Научно-исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №2
Синтез оптимального управления
Принцип максимума
Вариант 21

Выполнил студент Мовчан Игорь Евгеньевич, R3480
Проверил преподаватель Парамонов Алексей Владимирович

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Поиск глобального минимума

Рассмотрим функцию двух переменных:

$$J(x,u) = 8x^2 + 3u^2 + 6xu + x + 4u - 13$$

Целью работы ставится поиск глобального минимума $J(x,u)$ различными методами. Сперва взглянем на теоретические подходы на основе необходимого и достаточного условий и ограничениях.

1.1 Поиск минимума без ограничений

Для начала примем, что все ограничения отсутствуют. Найдем градиент функции:

$$\nabla J(x,u) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J}{\partial x} \\ \dfrac{\partial J}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16x + 6u + 1 \\ 6x + 6u + 4 \end{bmatrix} = 0$$

По необходимому условию градиент должен быть равен нулю, так что в итоге получаем систему на x и u:

$$\begin{cases} 16x + 6u + 1 = 0 \\ 6x + 6u + 4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 10x = 3 \\ 3x + 3u + 2 = 0 \end{cases}$$

Откуда имеем

$$\begin{cases} x = 0.3 \\ 0.9 + 3u = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^* = \dfrac{3}{10} \\ u^* = -\dfrac{29}{30} \end{cases}$$

Для определения типа полученной точки найдем матрицу Гессе:

$$H(x) = \begin{bmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

Она положительно определена, а значит, найденная (x^*, u^*) - точка глобального минимума **выпуклой** функции $J(x,u)$.

1.2 С ограничением в виде равенства

Пусть теперь задано ограничение $c(x,u)=0$:

$$c(x,u)=x^2-8u-4=0 \quad \Rightarrow \quad u=(x^2-4)/8$$

Минимум тогда можно найти с помощью функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(x,u,\lambda)=J(x,u)+\lambda c(x,u)=$$

$$=8x^2+3u^2+6xu+x+4u-13+\lambda(x^2-8u-4)$$

Здесь λ — множитель Лагранжа.

Поиск минимума с ограничениями в виде равенства тогда сводится к решению системы:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=c(x,u)=0\\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}=0\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases}x^2-8u-4=0\\ 16x+6u+1+2\lambda x=0\\ 6x+6u+4-8\lambda=0\end{cases}$$

Система имеет единственное вещественное решение

$$\begin{cases}x^*\approx 0.121\\ u^*\approx -0.498\\ \lambda^*\approx 0.217\end{cases}$$

Для проверки того, что найденная точка действительно является точкой глобального минимума подставим полученное из ограничения $c(x,u)=0$ выражение на u в функцию $J(x,u)$:

$$J(x)=8x^2+\frac{3}{64}x^4-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}x^3-3x+\frac{1}{2}x^2-2-13=$$

$$=\frac{3}{64}x^4+\frac{3}{4}x^3+\frac{65}{8}x^2-2x-\frac{57}{4}$$

Теперь это функция одной переменной с положительным коэффициентом при старшей чётной степени (а это значит, что функция ограничена снизу). Найдём её вторую производную:

$$J'(x) = \frac{3}{16}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{65}{4}x - 2$$

$$J''(x) = \frac{9}{16}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{65}{4}$$

Проверим дискриминант:

$$D = \frac{81}{4} - \frac{9 \cdot 65}{16} = -\frac{261}{16} < 0$$

При этом $J''(x)$ - парабола с ветвями вверх, а значит, вторая производная положительна для всех x. Выходит, найденная (x^*, u^*) действительно является точкой минимума.

1.3 С ограничением в виде неравенства

Пусть задано ограничение $c(x, u) \leq 0$:

$$c(x, u) = x^2 - 8u - 4 \leq 0$$

Для решение задачи введем в рассмотрение функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, u, \lambda) = J(x, u) + \lambda c(x, u) =$$

$$= 8x^2 + 3u^2 + 6xu + x + 4u - 13 + \lambda(x^2 - 8u - 4)$$

Найдем экстремальные точки через необходимые условия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = c(x, u) \leq 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda c(x, u) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 8u - 4 \leq 0 \\ 16x + 6u + 1 + 2\lambda x = 0 \\ 6x + 6u + 4 - 8\lambda = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda c(x, u) = 0 \end{cases}$$

Сперва рассмотрим случай $\lambda = 0$. Задача тогда сводится к безусловной минимизации $J(x, u)$, которая была уже проведена и для которой получены следующие значения:

$$\begin{cases} x^* = \dfrac{3}{10} \\ u^* = -\dfrac{29}{30} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c(x^*, u^*) = \frac{9}{100} + \frac{116}{15} - 4 > 0$$

Найденная точка нарушает ограничение, значит, $\lambda > 0$. Тогда по условию дополнительной нежесткости получаем систему с ограничением в виде равенства, для которой уже была получена точка

$$\begin{cases} x^* \approx 0.121 \\ u^* \approx -0.498 \\ \lambda^* \approx 0.217 \end{cases}$$

Она удовлетворяет неравенству, а значит, является стационарной. Здесь важно, что неравенство $c(x, u) \leq 0$ порождает выпуклое множество, сама $J(x, u)$ тоже является выпуклой, поэтому найденная (x^*, u^*) является точкой минимума.

2 Градиентный поиск минимума

Пусть мы исследуем всё тот же критерий качества

$$J(x, u) = 8x^2 + 3u^2 + 6xu + x + 4u - 13$$

Необходимо динамическими методами найти точки глобального минимума. Далее исследуем два различных подхода.

2.1 Метод Ньютона-Рафсона

Поставленная задача оптимизации с помощью данного метода решается последовательным нахождением точек

$$\bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)} - H^{-1}(\bar{x}^{(n)})\nabla J(\bar{x}^{(n)})$$

Здесь были введены вектор переменных и градиент в точке

$$\bar{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}, \quad \nabla J(\bar{x}^{(n)}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial x} \\ \dfrac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16x + 6u + 1 = 0 \\ 6x + 6u + 4 = 0 \end{bmatrix}$$

А также матрица Гессе вторых частных производных:

$$H(\bar{x}^{(n)}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial u}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial u}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Суть подхода заключается в движении в направлении наискорейшего убывания - по антиградиенту - с учётом кривизны функции с помощью матрицы Гессе.

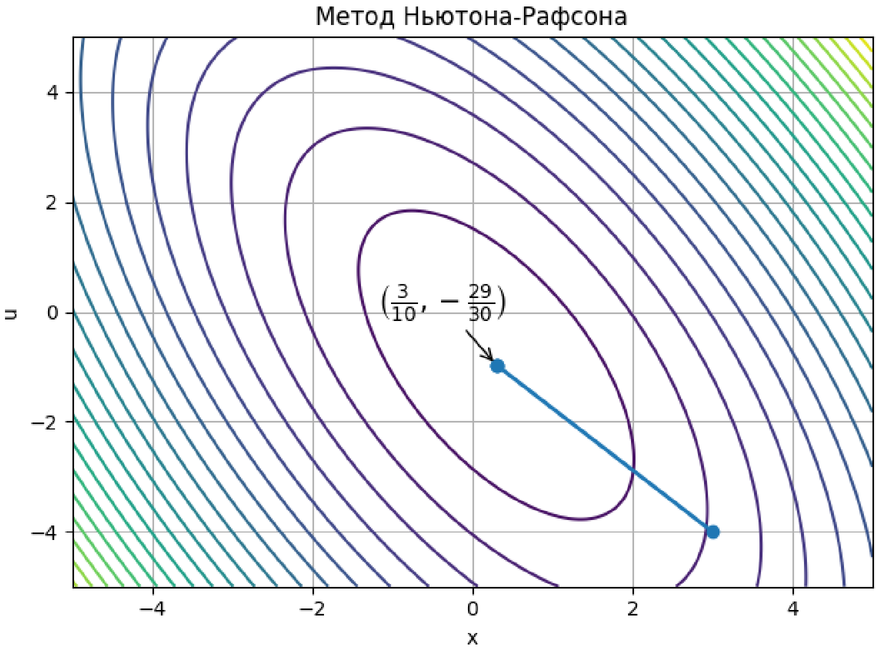

Рис. 1: Применение метода Ньютона-Рафсона для поиска минимума

Применение метода при точке старта $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix}^T$ продемонстрировано на рисунке 1. Критерием останова было выбрано увеличение значения $J(\bar{x}^{(n)})$. Видим, что траектория приходит в уже найденную в первом пункте точку минимума за один шаг. Успех!

2.2 Метод наискорейшего спуска

В методе Ньютона-Рафсона на каждом шаге необходимо считать матрицу вторых производных, а после её обращать, это *очень* тяжеловесно. В связи с этим возникает идея упрощения множителя перед антиградиентом до константы γ, получаем:

$$\bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)} - \gamma \nabla J(\bar{x}^{(n)})$$

Это и назовём методом наискорейшего спуска или же градиентным спуском. Суть его также заключается в движении в направлении наискорейшего убывания функции, но более просто - без учёта локальной кривизны. Поэтому на практике, если взять слишком большое значение γ, то состояние $\bar{x}^{(n)}$ начнёт «раскачивать».

Итак, применение метода при параметрах $\gamma = 0.05$ и $\gamma = 0.125$, начальном условии $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix}^T$ и критерии останова в виде увеличения значения $J(\bar{x}^{(n)})$ приведено на рисунках 2-5.

Можем видеть, что параметр $\gamma = 0.05$ соответствует апериодической сходимости, а его повышение до $\gamma = 0.1$ уже приводит к колебаниям и требует большего числа шагов для попадания в окрестность точки глобального минимума. В целом обе вариации отработали хорошо и дошли до вычисленных стационарных точек.

3 Общие выводы

В ходе лабораторной работы были исследованы аналитические и численные методы поиска глобального минимума квадратичной функции двух переменных. Показано, что для выпуклой функции без ограничений минимум находится точно через систему уравнений,

Рис. 2: Применение градиентного спуска: траектория, $\gamma = 0.05$

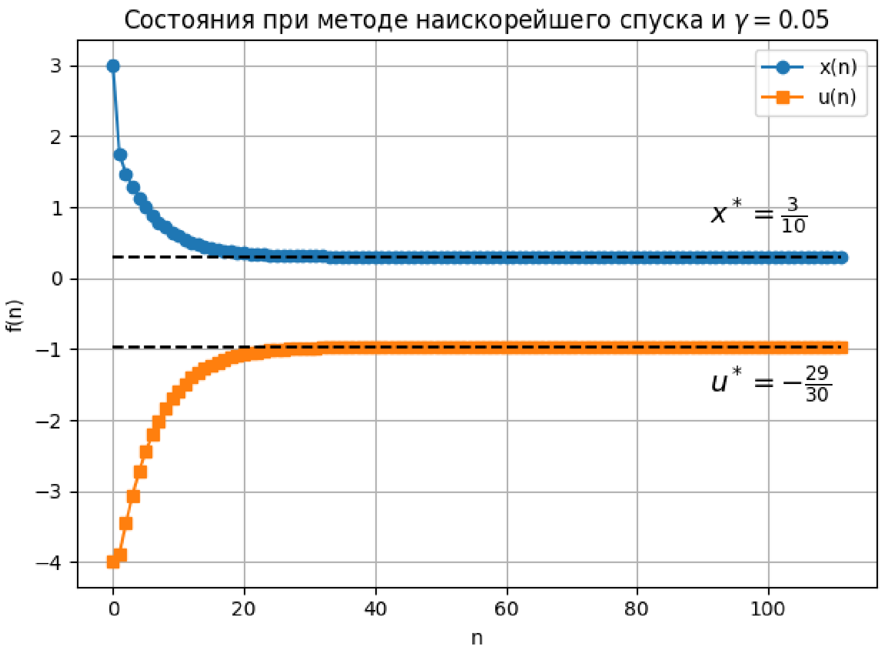

Рис. 3: Применение градиентного спуска: состояния, $\gamma = 0.05$

Рис. 4: Применение градиентного спуска: траектория, $\gamma = 0.1$

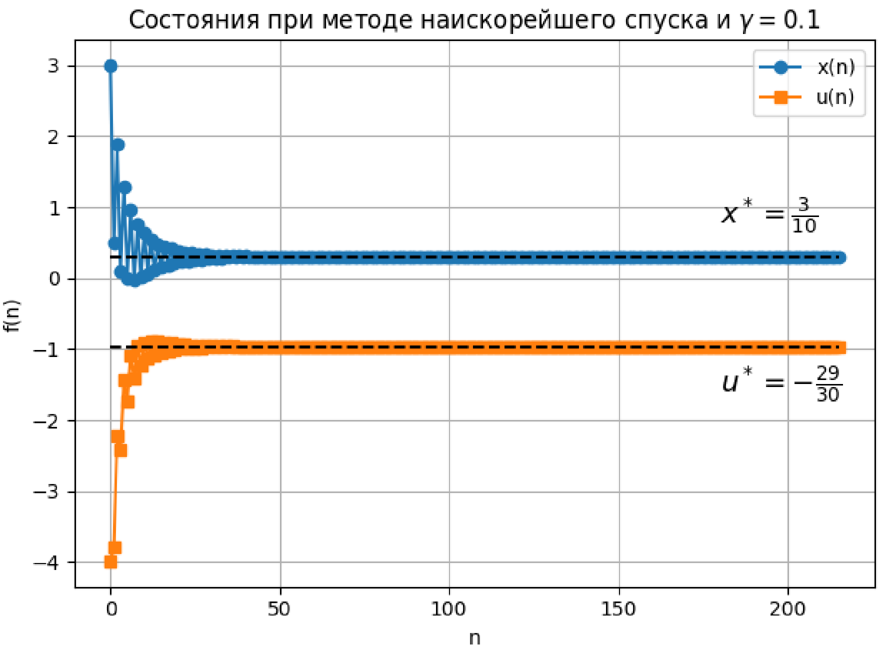

Рис. 5: Применение градиентного спуска: состояния, $\gamma = 0.1$

задаваемую градиентом, и подтверждается положительной определённостью матрицы Гессе. При наличии ограничений — как равенства, так и неравенства — использован метод множителей Лагранжа с учётом условий Куна–Таккера, и найдены соответствующие стационарные точки, удовлетворяющие критериям оптимальности. Численные методы — Ньютона–Рафсона и градиентного спуска — подтвердили аналитические результаты: первый обеспечил сходимость за один шаг благодаря точной учёту кривизны, второй — продемонстрировал чувствительность к выбору шага, также сошёлся, причем с меньшей вычислительной нагрузкой на каждый шаг.