Научно-исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №2

**Синтез оптимального управления**

**Принцип максимума**

Вариант 21

Выполнил студент Мовчан Игорь Евгеньевич, R3480
Проверил преподаватель Парамонов Алексей Владимирович

Санкт-Петербург
2025

# Содержание

# 1 Построение оптимального регулятора

Пусть имеется система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 6x_2 + u \end{cases}$$

Начальное и конечное (в момент времени $t = 1$) состояния:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(1) = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Минимизируемый критерий качества:

$$J = \int_0^1 u^2(\tau) d\tau$$

Задачей синтеза оптимального регулятора поставим нахождение такого управления $u(t)$, которое минимизирует критерий качества при заданных начальном и конечном состояниях. Назовем его оптимальным управлением и обозначим $u^*(t)$.

Для решения задачи сперва составим Гамильтониан:

$$H = -u^2 + \varphi_1 x_2 + \varphi_2(-3x_1 - 6x_2 + u)$$

Теперь запишем систему уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi}_1 = 3\varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 = -\varphi_1 + 6\varphi_2 \\ -2u + \varphi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi}_1 = 3\varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 = -\varphi_1 + 6\varphi_2 \\ u = \dfrac{\varphi_2}{2} \end{cases}$$

Подставим управление в уравнения объекта и расширим систему:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = 3\varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 = -\varphi_1 + 6\varphi_2 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 6x_2 + \dfrac{\varphi_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Полученную расширенную систему бессмысленно и нерационально решать аналитически руками, поэтому прибегнем к численным вычислениям. Итоговое управление тогда:

$$u^*(t) = \frac{\varphi_2(t)}{2} = \frac{180\, e^{-t(\sqrt{6}-3)}}{D} \sum_{i=1}^{3} A_i - \frac{60\, e^{t(\sqrt{6}+3)}}{D} \sum_{i=1}^{3} B_i$$

Здесь коэффициенты $A_i$:

$$A_1 = 2e^{\sqrt{6}+3} + 2e^{\sqrt{6}+9} + 2e^{\sqrt{6}+15}$$

$$A_2 = -6e^{3-\sqrt{6}} + 6e^{9-3\sqrt{6}} - 6e^{15-\sqrt{6}}$$

$$A_3 = \sqrt{6}(-2e^{3-\sqrt{6}} - 2e^{9-\sqrt{6}} + 3e^{9-3\sqrt{6}} - 2e^{15-\sqrt{6}} + 3e^{\sqrt{6}+9})$$

Коэффициенты $B_i$:

$$B_1 = 18e^{\sqrt{6}+3} - 30e^{3-\sqrt{6}} - 12e^{9-\sqrt{6}}$$

$$B_2 = 36e^{9-3\sqrt{6}} + 6e^{15-\sqrt{6}} - 18e^{15-3\sqrt{6}}$$

$$B_3 = -12\sqrt{6}\, e^{3-\sqrt{6}} - 6\sqrt{6}\, e^{9-\sqrt{6}} + 15\sqrt{6}\, e^{9-3\sqrt{6}} - \\ -6\sqrt{6}\, e^{15-3\sqrt{6}} + 6\sqrt{6}\, e^{\sqrt{6}+3} + 3\sqrt{6}\, e^{\sqrt{6}+9}$$

Знаменатель:

$$D = D_1 D_2$$

Коэффициенты $D_i$:

$$D_1 = \sqrt{6}\, e^{6} - 6e^{6-2\sqrt{6}} - 3\sqrt{6}\, e^{6-2\sqrt{6}} + 2\sqrt{6} + 6$$

$$D_2 = 2e^{6} + 2e^{12} - 3e^{6-2\sqrt{6}} - 3e^{2\sqrt{6}+6} + 2$$

Результаты моделирования замкнутой найденным регулятором системы объекта приведены на рисунках 1-3. При этом получаем приближенное значение минимизируемого критерия $J \approx 6829.24$.

Можем видеть, что управление действительно переводит состояния из начальных условий в заданные конечные. Успех!

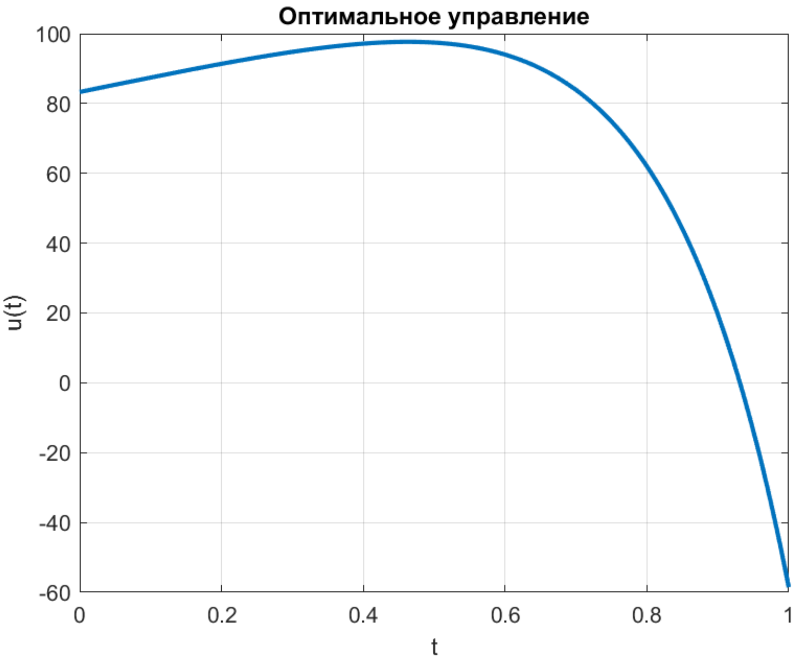


*Рис. 1: График управляющего воздействия при оптимальном регуляторе*

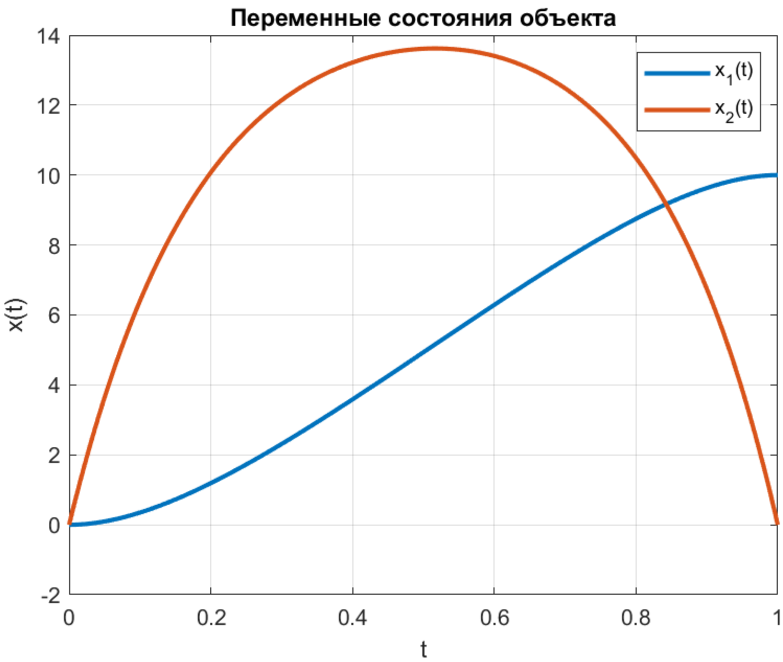


*Рис. 2: Графики переменных состояния объекта при оптимальном регуляторе*

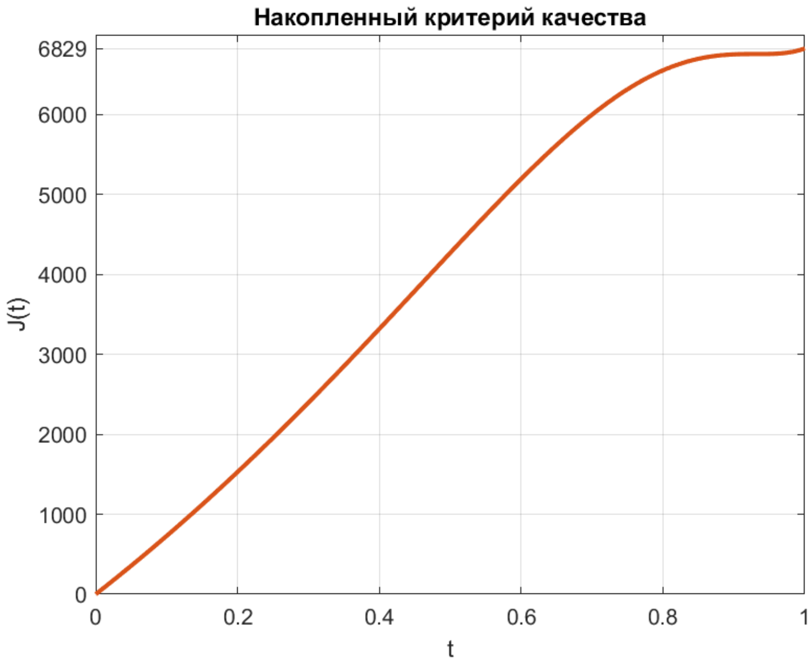


*Рис. 3: График изменения минимизируемого критерия качества*

# 2 Подтверждение оптимальности

Для подтверждения оптимальности управления $u^*(t)$, введенного для начального и конечного состояний $x(0)$ и $x(1)$, сравним его с другим управлением, удовлетворяющим тем краевым условиям. При этом данное управление должно дать большее значение минимизированного $u^*(t)$ критерия качества $J$. Продемонстрируем это, незначительно отклонив параметры регулятора от оптимальных:

$$u_1(t) = u^*(t) - 25 = \frac{\varphi_2(t)}{2} - 25, \quad u_2(t) = u^*(t) + 50 = \frac{\varphi_2(t)}{2} + 50$$

При будем решаеть уже введенную расширенную систему:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = 3\varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 = -\varphi_1 + 6\varphi_2 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 6x_2 + u(t) \end{cases}$$

Итак, проведем моделирование замкнутых систем этими регуляторами. Результаты представлены на рисунках 4-7. При этом были достигнуты следующие значения критериев качества:

$$J^* = 6829.4, \quad J = 6834.08 > J^*, \quad J = 6847.69 > J^*$$

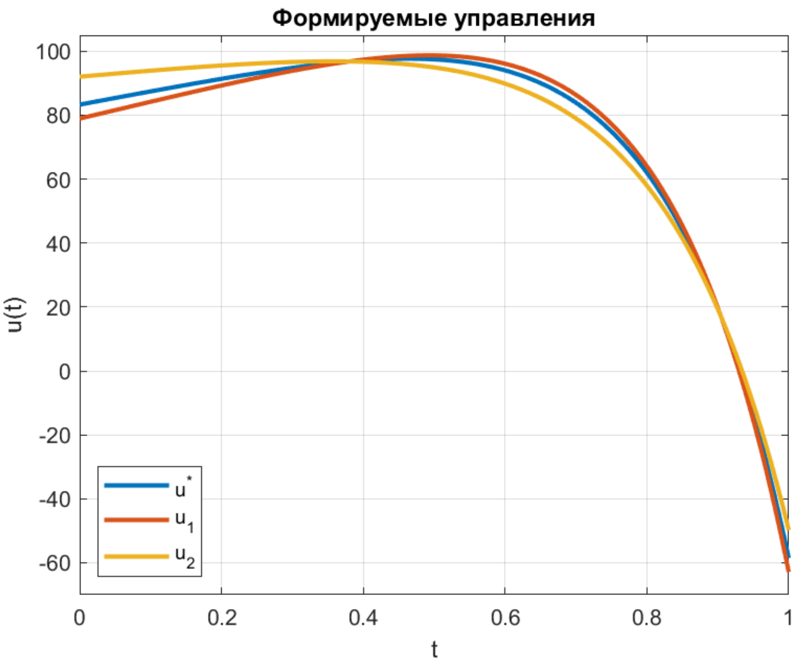


*Рис. 4: Графики управления при отклонении параметров регулятора*

Можем видеть, что относительно малые отклонения значений регулятора заметно сказываются на виде графиков как состояний, так и управлений, однако значения функционалов $J$ отклоняются слабо, но всегда в большую сторону от $J^*$. Данное и подтверждает оптимальность синтезированного $u^*(t)$ - *любые* регуляторы, которые могут браться для решения поставленной задачи терминального управления, будут давать большие значения введенного критерия качества

$$J = \int_0^1 u^2(\tau) d\tau$$

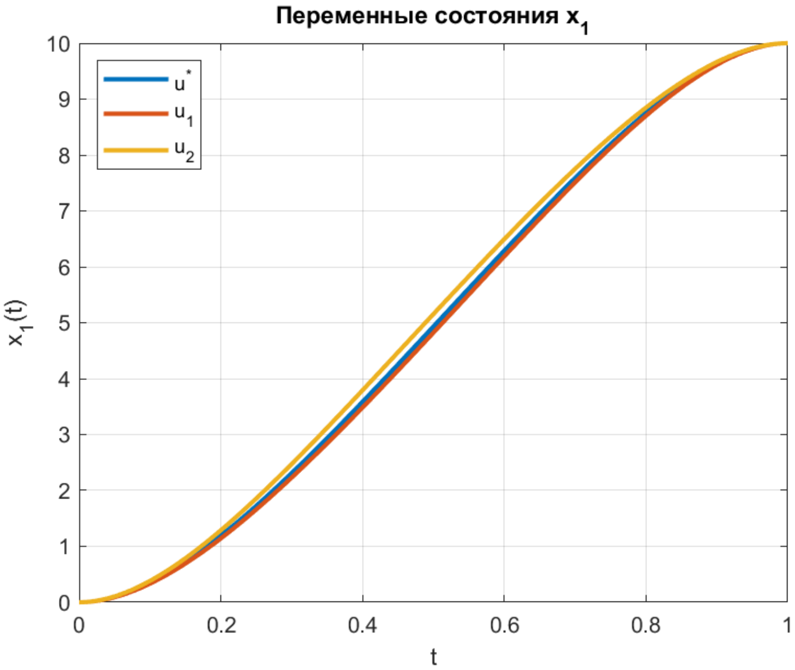


*Рис. 5: Графики состояния $x_1$ при отклонении параметров регулятора*

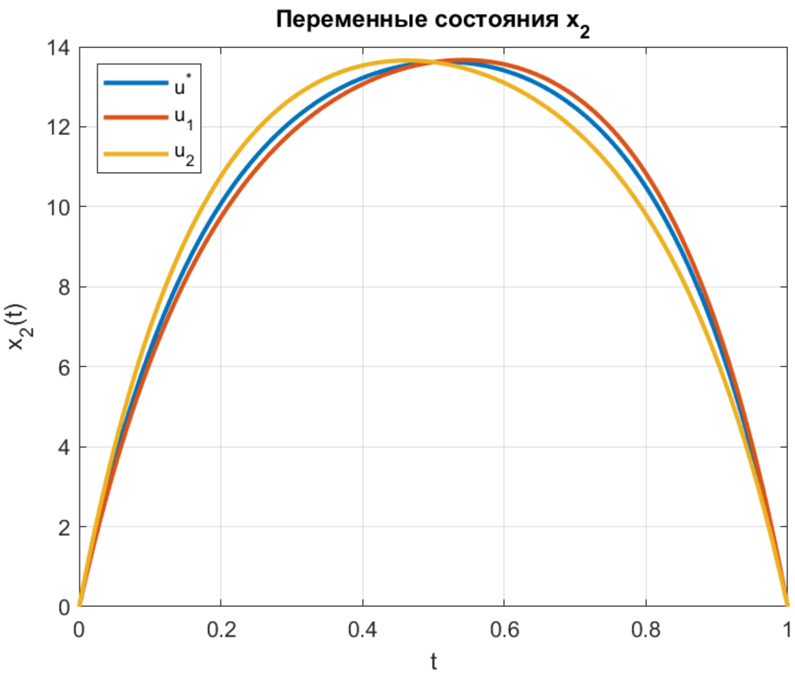


*Рис. 6: Графики состояния $x_2$ при отклонении параметров регулятора*

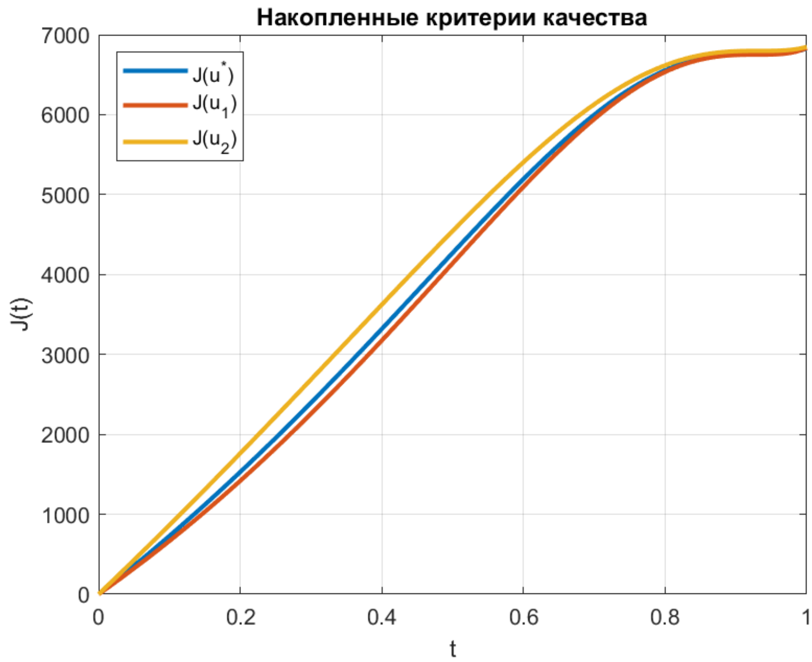


*Рис. 7: Графики критериев при отклонении параметров регулятора*

# 3 Выводы

В ходе лабораторной работы был синтезирован оптимальный регулятор, позволяющий перевести динамическую систему из начального положения в заданное конечное состояние за фиксированное время при минимизации квадратичного критерия. Для нахождения закона управления использовался метод, основанный на построении Гамильтониана и решении системы дифференциальных уравнений Эйлера-Лагранжа. Полученные результаты моделирования подтвердили, что найденное управление $u^*(t)$ обеспечивает точное выполнение краевых условий, а сравнение с возмущенными управлениями доказало минимальность значения функционала качества. Таким образом, задача терминального управления была успешно решена, а оптимальность синтезированного регулятора доказана!