# 1 Вычисление длины $C^0$-гладкой кривой

Вычисленные через $A^*$ точки:

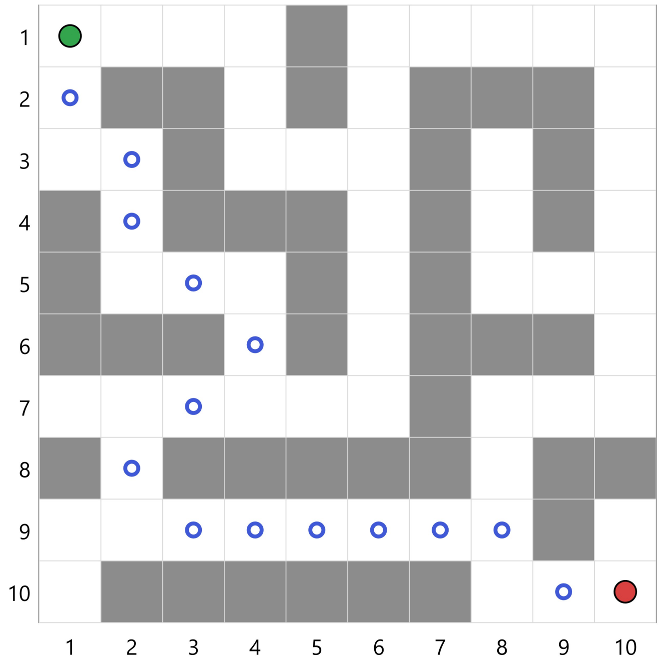


*Рис. 1: Карта и опорные точки*

Получающаяся траектория задаётся аналитически:

$$S : \bigcup_{i=1}^{n-1} \begin{cases} -\sin\psi_i(x - x_i) + \cos\psi_i(y - y_i) = 0, \\ \psi_i = \arctan\left(\dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right), \\ r_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}, \\ Q_i(x, y) = \cos\psi_i(x - x_i) + \sin\psi_i(y - y_i) - r_i, \\ \text{Если } Q_i(x, y) > 0, \text{ то } i = i + 1. \end{cases}$$

Физически - соединяем опорные точки $(x_i, y_i)$ прямыми, поэтому длину можно вычислить через обычную теорему Пифагора как

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} r_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \approx 17.899$$

# 2 Вычисление длины $C^1$-гладкой кривой

Получающаяся траектория задаётся аналитически:

$$S : \bigcup_{i=1}^{n-1} \begin{cases} -\sin\psi_i(x-x_i)+\cos\psi_i(y-y_i)=0, \text{ если } Q_{1i}\le 0 \\ (x-x_{ci})^2+(y-y_{ci})^2-R^2=0, \text{ если } Q_{2i}\le 0 \\ \begin{bmatrix} x_{ci} \\ y_{ci} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + R_I^P(\psi_i)R_I^P(\delta_i)\begin{bmatrix} d_{ci} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \psi_i = \text{arctan2}\left(\dfrac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\right), \\ \sigma_i = \begin{cases} \pi-(\psi_{i+1}-\psi_i), & \text{если } (\psi_{i+1}-\psi_i)>0 \\ -\pi-(\psi_{i+1}-\psi_i), & \text{если } (\psi_{i+1}-\psi_i)\le 0 \end{cases}, \\ \delta_i = \pi-\dfrac{\sigma_i}{2}, \quad d_{ci}=\left|\dfrac{R}{\sin\frac{\sigma_i}{2}}\right|, \quad d_i=\left|\dfrac{R}{\tan\frac{\sigma_i}{2}}\right|, \\ r_i=\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}, \\ Q_{1i}=\cos\psi_i(x-x_i)+\sin\psi_i(y-y_i)-r_i+d_i, \\ Q_{2i}=\cos\psi_{i+1}(x-x_i)+\sin\psi_{i+1}(y-y_i)-d_i, \\ \text{Если } Q_{2i}>0, \text{ то } i=i+1. \end{cases}$$

Длина построенной траектории считается суммой прямых и круговых участков, которые переходят друг в друга.

Эту же величину можно получить и эквивалентным способом: сначала суммируем длины всех прямолинейных сегментов $r_i$ между точками $(x_i, y_i)$ и $(x_{i+1}, y_{i+1})$, а после для каждой внутренней точки $(x_i, y_i)$, где происходит изменение направления, вычисляется корректировка на значение $A_i - 2d_i$ при $A_i = R\theta_i = R(\pi - |\sigma_i|)$ - длина окружности. В итоге для взятого в работе радиуса скругления $R = 0.8$ имеем:

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} r_i + \sum_{j=2}^{n-1}(A_j - 2d_j) \approx 17.00623$$

Это чуть меньше, чем у $C^0$-гладкого метода соединения точек, так как длина вписанных окружностей ниже длины прямых.

# 3 Вычисление длины $C^2$-гладкой кривой

Траектория задаётся аналитически через различные участки.
Движение по прямой:

$$S_1 : \begin{cases} -\sin\psi_i(x - x_i) + \cos\psi_i(y - y_i) = 0, \\ \psi_i = \operatorname{arctan2}\left(\dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right). \end{cases}$$

Движение по окружности:

$$S_3 : \begin{cases} (x - x_{ci})^2 + (y - y_{ci})^2 - R^2 = 0, \\ \begin{bmatrix} x_{ci} \\ y_{ci} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + R_P^I(\psi_i) R_I^P(\delta_i) \begin{bmatrix} d_{ci} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ d_{ci} = d_{1i} + d_{2i}, \\ d_{1i} = \sqrt{R^2 - (h_i/2)^2}, \\ d_{2i} = \sqrt{h_{i2}^2 - (h_i/2)^2} \\ h_i = \sqrt{(x_{S_2 e} - x_{S_{1e}})^2 + (y_{S_2 e} - y_{S_{1e}})^2}, \\ h_{i2} = \sqrt{(x_{S_2 e} - x_{i+1})^2 + (y_{S_2 e} - y_{i+1})^2}, \\ \delta_i = \pi - \dfrac{\sigma_i}{2}, \\ \sigma_i = \begin{cases} \pi - (\psi_{i+1} - \psi_i), & \text{если } (\psi_{i+1} - \psi_i) > 0, \\ -\pi - (\psi_{i+1} - \psi_i), & \text{если } (\psi_{i+1} - \psi_i) \le 0, \end{cases} \\ \psi_i = \operatorname{arctan2}\left(\dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right). \end{cases}$$

Движение по «открывающей» параболе:

$$S_2 : \begin{cases} \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + R_I^P(\psi_i) \begin{bmatrix} x - d_i \\ y \end{bmatrix}, \\ k(x_L)^3 - y_L = 0, \\ d_i = \left| \dfrac{R}{\tan \frac{\theta}{2}} \right|, \\ \psi_i = \operatorname{arctan2}\left( \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right). \end{cases}$$

Движение по «закрывающей» параболе:

$$S_4 : \begin{cases} \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + R_I^P(\psi_{i+1}) \begin{bmatrix} x + d_i \\ y \end{bmatrix}, \\ -k(x_L)^3 - y_L = 0, \\ d_i = \left| \dfrac{R}{\tan \frac{\sigma_i}{2}} \right|, \\ \psi_i = \operatorname{arctan2}\left( \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right). \end{cases}$$

Переключение всё также будет происходить с помощью прямых $Q_i$. Итоговая кривая $S$ определяется как объединение:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n-1} \begin{cases} S_1, \text{ если } Q_{1i} \le 0, \\ S_2, \text{ если } Q_{2i} \le 0, \\ S_3, \text{ если } Q_{3i} \le 0, \\ S_4, \text{ если } Q_{4i} \le 0, \\ Q_{1i} = \cos\psi_i(x - x_i) + \sin\psi_i(y - y_i) - r_i + d_i, \\ Q_{2i} = \cos\psi_{i+1}(x - x_{i+1}) + \sin\psi_{i+1}(y - y_{i+1}) - d_i, \\ Q_{3i} = \cos\alpha_1(x - x_i) + \sin\alpha_1(y - y_i) + t_1, \\ Q_{4i} = \cos\alpha_2(x - x_i) + \sin\alpha_2(y - y_i) - t_2, \\ \text{Если } Q_{2i} > 0, \text{ то } i = i + 1. \end{cases}$$

Введенные вспомогательные параметры:

$$\begin{cases} t_1 & = [x_{S_1e} \quad y_{S_1e}]^T, \\ t_2 & = [x_{S_2e} \quad y_{S_2e}]^T, \\ \alpha_1 & = \frac{\psi_{i+1}-\beta_i}{2}, \\ \alpha_2 & = \psi_{i+1} - \frac{\psi_{i+1}-\beta_i}{2}, \\ \beta_i & = \arccos\left(1 - \frac{h_i^2}{2R^2}\right) = 2\arcsin(\frac{h_i}{2R}). \end{cases}$$

Геометрические характеристики:

$$\begin{cases} h_i & = \sqrt{(x_{S_2e} - x_{S_1e})^2 + (y_{S_2e} - y_{S_1e})^2}, \\ \psi_i & = \arctan 2\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\right), \\ r_i & = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}, \\ d_i & = \left|\frac{R}{\tan\frac{\pi}{2}}\right|. \end{cases}$$

где $x_{S_1e}$, $x_{S_2e}$, $y_{S_1e}$ и $y_{S_2e}$ — конечные точки парабол $S_2$ и $S_4$.

Длина построенной траектории считается суммой прямолинейных участков $S_1$, переходных кубических парабол $S_2, S_4$ и круговых сегментов $S_3$, которые последовательно переходят друг в друга.

Эту же величину можно получить эквивалентным способом через процедуру корректировки. Сначала суммируются длины всех прямолинейных сегментов $r_i$ между узловыми точками $(x_i, y_i)$ и $(x_{i+1}, y_{i+1})$. Затем для каждой внутренней точки, где происходит изменение направления, вычисляется корректирующее значение $\Delta L_j$, учитывающее замену острого угла на систему сопряженных кривых.

Для принятого в работе радиуса скругления $R = 0.8$ имеем:

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} r_i + \sum_{j=1}^{n-2} \Delta L_j \approx 17.00662$$

Здесь корректировка $\Delta L_j$ для каждого поворота определяется следующим образом:

$$\Delta L_j = 2 \cdot L_j^p + L_j^a - 2d_j$$

Компоненты формулы вычисляются на основе геометрических параметров сопряжения:

1. Криволинейный интеграл $y = kx^3$ на участке $[0, x_L]$:

$$L_j^p = \int_0^{x_L} \sqrt{1 + (3kx^2)^2}\, dx$$

   При $x_L = \frac{1}{6kR}$ - проекция параболы, обеспечивающая непрерывность кривизны.

2. Остаточный круговой сегмент между переходными кривыми:

$$L_j^a = R \cdot \beta_j, \quad \beta_j = 2 \arcsin\left(\frac{h_j}{2R}\right)$$

   здесь $h_j$ - хорда между точками выхода первой параболы и входа во вторую.

3. Расстояние от вершины до точки касания:

$$d_j = \left| \frac{R}{\tan\left(\frac{\sigma_j}{2}\right)} \right|$$

Итоговое значение длины получается больше, чем у $C^1$-гладкой кривой, из-за более сложной траектории параболического входа и выхода с окружностей.

# 4 Длина B-сплайновой кривой

Пусть задан неубывающий вектор равеномерно распределенных от 1 до $n - k$ узлов $u_i$

$$U = \{u_0, u_1, \ldots, u_m\}$$

А также заданы базисные функции B-сплайна степени $k$, определённые рекурсией:

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & u_i \le t < u_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{u_{i+k+1} - t}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t).$$

Кривая задаётся контрольными точками $P_i = (x_i, y_i)$:

$$C(t) = \sum_i N_{i,k}(t) P_i, \qquad t \in [u_0, u_m]$$

Производная базисной функции B-сплайна имеет вид:

$$N'_{i,k}(t) = \frac{k}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(t) - \frac{k}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t).$$

Дифференцируя кривую $C(t)$, получаем:

$$C'(t) = \sum_i N'_{i,k}(t) P_i = \sum_i N_{i,k-1}(t) \frac{k}{u_{i+k} - u_i} (P_i - P_{i-1})$$

Введём контрольные точки производной:

$$D_i = \frac{k}{u_{i+k} - u_i} (P_i - P_{i-1}),$$

Тогда производная кривой представляется в виде

$$C'(t) = \sum_i N_{i,k-1}(t) D_i.$$

Таким образом, производная B-сплайна степени $k$ является B-сплайном степени $k-1$.

Длина гладкой параметрической кривой определяется как

$$L = \int_{u_0}^{u_m} \|C'(t)\| \, dt.$$

Поскольку $D_i = (D_i^x, D_i^y)$, имеем:

$$x'(t) = \sum_i N_{i,k-1}(t) D_i^x, \tag{1}$$

$$y'(t) = \sum_i N_{i,k-1}(t) D_i^y. \tag{2}$$

Следовательно, длина B-сплайновой кривой равна

$$L = \int_{u_0}^{u_m} \sqrt{\left(\sum_i N_{i,k-1}(t) D_i^x\right)^2 + \left(\sum_i N_{i,k-1}(t) D_i^y\right)^2}\, dt.$$

Для взятого в работе $k = 3$ имеем длину:

$$L \approx 16.6272$$

Несколько меньше, чем у всех ранее вычисленных.