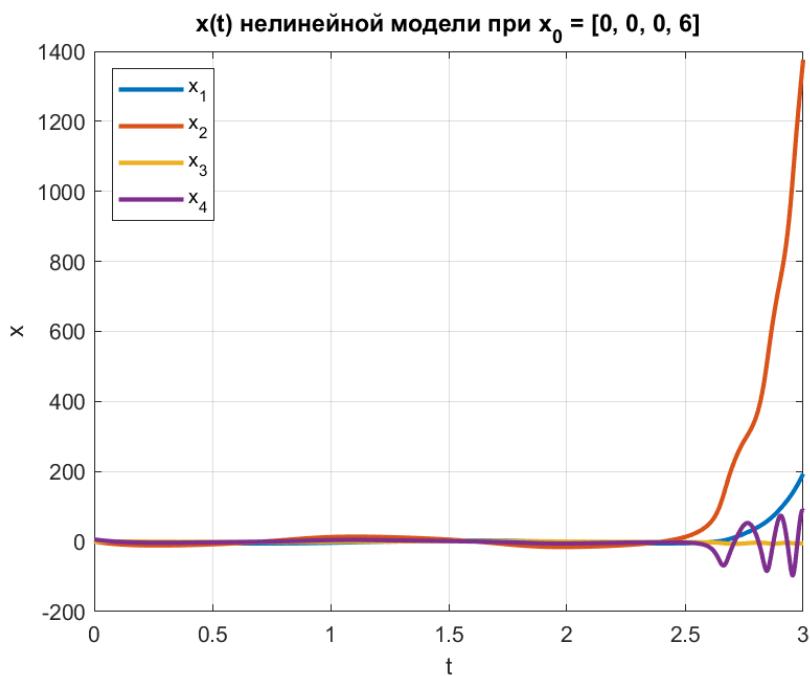


Рис. 25: Состояния нелинейной модели при ломающем $x'_{0\dot{\varphi}} = [0 \ 0 \ 0 \ 6]^T$

Можем видеть, что регулятор успешно справляется со стабилизацией системы при малых начальных условиях, однако уже недостаточно силен при больших - там вектор состояния системы стремится к бесконечности при увеличении времени. Наиболее это ощутимо для угла φ - для него синтезированный регулятор перестает работать уже на значении начального угла $\varphi_0 = 1.1$. Понятно, что полученное связано с тем, что все вычисления производились на основе линеаризованной модели, которая является хорошим приближением нелинейной модели только в окрестности точек равновесия.

3.2 Исследование регулятора по состоянию

Теперь посмотрим, можно ли каким-то образом качественно улучшить регулятор. Для этого исследуем влияние выбранных собственных чисел на получающиеся процессы для нелинейной системы.

Сперва зафиксируем начальные условия системы

$$x_0 = [-0.01 \ -0.2 \ 0.3 \ -0.15]^T$$

После чего зададимся различными матрицами G , характеризующими собственные числа замкнутой системы:

$$G_{r1} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G_{r2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$G_{r3} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad G_{r4} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Таким образом, хотим получить следующие спектры:

$$\sigma(G_{r1}) = \{-0.25, -0.5, -0.75, -1\}, \quad \sigma(G_{r2}) = \{-2, -2, -3, -3\}$$

$$\sigma(G_{r3}) = \{-2 \pm 4i, -3 \pm 4i\}, \quad \sigma(G_{r4}) = \{-4, -6, -8, -10\}$$

Также зададимся матрицей Y :

$$Y = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

С помощью введенных матриц получим K обратной связи с помощью уже введенного уравнения Сильвестра для регулятора:

$$K_1 = [6.8550 \ 57.1246 \ -7789.0109 \ -1858.1445]$$

$$K_2 = [2632.3015 \ 4387.1692 \ -35742.3965 \ -12156.5060]$$

$$K_3 = [36559.7434 \ 16086.2871 \ -97235.0116 \ -25445.7977]$$

$$K_4 = [140389.4148 \ 90083.2079 \ -369397.4406 \ -122412.006]$$

Выполним моделирование. На рисунках 26 - 33 можно наблюдать состояния нелинейной модели и управления при различных матрицах G и получающихся при этом регуляторах.

Проведем анализ полученных процессов. Для этого найдем максимальные отклонения маятника от вертикали:

$$\varphi_{1max} = 0.3, \quad \varphi_{2max} = 0.3, \quad \varphi_{3max} = 0.4301, \quad \varphi_{4max} = 0.3465$$

Максимальные горизонтальные смещения тележки:

$$a_{1max} = 7.5503, \quad a_{2max} = 0.8904, \quad a_{3max} = 0.9119, \quad a_{4max} = 0.7933$$

А также максимальные управляющие воздействия:

$$u_{1max} = 2069.5, \quad u_{2max} = 9803, \quad u_{3max} = 28936, \quad u_{4max} = 111878$$

Можем заключить, что более отдаленные от мнимой оси собственные числа требуют больших по величине управляющих воздействий, однако при этом процессы стабилизации происходят в разы быстрее, а величина максимального смещения тележки значительно меньше.

Добавление комплексно-сопряженных собственных чисел позволяет добиться небольшого ускорения переходных процессов, но при этом появляются заметные колебания, увеличивается и максимальное затрачиваемое управление.

На мой взгляд, наиболее сбалансированным по всем критериям получился второй регулятор с матрицей K_2 обратной связи.

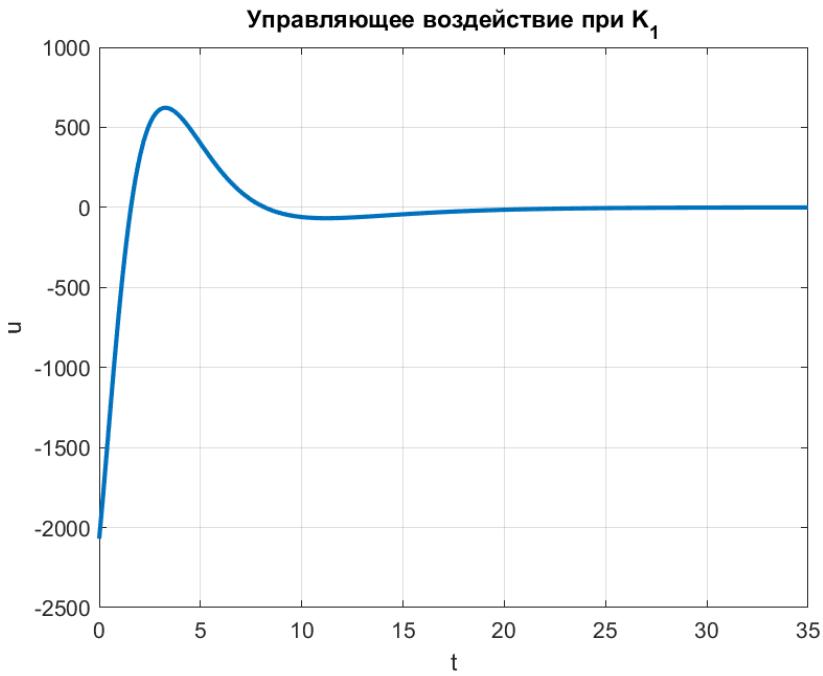


Рис. 26: График управления при $\sigma(G_{r1}) = \{-0.25, -0.5, -0.75, -1\}$

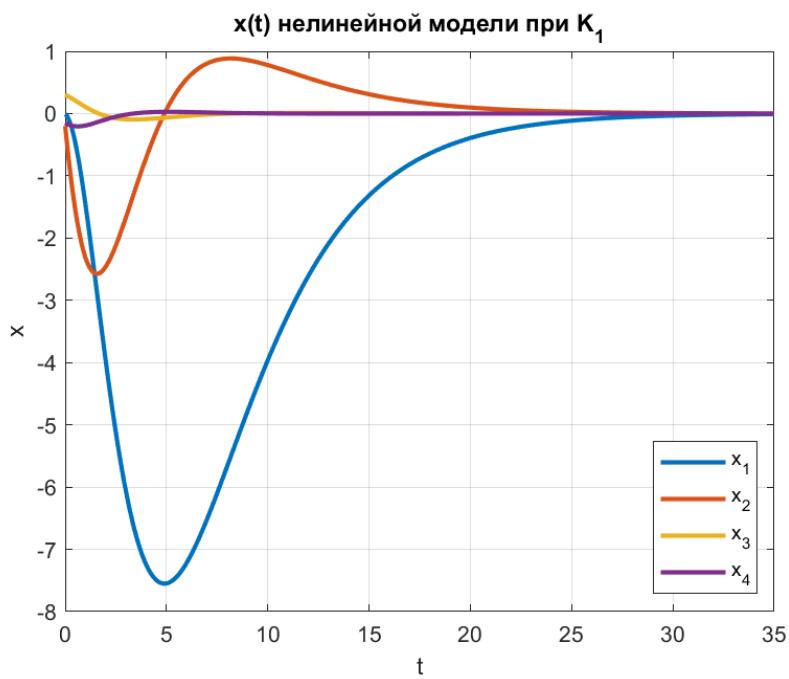


Рис. 27: График состояния при $\sigma(G_{r1}) = \{-0.25, -0.5, -0.75, -1\}$

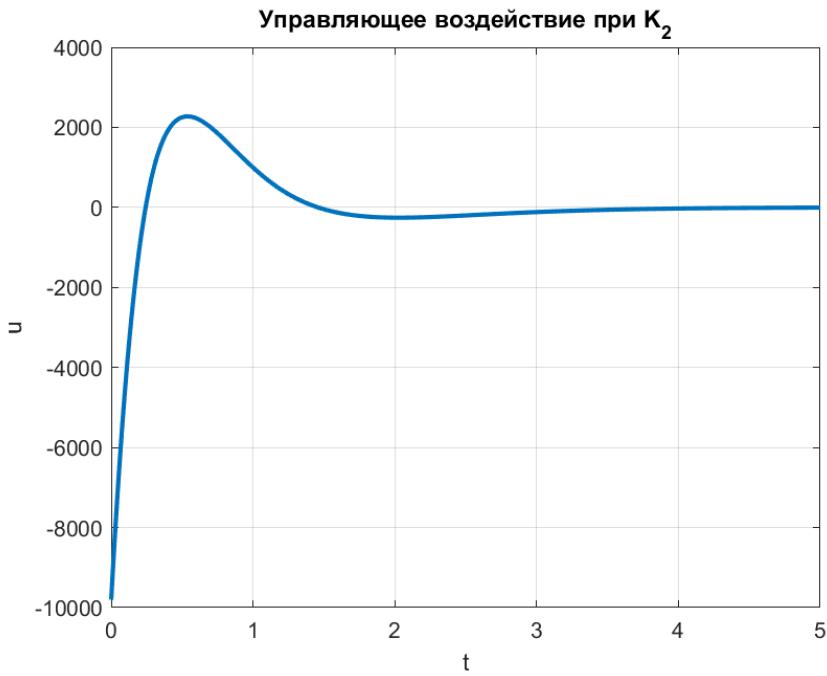


Рис. 28: График управления при $\sigma(G_{r2}) = \{-2, -2, -3, -3\}$

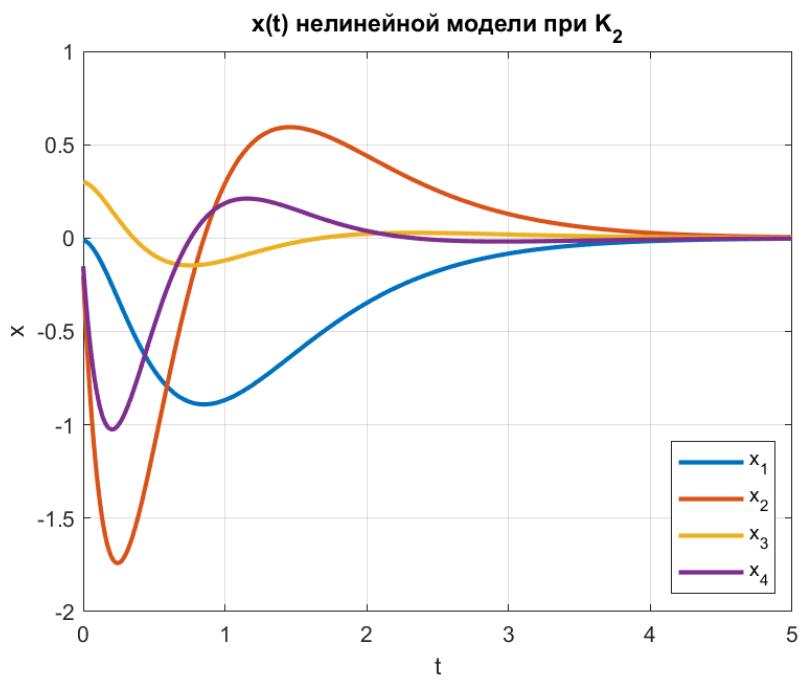


Рис. 29: График состояния нелинейной модели при $\sigma(G_{r2}) = \{-2, -2, -3, -3\}$

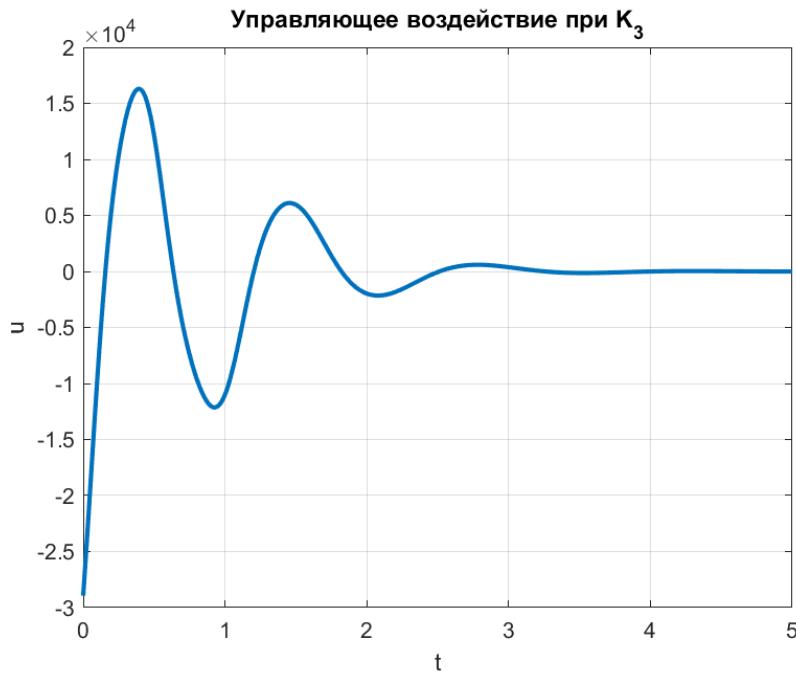


Рис. 30: График управления при $\sigma(G_{r3}) = \{-2 \pm 4i, -3 \pm 4i\}$

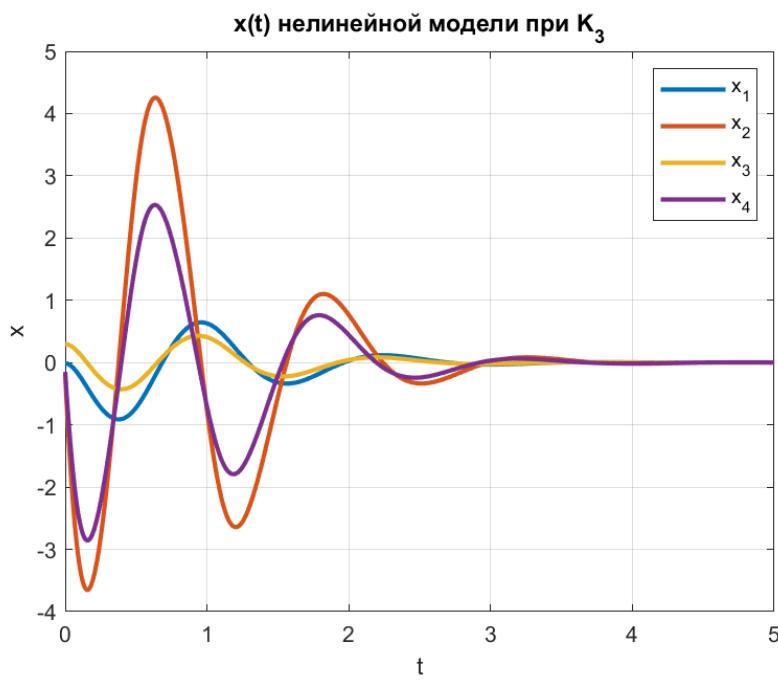


Рис. 31: График состояния нелинейной модели при $\sigma(G_{r3}) = \{-2 \pm 4i, -3 \pm 4i\}$

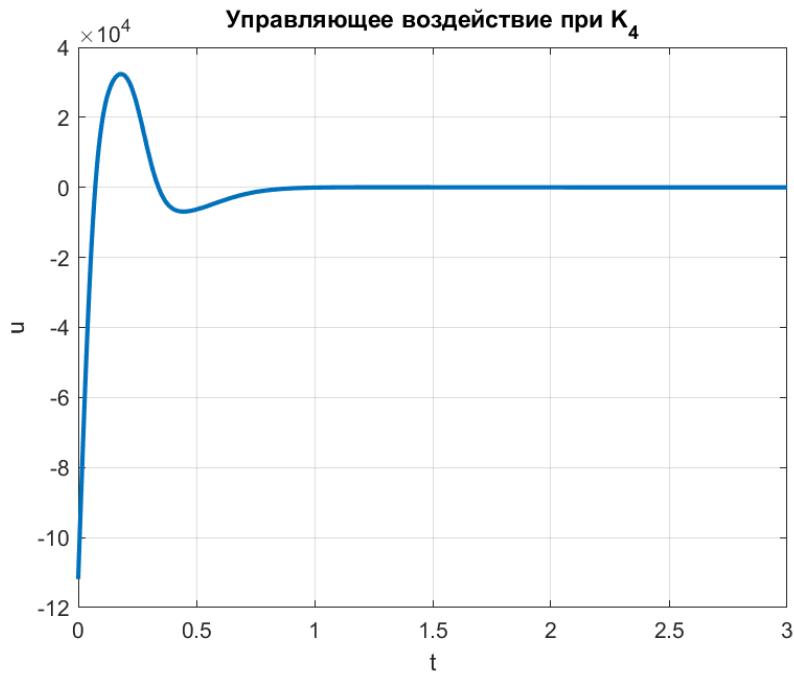


Рис. 32: График управления при $\sigma(G_{r4}) = \{-4, -6, -8, -10\}$

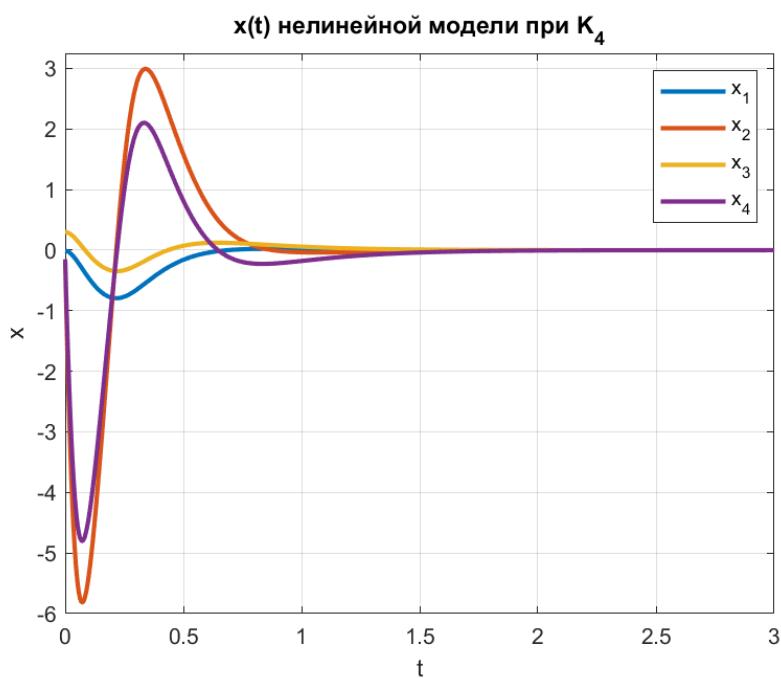


Рис. 33: График состояния нелинейной модели при $\sigma(G_{r4}) = \{-4, -6, -8, -10\}$

3.3 Синтез наблюдателя

Если доступными к измерению являются только y_1 и y_2 выходного сигнала, то для решения задачи стабилизации необходимо также добавить наблюдателей для оценки всего вектора состояния. Для начала рассмотрим наблюдатель полного порядка:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (29)$$

Синтезируем матрицу L с помощью уравнения Сильвестра:

$$\begin{cases} GQ - QA = YC \\ L = Q^{-1}Y \end{cases} \quad (30)$$

Напомним условия существования единственного обратимого решения Q (σ - спектр матрицы):

$$\begin{cases} \sigma(A) \cap \sigma(Q) = \emptyset \\ (C, A) - \text{наблюдаемая пара} \\ (G, Y) - \text{управляемая пара} \end{cases} \quad (31)$$

Начальные условия объекта и наблюдателя примем равными

$$x_0 = [0.025 \ 0.03 \ 0.015 \ -0.01]^T$$

$$\hat{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Все вычисления, как и прежде, будем проводить для линеаризованной модели, но применять их к нелинейной системе, так как было получено, что в окрестности точек равновесия линейное является хорошим приближением нелинейного.

Также замкнем систему первым регулятором по состоянию из предыдущего пункта, как наиболее «слабым» - у наблюдателя будет больше времени оценить состояние:

$$K = [6.8550 \ 57.1246 \ -7789.0109 \ -1858.1445]$$

Итак, зададимся матрицами G и Y :

$$G_{L1} = \begin{bmatrix} -0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad G_{L2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$G_{L3} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad G_{L4} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8.5 \end{bmatrix}$$

Таким образом:

$$\sigma(G_{L1}) = \{-0.75, -1.25, -1.5, -2\}, \quad \sigma(G_{L2}) = \{-2, -2, -4, -4\}$$

$$\sigma(G_{L3}) = \{-2 \pm 4i, -4 \pm 4i\}, \quad \sigma(G_{L4}) = \{-7, -7.5, -8, -8.5\}$$

Также зададимся матрицей Y :

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

С помощью введенных матриц получим L коррекции:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.0509 & 1.0509 \\ 0.2616 & 0.2616 \\ -6.5509 & -6.5509 \\ -19.8595 & -19.8595 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 11.0117 & 11.0117 \\ 7.1742 & 7.1742 \\ -23.0117 & -23.0117 \\ -67.8346 & -67.8346 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 33.1113 & 33.1113 \\ 73.3715 & 73.3715 \\ -45.1113 & -45.1113 \\ -166.0319 & -166.0319 \end{bmatrix}, \quad L_4 = \begin{bmatrix} 213.0993 & 213.0993 \\ 409.7459 & 409.7459 \\ -244.0993 & -244.0993 \\ -778.1563 & -778.1563 \end{bmatrix}$$

Перейдем к моделированию (рисунки 34 - 45). Зная, что регулятор и так стабилизирует систему, будем смотреть только на то, как быстро наблюдатель сойдется к состоянию нелинейной модели.

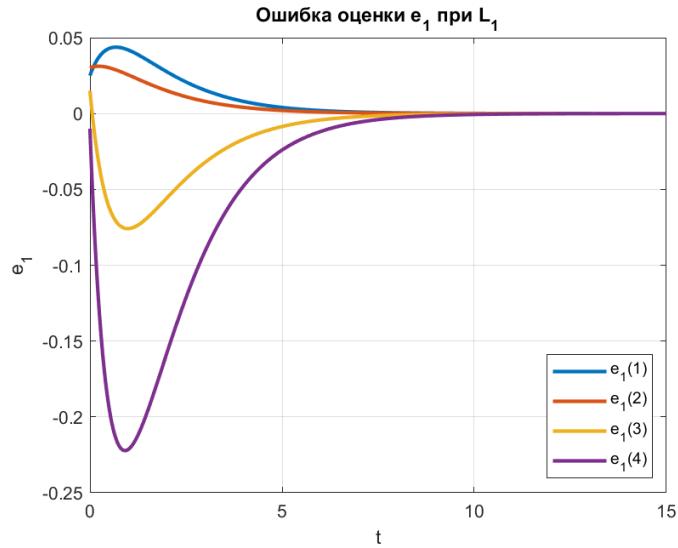


Рис. 34: График ошибки оценки при $\sigma(G_{L1}) = \{-0.75, -1.25, -1.5, -2\}$

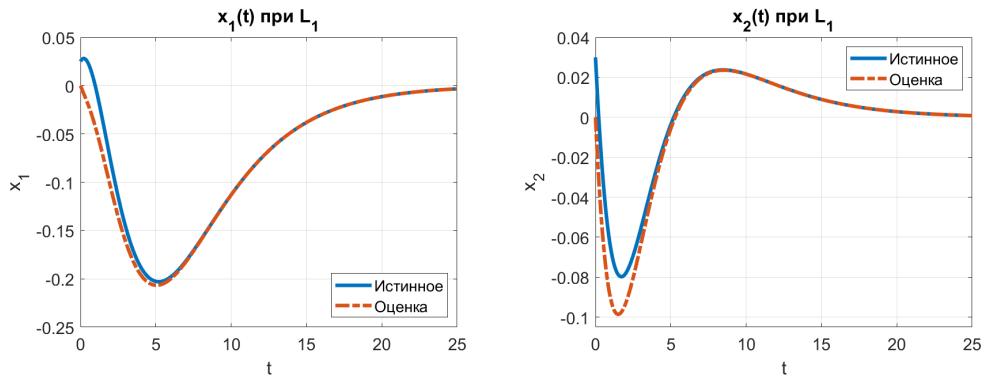


Рис. 35: Графики состояний x_1 и x_2 при $\sigma(G_{L1}) = \{-0.75, -1.25, -1.5, -2\}$

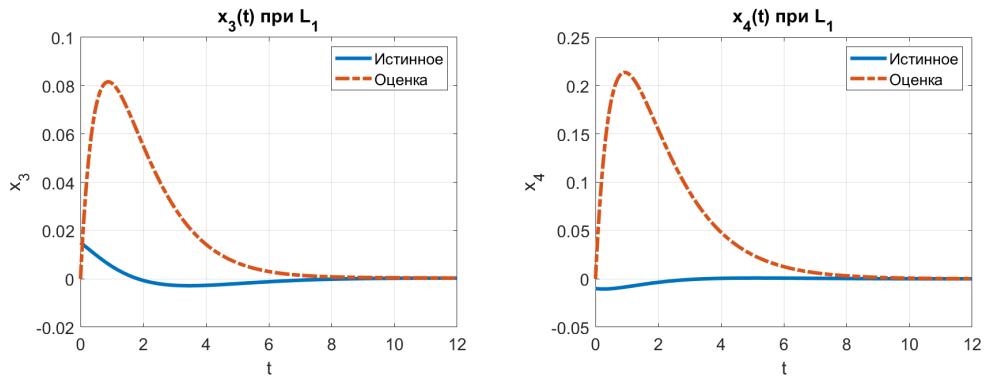


Рис. 36: Графики состояний x_3 и x_4 при $\sigma(G_{L1}) = \{-0.75, -1.25, -1.5, -2\}$

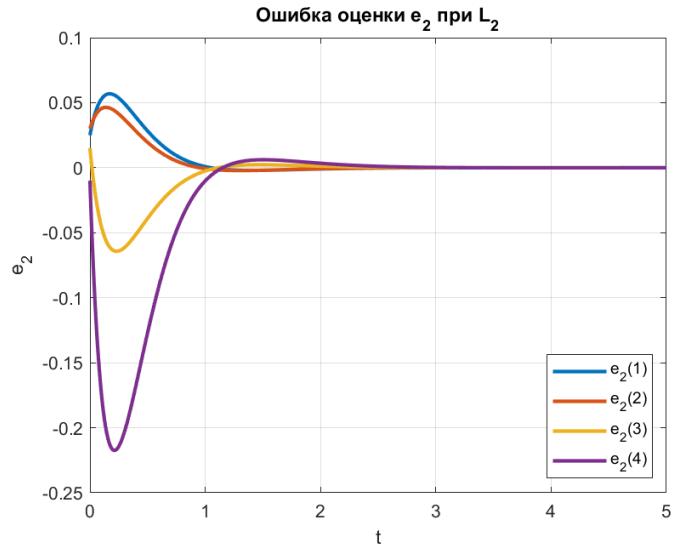


Рис. 37: График ошибки оценок при $\sigma(G_{L2}) = \{-2, -2, -4, -4\}$

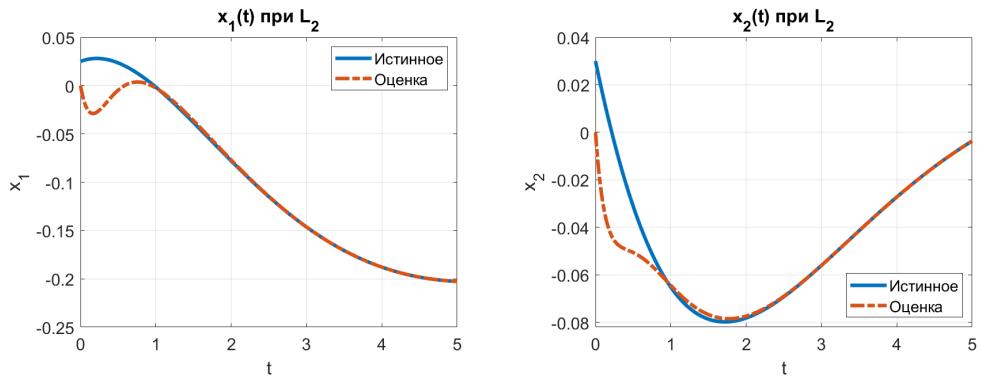


Рис. 38: Графики состояний x_1 и x_2 при $\sigma(G_{L2}) = \{-2, -2, -4, -4\}$

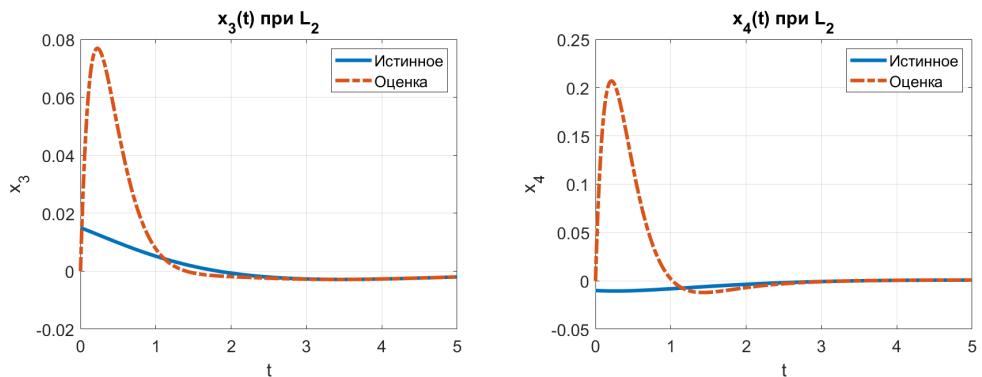
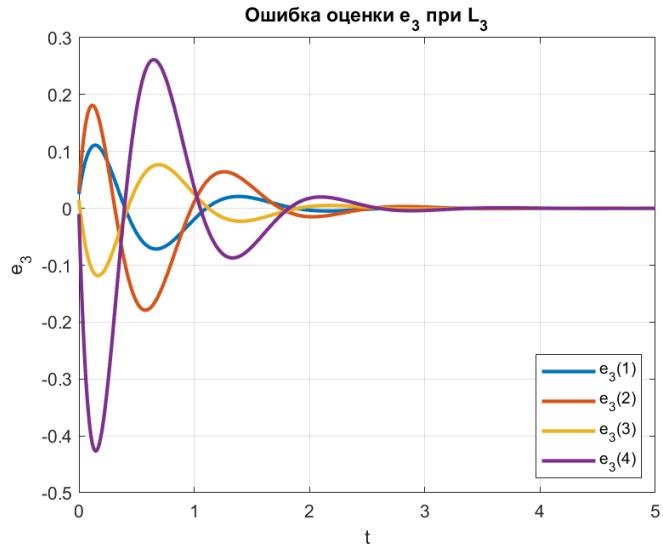
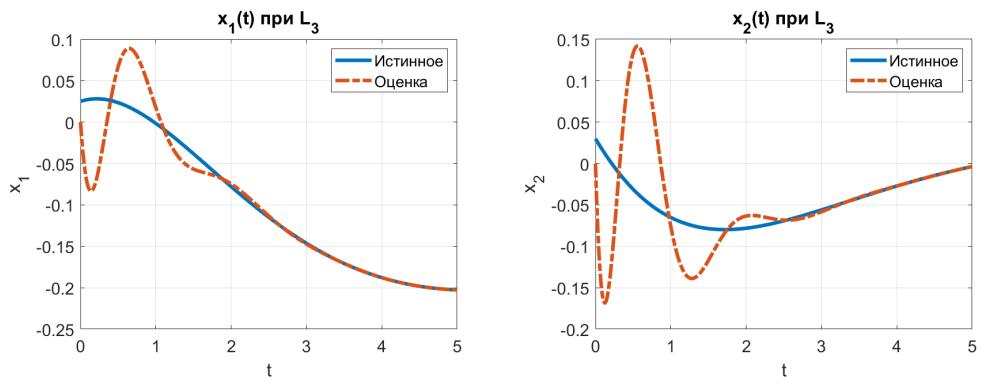
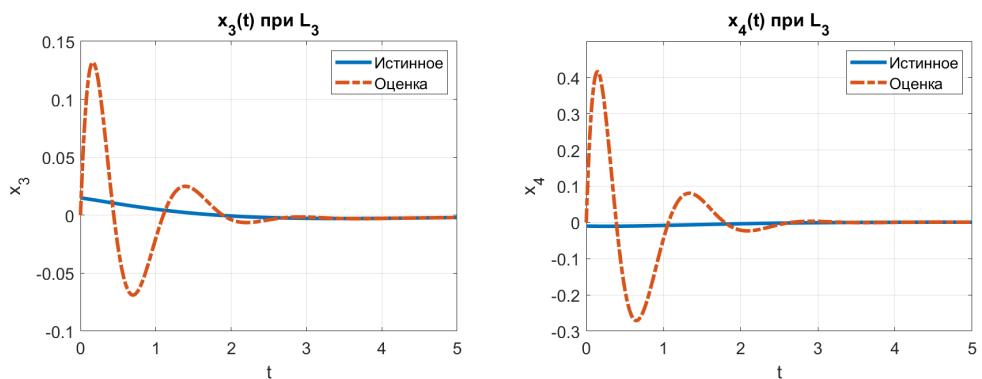
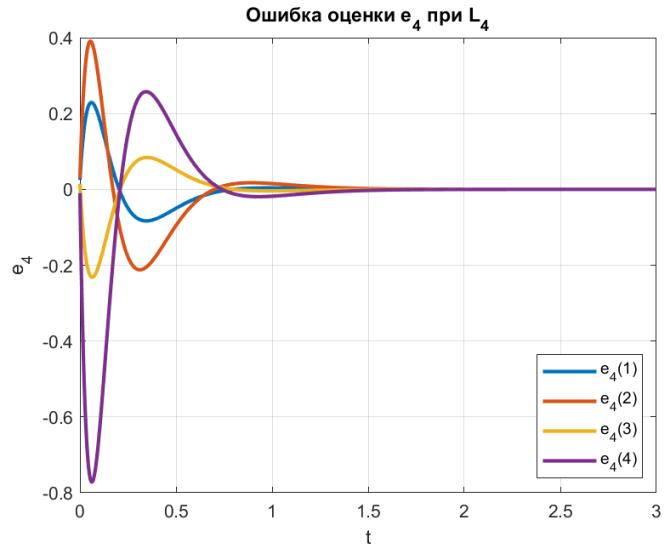
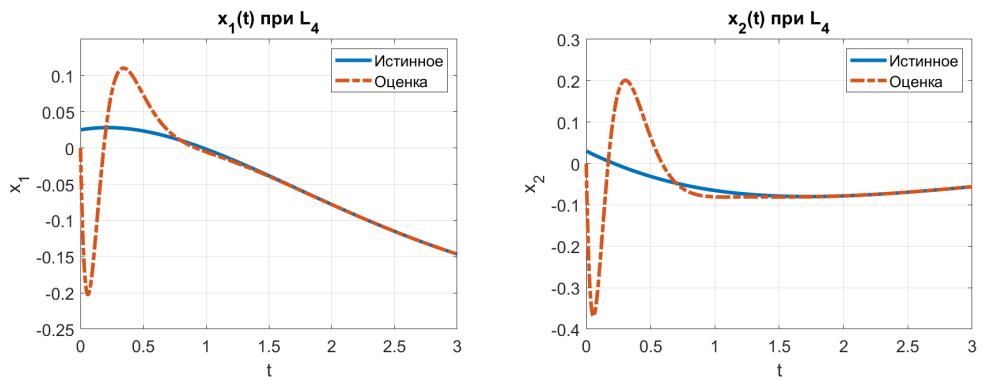
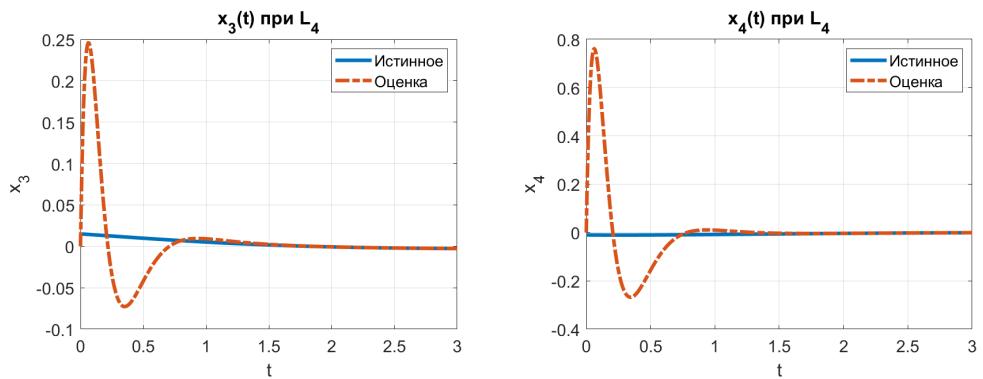


Рис. 39: Графики состояний x_3 и x_4 при $\sigma(G_{L2}) = \{-2, -2, -4, -4\}$

Рис. 40: График ошибки оценок при $\sigma(G_{L3}) = \{-2 \pm 4i, -4 \pm 4i\}$ Рис. 41: Графики состояний x_1 и x_2 при $\sigma(G_{L3}) = \{-2 \pm 4i, -4 \pm 4i\}$ Рис. 42: Графики состояний x_3 и x_4 при $\sigma(G_{L3}) = \{-2 \pm 4i, -4 \pm 4i\}$

Рис. 43: График ошибки оценки при $\sigma(G_{L4}) = \{-7, -7.5, -8, -8.5\}$ Рис. 44: Графики состояний x_1 и x_2 при $\sigma(G_{L4}) = \{-7, -7.5, -8, -8.5\}$ Рис. 45: Графики состояний x_3 и x_4 при $\sigma(G_{L4}) = \{-7, -7.5, -8, -8.5\}$

Можем видеть, что качество сходимости наблюдателей прямо зависит от выбранных спектров. При отдалении собственных чисел от мнимой оси оценка сходится быстрее, однако и начальная ошибка становится значительней.

Добавление комплексно-сопряженных собственных чисел также привело к большим колебаниям в наблюдателе и ошибке - время сходимости при этом даже увеличилось.

Исследуем и наблюдатель пониженной размерности, так как измерения $y_1 = x_1$ и $y_2 = x_3$ снимаются нами напрямую:

$$\begin{cases} \hat{z} = G\hat{z} - Yy + QBu \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Cx \\ \hat{z} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (32)$$

Будем решать уравнение для Q :

$$GQ - QA = YC \quad (33)$$

Зададимся желаемыми матрицами спектров и Y :

$$G_{Q1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.75 \end{bmatrix}, \quad G_{Q2} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

В итоге желаемые собственные числа наблюдателей:

$$\sigma_{Q1} = \{-0.5, -0.75\}, \quad \sigma_{Q2} = \{-3, -4\}$$

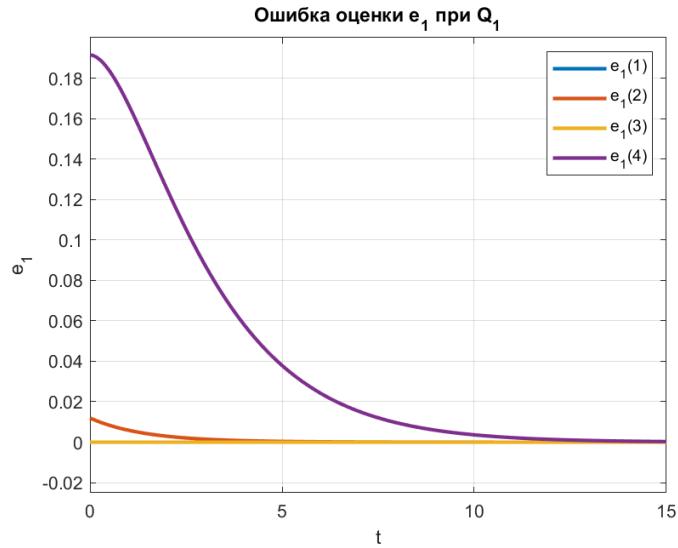
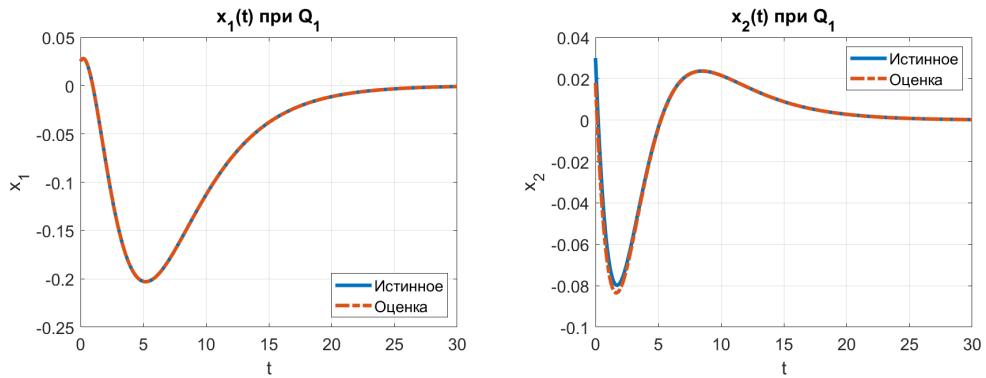
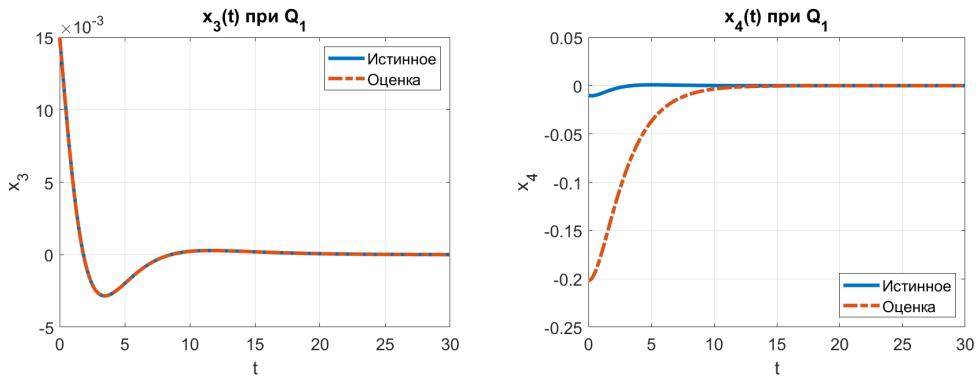
Решаем уравнения с введенными выше матрицами, получаем Q :

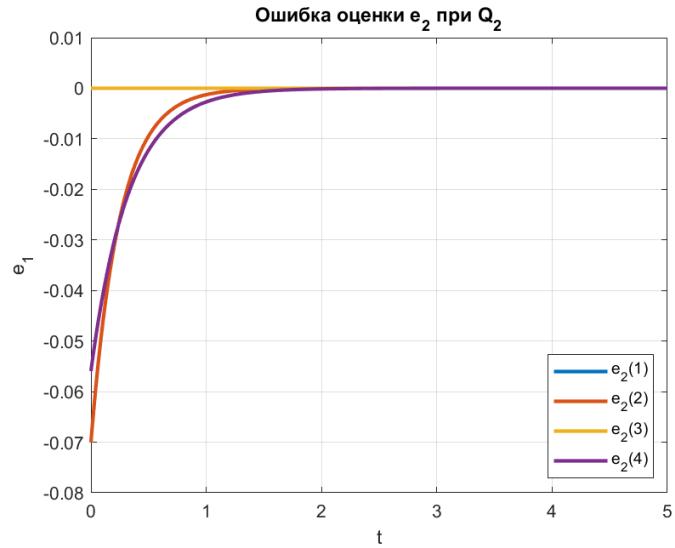
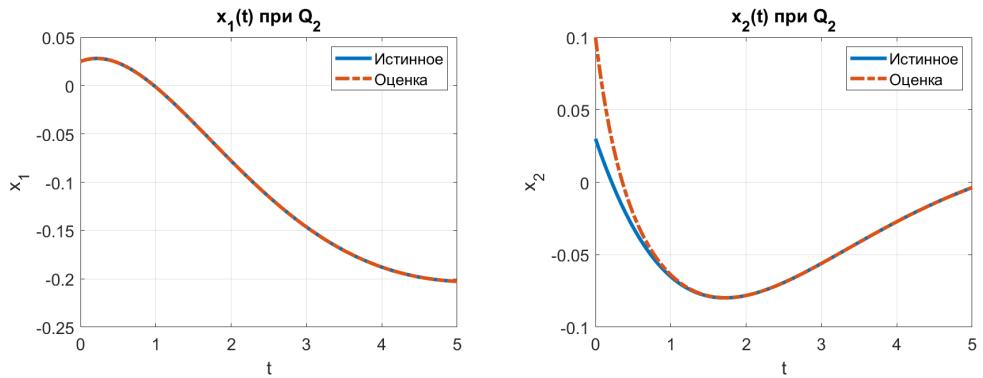
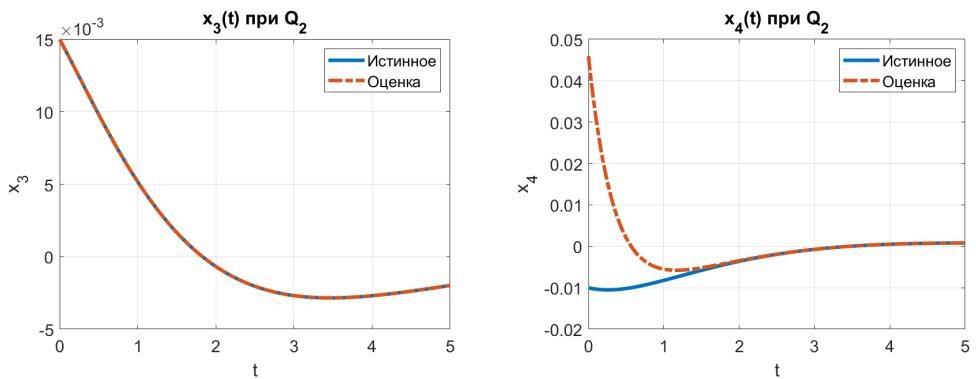
$$Q_1 = \begin{bmatrix} 2.0000 & -4.0000 & 0.0529 & -0.1058 \\ -1.3333 & 1.7778 & 0.0045 & -0.0060 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.1111 & -8.8070 & 2.9357 \\ -0.2500 & 0.0625 & -0.0009 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

Также примем начальные условия системы и наблюдателя:

$$x_0 = [0.025 \ 0.03 \ 0.015 \ -0.01]^T, \quad \hat{z}_0 = [0 \ 0]^T$$

Рис. 46: График ошибки оценок при $G_{Q1} = \{-0.5, -0.75\}$ Рис. 47: Графики состояний x_1 и x_2 при $G_{Q1} = \{-0.5, -0.75\}$ Рис. 48: Графики состояний x_3 и x_4 при $G_{Q1} = \{-0.5, -0.75\}$

Рис. 49: График ошибки оценок при $G_{Q2} = \{-3, -4\}$ Рис. 50: Графики состояний x_1 и x_2 при $G_{Q2} = \{-3, -4\}$ Рис. 51: Графики состояний x_3 и x_4 при $G_{Q2} = \{-3, -4\}$

Выполним моделирование. На рисунках 46 - 51 представлены графики ошибки оценок наблюдения и графики состояния нелинейной системы и наблюдателя вместе.

Таким образом, наблюдатель пониженной размерности успешно оценивает состояния, собирая x_1 и x_3 при этом напрямую с измеряемых выходов $y_1 = x_1$ и $y_2 = x_3$. Это сильно упрощает систему, снижая затрачиваемые ресурсы на вычисления. Отдаление от мнимой оси собственных чисел, как и в случае наблюдателя полной размерности, приводит к ускорению сходимости к исходному оцениваемому вектору состоянию.

3.4 Синтез регулятора по выходу

Наконец, объединим регулятор по состоянию и наблюдатель в один регулятор по выходу, тем самым решая задачу стабилизации в условиях измерений только y_1 и y_2 . Итак, полная система:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (34)$$

Внешнее воздействие f , как и прежде, примем нулевым.

Используем закон управления, основанный на наблюдателе:

$$u = K\hat{x} \quad (35)$$

Рассмотрим теперь несколько наборов желаемых спектров регулятора и наблюдателя, для каждого из них найдем соответствующие матрицы K_i обратной связи и L_i коррекции:

$$\sigma_{r1} = \{-0.5, -0.75, -1, -1.25\}, \quad \sigma_{l1} = \{-3.25, -4, -3.4, -3.8\}$$

Получаем матрицы регулятора и наблюдателя:

$$K_1 = [34.2748 \ 175.9438 \ -9434.0876 \ -2710.4161]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -7.6819 & -14.7274 & 0.1057 & 0.4018 \\ -1.1519 & -4.6342 & -6.7681 & -19.9393 \end{bmatrix}^T$$

Второй набор спектров:

$$\sigma_{r2} = \{-0.5, -0.75, -1, -1.25\}, \quad \sigma_{l2} = \{-8, -7.5, -8.25, -8.5\}$$

Получаем матрицы регулятора и наблюдателя:

$$K_2 = [34.2748 \ 175.9438 \ -9434.0876 \ -2710.4161]$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} -15.8731 & -62.7979 & -0.3228 & -2.7436 \\ 0.1428 & 1.0440 & -16.3769 & -75.6142 \end{bmatrix}^T$$

Третий набор спектров:

$$\sigma_{r3} = \{-2, -2.25, -2.8, -2.75\}, \quad \sigma_{l3} = \{-3.25, -4, -3.4, -3.8\}$$

Получаем матрицы:

$$K_3 = [2533.5902 \ 4218.9944 \ -34760.5392 \ -11822.0120]$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} -7.6819 & -14.7274 & 0.1057 & 0.4018 \\ -1.1519 & -4.6342 & -6.7681 & -19.9393 \end{bmatrix}^T$$

Четвертый набор спектров:

$$\sigma_{r4} = \{-2, -2.25, -2.8, -2.75\}, \quad \sigma_{l4} = \{-8, -7.5, -8.25, -8.5\}$$

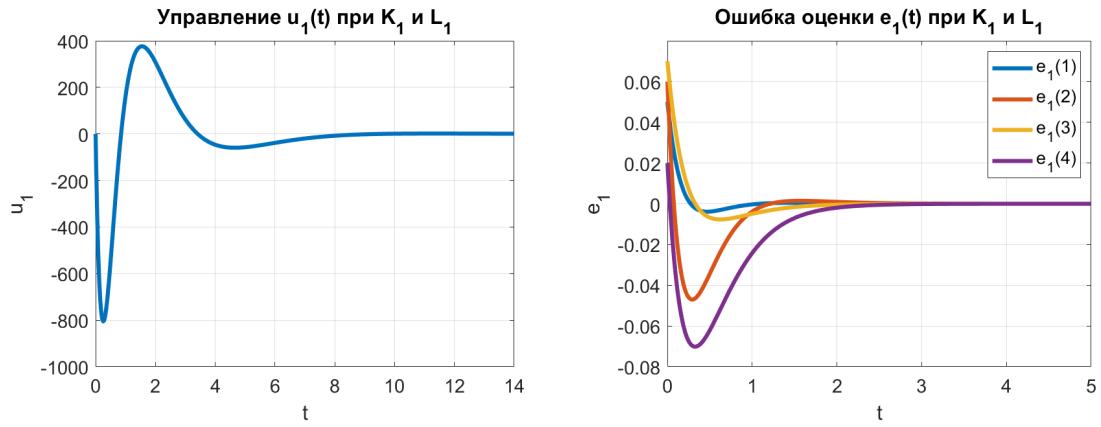
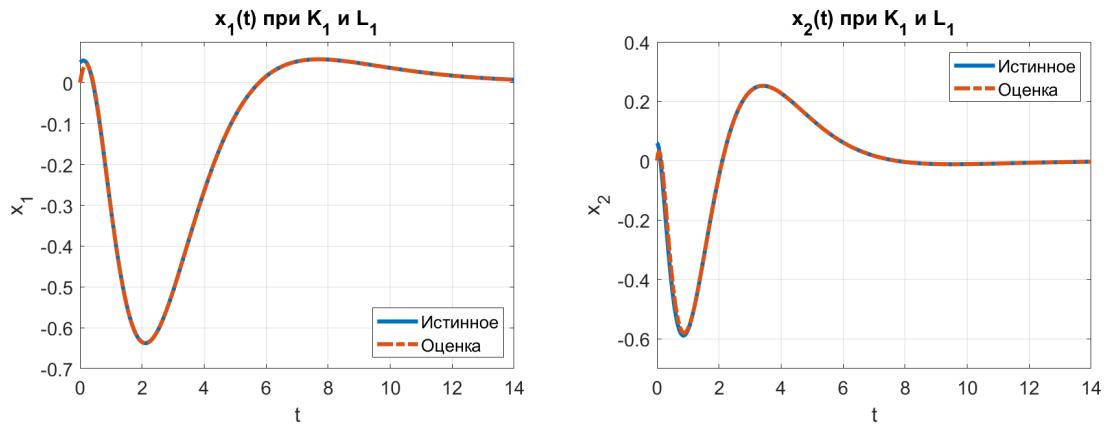
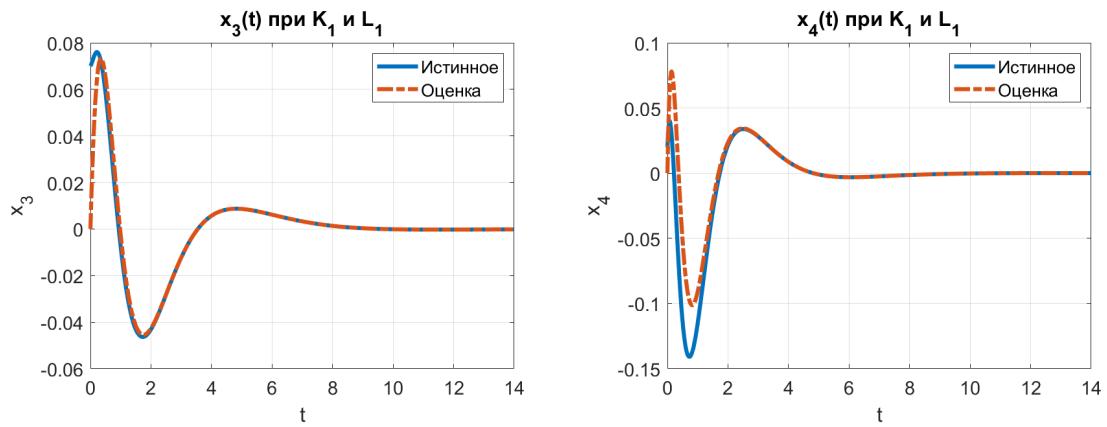
Получаем матрицы:

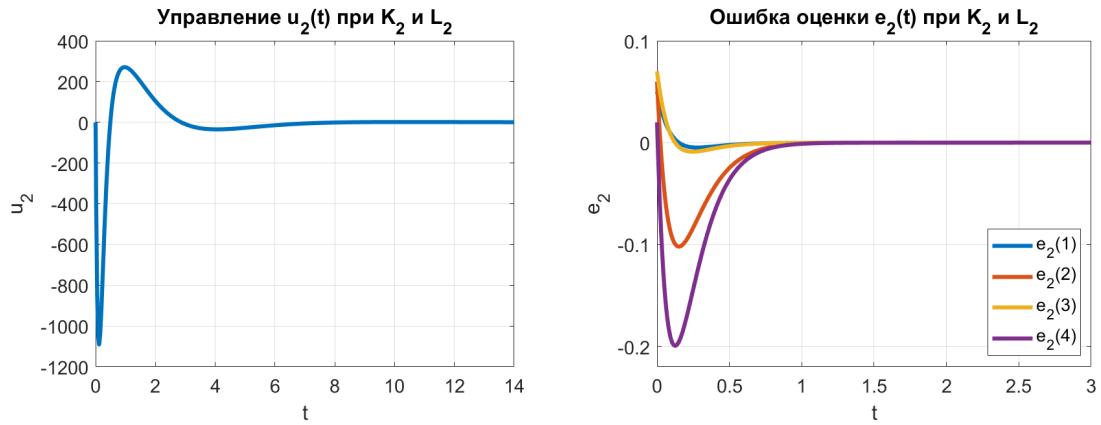
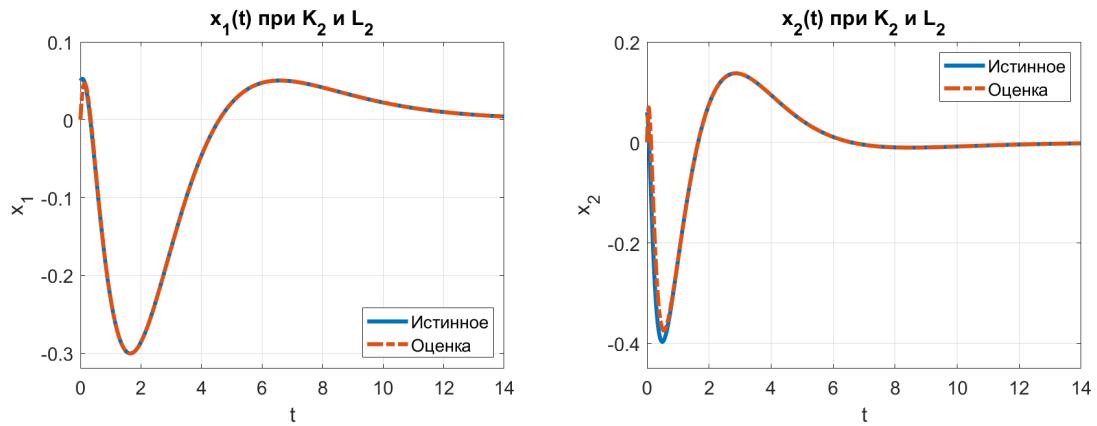
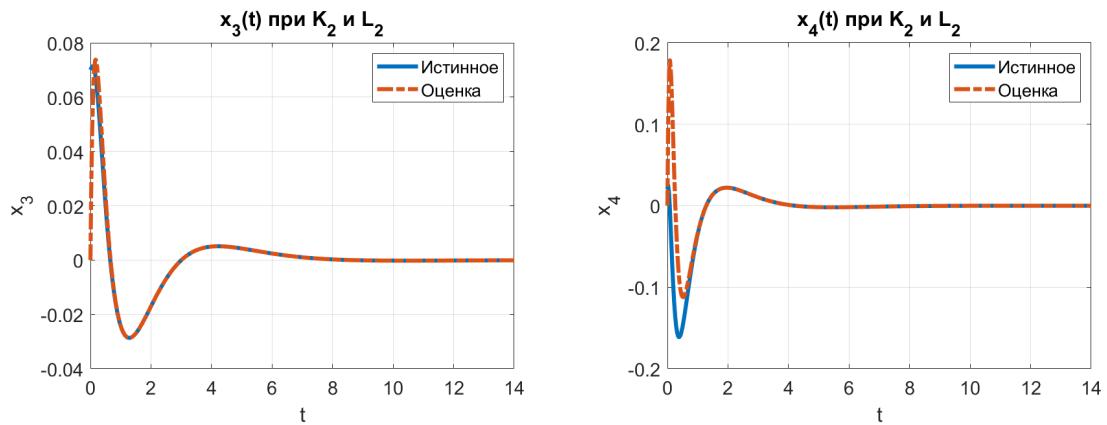
$$K_4 = [2533.5902 \ 4218.9944 \ -34760.5392 \ -11822.0120]$$

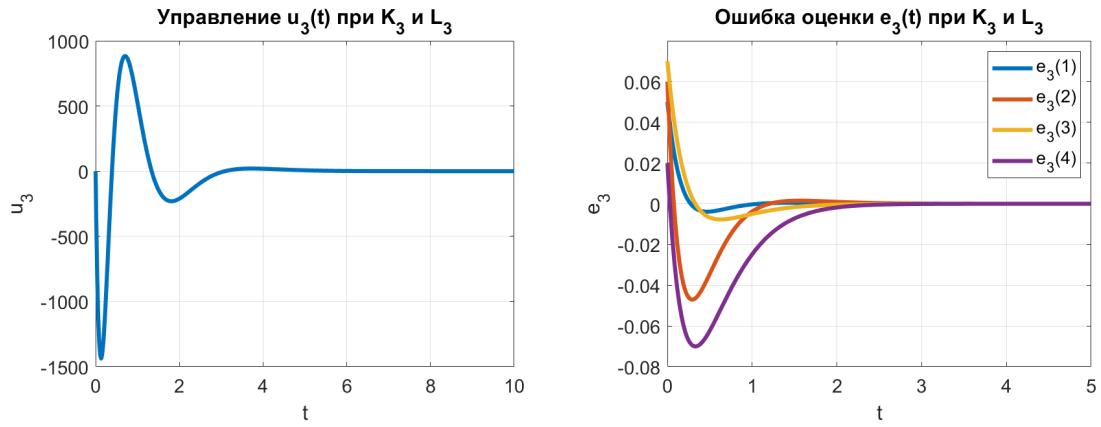
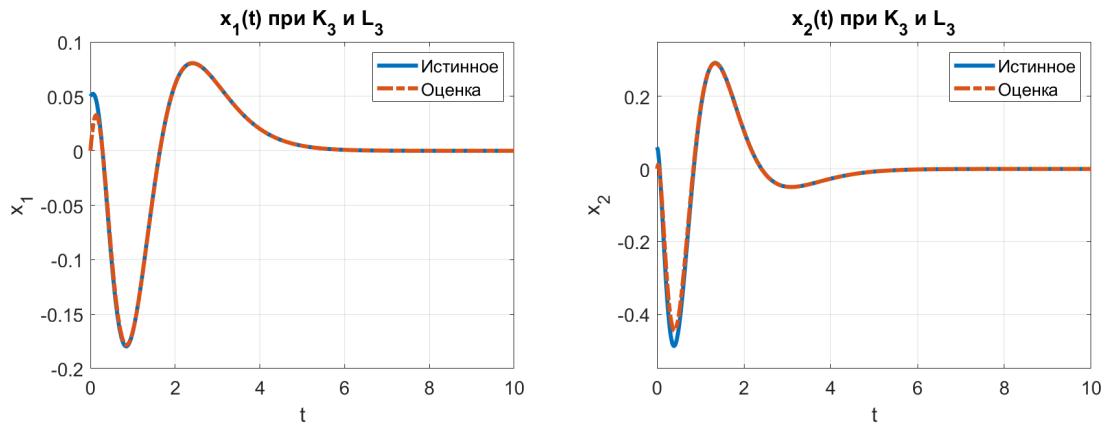
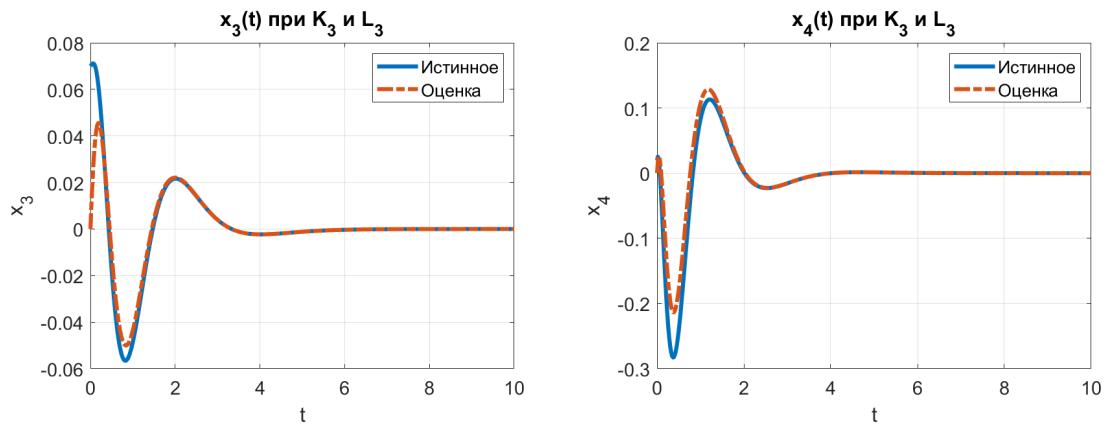
$$L_4 = \begin{bmatrix} -15.8731 & -62.7979 & -0.3228 & -2.7436 \\ 0.1428 & 1.0440 & -16.3769 & -75.6142 \end{bmatrix}^T$$

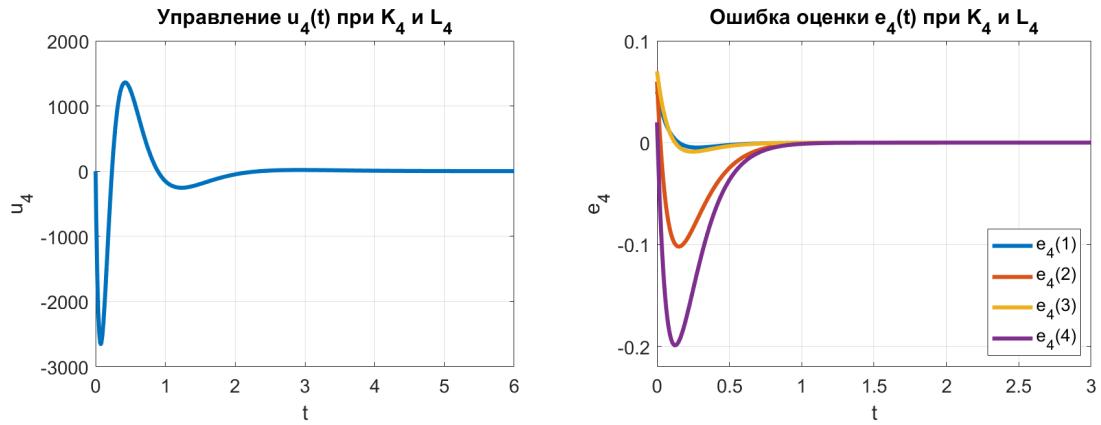
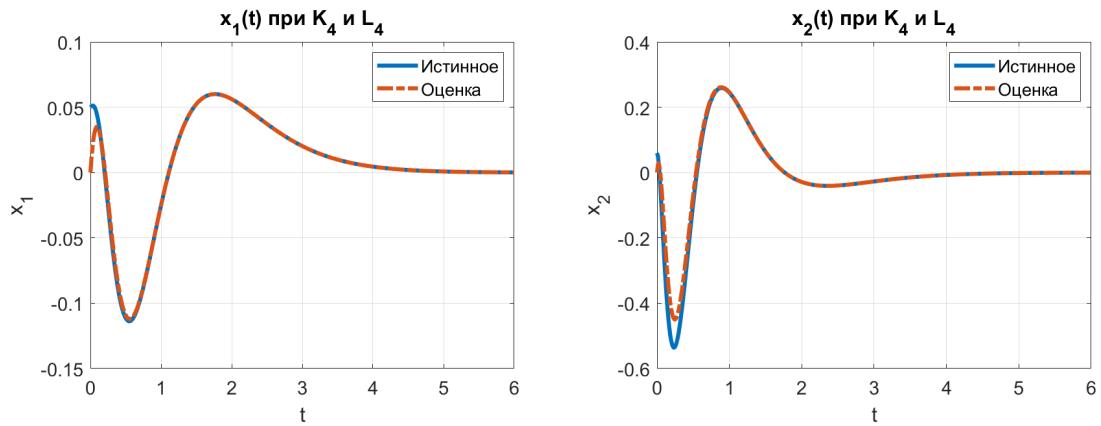
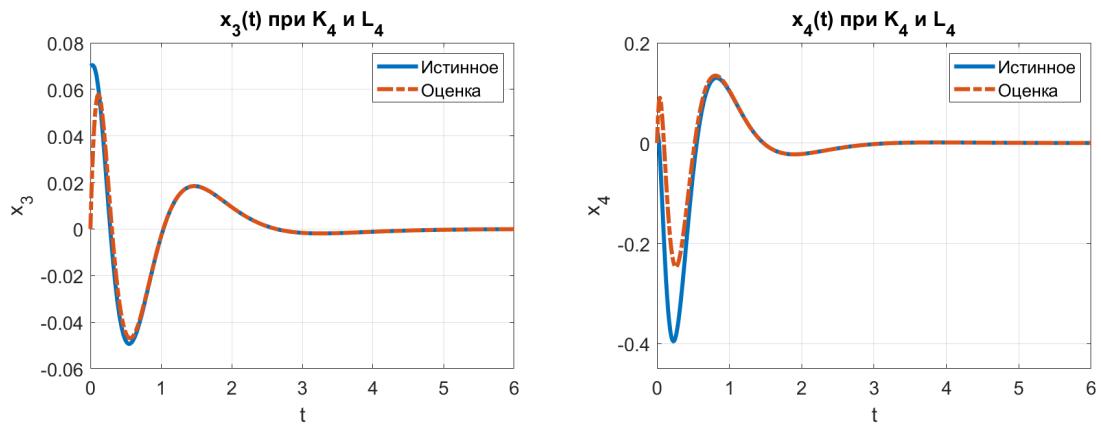
Проведем моделирование со следующими начальными условиями системы и наблюдателя:

$$x_0 = [0.05 \ 0.06 \ 0.07 \ 0.02]^T, \quad \hat{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Рис. 52: Графики управления и ошибки наблюдения при матрицах K_1 и L_1 Рис. 53: Графики состояний x_1 и x_2 при матрицах K_1 и L_1 Рис. 54: Графики состояний x_3 и x_4 при матрицах K_1 и L_1

Рис. 55: Графики управления и ошибки наблюдения при матрицах K_2 и L_2 Рис. 56: Графики состояний x_1 и x_2 при матрицах K_2 и L_2 Рис. 57: Графики состояний x_3 и x_4 при матрицах K_2 и L_2

Рис. 58: Графики управления и ошибки наблюдения при матрицах K_3 и L_3 Рис. 59: Графики состояний x_1 и x_2 при матрицах K_3 и L_3 Рис. 60: Графики состояний x_3 и x_4 при матрицах K_3 и L_3

Рис. 61: Графики управления и ошибки наблюдения при матрицах K_4 и L_4 Рис. 62: Графики состояний x_1 и x_2 при матрицах K_4 и L_4 Рис. 63: Графики состояний x_3 и x_4 при матрицах K_4 и L_4

Проведем небольшое исследование полученных результатов. Для этого выведем максимальные отклонения маятника, смещения тележки и управления для каждого синтезированного регулятора:

$$\varphi_{1max} = 0.1305, \varphi_{2max} = 0.1096, \varphi_{3max} = 0.1109, \varphi_{4max} = 0.1042$$

$$a_{1max} = 1.5232, a_{2max} = 0.4938, a_{3max} = 0.2286, a_{4max} = 0.2159$$

$$u_{1max} = 1301, u_{2max} = 1622.4, u_{3max} = 1812, u_{4max} = 2950$$

Наиболее «дешевым» на управление оказался первый регулятор. Наиболее «дорогим» - четвертый. Причем можно понять, что удаление как собственных чисел наблюдателя, так и регулятора, приводит к увеличению прикладываемого управления к системе.

Самым «быстрым» оказался регулятор с матрицами K_4 и L_4 - он сумел стабилизировать систему за наименьшее время.

На мой субъективный взгляд, лучше всех показал себя третий регулятор - он не так медленно стабилизирует систему и прикладывает при этом не так много управления.

4 Стабилизация: заданная устойчивость

4.1 Синтез регулятора по состоянию

Подойдем к той же задаче стабилизации с другой стороны. Пусть хочется получить определенную степень устойчивости и синтезировать регулятор, который её обеспечит. Сделать это можно с помощью решения линейного матричного неравенства Ляпунова для экспоненциальной устойчивости, а после нахождения K обратной связи:

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0, \quad K = YP^{-1} \quad (36)$$

Важно, что будет использоваться тот же статический регулятор

$$u = Kx$$

Как и прежде, синтез будем проводить для линейной системы, а пытаться применять к исходной нелинейной.

Так как степень устойчивости α в силу полной управляемости линеаризованной системы можно брать произвольно, возьмем $\alpha = 1$.

В итоге получим матрицу K :

$$K = [19272.1510 \ 18036.3694 \ -83311.9552 \ -28341.4070]$$

Теперь исследуем работоспособность синтезированного регулятора при управлении нелинейной системой в зависимости от начальных условий и отсутствии воздействий $f = 0$:

$$x_{0a} = [0.01 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad x_{0\dot{a}} = [0 \ 0.01 \ 0 \ 0]^T$$

$$x_{0\varphi} = [0 \ 0 \ 0.01 \ 0]^T, \quad x_{0\dot{\varphi}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0.01]^T$$

Также обозначим «ломающие» начальные условия, при которых замкнутая нелинейная система остается неустойчивой:

$$x'_{0a} = [2.25 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad x'_{0\dot{a}} = [0 \ 2.25 \ 0 \ 0]^T$$

$$x'_{0\varphi} = [0 \ 0 \ 0.55 \ 0]^T, \quad x'_{0\dot{\varphi}} = [0 \ 0 \ 0 \ 1.85]^T$$

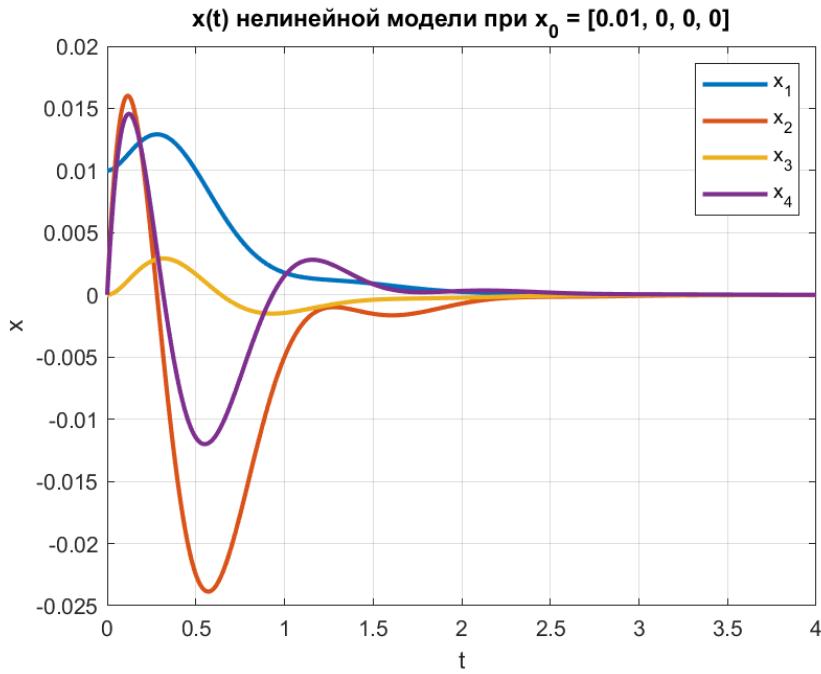


Рис. 64: Состояния при $x_{0a} = [0.01 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ и заданной устойчивости

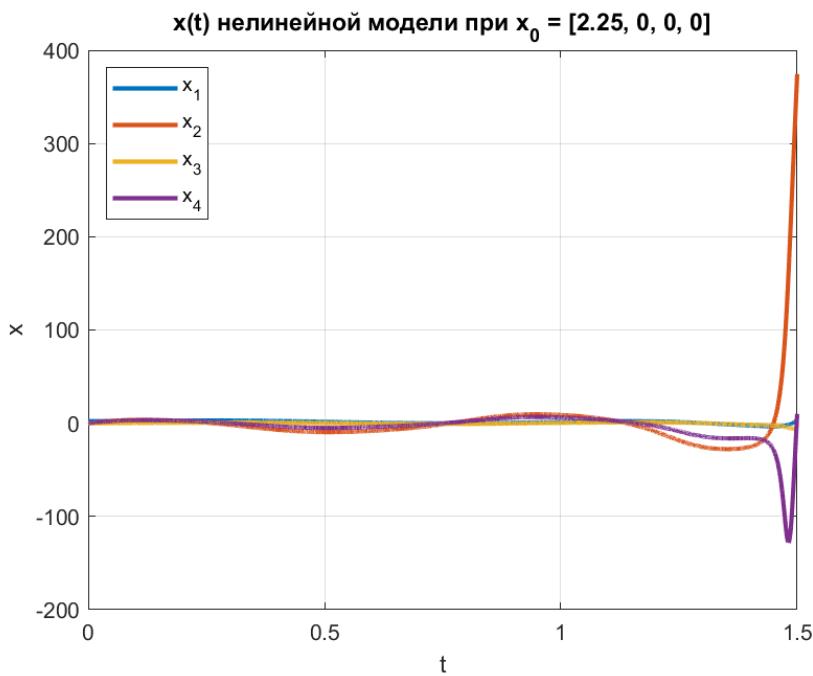


Рис. 65: Состояния при $x'_{0a} = [2.25 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ и заданной устойчивости

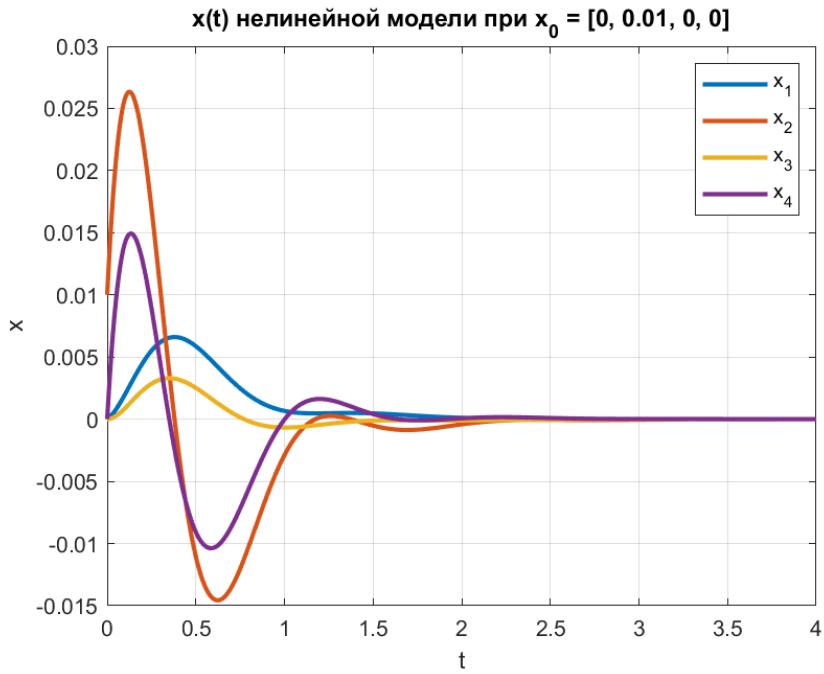


Рис. 66: Состояния при $x_{0\dot{a}} = [0 \ 0.01 \ 0 \ 0]^T$ и заданной устойчивости

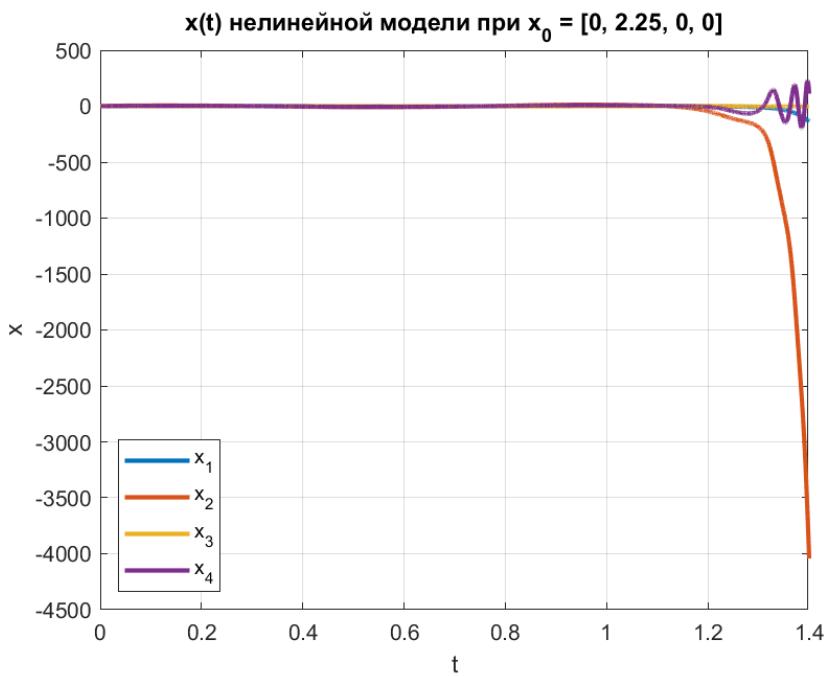


Рис. 67: Состояния при $x_{0\dot{a}}' = [0 \ 2.25 \ 0 \ 0]^T$ и заданной устойчивости

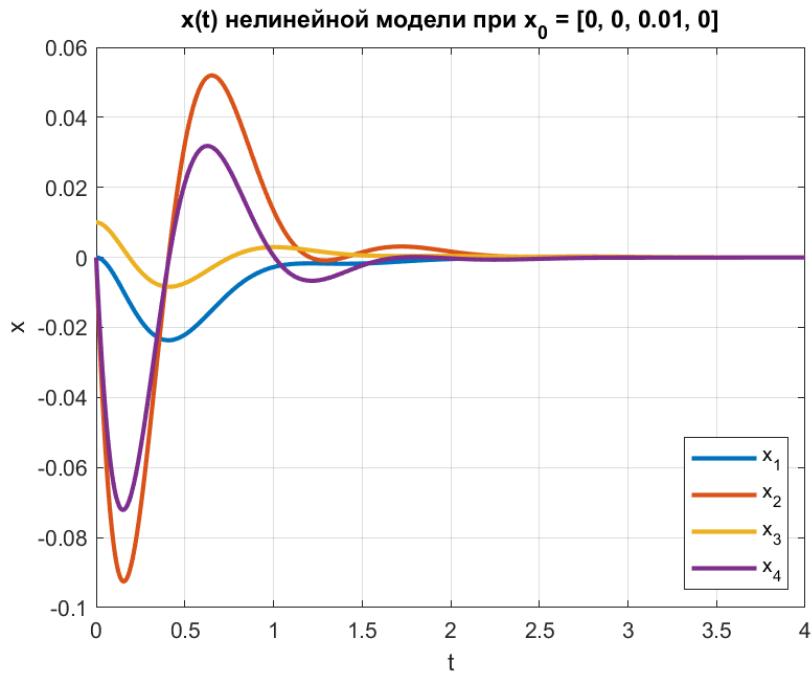


Рис. 68: Состояния при $x_{0\varphi} = [0 \ 0 \ 0.01 \ 0]^T$ и заданной устойчивости

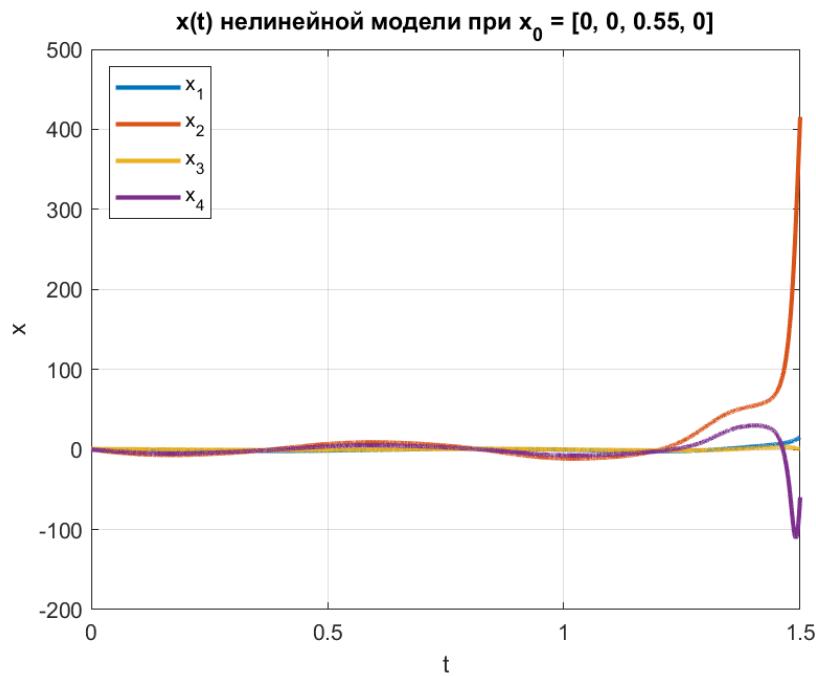


Рис. 69: Состояния при $x'_{0\varphi} = [0 \ 0 \ 0.55 \ 0]^T$ и заданной устойчивости

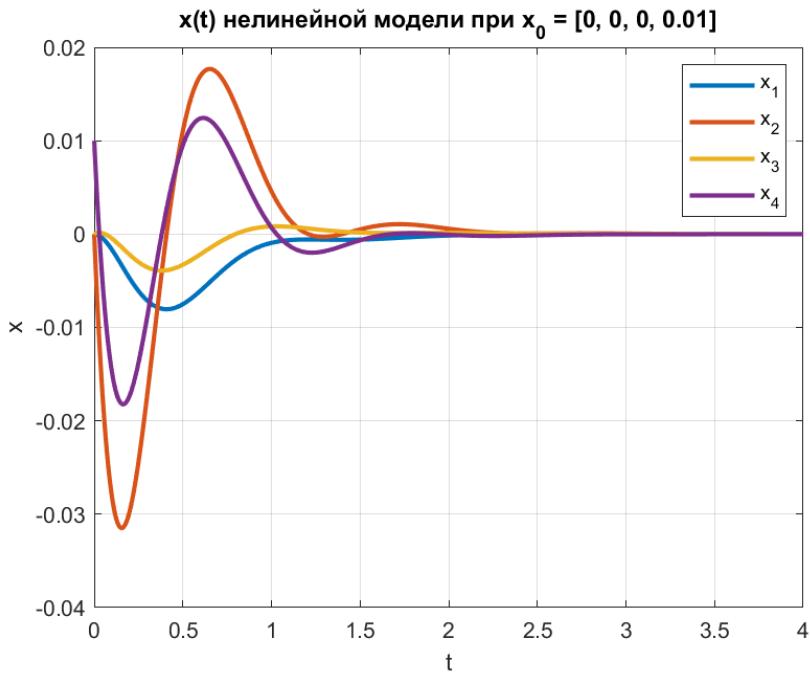


Рис. 70: Состояния при $x_{0\dot{\varphi}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0.01]^T$ и заданной устойчивости

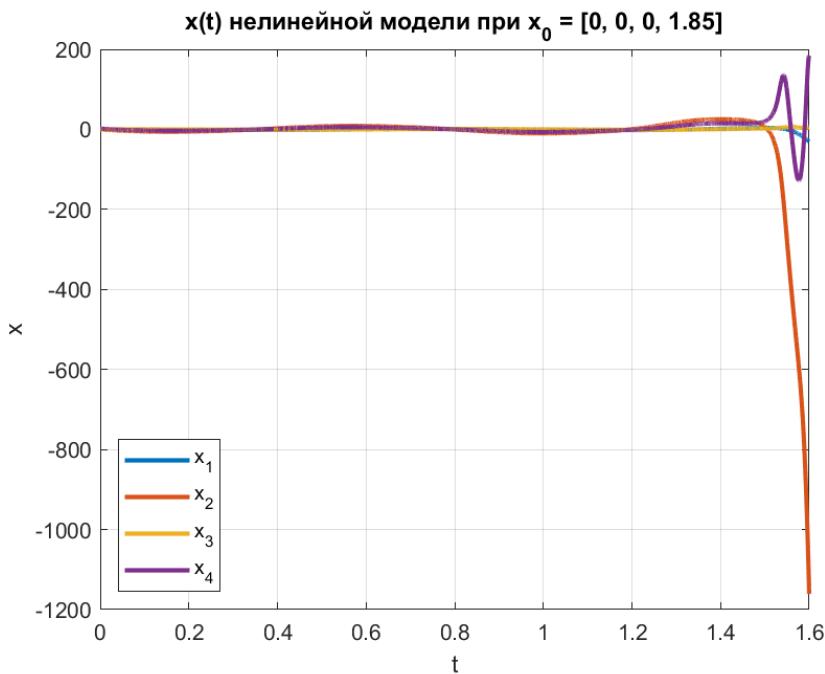


Рис. 71: Состояния при $x'_{0\dot{\varphi}} = [0 \ 0 \ 0 \ 1.85]^T$ и заданной устойчивости

На рисунках 64 - 71 приведены состояния нелинейной модели при различных начальных условиях и регуляторе, обеспечивающем заданную степень устойчивости $\alpha = 1$.

Синтезированный регулятор, как и модальный, работает только при начальных условиях, близких к точкам равновесия, так как он основан на линейной модели. При превышении некоторых значений положения тележки и угла маятника, а также их скоростей, система остается неустойчивой, уходя со временем в бесконечность.

4.2 Исследование регулятора по состоянию

Рассмотрим теперь влияние задаваемой желаемой степени устойчивости α на синтезируемый регулятор и его работу по стабилизации исходной нелинейной модели.

Для начала возьмем малые начальные условия системы:

$$x_0 = [-0.1 \ 0.05 \ -0.15 \ 0.075]^T$$

После чего зададимся различными значениями желаемой степени устойчивости α для линейной системы (так как именно на её основе и проводим вычисления):

$$\alpha_1 = 0.5, \quad \alpha_2 = 1.5, \quad \alpha_3 = 3, \quad \alpha_4 = 6$$

Далее для каждого из введенных устойчивости α вычислим матрицу K обратной связи регулятора:

$$K_1 = [2458.4146 \ 5274.4174 \ -40300.1766 \ -13706.3374]$$

$$K_2 = [21774.6526 \ 22697.8618 \ -109734.8749 \ -37336.0399]$$

$$K_3 = [163727.7004 \ 112940.3903 \ -440549.0139 \ -149231.0812]$$

$$K_4 = [1943798.0931 \ 617159.2608 \ -2893249.2820 \ -731828.1682]$$

Теперь выполним моделирование процессов для каждого регулятора. На рисунках 72 - 77 приведены графики управления системой и состояния нелинейной модели при различных значениях α .

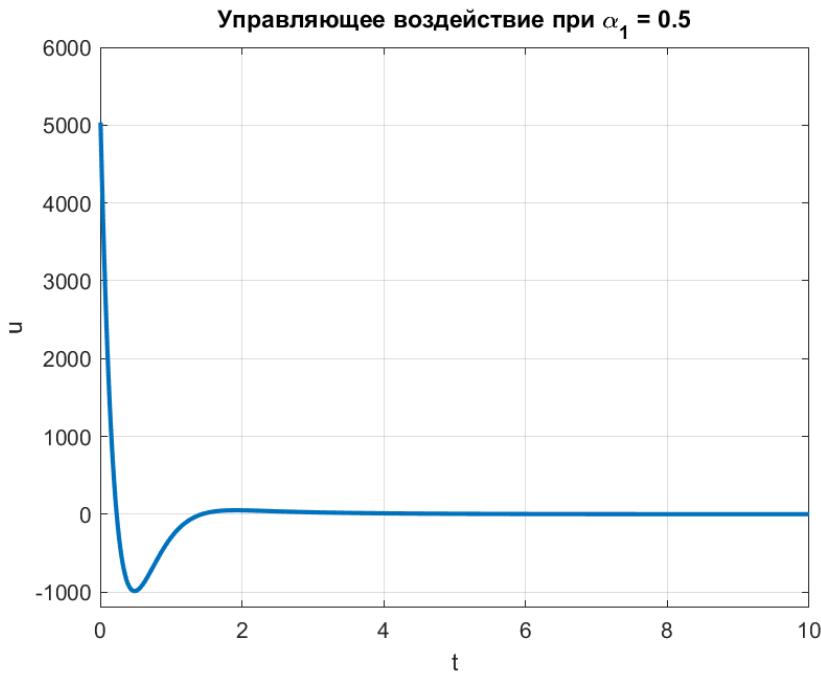


Рис. 72: График управления системой при степени устойчивости $\alpha_1 = 0.5$

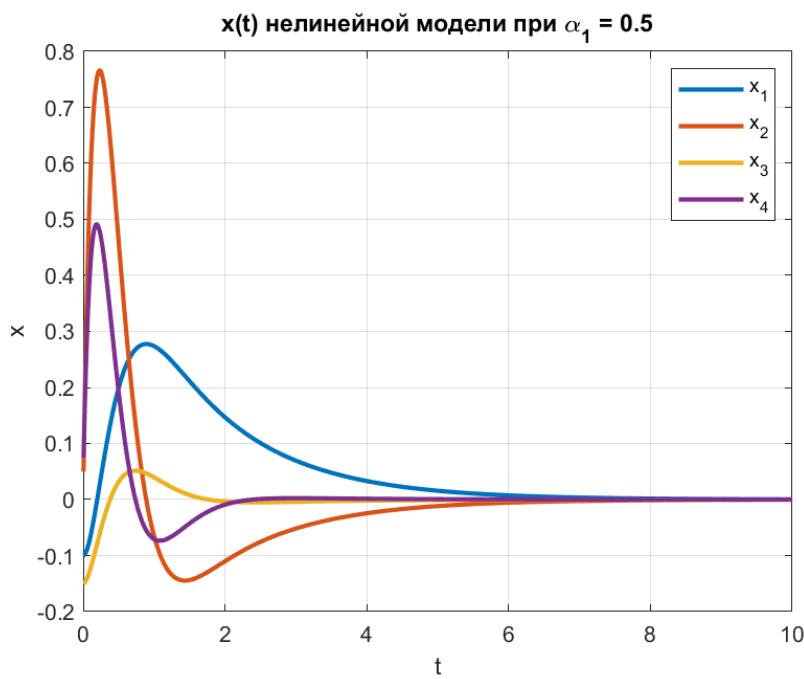


Рис. 73: График состояния при $\alpha_1 = 0.5$

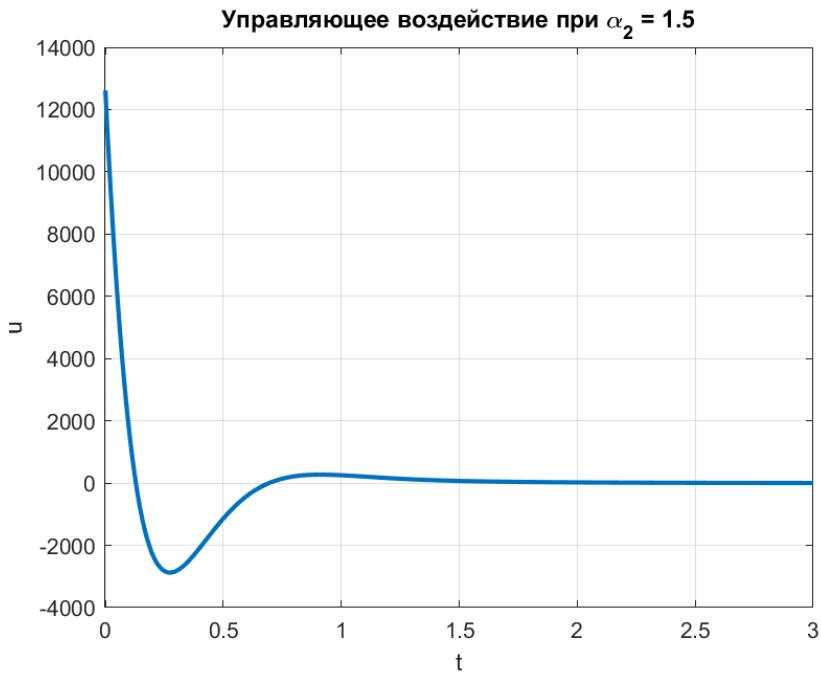


Рис. 74: График управления при $\alpha_2 = 1.5$

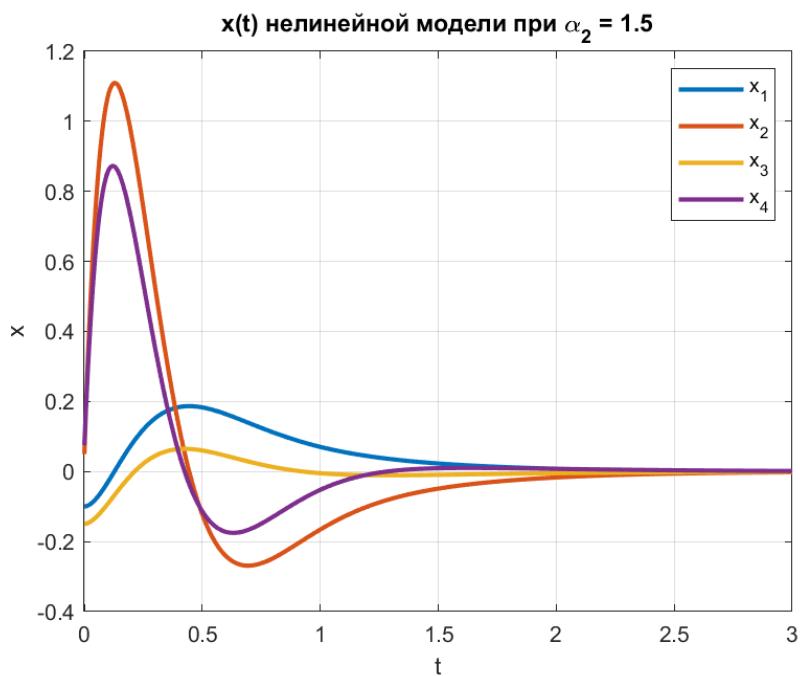
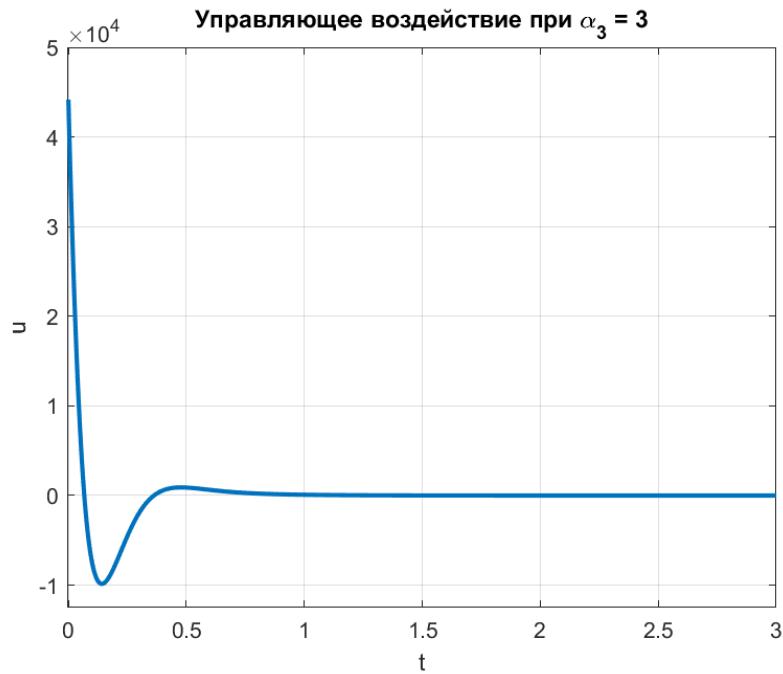
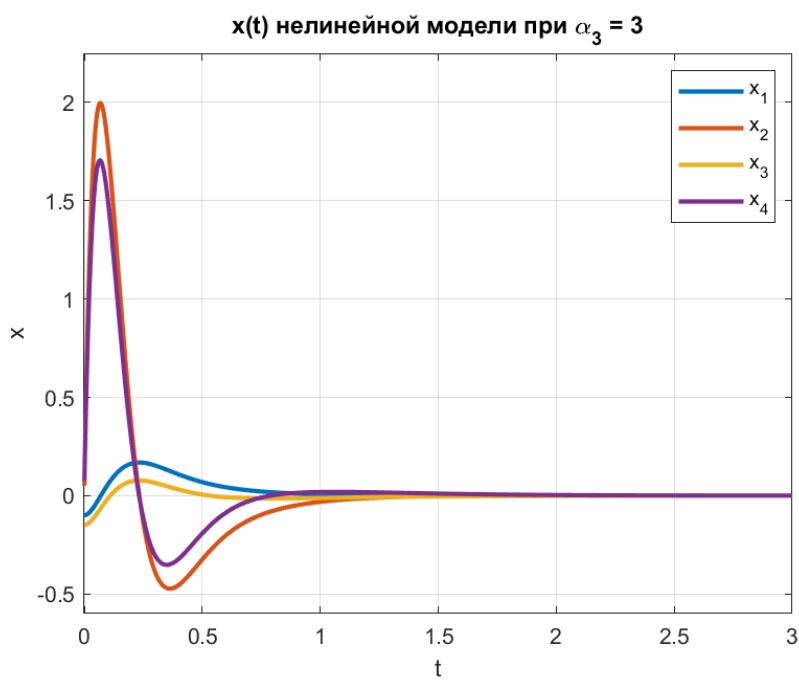


Рис. 75: График состояния нелинейной модели при $\alpha_2 = 1.5$

Рис. 76: График управления при $\alpha_3 = 3$ Рис. 77: График состояния нелинейной модели при $\alpha_3 = 3$

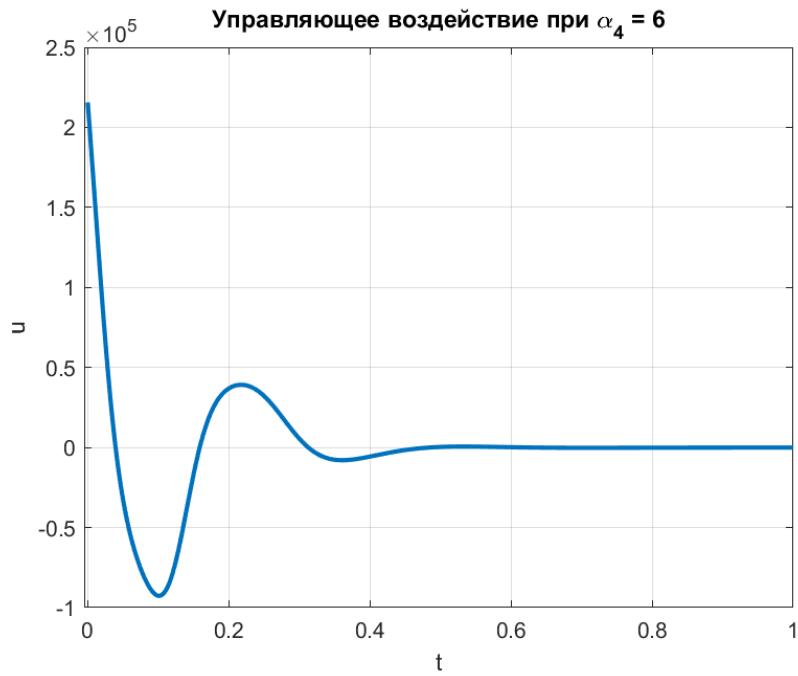


Рис. 78: График управления при $\alpha_4 = 6$

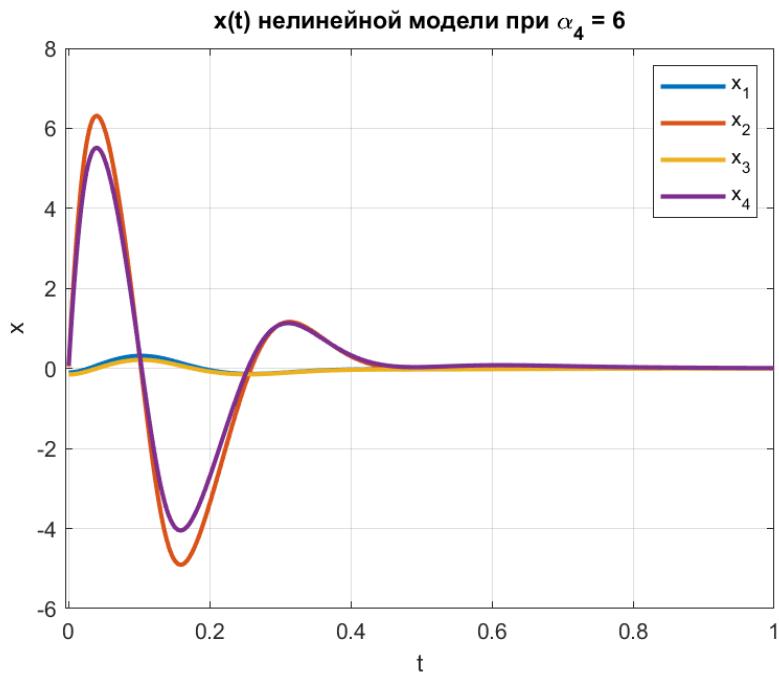


Рис. 79: График состояния нелинейной модели при $\alpha_4 = 6$

Проведем анализ полученных процессов. Для этого найдем максимальные отклонения маятника от вертикали:

$$\varphi_{1max} = 0.15, \quad \varphi_{2max} = 0.15, \quad \varphi_{3max} = 0.15, \quad \varphi_{4max} = 0.2159$$

Максимальные горизонтальные смещения тележки:

$$a_{1max} = 0.2775, \quad a_{2max} = 0.1867, \quad a_{3max} = 0.1686, \quad a_{4max} = 0.3163$$

А также максимальные управляющие воздействия:

$$u_{1max} = 5034.9, \quad u_{2max} = 12617, \quad u_{3max} = 44164, \quad u_{4max} = 215578$$

Таким образом, при увеличении α растет величина управления и отклонений состояний, однако скорость стабилизации ускоряется в разы. Здесь важно отметить, что α напрямую влияет на собственные числа, а значит, по сути наблюдается та же ситуация, что и при модальном синтезе регулятора.

В итоге, α_1 даёт самые маленькие отклонения состояний (при учёте скоростей) и величину управления, однако регулятор получается медленным, α_4 — его полная противоположность, а α_2 и α_3 находятся где-то между ними, представляя нечто среднее.

4.3 Регулятор по состоянию с ограничениями

Для параметров $\alpha_1 = 0.5$ и $\alpha_2 = 1.5$ из предыдущего пункта выполним расчет такого статического регулятора, чтобы наибольшее значение модуля управляющего сигнала u было наименьшим из возможных. Для этого добавим к задаче стабилизации минимизацию управления. В итоге будем решать систему относительно P и Y :

$$\begin{cases} PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0 \\ \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 \end{bmatrix} \succ 0 \\ \begin{bmatrix} P & x_0 \\ x'_0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \\ \mu^2 = \gamma \rightarrow \min \end{cases} \quad (37)$$

После находить регулятор через $K = YP^{-1}$.

Начальные условия для расчёта регуляторов K_1 и K_2 , соответствующих $\alpha_1 = 0.5$ и $\alpha_2 = 1.5$, примем:

$$x_{01} = [0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01]^T, \quad x_{02} = [0.1 \ 0 \ 0.01 \ 0]^T$$

Итак, решая системы, получаем матрицы K_i обратных связей:

$$K_1 = [327.6221 \ 873.9577 \ -12295.1768 \ -4180.3975]$$

$$K_2 = [2468.5155 \ 3452.8787 \ -27230.0330 \ -9261.2414]$$

Для моделирования выберем одинаковые малые положительные начальные условия для обоих регуляторов, как и прежде:

$$x_{0a} = [0.01 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad x_{0\dot{a}} = [0 \ 0.01 \ 0 \ 0]^T$$

$$x_{0\varphi} = [0 \ 0 \ 0.01 \ 0]^T, \quad x_{0\dot{\varphi}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0.01]^T$$

Также примем условия, при которых регуляторы уже перестают справляться с задачей стабилизации:

$$x'_{0a} = [25 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad x'_{0\dot{a}} = [0 \ 10 \ 0 \ 0]^T$$

$$x'_{0\varphi} = [0 \ 0 \ 1.5 \ 0]^T, \quad x'_{0\dot{\varphi}} = [0 \ 0 \ 0 \ 5]^T$$

Для моделирования всё готово - выполним его. На рисунках 80 - 95 приведены графики состояний нелинейной модели при различных начальных условиях и регуляторах с ограничениями.

Можно видеть, что здесь наблюдается та же ситуация, что и во всех созданных до этого регуляторах: при отдалении от нуля - точек равновесия системы - линейная модель уже не так хорошо аппроксимирует нелинейную, стабилизации не происходит.

Важно и то, что задача минимизации управления также замедлила стабилизацию системы. Так, при $\alpha_2 = 1.5$ с ограничениями на величину управления переходные процессы в сравнении с ранее изученными для $\alpha = 1 > \alpha_2$ без ограничений происходят заметно дольше при всех начальных состояниях системы.

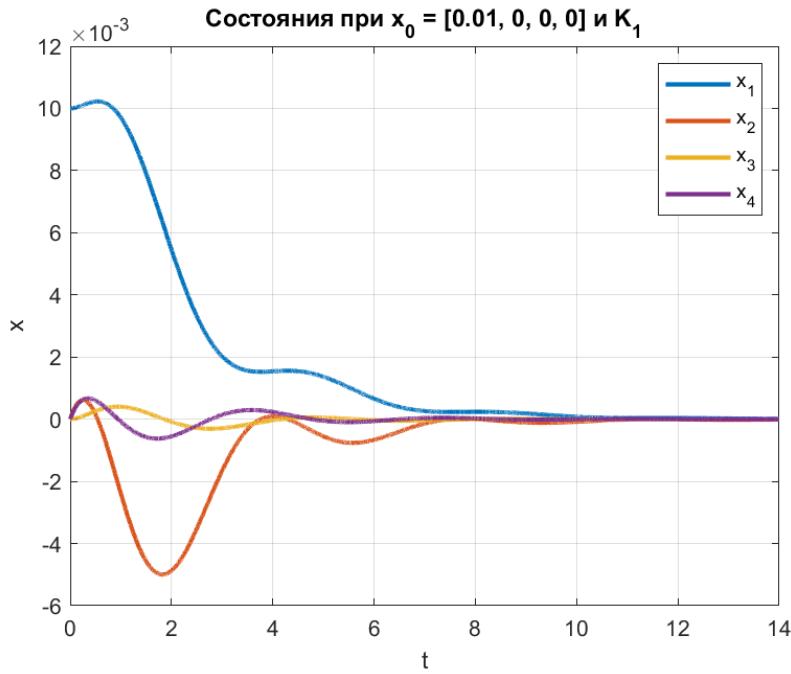


Рис. 80: График $x(t)$ при $x_{0a} = [0.01 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ и $\alpha_1 = 0.5$ с ограничениями

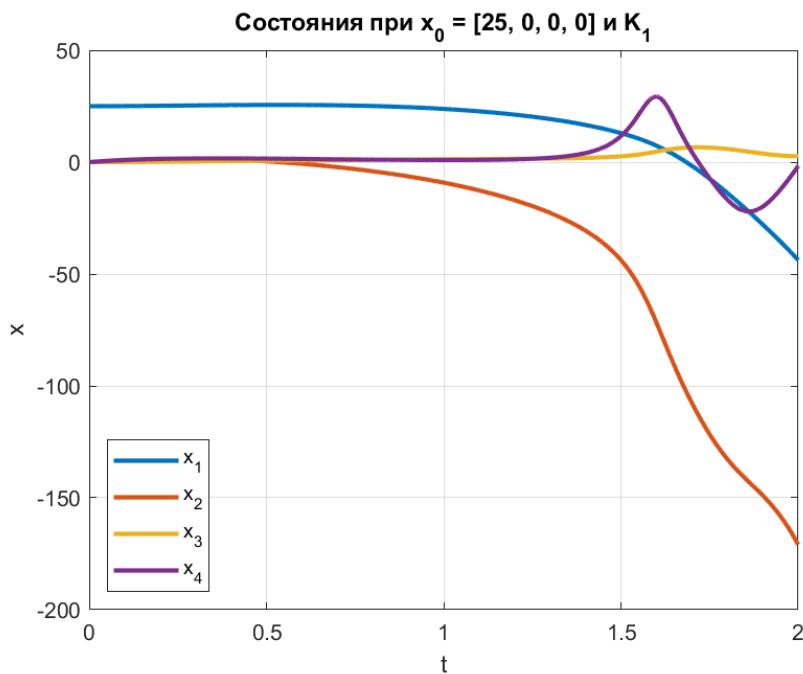


Рис. 81: График $x(t)$ при $x'_{0a} = [25 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ и $\alpha_1 = 0.5$ с ограничениями

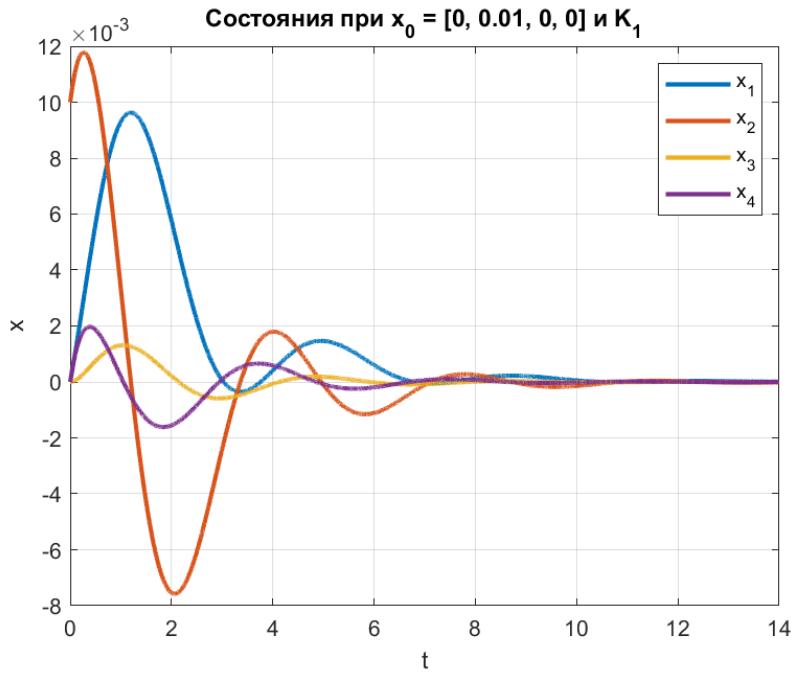


Рис. 82: График $x(t)$ при $x_{0\dot{a}} = [0 \ 0.01 \ 0 \ 0]^T$ и $\alpha_1 = 0.5$ с ограничениями

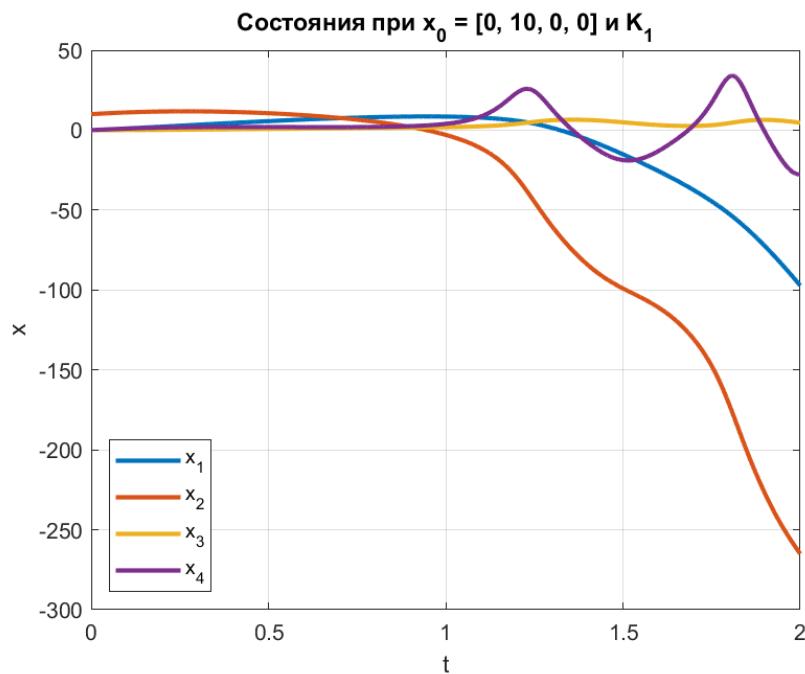


Рис. 83: График $x(t)$ при $x'_{0\dot{a}} = [0 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ и $\alpha_1 = 0.5$ с ограничениями

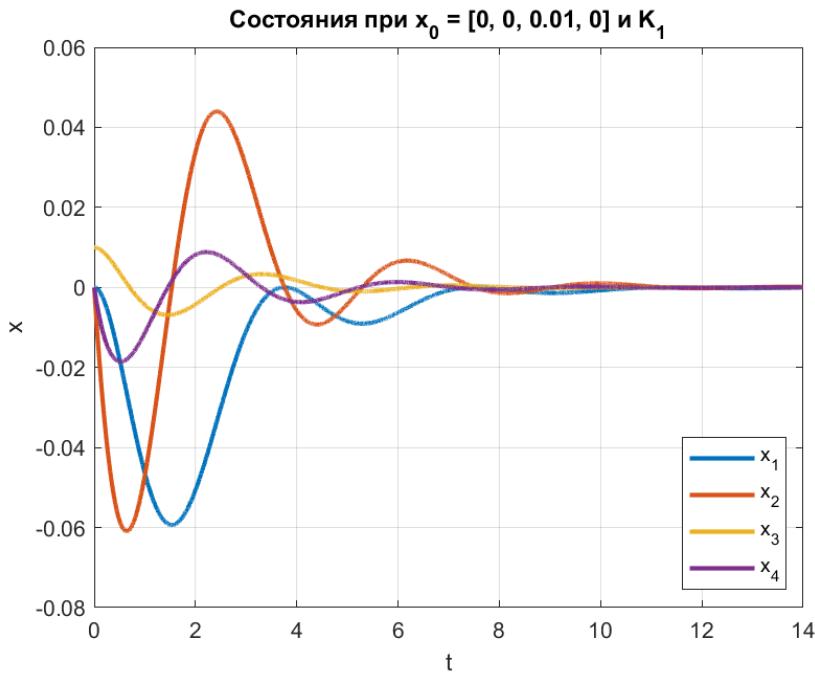


Рис. 84: График $x(t)$ при $x_{0\varphi} = [0 \ 0 \ 0.01 \ 0]^T$ и $\alpha_1 = 0.5$ с ограничениями

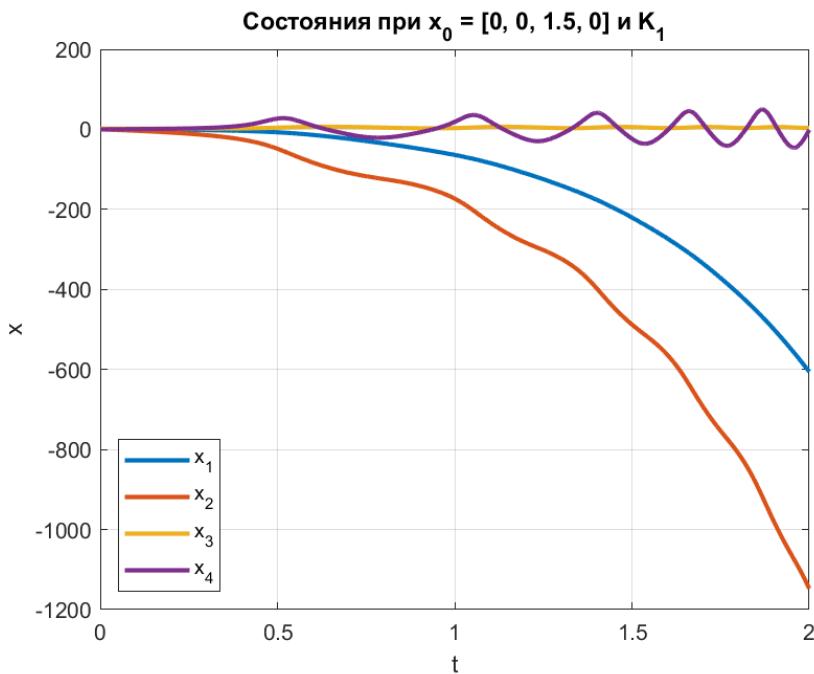


Рис. 85: График $x(t)$ при $x'_{0\varphi} = [0 \ 0 \ 1.5 \ 0]^T$ и $\alpha_1 = 0.5$ с ограничениями

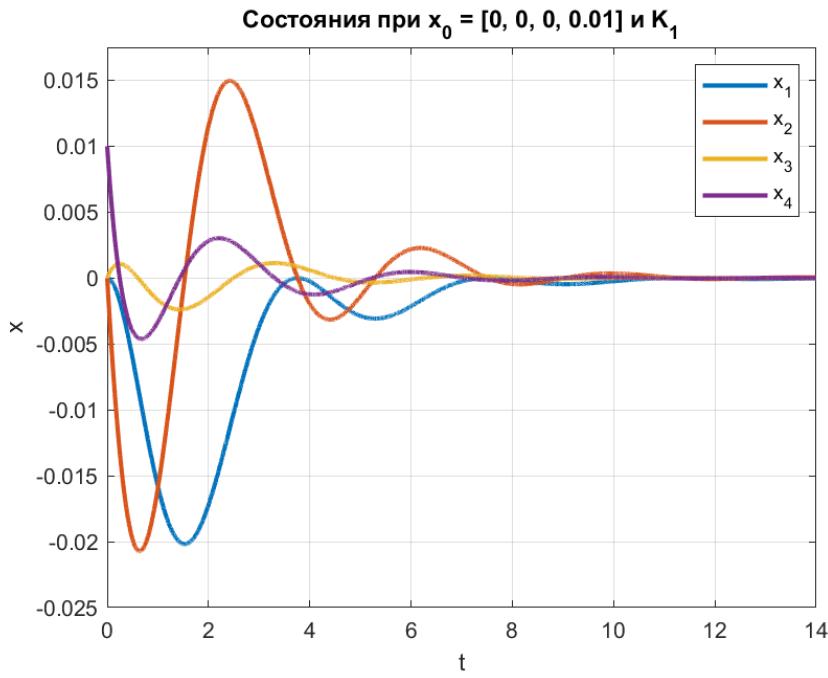


Рис. 86: График $x(t)$ при $x_{0\dot{\varphi}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0.01]^T$ и $\alpha_1 = 0.5$ с ограничениями

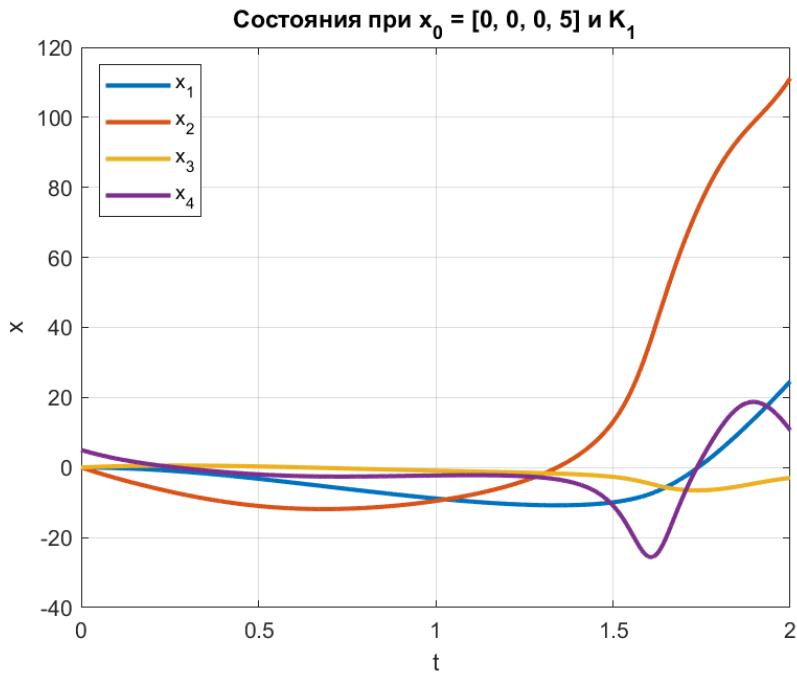


Рис. 87: График $x(t)$ при $x'_{0\dot{\varphi}} = [0 \ 0 \ 0 \ 5]^T$ и $\alpha_1 = 0.5$ с ограничениями

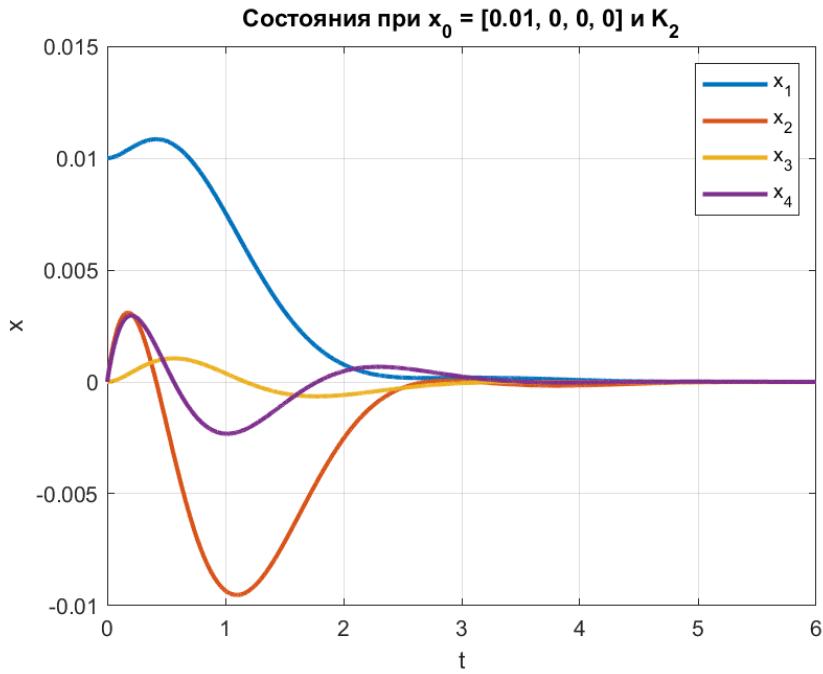


Рис. 88: График $x(t)$ при $x_{0a} = [0.01 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ и $\alpha_2 = 1.5$ с ограничениями

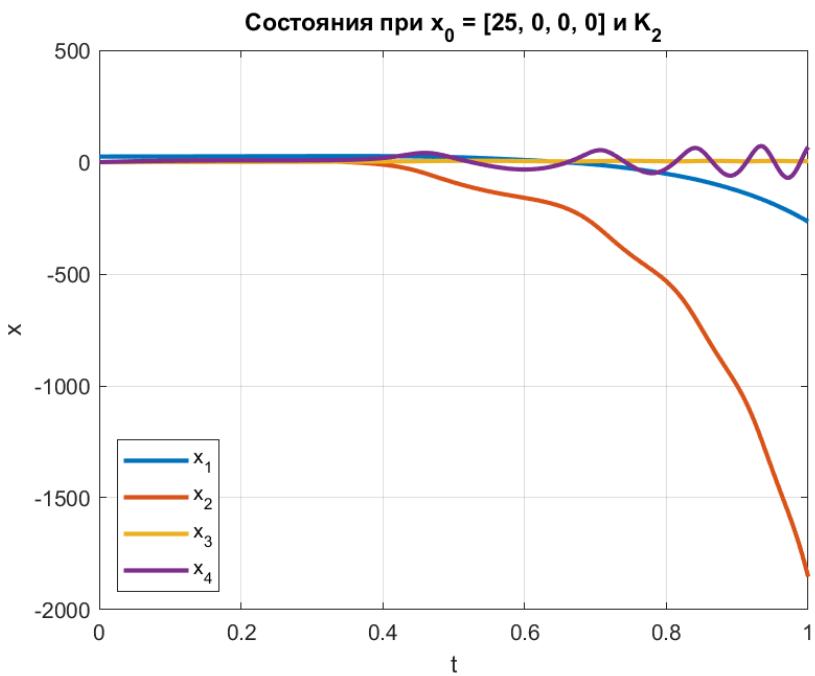


Рис. 89: График $x(t)$ при $x'_{0a} = [25 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ и $\alpha_2 = 1.5$ с ограничениями

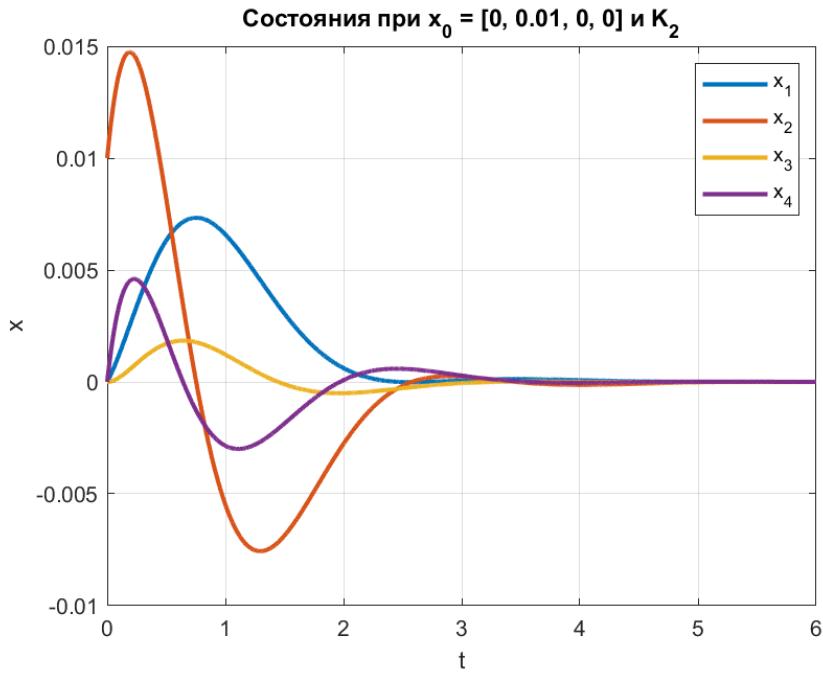


Рис. 90: График $x(t)$ при $x_{0\dot{a}} = [0 \ 0.01 \ 0 \ 0]^T$ и $\alpha_2 = 1.5$ с ограничениями

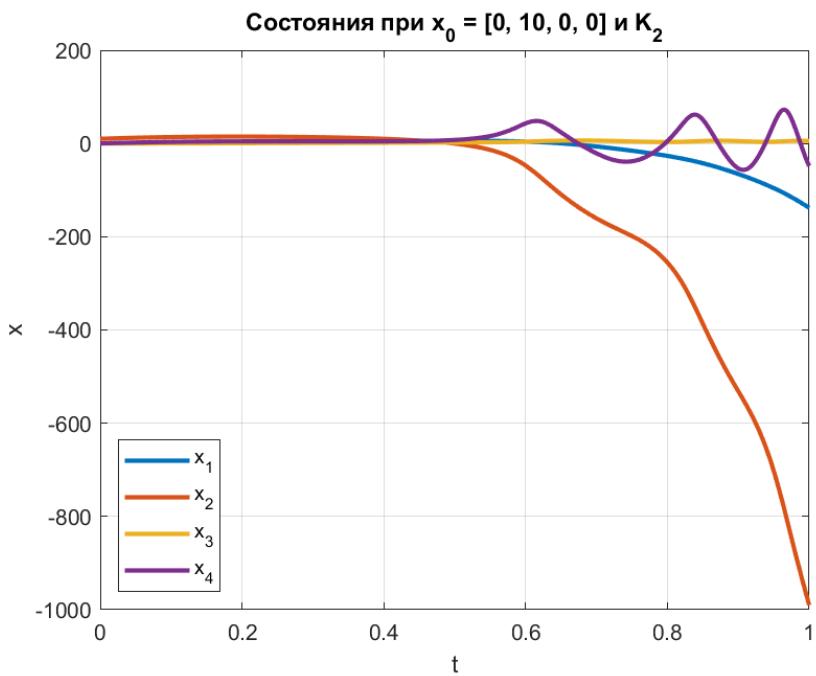


Рис. 91: График $x(t)$ при $x'_{0\dot{a}} = [0 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ и $\alpha_2 = 1.5$ с ограничениями

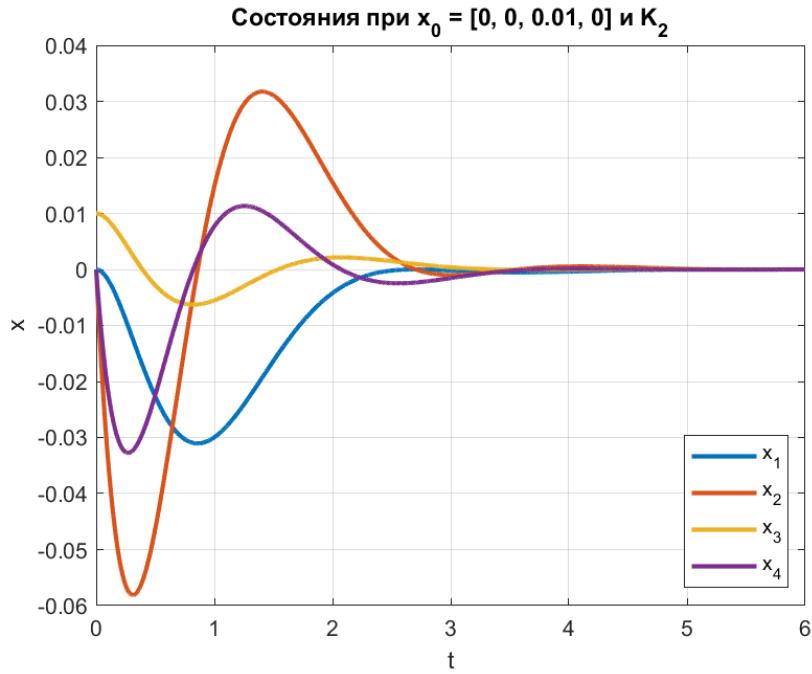


Рис. 92: График $x(t)$ при $x_{0\varphi} = [0 \ 0 \ 0.01 \ 0]^T$ и $\alpha_2 = 1.5$ с ограничениями

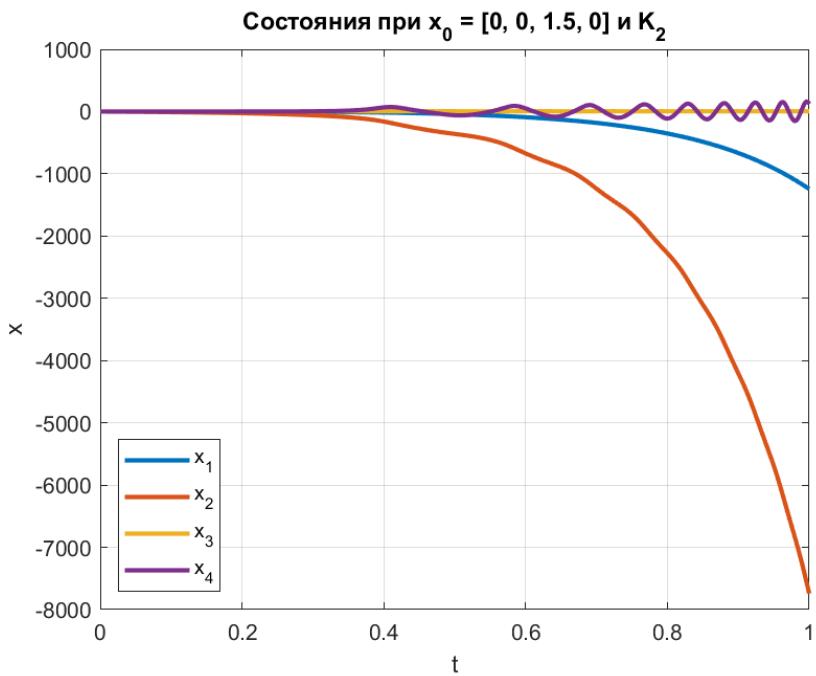


Рис. 93: График $x(t)$ при $x'_{0\varphi} = [0 \ 0 \ 1.5 \ 0]^T$ и $\alpha_2 = 1.5$ с ограничениями

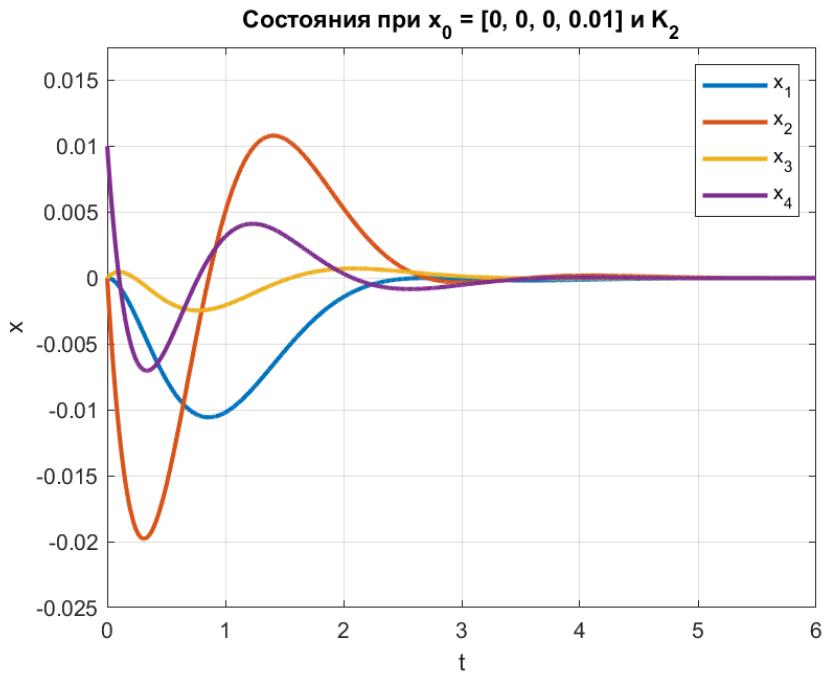


Рис. 94: График $x(t)$ при $x_{0\dot{\varphi}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0.01]^T$ и $\alpha_2 = 1.5$ с ограничениями

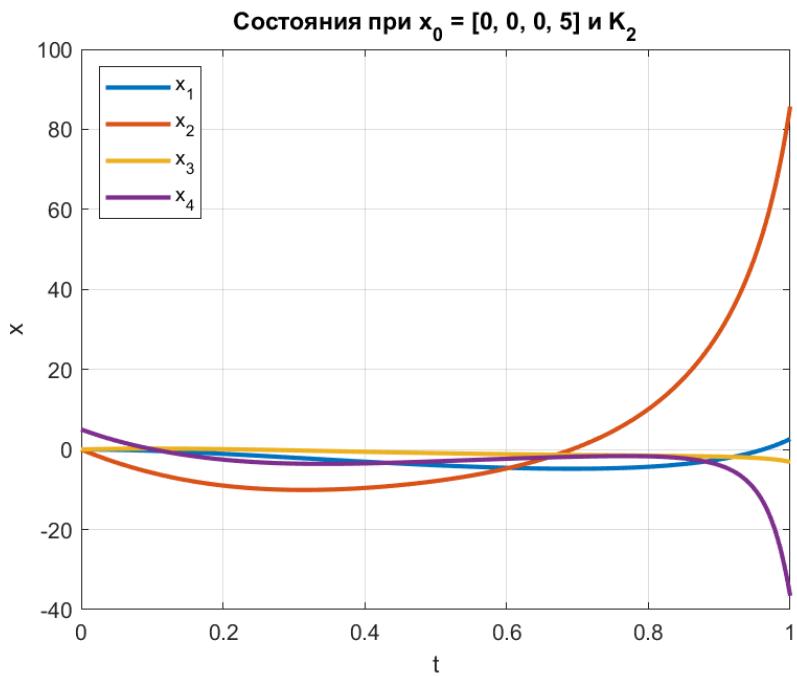


Рис. 95: График $x(t)$ при $x'_{0\dot{\varphi}} = [0 \ 0 \ 0 \ 5]^T$ и $\alpha_2 = 1.5$ с ограничениями

4.4 Исследование регулятора с ограничениями

Исследуем теперь влияние параметра желаемой степени устойчивости α на получаемые регуляторы с ограничениями на управление, то есть решим совместную задачу стабилизации состояний и минимизации $u = Kx$ для различных значений степени устойчивости α .

Внешнее воздействие f , как и прежде, примем нулевым.

Также зафиксируем начальные условия системы, использовавшиеся ранее при исследовании регулятора по состоянию с заданной степенью устойчивости без ограничений на управление:

$$x_0 = [-0.1 \ 0.05 \ -0.15 \ 0.075]^T$$

Итак, зададимся параметрами α :

$$\alpha_1 = 0.25, \quad \alpha_2 = 0.5, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 1.5$$

Найдем соответствующие им матрицы K путем решения матричного неравенства Ляпунова с задачей минимизации:

$$K_1 = [72.1719 \ 340.1094 \ -8929.2995 \ -3035.2326]$$

$$K_2 = [327.6221 \ 873.9577 \ -12295.1768 \ -4180.3975]$$

$$K_3 = [1398.5630 \ 2304.0552 \ -20234.4474 \ -6881.6022]$$

$$K_4 = [2468.5155 \ 3452.8787 \ -27230.0330 \ -9261.2414]$$

Выполним моделирование. На рисунках 96 - 103 можно наблюдать состояния нелинейной модели и управления при различных матрицах K и получающихся при этом регуляторах.

Проведем анализ полученных регуляторов. Для этого выведем максимальные отклонения маятника, смещения тележки ($\varphi_{1max} = \varphi_{2max} = \varphi_{3max} = \varphi_{4max} = 0.15$) и управления для каждого синтезированного регулятора:

$$a_{1max} = 1.4313, \ a_{2max} = 0.7122, \ a_{3max} = 0.4114, \ a_{4max} = 0.3405$$

$$u_{1max} = 1121.5, \ u_{2max} = 1541.7, \ u_{3max} = 2494.4, \ u_{4max} = 3315.7$$

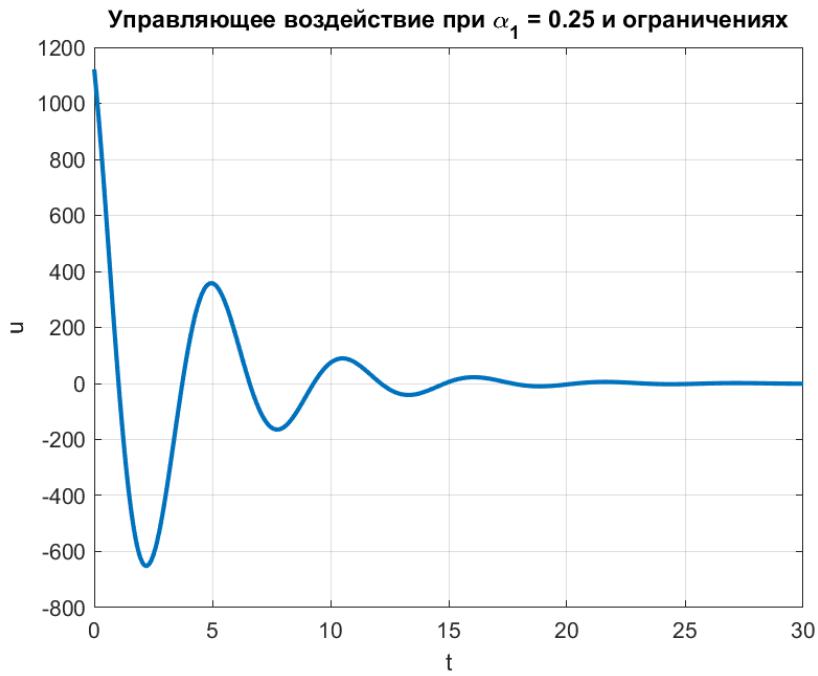


Рис. 96: График управления $u(t) = K_1x(t)$ при $\alpha_1 = 0.25$ с ограничениями

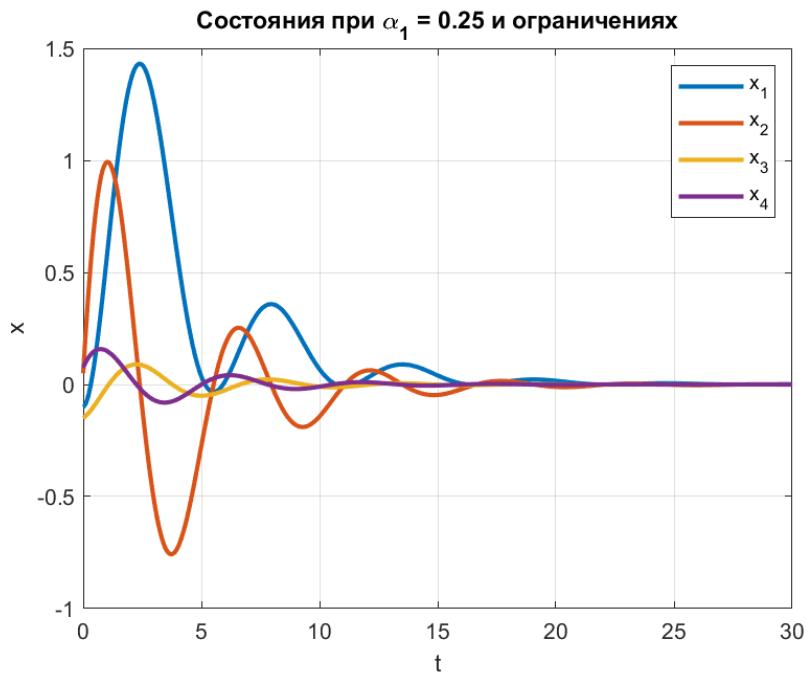


Рис. 97: График $x(t)$ при $u(t) = K_1x(t)$ и $\alpha_1 = 0.25$ с ограничениями

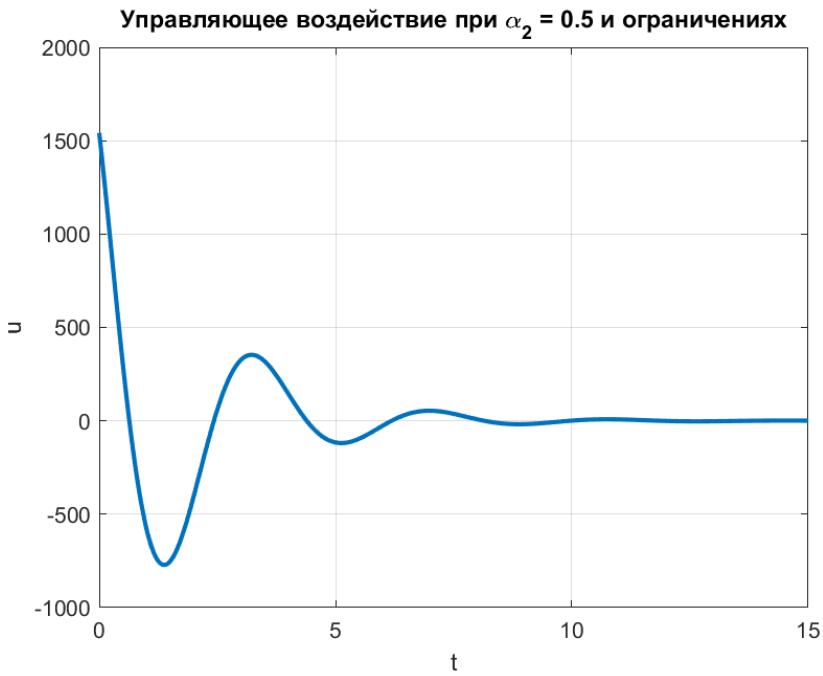


Рис. 98: График управления $u(t) = K_2x(t)$ при $\alpha_2 = 0.5$ с ограничениями

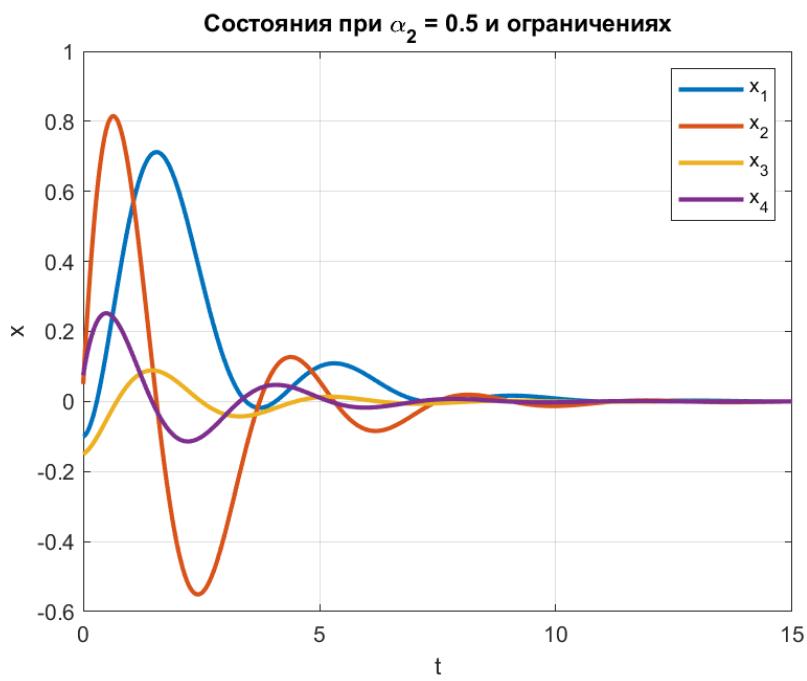


Рис. 99: График $x(t)$ при $u(t) = K_2x(t)$ и $\alpha_2 = 0.5$ с ограничениями

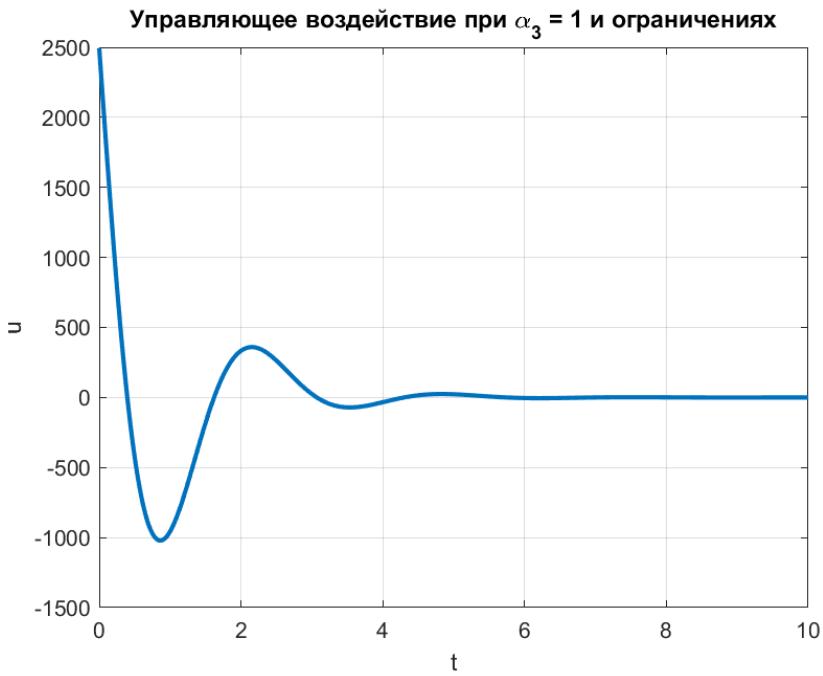


Рис. 100: График управления $u(t) = K_3x(t)$ при $\alpha_3 = 1$ с ограничениями

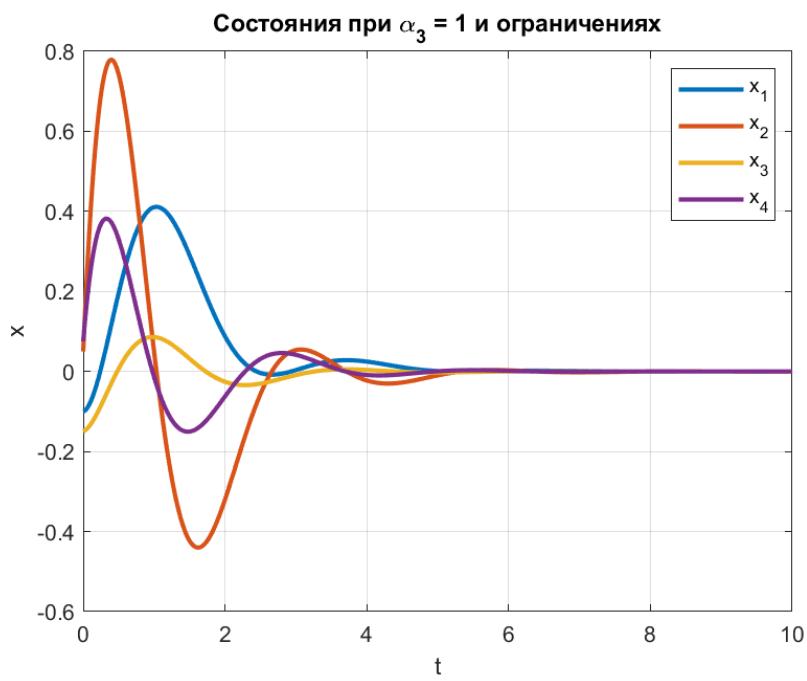


Рис. 101: График $x(t)$ при $u(t) = K_3x(t)$ и $\alpha_3 = 1$ с ограничениями

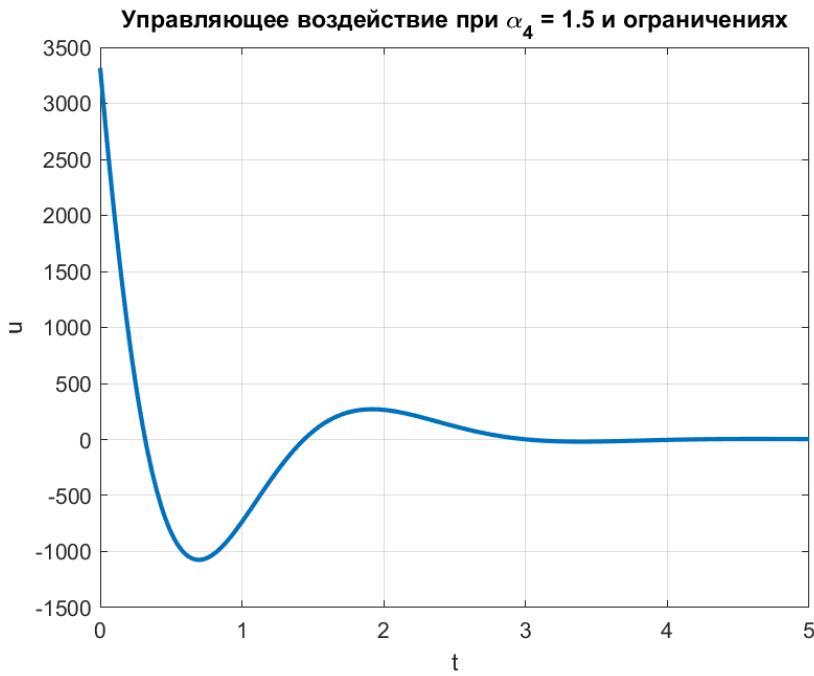


Рис. 102: График управления $u(t) = K_4x(t)$ при $\alpha_4 = 1.5$ с ограничениями

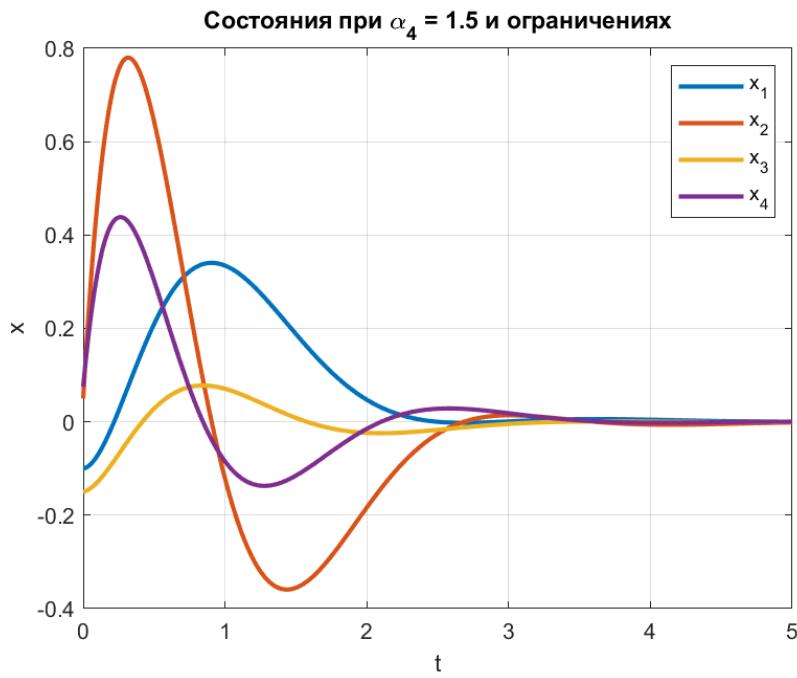


Рис. 103: График $x(t)$ при $u(t) = K_4x(t)$ и $\alpha_4 = 1.5$ с ограничениями

Таким образом, увеличение степени устойчивости α , как и прежде, привело к увеличению затрачиваемого управления, но при этом переходные процессы ускорились, а смещение тележки уменьшилось.

Важно, что в сравнении с регуляторами без ограничений скорость переходных процессов выведенных регуляторов (при тех же степенях устойчивости α) замедляется, а смещение тележки возрастает, но при этом затрачиваемое управление меньше. То есть ограничения дали более «щадящие» регуляторы.

4.5 Синтез наблюдателя

С помощью решения матричного неравенства Ляпунова для экспоненциальной устойчивости также можно синтезировать и наблюдатели полной размерности:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Но сперва нам необходимо стабилизировать систему (она ведь неустойчива), для чего синтезируем статический регулятор $u = Kx$ со степенью устойчивости $\alpha_R = 1$. Получаем матрицу K :

$$K = [4725.0490 \ 6731.9196 \ -39423.0675 \ -13410.3853]$$

Зададимся начальными условиями для системы и наблюдателя:

$$x_0 = [0.05 \ 0.1 \ 0.1 \ -0.02]^T, \quad \hat{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Перейдем к синтезу наблюдателя. Будем решать неравенство Ляпунова относительно Q , а после находить матрицу коррекции L :

$$A^T Q + Q A + 2\alpha_L Q + C^T Y^T + Y C \preceq 0, \quad L = Q^{-1} Y \quad (38)$$

Зададимся $\alpha_L = 1.5$, тогда:

$$L = \begin{bmatrix} -12.5024 & -35.8967 & 0.0486 & 0.1356 \\ -0.0486 & -0.1631 & -12.5024 & -44.5571 \end{bmatrix}^T$$

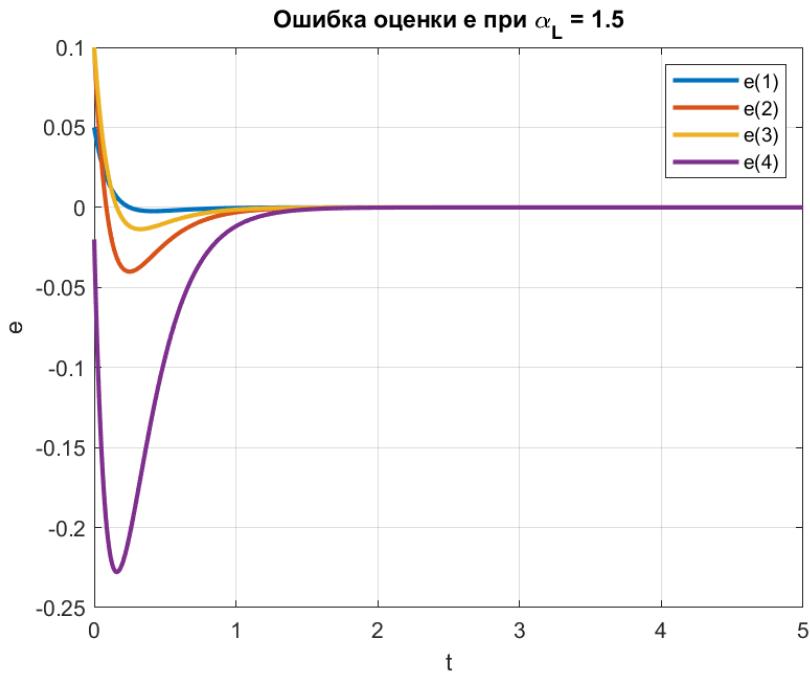


Рис. 104: График ошибки оценки наблюдателя при $\alpha_L = 1.5$

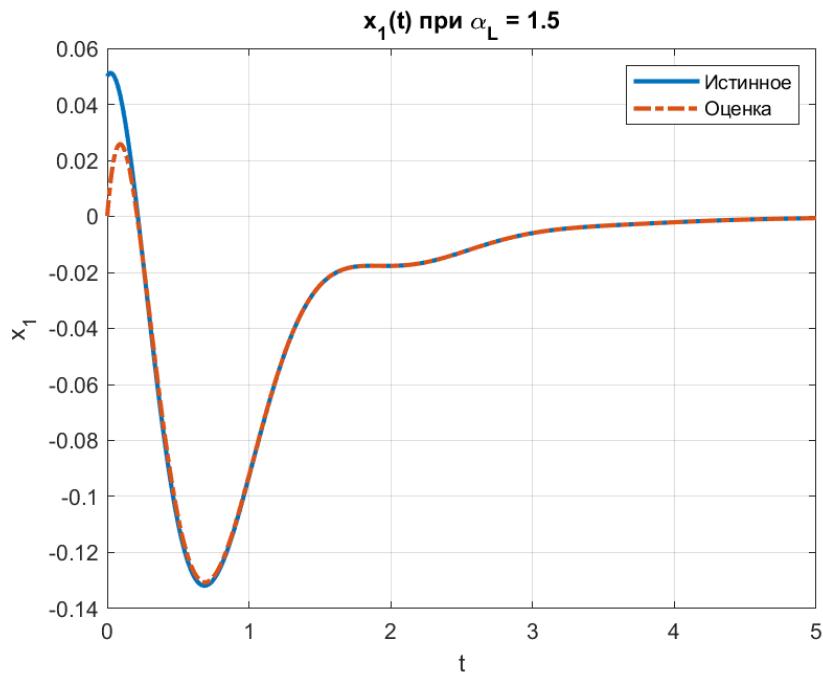


Рис. 105: График $x_1(t) = a(t)$ системы и наблюдателя при $\alpha_L = 1.5$

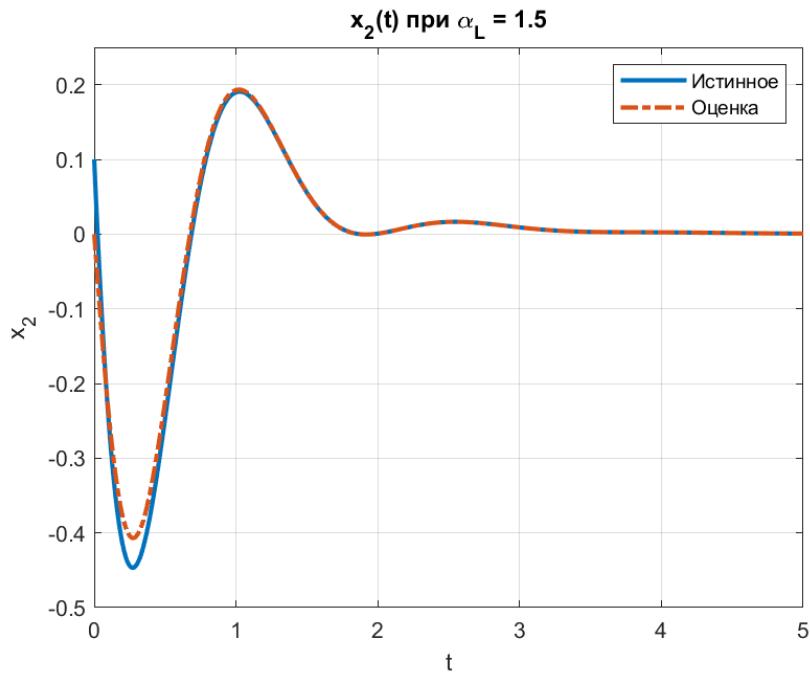


Рис. 106: График $x_2(t) = \dot{a}(t)$ системы и наблюдателя при $\alpha_L = 1.5$

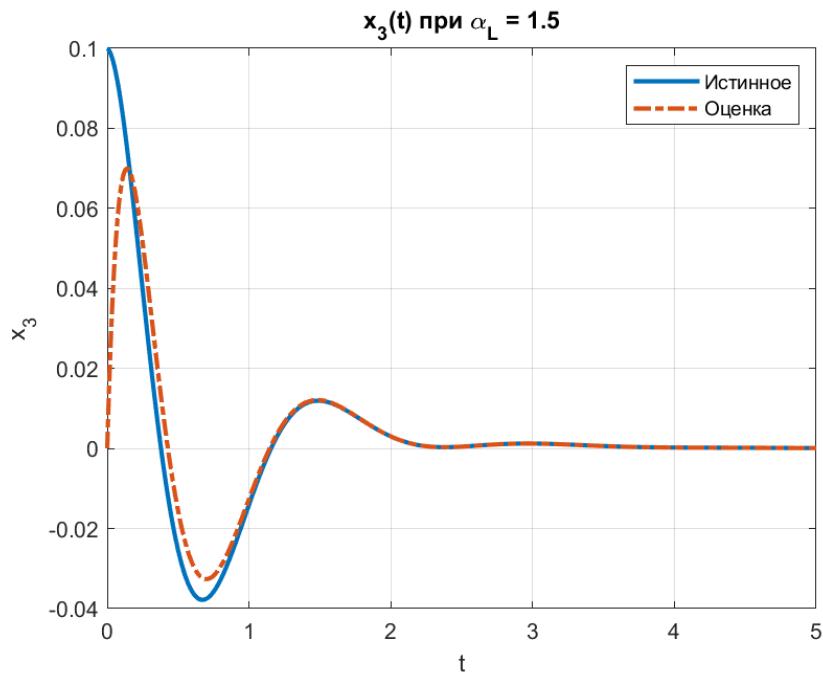


Рис. 107: График $x_3(t) = \varphi(t)$ системы и наблюдателя при $\alpha_L = 1.5$

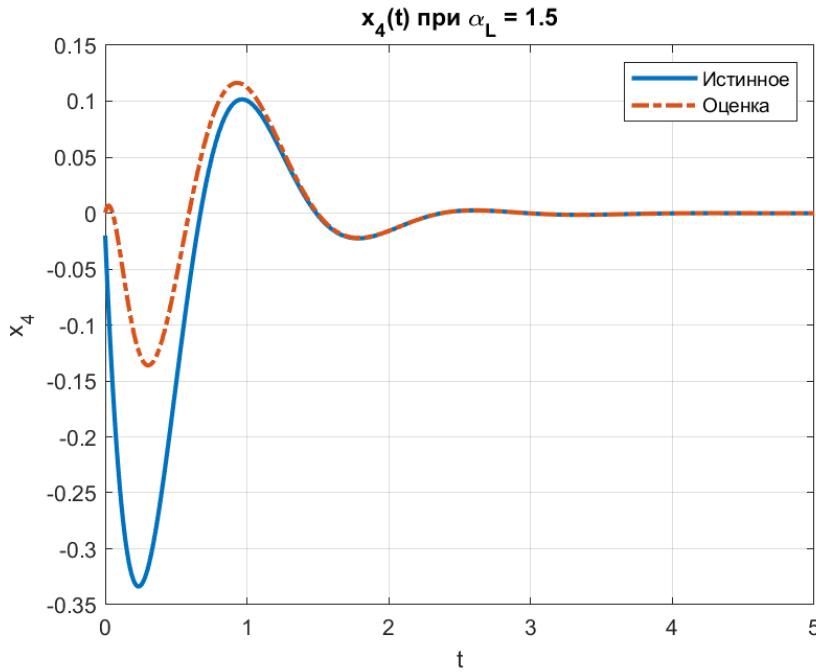


Рис. 108: График $x_4(t) = \dot{\varphi}(t)$ системы и наблюдателя при $\alpha_L = 1.5$

Выполним моделирование. На рисунках 104 - 108 изображены графики состояния системы и наблюдателя, а также ошибки оценок.

Видим, что синтезированный наблюдатель работает корректно - ошибка оценки сходится к нулю и уже после 2 секунды она визуально неотличима от нуля.

4.6 Синтез регулятора по выходу

Предположим, что доступными к измерению являются только выходные сигналы y_1 и y_2 . При этом решить задачу стабилизации системы всё ещё хочется. В этом случае можно использовать регулятор по выходу - объединение регулятора по состоянию и наблюдателя:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Прикладываемое к системе управление тогда будет равно:

$$u = K\hat{x}$$

Синтезировать регуляторы и наблюдатели будем из матричных неравенств Ляпунова для экспоненциальной устойчивости, введенных для обоих случаев нами ранее.

Внешнее воздействие f , как и прежде, примем нулевым.

А начальные условия для системы и наблюдателя:

$$x_0 = [0.05 \ 0.06 \ 0.07 \ 0.02]^T, \quad \hat{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Зададимся четырьмя наборами степеней устойчивости для регуляторов и сходимости для наблюдателей:

$$\alpha_{R1} = 1, \quad \alpha_{L1} = 1 \quad \alpha_{R2} = 1, \quad \alpha_{L2} = 4$$

$$\alpha_{R3} = 4, \quad \alpha_{L3} = 1 \quad \alpha_{R4} = 4, \quad \alpha_{L4} = 4$$

Для начала найдем матрицы регуляторов:

$$K_1 = K_2 = [6086.0892 \ 8287.9115 \ -47250.8105 \ -16075.4857]$$

$$K_3 = K_4 = [191186.0401 \ 88805.5312 \ -386128.8032 \ -114422.7347]$$

А затем матрицы наблюдателей:

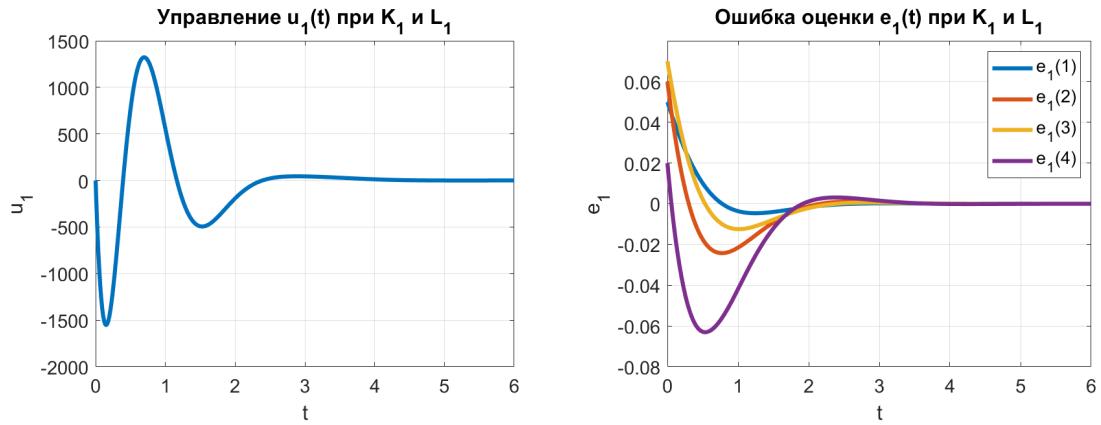
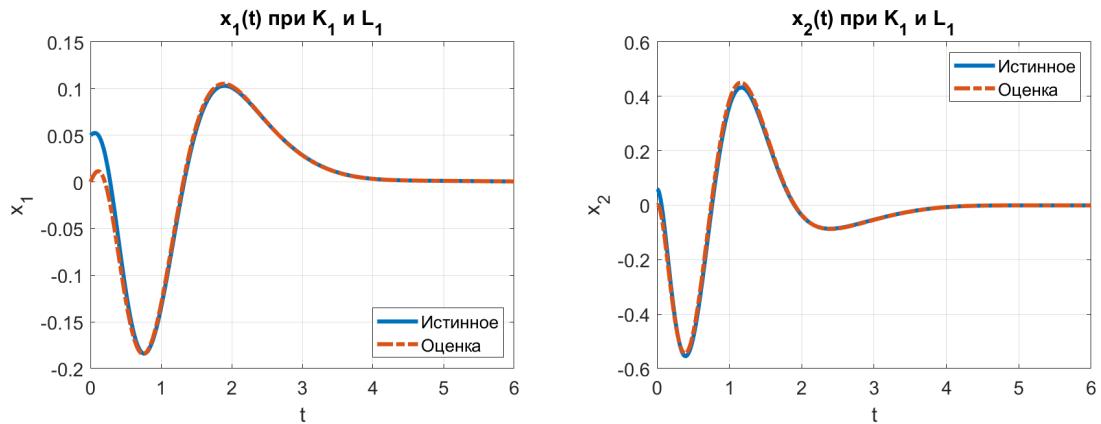
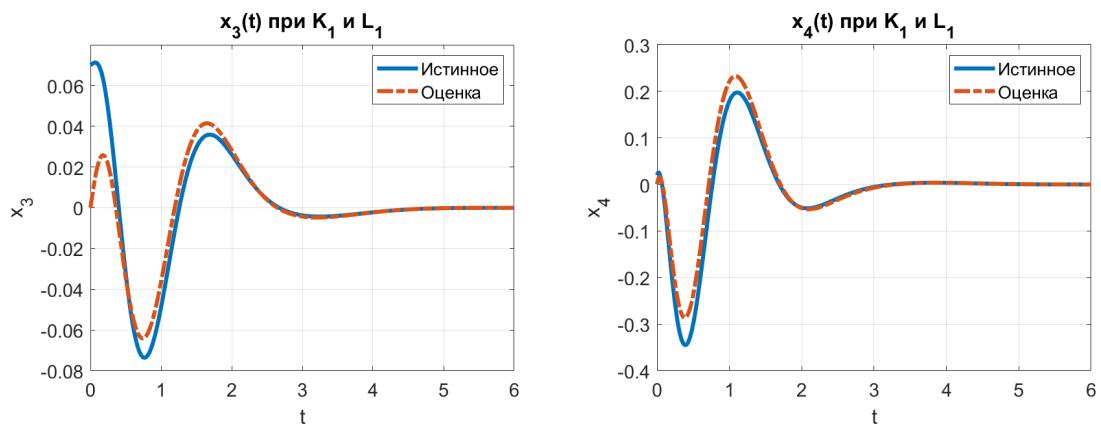
$$L_1 = L_3 = \begin{bmatrix} -3.2983 & -5.5813 & 0.0207 & 0.0287 \\ -0.0207 & -0.0563 & -3.2983 & -14.2417 \end{bmatrix}^T$$

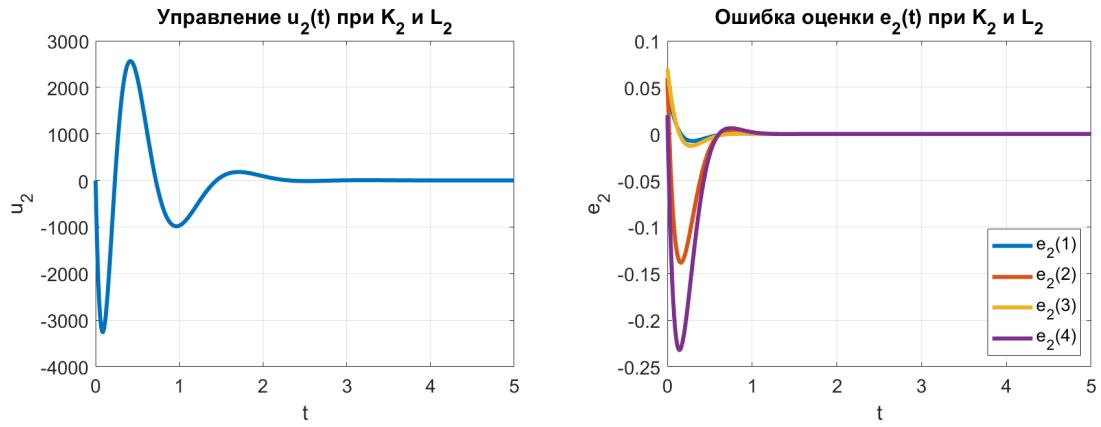
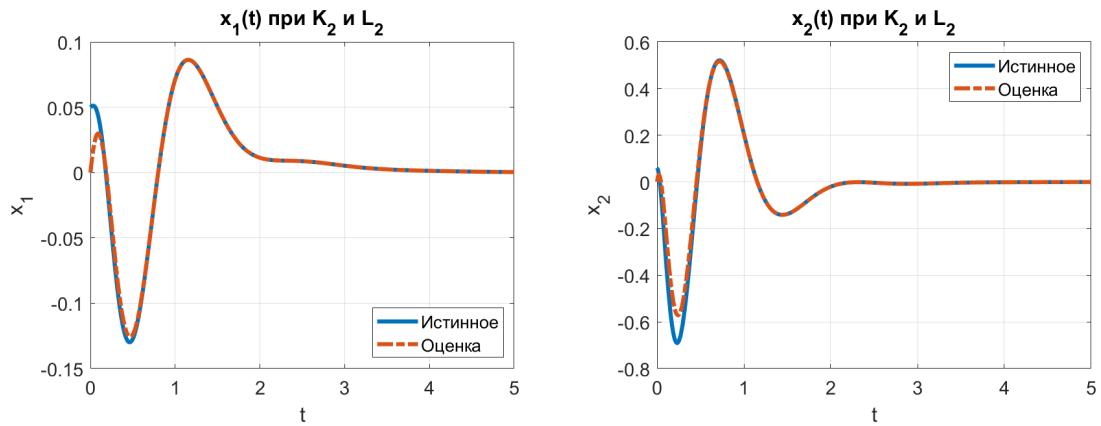
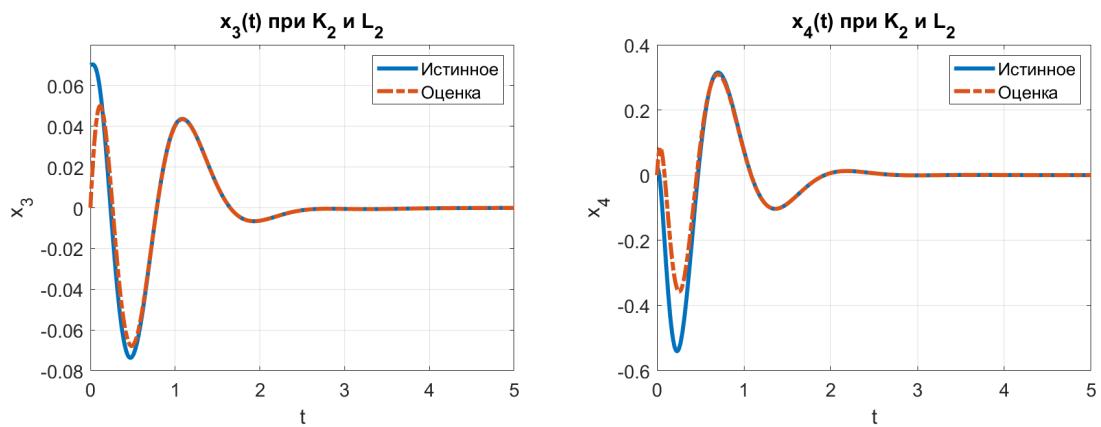
$$L_2 = L_4 = \begin{bmatrix} -11.9424 & -63.5693 & 0.0093 & 0.0489 \\ -0.0093 & -0.0764 & -11.9424 & -72.2297 \end{bmatrix}^T$$

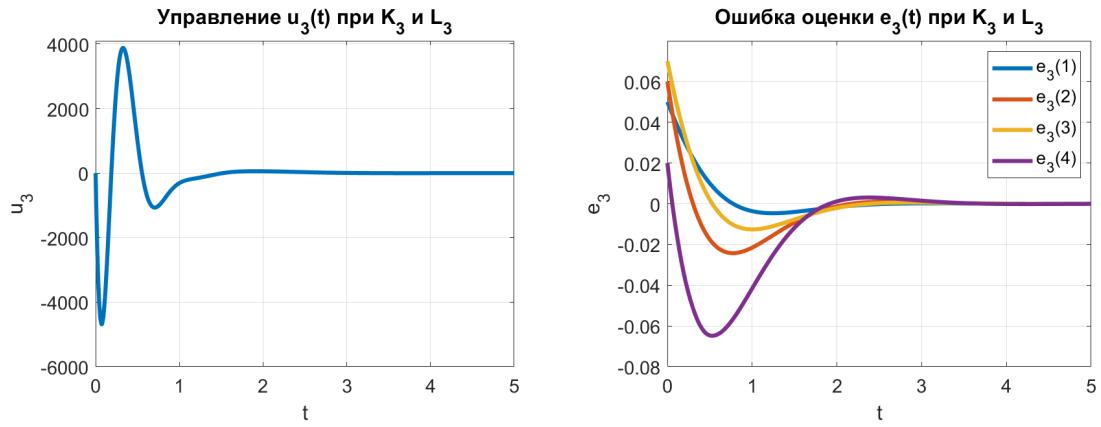
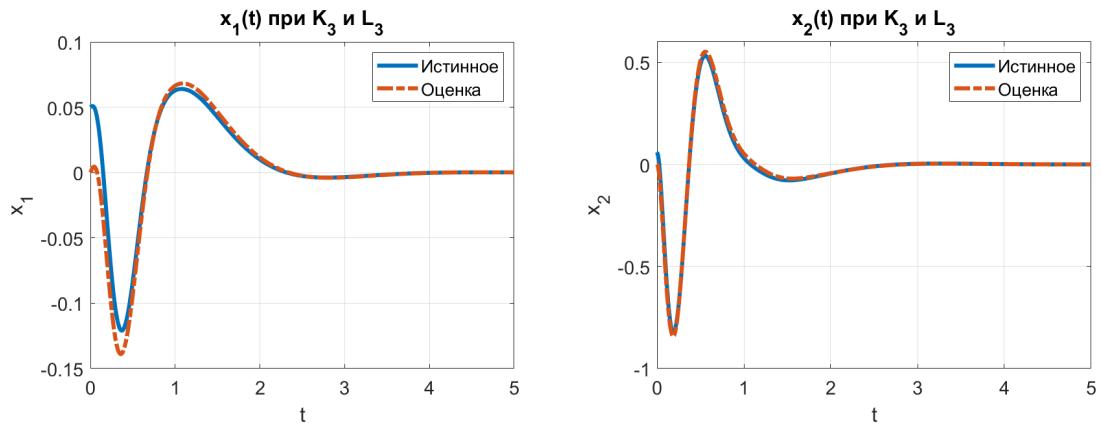
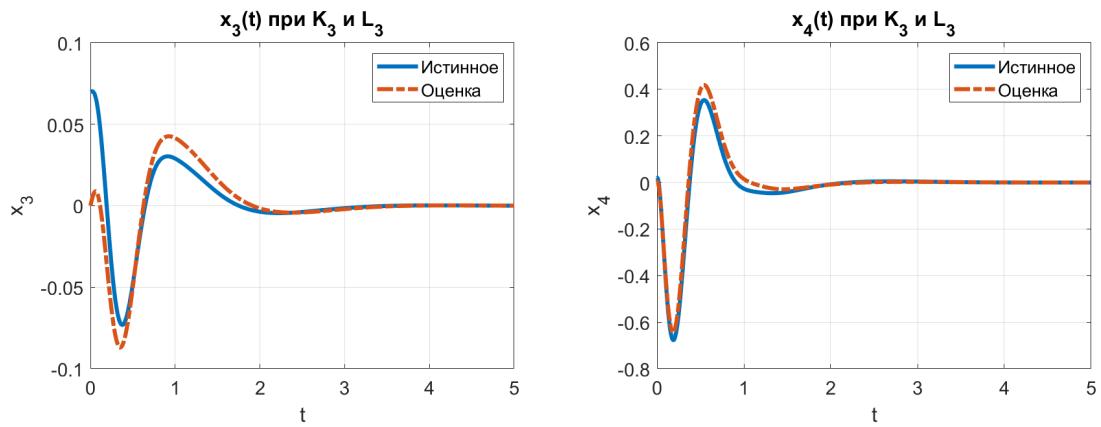
Перейдем к моделированию. На рисунках 109 - 120 можем видеть состояния системы и наблюдателя, а также управления и ошибки наблюдения при различных наборах степеней устойчивости.

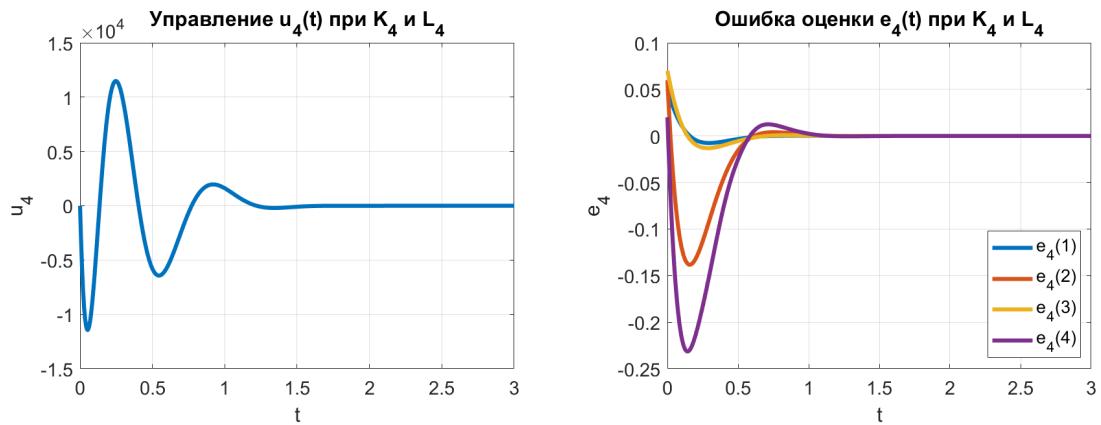
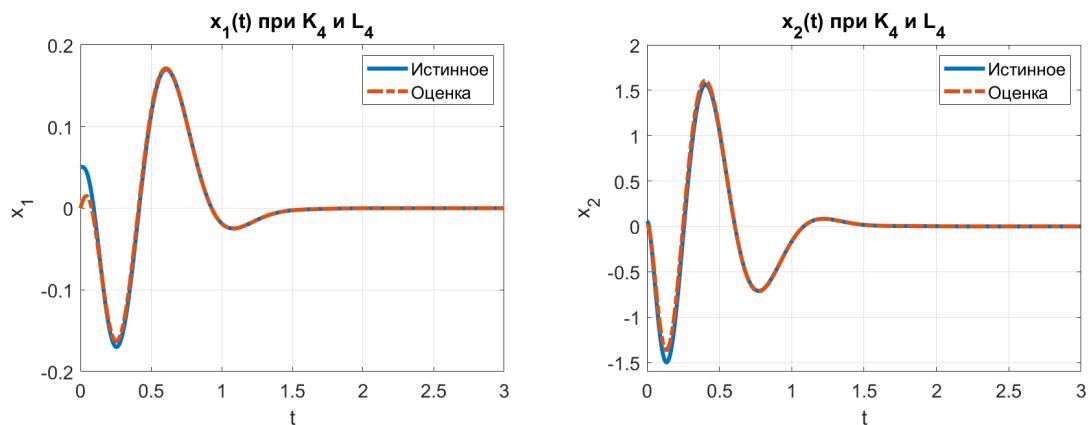
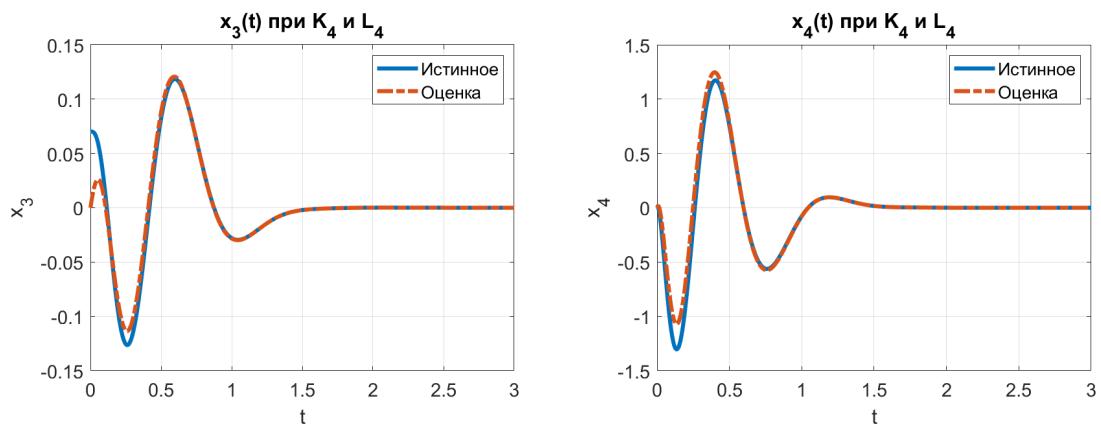
Проведем небольшой анализ результатов. Для этого найдем максимальные отклонения маятника от вертикали:

$$\varphi_{1max} = 0.1305, \quad \varphi_{2max} = 0.1096, \quad \varphi_{3max} = 0.1109, \quad \varphi_{4max} = 0.1042$$

Рис. 109: Графики управления и ошибки наблюдения при $\alpha_{R1} = 1$ и $\alpha_{L1} = 1$ Рис. 110: Графики состояний x_1 и x_2 при $\alpha_{R1} = 1$ и $\alpha_{L1} = 1$ Рис. 111: Графики состояний x_3 и x_4 при $\alpha_{R1} = 1$ и $\alpha_{L1} = 1$

Рис. 112: Графики управления и ошибки наблюдения при $\alpha_{R2} = 1$ и $\alpha_{L2} = 4$ Рис. 113: Графики состояний x_1 и x_2 при $\alpha_{R2} = 1$ и $\alpha_{L2} = 4$ Рис. 114: Графики состояний x_3 и x_4 при $\alpha_{R2} = 1$ и $\alpha_{L2} = 4$

Рис. 115: Графики управления и ошибки наблюдения при $\alpha_{R3} = 4$ и $\alpha_{L3} = 1$ Рис. 116: Графики состояний x_1 и x_2 при $\alpha_{R3} = 4$ и $\alpha_{L3} = 1$ Рис. 117: Графики состояний x_3 и x_4 при $\alpha_{R3} = 4$ и $\alpha_{L3} = 1$

Рис. 118: Графики управления и ошибки наблюдения при $\alpha_{R4} = 4$ и $\alpha_{L4} = 4$ Рис. 119: Графики состояний x_1 и x_2 при $\alpha_{R4} = 4$ и $\alpha_{L4} = 4$ Рис. 120: Графики состояний x_3 и x_4 при $\alpha_{R4} = 4$ и $\alpha_{L4} = 4$

Максимальные горизонтальные смещения тележки:

$$a_{1max} = 1.5232, \ a_{2max} = 0.4938, \ a_{3max} = 0.2286, \ a_{4max} = 0.2159$$

Максимальные управляющие воздействия:

$$u_{1max} = 1553.5, \ u_{2max} = 3261, \ u_{3max} = 4686.6, \ u_{4max} = 11486$$

Таким образом, повышение степеней устойчивости регулятора α_R и сходимости наблюдателя α_L приводит к росту величины управления и уменьшению максимальных отклонений маятника от вертикали и горизонтального смещения тележки.

При увеличении степеней α_R и α_L также наблюдается небольшое ускорение переходных процессов.

Наблюдатель при сильном управлении сходится к исходному вектору состояния системы немного дольше (особенно это заметно при сравнении рисунков 110 и 116).

Наиболее оптимальным, на мой субъективный взгляд, оказался регулятор с матрицами K_2 и L_2 с соответствующими степенями устойчивости $\alpha_{R2} = 1$ и сходимости $\alpha_{L2} = 4$. В нём присутствует небольшое управление при хорошей скорости стабилизации системы, наблюдатель дает точную оценку, а это позволяет добиться устойчивых внутренних процессов.

5 Слежение и компенсация

5.1 Решение задачи компенсации

Ранее внешнее воздействие f принималось нулевым и вообще не учитывалось. Теперь же зададим его как сумму не менее пяти гармоник с разными частотами, амплитудами и фазами:

$$f(t) = 0.8 \cos(0.5t + 0.1) + 0.5 \cos(1.2t + 1) + 0.3 \cos(2t - 0.5) + \\ + 0.2 \cos(3.5t + 0.7) + 0.15 \cos(5t - 1.2)$$

Немного упростим:

$$f(t) = 0.8 \cos(0.1) \cos(0.5t) + 0.8 \sin(0.1) \sin(0.5t) + \\ + 0.5 \cos(1) \cos(1.2t) + 0.5 \sin(1) \sin(1.2t) + \\ + 0.3 \cos(-0.5) \cos(2t) + 0.3 \sin(-0.5) \sin(2t) + \\ + 0.2 \cos(0.7) \cos(3.5t) + 0.2 \sin(0.7) \sin(3.5t) + \\ + 0.15 \cos(-1.2) \cos(5t) + 0.15 \sin(-1.2) \sin(5t)$$

Создадим этот сигнал через генератор внешнего возмущения:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_f = \Gamma \omega_f \\ f = Y_f \omega_f \end{cases} \quad (39)$$

Зададим матрицы Γ , Y_f и начальные условия для ω_f , зная, что в нулевой момент времени в сигнале f остаются только косинусы:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_f^T = \begin{bmatrix} 0.8 \cos(0.1) \\ 0.8 \sin(0.1) \\ 0.5 \cos(1) \\ 0.5 \sin(1) \\ 0.3 \cos(-0.5) \\ 0.3 \sin(-0.5) \\ 0.2 \cos(0.7) \\ 0.2 \sin(0.7) \\ 0.15 \cos(-1.2) \\ 0.15 \sin(-1.2) \end{bmatrix}, \quad \omega_f(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Отлично, теперь построим компенсирующий регулятор, гарантирующий выполнение целевого условия:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t)\| = 0 \quad (40)$$

Будем считать весь вектор состояния доступным для измерения. Сам регулятор будет иметь вид:

$$u = K_1 x + K_2 \omega_f \quad (41)$$

Для решения задачи используем виртуальный выход:

$$\varphi = x_3 = z = C_z x, \quad C_z = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad (42)$$

Матрицу K_1 найдем с помощью модального управления:

$$\sigma(G) = \{-1, -2, -3, -4\} \Rightarrow G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$K_1 = [1754.8677 \ 3655.9743 \ -33311.0953 \ -11325.9253]$$

Синтез «feedforward»-компоненты проведем с помощью решения системы уравнений, обеспечивающих выполнение целевого условия:

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY + DY_f \\ C_z P = 0 \end{cases} \quad (43)$$

Итак, с помощью решения системы находим $K_2 = Y - K_1 P$:

$$K_2 = [-2734 \ -3193 \ 388 \ -795 \ -271 \ -162 \ 8 \ -129 \ -70 \ 29]$$

Проверим полученный регулятор в действии. Для этого промоделируем замкнутые линейную и нелинейную системы с начальными условиями

$$x_0 = [0.02 \ -0.05 \ 0.1 \ 0.01]^T$$

На рисунках 121 - 125 можем видеть графики сигнала внешнего воздействия, формируемых управлений, виртуальных выходов, а также состояний систем.

В результате генератор сигнала корректно формирует внешнее воздействие, повторяя исходный гармонический сигнал. Целевая переменная идет к нулю как для линейной, так и для нелинейной системы - регулятор успешно справляется с задачей компенсации для угла маятника $\varphi(t)$. Линеаризация около нуля приближает нелинейную модель идеально - графики для них практически идентичны.



Рис. 121: Сигнал $f(t)$ для компенсации

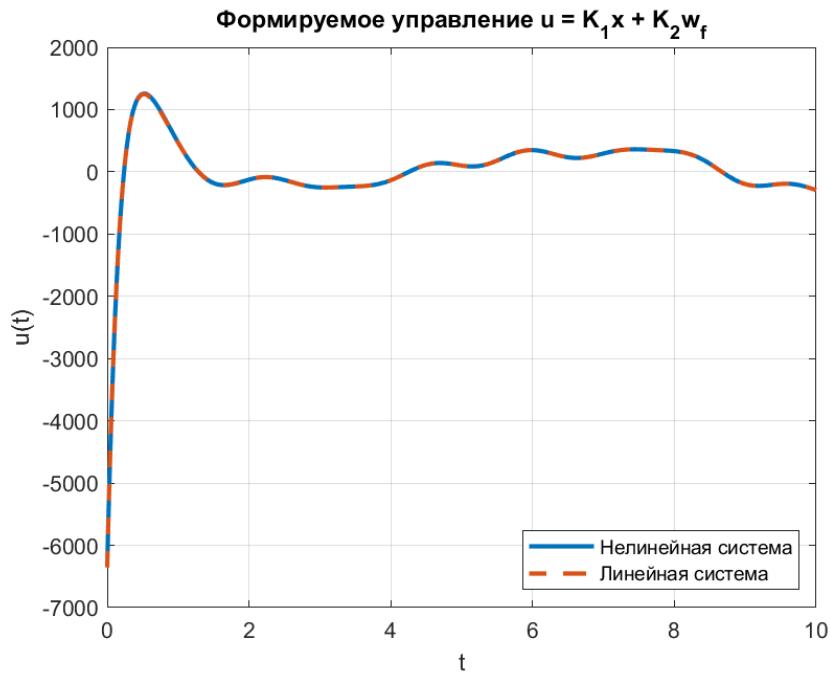


Рис. 122: Формируемое управление $u(t)$ нелинейной и линейной систем

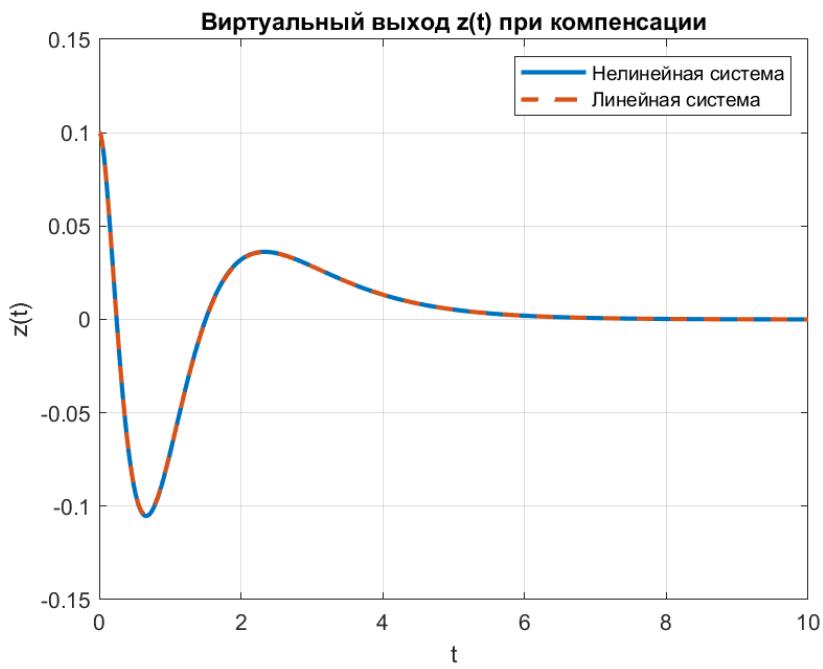


Рис. 123: Виртуальный выход $z(t)$ нелинейной и линейной систем

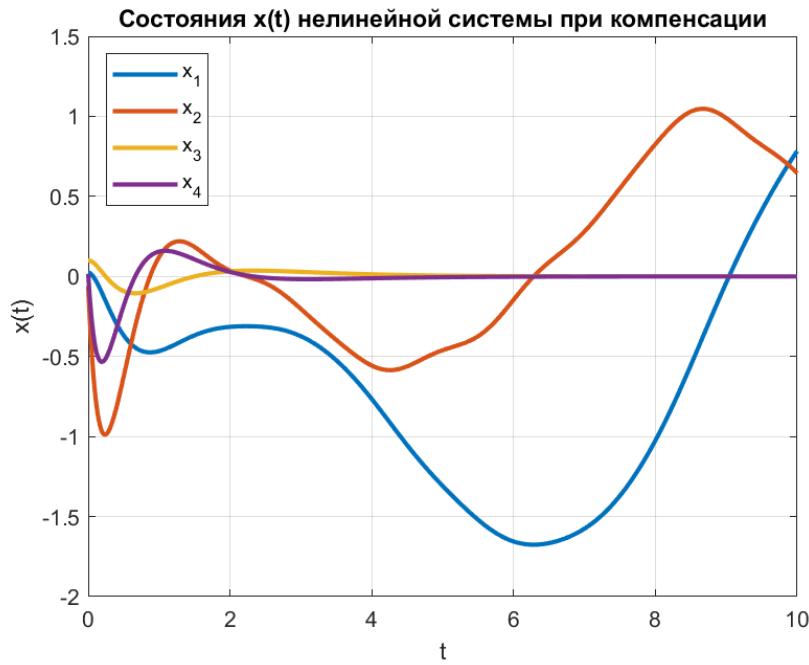


Рис. 124: Состояния $x(t)$ нелинейной системы при $u = K_1x + K_2\omega_f$

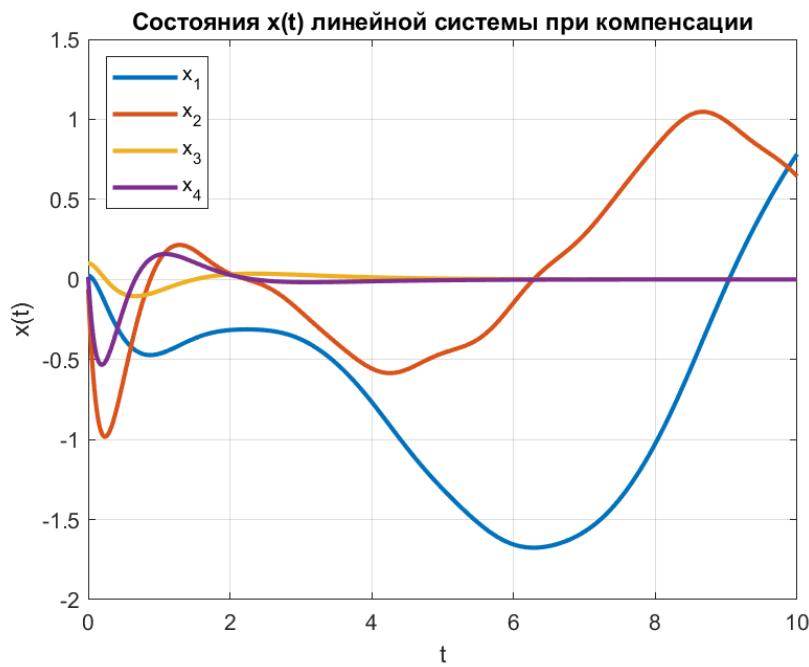


Рис. 125: Состояния $x(t)$ линейной системы при $u = K_1x + K_2\omega_f$

5.2 Решение задачи слежения

Положим теперь $f(t) = 0$. Зададимся целевым сигналом $g(t)$, для этого воспользуемся сигналом $f(t)$ из предыдущего пункта, но уменьшим его амплитуду в 20 раз:

$$\begin{aligned} g(t) = 0.05f(t) &= 0.04 \cos(0.5t + 0.1) + 0.025 \cos(1.2t + 1) + \\ &+ 0.015 \cos(2t - 0.5) + 0.01 \cos(3.5t + 0.7) + \\ &+ 0.0075 \cos(5t - 1.2) \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему пункту создадим генератор сигнала:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_g = \Gamma \omega_g \\ g = Y_g \omega_g \end{cases} \quad (44)$$

Матрица Γ и начальные условия $\omega_g(0) = \omega_f(0)$ генератора остаются теми же, что и в предыдущем пункте.

А вот Y_g будет другим:

$$Y_g^T = \begin{bmatrix} 0.04 \cos(0.1) \\ 0.04 \sin(0.1) \\ 0.025 \cos(1) \\ 0.025 \sin(1) \\ 0.015 \cos(-0.5) \\ 0.015 \sin(-0.5) \\ 0.01 \cos(0.7) \\ 0.01 \sin(0.7) \\ 0.0075 \cos(-1.2) \\ 0.0075 \sin(-1.2) \end{bmatrix}$$

Хорошо, теперь перейдем к синтезу регулятора, гарантирующего выполнение условия:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t) - g(t)\| = 0 \quad (45)$$

Считаем весь вектор состояния доступным для измерения, тогда регулятор будет иметь вид:

$$u = K_1 x + K_2 \omega_g \quad (46)$$

Для решения задачи используем виртуальный выход, который и будем устремлять к нулю:

$$z = C_z x + D_z \omega_g \quad (47)$$

Составим матрицы C_z и D_z для выполнения поставленного выше условия слежения угла маятника $\varphi(t)$ за сигналом $g(t)$:

$$C_z = [0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad D_z = -Y_g$$

Далее найдем матрицу K_1 с помощью модального управления:

$$\sigma(G) = \{-1, -2, -3, -4\} \Rightarrow G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$K_1 = [1754.8677 \ 3655.9743 \ -33311.0953 \ -11325.9253]$$

Синтез «feedforward»-компоненты проведем с помощью решения системы уравнений, обеспечивающих выполнение целевого условия на виртуальный выход $z \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY \\ C_z P + D_z = 0 \end{cases} \quad (48)$$

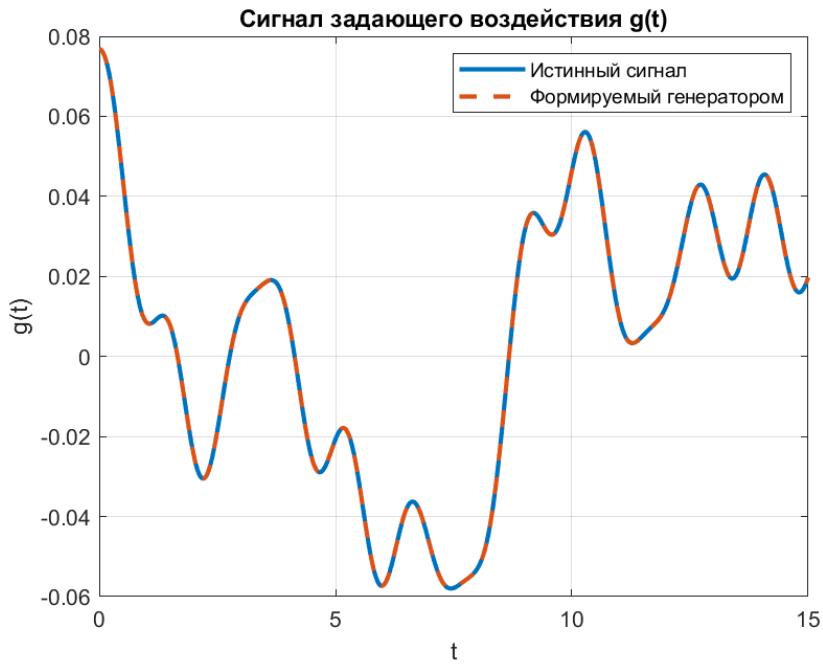
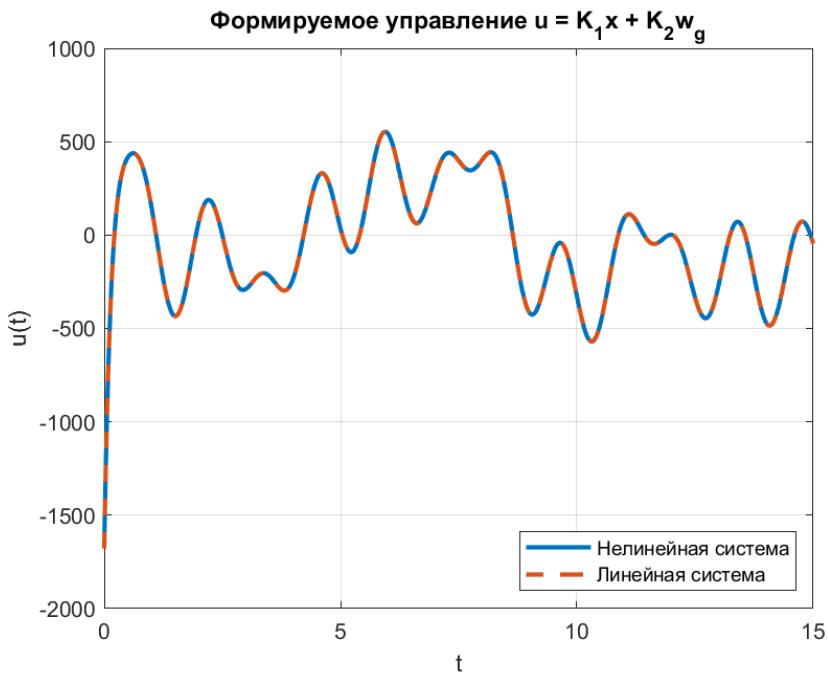
С помощью решения системы находим матрицу $K_2 = Y - K_1 P$:

$$K_2 = [-1476 \ -2888 \ 611 \ -33 \ 210 \ -176 \ 18 \ 210 \ 218 \ 33]$$

Проверим слежение в действии. Для этого промоделируем замкнутые линейную и нелинейную системы (рисунки 126 - 131) с начальными условиями

$$x_0 = [0.025 \ -0.06 \ 0.1 \ 0.015]^T$$

Можем видеть, что регулятор успешно справляется с задачей слежения за *небольшим* сигналом $g(t)$, так как вблизи точек равновесия линеаризованная и исходная нелинейная системы ведут себя одинаково. Также виртуальный выход в обоих случаях идет к нулю.

Рис. 126: Сигнал $g(t)$ для слеженияРис. 127: Формируемое управление $u(t)$ неллинейной и линейной систем

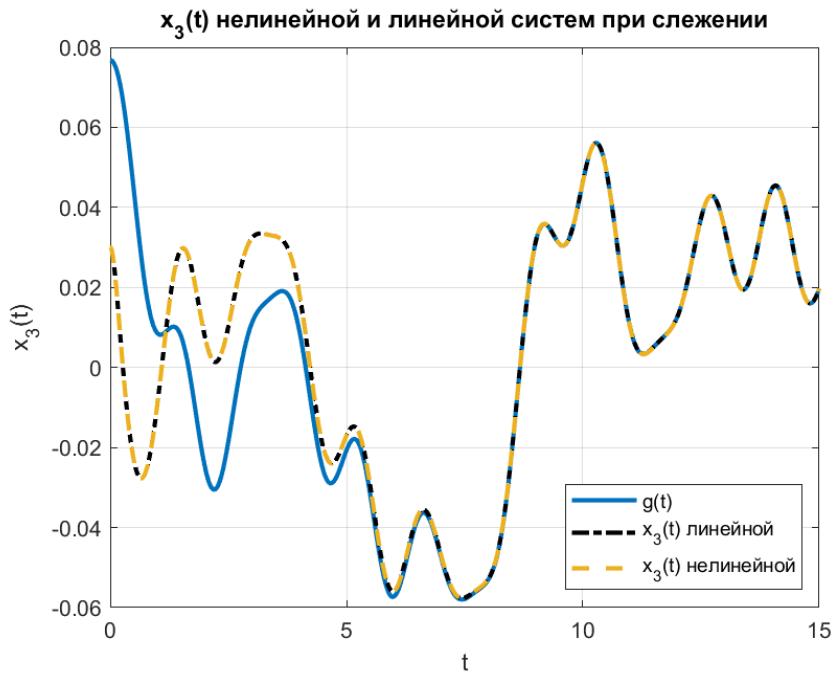


Рис. 128: $x_3(t) = \varphi(t)$ нелинейной и линейной систем при $u = K_1x + K_2\omega_g$

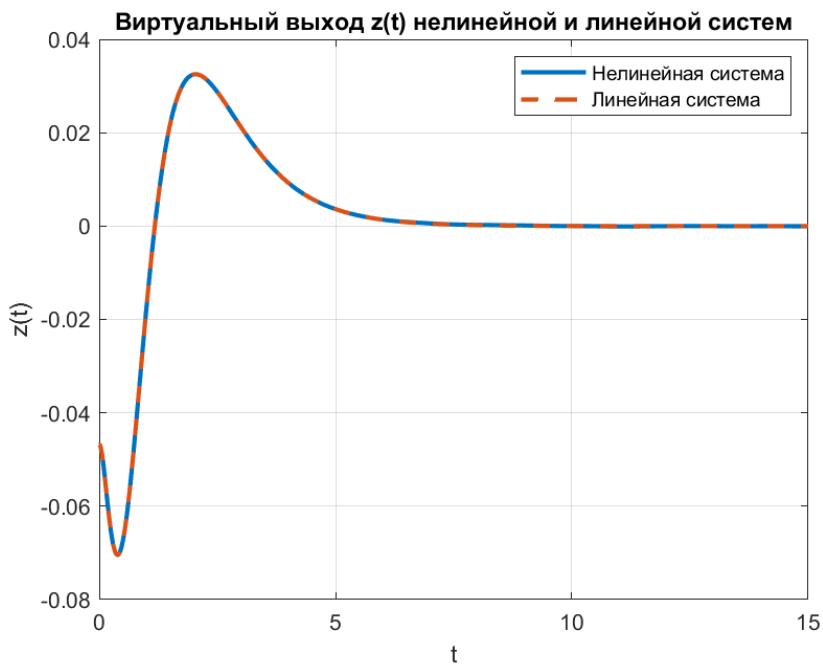


Рис. 129: Виртуальный выход $z(t)$ систем при $u = K_1x + K_2\omega_g$

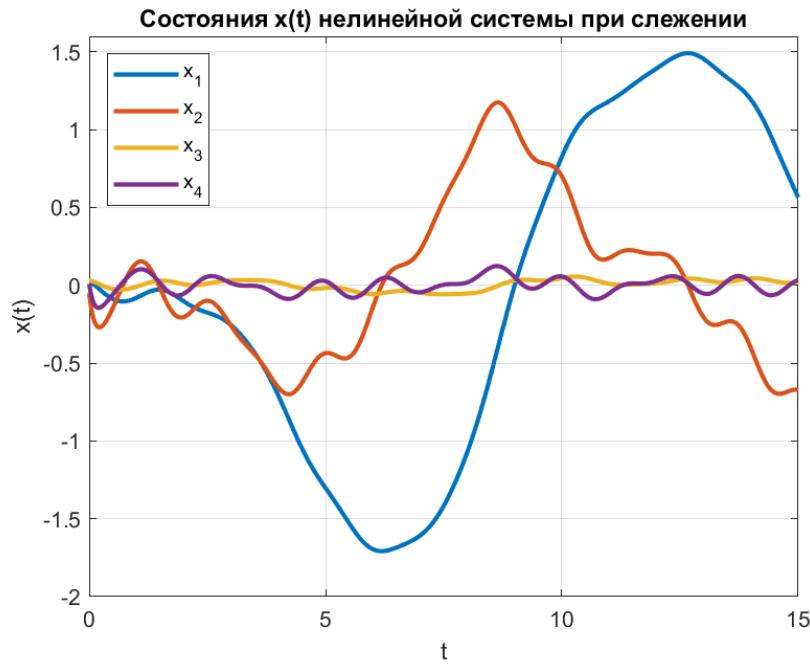


Рис. 130: Состояния $x(t)$ нелинейной системы при $u = K_1x + K_2\omega_g$

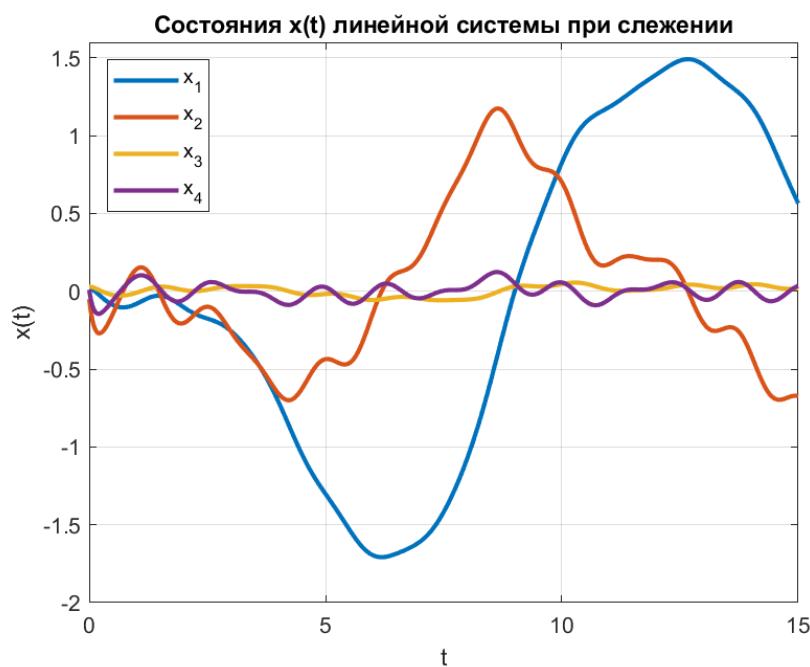


Рис. 131: Состояния $x(t)$ линейной системы при $u = K_1x + K_2\omega_g$

6 Выводы

В ходе выполнения курсовой работы была получена нелинейная модель маятника на тележке методом Лагранжа, выполнена линеаризация и построены её матрицы A , B , C и D .

Далее проверены управляемость и наблюдаемость системы. Их полнота позволила синтезировать регуляторы и наблюдатели для последующей задачи стабилизации, слежения и компенсации, так как исходный объект оказался неустойчивым.

Также сравнение нелинейной и линейной моделей показало корректность линейного приближения в окрестности равновесия и расходжение при больших отклонениях и временах.

После чего был синтезирован регулятор по состоянию (модальное управление) и исследовано влияние размещения полюсов на быстродействие, смещение тележки и величину управления - их отдаление от мнимой оси ускоряет сходимость, но увеличивает начальные ошибки и колебания. Были получены и наблюдатели полной и пониженней размерности, а также регулятор по выходу. Наблюдатель пониженней размерности позволил сократить затраты на вычисления за счет снятия оценки уже измеряемых состояний, а регулятор по выходу позволил выполнить задачу стабилизации в условиях измерений только выходного сигнала.

Потом на основе линейных матричных неравенств получены регуляторы с заданной степенью устойчивости и с ограничениями на управление - последние позволили достичь меньших затрат на управление за счет замедления переходных процессов. Было показано, что увеличение требуемой устойчивости ускоряет переход, но повышает величину управления. Были также синтезированы наблюдатели и регуляторы по выходу с заданными степенями устойчивости.

В заключительном пункте реализованы компенсация возмущения $f(t)$, действующего на маятник, и слежение за сигналом $g(t)$ углом поворота - для малых отклонений цели достигаются, а динамика линейной и нелинейной моделей оказалась близкой.