

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ  
по дисциплине  
*«Планирование траекторий движения»*

по теме:  
АЛГОРИТМЫ СЛЕЖЕНИЯ ЗА ТРАЕКТОРИЕЙ

Выполнили:

*Группа № R3340*

*Группа № R3480*

*Гридусов Д.Д*

*Мовчан И.Е*

Предподаватель:

*Краснов А.Ю*

Санкт-Петербург  
2025

## СОДЕРЖАНИЕ

1	ВВЕДЕНИЕ .....	3
2	ДИНАМИЧЕСКАЯ ПОЗИЦИОННАЯ МОДЕЛЬ .....	4
3	ОПИСАНИЕ ТРАЕКТОРИИ .....	5
4	РЕГУЛЯТОР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО СОСТОЯНИЮ .....	6
5	РЕГУЛЯТОР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО СОСТОЯНИЮ .....	9

# 1 ВВЕДЕНИЕ

**Цель работы:** Исследование алгоритмов отслеживания траектории плоского движения колесных мобильных роботов с ограниченной мобильностью.

Рассматривается колесный мобильный робот с ограниченной подвижностью. Для решения задачи слежения за точкой необходимо разработать следящий закон управления на основе линеаризации обратной связи.

## 2 ДИНАМИЧЕСКАЯ ПОЗИЦИОННАЯ МОДЕЛЬ

В соответствии с вариантом, наш тип четырехколесного робота - (1, 1).  
Конфигурация робота:

- $\delta_s = \delta_m = 1$
- $\beta_{s1} = \beta_{s2} = \beta_s$  (рулевые колеса синхронизированы)

Кинематическая модель системы в пространстве состояний задаётся следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = R^T(v)\Sigma(\beta_s)\eta \\ \dot{\beta}_s = \zeta \end{cases}$$

где для нашего робота:

$$R(v) = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma(\beta_s) = \begin{bmatrix} 0 \\ L \sin(\beta_s) \\ \cos(\beta_s) \end{bmatrix}$$
$$\zeta = [\zeta_1], \quad \eta = [\eta_1]$$

Для динамической модели имеем систему вида:

$$\begin{cases} \dot{z} = B(z)u \\ \dot{u} = v \end{cases}$$

где  $B(z) = \begin{bmatrix} R^T(v)\Sigma(\beta_s) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ ,  $z = \begin{bmatrix} \xi \\ \beta_s \end{bmatrix}$ ,  $u = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$ ,  $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ .

Управляющие воздействия  $v$  эквивалентны моментам сил,  $\eta$  – обобщенная скорость,  $\zeta$  – скорость изменения угла рулевого колеса.

### 3 ОПИСАНИЕ ТРАЕКТОРИИ

Движение начинается с начальной позиции  $\xi_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$ . Сначала мобильный робот должен пройти по окружности радиусом  $R = 6$  расстояние, эквивалентное изменению азимута точки слежения на  $\delta = 2\pi$  радиан в положительном направлении. Затем мобильный робот должен развернуться на  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  радиан и идти по прямой в течение  $t = 5$  секунд. После этого мобильный робот должен совершить круговое движение радиусом  $R_2 = 10$  по часовой стрелке.

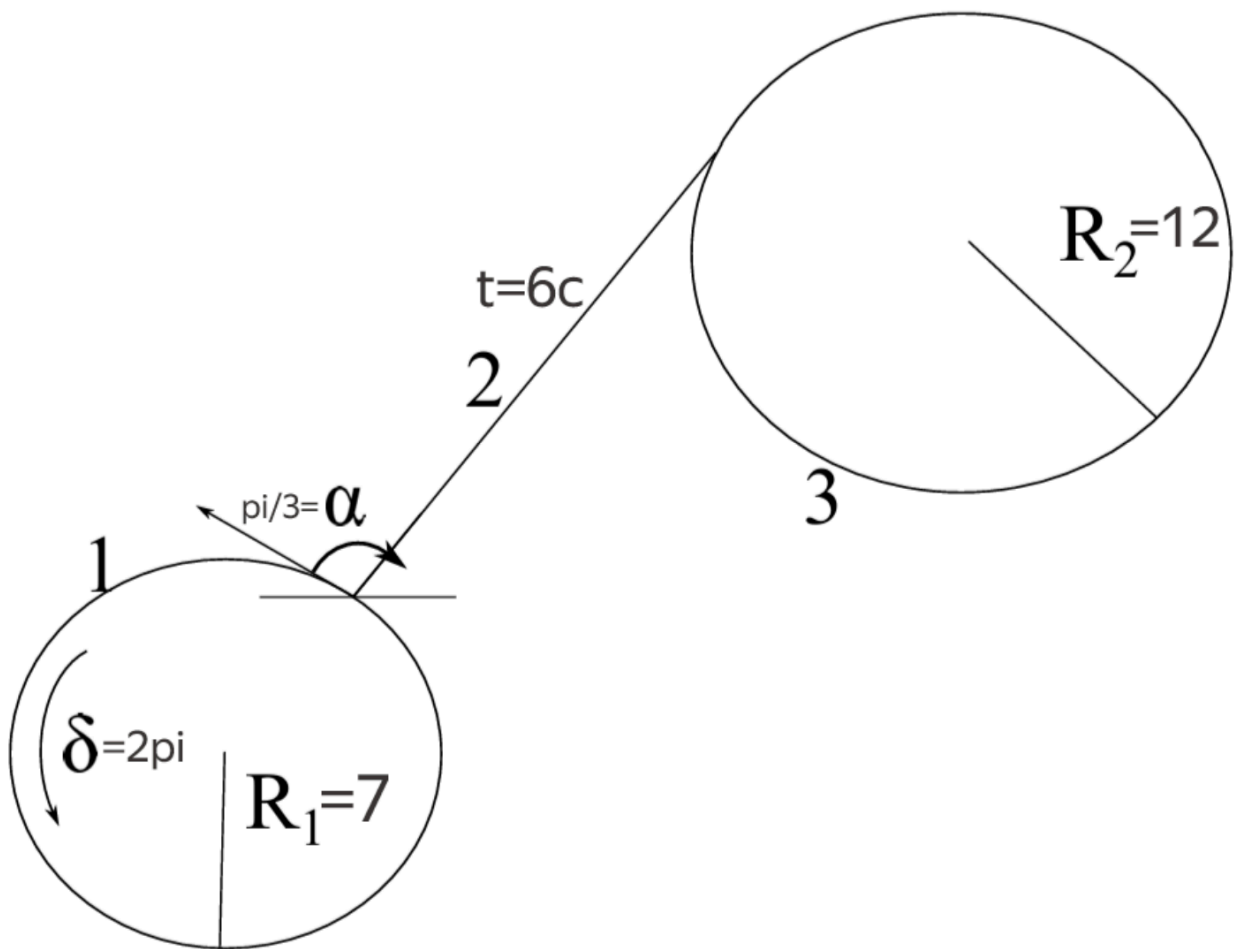


Рисунок 1 — Вид траектории

## 4 РЕГУЛЯТОР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО СОСТОЯНИЮ

Позиционная динамическая модель:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = R^T(v)\Sigma(\beta_s)\eta \\ \dot{\beta}_s = \zeta \\ \dot{\eta} = v_1 \\ \dot{\zeta} = v_2 \end{cases}$$

В ряде случаев достаточно управлять только положением фиксированной точки  $P'$  на тележке мобильного робота. Полярные координаты этой точки в подвижном базисе обозначаются как  $(e, \delta)$ . Декартовы координаты точки  $P'$  в опорном базисе тогда описываются выражением

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + e \cos(\vartheta + \delta) \\ y + e \sin(\vartheta + \delta) \end{bmatrix}.$$

Такая модель при помощи ОС по состоянию и диффеоморфизма может быть преобразована в управляемую линейную подсистему и нелинейную подсистему вида:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= w \\ z_3 &= \overline{Q}(z_1, z_2)z_2 \end{aligned}$$

$w$  – вспомогательный моментный управляющий сигнал. Существует линеаризующая вектор-функция выходов:

$$z_1 = h(\xi, \beta_s) = h(z)$$

такая, что наибольшая линеаризуемая подсистема может быть получена путем двойного дифференцирования  $z_1$ :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{\partial h(z)}{\partial z} B(z)u = K(z)u \\ \ddot{z} &= K(z)v + g(z, U) \end{aligned}$$

где  $K(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(z)}{\partial \xi R^T(v) \Sigma(\beta_s)} & \frac{\partial h(z)}{\partial \beta_s} \end{bmatrix}$   
и  $g(z, u)$ :

$$g(z, u) = \frac{\partial}{\partial \xi} (K \begin{bmatrix} \xi^T & \beta_s^T \end{bmatrix}) R^T(v) \Sigma(\beta_s) \eta + \frac{\partial}{\partial \beta_s} (K \begin{bmatrix} \xi^T & \beta_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix})$$

Определим преобразование координат в виде:

$$z_1 = h(z)$$

$$z_2 = K(z)$$

$$z_3 = k(z)$$

Воспользуемся линеаризующими выходами для нашего робота:

$$z_1 = \begin{bmatrix} x + L \sin(v) + e \cos(v + \beta_s) \\ y - L \cos(v) + e \sin(v + \beta_s) \end{bmatrix}, z_3 = \begin{bmatrix} v \\ \beta_s \end{bmatrix}$$

Также запишем ограничение:  $e \neq 0$ .

В новых координатах получаем такую динамику:

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = \bar{g}(z_1, z_2, z_3) + \bar{K}(z_1, z_3) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{z}_3 = \bar{Q}(z_1, z_3) z_2$$

$\bar{g}, \bar{K}, \bar{Q}$  – представления соответствующих матриц в новых координатах,

$$Q(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial \xi} R^T(v) \Sigma(\beta_s) & \frac{\partial k}{\partial \beta_s} K^{-1}(z) \end{bmatrix}$$

Поскольку  $K(z)$  обратима, применим управление:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \bar{K}^{-1}(z_1, z_3) (w - \bar{g}(z_1, z_2, z_3))$$

При этом:

$$w = \ddot{z}_{1d}(t) - (\Lambda_1 + \Lambda_2) \dot{\tilde{z}}_1 - \Lambda_1 \Lambda_2 \tilde{z}_1,$$

где  $(z_{1d}, \dot{z}_{1d}, \ddot{z}_{1d})$  представляет собой опорную траекторию,  $\tilde{z}_1 = z_1 - z_{1d}$ ,  $\Lambda_1, \Lambda_2$  – произвольные положительные диагональные матрицы.

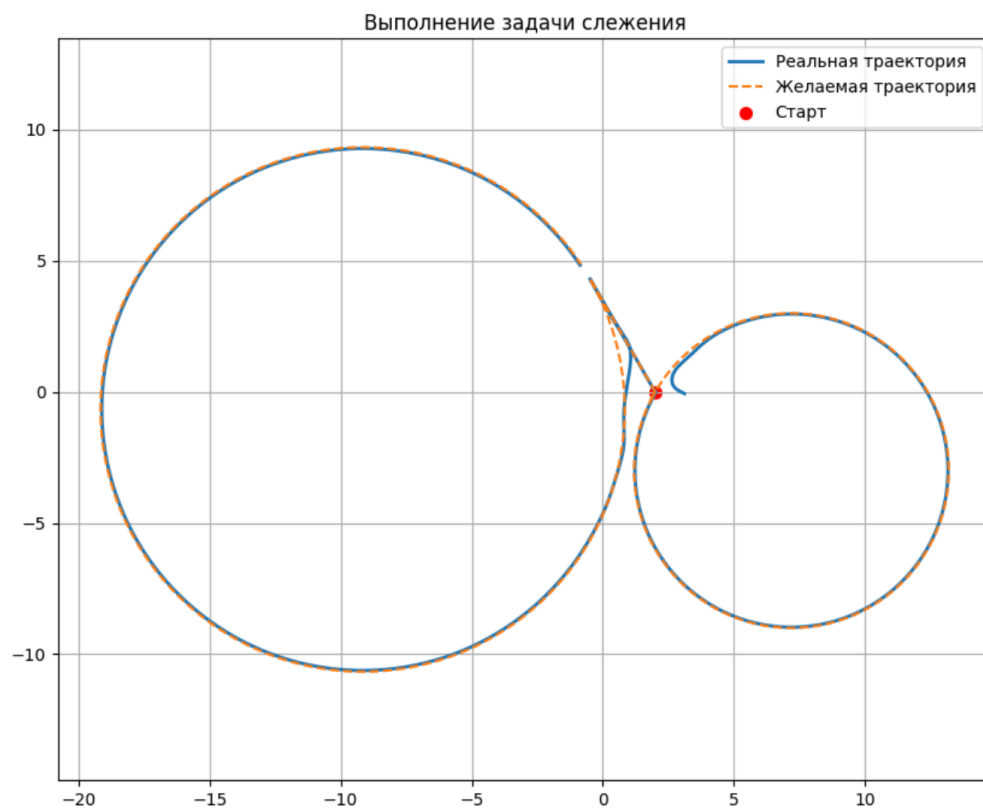


Рисунок 2 — Сравнение реальной и целевой траектории для статической обратной связи

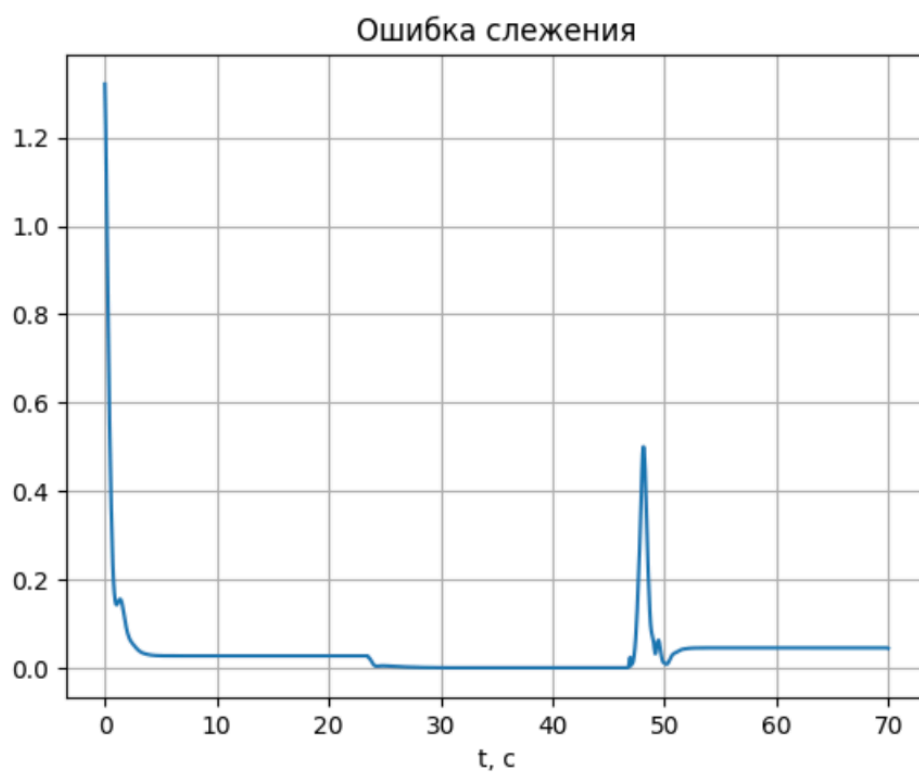


Рисунок 3 — Ошибка слежения при использовании статической обратной связи

## 5 РЕГУЛЯТОР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО СОСТОЯНИЮ

Рассмотрим динамическую систему, заданную в общей форме пространства состояний:

$$\dot{z} = f(z) + \sum_{i=1}^m g_i(z)u_i$$

Будем использовать более общие законы динамической обратной связи вида:

$$u = \alpha(z, \chi, w)$$

$$\dot{\chi} = a(z, \chi, w)$$

где  $w$  - вспомогательный управляющий вход. Такая динамическая ОС получается путем выбора  $m$  подходящих линеаризующих функций выходов:

$$y_i = h_i(z), \quad i = \overline{1, m}$$

Применим алгоритм динамического расширения. Идея в том, чтобы задерживать некоторые комбинации входов, одновременно влияющие на несколько выходов, путем добавления интеграторов – так мы позволим другим входам действовать в то же время и получим расширенную развязанную систему вида:

$$y_k^{r_k} = w_k, \quad k = \overline{1, m}$$

$y_k^{(i)}$  –  $i$ -ая производная по времени  $y_k$ ,  $r_k$  – относительная степень  $y_k$ , причем  $\sum_{i=1}^m r_i = n_e$ ,  $n_e$  – размерность расширенного вектора состояния  $z_e = \begin{bmatrix} z^T & \chi^T \end{bmatrix}^T$ ,  $w_k$  – новые вспомогательные входы.

Тогда

$$\zeta = \Phi(z_e) = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_1^{(r_1-1)} & \dots & y_m & \dots & y_m^{(r_m-1)} \end{bmatrix}$$

является локальным диффеоморфизмом. В случае нашего робота:

$$\begin{aligned} y_i = h_i(z) &= \begin{bmatrix} x + e \cos(v) \\ y + e \sin(v) \end{bmatrix} \\ z_e &= \begin{bmatrix} x & y & v & \beta_s & \eta_1 & \chi_2 \end{bmatrix}^T \\ \zeta = \Phi(z_e) &= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dot{h}_1 & \dot{h}_2 & \ddot{h}_1 & \ddot{h}_2 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

При ограничении  $\eta_1 \neq 0$ .

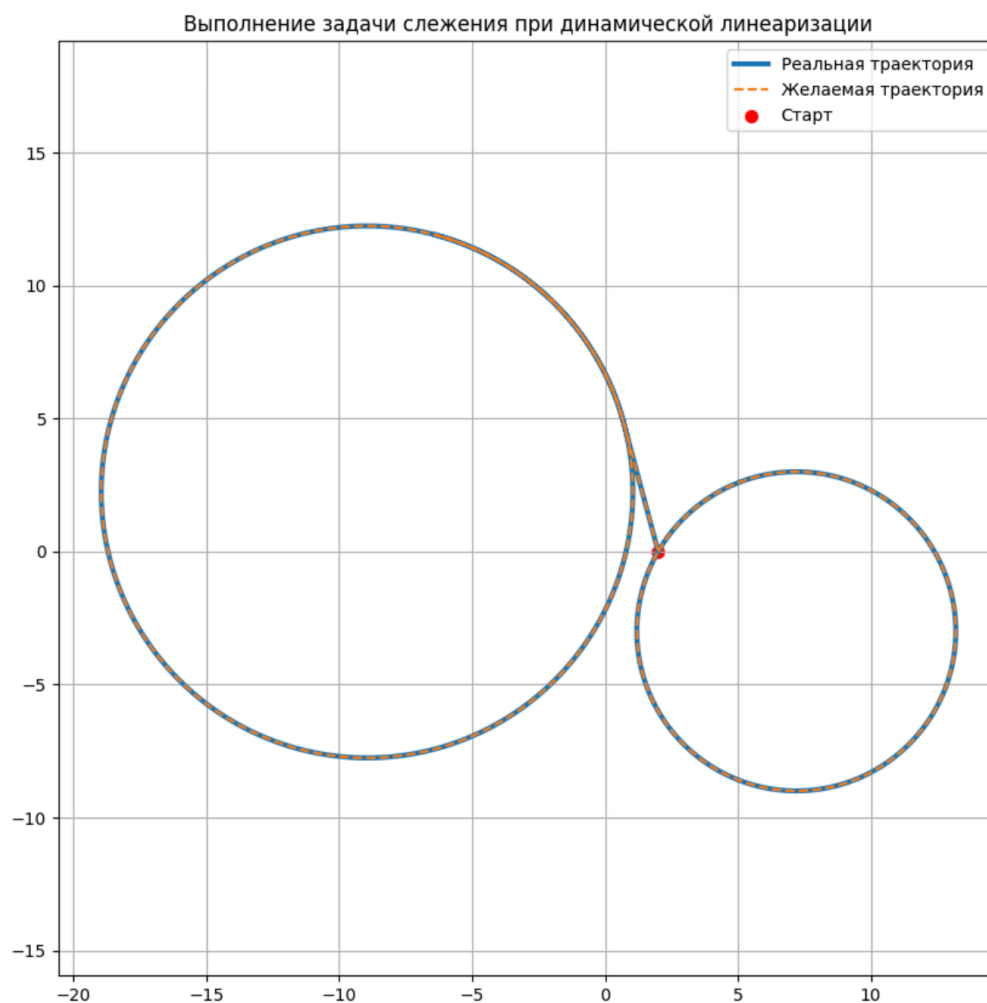


Рисунок 4 — Ошибка слежения при использовании динамической обратной связи

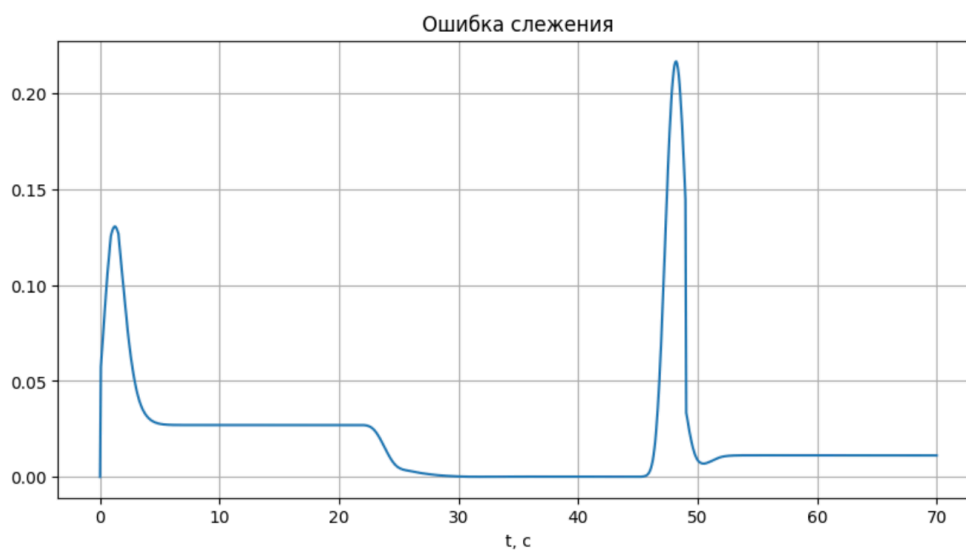


Рисунок 5 — Ошибка слежения при использовании статической обратной связи