

НАУЧНО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по лабораторной работе №1  
Управляемость и наблюдаемость  
Вариант 11

Выполнил студент группы R3380  
Преподаватель

Мовчан Игорь Евгеньевич  
Пашенко Артем Витальевич

Санкт-Петербург  
2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Исследование управляемости</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Ещё одно исследование управляемости</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Исследование наблюдаемости</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Ещё одно исследование наблюдаемости</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Управляемость по выходу</b>	<b>22</b>
<b>6</b>	<b>Общие выводы</b>	<b>25</b>

# 1 Исследование управляемости

Исследуем линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

В соответствии с вариантом задания, матрицы  $A$  и  $B$  имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 9 \\ 6 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Выполним анализ управляемости. Для этого сначала вычислим матрицу управляемости:

$$U = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} -2 & 10 & -23 \\ -1 & 5 & -7 \\ 2 & -7 & 11 \end{bmatrix}$$

Ранг матрицы управляемости равен размерности пространства состояний (то есть  $\text{rank}(U) = 3$ ), а значит, система является полностью управляемой по критерию Калмана.

Можно и иначе! Найдем собственные значения матрицы  $A$  и каждое из них проверим на управляемость:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -2 + 3i, \quad \lambda_3 = -2 - 3i$$

Для каждого собственного числа  $\lambda_i$  построим матрицу Хаутуса:

$$H_U(\lambda_i) = [A - \lambda_i I \ B]$$

Вычислим соответствующие матрицы и найдем их ранги:

$$\begin{aligned} H_U(\lambda_1) &= \begin{bmatrix} 7 - (-2) & -6 & 9 & -2 \\ 6 & -5 - (-2) & 6 & -1 \\ -6 & 3 & -8 - (-2) & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 9 & -6 & 9 & -2 \\ 6 & -3 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & -6 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_U(\lambda_2) &= \begin{bmatrix} 7 - (-2 + 3i) & -6 & 9 & -2 \\ 6 & -5 - (-2 + 3i) & 6 & -1 \\ -6 & 3 & -8 - (-2 + 3i) & 2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 9 - 3i & -6 & 9 & -2 \\ 6 & -3 - 3i & 6 & -1 \\ -6 & 3 & -6 - 3i & 2 \end{bmatrix} \\
H_U(\lambda_3) &= \begin{bmatrix} 7 - (-2 - 3i) & -6 & 9 & -2 \\ 6 & -5 - (-2 - 3i) & 6 & -1 \\ -6 & 3 & -8 - (-2 - 3i) & 2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 9 + 3i & -6 & 9 & -2 \\ 6 & -3 + 3i & 6 & -1 \\ -6 & 3 & -6 + 3i & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Для всех трёх  $\lambda_i$  выполнено:

$$\text{rank}(H_U(\lambda_i)) = 3$$

А значит, все собственные числа (соответственно, и сама система) являются управляемыми.

Найдем вещественную Жорданову форму  $\hat{A} = T^{-1}AT$  матрицы  $A$  и соответствующую матрицу перехода  $T$  к ней:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Можно получить обратную матрицу  $T$ :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

В итоге система в жордановом базисе задается уравнением:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

Для каждой жордановой клетки последняя строка (а для мнимых чисел - хотя бы одна из двух последних строк) соответствующего блока в  $\hat{B}$  ненулевая: элементы  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 1 \neq 0$  и  $\hat{B}_3 = -1 \neq 0$ , а значит, система является полностью управляемой, равно как и все собственные числа матрицы  $A$ .

Полная управляемость для линейных систем даёт нам возможность для любых состояний  $x(0)$  и  $x(t_1) = x_1$  найти такое управление  $u(t)$ , что система перейдёт из начальных условий  $x(0)$  в  $x_1$  за время  $t = t_1$ . Воспользуемся этим, чтобы перевести систему из состояния  $x(0) = 0$  в  $x(t_1) = x_1$  за время  $t = t_1 = 3$ . Из варианта задания получаем точку

$$x_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Найдем грамиан управляемости относительно времени  $t = t_1 = 3$ :

$$\begin{aligned} P(t_1) &= \int_0^{t_1} e^{At} BB^T e^{A^T t} dt = \\ &= \begin{bmatrix} 0.3688436 & 0.20346076 & -0.37345989 \\ 0.20346076 & 0.13461396 & -0.17461489 \\ -0.37345989 & -0.17461489 & 0.46461429 \end{bmatrix} \approx \\ &\approx \begin{bmatrix} 0.369 & 0.203 & -0.373 \\ 0.203 & 0.135 & -0.175 \\ -0.373 & -0.175 & 0.465 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

В качестве дополнительного анализа управляемости найдем собственные числа матрицы  $P(t_1)$ :

$$\lambda_1 = 0.88712357 \approx 0.887, \quad \lambda_2 = 0.00521594 \approx 0.005$$

$$\lambda_3 = 0.07573234 \approx 0.076$$

Так как Грамиан управляемости - симметричная матрица, а её собственные числа положительны, то  $P(t_1)$  положительно определён (что также следует из полной управляемости), а значит, рассматриваемое состояние  $x_1$  достижимо за время  $t = t_1 = 3$ , притом управление  $u(t)$  можно найти по формуле:

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)}(P(t_1))^{-1}x_1$$

Для нахождения управления воспользуемся численными средствами. Среда MATLAB даёт следующие результаты:

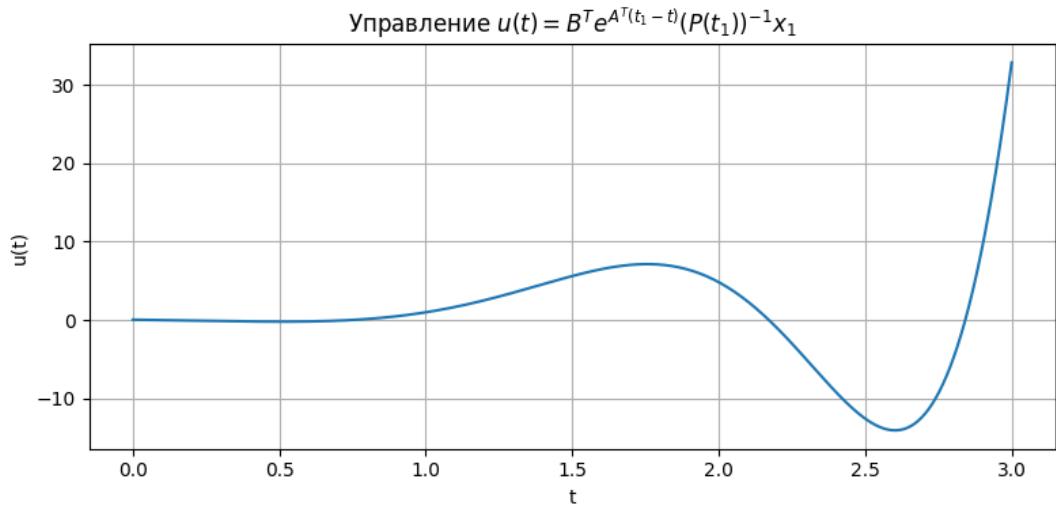
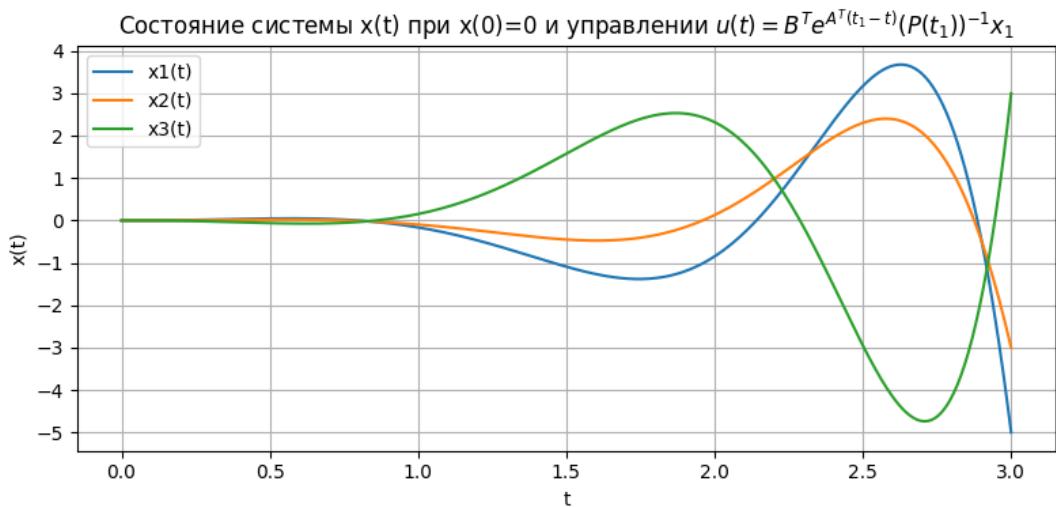
$$u(t) = \frac{11121409572095649}{281474976710656}e^{2t-6} -$$

$$-\frac{1863583075832407 - 20684618866560801i}{562949953421312}e^{(2-3i)t-6+9i} -$$

$$-\frac{1863583075832407 + 20684618866560801i}{562949953421312}e^{(2+3i)t-6-9i}$$

График соответствующего управления  $u(t)$  при  $x(0) = 0$  и  $x(t_1) = x_1$  приведен на рисунке 1, а график состояния системы  $x(t)$  при  $x(0) = 0$  и найденном  $u(t)$  приведен на рисунке 2. Видим, что система по итогу достигла заданного состояния  $x(t_1) = x_1$ , управление выполнило свою задачу.

В итоге система является управляемой, это подтверждается как критерием Калмана, так и исследованиями матриц Хаутуса для всех собственных чисел, которые по итогу аналогично являются управляемыми, и Жордановой формы матрицы системы  $\hat{A}$  и матрицы управления  $\hat{B}$ . Грамиан управляемости в исследуемый момент времени  $t = t_1 = 3$  также оказался положительно определен, что ещё раз подтвердило управляемость системы и позволило найти создать программное управление  $u(t)$  по формуле, позволившее перевести систему из состояния  $x(0) = 0$  в состояние  $x(t_1) = x_1$  за необходимое время. Все результаты подтвердились моделированием.

Рис. 1: Управление  $u(t)$  при полной управляемостиРис. 2: Состояние системы  $x(t)$  при полной управляемости

## 2 Ещё одно исследование управляемости

Зададимся теперь точками

$$x'_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x''_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Проверим их на принадлежность управляемому подпространству всей той же линейной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Матрицу  $A$  оставим той же,  $B$  изменим, получив:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 9 \\ 6 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Посмотрим, действительно ли изменения матрицы управления  $B$  приводят к изменениям и в качестве управляемости системы. Для этого проведем уже известный анализ управляемости. Начнем с принадлежности заданных точек  $x'_1$  и  $x''_1$  управляемому подпространству. Для этого найдем матрицу управляемости системы и её ранг:

$$U = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -22 \\ 1 & 1 & -17 \\ -1 & -1 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(U) = 2$$

Таким образом, система уже не является управляемой по критерию Калмана, а значит, существуют направления, на которые прямо воздействовать невозможно. Принадлежность заданных точек  $x'_1$  и  $x''_1$  управляемому подпространству можно проверить с помощью матрицы управляемости. Если точка является линейной комбинацией столбцов матрицы управляемости  $U$  (иначе говоря, принадлежит

линейной оболочке, натянутой на эти вектора, называемой управляемым подпространством), то ранг «расширенной»  $U$  (вместе с рассматриваемой точкой) не изменится, а самих точек тогда можно будет прямо добиться из нулевого состояния некоторым управлением. Итак, нам нужно проверить ранги следующих матриц:

$$U' = [B \ AB \ A^2B \ x'_1] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -22 & -2 \\ 1 & 1 & -17 & 1 \\ -1 & -1 & 17 & -1 \end{bmatrix}$$

$$U'' = [B \ AB \ A^2B \ x''_1] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -22 & -5 \\ 1 & 1 & -17 & 4 \\ -1 & -1 & 17 & -1 \end{bmatrix}$$

Получаем:

$$\text{rank}(U') = 2$$

$$\text{rank}(U'') = 3$$

По итогу точка  $x'_1$  принадлежит управляемому подпространству, а точка  $x''_1$  не принадлежит. Далее будем считать, что  $x_1 = x'_1$ .

Исследуем систему далее. Так как матрица  $A$  не изменилась, то её собственные числа остались прежними:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -2 + 3i, \quad \lambda_3 = -2 - 3i$$

Построим для них матрицы Хаутуса:

$$H_U(\lambda_1) = [A - \lambda_1 I \ B] = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 9 & 2 \\ 6 & -3 & 6 & 1 \\ -6 & 3 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_U(\lambda_2) = [A - \lambda_2 I \ B] = \begin{bmatrix} 9 - 3i & -6 & 9 & 2 \\ 6 & -3 - 3i & 6 & 1 \\ -6 & 3 & -6 - 3i & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_U(\lambda_3) = [A - \lambda_3 I \ B] = \begin{bmatrix} 9 + 3i & -6 & 9 & 2 \\ 6 & -3 + 3i & 6 & 1 \\ -6 & 3 & -6 + 3i & -1 \end{bmatrix}$$

Их ранги:

$$\begin{aligned}\text{rank}(H_U(\lambda_1)) &= 2 \\ \text{rank}(H_U(\lambda_2)) = \text{rank}(H_U(\lambda_3)) &= 3\end{aligned}$$

Соответственно, собственное число  $\lambda_1 = -2$  не управляемо, причем существование лишь одного такого числа согласуется с соотношением между рангом матрицы управляемости, равному двум, и размерностью пространства состояний, равной трем, - в итоге получилось лишь одно «неконтролируемое» направление.

Вычисление системы в жордановом базисе остаётся прежним, лишь за исключением полученного  $\hat{B}$ :

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Можно получить обратную матрицу  $T$ :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

В итоге компонент собственного числа  $\lambda_1$  в жордановом базисе  $\hat{B}_1 = 0$ , а значит, это собственное число не управляемо. Компоненты  $\hat{B}_2 = \hat{B}_3 = -1$  же отвечают за управляемость комплексно-сопряженных собственных чисел  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ , хотя бы один из элементов  $\hat{B}_2$  и  $\hat{B}_3$  не равен нулю, а значит, соответствующие им собственные числа управляемы. Таким образом, опять приходим к тому, что система является частично управляемой.

Найдем Грамиан управляемости в момент времени  $t = t_1 = 3$ :

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} BB^T e^{A^T t} dt \approx \begin{bmatrix} 0.971 & 0.587 & -0.587 \\ 0.587 & 0.365 & -0.365 \\ -0.587 & -0.365 & 0.365 \end{bmatrix}$$

Его собственные числа:

$$\lambda_1 = 1.68910631 \approx 1.689, \quad \lambda_2 = 0.0128081396 \approx 0.013$$

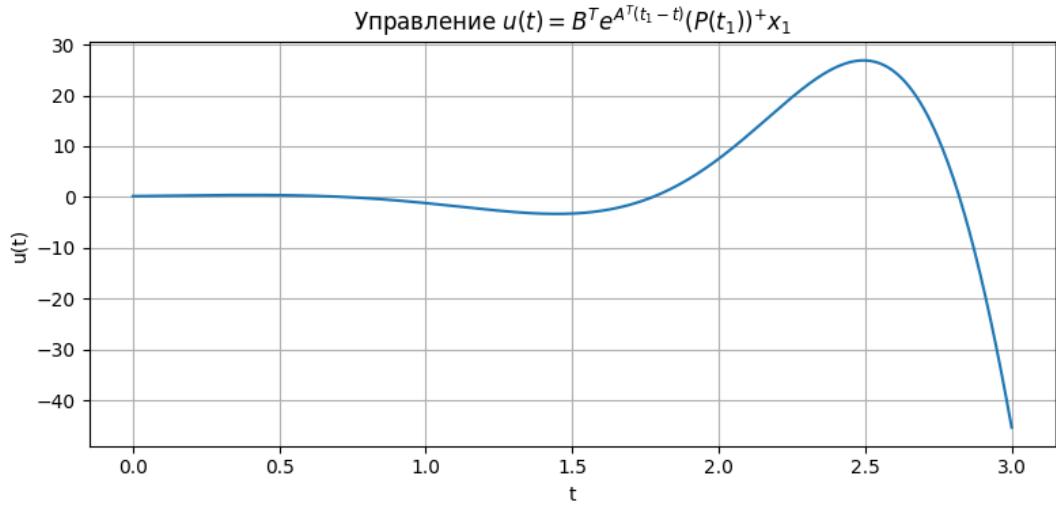
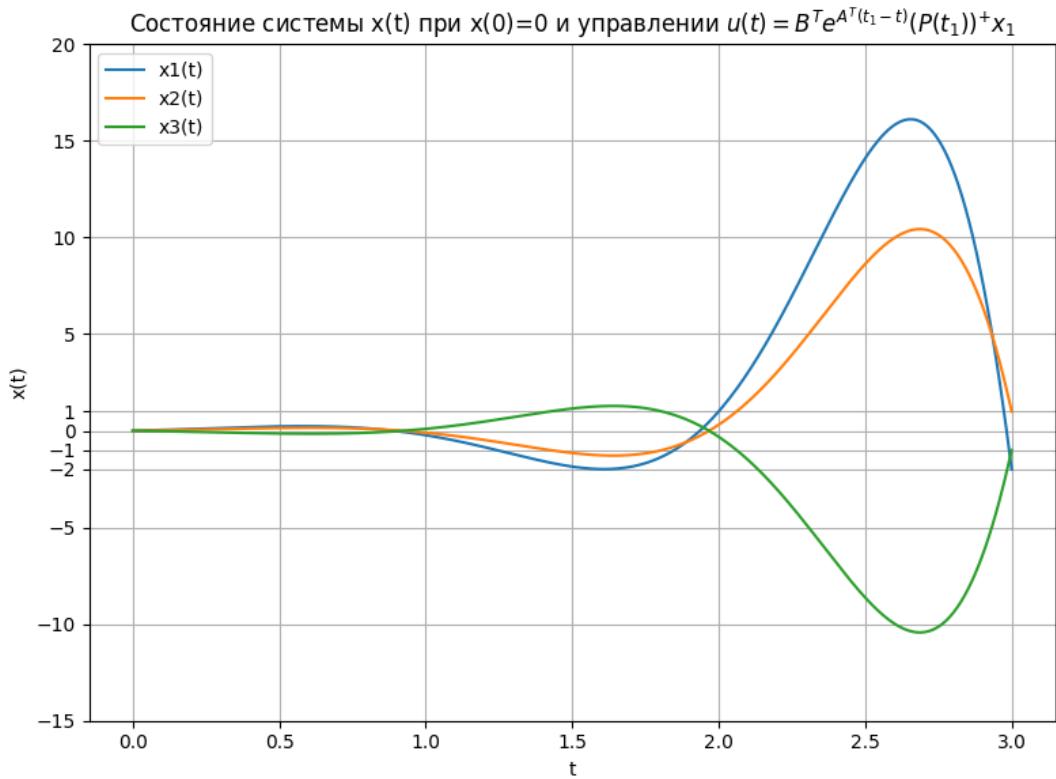
$$\lambda_3 = 0$$

Одно из собственных чисел оказалось равно 0, а значит грамиан управляемости не положительно определен. Это вносит некоторые корректизы в вычисление управления, переводящего систему из нулевых начальных условий  $x(0) = 0$  в состояние  $x(t_1) = x_1$  за всё то же желаемое время  $t = t_1 = 3$ . Так как теперь обратной матрицы от  $P(t_1)$  не существует, нужно находить псевдообратную и вычислять программное управление уже по формуле:

$$\begin{aligned} u(t) &= B^T e^{A^T(t_1-t)} (P(t_1))^+ x_1 = \\ &= -\frac{3190087543359489 + 5379344853786521i}{140737488355328} e^{(2-3i)t-6+9i} - \\ &\quad - \frac{3190087543359489 - 5379344853786521i}{140737488355328} e^{(2+3i)t-6-9i} \end{aligned}$$

Все соответствующие вычисления управления  $u(t)$  были произведены в MATLAB. График  $u(t)$  при  $x(0) = 0$  и  $x(t_1) = x_1$  приведен на рисунке 3, а график состояния системы  $x(t)$  при нулевых начальных условиях и найденном управлении  $u(t)$  приведен на рисунке 4. Видим, что по итогу система достигла заданного состояния  $x(t_1) = x_1$  за необходимое время  $t_1 = 3$ .

Таким образом, показали - изменения матрицы управления  $B$  закономерно приводят к изменениям и в качестве управления системы. Изначально полностью управляемая система с матрицей  $B = [-2, -1, 2]^T$  при её изменении на  $[2, 1, -1]^T$  оказалась уже частично управляемой как по критерию Калмана, так и по управляемости собственных чисел, вычислению соответствующих матриц Хаутуса ( $\lambda_1$  оказалось не управляемо, а  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  - управляемы). Также было получено, что  $x'_1$  принадлежит управляемому подпространству, а  $x''_1$  - нет. Грамиан управляемости в исследуемый момент времени  $t = t_1 = 3$  оказался не положительно определён, что потребовало

Рис. 3: Управление  $u(t)$  при неполной управляемостиРис. 4: Состояние системы  $x(t)$  при неполной управляемости

использования псевдообратной матрицы для вычисления управления  $u(t)$ , позволившего перевести систему с нулевыми начальными условиями в  $x(t_1) = x_1$  за необходимое время. Все результаты подтвердились моделированием.

### 3 Исследование наблюдаемости

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

В соответствии с вариантом матрицы  $A$  и  $C$  заданы как:

$$A = \begin{bmatrix} -21 & -38 & 6 \\ 8 & 13 & -4 \\ -6 & -14 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = [9 \ 18 \ -2]$$

Выполним анализ наблюдаемости. Для этого сначала вычислим матрицу наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 & -2 \\ -33 & -80 & -16 \\ 149 & 438 & 138 \end{bmatrix}$$

А после  $\text{rank}(V) = 3$ . Так как ранг матрицы наблюдаемости оказался равен размерности пространства состояний, то система является полностью наблюдаемой по критерию Калмана.

Можно и иначе! Найдем собственные числа матрицы  $A$ :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -5 + 2i, \quad \lambda_3 = -5 - 2i$$

Исследуем их на наблюдаемость. Для этого вычислим соответствующие матрицы Хаутуса:

$$H_V(\lambda_i) = \begin{bmatrix} A - \lambda_i I \\ C \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
H_V(\lambda_1) &= \begin{bmatrix} -21 - (1) & -38 & 6 \\ 8 & 13 - (1) & -4 \\ -6 & -14 & -1 - (1) \\ 9 & 18 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & -38 & 6 \\ 8 & 12 & -4 \\ -6 & -14 & -2 \\ 9 & 18 & -2 \end{bmatrix} \\
H_V(\lambda_2) &= \begin{bmatrix} -21 - (-5 + 2i) & -38 & 6 \\ 8 & 13 - (-5 + 2i) & -4 \\ -6 & -14 & -1 - (-5 + 2i) \\ 9 & 18 & -2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -16 - 2i & -38 & 6 \\ 8 & 18 - 2i & -4 \\ -6 & -14 & 4 - 2i \\ 9 & 18 & -2 \end{bmatrix} \\
H_V(\lambda_3) &= \begin{bmatrix} -21 - (-5 - 2i) & -38 & 6 \\ 8 & 13 - (-5 - 2i) & -4 \\ -6 & -14 & -1 - (-5 - 2i) \\ 9 & 18 & -2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -16 + 2i & -38 & 6 \\ 8 & 18 + 2i & -4 \\ -6 & -14 & 4 + 2i \\ 9 & 18 & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Для всех трёх  $\lambda_i$  выполнено:

$$\text{rank}(H_V(\lambda_i)) = 3$$

Таким образом, все собственные числа являются наблюдаемыми, а значит, сама система полностью наблюдаема.

Проверим данное ещё раз через *вещественную* Жорданову форму матрицы  $A$  и соответствующую матрицу перехода  $T$ :

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Можно получить обратную матрицу  $T$ :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\hat{C} = CT = [9 \ 20 \ 11]$$

Для каждой жордановой клетки первый столбец (а для мнимых чисел - хотя бы один из первых двух столбцов) соответствующего блока в  $\hat{C}$  ненулевой, а значит, все собственные числа являются наблюдаемыми, система - полностью наблюдаемой.

Для наблюдаемых систем возможно единственным образом восстановить начальное состояние по выходу, матрице наблюдаемости и матрице системы. Считая, что выход системы  $y(t) = Cx(t)$  подчиняется закону  $y(t) = f(t) = 3e^{-5t} \cos(2t) - e^{-5t} \sin(2t)$  на временном отрезке  $t \in [0, t_1] = [0, 3]$ , определим начальные условия системы. Для начала вычислим грамиан наблюдаемости относительно времени  $t = t_1 = 3$ :

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \approx \begin{bmatrix} 815.02 & 1627.79 & -809.9 \\ 1627.79 & 3251.44 & -1618.07 \\ -809.9 & -1618.07 & 808 \end{bmatrix}$$

Его собственные числа:

$$\lambda_1 = 4872.01653 \approx 4872.02, \quad \lambda_2 = 0.0570726112 \approx 0.057$$

$$\lambda_3 = 2.37863082 \approx 2.38$$

Так как все собственные числа положительны, а грамиан наблюдаемости - симметричная матрица, то  $Q(t_1)$  положительно определён и существует обратная матрица (что также следует из полной наблюдаемости), а значит, восстановить начальное состояние, соответствующее выходу  $y(t) = f(t)$ , возможно по формуле:

$$x(0) = (Q(t_1))^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt = \begin{bmatrix} 2.83447514 \\ 5.35515718 \\ -1.31378549 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2.834 \\ 5.355 \\ -1.314 \end{bmatrix}$$

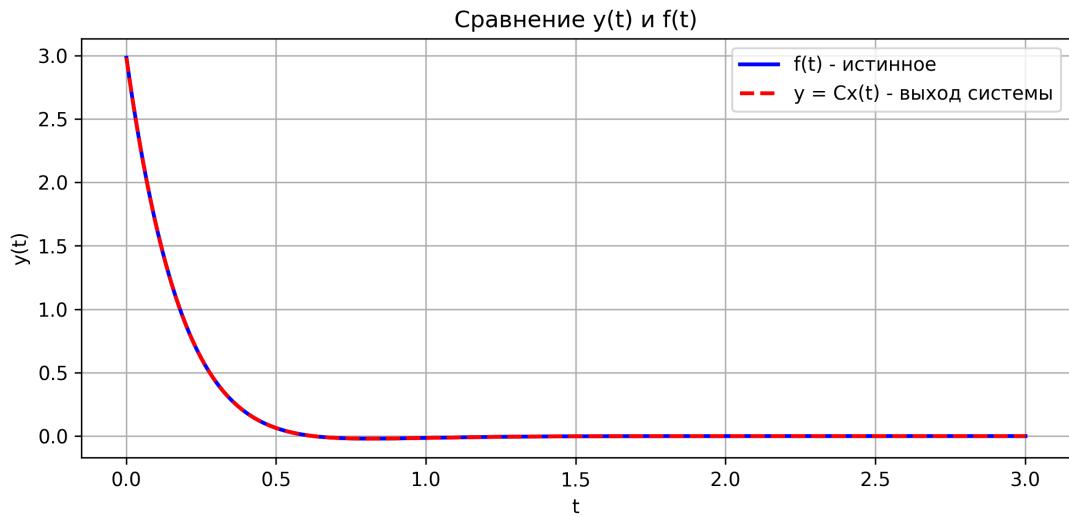
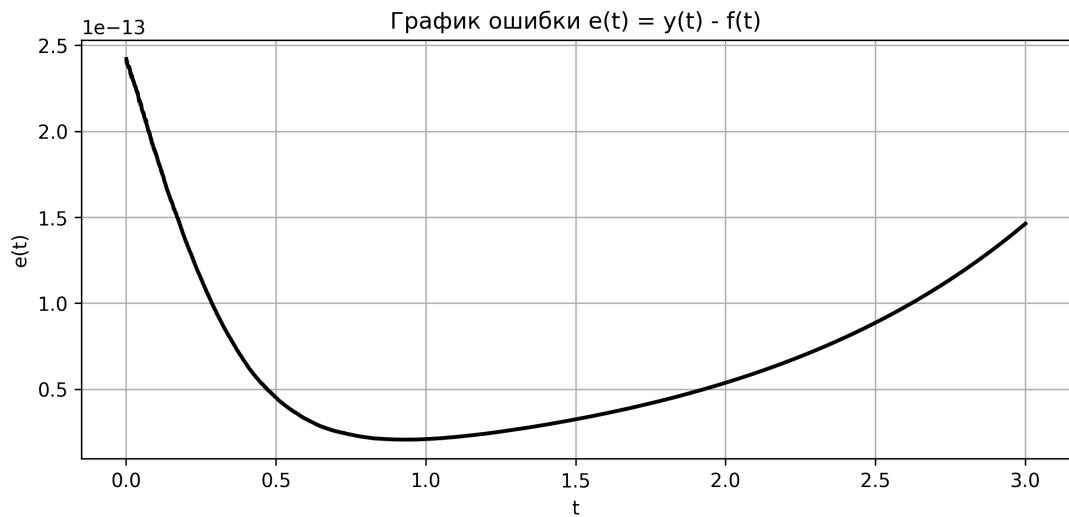
Рис. 5: График функции  $y(t)$  и  $f(t)$  при полной наблюдаемостиРис. 6: График ошибки  $e(t) = y(t) - f(t)$  при полной наблюдаемости

График функции  $y(t)$  и  $f(t)$  восстановленного начального состояния приведен на рисунке 5, а график ошибки  $e(t) = y(t) - f(t)$  восстановленного начального состояния приведен на рисунке 6. Видим, что моделируемый выход системы  $y(t) = Cx(t)$  и заданный  $f(t)$  практически совпадают, а ошибка в целом *крайне* мала.

В итоге система является полностью наблюдаемой, это подтверждается как критерием Калмана, так и исследованиями матриц Хаутуса для всех (наблюдаемых) собственных чисел и Жордановой формы системы с матрицами  $\hat{A}$  и  $\hat{C}$ . Грамиан наблюдаемости в исследуемый момент времени  $t = t_1 = 3$  также оказался положительно определен, что ещё раз подтвердило наблюдаемость системы и позволило найти восстановленное начальное состояние системы по выходу. Все результаты подтвердились моделированием.

## 4 Ещё одно исследование наблюдаемости

Будем рассматривать всё ту же систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

Матрицу  $A$  оставим той же,  $C$  изменим, получив:

$$A = \begin{bmatrix} -21 & -38 & 6 \\ 8 & 13 & -4 \\ -6 & -14 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = [7 \ 14 \ 0]$$

Проведем анализ наблюдаемости с этими изменениями. Для этого сначала вычислим матрицу наблюдаемости

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = 7140 - 35 - 84 - 14147434140$$

Ранг матрицы наблюдаемости  $\text{rank}(V) = 2$ , а значит, система уже не является полностью наблюдаемой по критерию Калмана. Исследуем систему на наблюдаемость более детально. Найдем собственные

числа матрицы  $A$  системы:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -5 + 2i, \quad \lambda_3 = -5 - 2i$$

Для каждого собственного числа  $\lambda_i$  построим матрицу Хаутуса:

$$H_V(\lambda_1) = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & -38 & 6 \\ 8 & 12 & -4 \\ -6 & -14 & -2 \\ 7 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_V(\lambda_2) = \begin{bmatrix} -16 - 2i & -38 & 6 \\ 8 & 18 - 2i & -4 \\ -6 & -14 & 4 - 2i \\ 7 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_V(\lambda_3) = \begin{bmatrix} -16 + 2i & -38 & 6 \\ 8 & 18 + 2i & -4 \\ -6 & -14 & 4 + 2i \\ 7 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

Их ранги:

$$\text{rank}(H_V(\lambda_1)) = 2$$

$$\text{rank}(H_V(\lambda_2)) = \text{rank}(H_V(\lambda_3)) = 3$$

Таким образом, собственное число  $\lambda_1 = 1$  не наблюдаемо, а  $\lambda_{23}$  - наблюдаемы. Это порождает ненаблюдаемое подпространство системы, в данном случае - линейную оболочку над собственным вектором  $v = [2, -1, 1]^T$ , соответствующего  $\lambda_1$ . Вектор  $v$  также порождает ядро матрицы наблюдаемости системы и качественно отличается от остальных векторов тем, что  $CA^k v = 0$  для любого  $k \leq 2 = n - 1$  (или, что эквивалентно, при умножении на  $C$  зануляется матричная экспонента от  $A$ , как раз и порождающая всю динамику системы и в любой момент времени раскладываясь в линейную комбинацию степеней матрицы  $A$  до  $n - 1$  включительно, где  $n$  - размерность пространства состояний системы).

Так как существует только одно ненаблюдаемое собственное число, то система уже не является полностью наблюдаемой.

Найдем теперь *вещественную* Жорданову форму матрицы  $A$  и матрицу перехода  $T$  (матрица  $A$  не изменилась - всё по-прежнему):

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Можно получить обратную матрицу  $T$ :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\hat{C} = CT = [0 \ 7 \ 0]$$

Получили  $\hat{C}_1 = 0$ , а значит, собственное число  $\lambda_1 = 1$  не наблюдаемо. Далее для двух мнимых собственных чисел  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  получили  $\hat{C}_2 = 7$  и  $\hat{C}_3 = 0$ . Они являются комплексно-сопряженными, а значит, для наблюдаемости достаточно лишь чтобы хотя бы один из элементов  $\hat{C}_2$  и  $\hat{C}_3$  был ненулевым. Это выполняется, поэтому  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  наблюдаемы. Таким образом, система в очередной раз является *частично наблюдаемой*.

Так как система не является полностью наблюдаемой, то *однозначно* восстановить начальное состояние по выходу, матрице наблюдаемости и матрице системы невозможно. Продемонстрируем это на примере.

Возьмем всё тот же выход системы  $y(t) = f(t) = 3e^{-5t} \cos(2t) - e^{-5t} \sin(2t)$  на временном отрезке  $t \in [0, t_1] = [0, 3]$ . Определим начальные условия системы, которые могли бы породить такой выход. Для начала вычислим грамиан наблюдаемости системы  $Q(t)$  относительно времени  $t = t_1 = 3$ :

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \approx \begin{bmatrix} 4.562 & 8.279 & -0.845 \\ 8.279 & 15.207 & -1.352 \\ -0.845 & -1.352 & 0.338 \end{bmatrix}$$

Его собственные числа:

$$\lambda_1 = 19.8567251 \approx 19.857, \quad \lambda_2 = 0.250171475 \approx 0.25$$

$$\lambda_3 \approx 0$$

Одно из собственных чисел оказалось равно 0, а значит грамиан наблюдаемости не положительно определен. Начальное состояние, порождающее заданный выход  $f(t)$ , в таком случае можно вычислить через псевдообратную матрицу от  $Q(t_1)$  по формуле:

$$x(0) = (Q(t_1))^\dagger \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt = \begin{bmatrix} 0.0952381 \\ 0.16666667 \\ -0.02380952 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.095 \\ 0.167 \\ -0.024 \end{bmatrix}$$

Альтернативные состояния системы, порождающие тот же выход  $f(t)$ , можно строить, добавляя произвольную линейную комбинацию из векторов ненаблюдаемого подпространства системы, так как:

$$CA^k(x(t) + \alpha v) = CA^k x(t) + \alpha CA^k v = CA^k x(t) \text{ для любого } k \leq 2$$

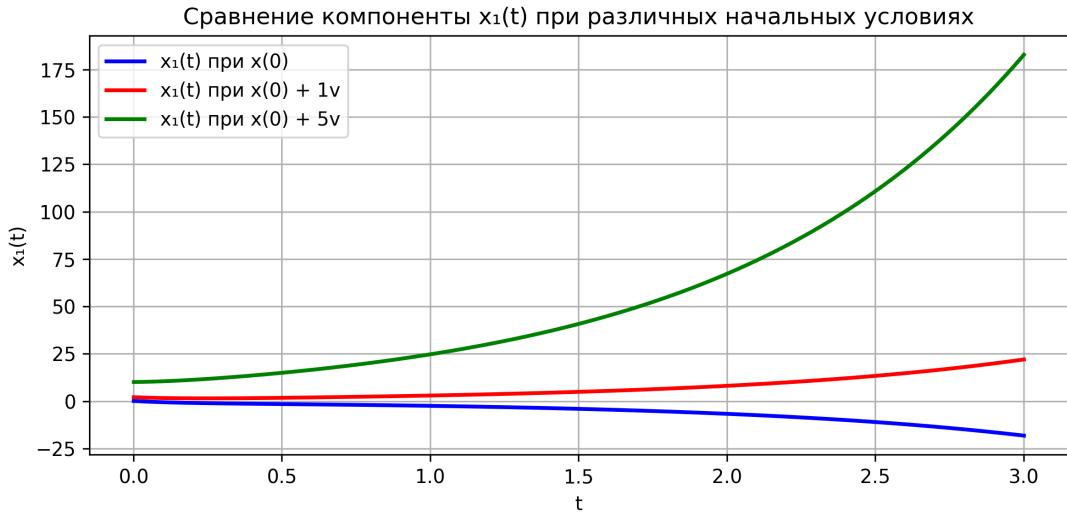
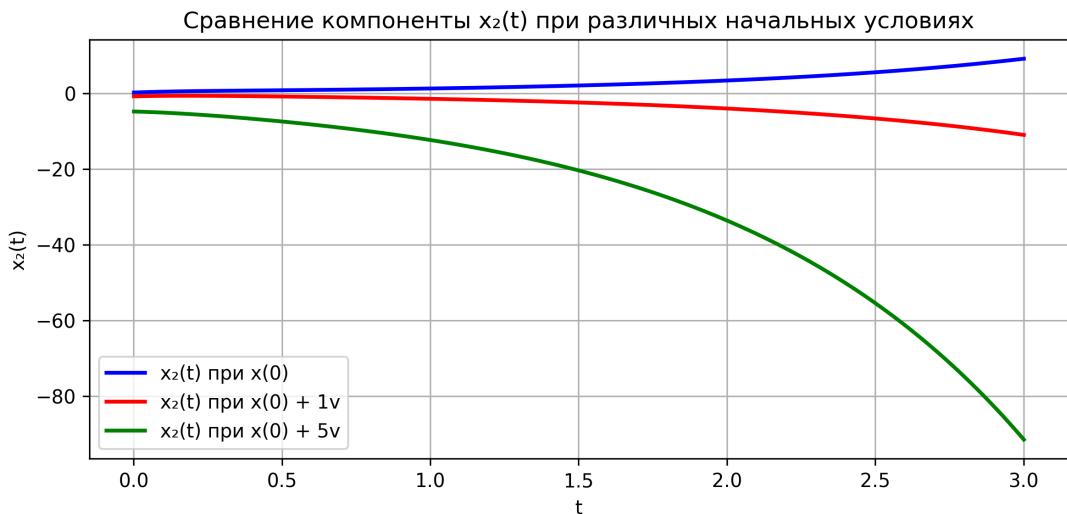
Здесь работает всё то же зануление умножения матричной экспоненты от  $A$  на матрицу  $C$  с логикой, озвученной для вектора  $v$  выше. Пусть  $\alpha = 1$ , тогда альтернативное начальное состояние системы при  $v = [2, -1, 1]^T$ , соответствующем ненаблюдаемому  $\lambda_1$ , будет:

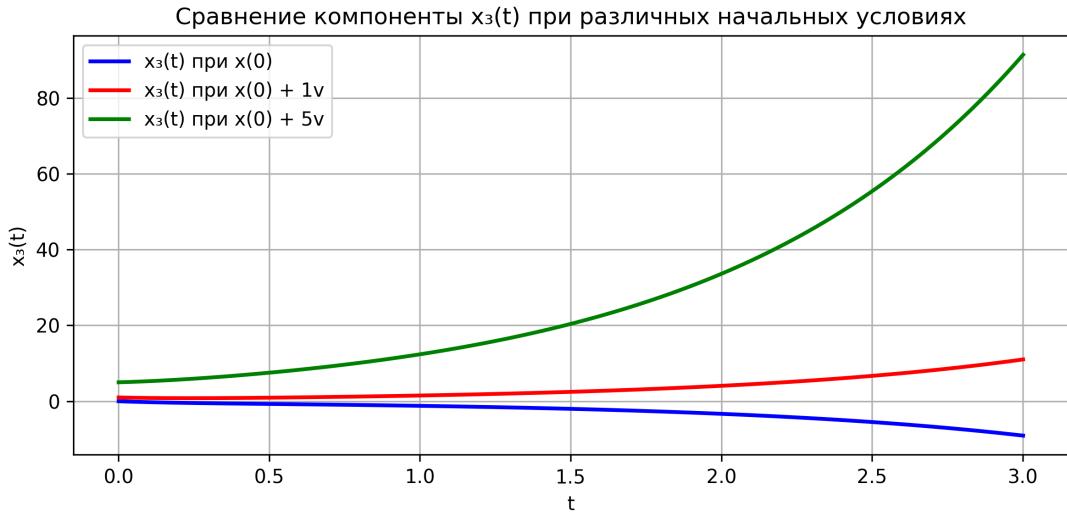
$$x'(0) = x(0) + v = \begin{bmatrix} 0.095 \\ 0.167 \\ -0.024 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2.095 \\ -0.833 \\ 0.976 \end{bmatrix}$$

Во все моменты времени  $t \in [0, t_1]$   $x(0)$  и  $x'(0)$  будут давать одинаковые выходы  $f(t)$ , так как динамика от  $v$  не будет влиять на выход  $y(t) = Cx(t)$  системы.

Аналогично можно найти:

$$x''(0) = x(0) + 5v = \begin{bmatrix} 0.095 \\ 0.167 \\ -0.024 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 10.095 \\ -4.833 \\ 4.976 \end{bmatrix}$$

Рис. 7: Графики компоненты  $x_1(t)$  состояния системы  $x(t)$ Рис. 8: График компоненты  $x_2(t)$  состояния системы  $x(t)$

Рис. 9: График компоненты  $x_3(t)$  состояния системы  $x(t)$ Рис. 10: Графики выхода системы  $y(t)$  при различных начальных условиях

Проведем моделирование системы с начальными условиями  $x(0)$ ,  $x'(0)$  и  $x''(0)$  и сравним выходы системы. Результаты приведены на рисунках 7, 8 и 9 для компонент состояния  $x(t)$ , а на рисунке 10 для выхода системы  $y(t)$ .

Можем видеть, что графики компонент состояния  $x(t)$  при различных начальных условиях полностью различны, а выход системы  $y(t)$  при различных начальных условиях практически совпадают.

Таким образом, система оказалось частично наблюдаемой, причем ненаблюдаемое подпространство порождается собственным вектором  $v = [2, -1, 1]^T$ , соответствующим ненаблюдаемому  $\lambda_1 = 1$ , что позволило найти неоднозначное начальное состояние, порождающее тот же выход данный выход  $f(t)$ .  $x(0)$  было найдено через псевдообратную матрицу, так как грамиан наблюдаемости оказался не положительно определен, а  $x'(0)$  и  $x''(0)$  были найдены путем добавления к нему вектора  $v$ . Также провелось моделирование системы с различными начальными условиями, подтвердившее все полученные выводы и результаты.

## 5 Управляемость по выходу

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

В соответствии с вариантом, матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 9 \\ 6 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Найдем вещественную Жорданову форму системы и матрицу  $T$  для перехода к ней:

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Можно получить обратную матрицу  $T$ :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда система в жордановом базисе задается уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + Du \end{cases}$$

Воспользуемся полученными матрицами  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  для анализа управляемости и наблюдаемости системы.

Исходя из матрицы  $\hat{B}$ , делаем вывод, что первое собственное число не управляемо, а второе и третье управляемы, так как  $\hat{B}_1 = 0$ , а для пары комплексно-сопряженных собственных чисел хотя бы один из  $\hat{B}_2$  и  $\hat{B}_3$  не равен нулю. Это также даёт, что система является лишь частично управляемой.

Исходя из матрицы  $\hat{C}$ , делаем вывод, что все собственные числа наблюдаются, так как столбец  $\hat{C}_1 = [1, 0]^T \neq 0$ , соответствующий первому собственному числу, а для пары комплексно-сопряженных собственных чисел хотя бы один из столбцов  $\hat{C}_2$  и  $\hat{C}_3$  не равен нулю ( $\hat{C}_2 = [2, 3]^T \neq 0$ ). Из всего этого также делаем вывод о том, что система является полностью наблюдаемой.

Рассмотрим систему с точки зрения качества управляемости по выходу, означающей способность системы достичь любого выходного сигнала  $y(t)$  вне зависимости от того, на какие составляющие вектора состояния  $[x_1, \dots, x_n]^T$  мы можем воздействовать, а на какие - нет. То есть уже рассматривается качество управления именно

на «проекцию» системы на выход, а не на все её внутренности целиком, которые в рассматриваемом случае, как было получено ранее, являются лишь частично управляемыми.

Проверка управляемости по выходу подразумевает под нахождение ранга матрицы  $U_{out} = [CU D]$ , где  $U$  - матрица управляемости. Пусть мы не воздействуем на выход через управление напрямую, тогда  $D = 0_{2 \times 1}$  и матрица принимает вид:

$$U_{out} = \begin{bmatrix} 0 & -12 & 48 & 0 \\ 0 & -18 & 72 & 0 \end{bmatrix}$$

Можем видеть, что  $\text{rank}(U_{out}) = 1 < 2$  = размерность выхода. Это означает, что система не является управляемой по выходу. Заметим, что данное можно было получить ещё на шаге вычисления матриц в жордановом базисе, так как  $\hat{C}_1 \neq 0$ , а  $\hat{B}_1 = 0$  (наблюдаем первое собственное число, но не влияем на него - не контролируем выход полностью).

Матрица  $D$  помогает воздействовать на выход напрямую, без посредника в виде вектора-состояния. Получается, правильно задав  $D$ , можно добиться управляемости по выходу, пусть система и будет по-прежнему частично управляемой.

По критерию управляемости для выхода необходимо, чтобы ранг матрицы  $U_{out} = [CU D]$  был равен размерности выхода ( $= 2$  в нашем случае). То есть достаточно заменить  $D = 0_{2 \times 1}$ , проявляющуюся в последнем столбце матрицы  $U_{out}$ , на линейно-независимый вектор от  $[-12, -18]^T$ . Можно взять любой, удовлетворяющий этому условию, так что вектор  $D' = [1, 1]^T$  будет отлично подходить, давая по итогу управляемую систему по выходу.

В итоге для обеспечения полной управляемости по выходу необходимо использовать матрицу  $D$ , увеличивающую ранг матрицы  $U_{out}$  до размерности выхода. При  $D \neq 0$  вход системы  $u(t)$  начинает оказывать прямое влияние на  $y(t)$ , помогая увеличивать качество управления по выходу.

## 6 Общие выводы

В результате выполнения лабораторной работы были проведены исследования управляемости и наблюдаемости систем. В первом пункте получено, что система является полностью управляемой, что дало возможность построить управление, переводящее систему из любого состояния  $x(0)$  в любое другое  $x(t_1) = x_1$  за время  $t = t_1$ . Во втором пункте получено, что изменения матрицы управления  $B$  действительно влияют на качество управляемости системы, пришлось изменить подход (использовать псевдообратные матрицы) к вычислению управления для достижения состояния  $x_1$  из управляемого подпространства в заданное время  $t_1$ .

В третьем пункте получено, что система является полностью наблюдаемой, что дало возможность восстановить начальное состояние системы по выходу и матрице наблюдаемости. В четвертом пункте получено, что система является частично наблюдаемой, что дало возможность найти в каком-то смысле эквивалентные начальные состояния, порождающие один и тот же выход  $f(t)$ .

В пятом пункте получено, что система является неуправляемой по выходу, были приведены причины этого и найдена матрица  $D'$ , всё же позволяющая добиться управляемости по выходу.