Управляемость и наблюдаемость нелинейных систем

Выполнили: Белоус Савва R3435
Мовчан Игорь R3438
Ибахаев Зубайр R3436
Преподаватель: Зименко Константин Александрович

Определение управляемости и наблюдаемости

Система называется управляемой, если из любого начального состояния x_0 можно перевести её в любое конечное состояние x_f за конечное время с помощью подходящего управляющего воздействия.

Система называется наблюдаемой, если её начальное состояние $x(0)$ можно однозначно восстановить по выходному сигналу $y(t)$ на конечном интервале времени.

Критерий локальной управляемости

Рассмотрим нелинейную систему вида

$$\dot{x} = f(x) + \sum u_i g_i(x),$$

где $x \in R^n$ - вектор состояния,

$u = (\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_\mathrm{m}) \in \mathrm{R}^m$ - управляющее воздействие

f, g_i - гладкие векторные поля (чаще всего C^∞)

Критерий локальной управляемости

Введём коммутатор векторных полей (скобку Ли) – оператор, который сопоставляет любым двум векторным полям X и Y на гладком многообразии третье векторное поле, обозначаемое $[X, Y]$

По сути, скобка Ли $[X, Y]$ - это производная Y вдоль потока, порождённого X, и иногда обозначается как $L_X Y$ (производна Ли Y вдоль X)

Критерий локальной управляемости

Если

$$\dim\big(Lie\{f, g_1, \ldots, g_m\}(x_0)\big) = n,$$

где $Lie\{f, g_1, \ldots, g_m\}(x_0)$ - линейная оболочка всех векторных полей из алгебры Ли, вычисленных в точке x_0,

то система локально доступна в x_0,

если g_i также являются достижимыми, то локальная доступность $\rightarrow$ локальная управляемость

Пример 1

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin(x_1) + u \end{cases}$$

Или

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Пример 1

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin(x_1) + u \end{cases}$$

Или

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Вычислим скобку Ли

$$[f, g] = \frac{dg}{dx} f - \frac{df}{dx} g = 0 - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Проверим

$$\dim(span\{g(x), [f, g](x)\}) = \dim\left(span\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right) = 2 \rightarrow \text{управляема}$$

Пример 2

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 \end{cases}$$

Или

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Пример 2

Вычислим первую скобку Ли

$$[f,g] = \frac{dg}{dx}f - \frac{df}{dx}g = 0 - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

Вычислим вторую скобку Ли

$$[f,[f,g]] = \frac{d[f,g]}{dx}f - \frac{df}{dx}[f,g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ u \\ x_1x_2 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Пример 2

Следовательно

$$\dim\left(span\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\-x_1\end{bmatrix}\right\}\right)=2$$

А значит система не полностью локально управляема

Этот же факт можно показать по-другому

$$\dot{x}_3=x_1x_2=x_1\dot{x}_1=\frac{1}{2}\frac{d(x_1^2)}{dt}$$

$$\rightarrow x_3(t)=x_3(0)+\frac{1}{2}(x_1^2(t)-x_1^2(0))$$

Например, состояние $x=\begin{bmatrix}0\\x_2\\5\end{bmatrix}$ из начальных условий $\mathrm{x}_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ не достижимо

Критерий локальной наблюдаемости

Рассмотрим нелинейную систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases},$$

где $x \in R^n$ - вектор состояния, $y \in R^p$ - выходной вектор

f - гладкое векторное поля (чаще всего C^∞)

h - гладкое выходное отображение

Для простоты рассматривают систему без управления или с известным управлением. Мы рассмотрим с нулевым управлением

Критерий локальной наблюдаемости

Система локально наблюдаема в окрестности точки $x_0 \in R^n$ тогда и только тогда, когда

$$\dim(span\{\nabla\phi(x_0)|\phi\in O\}) = n$$

где O – алгебра наблюдаемости, порождённая компонентами h_j $(j = 1, \dots, p)$ и замкнутая относительно операции взятия производной Ли вдоль f

$$O = alg\{h_1, \dots, h_p, L_f h_1, \dots, L_f^k h_j, \dots\}$$

Пример 1

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^3 \\ y = x_1 \end{cases}$$

В наших обозначениях

$$f = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_1^3 \end{bmatrix}; h = x_1$$

Вычислим производные Ли

$$L_f h(x) = \nabla h * f = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_1^3 \end{bmatrix} = x_2$$

$$\nabla \left(L_f h(x) \right) = [0 \quad 1]$$

Пример 1

Получим матрицу градиентов функций

$$O = \begin{bmatrix} \nabla h(x) \\ \nabla(L_h f)(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rank(O) = 2 = n \rightarrow \text{система полностью наблюдаема}$$

Пример 2

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \\ \dot{x}_3 = x_3 \\ y = x_1 \end{cases}$$

В наших обозначениях

$$f = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}; h = x_1$$

Вычислим производные Ли

$$L_f h(x) = \nabla h * f = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2$$

$$\nabla \left(L_f h(x) \right) = [0 \quad 1 \quad 0]$$

Пример 2

$$L_f^2 h(x) = \nabla(L_f h) * f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = -x_1$$

$$\nabla\left(L_f^2 h(x)\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Построим матрицу O

$$O = \begin{bmatrix} \nabla h \\ \nabla(L_f h) \\ \nabla\left(L_f^2 h(x)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$rank(O) = 2 \rightarrow \text{система не наблюдаема}$$

Спасибо
за внимание!

ITsMOre than a UNIVERSITY