

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ  
по дисциплине  
*«Планирование траекторий движения»*

по теме:  
АЛГОРИТМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ

Вариант №1

Выполнили:

*Группа № R3340*

*Группа № R3480*

*Гридусов Д.Д*

*Мовчан И.Е*

Предподаватель:

*Краснов А.Ю*

Санкт-Петербург  
2025

## **СОДЕРЖАНИЕ**

1	ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ .....	3
1.1	Теоритическая часть .....	3
1.2	Моделирование .....	6
2	ДВИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ .....	9
2.1	Теоритическая часть .....	9
2.2	Моделирование .....	13
3	МЕТОД ПАССИФИКАЦИИ.....	15
3.1	Теоритическая часть .....	15
3.2	Моделирование .....	19

# 1 ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ

## 1.1 Теоритическая часть

Зададим параметры объекта в соответствии с вариантом:

- $m = 1.2$
- $(x_0, y_0) = (0, 1.5)$  – начальное положение
- $\alpha_0 = \frac{\pi}{3}$  – начальная ориентация
- $s^* = 1$  – желаемая скорость

Синтезируем методом согласованного управления алгоритм стабилизации траектории движения для данной математической модели. Траектория состоит из трех частей:

- $\varphi_1(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 16 = 0$
- $\varphi_2(x, y) = -\sin \frac{3\pi}{2}x + \cos \frac{3\pi}{2}y + 6 = 0$
- $\varphi_3(x, y) = -1.7 \sin(1.05x + 0.33) + y + 5 = 0$

Рассмотрим модель движения материальной точки на плоскости.

Динамическая модель движения центра масс робота

$$\dot{v}_x = v_y w + \frac{1}{m} F_x \quad (1)$$

$$\dot{v}_y = -v_x w + \frac{1}{m} F_y \quad (2)$$

$$\dot{w} = \frac{1}{J} M_c \quad (3)$$

Линейные скорости в опорном и подвижном базисах

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = T^T(\alpha) \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad T^T(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4)$$

Линейные ускорения в опорном базисе:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} T^T(\alpha) \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (5)$$

Заданная траектория как неявно заданная гладкая кривая S:

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (6)$$

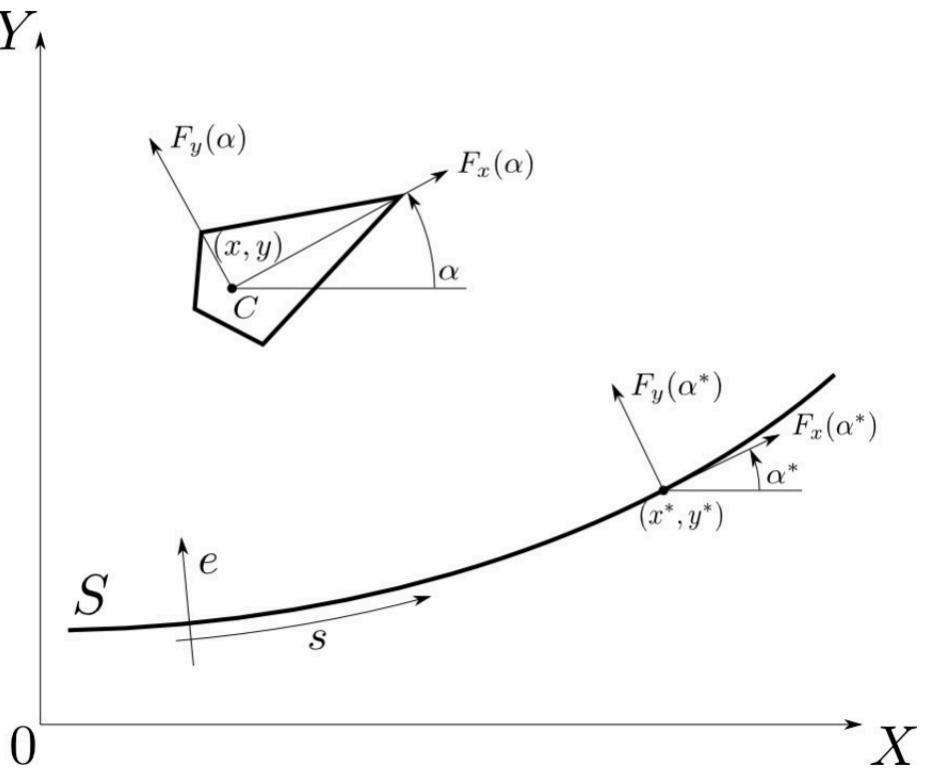


Рисунок 1 — Движение на плоскости

локальная координата:

$$s = \psi(x, y) \quad (7)$$

Выбор  $\varphi, \psi$  ограничивается условием регулярности:

$$\det \Upsilon(x, y) \neq 0, \quad \Upsilon(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Для регулярных геометрических объектов существует нормализованное описание с ортогональной матрицей Якоби

$$\Upsilon(x, y) = T(\alpha^*(s)) = \begin{bmatrix} \cos \alpha^*(s) & \sin \alpha^*(s) \\ -\sin \alpha^*(s) & \cos \alpha^*(s) \end{bmatrix}$$

$T(\alpha^*(s))$  – матрица поворота подвижного базиса Френе,  $\alpha^*(s)$  – зависящий от локальной координаты угол ориентации базиса Френе, причем

$$\dot{T}(\alpha^*) = \dot{s}\xi(s)ET(\alpha^*), \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$\xi(s)$  – кривизна траектории. Желаемый угол поворота робота:

$$\alpha = \alpha^*(s) + \Delta\alpha \quad (10)$$

Нарушение условия (6) характеризуется ортогональным отклонением

$$e = \varphi(x, y) \quad (11)$$

Нарушение условия (10) характеризуется угловым отклонением

$$\delta = \alpha - \alpha^* - \Delta\alpha \quad (12)$$

Преобразуем модель к базису с выходами  $s$ ,  $e$  и  $\delta$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \Upsilon(x, y) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = T(\alpha^*) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\dot{\delta} = -\xi(s)\dot{s} + w \quad (14)$$

Продифференцируем вновь

$$\begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} + \xi(s)\dot{s}E^T \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \frac{1}{m}T^T(\Delta\alpha) \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\ddot{\delta} + \xi(s)\ddot{s} + \dot{\xi}(s)\dot{s} = \frac{1}{J}M \quad (16)$$

Введем виртуальные регуляторы:

$$\begin{bmatrix} u_s \\ u_e \end{bmatrix} = \frac{1}{m}T^T(\Delta\alpha) \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$u_\delta = \frac{1}{J}M - \xi(s)u_s \quad (18)$$

Подставим и получим:

$$\begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} + \xi(s)\dot{s}E^T \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_s \\ u_e \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\ddot{\delta} + \dot{\xi}(s)\dot{s} + \xi^2(s)\dot{s}\dot{e} = u_\delta \quad (20)$$

Или же

$$\Delta\dot{V} + \xi(s)\dot{s}\dot{e} = -u_s \quad (21)$$

$$\ddot{e} + \xi(s)\dot{s}^2 = u_e \quad (22)$$

$$\ddot{\delta} + \dot{\xi}(s)\dot{s} + \xi^2(s)\dot{s}\dot{e} = u_\delta \quad (23)$$

И наши регуляторы:

$$u_s = -\xi(s)\dot{s}\dot{e} + k_s\Delta V \quad (24)$$

$$u_e = \xi(s)\dot{s}^2 - k_{e1}\dot{e} - k_{e2}e \quad (25)$$

$$u_\delta = \dot{\xi}(s)\dot{s} + \xi^2(s)\dot{s}\dot{e} - k_{\delta1}\dot{\delta} - k_{\delta2} \quad (26)$$

## 1.2 Моделирование

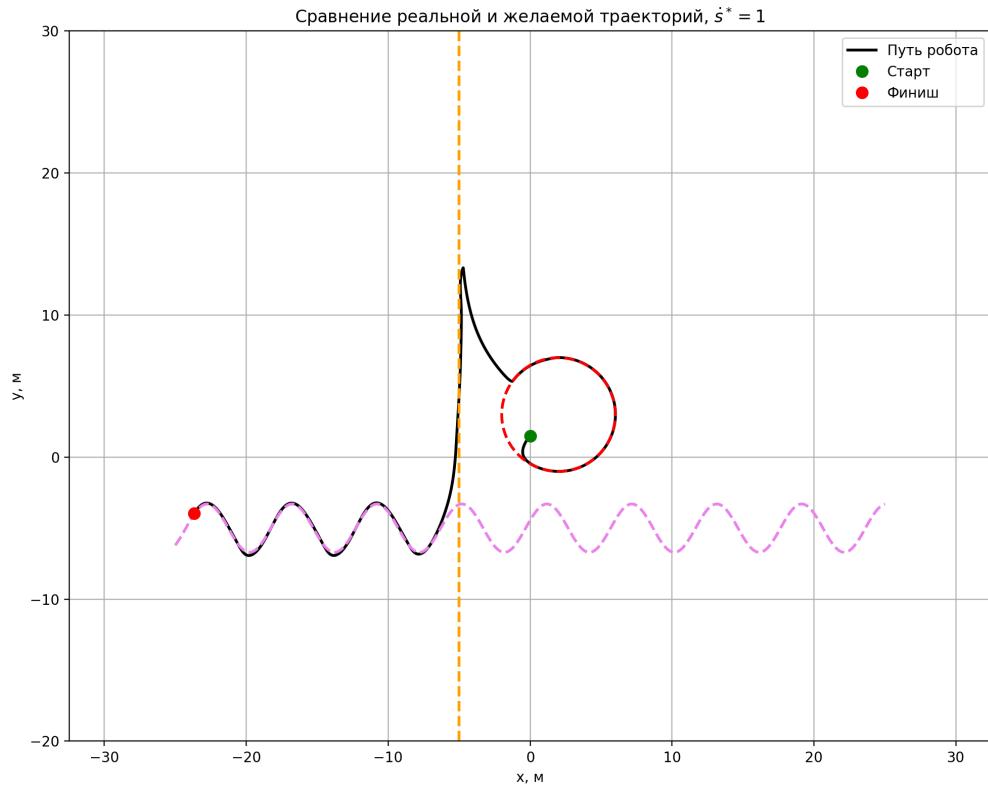


Рисунок 2 — Сравнение желаемой и фактической траектории при желаемой скорости  $\dot{s}^* = 1$

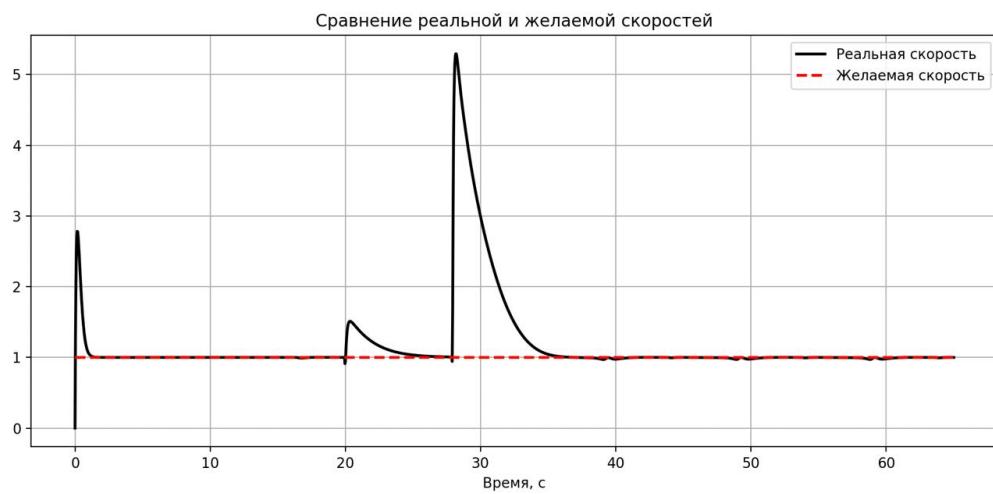


Рисунок 3 — Сравнение фактической желаемой скорости  $\dot{s}^* = 1$

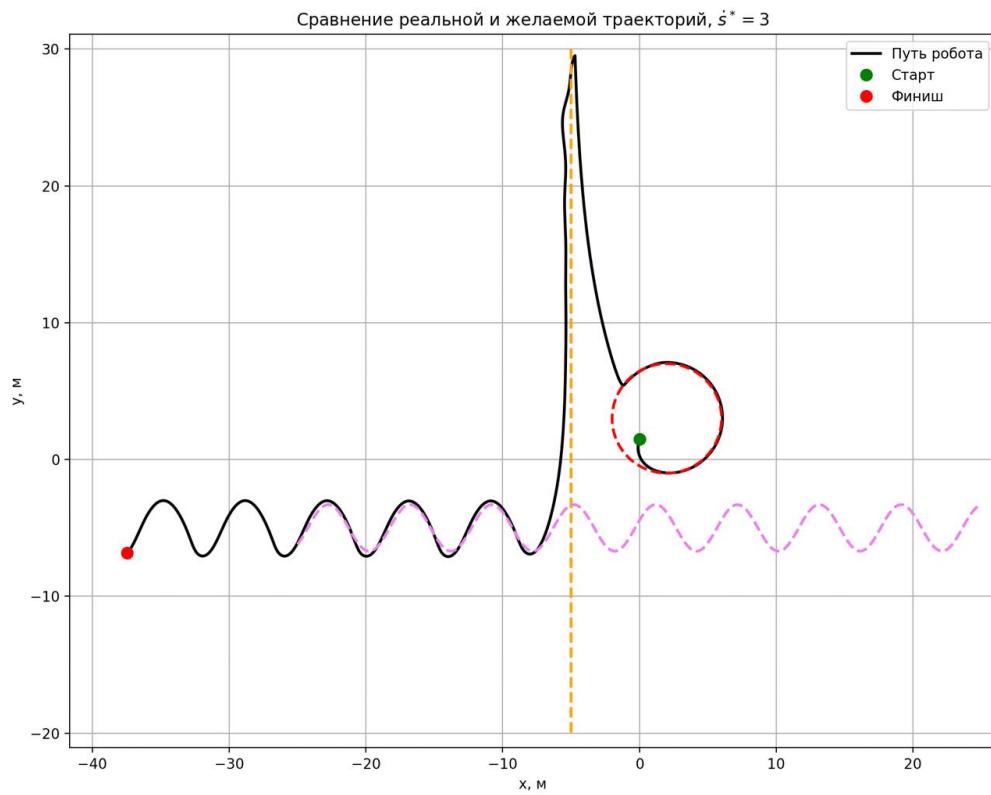


Рисунок 4 — Сравнение желаемой и фактической траектории при желаемой скорости  
 $\dot{s}^* = 3$

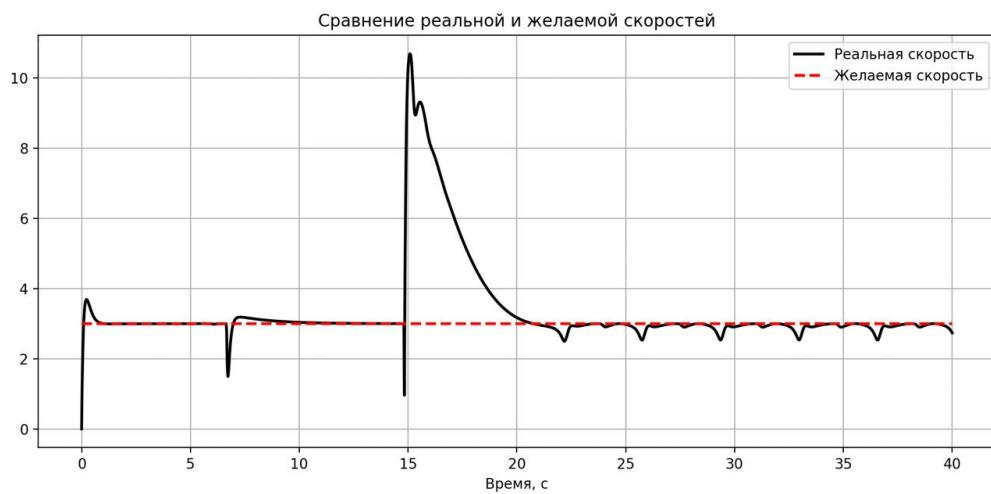


Рисунок 5 — Сравнение фактической желаемой скорости  $\dot{s}^* = 3$

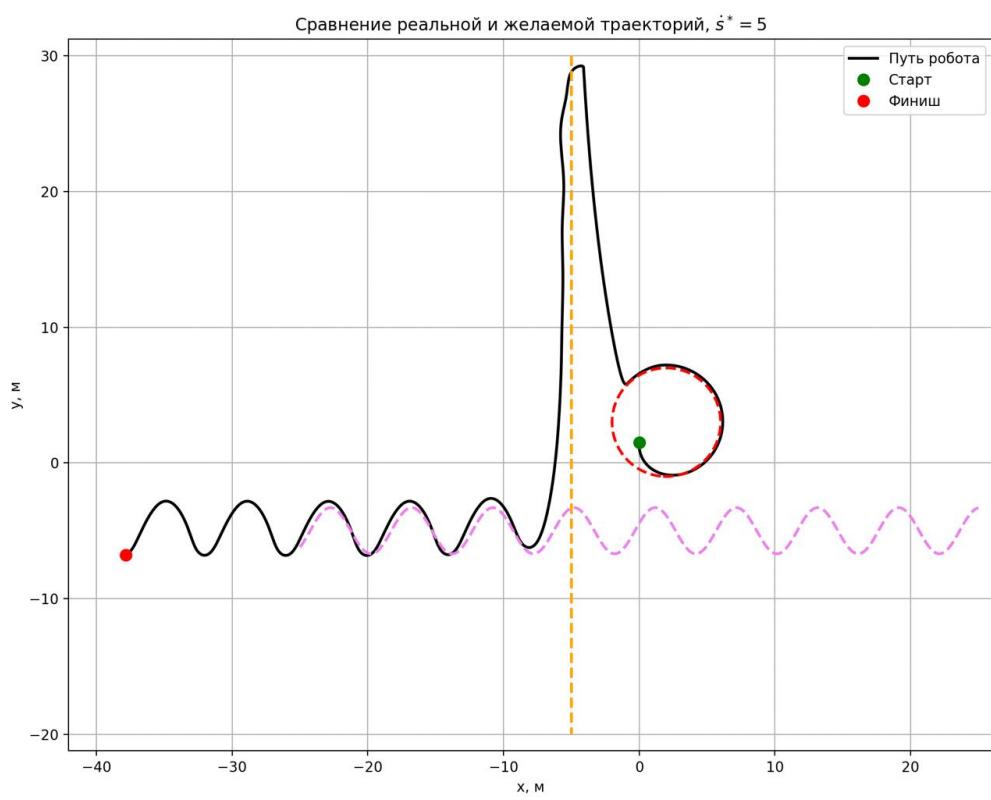


Рисунок 6 — Сравнение желаемой и фактической траектории при желаемой скорости  
 $\dot{s}^* = 5$

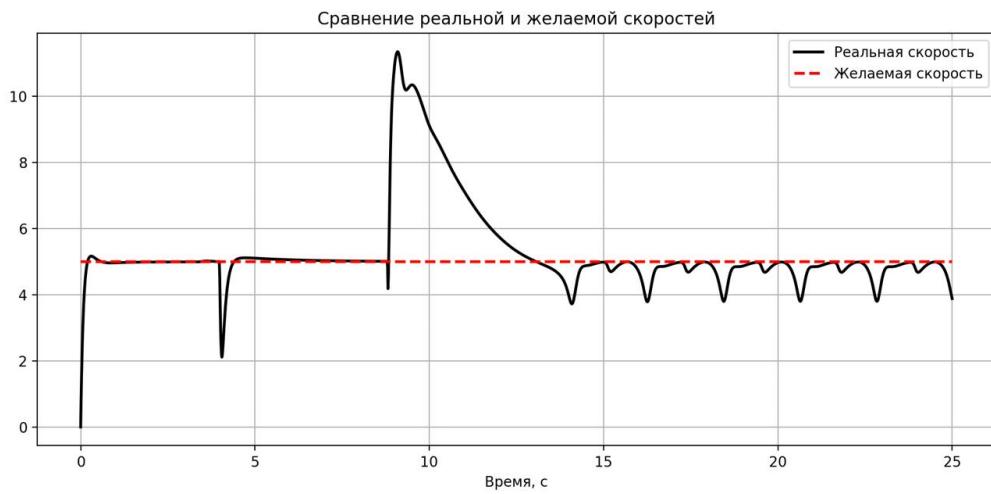


Рисунок 7 — Сравнение фактической желаемой скорости  $\dot{s}^* = 5$

## 2 ДВИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

### 2.1 Теоритическая часть

В соответствии с вариантом:

- $m = 1.2$
- $J = 2$
- $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1.5, 10)$
- $n = (1, 0, 0)$
- $n_d = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$
- $\varphi_1(x, y, z) = 0.4x^2 + 0.8y^2 - 225$
- $\varphi_2(x, y, z) = z + 0.25y^2 - 3$

Модель динамики движения в пространстве:

$$\dot{x} = v \quad (27)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m} F_c \quad (28)$$

$$\dot{R}(\alpha) = S(w)R(\alpha) \quad (29)$$

$$J\dot{w} + w \times Jw = M_c \quad (30)$$

$$S(w) = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Поворотная матрица может быть представлена как:

$$R(\alpha) = R_3(\psi)R_2(\theta)R_1(\phi) \quad (32)$$

Заданная траектория  $S$  описывается как пересечение двух неявно заданных поверхностей. Касательная скорость относительно кривой  $S$ :

$$\dot{s} = \frac{\nabla \varphi_1 \times \nabla \varphi_2}{\|\nabla \varphi_1 \times \nabla \varphi_2\|} v \quad (33)$$

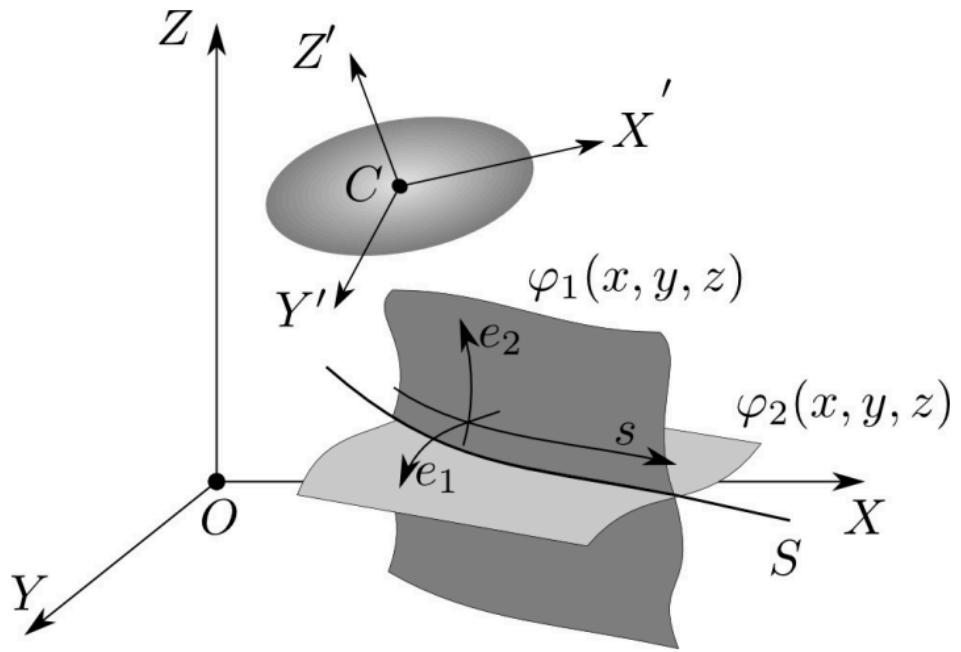


Рисунок 8 — Движение в пространстве

Матрица Якоби:

$$\Upsilon(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\nabla \varphi_1 \times \nabla \varphi_2}{\|\nabla \varphi_1 \times \nabla \varphi_2\|} \\ \frac{\nabla \varphi_1}{\|\nabla \varphi_1\|} \\ \frac{\nabla \varphi_2}{\|\nabla \varphi_2\|} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Также вводятся ортогональные отклонения:

$$e_1 = \varphi_1(x, y, z) \quad (35)$$

$$e_2 = \varphi_2(x, y, z) \quad (36)$$

Преобразуем модель к задачно-ориентированным координатам:

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \Upsilon(x, y, z)v \quad (37)$$

Продифференцируем

$$\begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{e}_1 \\ \ddot{e}_2 \end{bmatrix} = \dot{\Upsilon}v + \Upsilon \frac{F_c}{m} \quad (38)$$

Введем виртуальные регуляторы

$$\dot{\Upsilon}(x,y,z)v + \Upsilon(x,y,z)\frac{F_c}{m} = \begin{bmatrix} u_s \\ u_{e1} \\ u_{e2} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{e}_1 \\ \ddot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_s \\ u_{e1} \\ u_{e2} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Выберем регуляторы

$$u_s = K_s \Delta \dot{s} \quad (41)$$

$$u_{e1} = -K_{1e1}\dot{e}_1 - K_{2e1}e_1 \quad (42)$$

$$u_{e2} = -K_{1e2}\dot{e}_2 - K_{2e2}e_2 \quad (43)$$

Результирующее управление  $F_c$ :

$$F_c = m\Upsilon(x,y,z)^{-1} \left( \begin{bmatrix} u_s \\ u_{e1} \\ u_{e2} \end{bmatrix} - \Upsilon(x,y,z)v \right) \quad (44)$$

Разберемся с углом. Введем вектор угловых отклонений  $\delta = [\delta_\phi \ \delta_\theta \ \delta_\psi]$  и матрицу угловых отклонений:

$$R(\delta) = R(\alpha)R^T(\alpha^*)R^T(\Delta) \quad (45)$$

Определим функцию углового отклонения Определим функцию углового отклонения

$$e_r = \frac{1}{2}(R(\delta) - R(\delta)^\top)^\vee, \quad (46)$$

где  $\vee$  — это преобразование  $SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Обозначим отклонение угловой скорости как  $e_\omega$ .

$$\frac{d}{dt}R(\delta) = S(\dot{\delta})R(\delta) = e_\omega R(\delta) \quad (47)$$

$$\frac{d}{dt}R(\delta) = S(\omega)R(\delta) - R(\alpha)R^T(\alpha^*)S(\omega^*)R^T(\Delta) \quad (48)$$

Воспользуемся свойствами кососимметрических матриц  $RS(\omega)R^T = S(R\omega)$

$$\frac{d}{dt}R(\delta) = \left( S(\omega) - S(R(\alpha)R^T(\alpha^*)\omega^*) \right) R(\delta) \quad (49)$$

$$e_\omega = \omega - R(\alpha)R^T(\alpha^*)\omega^* \quad (50)$$

$$\dot{e}_\omega = \frac{1}{J}(M - \omega \times J\omega) + a_d \quad (51)$$

где  $a_d = -S(\omega)R(\alpha)R^T(\alpha^*)\omega^* + R(\alpha)R^T(\alpha^*)\dot{\omega}^*$

**Результирующий закон управления**

$$M_c = \omega \times J\omega - Ja_d - K_R e_r - K_\omega e_\omega \quad (52)$$

## 2.2 Моделирование

Сравнение фактической и желаемой траектории

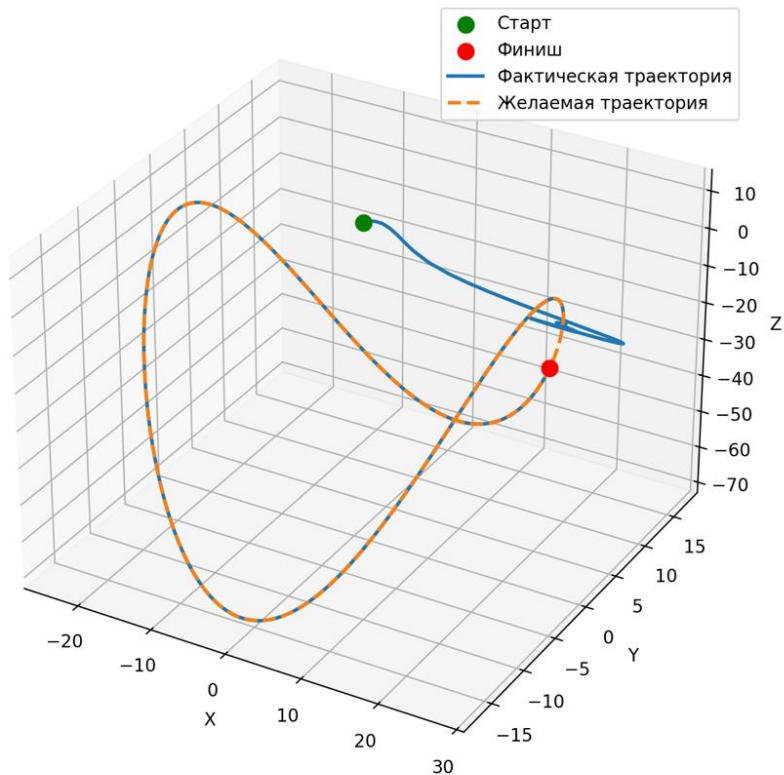


Рисунок 9 — Сравнение желаемой и фактической траектории

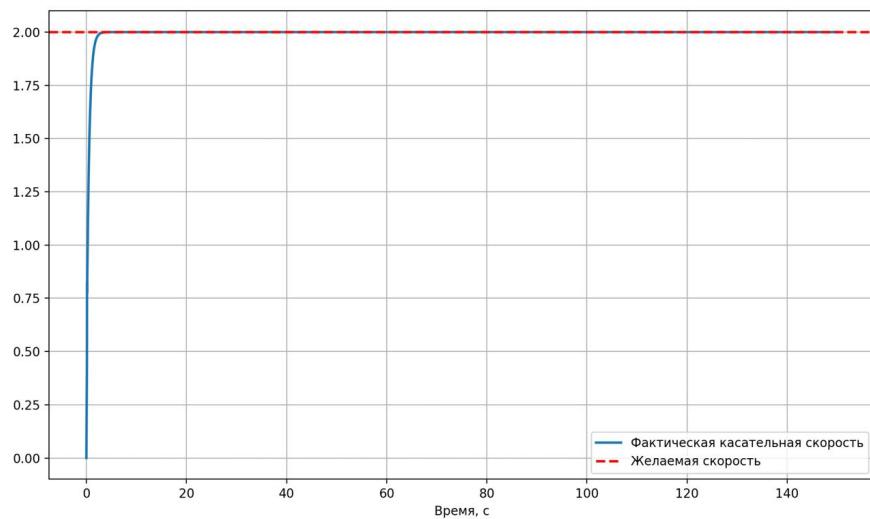


Рисунок 10 — Сравнение желаемой и фактической скорости

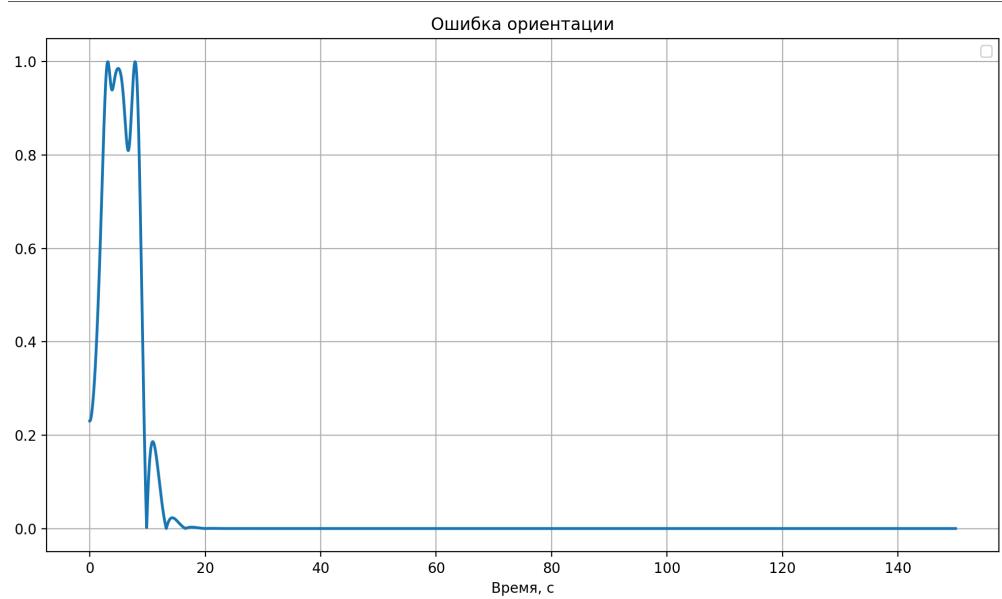


Рисунок 11 — Ошибка ориентации

### 3 МЕТОД ПАССИФИКАЦИИ

#### 3.1 Теоритическая часть

Уравнения состояния динамической системы

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = h(x, u)$$

где  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  локально липшицева функция,

$h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  – непрерывная функция,

$$f(0,0) = 0, h(0,0) = 0$$

Система называется пассивной, если существует непрерывно дифференцируемая положительно-полуопределенная функция  $W(x)$  такая, что

$$u^T y \geq \dot{W} = \frac{dW}{dx} f(x, u) \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$

Вводится классификация, в соответствии от условий ниже система называется:

- системой без потерь, если  $u^T y = \dot{W}$
- пассивной при прямой связи по входу, если  $u^T y \geq \dot{W} + u^T \varphi(u)$  для некоторой функции  $\varphi(\cdot)$
- строго пассивной по входу, если  $u^T y \geq \dot{W} + u^T \varphi$  и  $u^T \varphi(u) > 0$  для всех  $u \neq 0$
- пассивной при обратной связи по выходу, если  $u^T y \geq \dot{W} + y^T p(y)$  для некоторой функции  $p(\cdot)$
- строго пассивной по выходу, если  $u^T y \geq \dot{W} + y^T p(y)$  и  $y^T p(y) > 0$  для всех  $p \neq 0$
- строго пассивной, если  $u^T y \geq \dot{W} + \psi(x)$  для некоторой положительно определенной функции  $\psi(x)$

Афинная по управлению система

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

где  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,

$u = u(t) \in \mathbb{R}^m$  – вектор входа,

$y = y(t) \in \mathbb{R}^l$  – вектор выхода,

$f(\cdot), h(\cdot)$  – гладкие вектор-функции аргумента  $x$

$g(\cdot)$  – гладкая матрица-функция

Пусть  $G$  – заданная  $(m \times l)$  – матрица. Тогда афинная по управлению система называется G-пассивной, если существует неотрицательная скалярная функция  $W(x)$  такая, что

$$W(x) \leq W(x_0) + \int_0^t u(t)^* G y(t) dt$$

для любого решения  $x(t)$  системы (59) такого, что  $x(0) = x_0, x(t) = x$

И называется строго G-пассивной, если существует неотрицательная скалярная функция  $W(x)$  и скалярная функция  $\mu(x) > 0$  такие, что

$$W(x) \leq W(x_0) + \int_0^t (u(t)^* G y(t) - \mu(x(t))) dt$$

для любого решения  $x(t)$  системы (59) такого, что  $x(0) = x_0, x(t) = x$

Для нелинейных систем, если функция запаса  $W(x)$  гладкая, интегральное неравенство диссипации выше эквивалентно своей дифференциальной форме

$$\frac{dW}{dx}(f(x) + g(x)u) \leq u^* G y - \mu(x)$$

Если функция запаса  $W(x)$  положительно-определенная, то пассивная система

- устойчива по Ляпунову при  $u = 0$
- асимптотически устойчива при  $u = -K y$  при любом скалярном или матричном  $K > 0$

Рассмотрим функцию запаса

$$W = \frac{1}{2} |\dot{x} - v_d|^2 + \frac{1}{2} |\omega - \omega_d|^2$$

Продифференцируем по времени

$$\begin{aligned}\dot{W} &= (\dot{x} - v_d)^T(\ddot{x} - \dot{v}_d) + (\omega - \omega_d)^T(\dot{\omega} - \dot{\omega}_d) = \\ &= (\dot{x} - v_d)^T \left( \frac{m}{F} - \dot{v}_d \right) + (\omega - \omega_d)^T (-J^{-1}\omega \times J\omega + J^{-1}M_c - \dot{\omega}_d)\end{aligned}$$

Выберем управляющие входы  $F$  и  $M_c$

$$F = u_{pF} + u_F$$

$$M_c = u_{pM} + u_M$$

где  $u_{pF} = \dot{v}_d$  и  $u_{pM} = \omega \times J\omega + J\dot{\omega}_d$  – управляющие входы, делающие замкнутую систему пассивной.

Тогда производная функции запаса примет вид

$$\dot{W} = (\dot{x} - v_d)^T u_F + (\omega - \omega_d)^T u_M = y^T u$$

Это означает, что система пассивна от входов

$$u = [u_F^T \quad u_M^T]^T$$

к выходам

$$y = [(\dot{x} - v_d)^T \quad (\omega - \omega_d)^T]^T$$

Закон управления для стабилизации пассивной системы

$$u = -Ky$$

где  $K$  – диагональная матрица коэффициентов.

Переменные  $v_d$  и  $\omega_d$  могут быть использованы в качестве виртуальных входов и стабилизировать заданные многообразия для поступательного движения

$$\varphi_1(x, y, z) = 0 \cup \varphi_2(x, y, z) = 0$$

и для вращательного движения

$$1 - n^T n_d$$

где  $n$  – вектор текущей ориентации,  $n_d$  – вектор желаемой ориентации  
 Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\varphi_2^2 + \frac{1}{2}(1 - n^T n_d)^2$$

Продифференцируем

$$\dot{V} = \left( \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx} + \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dx} \right)^T v_d + (1 + n^T n_c) n^T S^T(n_c)(\omega_c - \omega_d)$$

Выберем управление  $u_\varphi$  и  $u_\omega$  в виде

$$u_\varphi = -K_\varphi \left( \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx} + \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dx} \right)$$

$$u_\omega = -S(n_c) n k_\omega (1 - n^T n_c)$$

Тогда

$$\dot{V} = - \left( \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx} + \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dx} \right)^T K_\varphi \left( \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx} + \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dx} \right) - k_\omega (1 - n^T n_c)^2 < 0$$

что означает асимптотическую устойчивость системы с областью притяжения  $(-\pi, \pi)$

## 3.2 Моделирование

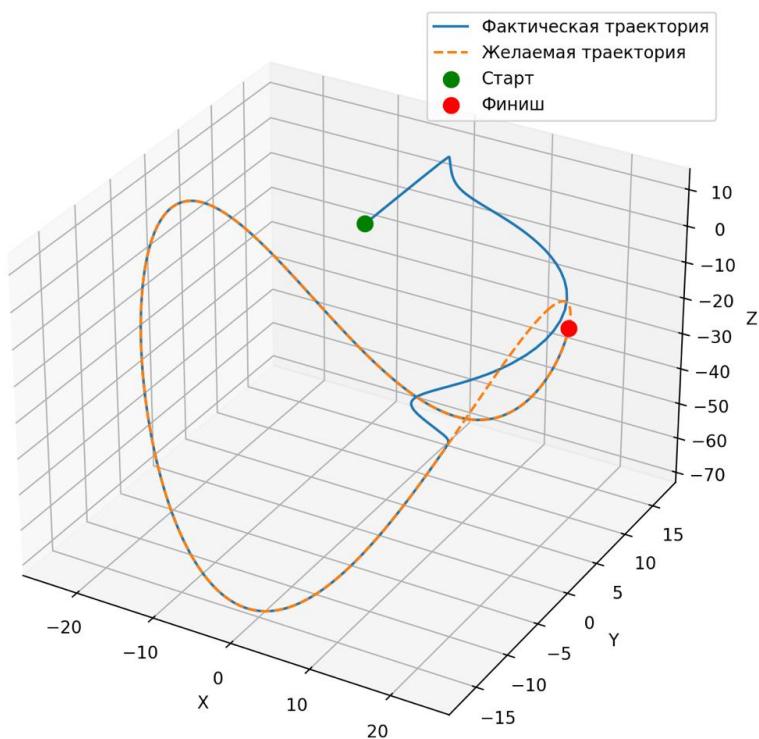


Рисунок 12 — Сравнение желаемой и фактической траектории

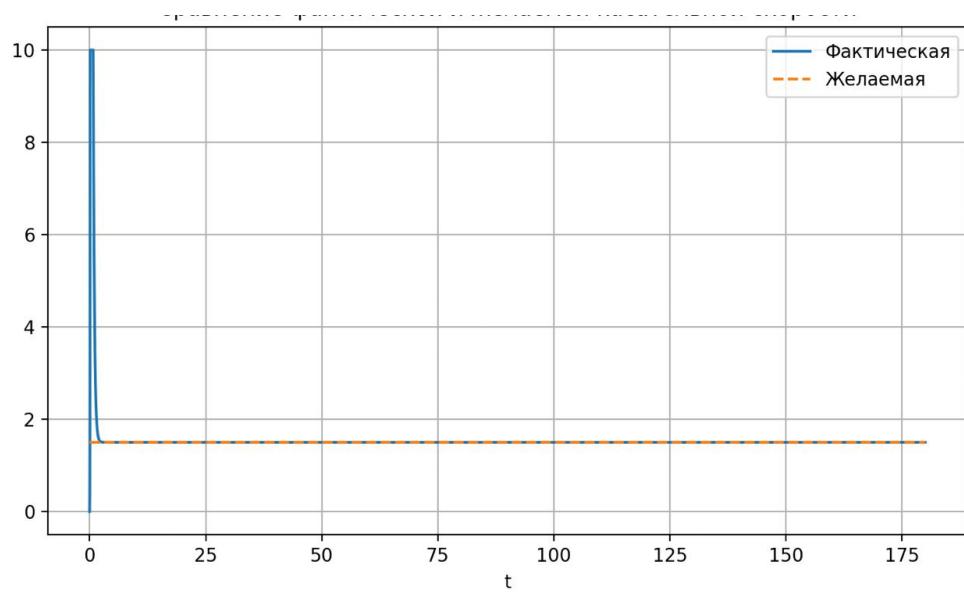


Рисунок 13 — Сравнение желаемой и фактической скорости

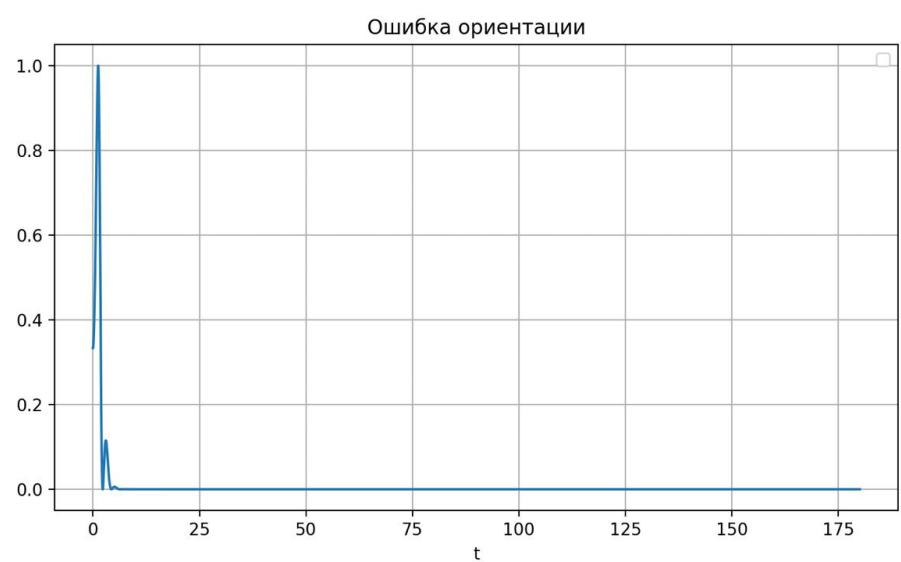


Рисунок 14 — Ошибка ориентации