

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по лабораторной работе №1
Моделирование и устойчивость
Вариант 11

Выполнили студенты

Мовчан Игорь Евгеньевич

Боглачев Артём Сергеевич

Преподаватель

Краснов Александр Юрьевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Влияние дискретного элемента	2
2	Исследование устойчивости	8
3	Построение командных генераторов	13
4	Выводы	17

1 Влияние дискретного элемента

Реализуем схему с дискретным элементом с периодом дискретизации $T = 0.2$ с и коэффициентом передачи ОУ $K_{CO} = 7.2$:

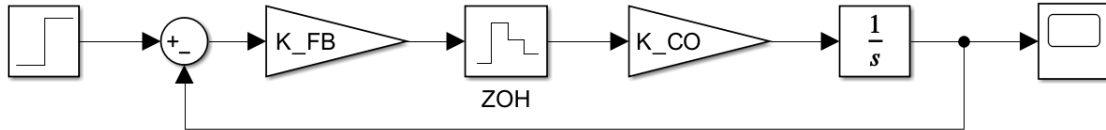


Рис. 1: Система с дискретным элементом

Выведем разностное уравнение этой схемы. На выходе экстраполиатора нулевого порядка имеем $u(t) = u[k]$ при $t \in [kT, (k+1)T]$. Тогда интегратору на вход подается постоянная величина, а значит

$$y((k+1)T) = y(kT) + K_{CO}Tu[k]$$

Откуда при компактном обозначении $y[k] = y(kT)$:

$$y[k+1] = y[k] + K_{CO}Tu[k]$$

Далее, учитывая, что $u[k] = K_{FB}(r[k] - y[k])$, $K_{FB} \in \mathbb{R}$:

$$y[k+1] = (1 - K_{FB}K_{CO}T)y[k] + K_{FB}K_{CO}Tr[k]$$

В данном случае $r[k]$ - дискретная версия входного сигнала $r(t)$ в моменты времени $t = kT$. Для рассматриваемой схемы

$$r(t) = g(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

Для дальнейшего анализа полезным будет ввести переменную, характеризующую динамику дискретной системы:

$$z = 1 - K_{FB}K_{CO}T \quad \Rightarrow \quad y[k+1] = zy[k] + (1-z)r[k]$$

Рассмотрим несколько важных значений для $z \in \mathbb{R}$. Во-первых, при $|z| < 1$ и $k \rightarrow \infty$ зануляется та часть системы, которая не зависит от входа, причем при введенном $r[k] = 1$ получим $y[k] \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} y[k] &= z^k y[0] + (1 - z) \sum_{i=0}^{k-1} z^{k-i-1} r[i] = \\ &= z^k y[0] + (1 - z) \frac{1 - z^k}{1 - z} = z^k y[0] + 1 - z^k \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Выведем соответствующие значения для коэффициента K_{FB} :

$$\begin{aligned} -1 < 1 - K_{FB} K_{CO} T < 1 \\ 0 < K_{FB} K_{CO} T < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < K_{FB} < \frac{2}{K_{CO} T} \end{aligned}$$

Здесь стоит обозначить, что нейтральная граница устойчивости достигается при $|z| = 1$, то есть при значениях $K_{FB} \in \{0, \frac{2}{K_{CO} T}\}$. Колебательная - при $z = -1$ или $K_{FB} = \frac{2}{K_{CO} T}$, будем иметь постоянные колебания - знакопеременные скачки.

Также отметим, что при $-1 < z < 0$ или $\frac{1}{K_{CO} T} < K_{FB} < \frac{2}{K_{CO} T}$ значения могут каждый раз менять свой знак, но затухают, так как $|z| < 1$. Максимальная колебательность достигается на нейтральной границе устойчивости при $z = -1$ - часть, соответствующая $y[0]$ не уходит, а остаётся в системе в знакопеременной составляющей.

При $0 \leq z < 1$ или $0 < K_{FB} < \frac{1}{K_{CO} T}$ система сходится без скачков. Важно, что с $z = 0$ или $K_{FB} = \frac{1}{K_{CO} T}$ получается оптимальное значение по быстродействию, так как в этом случае $y[k+1] = r[k]$, то есть выход сразу же принимает значение входа. Однако в реальных системах такое значение может быть недостижимо из-за ограничений на максимальное значение K_{FB} , которое при уменьшении периода дискретизации $T \rightarrow 0$ оказывается слишком большим.

Полюс $z = 0$ к тому же ломает динамику системы - теряется существующая за счет интегратора инерционность (не используется предыдущее состояние $y[k]$ при подсчете следующего $y[k+1]$):

$$y[k+1] = r[k] = T K_{CO} K_{FB} r[k]$$

При $z = 1$ или $K_{FB} = 0$ система не реагирует на входной сигнал, так как $y[k + 1] = y[k] = y[0]$, сохраняется начальное состояние системы, находящейся на границе устойчивости.

Рассмотрим также случай $|z| > 1$ или $K_{FB} < 0$ и $K_{FB} > \frac{2}{K_{co}T}$. С этими значениями система неустойчива, так как $z^k \rightarrow \infty$, где $k \rightarrow \infty$. При $z < -1$ наблюдаются колебания с нарастающей амплитудой, а при $z > 1$ - плавный рост.

Проведем моделирование для убеждения в справедливости полученных результатов. Возьмем 7 значений K_{FB} , соответствующих разным типам поведения системы, а именно:

1. $z = -1.5$ или $K_{FB} = 1.7361$: неустойчивость с колебаниями
2. $z = -1$ или $K_{FB} = 1.3889$: колебательная граница
3. $z = -0.5$ или $K_{FB} = 1.0417$: устойчивость с колебаниями
4. $z = 0$ или $K_{FB} = 0.6944$: оптимальное быстродействие
5. $z = 0.5$ или $K_{FB} = 0.3472$: устойчивость без колебаний
6. $z = 1$ или $K_{FB} = 0$: нейтральная граница
7. $z = 1.5$ или $K_{FB} = -0.3472$: неустойчивость без колебаний

На рисунках 2-8 представлены результаты моделирования при начальных условиях $y(0) = 0$ и входе $r(t) = 1$.

В общем, при дискретизации системы с помощью экстраполятор нулевого порядка ухудшаются свойства системы: появляется запаздывание по управлению, из-за чего ухудшается его качество, меньше запас устойчивости. К тому же возникает эффект наложения частот для дискретных полюсов z и непрерывных $s = a + jb$, которые связаны соотношением:

$$z = e^{sT} = e^{(a+jb)T} = e^{aT}(\cos(bT) + j \sin(bT))$$

И при $b = \pi/T + 2\pi k/T$ будет $z = -e^{aT}$ для различных $k \in \mathbb{Z}$. Высокие частоты могут скрываться под низкими!

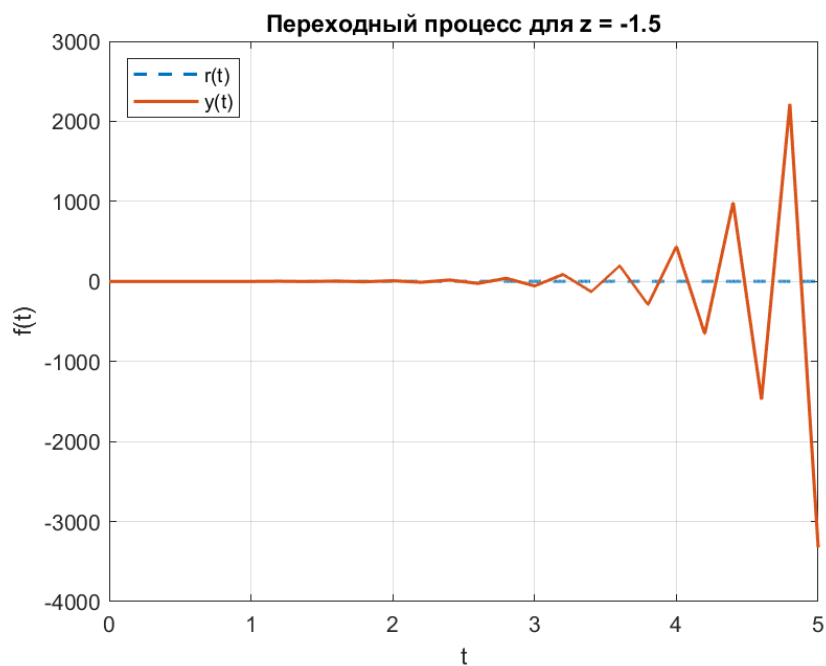


Рис. 2: Переходный процесс при $z = -1.5$ или $K_{FB} = 1.7361$

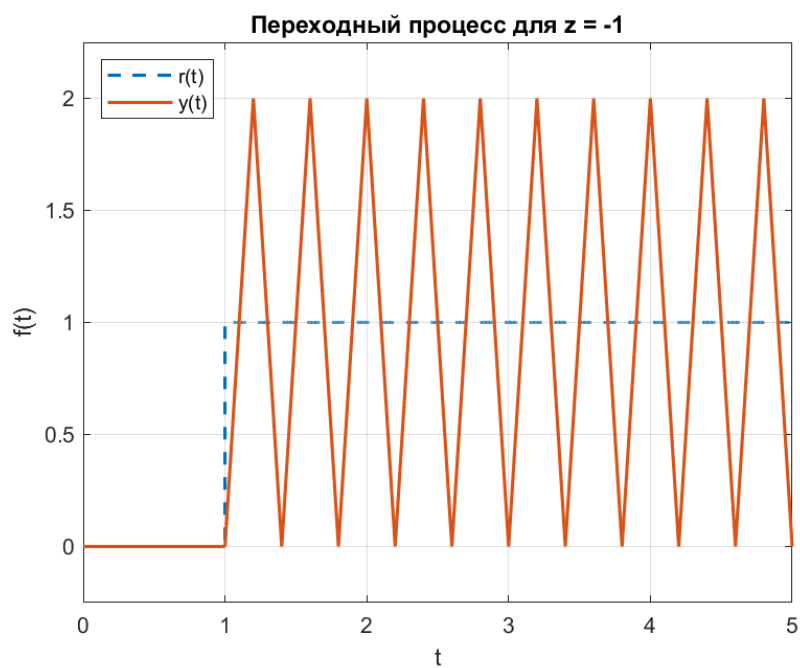


Рис. 3: Переходный процесс при $z = -1$ или $K_{FB} = 1.3889$

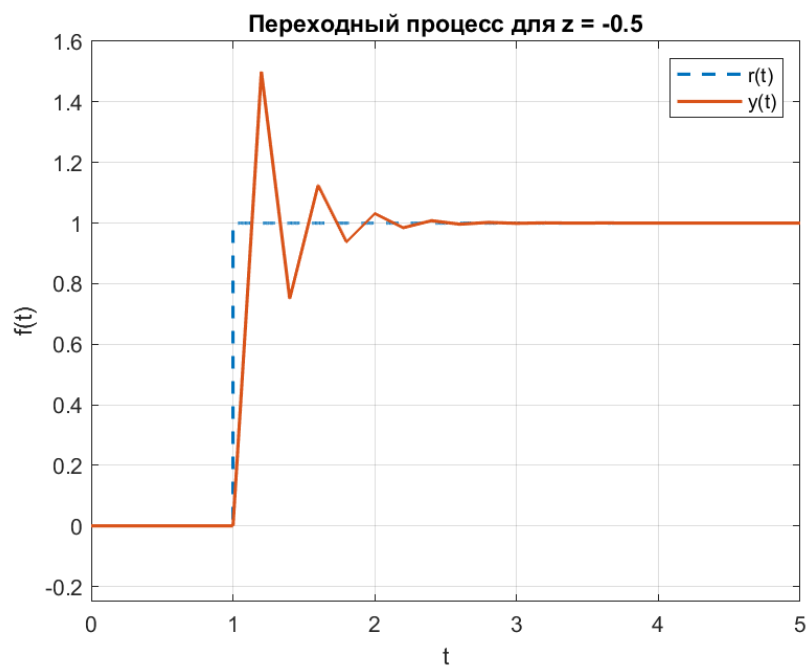


Рис. 4: Переходный процесс при $z = -0.5$ или $K_{FB} = 1.0417$

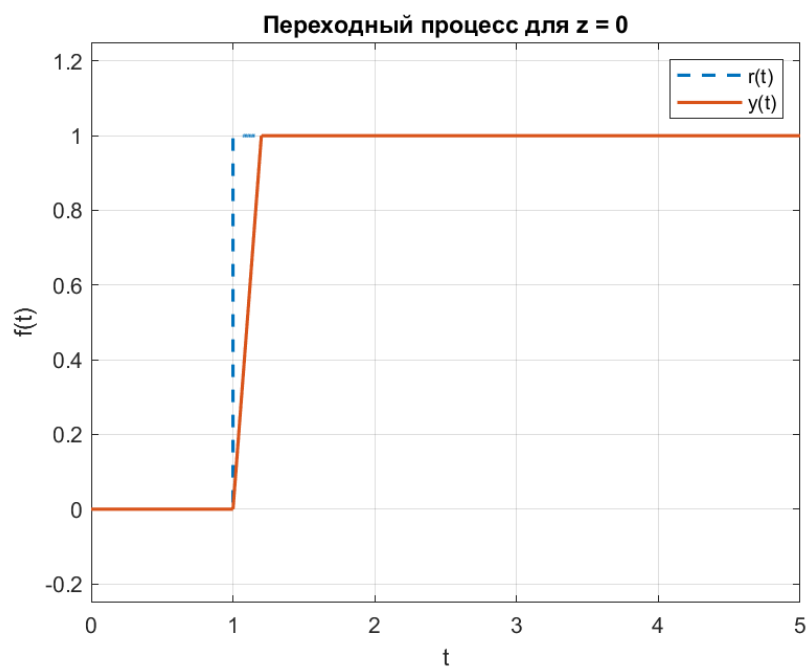


Рис. 5: Переходный процесс при $z = 0$ или $K_{FB} = 0.6944$

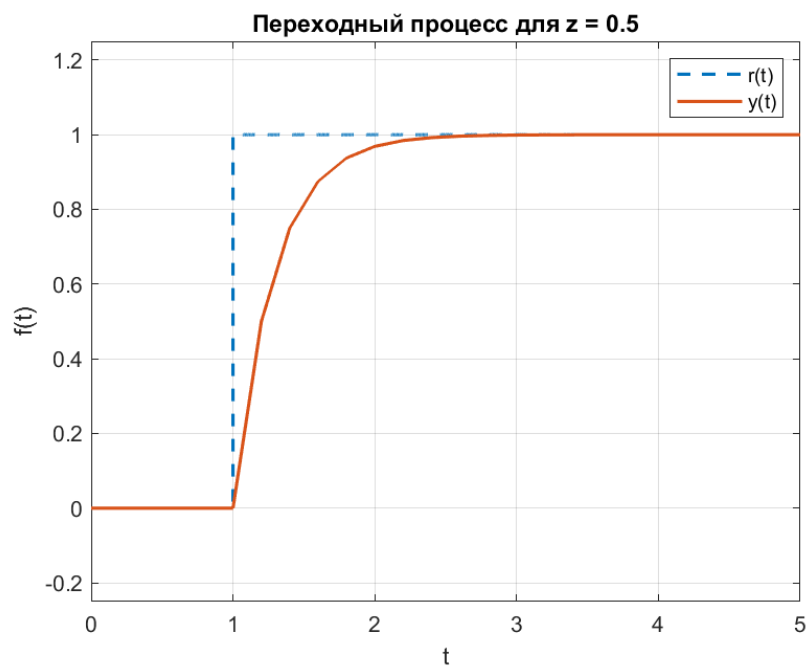


Рис. 6: Переходный процесс при $z = 0.5$ или $K_{FB} = 0.3472$

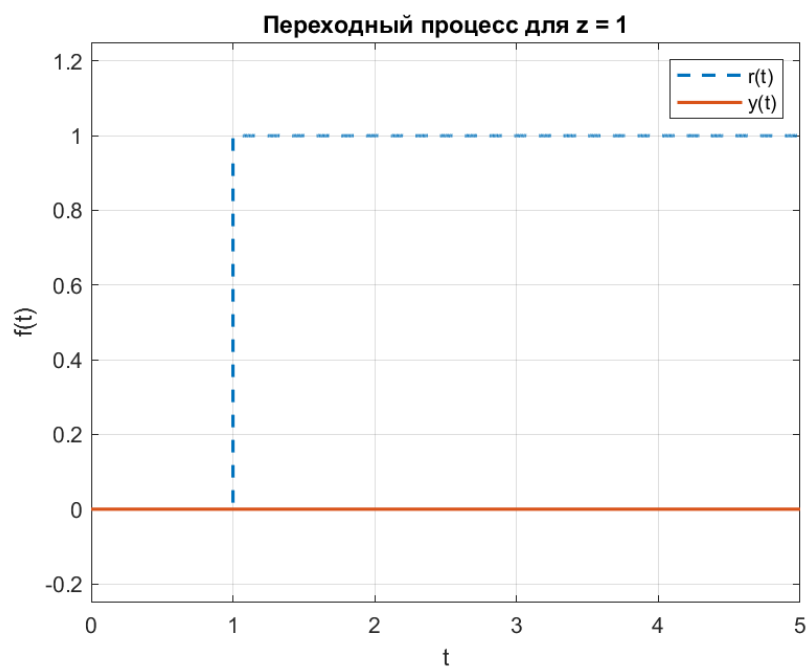
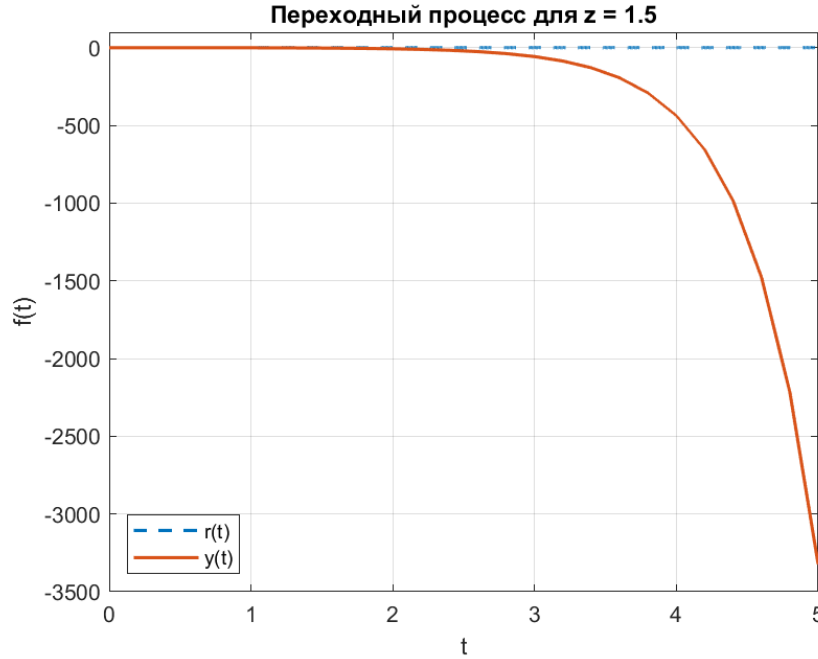


Рис. 7: Переходный процесс при $z = 1$ или $K_{FB} = 0$

Рис. 8: Переходный процесс при $z = 1.5$ или $K_{FB} = -0.3472$

2 Исследование устойчивости

Рассмотрим непрерывный ОУ, заданный уравнением $\ddot{y} = u$, где $u(t)$ - управляющее воздействие, $y(t)$ - выходная величина.

Зададимся $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$, а значит, $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, а $\dot{x}_2(t) = u(t)$. Тогда модель в форме вход-состояние-выход будет:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = A_{\text{н}}x + B_{\text{н}}u$$

Дискретизируем ее с использованием выражений:

$$A = e^{A_{\text{н}}T} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{\text{н}}^i T^i}{i!}, \quad B = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{\text{н}}^{i-1} T^i}{i!} B_{\text{н}}$$

Заметим, что $A^2 = 0$, а значит, $A^n = 0$ для любого $n \geq 2$. Тогда

$$A = I + A_{\text{н}}T = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = TB_{\text{н}} + \frac{A_{\text{н}}T^2 B_{\text{н}}}{2} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

В итоге, получаем дискретную модель:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Теперь зададим управляющее воздействие в виде

$$u(k) = -Kx(k) = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

А также матрицу динамики замкнутой системы:

$$F = A - BK = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - k_1 T^2/2 & T - k_2 T^2/2 \\ -k_1 T & 1 - k_2 T \end{bmatrix}$$

Характеристический полином для замкнутой системы тогда:

$$\begin{aligned} P(z) &= \det(zI - F) = \begin{vmatrix} z - 1 + k_1 T^2/2 & -T + k_2 T^2/2 \\ k_1 T & z - 1 + k_2 T \end{vmatrix} = \\ &= \left(z - 1 + \frac{k_1 T^2}{2} \right) (z - 1 + k_2 T) + k_1 T \left(T - \frac{k_2 T^2}{2} \right) = \\ &= (z - 1)^2 + k_2 T(z - 1) + \frac{k_1 T^2}{2}(z - 1) + \frac{k_1 k_2 T^3}{2} + k_1 T^2 - \frac{k_1 k_2 T^3}{2} = \\ &= z^2 + \left(-2 + k_2 T + \frac{k_1 T^2}{2} \right) z + \left(1 - k_2 T + \frac{k_1 T^2}{2} \right) \end{aligned}$$

С помощью матрицы M размерности 2×2 такой, что $x = M\xi$ и существует M^{-1} , перейдем к базису ξ системы, где матрица F была бы диагональной и имела собственными числами z_1 и z_2 :

$$F_d = M^{-1}FM = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}, \quad \xi(m+1) = F_d \xi(m), \quad \xi_i(m) = z_i^m \xi_i(0)$$

Характеристический полином замкнутой системы в этом случае:

$$P(z) = \det(zI - F_d) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2$$

Зная, что при переходе в новый базис характеристический полином остается тем же:

$$\det(zI - F_d) = \det(M^{-1}(zI - F)M) = \det(zI - F)$$

Получаем систему уравнений на коэффициенты k_1 и k_2 :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 - k_2T - \frac{k_1T^2}{2} \\ z_1z_2 = 1 - k_2T + \frac{k_1T^2}{2} \end{cases}$$

Решим ее аналитически с введенными $s = z_1 + z_2$ и $p = z_1z_2$:

$$k_1 = \frac{1 - s + p}{T^2}, \quad k_2 = \frac{3 - s - p}{2T}$$

Отлично! Теперь можно синтезировать матрицу K по желаемым корням z_1 и z_2 замкнутой системы, а также взятому заранее периоду дискретизации (пусть он будет равен $T = 0.2$ с). Итак, рассмотрим пять случаев замкнутых систем с разными собственными числами:

1. $z_1 = 0.1$ и $z_2 = 0.7$: обратная связь $K_1 = [6.75 \quad 5.325]^T$
2. $z_1 = -1.2$ и $z_2 = -0.4$: обратная связь $K_2 = [77 \quad 10.3]^T$
3. $z_1 = 0.1$ и $z_2 = 0.5$: обратная связь $K_3 = [11.25 \quad 5.875]^T$
4. $z_{12} = \pm 1.2j$: обратная связь $K_4 = [61 \quad 3.9]^T$
5. $z_{12} = -0.8 \pm 0.7j$: обратная связь $K_5 = [93.25 \quad 8.675]^T$

Качества переходных процессов в этих системах будет различными, но все будут подчиняться логике, описанной в первом пункте. Так, в первом случае оба корня лежат внутри единичного круга, значит система устойчива, при этом оба корня положительны, значит переходный процесс пройдет без колебаний. И так далее.

Промоделируем полученные системы с начальными условиями $y(0) = 1$ и $\dot{y}(0) = 0$ и входом $r(t) = g(t)$.

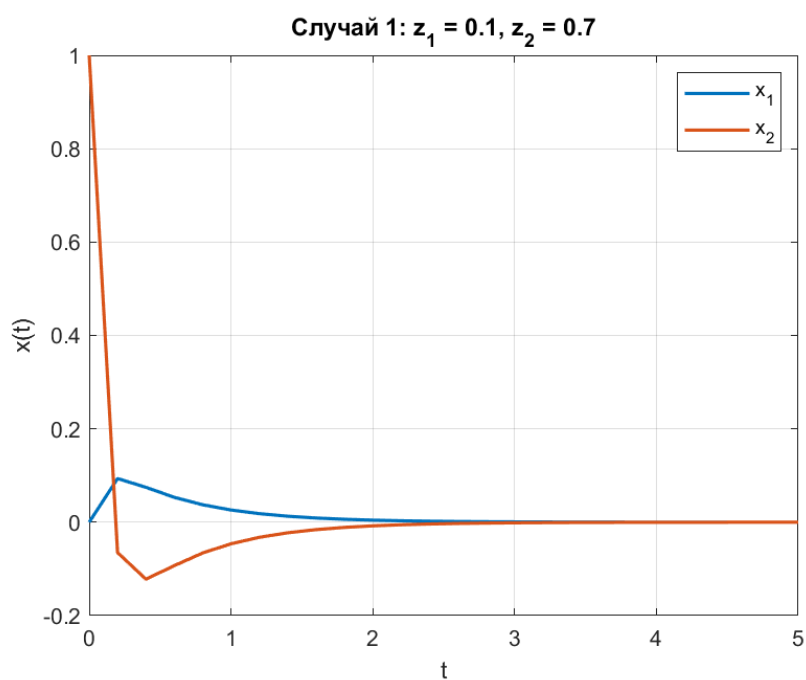


Рис. 9: Переходный процесс при $z_1 = 0.1$ и $z_2 = 0.7$

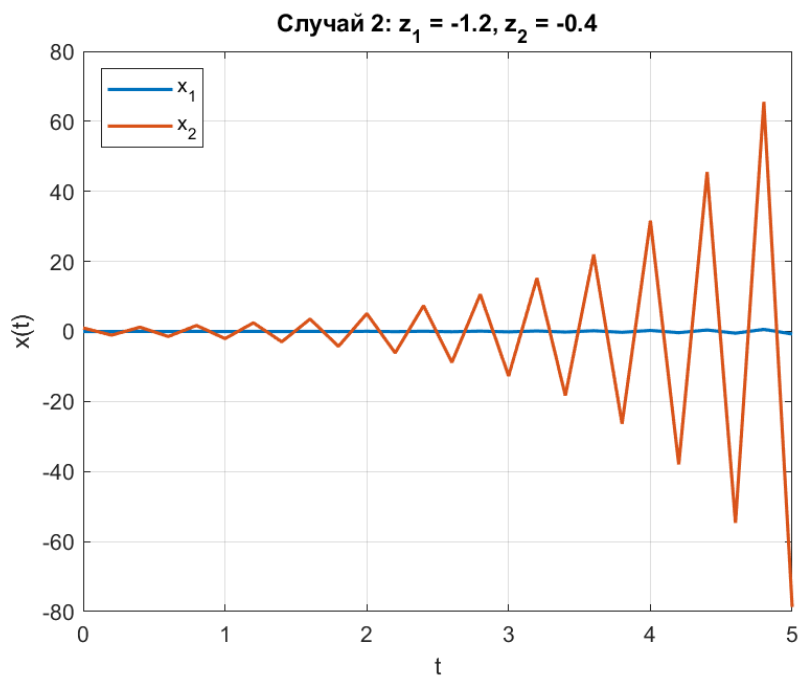


Рис. 10: Переходный процесс при $z_1 = -1.2$ и $z_2 = -0.4$

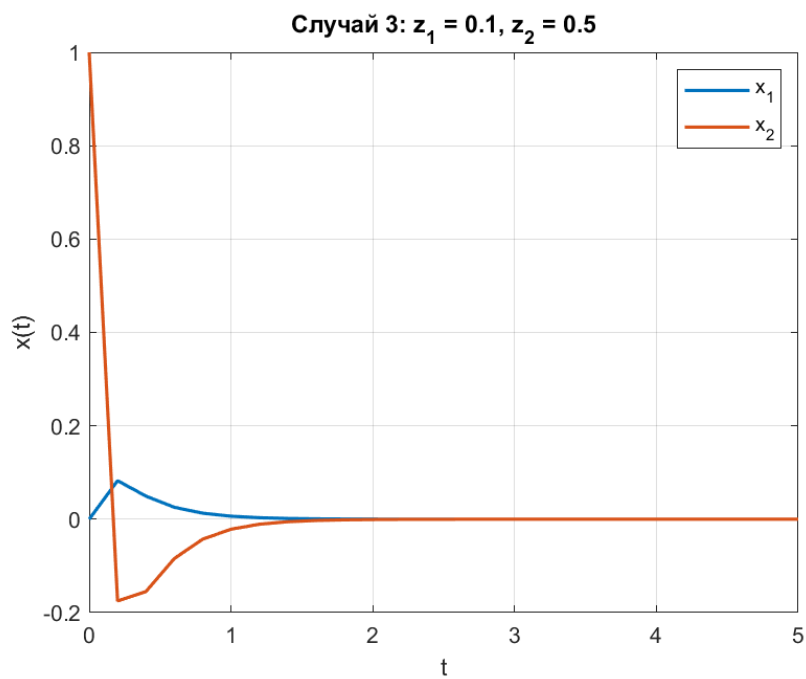


Рис. 11: Переходный процесс при $z_1 = 0.1$ и $z_2 = 0.5$

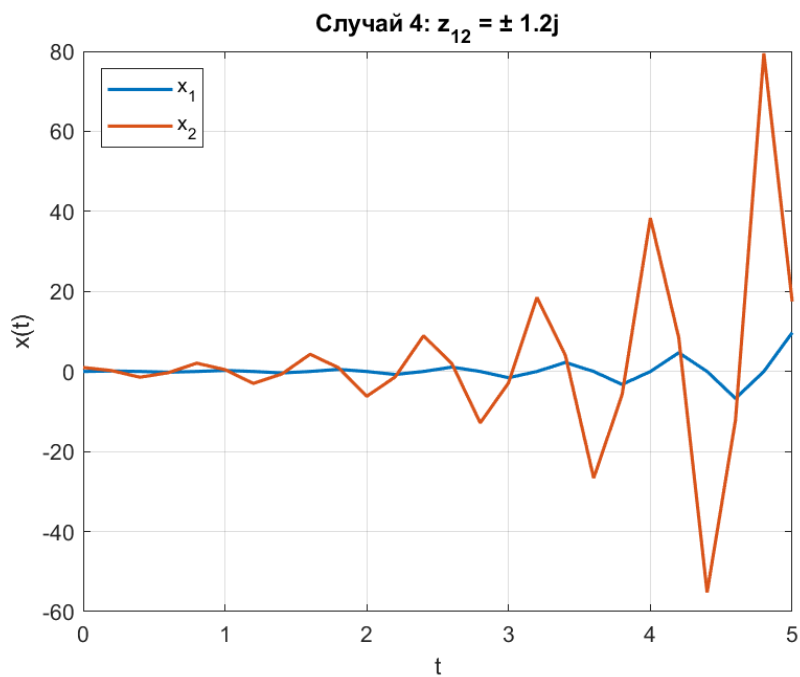


Рис. 12: Переходный процесс при $z_{12} = \pm 1.2j$

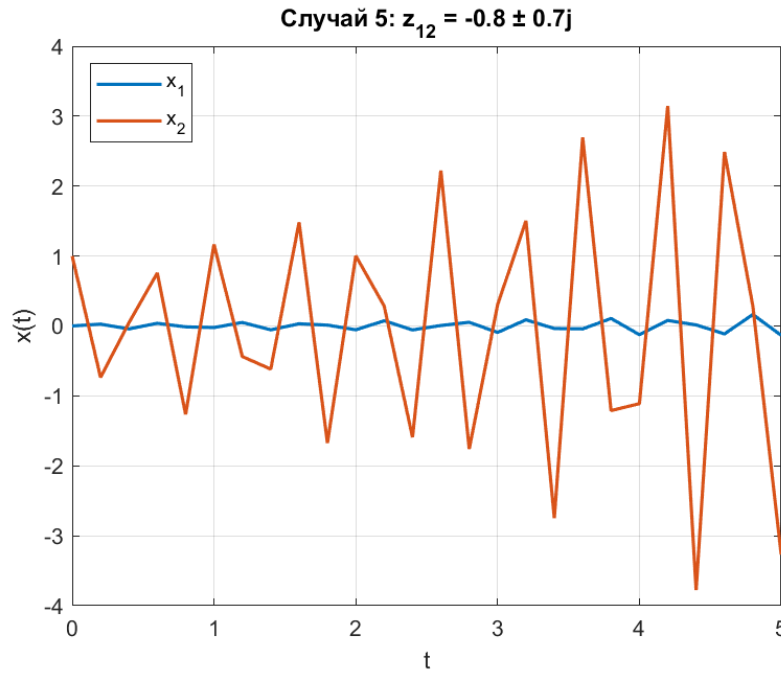


Рис. 13: Переходный процесс при $z_{12} = -0.8 \pm 0.7j$

3 Построение командных генераторов

Синтезируем командный генератор гармонического сигнала вида $g(k) = A \sin(kT\omega)$ с параметрами из варианта:

$$T = 0.2 \text{ с}, \quad A = -1.3, \quad \omega = 0.87 \text{ рад/с}$$

Найдем разностное уравнение для этого сигнала:

$$g(k+1) = A \sin((k+1)T\omega) = A(\sin(kT\omega) \cos(T\omega) + \cos(kT\omega) \sin(T\omega))$$

Введем переменные состояния:

$$\xi_1(k) = g(k) = A \sin(kT\omega), \quad \xi_2(k) = A \cos(kT\omega)$$

Тогда система уравнений для состояний:

$$\begin{cases} \xi_1(k+1) = \xi_1(k) \cos(T\omega) + \xi_2(k) \sin(T\omega) \\ \xi_2(k+1) = -\xi_1(k) \sin(T\omega) + \xi_2(k) \cos(T\omega) \end{cases}$$

Запишем эту систему в матричном виде:

$$\xi(k+1) = \begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(T\omega) & \sin(T\omega) \\ -\sin(T\omega) & \cos(T\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \end{bmatrix} = \Gamma_d \xi(k)$$

Тогда итоговая модель задается уравнением

$$g(k) = H\xi(k) = H\Gamma_d^k \xi(0), \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

При начальных условиях и матрице H :

$$\xi(0) = \begin{bmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \sin(0) \\ A \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.3 \end{bmatrix}$$

Соберем схему дискретного генератора при $Am1 = \Gamma_d$:

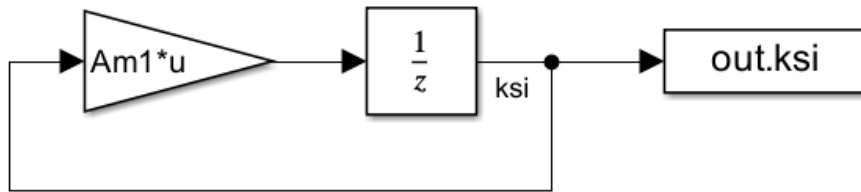


Рис. 14: Схема командного генератора гармонического сигнала

Также промоделируем его работу при соответствующих начальных условиях $\xi(0)$, записанных выше. Результат представлен на рисунке 15. Можем видеть, что полученный командный генератор действительно дает дискретизированный гармоническим сигналом с заданными параметрами.

Далее синтезируем дискретную модель возмущения $g(k) = A + BkT + C(kT)^2$ с параметрами из варианта:

$$A = 5, \quad B = 5.5, \quad C = 1.5$$

Также выведем разностное уравнение для этого сигнала. Зададимся первой переменной состояния:

$$\xi_1(k) = g(k)$$

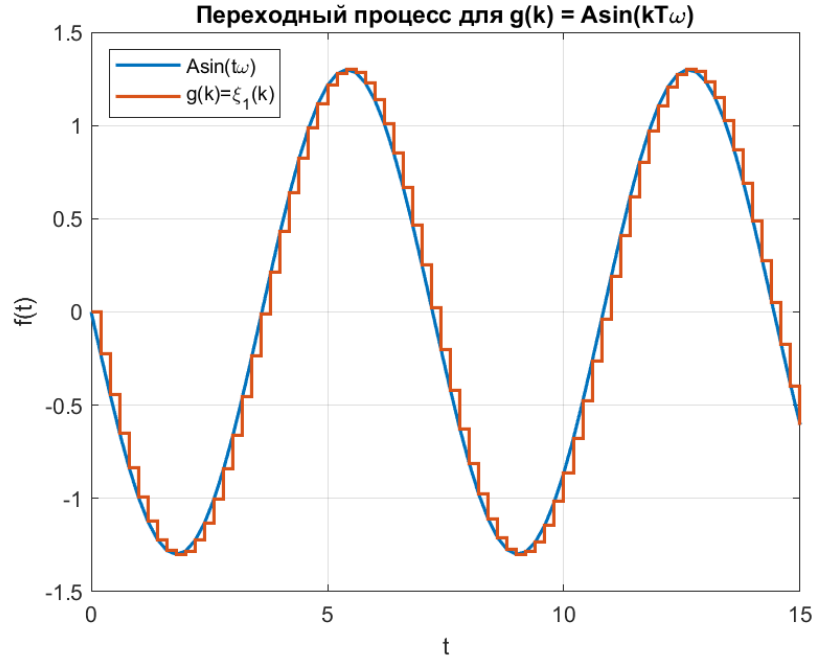


Рис. 15: Дискретизированный гармонический сигнал $g(k) = A \sin(kT\omega)$

Возьмем вторую переменную состояния:

$$\xi_2(k) = \xi_1(k+1) = A + BkT + C(kT)^2 + BT + 2CkT^2 + CT^2$$

$$\xi_2(k) = \xi_1(k) + BT + 2CkT^2 + CT^2$$

Возьмем третью переменную состояния:

$$\xi_3(k) = \xi_2(k+1) = \xi_1(k+1) + BT + 2CkT^2 + CT^2 + 2CT^2$$

Откуда:

$$\xi_3(k) = \xi_1(k+1) + \xi_2(k) - \xi_1(k) + 2CT^2 = 2\xi_2(k) - \xi_1(k) + 2CT^2$$

Далее, имеем:

$$\xi_3(k+1) = 2\xi_2(k+1) - \xi_1(k+1) + 2CT^2$$

Из выражения для $\xi_3(k)$ можно выразить CT^2 :

$$CT^2 = \xi_3(k) - 2\xi_2(k) + \xi_1(k)$$

И тогда:

$$\begin{aligned}\xi_3(k+1) &= 2\xi_2(k+1) - \xi_1(k+1) + \xi_3(k) - 2\xi_2(k) + \xi_1(k) = \\ &= 3\xi_3(k) - 3\xi_2(k) + \xi_1(k)\end{aligned}$$

В матричной форме система записывается как

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \\ \xi_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix} = \Gamma_d \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix}$$

Имеем также

$$g(k) = H\xi(k) = H\Gamma_d^k\xi(0), \quad H = [1 \ 0 \ 0]$$

Начальные условия задаются через $k = 0$ и $g(0) = A$:

$$\xi(0) = \begin{bmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \\ \xi_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A + BT + CT^2 \\ A + 2BT + 4CT^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6.4688 \\ 8.125 \end{bmatrix}$$

Соберем схему дискретного генератора:

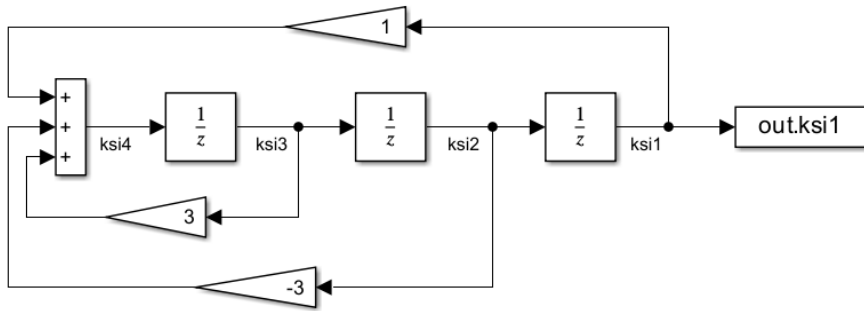


Рис. 16: Схема командного генератора полиномиального сигнала

Промоделируем его работу при начальных условиях $\xi(0)$. Результат представлен на рисунке 17. Можем видеть, что полученный командный генератор действительно дает дискретизированный полиномиальный сигнал с заданными параметрами.

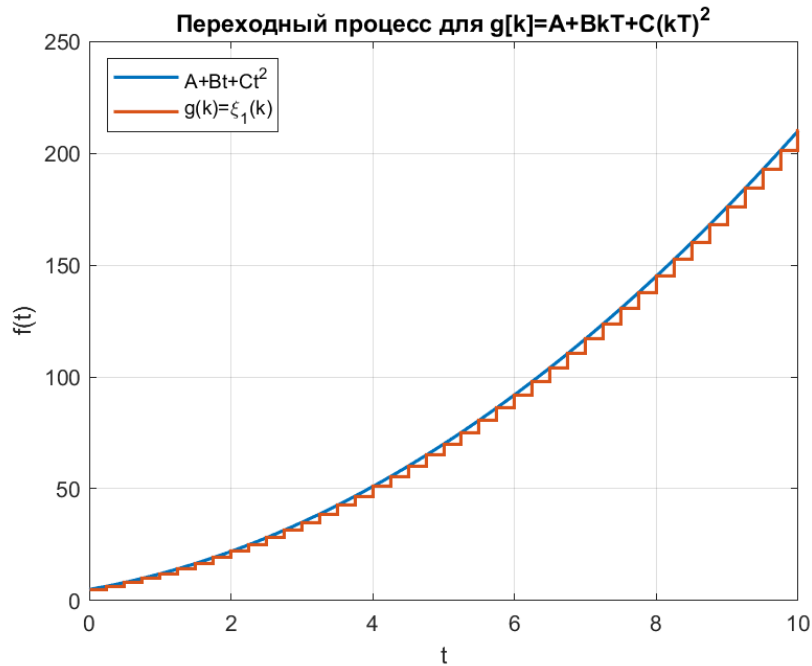


Рис. 17: Дискретизированный полиномиальный сигнал $g(k) = A + BkT + C(kT)^2$

4 Выводы

В данной работе мы рассмотрели влияние дискретного элемента на устойчивость систем управления, исследовали устойчивость дискретных систем с помощью собственных чисел матрицы динамики замкнутой системы, а также синтезировали командные генераторы дискретных сигналов. Все полученные результаты были подтверждены с помощью моделирования.