

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



Нелинейные системы управления

Лабораторная работа №2

Выполнили:

Ибахаев З. Р. | Мовчан И. Е. | Белоус С. Э.

Преподаватель:

Пашенко А. В.

2025

## **СОДЕРЖАНИЕ**

1	ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В НАЧАЛЕ КООРДИНАТ ...	3
1.1	Система 1 .....	3
1.2	Система 2 .....	3
1.3	Система 3 .....	4
1.4	Система 4 .....	4
1.5	Система 5 .....	5
2	АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СКАЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ .....	6
3	СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОГО РЕГУЛЯТОРА МЕТОДОМ LMI.....	9
4	ОГРАНИЧЕВАЮЩЕЕ УСЛОВИЕ НА ПАРАМЕТР $\gamma$ .....	13
5	ЛИНЕЙНЫЙ РЕГУЛЯТОР И УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ВХОДУ К СОСТОЯНИЮ .....	15
6	ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ВХОДУ К СОСТОЯНИЮ	17

# 1 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В НАЧАЛЕ КООРДИНАТ

## 1.1 Система 1

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_2.$$

Возьмём

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Тогда

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1(-x_1 + x_1 x_2) + x_2(-2x_2) = -x_1^2 + x_1^2 x_2 - 2x_2^2.$$

Оценим проблемный член:

$$x_1^2 x_2 \leq |x_2| x_1^2.$$

Пусть  $|x_2| < c$  для некоторого  $c \in (0,1)$ . Тогда

$$\dot{V} \leq -x_1^2 + cx_1^2 - 2x_2^2 = -(1-c)x_1^2 - 2x_2^2 < 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Следовательно существует окрестность начала координат, в которой  $\dot{V} < 0$ , и начало координат является локально асимптотически устойчивым.

## 1.2 Система 2

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_1(1 - r^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2(1 - r^2),$$

где  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ .

Пусть  $V(x) = \frac{1}{2}r^2$ . Тогда

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = -x_1 x_2 - x_1^2(1 - r^2) + x_1 x_2 - x_2^2(1 - r^2) = -r^2(1 - r^2).$$

Отсюда:

- если  $0 < r < 1$ , то  $\dot{V} = -r^2(1 - r^2) < 0$ ;
- при  $r = 0$  — тривиально  $\dot{V} = 0$ ;
- при  $r \geq 1$  —  $\dot{V} \geq 0$ .

Следовательно в внутренности единичного круга  $\dot{V} < 0$ , и начало координат является локально асимптотически устойчивым.

### 1.3 Система 3

$$\dot{x}_1 = x_2(1 - x_1^2) - 2x_1, \quad \dot{x}_2 = -(x_1 + x_2)(1 - x_1^2).$$

Вновь возьмём  $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ . Тогда

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1(x_2(1 - x_1^2) - 2x_1) + x_2(-(x_1 + x_2)(1 - x_1^2)) \\ &= x_1x_2(1 - x_1^2) - 2x_1^2 - x_1x_2(1 - x_1^2) - x_2^2(1 - x_1^2) \\ &= -2x_1^2 - x_2^2(1 - x_1^2).\end{aligned}$$

Если  $|x_1| < 1$ , то  $1 - x_1^2 > 0$  и поэтому

$$\dot{V} = -2x_1^2 - x_2^2(1 - x_1^2) < 0 \quad \text{при } x \neq 0.$$

Отсюда: в окрестности нуля (при  $|x_1| < 1$ )  $\dot{V} < 0$ . Следовательно начало координат локально асимптотически устойчиво.

### 1.4 Система 4

$$\dot{x}_1 = -3x_1 - x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2^3.$$

Подберём простой квадратичный кандидат:

$$V(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Вычислим:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1(-3x_1 - x_2) + x_2(2x_1 - x_2^3) \\ &= -6x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_2 - x_2^4 \\ &= -6x_1^2 - x_2^4.\end{aligned}$$

Заметим, что  $\dot{V}(x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$ , т.е. только в нуле. Кроме того,  $V$  положительно определена и радиально неограничена ( $V(x) \rightarrow \infty$  при  $\|x\| \rightarrow \infty$ ). Поэтому  $\dot{V}$  строго отрицательна при всех  $x \neq 0$ , и по теореме Ляпунова начало координат является глобально асимптотически устойчивым.

## 1.5 Система 5

$$\dot{x} = -\arctan(x).$$

Выберем  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ . Тогда

$$\dot{V} = x\dot{x} = -x \arctan(x).$$

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Начало координат *глобально асимптотически устойчиво*.

## 2 АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СКАЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = ax^p + h(x) \quad (1)$$

где  $p \in \mathbb{N}$ , а  $h(x)$  удовлетворяет условию:

$$|h(x)| \leq k|x|^{p+1} \quad (2)$$

в некоторой окрестности точки начала координат.

Требуется определить, при каких условиях система асимптотически устойчива.

### Решение задания

Выберем кандидата в функцию Ляпунова в виде:

$$V(x) = \frac{1}{p+1}|x|^{p+1} \quad (3)$$

Она положительно определена:  $V(0) = 0$  и  $V(x) > 0$  для  $x \neq 0$ .

**Производная функции Ляпунова** вдоль траекторий системы:

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx}\dot{x} = \frac{dV}{dx}[ax^p + h(x)] \quad (4)$$

Вычислим производную  $V(x)$ , для  $x > 0$ :

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{p+1}x^{p+1} \right) = x^p \quad (5)$$

Для  $x < 0$ :

$$\frac{dV}{dx} = -(-x)^p = -|x|^p \cdot \text{sign}(x) \quad (6)$$

Объединим оба случая:

$$\frac{dV}{dx} = |x|^p \cdot \text{sign}(x) \quad (7)$$

Тогда:

$$\dot{V}(x) = |x|^p \cdot \text{sign}(x) \cdot [ax^p + h(x)] \quad (8)$$

**Анализ знака производной**, рассмотрим два случая:

### Случай 1: $x > 0$

Для  $x > 0$  имеем  $|x| = x$  и  $\text{sign}(x) = 1$ , поэтому:

$$\frac{dV}{dx} = x^p \quad (9)$$

Производная функции Ляпунова:

$$\dot{V}(x) = x^p [ax^p + h(x)] = ax^{2p} + x^p h(x) \quad (10)$$

Используя условие  $|h(x)| \leq k|x|^{p+1} = kx^{p+1}$  для  $x > 0$ :

$$\dot{V}(x) \leq ax^{2p} + x^p \cdot kx^{p+1} = ax^{2p} + kx^{2p+1} \quad (11)$$

$$\dot{V}(x) \leq x^{2p}(a + kx) \quad (12)$$

Для малых  $x > 0$  (в окрестности начала координат) член  $kx$  мал:

$$\dot{V}(x) \approx ax^{2p} \quad (13)$$

Поскольку  $x^{2p} > 0$  при  $x \neq 0$ , для отрицательности  $\dot{V}(x)$  требуем  $a < 0$ .

### Случай 2: $x < 0$

Для  $x < 0$  имеем  $|x| = -x$  и  $\text{sign}(x) = -1$ , поэтому:

$$\frac{dV}{dx} = |x|^p \cdot \text{sign}(x) = |x|^p \cdot (-1) = -|x|^p \quad (14)$$

Производная функции Ляпунова:

$$\dot{V}(x) = -|x|^p \cdot [ax^p + h(x)] \quad (15)$$

При нечетном  $p$  для  $x < 0$ :  $x^p = -|x|^p$ , следовательно:

$$\dot{V}(x) = -|x|^p \cdot [-a|x|^p + h(x)] = a|x|^{2p} - |x|^p h(x) \quad (16)$$

Используя условие  $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$ :

$$|x|^p h(x) \geq -|x|^p \cdot k|x|^{p+1} = -k|x|^{2p+1} \quad (17)$$

Поэтому:

$$\dot{V}(x) \leq a|x|^{2p} + k|x|^{2p+1} = |x|^{2p}(a + k|x|) \quad (18)$$

Для малых  $|x|$  (в окрестности начала координат):

$$\dot{V}(x) \approx a|x|^{2p} \quad (19)$$

Поскольку  $|x|^{2p} > 0$  при  $x \neq 0$ , для отрицательности  $\dot{V}(x)$  требуем  $a < 0$ .

**Объединяя оба случая, получаем:** для того чтобы  $\dot{V}(x) < 0$  в окрестности начала координат (за исключением  $x = 0$ ), необходимо и достаточно:

$$[a < 0] \quad (20)$$

При  $a < 0$  и достаточно малых  $|x|$  (когда  $k|x| < |a|$ ):

$$\dot{V}(x) \leq |x|^{2p}(a + k|x|) < 0 \quad \text{для } x \neq 0 \quad (21)$$

Следовательно, система будет асимптотически устойчива в начале координат.

### 3 СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОГО РЕГУЛЯТОРА МЕТОДОМ LMI

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u \end{cases}$$

Требуется построить линейный регулятор, который стабилизирует систему экспоненциально со степенью  $\alpha = 2$ .

$$u = Kx \quad (22)$$

Перепишем систему в матричной форме:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (23)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

**Экспоненциальная устойчивость** со степенью  $\alpha = 2$  означает, что решение системы удовлетворяет:

$$\|x(t)\| \leq ce^{-2t}\|x(0)\| \quad (25)$$

Для квадратичной функции Ляпунова  $V(x) = x^T Px$ , где  $P \succ 0$  (симметричная положительно определенная матрица), производная вдоль траекторий:

$$\dot{V}(x) = x^T[(A + BK)^T P + P(A + BK)]x \quad (26)$$

Условие экспоненциальной устойчивости со степенью  $\alpha = 2$ :

$$\dot{V}(x) \leq -2\alpha V(x) = -4x^T Px \quad (27)$$

Это эквивалентно неравенству:

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) + 4P \preceq 0 \quad (28)$$

Выполним замену переменных:

$$W = P^{-1} \succ 0 \quad (29)$$

$$Y = KP^{-1} = KW \quad (30)$$

Умножим неравенство слева и справа на  $W = P^{-1}$ :

$$W(A + BK)^T + (A + BK)W + 4W \preceq 0 \quad (31)$$

Подставим  $K = YW^{-1}$ :

$$W(A + BYW^{-1})^T + (A + BYW^{-1})W + 4W \preceq 0 \quad (32)$$

Упростим:

$$WA^T + (YW^{-1})^T B^T W + AW + W(BYW^{-1}) + 4W \preceq 0 \quad (33)$$

Так как  $W(BYW^{-1}) = BY$  и  $(YW^{-1})^T B^T W = Y^T B^T$ :

$$WA^T + Y^T B^T + AW + BY + 4W \preceq 0 \quad (34)$$

или

$$AW + WA^T + BY + Y^T B^T + 4W \preceq 0 \quad (35)$$

**LMI-применение для синтеза:** Найти матрицы  $W \succ 0$  и  $Y$  такие, что:

$$\begin{cases} AW + WA^T + BY + Y^T B^T + 4W \prec 0 \\ W \succ 0 \end{cases} \quad (36)$$

Тогда получим уравнение на регулятор:

$$K = YW^{-1} = \begin{bmatrix} -39.02 & -10.81 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.57 & -5.24 \\ -5.24 & 22.55 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -4.72 & -39.07 \end{bmatrix}$$

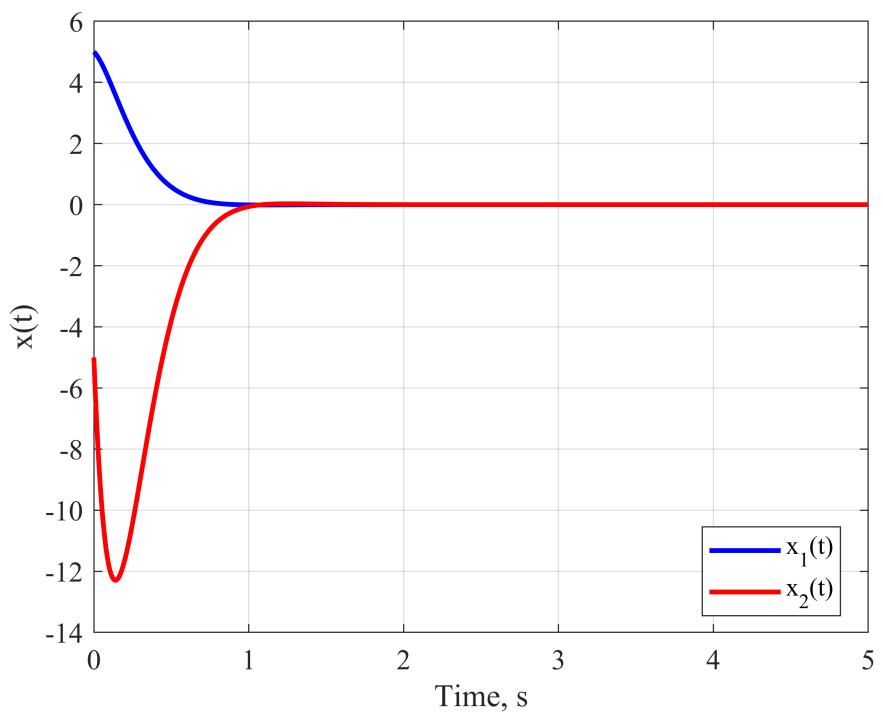


Рисунок 1 — Моделирование - вектор состояния,  $x_0 = [5, -5]^T$

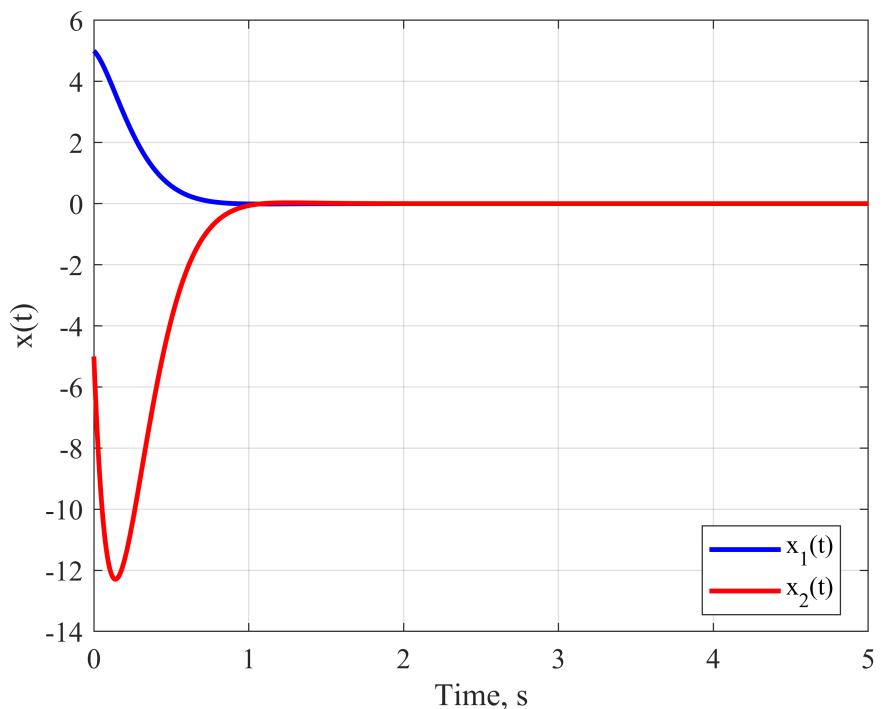


Рисунок 2 — Моделирование - управляемый сигнал,  $x_0 = [5, -5]^T$

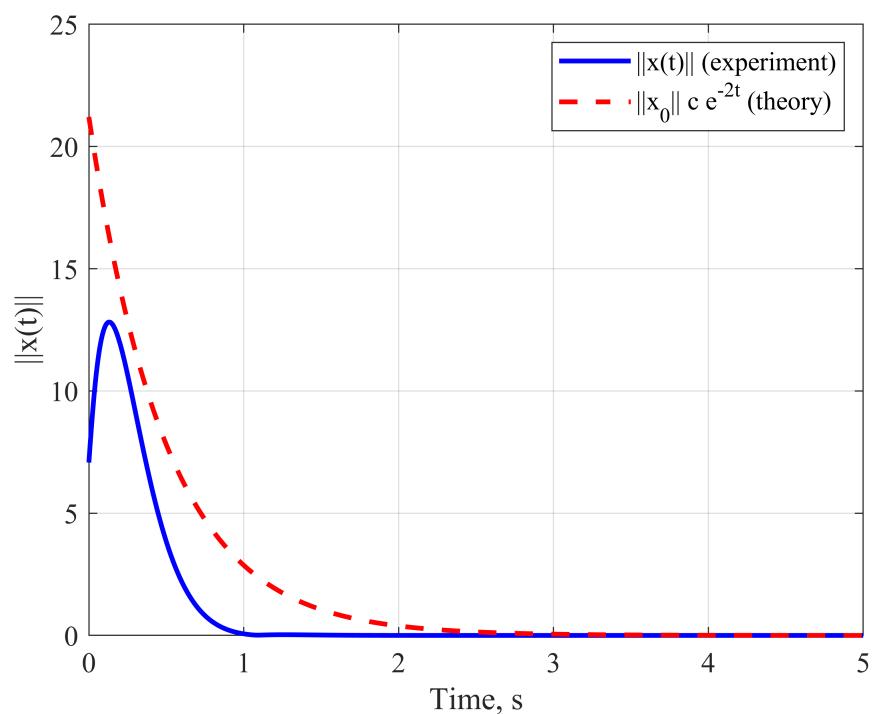


Рисунок 3 — Моделирование - норма вектора состояния,  $c = 3$

## 4 ОГРАНИЧЕВАЮЩЕЕ УСЛОВИЕ НА ПАРАМЕТР $\gamma$

Рассмотрим прошлую систему, но теперь с возмущением:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin x_2 \quad (38)$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + u \quad (39)$$

Закон управления берется из прошлого задания:

$$u = Kx \quad (40)$$

Требуется найти ограничивающее условие на параметр  $\gamma$ , при котором система асимптотически устойчива со степенью  $\alpha = 1$ .

Подставим управление  $u = Kx$  во второе уравнение:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin x_2 \quad (41)$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + k_1x_1 + k_2x_2 = (2 + k_1)x_1 + k_2x_2 \quad (42)$$

В матричной форме:

$$\dot{x} = (A + BK)x + \begin{bmatrix} \gamma \sin x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}, \quad d(x) = \begin{bmatrix} \gamma \sin x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

где  $d(x)$  - возмущение. Тогда система принимает вид:

$$\dot{x} = A_{cl}x + d(x) \quad (45)$$

### Условие на возмущение

Для малых  $x_2$  используем разложение:

$$\sin x_2 \approx x_2 - \frac{x_2^3}{6} + \dots \quad (46)$$

Однако в локальной окрестности начала координат (где  $|x_2| \leq 1$ ):

$$|\sin x_2| \leq |x_2| \quad (47)$$

Следовательно:

$$\|d(x)\| = |\gamma \sin x_2| \leq \gamma |x_2| \leq \gamma \|x\| \quad (48)$$

## Функция Ляпунова

Используем квадратичную функцию Ляпунова из задания 3:

$$V(x) = x^T Px \quad (49)$$

где матрица  $P \succ 0$  была найдена из LMI задачи в задании 3.

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}(x^T Px) = \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} \quad (50)$$

$$\dot{V}(x) = [(A + BK)x]^T Px + x^T P[(A + BK)x] \quad (51)$$

Используя свойство транспонирования  $(AB)^T = B^T A^T$ :

$$\dot{V}(x) = x^T (A + BK)^T Px + x^T P(A + BK)x \quad (52)$$

Поскольку матрица  $P$  симметрична ( $P = P^T$ ), оба слагаемых имеют одинаковую структуру. **Объединяя их:**

$$\dot{V}(x) = x^T [(A + BK)^T P + P(A + BK)]x \quad (53)$$

Из задания 3 известно, что для степени  $\alpha = 2$ :

$$A_{cl}^T P + P A_{cl} + 2 \cdot 2 \cdot P \preceq 0 \quad (54)$$

Для степени  $\alpha = 1$  требуется:

$$A_{cl}^T P + P A_{cl} = -Q \quad (55)$$

Производная:

$$\dot{V}(x) = -x^T Q_1 x + 2x^T P d(x) \quad (56)$$

Оценим член с возмущением:

$$|2x^T P d(x)| \leq 2\|P\|\|x\|\|d(x)\| \leq 2\gamma\|P\|\|x\|^2 \quad (57)$$

Для асимптотической устойчивости требуем:

$$\dot{V}(x) \leq -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + 2\gamma\|P\|\|x\|^2 \leq -2V(x) = -2x^T Px \quad (58)$$

$$-\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + 2\gamma\|P\|\|x\|^2 \leq -2\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \quad (59)$$

Откуда итоговое **условие на параметр  $\gamma$** :

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q) - 2\lambda_{\min}(P)}{2\|P\|}$$

(60)

## 5 ЛИНЕЙНЫЙ РЕГУЛЯТОР И УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ВХОДУ К СОСТОЯНИЮ

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 0.5x_1^3 \\ \dot{x}_2 = u \\ u = Kx = k_1x_1 + k_2x_1 \end{cases}$$

Найдем такую матрицу  $K$ , чтобы глобально стабилизировать начало координат.

Проведем анализ с помощью функции Ляпунова:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = (1 + k_1)x_1x_2 + k_2x_2^2 - 0.5x_1^4$$

Выберем  $k_1 = -1$ , чтобы обратить член  $x_1x_2$  в ноль, и возьмем  $k_2 < 0$ , тогда:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = k_2x_2^2 - 0.5x_1^4 < 0$$

Поэтому выберем  $K$  следующим:

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Далее, предположим, что имеется шум измерений:

$$u = Ky = K(x + \psi)$$

Тогда, производная функции Ляпунова примет вид:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = (1 + k_1)x_1x_2 + k_2x_2^2 - 0.5x_1^4 + x_2K\psi$$

Примем  $k_1 = -1$ ,  $k_2 = -1$ :

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2 - 0.5x_1^4 + x_2K\psi$$

Член  $x_2K\psi$  можно оценить как  $x_2K\psi \leq \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}|K\psi|^2$ :

$$\dot{V}(x_1, x_2) \leq -0.5x_2^2 - 0.5x_1^4 + 0.5|K|^2|\psi|^2$$

Таким образом:

$$\dot{V} \leq -W(x) + \sigma(||\psi||), \quad W(x) = 0.5x_2^2 + 0.5x_1^4, \quad \sigma(||\psi||) = 0.5|K|^2||\psi||^2$$

Можно сказать, что состояние системы будет оставаться ограниченным пропорционально  $||\psi||$ .

Теперь возьмем случай аддитивного возмущения:

$$u = Kx + \delta$$

Тогда при  $k_1 = -1, k_2 = -1$  производная функции Ляпунова примет вид:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2 - 0.5x_1^4 + x_2\delta \leq -0.5x_2^2 - 0.5x_1^4 + 0.5|\delta|^2$$

Получили:

$$\dot{V} \leq -W(x) + \sigma(|\delta|), \quad W(x) = 0.5x_2^2 + 0.5x_1^4, \quad \sigma(|\delta|) = 0.5|\delta|$$

Таким образом можно сказать, что состояние системы будет оставаться ограниченным пропорционально  $|\delta|$ .

## 6 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ВХОДУ К СОСТОЯНИЮ

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \sigma(x_1) - x_2 + d \end{cases}$$

$$\sigma(0) = 0, \quad y\sigma(y) \geq 0$$

Выберем функцию Ляпунова:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \sigma(y)dy$$

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + \sigma(x_1)\dot{x}_1$$

$$\dot{V} = -2x_1^2 - x_2^2 - 2x_1\sigma(x_1) + x_2d$$

По условию  $x_1\sigma(x_1) \geq 0$ , тогда:

$$\dot{V} \leq -2x_1^2 - x_2^2 + x_2d \leq -2x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}d^2 \leq -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}d^2$$

Так как  $\int_0^{x_1} \sigma(y)dy \geq 0$ , можно сказать что:

$$\frac{1}{2}\|x\|^2 \leq V(x)$$

Получили:

$$\frac{1}{2}\|x\|^2 \leq V(x), \quad \dot{V} \leq -\frac{1}{2}\|x\|^2 + \sigma(|d|)$$

Таким образом при  $d = 0$  система будет асимптотически устойчивой, иначе состояние системы будет ограничено пропорционально  $|d|$ .