

НАУЧНО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по лабораторной работе №1
Ряды Фурье

Выполнил студент группы Р3380
Преподаватели

Мовчан И.Е.
Пашенко А.В., Перегудин А.А.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

| | |
|--------------------------------------|-----------|
| 1 Вещественные функции | 2 |
| 1.1 Квадратная волна | 2 |
| 1.2 Чётная функция | 9 |
| 1.3 Нечётная функция | 14 |
| 1.4 Ни нечётная, ни чётная | 18 |
| 2 Комплексная функция | 23 |
| 3 Общие выводы | 30 |
| 4 Приложение | 31 |

1 Вещественные функции

Зададимся положительными числами $a = 1, b = 2, t_0 = 1, t_1 = 2, t_2 = 3$ и рассмотрим вещественные функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1.1 Квадратная волна

Начнём с базового, зададим $T = t_2 - t_0 = 2$ периодическую функцию следующего вида:

$$f(t) = \begin{cases} a, & t \in [t_0, t_1), \\ b, & t \in [t_1, t_2); \end{cases} \Rightarrow f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1, 2), \\ 2, & t \in [2, 3). \end{cases}$$

Все периодические функции с подобными квадратными пиками, мы и назовём *квадратной волной* (график на рисунке 1).

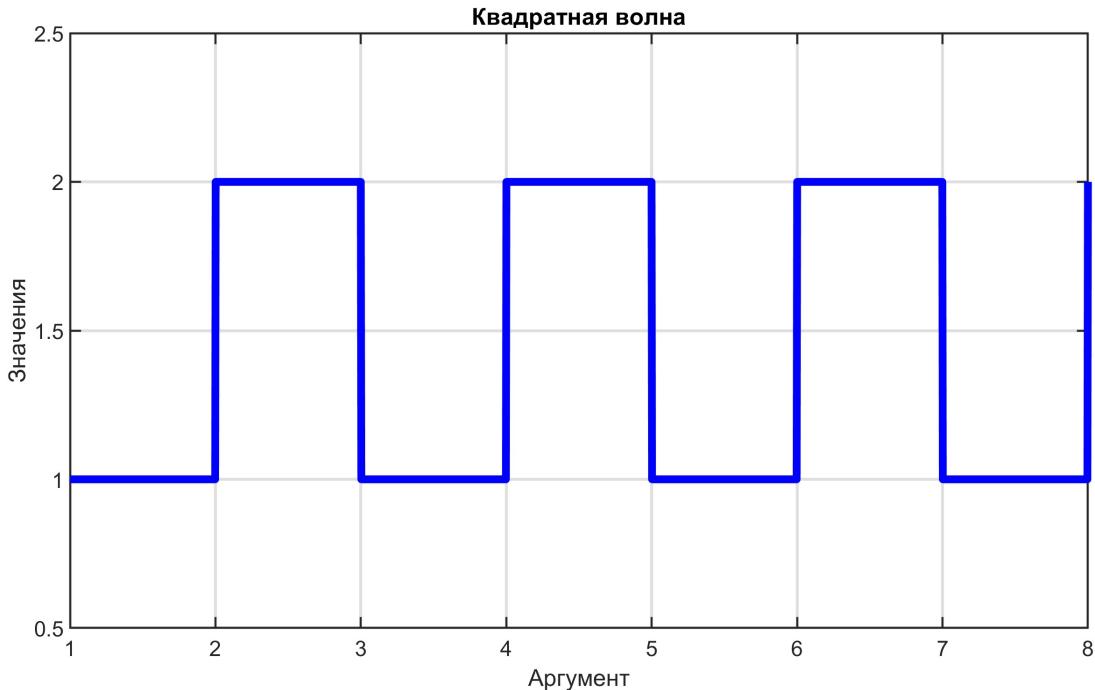


Рис. 1: Функция квадратной волны

Наша задача - разложить её в ряд Фурье, задающийся частичными суммами F_N и G_N , имеющими в сумме вещественные и ком-

плекснозначные функции соответственно:

$$F_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)), \quad G_N = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t},$$

где $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$.

Так как косинусы и синусы, участвующие в разложении, ортогональны друг другу на $[t_0, t_2]$ (при стандартно введённом скалярном произведении функций на этом отрезке), то мы можем вычислить коэффициенты a_n и b_n из скалярного произведения и соответствующей ему нормы:

$$a_n = \frac{(f, \cos(\omega_n t))}{\|\cos(\omega_n t)\|^2}, \quad b_n = \frac{(f, \sin(\omega_n t))}{\|\sin(\omega_n t)\|^2}$$

Откуда

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

или

$$a_n = \int_1^3 f(t) \cos(\pi n t) dt, \quad b_n = \int_1^3 f(t) \sin(\pi n t) dt, \quad n \geq 0$$

В комплексном случае ортогональны экспоненты (всё на том же отрезке $[t_0, t_2]$), и коэффициенты вычисляются похожим образом:

$$c_n = \frac{(f, e^{i\omega_n t})}{\|e^{-i\omega_n t}\|^2} = \frac{1}{T} \int_1^3 f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) e^{-i\omega_n t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Что ж, попробуем найти их аналитические представления:

$$a_0 = \int_1^2 dt + 2 \int_2^3 dt = 3, \quad b_0 = 0$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_1^2 \cos(\pi nt) dt + \int_2^3 2 \cos(\pi nt) dt = \\
&= \frac{\sin(2\pi n) - \sin(\pi n)}{\pi n} + \frac{2 \sin(3\pi n) - 2 \sin(2\pi n)}{\pi n} = \\
&= \frac{2 \sin(3\pi n) - \sin(2\pi n) - \sin(\pi n)}{\pi n}, \quad n \geq 1; \\
b_n &= \int_1^2 \sin(\pi nt) dt + \int_2^3 2 \sin(\pi nt) dt = \\
&= \frac{\cos(\pi n) - \cos(2\pi n)}{\pi n} + \frac{2 \cos(2\pi n) - 2 \cos(3\pi n)}{\pi n} = \\
&= \frac{\cos(\pi n) + \cos(2\pi n) - 2 \cos(3\pi n)}{\pi n} = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n}, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Тогда $a_1 = a_2 = a_n = 0$, что также следует из чётности функции относительно $y = 1.5$ (коэффициент a_0 в данном случае как бы «выравнивает» функцию относительно этой прямой), а $b_1 = 2/\pi, b_2 = 0$. Продолжим начатое, и совершим все те же операции с комплексным рядом Фурье:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2} \int_1^2 dt + \int_2^3 dt = \frac{3}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2} \int_1^2 e^{-i\omega_n t} dt + \int_2^3 e^{-i\omega_n t} dt = \\
&= \frac{i(e^{-2i\omega_n} - e^{-i\omega_n})}{2\omega_n} + \frac{i(e^{-3i\omega_n} - e^{-2i\omega_n})}{\omega_n} = \frac{i(2e^{-3i\omega_n} - e^{-2i\omega_n} - e^{-i\omega_n})}{2\omega_n} = \\
&= \frac{i(2e^{-3i\pi n} - e^{-2i\pi n} - e^{-i\pi n})}{2\pi n} = \frac{i(2 \cos(3\pi n) - \cos(2\pi n) - \cos(\pi n))}{2\pi n} = \\
&= \frac{i((-1)^n - 1)}{2\pi n}.
\end{aligned}$$

Откуда $c_1 = \overline{c_{-1}} = -i/\pi$ и $c_2 = \overline{c_{-2}} = 0$.

Пришло время взглянуть на результаты нашей работы, однако каждый раз вычислять коэффициенты вручную очень утомительно и напряжно, поэтому далее давайте производить расчёты численно.

Для наглядности сравним результаты вычислений коэффициентов с помощью численного интегрирования и руками:

$$a_0 = 3, \quad a_n : [0.0, 0.0], \quad b_n : [0.63662, 0.0]$$

$$c_n : [0.0, 0.3183i, 1.5, -0.3183i, 0.0]$$

Получили абсолютно то же! Теперь можем поручить трудные расчёты машинам, а сами заняться интересными вещами, например, построением графиков. Отметим также, что полученные a_i , b_i и c_i убывают с ростом n обратно пропорционально, так что чем более большие N мы будем задавать, тем более мелкие значения коэффициентов будут на выходе (можно сказать, что будут вноситься некоторые высокочастотные калибровки).

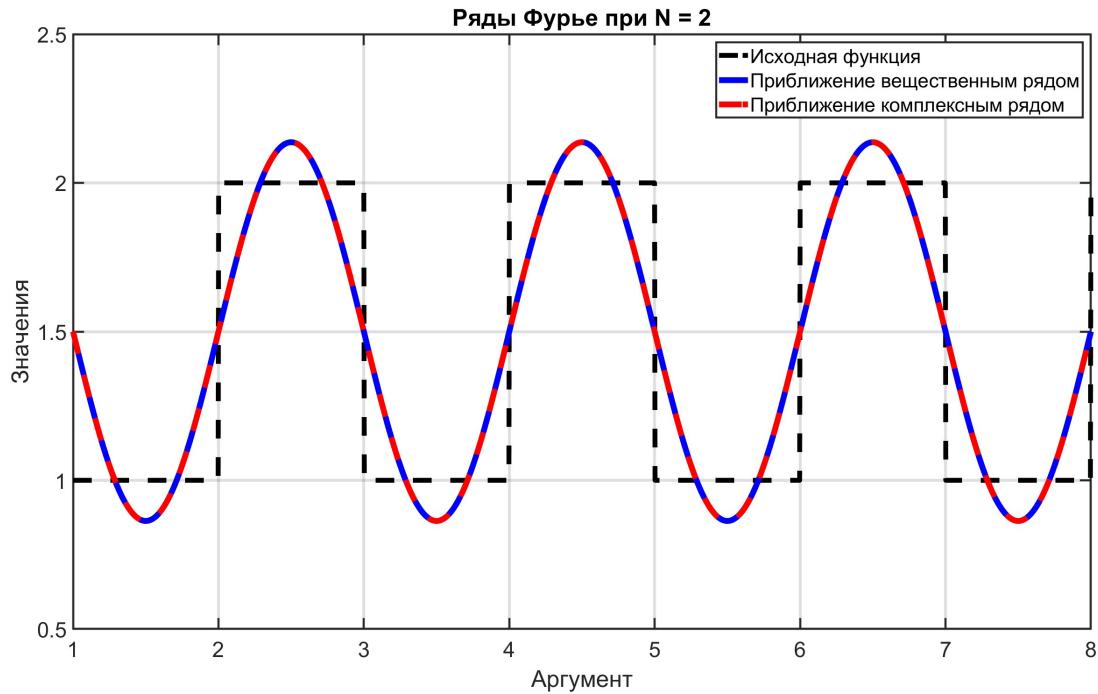
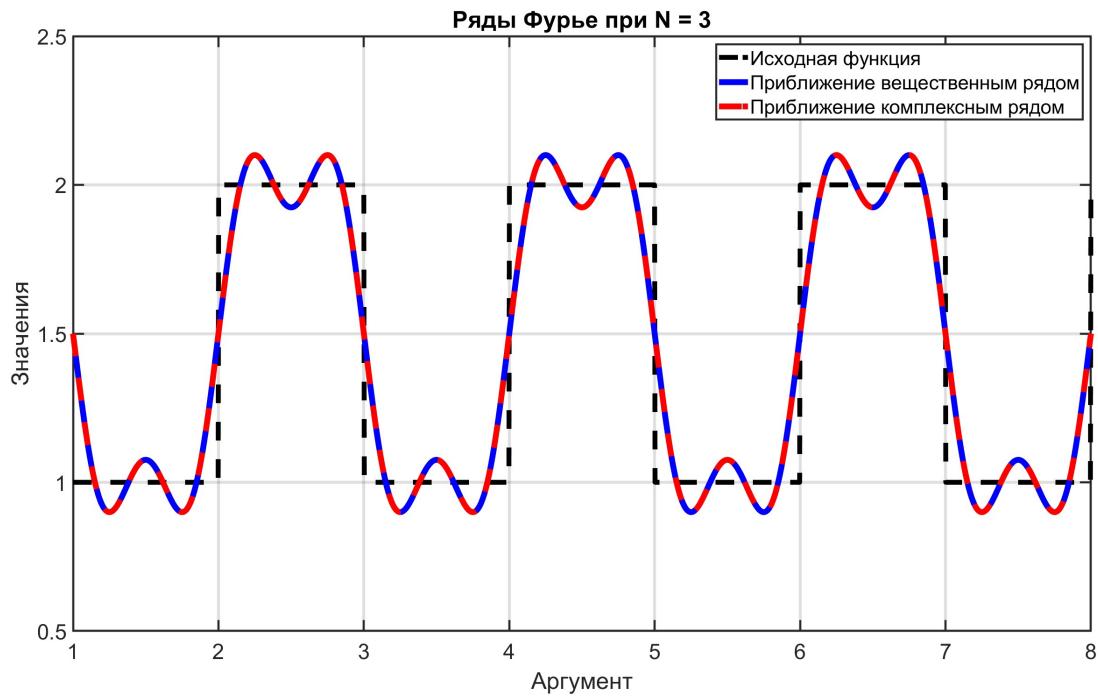
Итак, зададимся шестью значениями разными значениями параметров $N = 2$, $N = 3$, $N = 5$, $N = 10$, $N = 50$ и $N = 100$, исследуем получаемые при них приближения. Соответствующие графики изображены на рисунках 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Как можно видеть, увеличение количества гармоник напрямую влияет на качество - чем больше, тем лучше. В точках разрыва функции при возрастании N также можно также видеть весомые осцилляции (это известный факт, увы гармонические функции не способны точно передать резкий переход из-за своей непрерывной природы). Однако в каждой точке при своём большом N может быть достигнуто сколь угодно малое отклонение ряда от исходной функции, то есть существует поточечная сходимость (как и по норме). В точках разрыва же ряд даёт половину амплитуды «пика», что полностью согласуется с введенной на лекциях теорией. Также комплексный и вещественный Фурье по итогу дают одни и те же результаты при равном «количестве» функций.

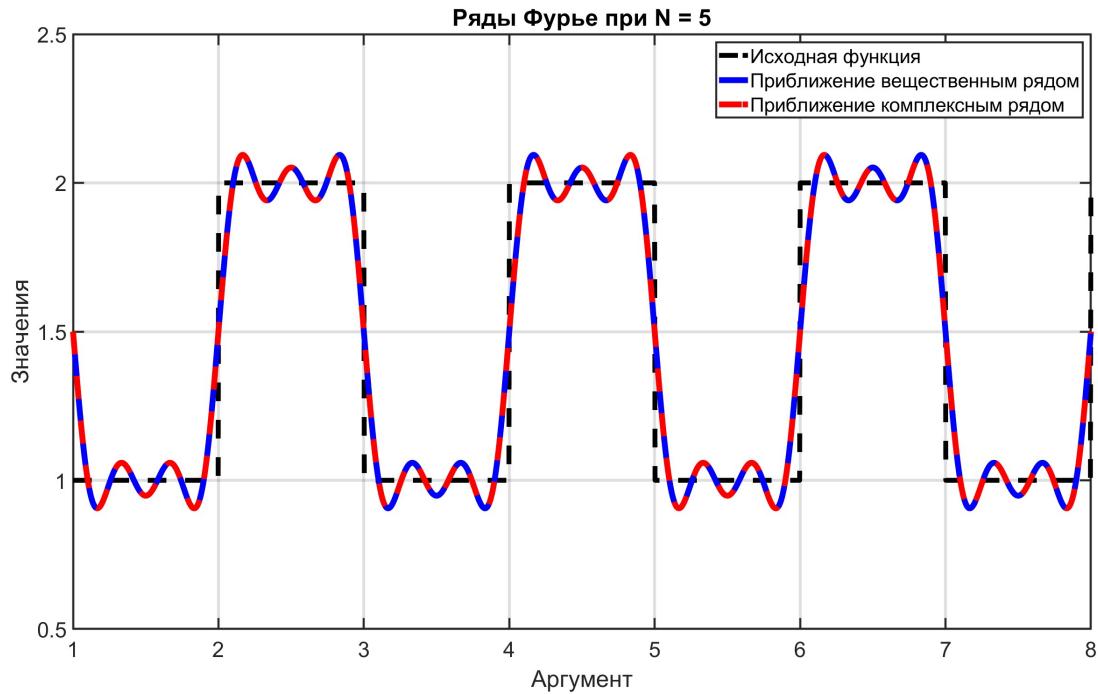
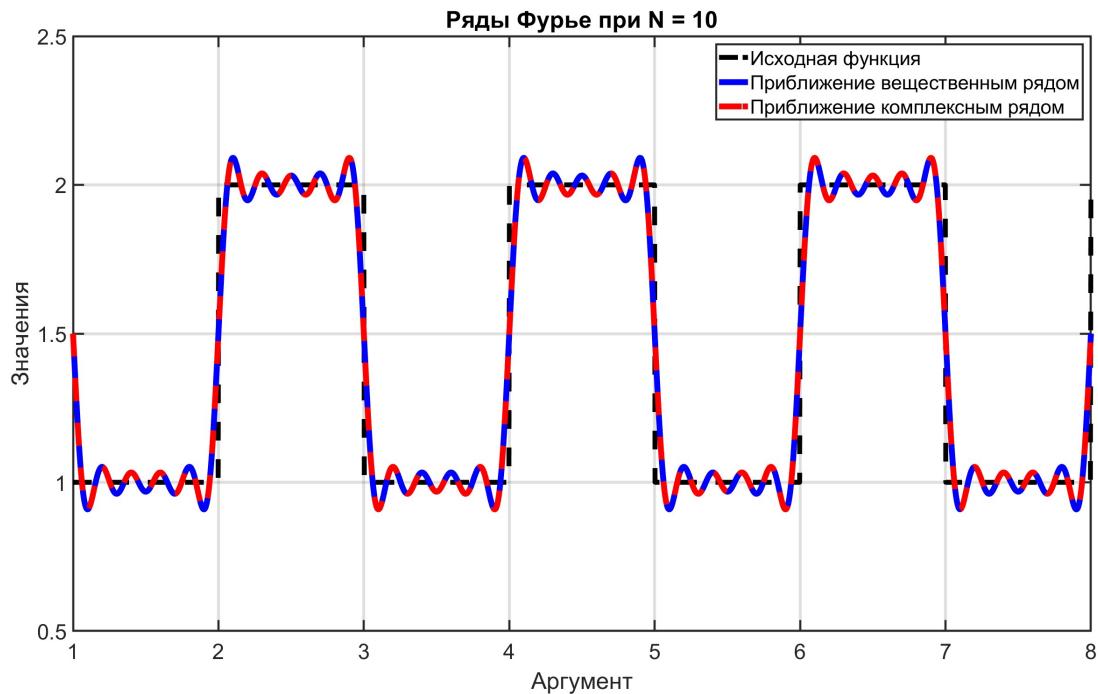
Теперь проверим выполнение равенства Парсеваля, то есть

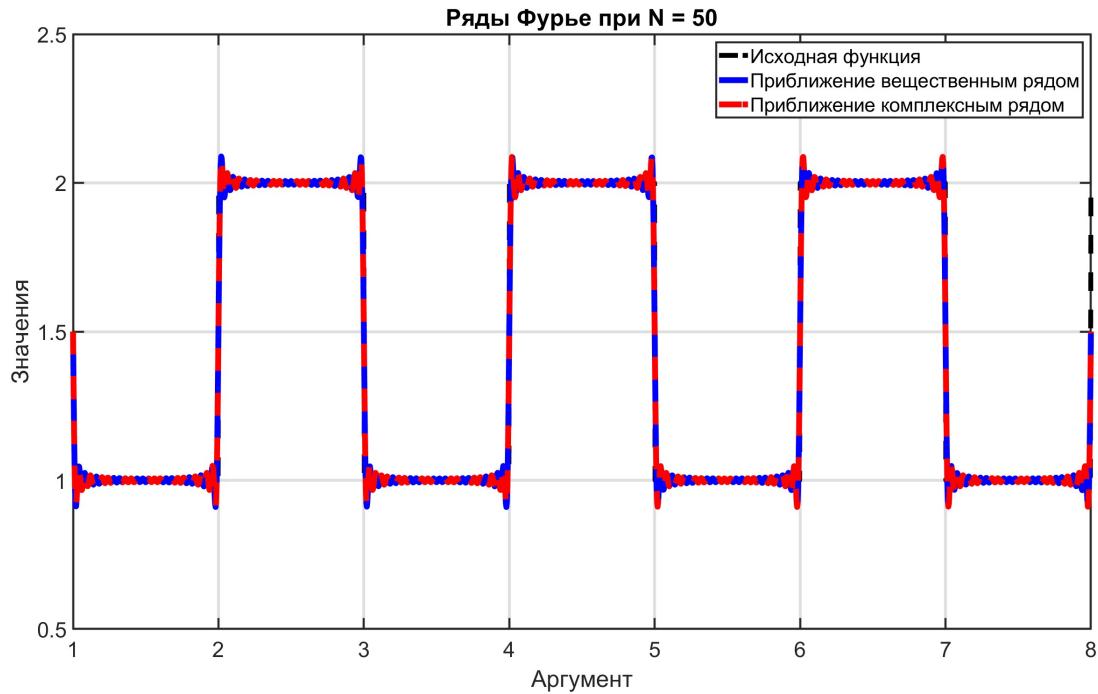
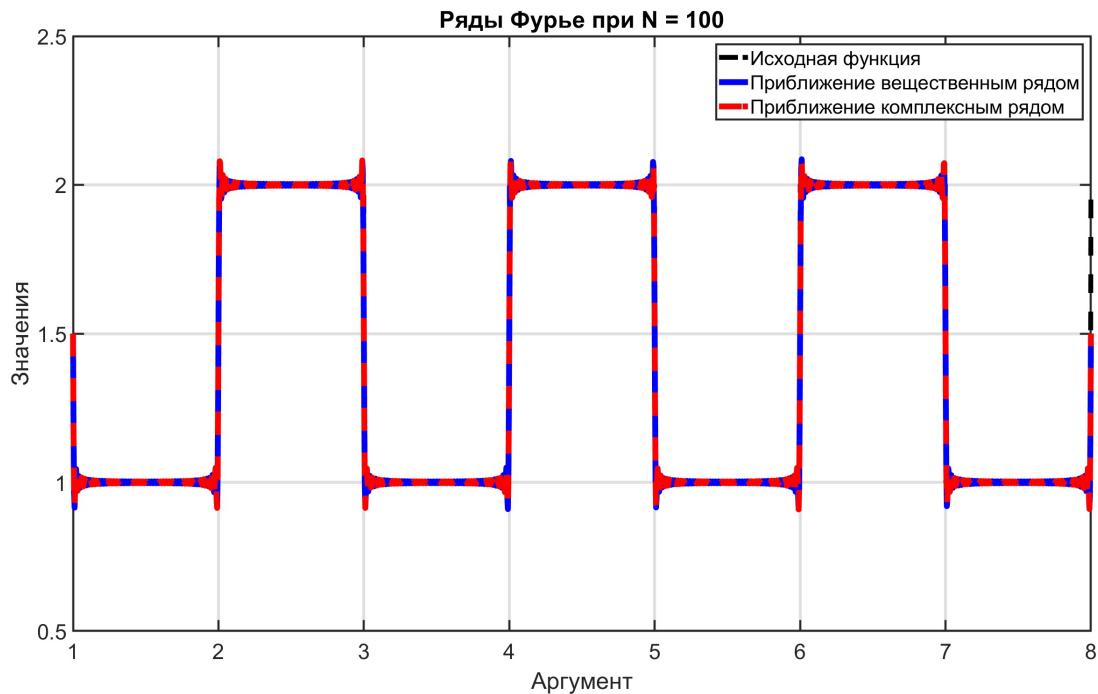
$$E_{func} = \frac{2}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = E_{real}.$$

Или для комплексного ряда G_N :

$$E_{func} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = E_{complex}.$$

Рис. 2: Приближение рядами Фурье функции при $N = 2$ Рис. 3: Приближение рядами Фурье функции при $N = 3$

Рис. 4: Приближение рядами Фурье функции при $N = 5$ Рис. 5: Приближение рядами Фурье функции при $N = 10$

Рис. 6: Приближение рядами Фурье функции при $N = 50$ Рис. 7: Приближение рядами Фурье функции при $N = 100$

Так как бесконечности взять мы не может, можем лишь задать очень большое количество гармоник (в нашем случае $N = 100$), а интеграл вычислить численно с помощью, например, функции **trapz** в matlab. Результаты обработки ниже:

$$E_{func} = 2.5000; \quad E_{real} = 2.4990; \quad E_{complex} = 2.4990.$$

Значения получились очень близкими (мелкие отклонения можно свесить на аппаратную часть, так как вычислялись не сами значения, а лишь их приближения). Получается, всё работает, и мы можем вычислить норму функции с помощью коэффициентов ряда Фурье, что может быть очень удобно. А вообще, равенство Парсеваля даёт нам понять, что ряды Фурье как бы сохраняют заложенную в функцию «энергию» (то есть её норму с точностью до коэффициента).

1.2 Чётная функция

Зададимся теперь функцией с периодом $T = 2$ (график на рисунке 8):

$$f(t) = 1 + t^2 \text{ при } t \in [-1, 1].$$

Так как она чётная, то $b_n = 0$, а $a_n \neq 0$. Также вычислениями соответствующих, уже заданных и приведенных выше интегралов для коэффициентов можно получить:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 2 \int_0^1 (1 + t^2) dt = 2 \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3}, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) dt = \int_{-1}^1 (1 + t^2) \cos(n\pi t) dt = \\ &= \int_{-1}^1 \cos(n\pi t) dt + \int_{-1}^1 t^2 \cos(n\pi t) dt = \\ &= \int_{-1}^1 t^2 \cos(n\pi t) dt = 4 \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}. \end{aligned}$$

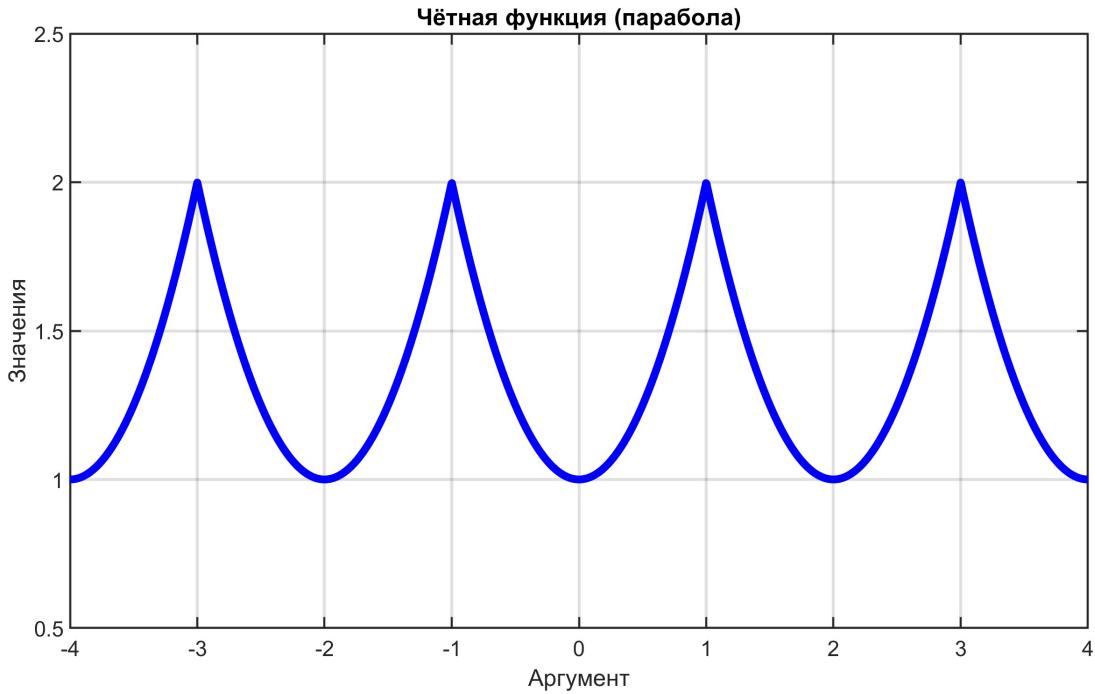


Рис. 8: График выбранной чётной функции

Аналогичные формулы можно получить и для c_n . Приближенные вычисления коэффициентов при $N = 2$ приведены ниже:

$$a_0 = 2.667, \quad a_n : [-0.405, 0.1013], \quad b_n : [0.0, 0.0]$$

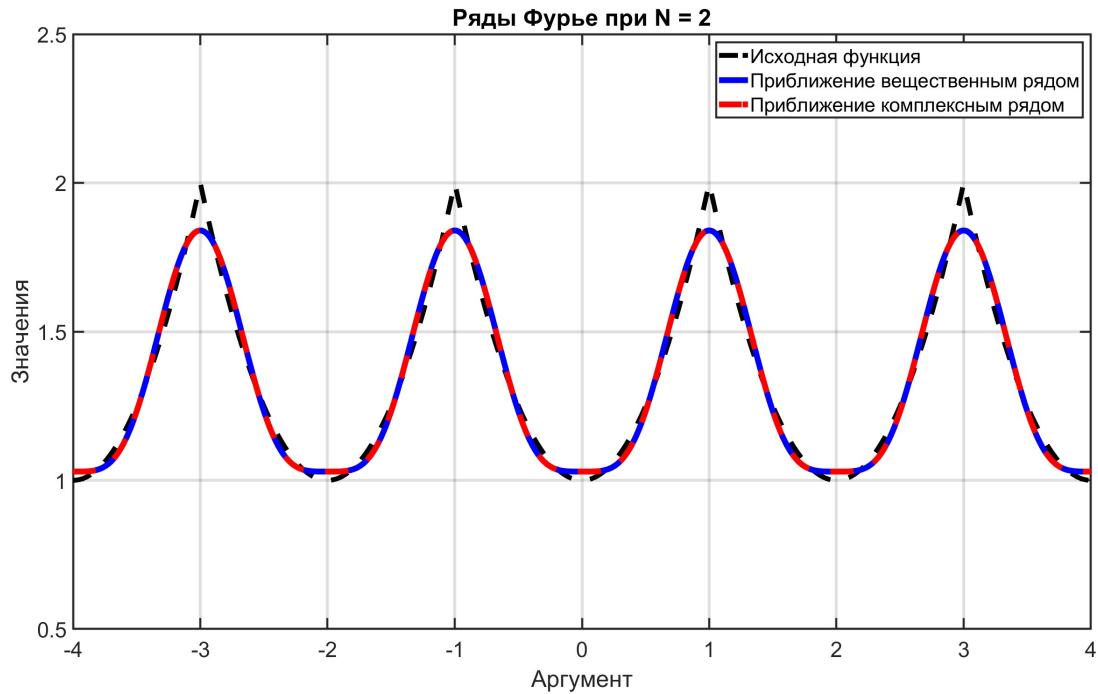
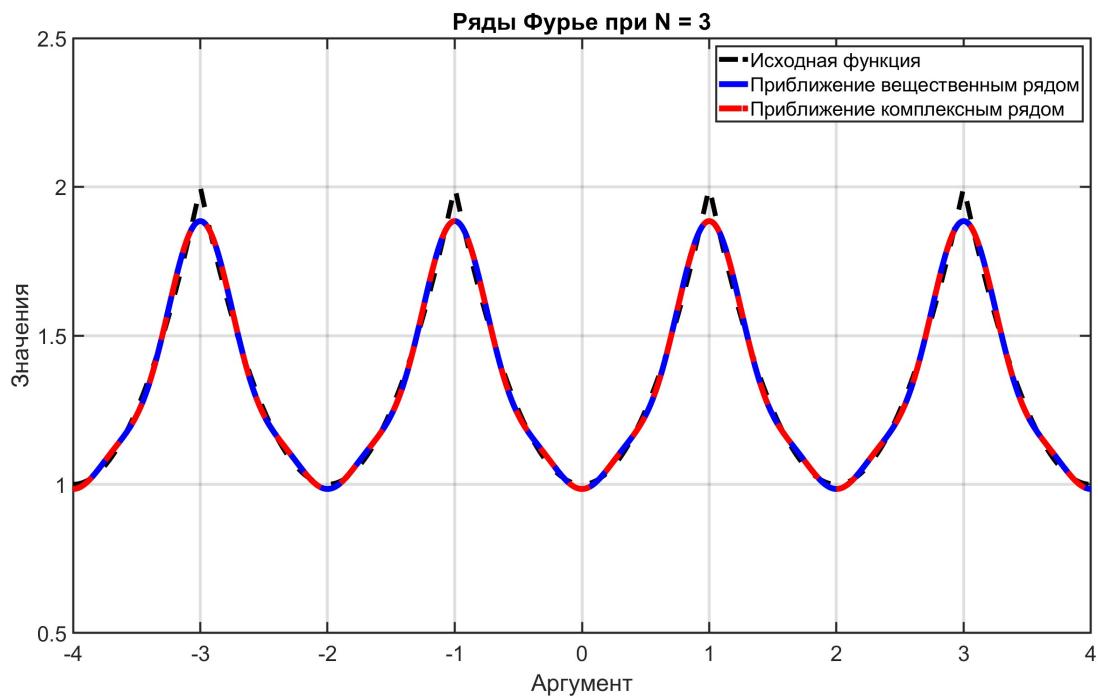
$$c_n : [0.0507, -0.203, 1.333, -0.203, 0.0507]$$

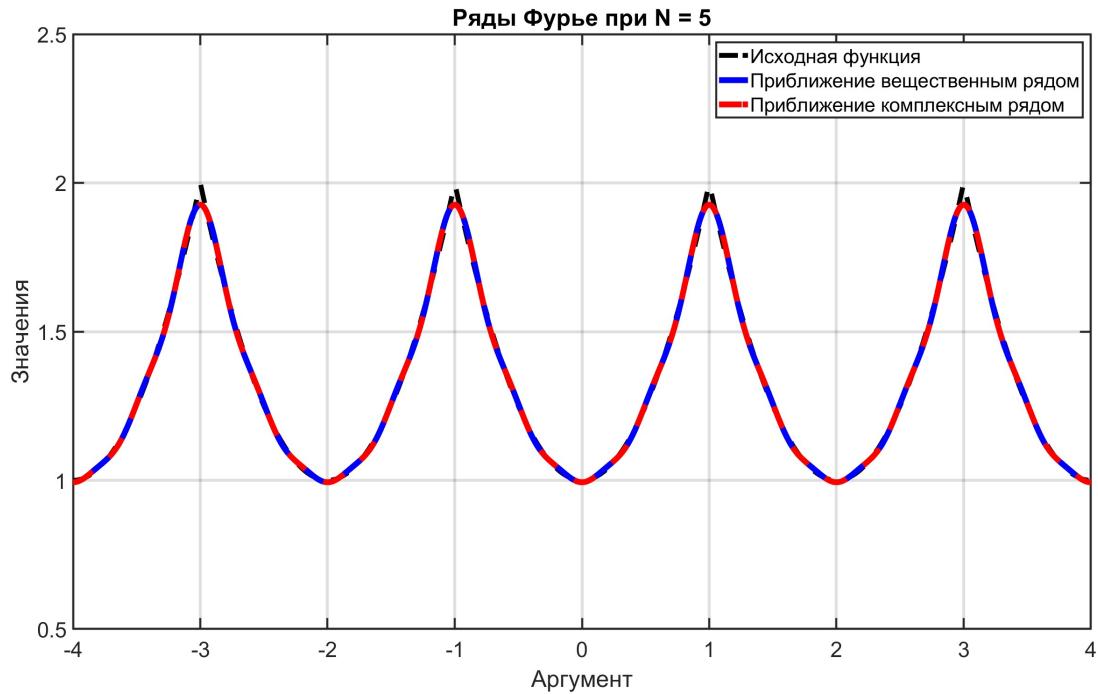
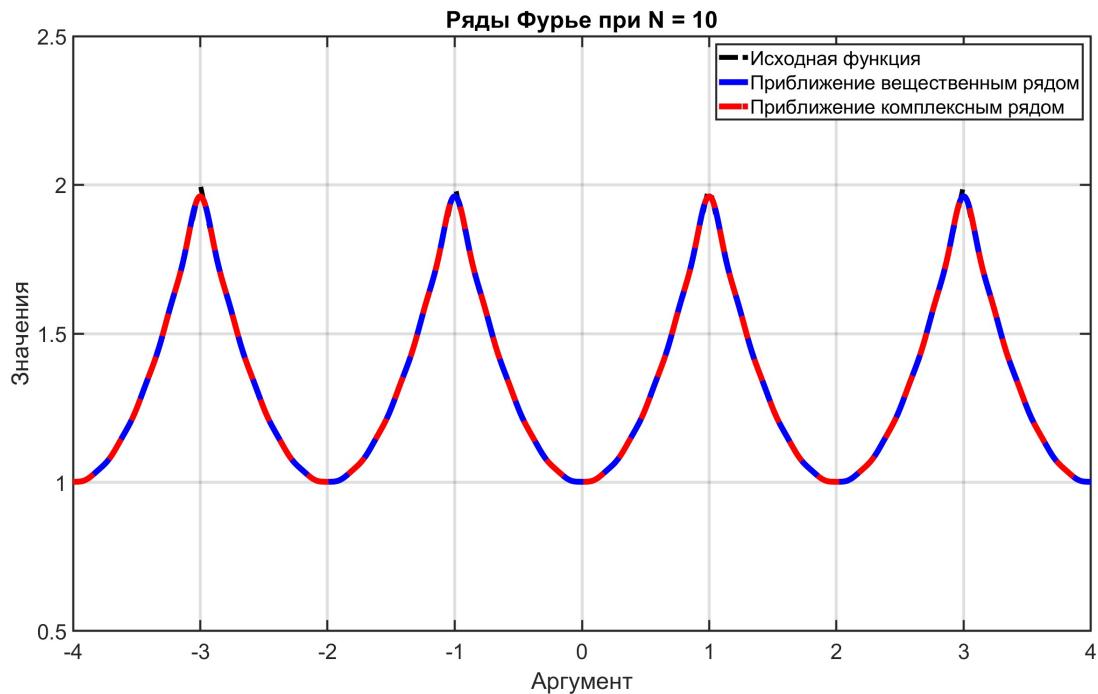
Как и прежде, зададимся параметрами $N = 2, N = 3, N = 5, N = 10, N = 50$ и $N = 100$ и посмотрим на получаемые при них приближения. Соответствующие графики изображены на рисунках 9, 10, 11, 12, 13 и 14. Можем видеть, что из-за непрерывности $f(t)$ приближения при возрастании количества гармоник сходятся поточечно к $f(t)$ всюду на периоде, причем при $N = 50$ уже достигается визуальное равенство ряда и заданной функции.

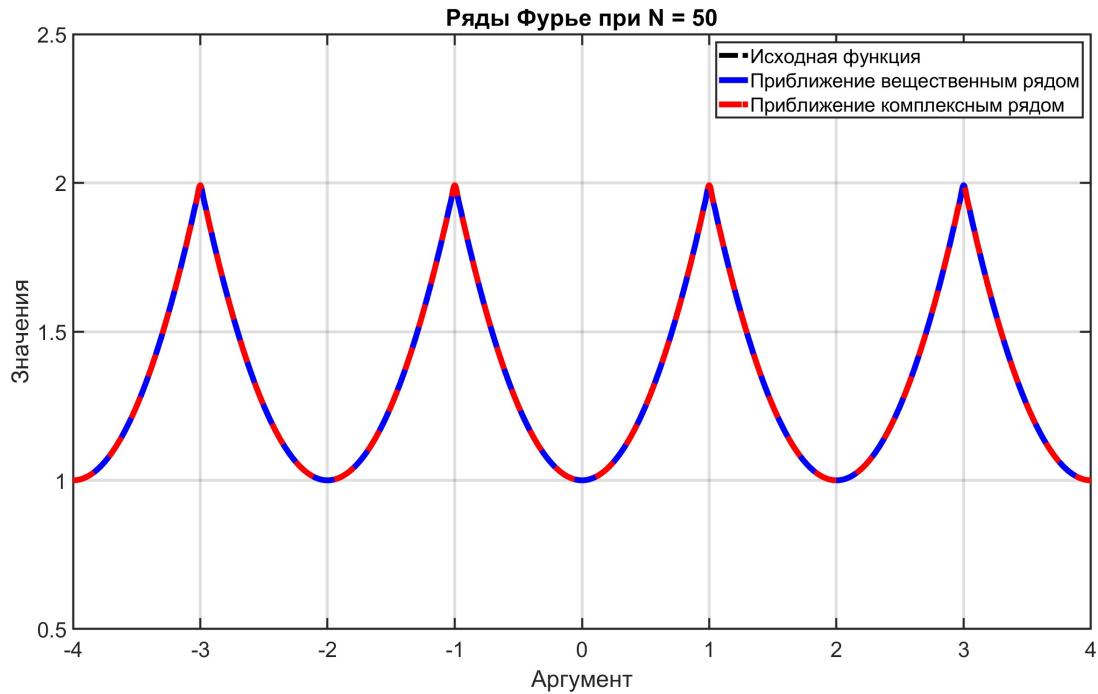
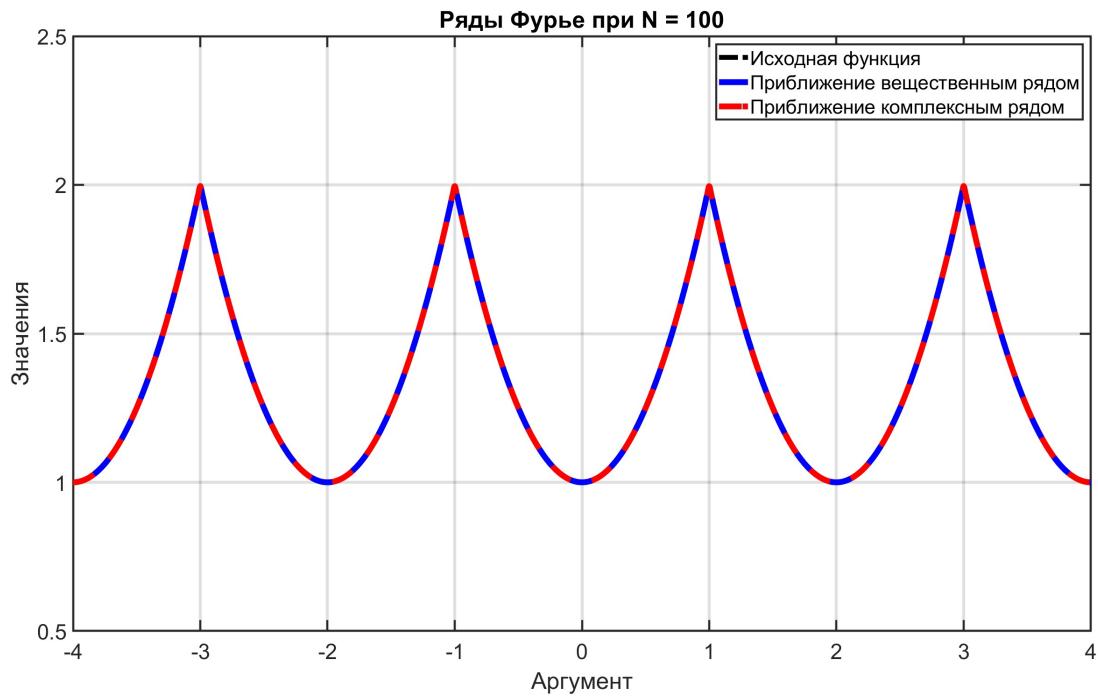
Проверим равенство Парсеваля при наибольшем $N = 100$:

$$E_{func} = 1.8667; \quad E_{real} = 1.8667; \quad E_{complex} = 1.8667.$$

Нормы сохраняются, успех!

Рис. 9: Приближение рядами Фурье функции при $N = 2$ Рис. 10: Приближение рядами Фурье функции при $N = 3$

Рис. 11: Приближение рядами Фурье функции при $N = 5$ Рис. 12: Приближение рядами Фурье функции при $N = 10$

Рис. 13: Приближение рядами Фурье функции при $N = 50$ Рис. 14: Приближение рядами Фурье функции при $N = 100$

1.3 Нечётная функция

Пусть теперь задана нечётная функция с периодом $T = 2$:

$$f(t) = t \text{ при } t \in [-1, 1].$$

Её график изображен ниже на рисунке 15:

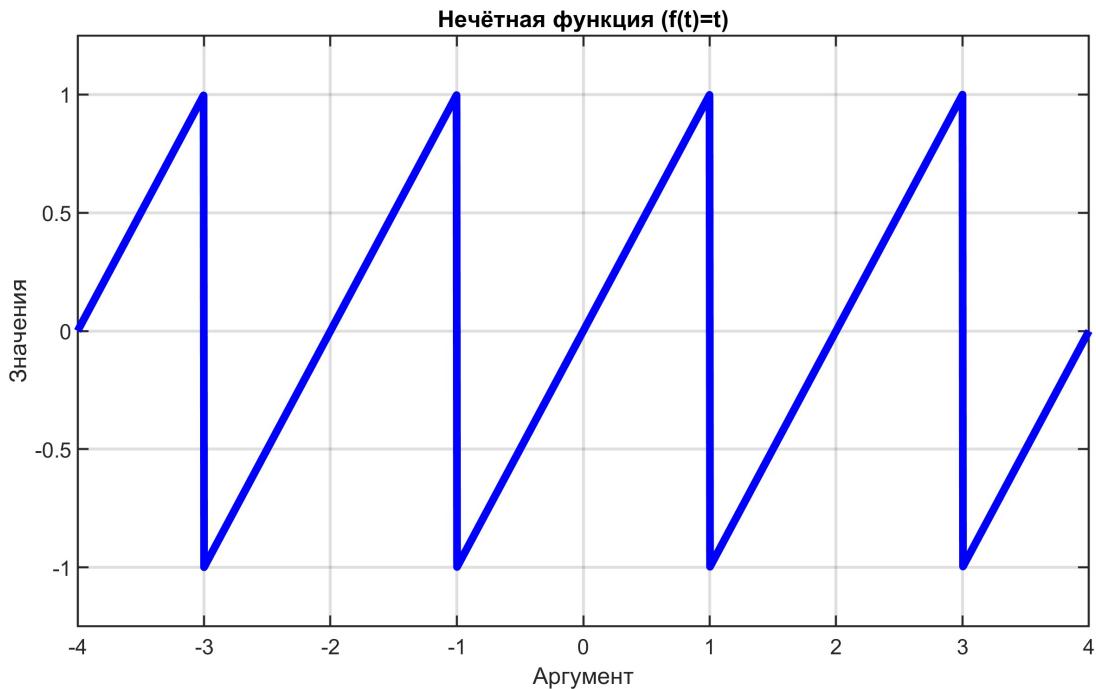


Рис. 15: График выбранной нечётной функции

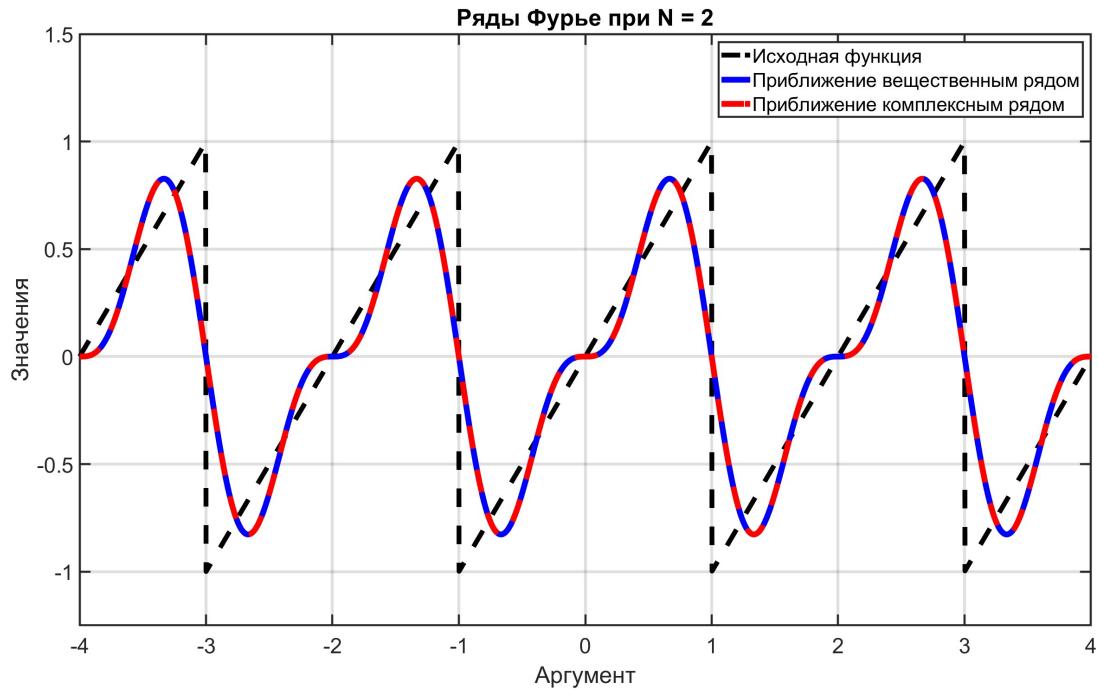
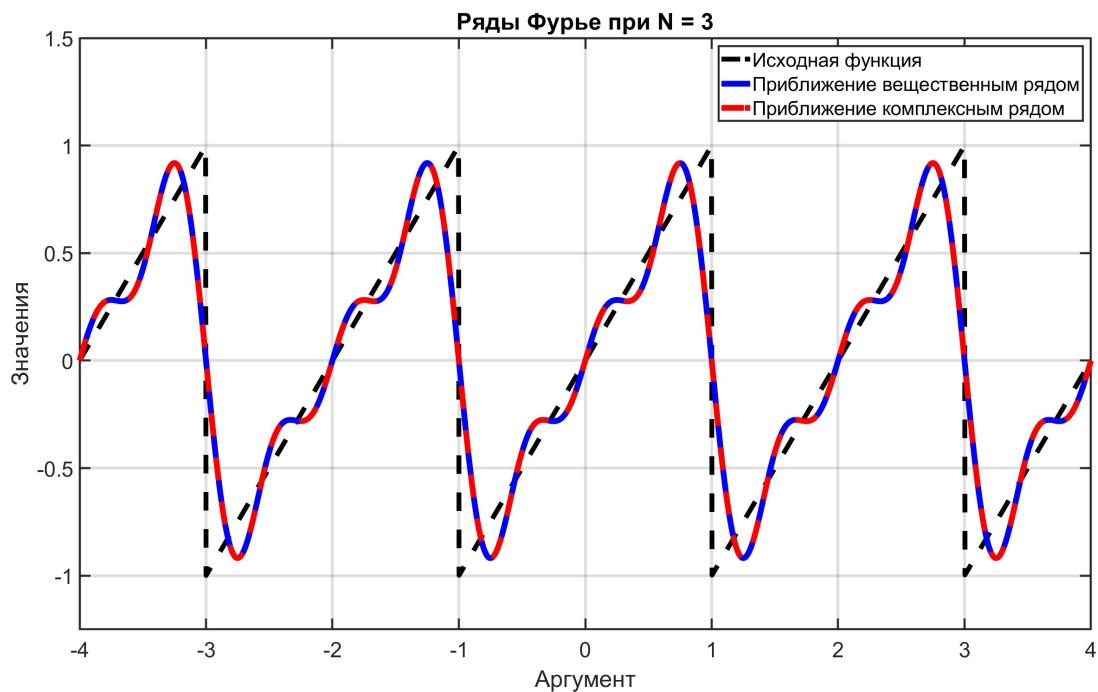
Перейдем к вычислению значений коэффициентов вещественного ряда Фурье F_N и комплексно заданного G_N . Так как $f(t)$ - нечётная функция на симметричном интервале, то

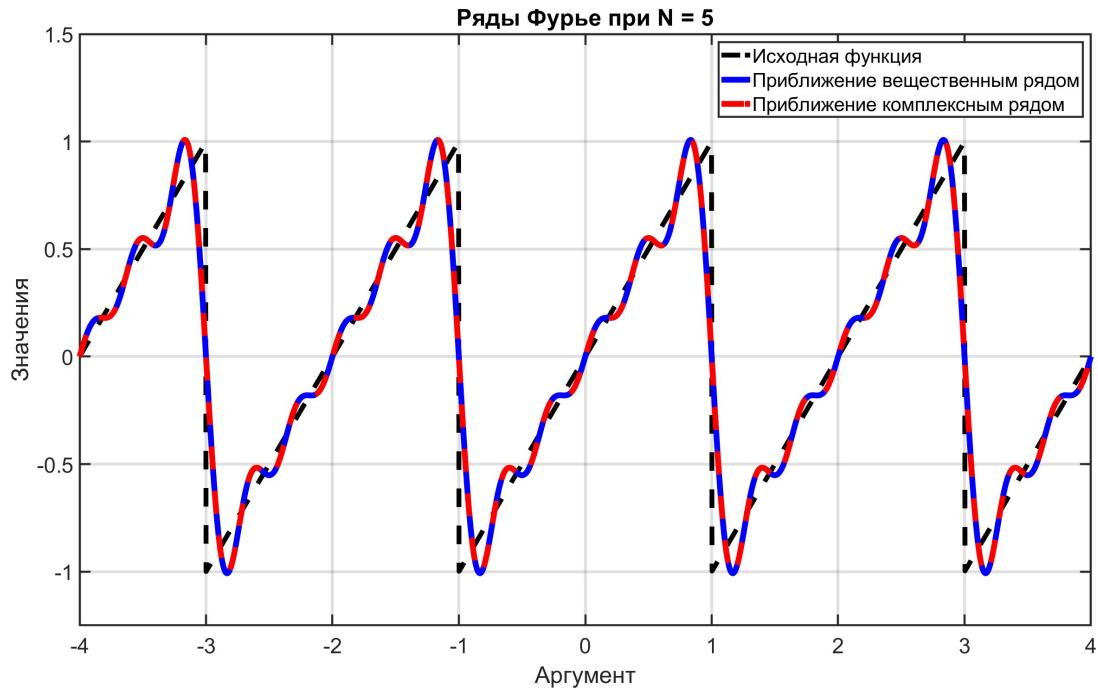
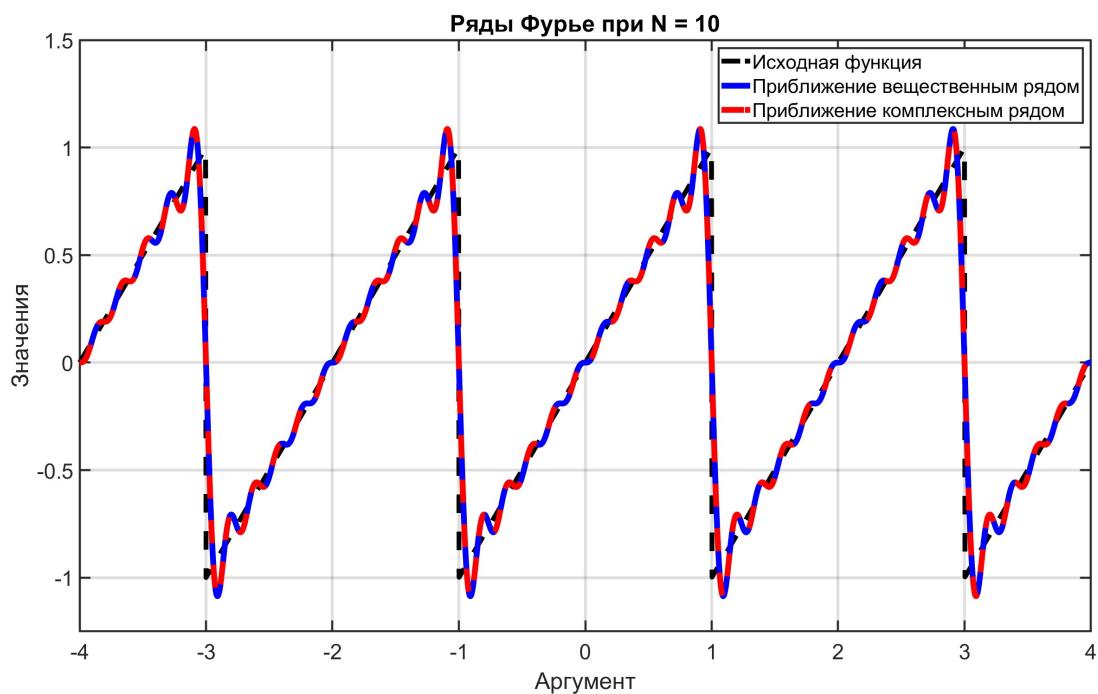
$$a_0 = a_n = c_0 = 0, \quad b_n = -2 \frac{(-1)^n}{n\pi}, \quad c_n = \frac{i(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

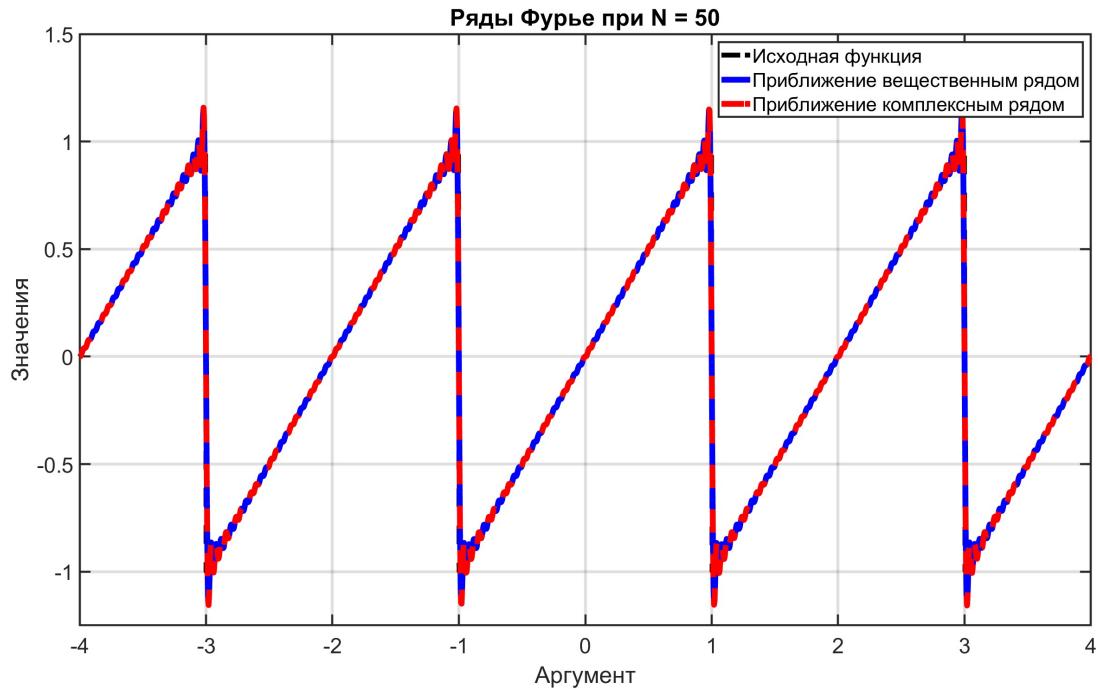
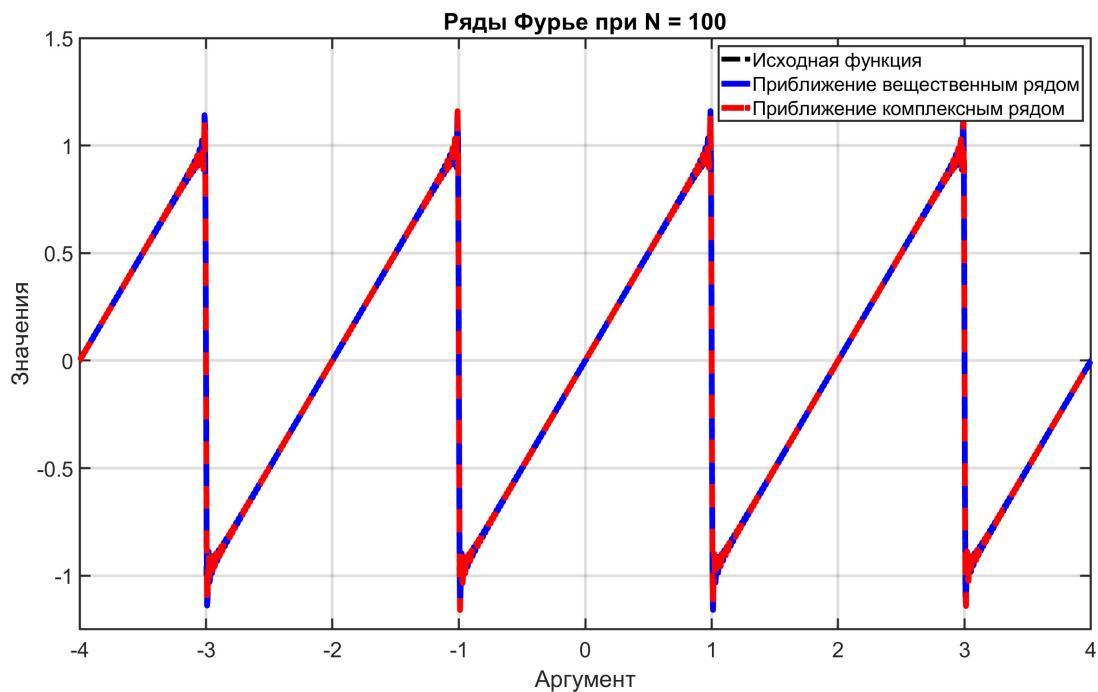
Численно найденные параметры при $N = 2$ приведены ниже:

$$a_0 = 0, \quad a_n : [0, 0], \quad b_n : [0.637, -0.3183]$$

$$c_n : [-0.1592i, 0.3183i, 0, -0.3183i, 0.1592]$$

Рис. 16: Частичные суммы ряда Фурье функции при $N = 2$ Рис. 17: Частичные суммы ряда Фурье функции при $N = 3$

Рис. 18: Частичные суммы ряда Фурье функции при $N = 5$ Рис. 19: Частичные суммы ряда Фурье функции при $N = 10$

Рис. 20: Частичные суммы ряда Фурье функции при $N = 50$ Рис. 21: Частичные суммы ряда Фурье функции при $N = 100$

Зададимся параметрами $N = 2, N = 3, N = 5, N = 10, N = 50$ и $N = 100$, оценим результаты вычисления частичных сумм. Соответствующие графики представлены на рисунках 16, 17, 18, 19, 20 и 21. Как видим, исходная функция терпит разрывы на концах периода, поэтому мы попадаем в условия теоремы Дирихле, говорящей о том, что в точках разрыва частичные суммы будут равны половине «скакак», а в других - сходятся к исходной функции поточечно. Именно это мы и наблюдаем.

Проверим также равенство Парсеваля при $N = 100$:

$$E_{func} = 0.3333; \quad E_{real} = 0.3312; \quad E_{complex} = 0.3312.$$

Всё выполняется при небольших погрешностях в используемых приближенных вычислениях.

1.4 Ни нечётная, ни чётная

Наконец пусть задана функция с периодом $T = 2$

$$f(t) = t + \sin^2(\pi t) \text{ при } t \in [-1, 1].$$

Как можно заметить, функция состоит не только из прямых линий, а $f(-t) = -t + \sin^2(-\pi t) \neq \pm f(t)$, то есть не является ни чётной, ни нечётной. Её график приведён на рисунке 22.

Вычисленные коэффициенты при $N = 2$ приведены ниже:

$$a_0 = 1, \quad a_n : [0, -0.5], \quad b_n : [0.637, -0.3183]$$

$$c_n : [-0.25, 0.3183i, 0.5, -0.3183i, -0.25]$$

В данном случае никакого обнуления не происходит, а коэффициенты b_n как бы перетягиваются из предыдущего пункта (так как $\sin^2(\pi t)$ - функция чётная), равно как и мнимые части при c_n . Формулы для расчёта коэффициентов можно вычислить, они частично сводятся к предыдущему пункту с возникающим выделенным случаем (квадрат синуса выражается через $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$):

$$a_0 = 2c_0 = 1, \quad a_2 = 2c_{\pm 2} = -0.5,$$

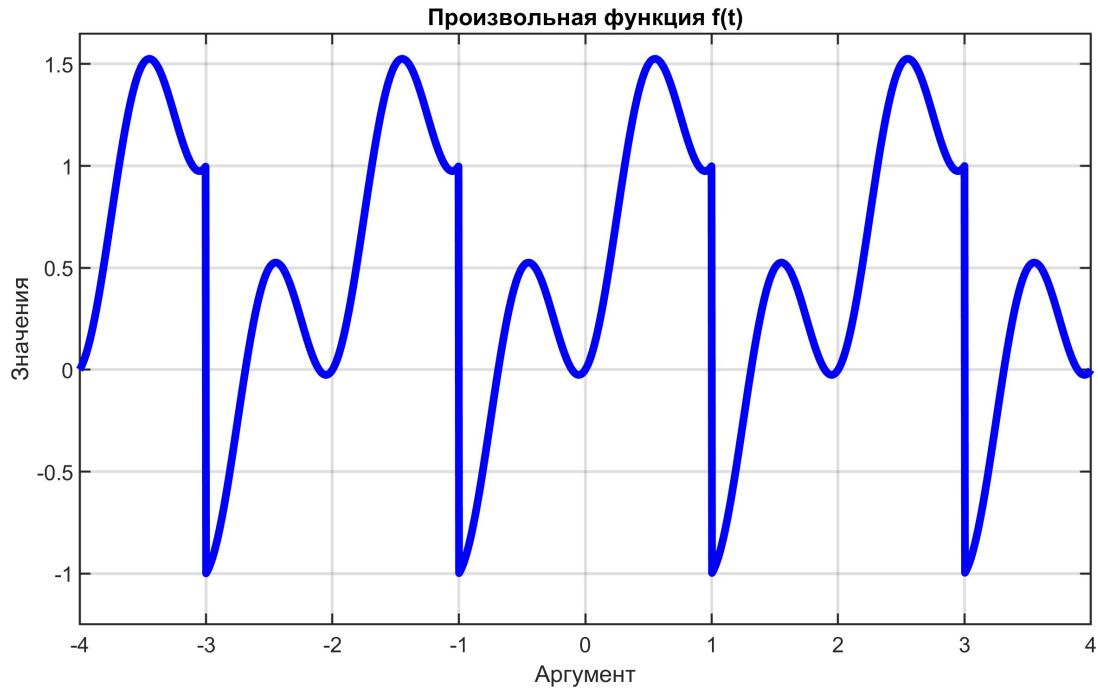


Рис. 22: График выбранной произвольной функции

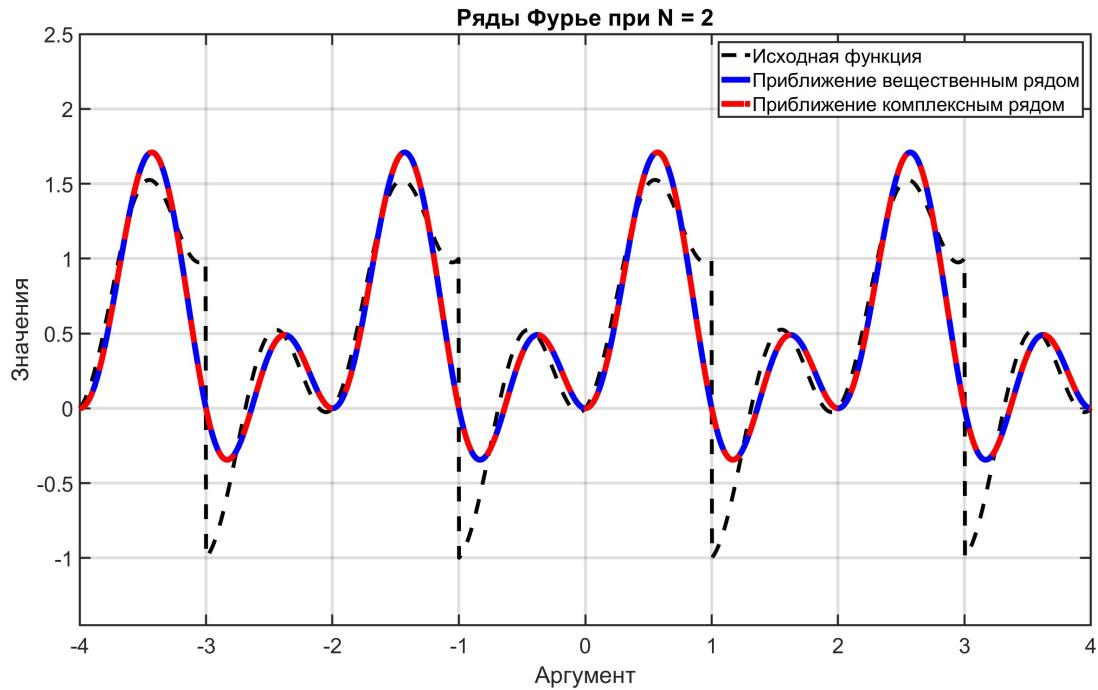
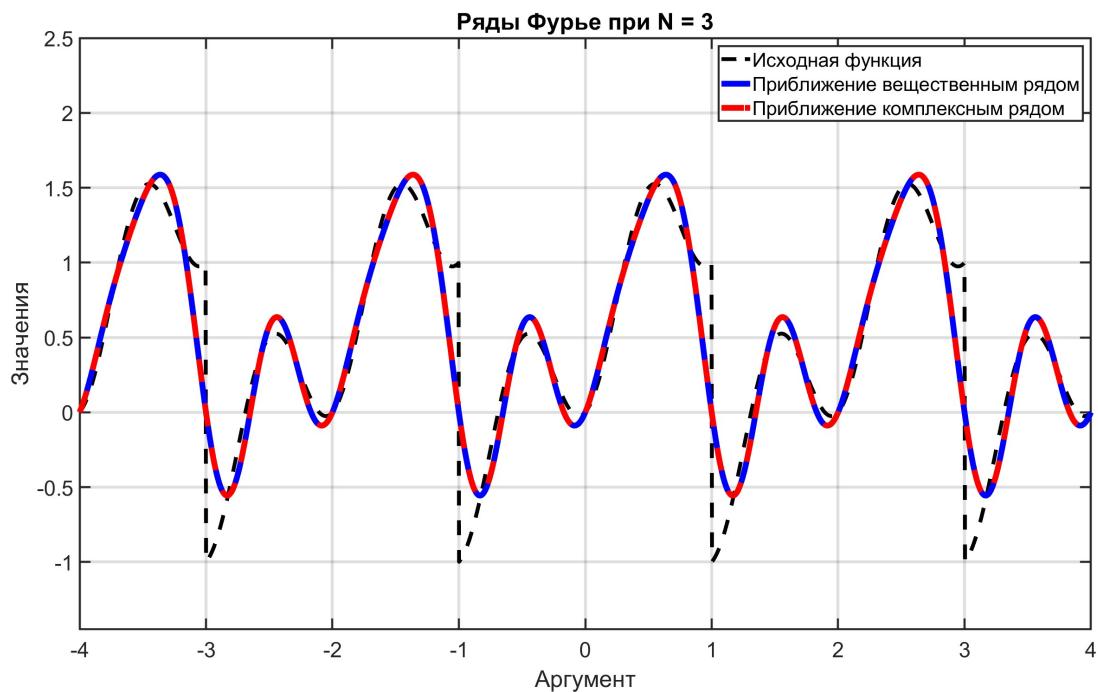
$$a_n = 0, \quad n \notin \{0, 2\}, \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n},$$

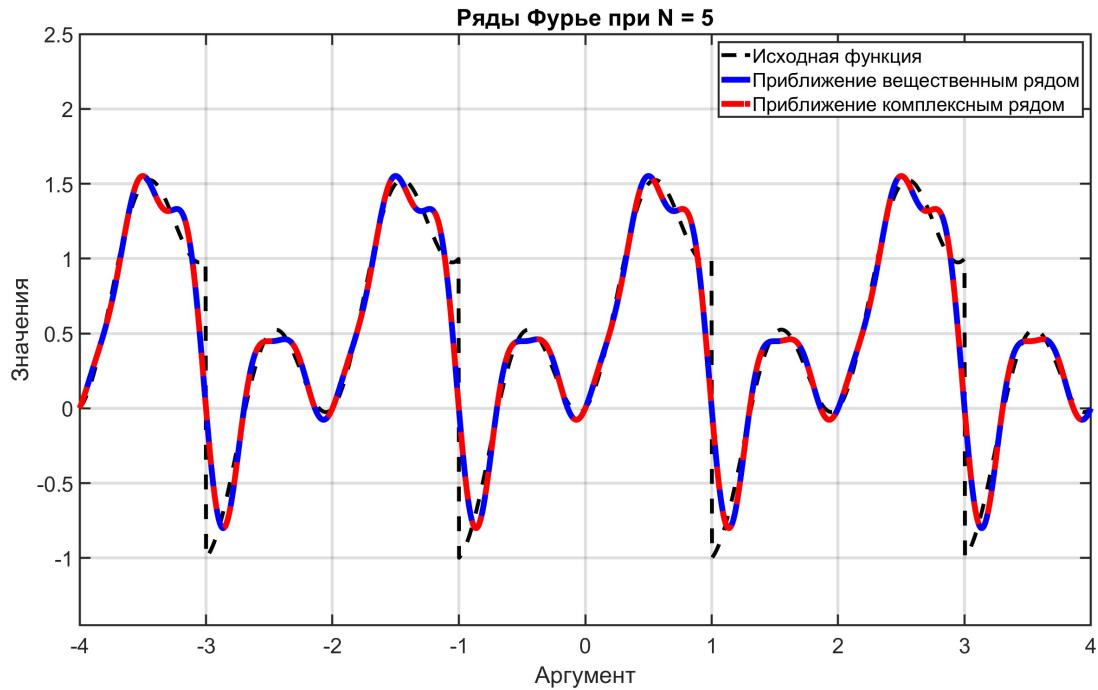
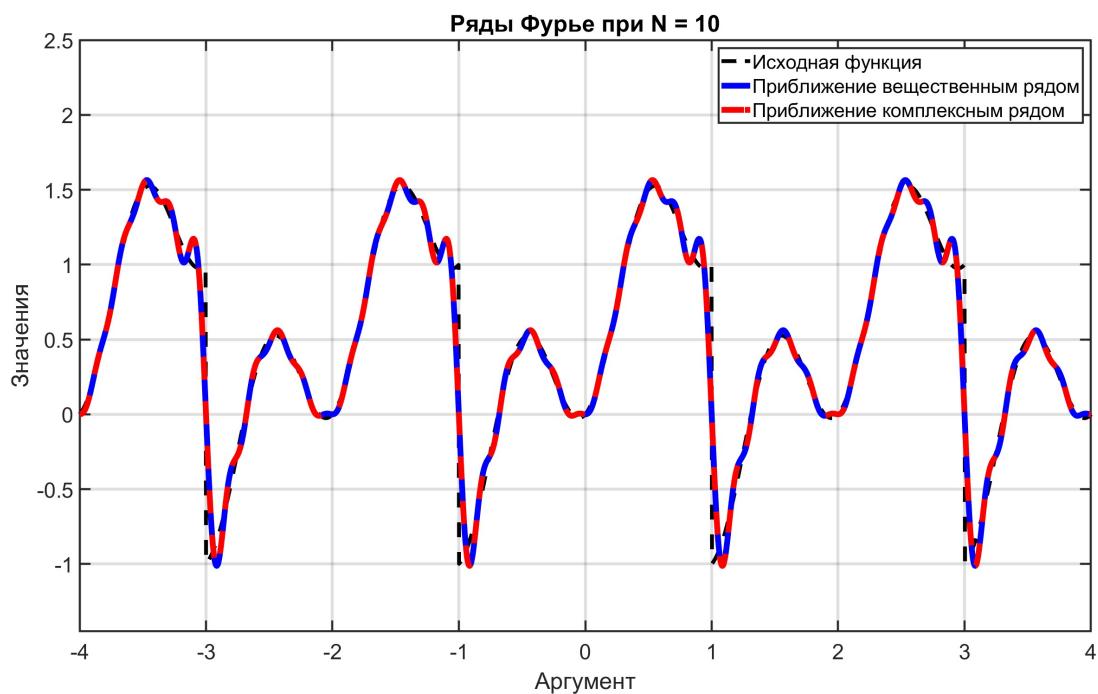
$$c_n = \frac{i(-1)^{n+1}}{\pi n}, \quad n \notin \{0, 2\}.$$

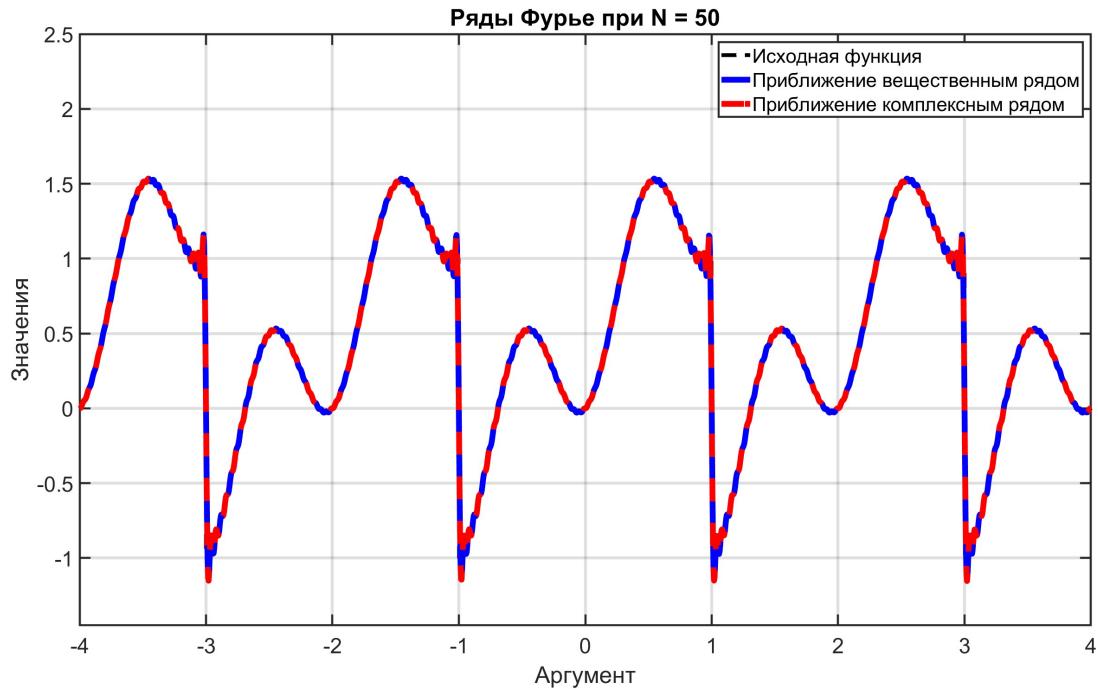
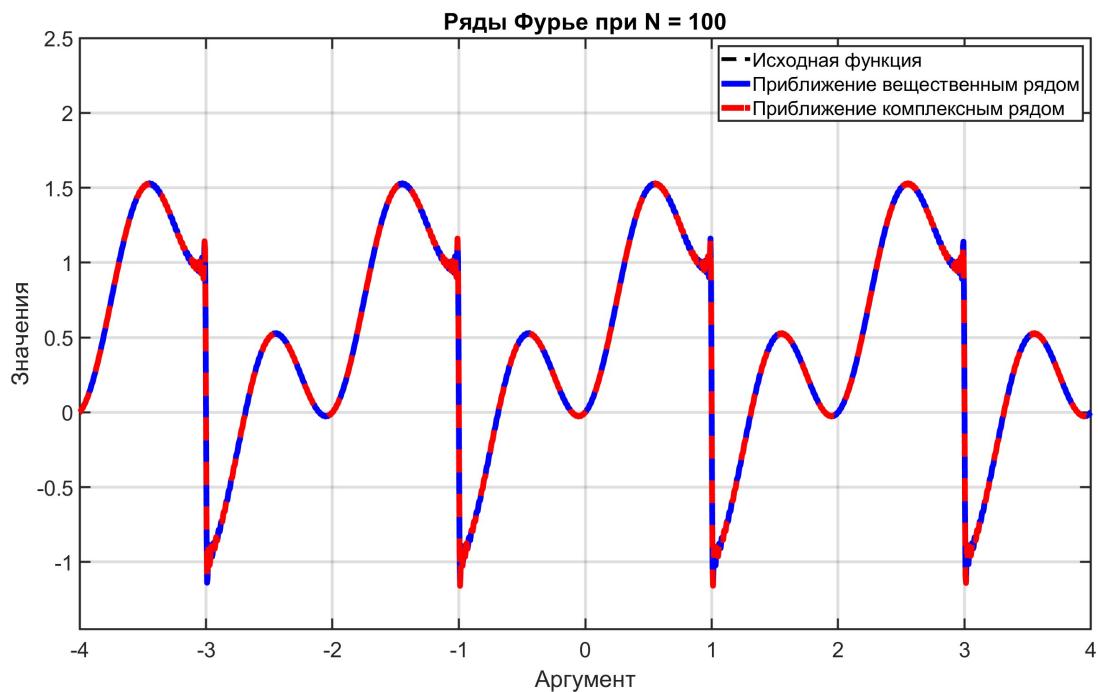
Проварьируем параметр N : графики частичных сумм и исходной функции при $N = 2, N = 3, N = 5, N = 10, N = 50$ и $N = 100$ изображены, соответственно, на рисунках 23, 24, 25, 26, 27 и 28. Можно заметить, что вещественные и комплексные частичные суммы F_N и G_N дают одинаковый результат. Также на концах периода возникает разрыв, приближения там равны половине разности значений «на концах» (в нашем случае это равно 0), что согласуется с введенной нами теорией.

Равенство Парсеваля выполняется с точностью до погрешностей при вычислениях:

$$E_{func} = 0.7083; \quad E_{real} = 0.7062; \quad E_{complex} = 0.7062.$$

Рис. 23: Частичные суммы ряда Фурье функции при $N = 2$ Рис. 24: Частичные суммы ряда Фурье функции при $N = 3$

Рис. 25: Частичные суммы ряда Фурье функции при $N = 5$ Рис. 26: Частичные суммы ряда Фурье функции при $N = 10$

Рис. 27: Частичные суммы ряда Фурье функции при $N = 50$ Рис. 28: Частичные суммы ряда Фурье функции при $N = 100$

Таким образом было введено четыре вида периодических функций, включая квадратную волну, чётную, нечётную и произвольную ни чётную, ни нечётную, разработан алгоритм для численного вычисления коэффициентов и построения частичных сумм рядов Фурье $F_N(t)$ и $G_N(t)$ для разных значений N и проверено равенство Парсеваля. Было получено, что увеличение числа гармоник N влечёт за собой лучшие приближения, а чётность и нечётность функции прямо влияют на те параметры, которые будут участвовать в построении частичных сумм.

2 Комплексная функция

Зададимся положительными числами $R = 2$, $T = 1 > 0$ и рассмотрим комплекснозначную функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ с периодом T такую, что её вещественные и мнимые части задаются

$$\text{Re}(f(t)) = \begin{cases} R, & t \in \left[-\frac{T}{8}, \frac{T}{8}\right), \\ 2R - \frac{8Rt}{T}, & t \in \left[\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}\right), \\ -R, & t \in \left[\frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}\right), \\ -6R + \frac{8Rt}{T}, & t \in \left[\frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}\right); \end{cases}$$

$$\text{Im}(f(t)) = \begin{cases} \frac{8Rt}{T}, & t \in \left[-\frac{T}{8}, \frac{T}{8}\right), \\ R, & t \in \left[\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}\right), \\ 4R - \frac{8Rt}{T}, & t \in \left[\frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}\right), \\ -R, & t \in \left[\frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}\right). \end{cases}$$

Рассмотрим для функции $f(t)$ частичные суммы комплексного ряда Фурье (вещественный мы использовать не можем, так как сама функция стреляет в множество комплексных чисел)

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t},$$

где $\omega_n = 2\pi n/T$.

Выведем явный вид коэффициентов

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt.$$

Функция $f(t)$ кусочно определена, поэтому интеграл представляется как сумма на конкретных промежутках (подставим конкретные значения $R = 2$, $T = 1$):

$$c_n = \frac{1}{T} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4),$$

где:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-T/8}^{T/8} \left(R + i \cdot \frac{8Rt}{T} \right) e^{-i\omega_n t} dt, \\ I_2 &= \int_{T/8}^{3T/8} \left(2R - \frac{8Rt}{T} + iR \right) e^{-i\omega_n t} dt, \\ I_3 &= \int_{3T/8}^{5T/8} \left(-R + i \left(4R - \frac{8Rt}{T} \right) \right) e^{-i\omega_n t} dt, \\ I_4 &= \int_{5T/8}^{7T/8} \left(-6R + \frac{8Rt}{T} - iR \right) e^{-i\omega_n t} dt; \end{aligned}$$

Или же

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\frac{1}{8}}^{\frac{1}{8}} (2 + 16it) e^{-i\omega_n t} dt, \\ I_2 &= \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{3}{8}} (4 - 16t + 2i) e^{-i\omega_n t} dt dt, \\ I_3 &= \int_{\frac{3}{8}}^{\frac{5}{8}} (-2 + i(8 - 16t)) e^{-i\omega_n t} dt, \\ I_4 &= \int_{\frac{5}{8}}^{\frac{7}{8}} (-12 + 16t - 2i) e^{-i\omega_n t} dt. \end{aligned}$$

Программные вычисления c_n при $N = 2$ дали следующее:

$$c_{-2} = c_{-1} = c_0 = c_2 = 0, c_1 = 2.2926.$$

Построим параметрические графики частичных сумм ряда $G_N(t)$ при $N = 1, 2, 3, 10$. Результаты приведены на одном рисунке 29 для лучшего визуального сравнения. Заметно, что при росте N частичные суммы становятся всё ближе к $f(t)$, то есть ряд приближает функцию на комплексной оси.

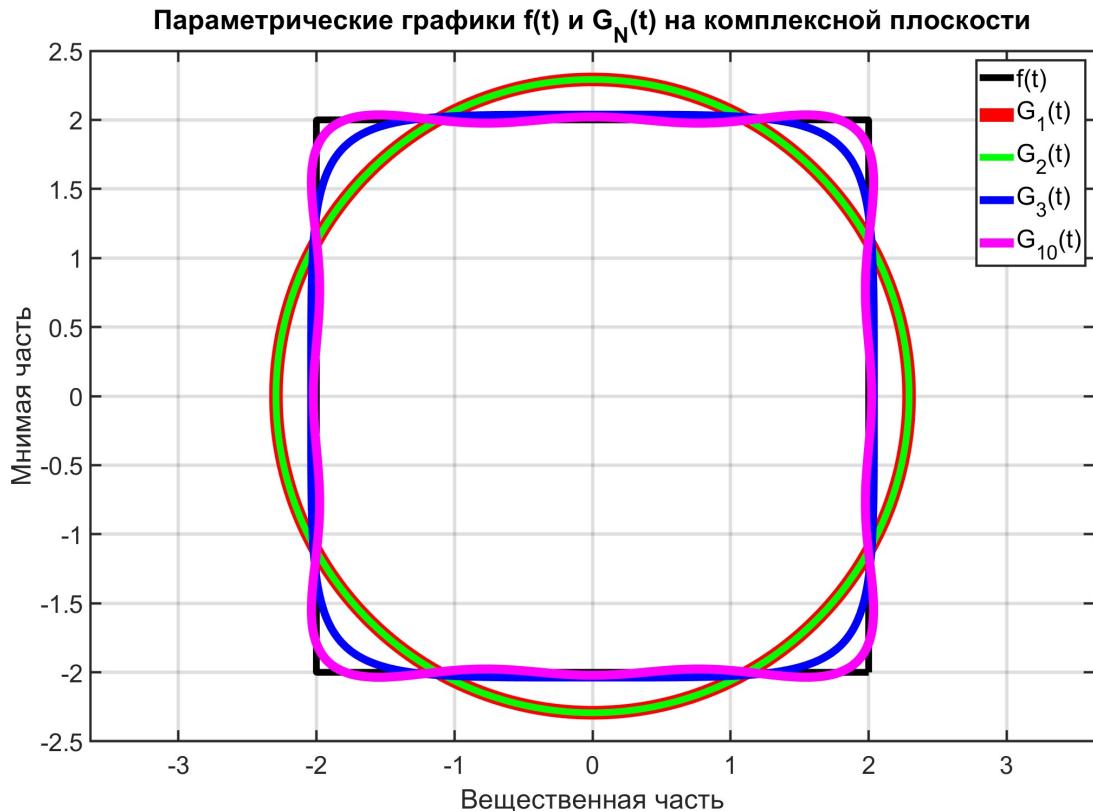
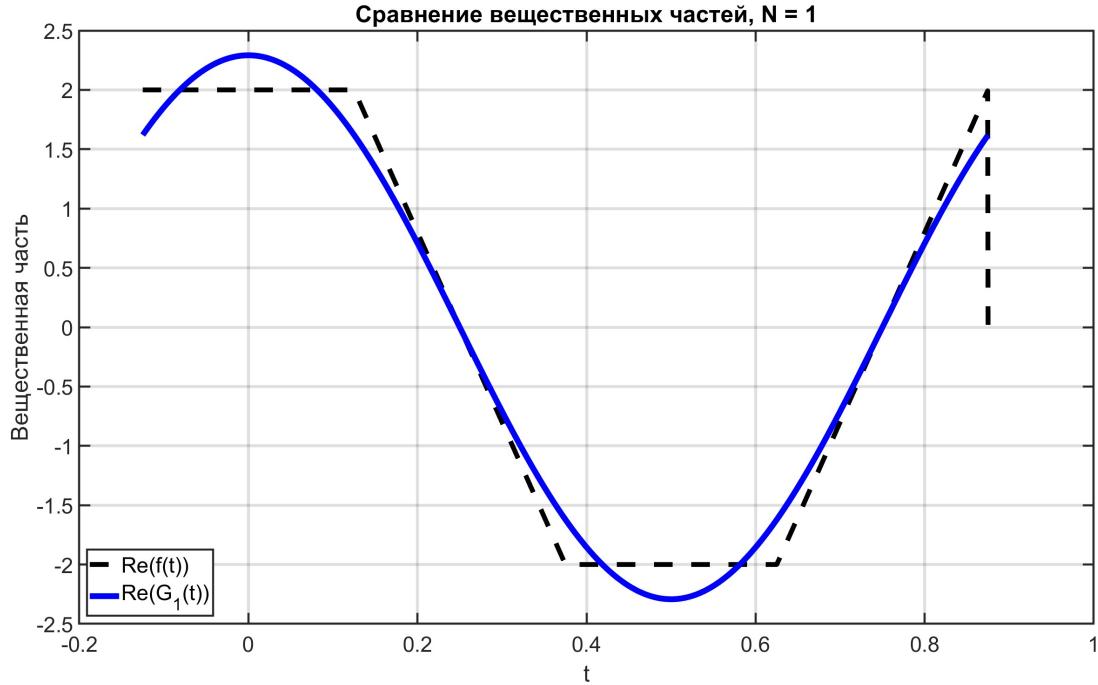
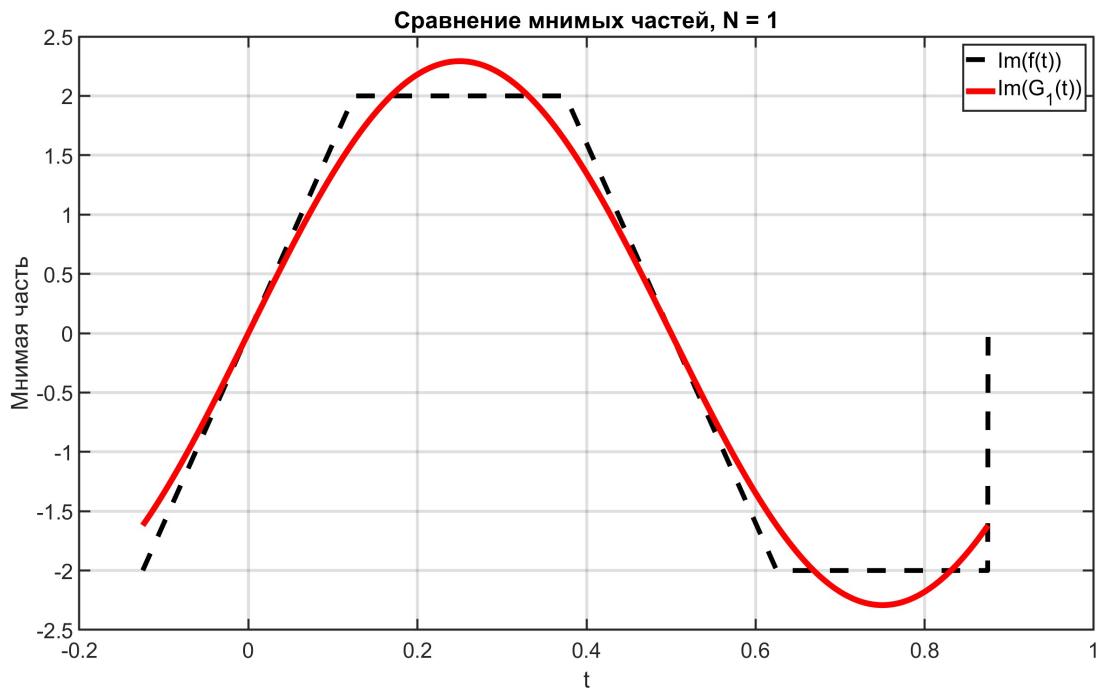


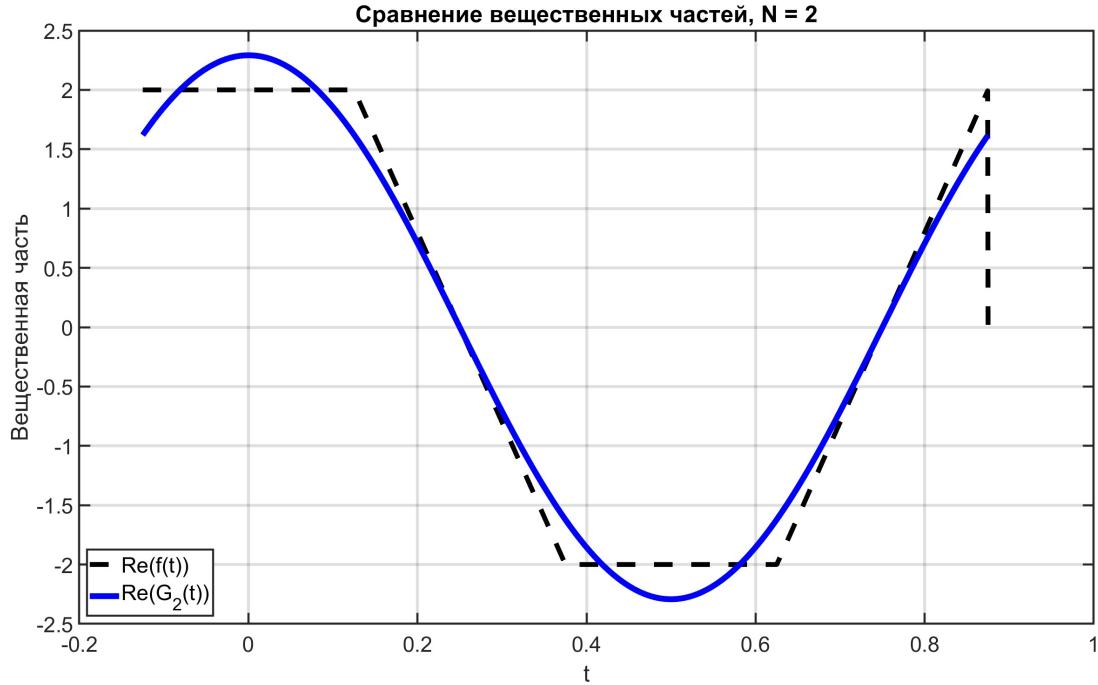
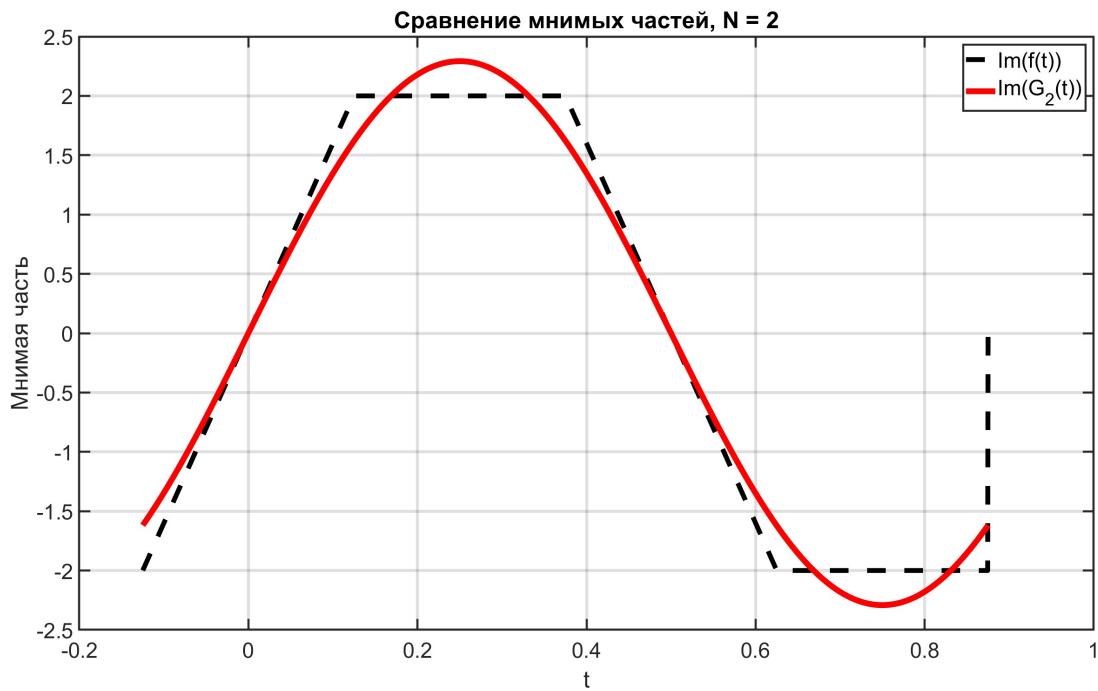
Рис. 29: Графики $f(t)$ и $G_N(t)$ при различных N

Отдельно выведем графики вещественной и мнимых частей для каждого из N в зависимости от t (рисунки 30-37 при всей той же вариации N). Как можно заметить, сходимость работает по каждой из частей - чем больше «вращений» мы берём, тем больше приближаются к вещественной и мнимой частям $f(t)$, соответственно, вещественные и мнимые части частичной суммы G_N .

Результат проверка равенства Парсеваля для $N = 10$ положительный, полученные значения очень близки:

$$E_{func} = 5.3313330002; \quad E_{complex} = 5.3286450407.$$

Рис. 30: Графики вещественных частей $f(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 1$ Рис. 31: Графики вещественных частей $f(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 1$

Рис. 32: Графики вещественных частей $f(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 2$ Рис. 33: Графики вещественных частей $f(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 2$

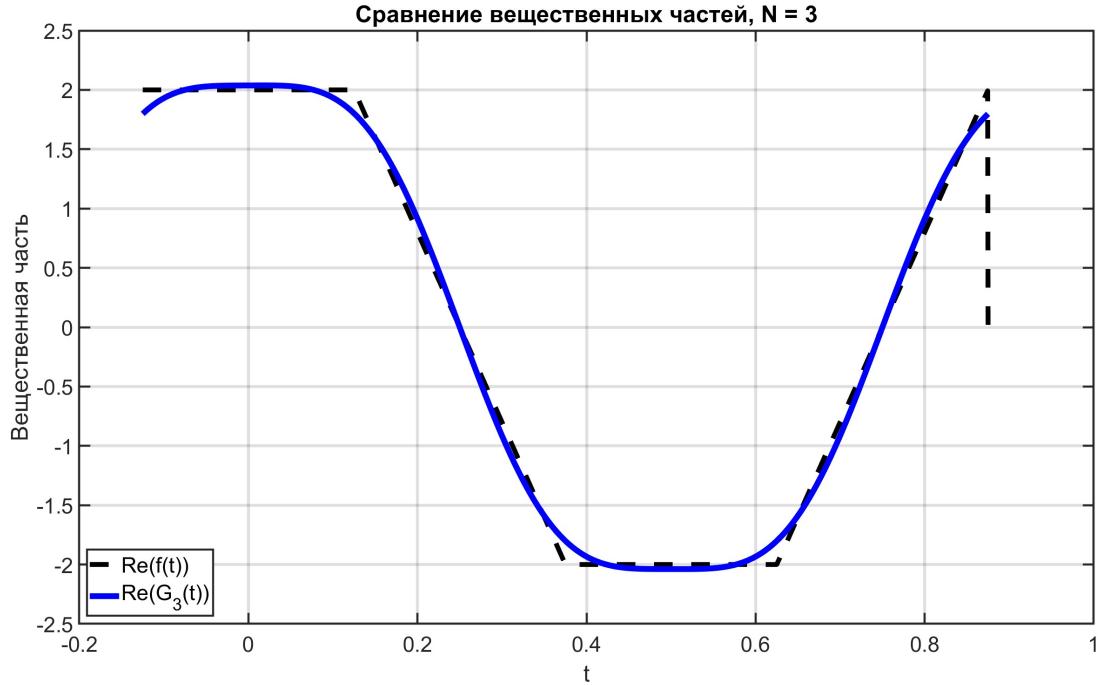
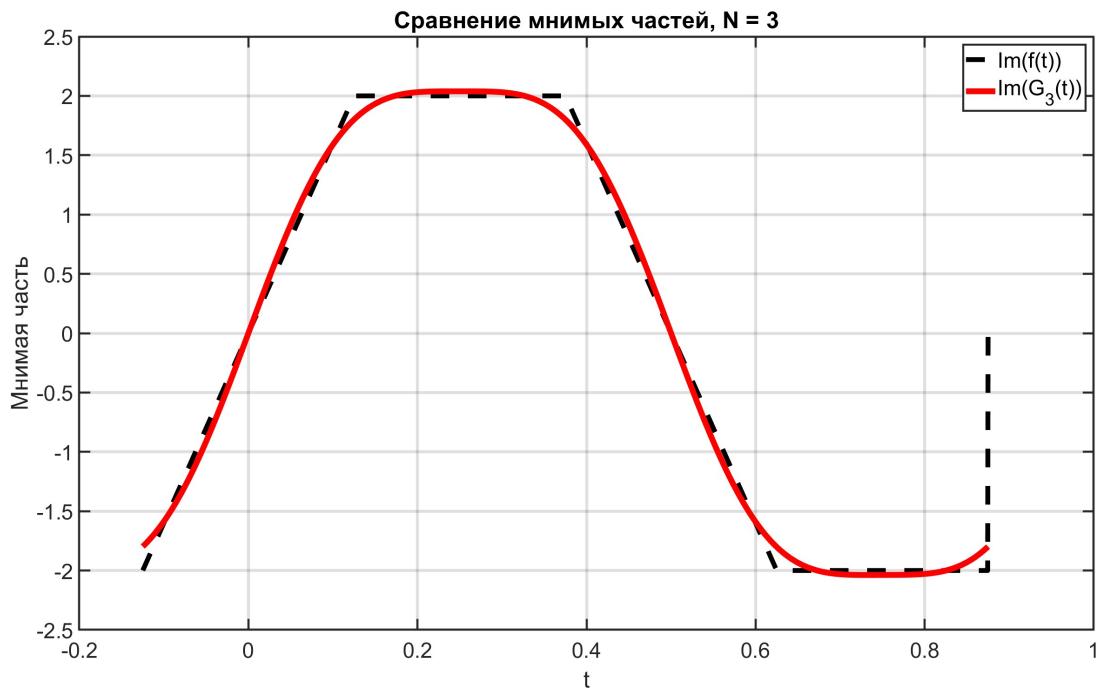
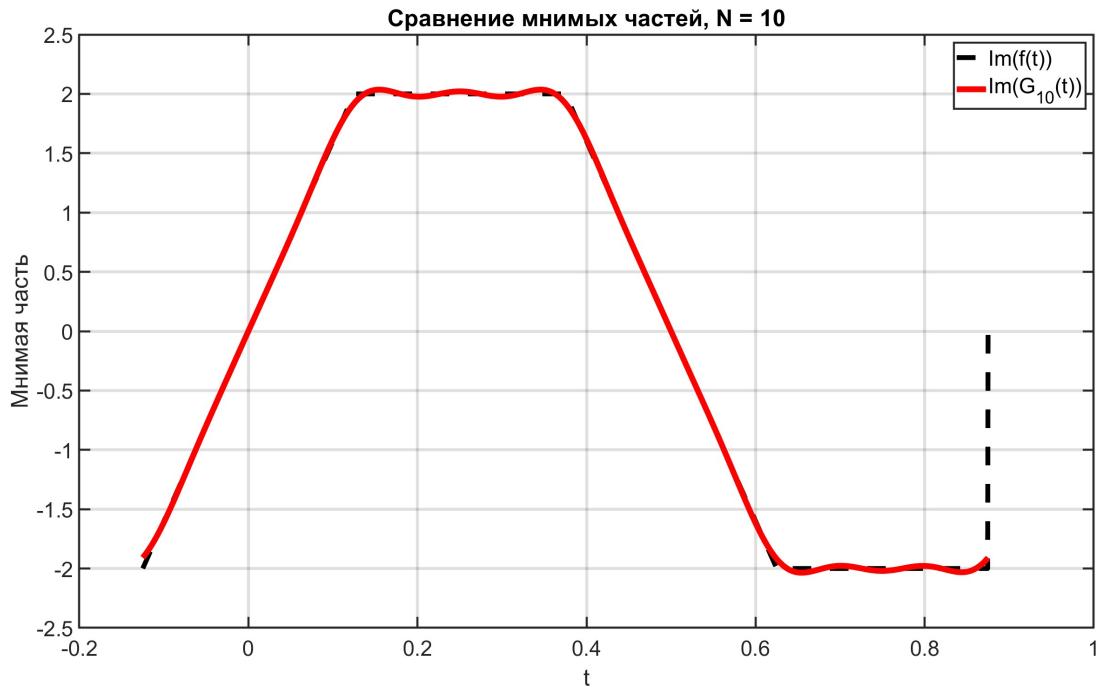
Рис. 34: Графики вещественных частей $f(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 3$ Рис. 35: Графики вещественных частей $f(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 3$

Рис. 36: Графики вещественных частей $f(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 10$ Рис. 37: Графики вещественных частей $f(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 10$

3 Общие выводы

В ходе лабораторной работы были рассмотрены различные типы периодических функций — чётные, нечётные, ни чётные, ни нечётные, а также комплекснозначная функция с кусочно-заданными вещественной и мнимой частями. Для каждой функции были найдены выражения коэффициентов Фурье (вещественных a_n и b_n , а также мнимых c_n), а также написан код для численного расчёта коэффициентов и построения частичных сумм $F_N(t)$ и $G_N(t)$. Проведено сравнение графиков исходных функций с их приближениями с помощью рядов Фурье при различных значениях N , что позволило наглядно проследить улучшение аппроксимации с ростом числа членов ряда.

4 Приложение

Листинг 1: Код для первого пункта

```

1 T = 2;
2 omega0 = 2*pi/T;
3 N = 100;
4 Nt = 1000;
5 %tb = linspace(1, 3, Nt);
6 tb = linspace(-1, 1, Nt);
7 dt = tb(2) - tb(1);
8
9 %f_base = ones(size(tb));
10 %f_base(tb >= 2) = 2;
11
12 %f_base = 1 + tb.^2;
13
14 %f_base = tb;
15
16 f_base = tb + sin(pi*tb).^2;
17
18 a0 = (2/T) * trapz(tb, f_base);
19
20 a = zeros(1, N);
21 b = zeros(1, N);
22 for n = 1:N
23     a(n) = (2/T) * trapz(tb, f_base .* cos(n * omega0 * tb));
24     b(n) = (2/T) * trapz(tb, f_base .* sin(n * omega0 * tb));
25 end
26
27 n_range = -N:N;
28 c = zeros(size(n_range));
29 for k = 1:length(n_range)
30     n = n_range(k);
31     c(k) = (1/T) * trapz(tb, f_base .* exp(-1i * n * omega0 * tb));
32 end
33
34 t_start = -4;
35 t_end = t_start+4*T;
36 t = linspace(t_start, t_end, 2000);
37 f_approx = a0/2 * ones(size(t));
38
39 for n = 1:N
40     f_approx = f_approx + a(n)*cos(n * omega0 * t) + b(n)*sin(n * ...
41         omega0 * t);
42 end
43 f_complex = zeros(size(t));

```

```
44 for k = 1:length(n_range)
45     n = n_range(k);
46     f_complex = f_complex + c(k) * exp(1i * n * omega0 * t);
47 end
48 f_complex = real(f_complex);
49
50 t_mod = mod(t - 1, T);
51 %f_true = ones(size(t));
52 %f_true(t_mod >= 1) = 2;
53
54 %f_true = 1 + (mod(t + 1, T) - 1).^2;
55
56 %f_true = (mod(t + 1, T) - 1);
57
58 f_true = (mod(t + 1, T) - 1) + (sin(pi*(mod(t + 1, T) - 1))).^2;
59
60 E_func = (1/T) * trapz(tb, f_base.^2)
61 E_real = (a0.^2)/4 + 0.5*sum(a.^2 + b.^2)
62 E_complex = sum(abs(c).^2)
```

Листинг 2: Код для построения параметрических графиков

```

1 R = 2;
2 T = 1;
3 omega = @(n) 2*pi*n;
4
5 Nt = 100000;
6 t_int = linspace(-1/8, 7/8, Nt);
7 dt = t_int(2) - t_int(1);
8
9 func = @(t) ...
10   ((t ≥ -1/8 & t < 1/8) .* (2 + 16i * t) + ...
11    (t ≥ 1/8 & t < 3/8) .* (4 - 16*t + 2i) + ...
12    (t ≥ 3/8 & t < 5/8) .* (-2 + 1i*(8 - 16*t)) + ...
13    (t ≥ 5/8 & t < 7/8) .* (-12 + 16*t - 2i)) ...
14    .* (t ≥ -1/8 & t ≤ 7/8);
15 ft = func(t_int);
16
17 t = linspace(-1/8, 7/8, 2000);
18 t = [t, t(1)];
19 ft_plot = func(t);
20 valid = (ft_plot ≠ 0);
21
22 Ns = [1, 2, 3, 10];
23 colors = ['r', 'g', 'b', 'm'];
24 widths = [12, 6, 7, 8];
25
26 for i = 1:length(Ns)
27   N = Ns(i);
28   n_vals = -N:N;
29   c = zeros(size(n_vals));
30
31   for k = 1:length(n_vals)
32     n = n_vals(k);
33     c(k) = trapz(t_int, ft .* exp(-1i * omega(n) * t_int));
34   end
35
36 GN = zeros(size(t));
37 for k = 1:length(n_vals)
38   GN = GN + c(k) * exp(1i * omega(n_vals(k)) * t);
39 end
40 ...
41 end

```

Листинг 3: Код для графиков с вещественными и мнимой частями

```

1 R = 2;
2 T = 1;
3 omega = @(n) 2*pi*n;
4
5 N = 10;
6 n_vals = -N:N;
7
8 t = linspace (-1/8, 7/8, 2000);
9
10 f = @(t) ...
    (((t ≥ -1/8 & t < 1/8) .* (2 + 16i * t)) + ...
     ((t ≥ 1/8 & t < 3/8) .* (4 - 16*t + 2i)) + ...
     ((t ≥ 3/8 & t < 5/8) .* (-2 + 1i*(8 - 16*t))) + ...
     ((t ≥ 5/8 & t < 7/8) .* (-12 + 16*t - 2i)) ...
    .* (t ≥ -1/8 & t ≤ 7/8));
11
12
13
14
15
16
17 ft = f(t);
18
19 t_int = linspace (-1/8, 7/8, 2000);
20 ft_int = f(t_int);
21
22 c = zeros (size(n_vals));
23 for k = 1:length(n_vals)
24     n = n_vals(k);
25     c(k) = trapz(t_int, ft_int .* exp(-1i * omega(n) * t_int));
26 end
27
28 GN = zeros (size(t));
29 for k = 1:length(n_vals)
30     GN = GN + c(k) * exp(1i * omega(n_vals(k)) * t);
31 end

```