

НАУЧНО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по лабораторной работе №4  
Линейная фильтрация

Выполнил студент группы Р3380  
Преподаватели

Мовчан И.Е.  
Пашенко А.В., Перегудин А.А.

Санкт-Петербург  
2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Линейные фильтры</b>	<b>2</b>
1.1	Фильтры первого порядка . . . . .	3
1.2	Режекторный полосовой фильтр . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Сглаживание биржевых данных</b>	<b>20</b>
<b>3</b>	<b>Общие выводы</b>	<b>23</b>

# 1 Линейные фильтры

Зададимся числами  $a = 4$ ,  $t_1 = 3$ ,  $t_2 = 8$  и возьмём сигнал в виде прямоугольной волны:

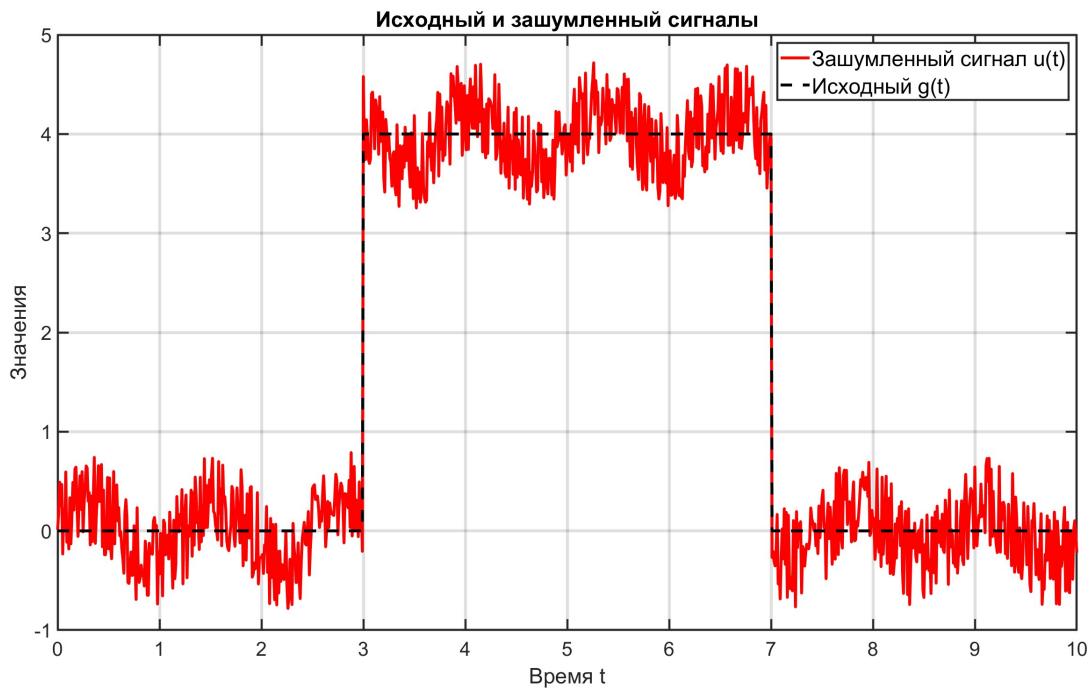
$$g(t) = \begin{cases} a, & t \in [t_1, t_2], \\ 0, & t \notin [t_1, t_2]; \end{cases} = \begin{cases} 4, & t \in [3, 8], \\ 0, & t \notin [3, 8]; \end{cases}$$

и его зашумлённую версию

$$u(t) = g(t) + b\xi(t) + c \sin(dt),$$

где  $\xi \sim U[-1, 1]$  - равномерное распределение, представляющее белый шум, а  $b$ ,  $c$ ,  $d$  - параметры возмущений.

Чистый и зашумлённый сигналы при параметрах  $b = 0.5$ ,  $c = 0.3$ ,  $d = 5$  представлены на рисунке ниже. Слагаемое  $b\xi(t)$  в результате дало стабильные резкие скачки по времени, отображающиеся, как мы увидим далее, по большей части на высоких частотах,  $c \sin(dt)$  же - стабильное гармоническое воздействие.

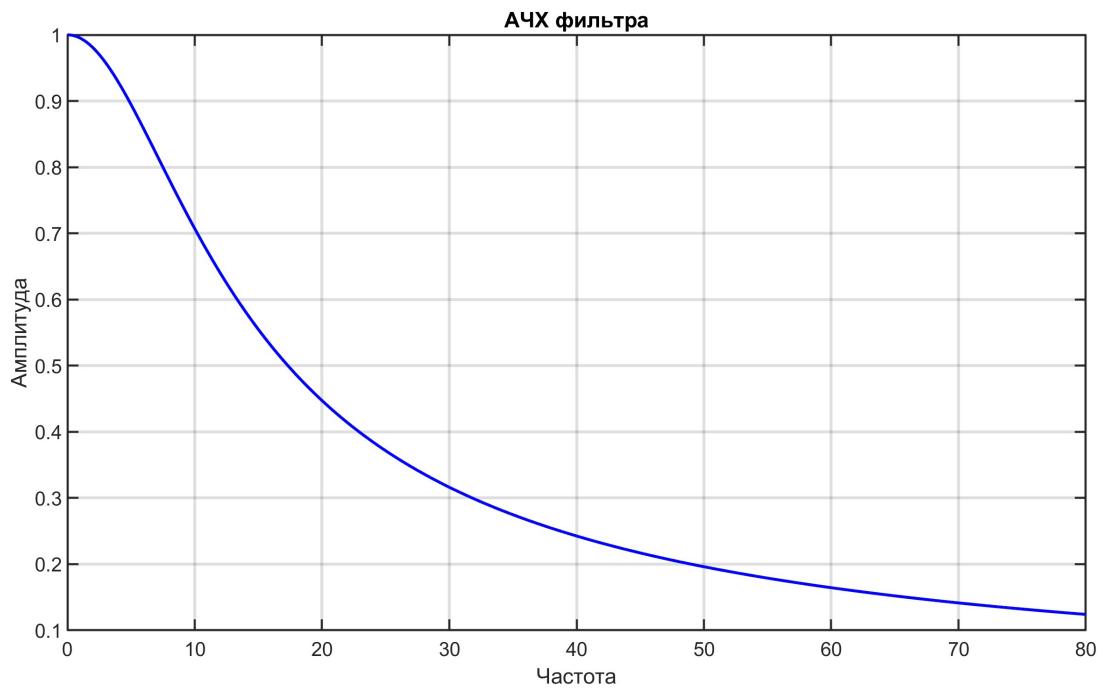


## 1.1 Фильтры первого порядка

Пусть у нас не существует синусоидального возмущения в замушенном сигнале  $u(t)$ , то есть примем  $c = 0$ , при этом оставим  $b = 0.5$  (имеем, пусть это будет и не очень верно сказано, высокочастотный шум, а  $u(t) = g(t) + 0.5\xi(t)$ ). Рассмотрим линейный фильтр, заданный передаточной функцией ( $T = 0.1$ )

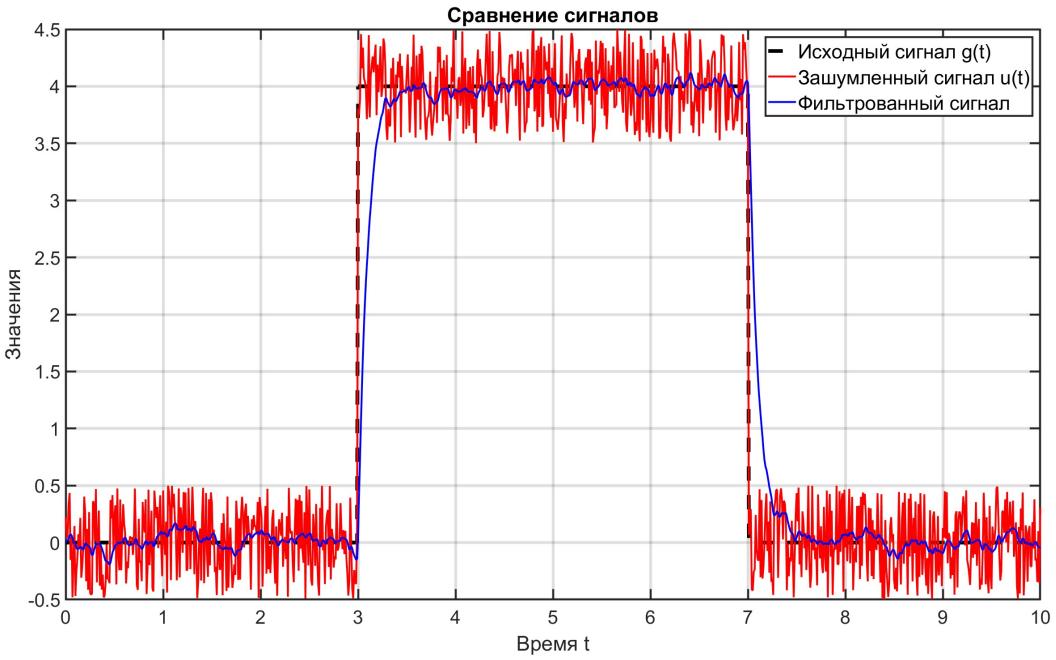
$$W_1(p) = \frac{1}{Tp + 1} = \frac{1}{0.1p + 1}.$$

Его амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) представлена на рисунке ниже



Так как АЧХ напрямую влияет на способности фильтра к подавлению, то, например, в нашем случае все амплитуды образа Фурье обрабатываемого сигнала ( $\hat{u}(t)$ ), имеющие частоту менее 10 рад/с, будут хорошо подавлены ( $|W_1(iw)|$  убывает и равна  $1/\sqrt{2}$  при частоте среза  $w_0 = 10$  рад/с). Упомянем также, что глушиться будут в целом все амплитуды в частотной области, так как  $|W_1(iw)| < 1$  везде, кроме точки 0.

Настало время немного поэкспериментировать, попробуем применить его к нашей зашумлённой функции  $u(t)$  (все вычисления далее проводятся в среде matlab, там же строятся и графики, для задания передаточной функции и применения её к сигналу используются команды **tf** и **lsim** соответственно):



*Рис. 1: Сравнение сигналов при  $a = 4$ ,  $T = 0.1$*

В общем, наш фильтр неплохо выполняет свою работу, нивелируя воздействие шума, но можно ли лучше? Для этого немного покрутим параметры и посмотрим, на что же влияет постоянная времени  $T$  (запомним при этом  $a = 4$ ).

На рисунках 2 и 3 исследованы случаи  $T = 0.6$  и  $T = 0.025$ . По результатам понятно, что если мы увеличиваем параметр  $T$ , то фильтрация становится более «жёсткой», давящей всякое стороннее воздействие, однако появляется и запаздывание по фазе, связанная с тем, что применяя фильтр, мы также влияем и на фазовые характеристики нашего сигнала. И наоборот, если мы уменьшаем параметр  $T$ , то фильтрация «смягчается», а обработанный сигнал практически не запаздывает по времени в сравнении с исходным. Получается, выиграла правда «больше - сильнее, меньше - слабее».

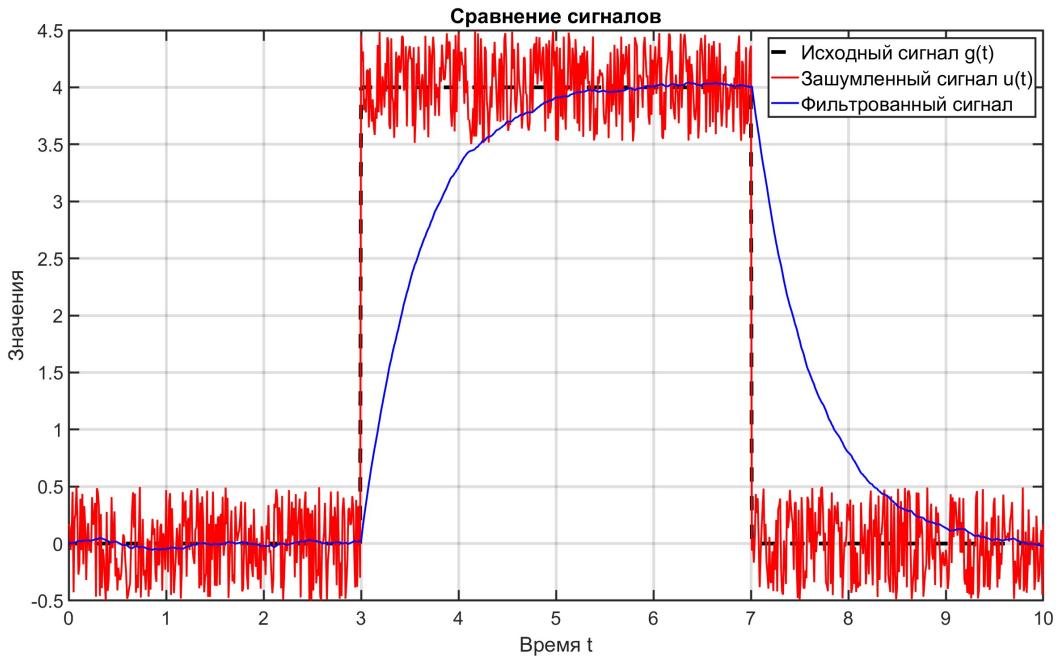


Рис. 2: Сравнение сигналов при  $a = 4$ ,  $T = 0.6$

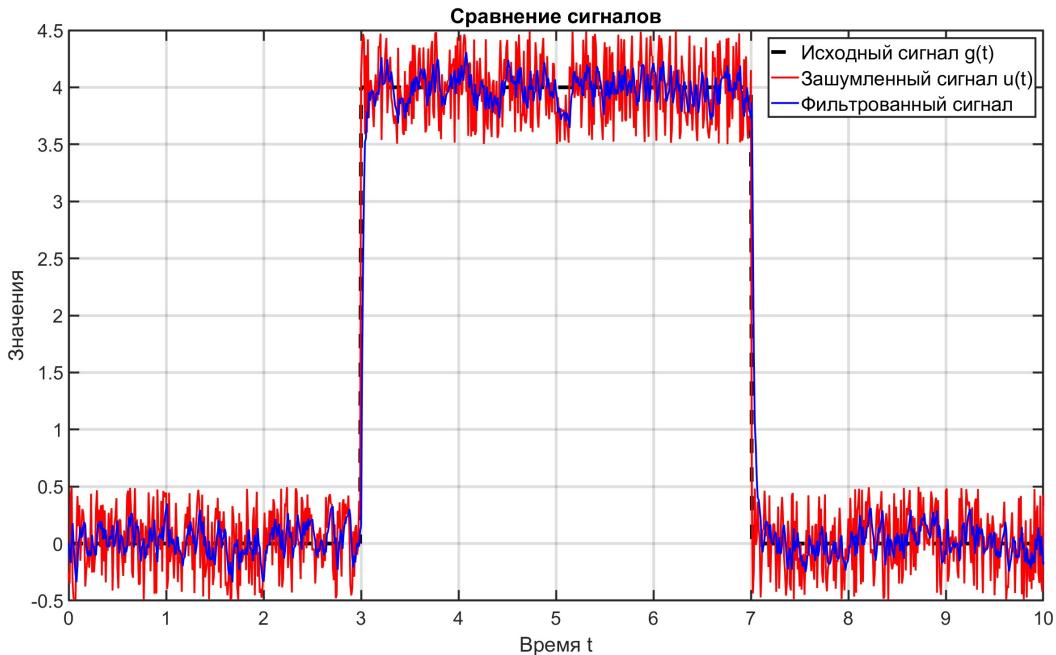


Рис. 3: Сравнение сигналов при  $a = 4$ ,  $T = 0.025$

В целом, нашей задачей как раз и является выбор оптимального  $T$ , при котором всё ещё хорошо фильтруется, при этом практически отсутствует запаздывание. Исходная передаточная функция с  $T = 0.1$  как раз достаточно хорошо с этим справляется.

Отметим также, что фильтрация напрямую связана с АЧХ, так как частота среза  $w_0$  уменьшается при увеличении  $T$ , то диапазон глушиящихся частот увеличивается. Наглядно можно видеть в сравнении на рисунке

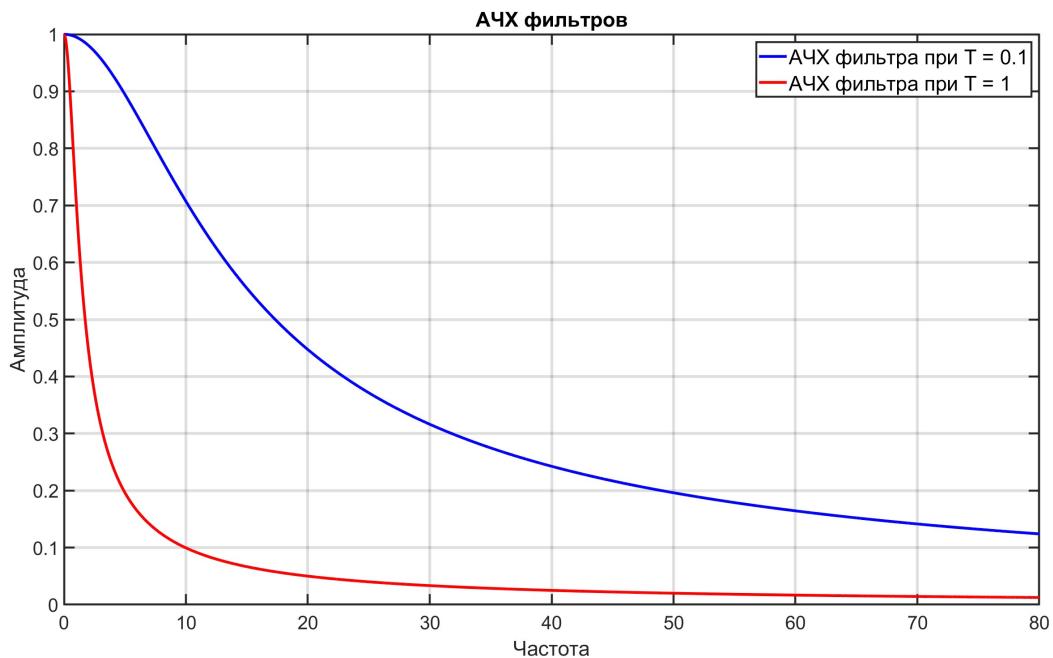


Рис. 4: Сравнение АЧХ фильтров

Влияние параметра  $a$  на качество фильтрации представлено на рисунках 5 и 6 (в данных примерах  $a = 15$  и  $0.5$  соответственно, а  $T$  фиксировано и равно  $0.1$ ).

Можно заметить, что чем больше  $a$ , тем как бы меньший вклад шум вносит в наш сигнал (амплитуда стороннего становится много меньшей по сравнению с исходным), и тем лучше работает фильтрация (рисунок 5). Чем же ближе наша кривая к оси  $Ox$  - тем хуже фильтр справляется, в том числе и потому, что весь наш сигнал в целом становится тяжело отличимым от шума, для которого «центром» как раз и является ось  $Ox$  (рисунок 6).

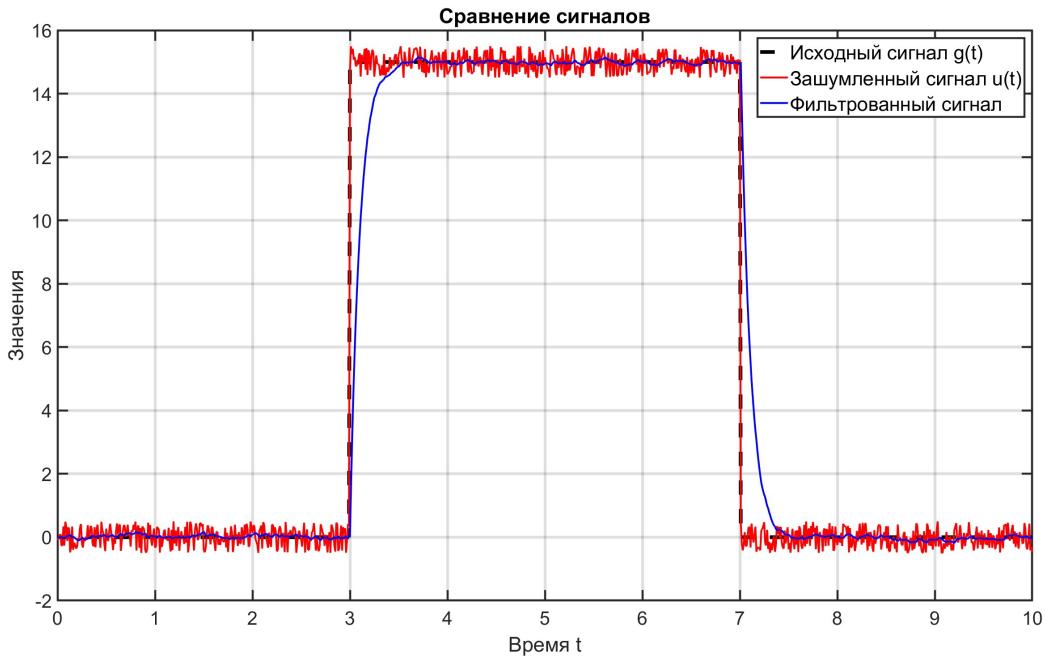


Рис. 5: Сравнение сигналов при  $a = 15$ ,  $T = 0.1$

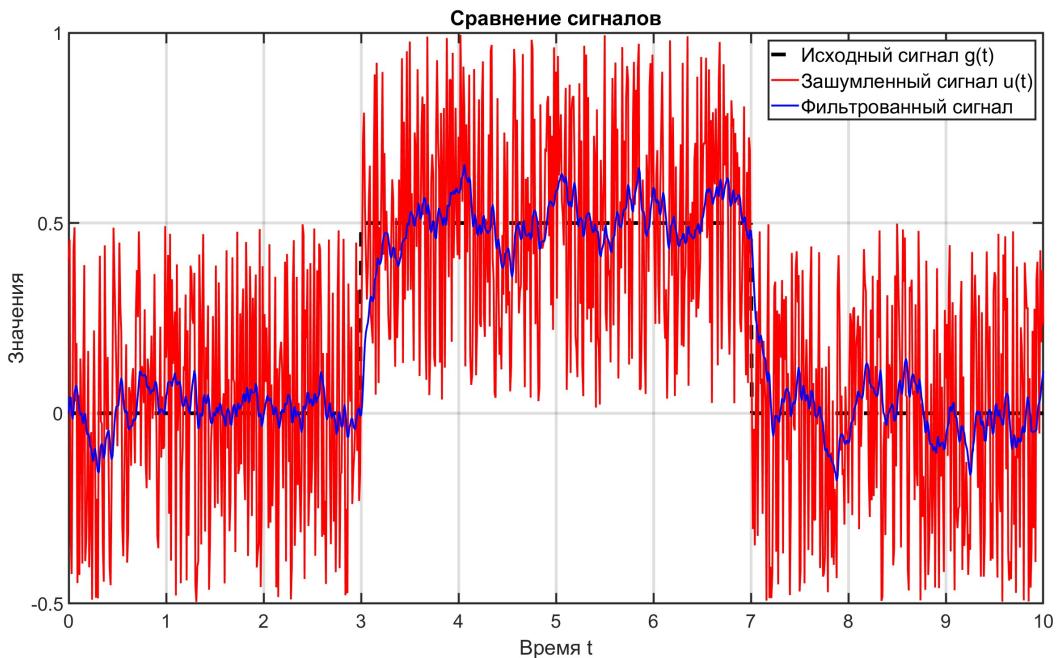


Рис. 6: Сравнение сигналов при  $a = 0.5$ ,  $T = 0.1$

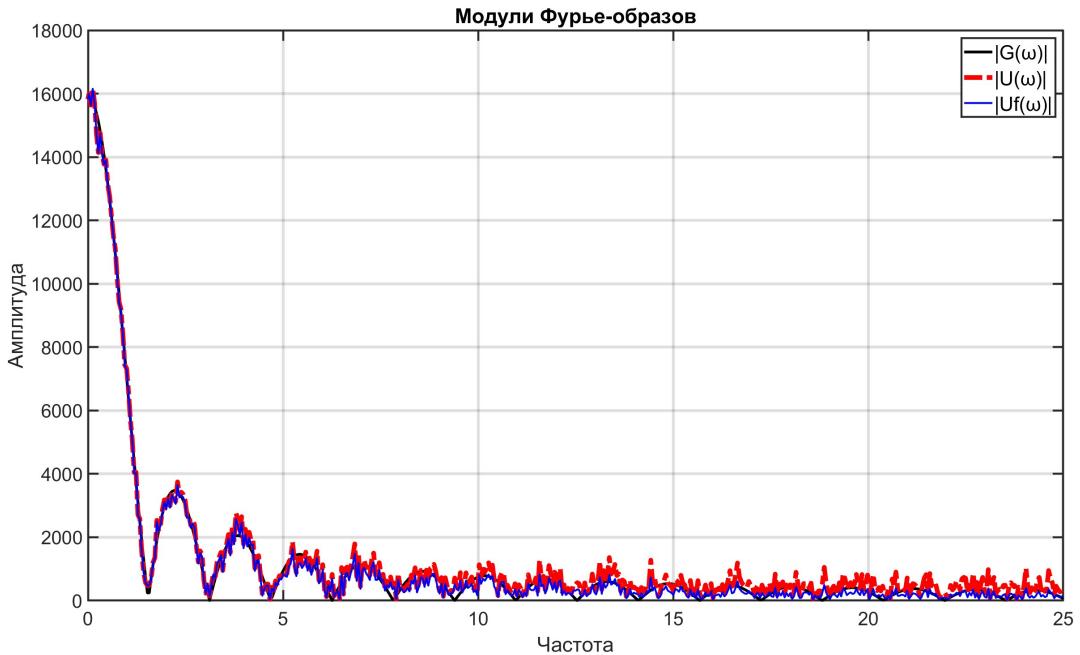


Рис. 7: Сравнение модулей Фурье-образов

Итак, с параметрами фильтрации и сигнала разобрались, теперь посмотрим, что же у нас в действительности происходит внутри частотной области. Для начала взглянем на поведение модулей Фурье-образов исходного, зашумлённого и отфильтрованного сигналов, при этом для большей наглядности сильно увеличим амплитуду присутствующих возмущений, подняв параметр  $b$  до 2 ( $a = 4$ ,  $T = 0.1$ ). Результаты показаны на рисунке 7.

Видим, что основное различие зашумлённого модуля образа Фурье сигнала от исходного проявляется на высоких частотах с низкой амплитудой (необработанный сигнал не идёт к 0 на бесконечностях, то и дело появляются скачки!) — именно они и вносят основной шумовой вклад (так как на больших значениях влияние мелких выбросов мало), и именно с этими частотами мы работаем, устремляя их к 0 к исходному, незашумлённому сигналу.

Для полноты картины проверим выполнение теоремы о свёртке в двух её представлениях: фильтрованный сигнал  $\hat{y}$  должен совпадать с обратным преобразованием Фурье от  $W(iw)\hat{u}(w)$ , или что его образ Фурье  $\hat{y} = W(iw)\hat{u}(w)$  (в данном случае будем исследовать модули

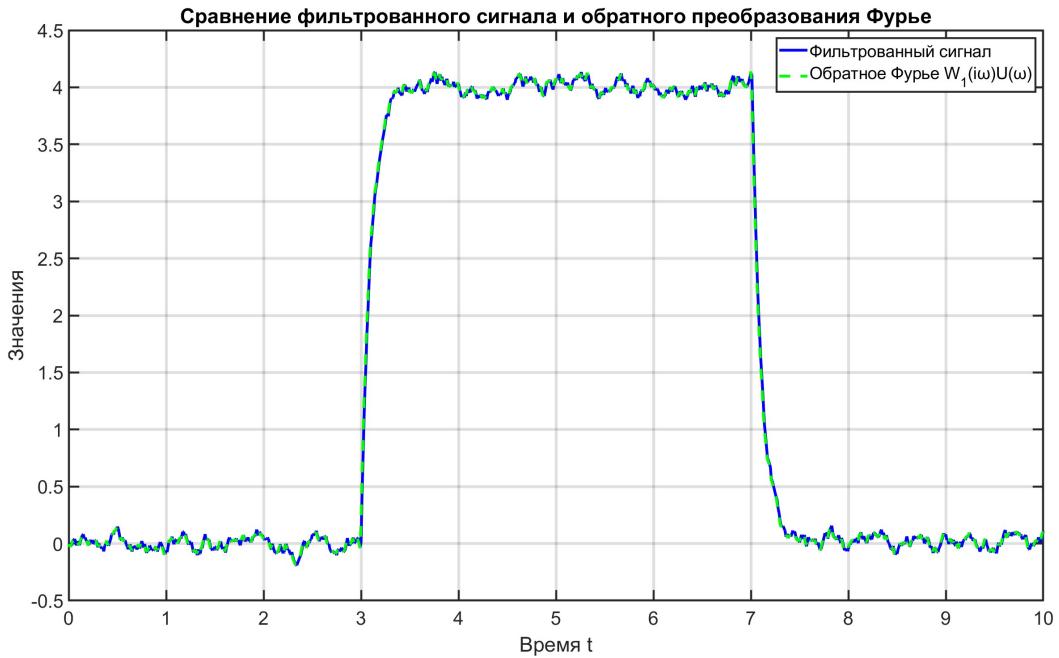


Рис. 8: Проверка теоремы о свёртке (временная область)

для большей наглядности). Записывая то же, но используя свёртку:

$$y = \mathcal{F}^{-1}\{W(iw)\hat{u}\} = w(t) * u,$$

где  $u$  - зашумлённый вход,  $w(t) = \mathcal{F}^{-1}\{W(iw)\}/\sqrt{2\pi}$  - весовая функция. Результаты представлены на рисунках 8 и 9

Как можно видеть, всё действительно работает. Тогда, казалось бы, зачем мы до этого как-то динамически применяли передаточную функцию, строили графики, анализировали их, если в итоге всё свелоось к тем же преобразованиям Фурье и свёрткам, что и в прошлой работе, просто чуть иной природы? Дело в том, что это лишь одно из представлений линейных фильтров, подразумевающее, как и жёсткая фильтрация, использование дорогих операций, связанных с постобработкой сигнала, тогда как в реальности мы нечасто прибегаем к таким методам их реализации. Отметим также, что жёсткие фильтры - математический идеал (их импульсная характеристика  $w(t)$  существует и в отрицательной полуоси), к которому в жизни мы можем лишь приблизиться, например, с помощью легкодоступных линейных моделей (именно поэтому первых и не существует в



Рис. 9: Проверка теоремы о свёртке (частотная область)

виде динамических по природе передаточных функций).

Не будем исключать и роль плавности в процессе перехода от пропускаемых частот к подавляемым, жёсткие фильтры отсекают резко (и это может приводить к артефактам), исследованные нами - плавно, в задачах же практически всегда более предпочтительным является второй вариант, пусть он и чуть менее «эффективный» (отметим однако, что мы также можем и понизить эту плавность, увеличив крутизну их АЧХ добавлением порядка).

Что ж, линейные фильтры первого порядка, конечно, хороши при подавлении высокочастотного шума, изменяя параметры, мы можем с приемлимой точностью добиваться необходимой в задаче жёсткости фильтрации, они также имеют и свою специфику работы, описанную выше, отличающую их от обычных низкочастотных жёстких фильтров. Но что если перед нами стоит задача иного рода (например, у нас имеется стабильный синусоидальный шум, который низкочастотный фильтр не заденет), и, используя фильтр, мы хотим воздействовать только на определённый частотный отрезок? Здесь нам пригодятся режекторные фильтры, рассмотрим их подробнее.

## 1.2 Режекторный полосовой фильтр

Итак, пусть у нас отсутствует белый шум, но присутствует стабильный синусоидальный шум частоты  $d$  и амплитуды  $c$  (то есть сигнал  $u(t) = g(t) + b\xi(t) + c \sin(dt) = g(t) + c \sin(dt)$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0.3$ ). Рассмотрим режекторный фильтр

$$W_2(p) = \frac{p^2 + a_1 p + a_2}{p^2 + b_1 p + b_2}$$

и выберем числа

$$a_1 = 0, a_2 = 16, b_1 = 10, b_2 = 16,$$

при которых выполняются условия:

1. Фильтр является устойчивым, так как корни полинома знаменателя  $p_1 = -2$ ,  $p_2 = -8$  имеют строго отрицательные вещественные части;
2. На низких частотах ( $w \rightarrow 0$ ) и высоких частотах ( $w \rightarrow \pm\infty$ ) АЧХ фильтра  $|W_2(iw)| \rightarrow 1$ ;
3. При некоторой частоте  $w_0 = 4$  амплитуда  $|W_2(iw)| = 0$ .

Амплитудно-частотная характеристика фильтра  $W_2(p)$  представлена на рисунке 10. Можно видеть, что всё перечисленное действительно выполняется.

Попробуем созданное в действии. Исходный, зашумлённый и обработанный сигналы изображены на рисунке 11. После низкочастотных фильтров работа режекторных кажется немного странной (присутствуют весомые скачки, связанные с резкими изменениями в самом сигнале, всё та же задержка), однако результат говорит сам за себя - все синусоидальные воздействия были подавлены, причем до общей амплитуды, связано это с тем, что шум в сигнале - стабильный, в образе Фурье возникает в виде одного и того же точечного выброса, на который мы и воздействуем при фильтрации (причем,

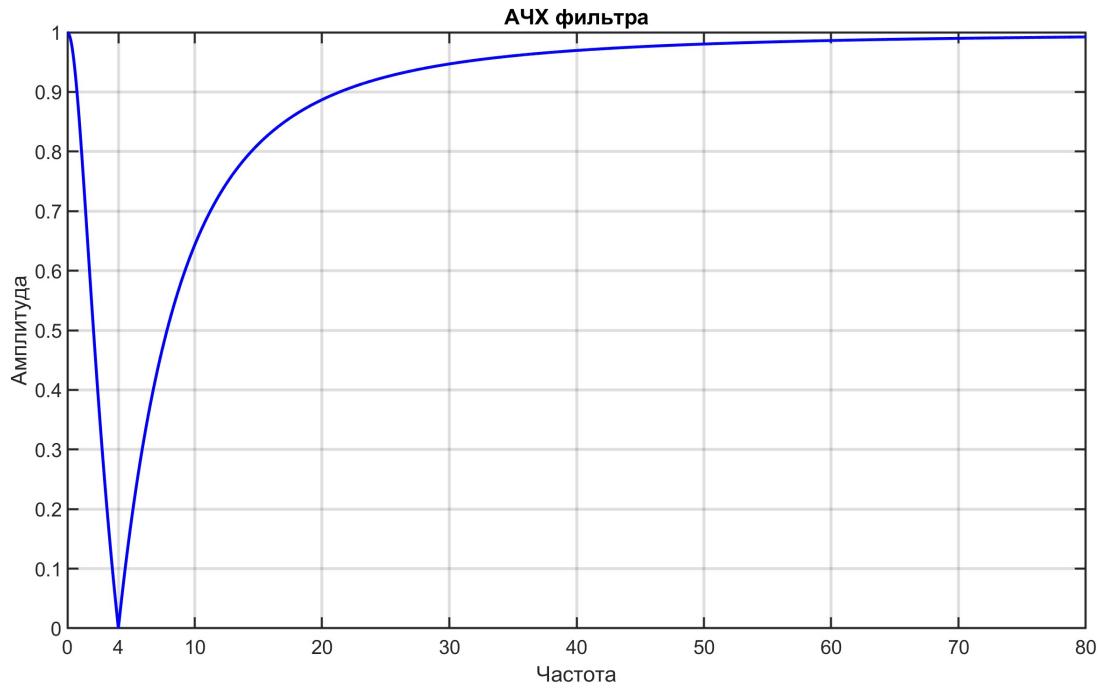
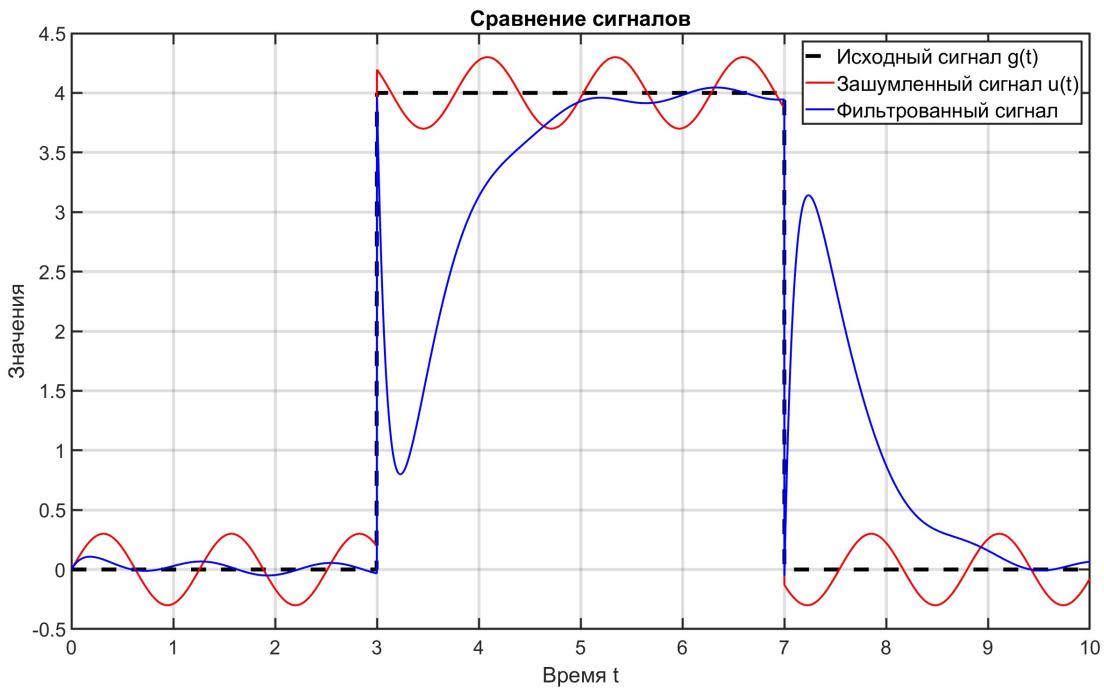
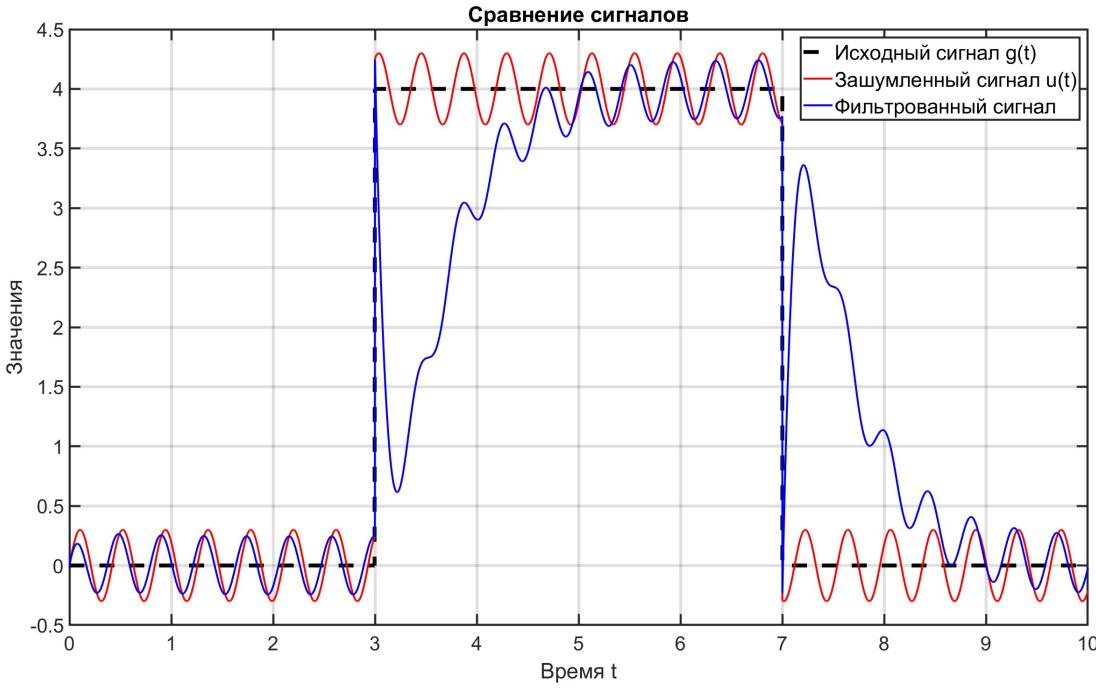


Рис. 10: АЧХ полосового фильтра

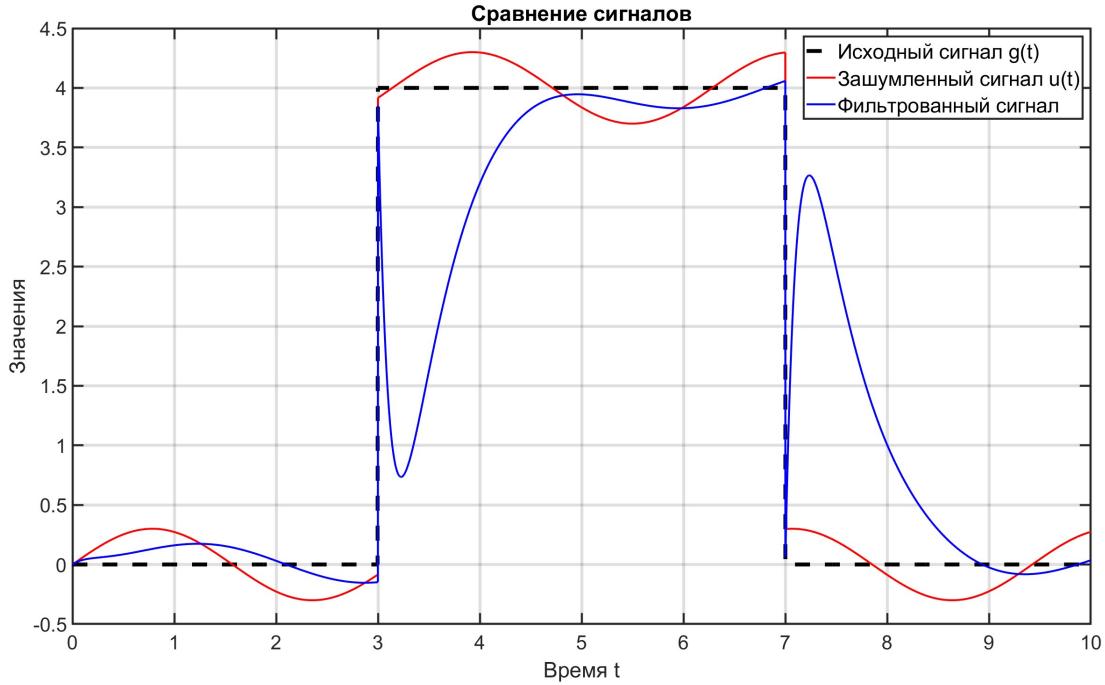
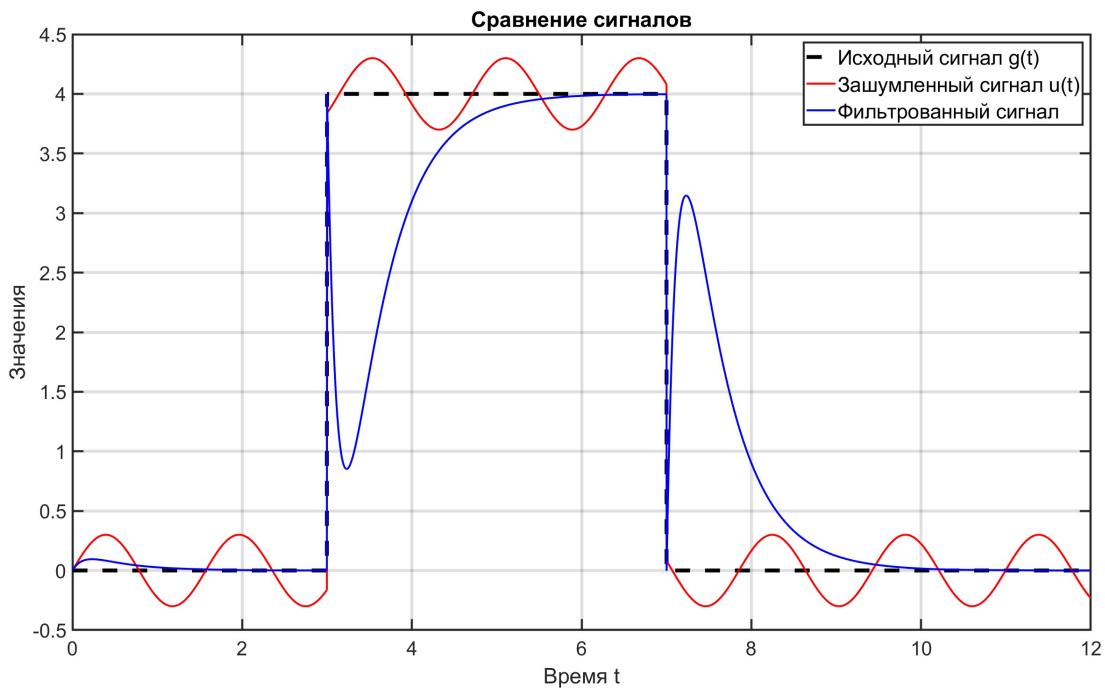
Рис. 11: Сравнение сигналов при  $d = 5$ ,  $b_1 = 10$

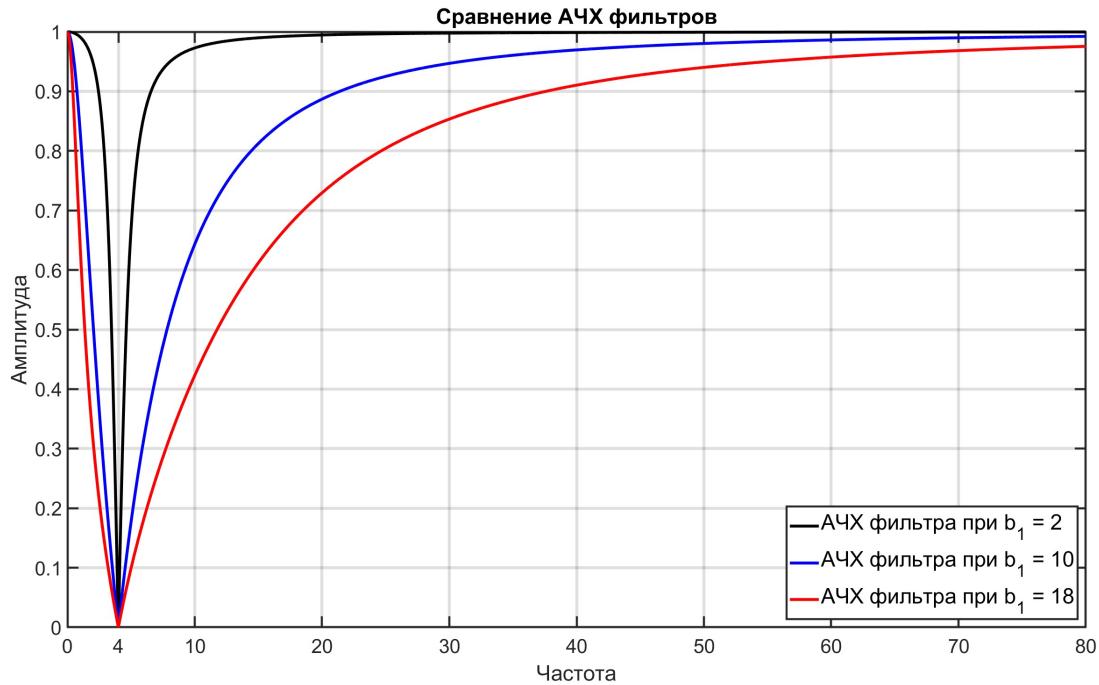
Рис. 12: Сравнение сигналов при  $d = 15, b_1 = 10$ 

как увидим далее, тем больше, чем мы ближе к  $w_0 = 4$ ; у нас  $d = 5$ , поэтому возникает серьёзное, но не полное приглушение).

Что ж, убедимся в сказанном на деле, попробуем проварьировать частоту синусоиды, меняя параметр  $d$ . Результаты при  $d = 15, d = 2$  на рисунках 12, 13 соответственно. И действительно, чем мы дальше от  $w_0$ , тем фильтрация синусоиды становится хуже, и это работает в двух направлениях (и при уменьшении  $d$ , и при её увеличении), всё согласно вышеприведённой АЧХ фильтра.

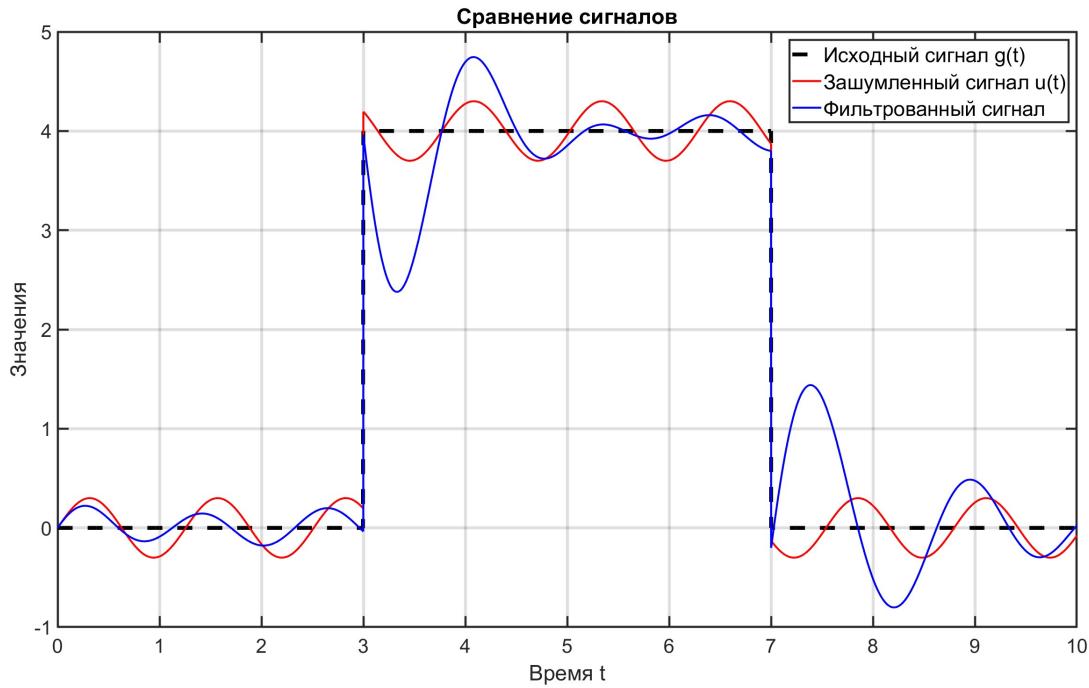
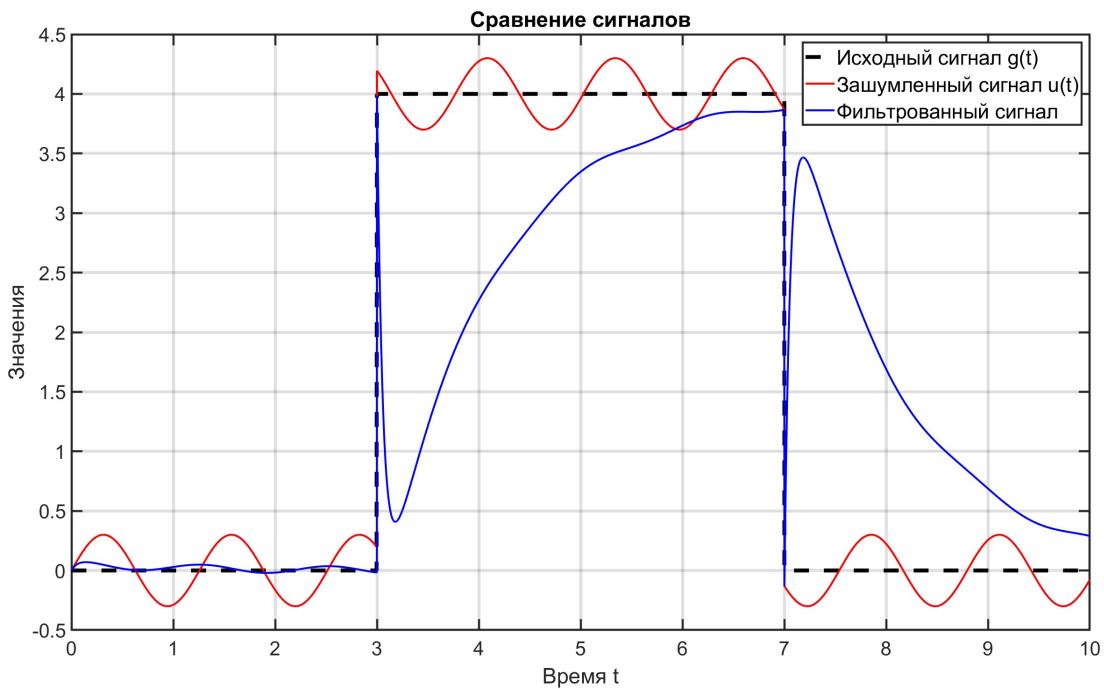
Особого внимания заслуживает случай  $d = w_0 = 4$ , где происходит «чудо» и глушение идеально, всё стороннее воздействие сходит на нет (рисунок 14)! Отсюда вывод - чем лучше мы понимаем наш шум, тем легче нам с ним работать (поэтому в задачах фильтрации имеет смысл сначала подумать про источники воздействия, а только потом про саму фильтрацию). Однако почти всегда это исследование трудоёмко, а точечно определить частоту синусоиды невозможно. Отсюда возникает резонный вопрос - можем ли как-то повлиять на ширину приглушаемых частот? Ответ - да, с помощью  $b_1$  знаменателя  $W_2$ !

Рис. 13: Сравнение сигналов при  $d = 2$ ,  $b_1 = 10$ Рис. 14: Сравнение сигналов при  $d = w_0 = 4$ ,  $b_1 = 10$

Рис. 15: Сравнение АЧХ при  $b_1 = 2, b_1 = 10, b_1 = 18$ 

Параметр  $b_1$  влияет на жёсткость фильтрации, при его увеличении «полоса подавления» становится шире, при уменьшении - уже (на рисунке 15 сравнения трёх различных АЧХ чётко прослеживается данная идея), мы начинаем воздействовать точечно на определённую частоту  $w_0$  (это может пригодиться, например, в редкой задаче, где мы достоверно знаем, с какой частотой задан шум).

Результаты работы фильтра при  $b_1 = 2$  и  $b_1 = 18$  ( $d$  фиксировано и равно 5) представлены на рисунках 16 и 17 соответственно. Сравнивая графики, можно подтвердить слова выше про «силу» фильтрации: уменьшение  $b_1$  действительно приводит к тому, что любое воздействие, с отличной от  $w_0$  частотой, остаётся практически нетронутым и подавляется слабо; увеличение же приводит к весомой задержке в изменениях, однако работа происходит лучшим образом. В реальной жизни опять-таки стоит стремиться к балансу: так как точно неизвестно, какое природа «задала»  $w_0$ , то часто выбирают именно хорошее среднее, при котором и запаздывание незначимо, и фильтрация находится на должном уровне.

Рис. 16: Сравнение сигналов при  $d = 5, b_1 = 2$ Рис. 17: Сравнение сигналов при  $d = 5, b_1 = 18$

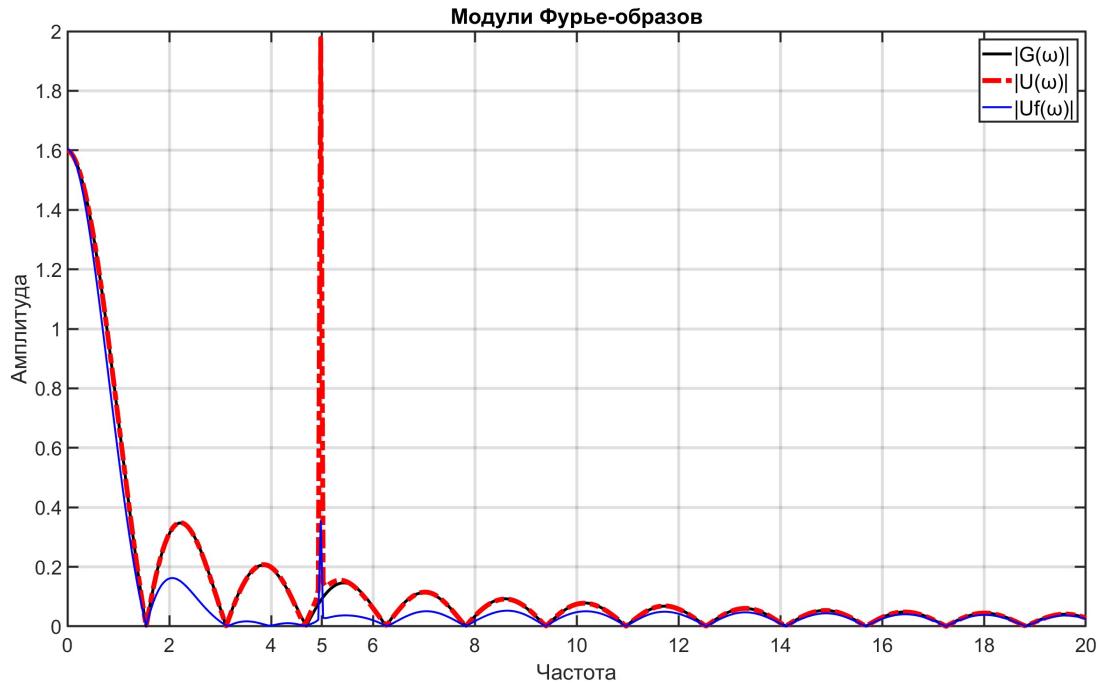
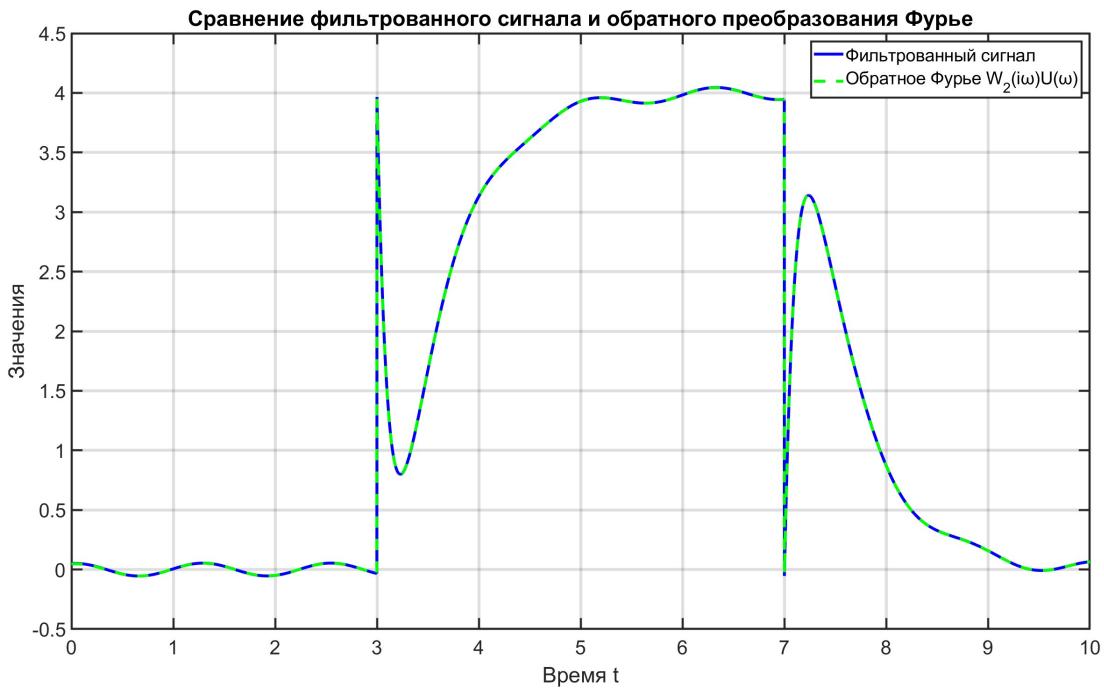


Рис. 18: Сравнение модулей Фурье-образов

Посмотрим также, что же у нас происходит в частотной области (рисунок 18). Видим выброс в образе Фурье  $u(t)$  - это и есть та самая сторонняя гармоника в сигнале, которую мы пытаемся заглушить режекторным фильтром. Суть его работы - зануление самой  $w_0$  и уменьшение по модулю тех частот, которых располагаются рядом, причем тем больше, чем ближе они к настроенной частоте фильтрации (в нашем случае  $w_0$ ). Это же можно наблюдать и на графике - у образа Фурье обработанного сигнала значение при  $w_0$  равно 0, а всё, что находится рядом, прижато к оси  $Ox$ . Именно поэтому при исследовании влияния  $d$  на фильтрацию мы получали полную очистку от всякого шума при  $d = w_0$ , а при исследуемой сейчас (и других, отличных от равенства, вариациях) - лишь частичную, фильтр просто снизил их влияние в частотной области, от этого уменьшилась и их амплитуда, однако не полностью, так как они не были так близки к настроенной частоте.

Наконец, проверим теорему о свёртке. Результаты представлены на рисунках 19 и 20. Как можно заметить, всё сходится друг к другу

Рис. 19: Сравнение сигналов при  $d = 5, b_1 = 10$ Рис. 20: Сравнение сигналов при  $d = 5, b_1 = 10$

и теорема действительно работает, так что можем ей пользоваться, если считать сигнал динамически ненужно и слишком затратно в сравнении с методами, использующими преобразования Фурье.

По итогу режекторные полосовые фильтры хороши в задачах присутствия стороннего гармонического воздействия какой-то (желательнее известной) частоты, мы сможем точечно погасить существующий выброс в частотной оси, который те создают, причем также адаптивно настроить и ширину его подавления. Однако, например, в ситуации присутствия как синусоидального шума, так и высокочастотного или же белого шумов использовать только полосовой фильтр будет очевидно неуместно, ведь он никак не обрабатывает резкие скачки по времени. В данном случае более уместным будет скомбинировать работу двух фильтров исследованных фильтров (один погасит высокие, другой - гармоническое). На выходе получаем вполне удовлетворительный результат общей фильтрации, учитывая при этом, что настроенная частота фильтрации не совпадала с синусоидальной (рисунок 21).

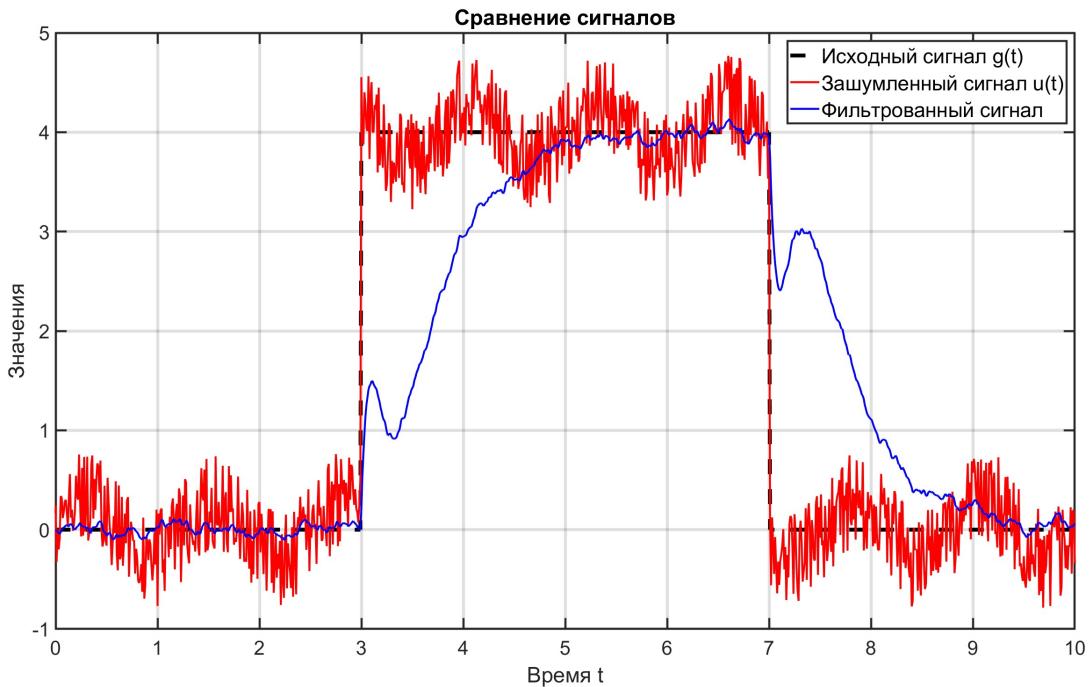


Рис. 21: Фильтрация сигнала двумя фильтрами при  $b = 0.5$ ,  $c = 0.3$ ,  $d = 5$

## 2 Сглаживание биржевых данных

Пришло время применить изученное на практике. Представим, что мы разрабатываем инвестиционное приложение, в котором должна присутствовать функция представления сглаженных графиков котировок акций, при этом степень сглаживания должна зависеть от рассматриваемого пользователем временного периода.

Найдём данные о стоимости акций Сбербанка за интервал времени с 11 апреля 2020 года по 10 апреля 2025 года с периодичностью в 1 день и применим к ним изученный линейный фильтр первого порядка ( $W_1(p) = 1/(Tp+1)$ ) с  $T$ : 1 день, 1 неделя, 1 месяц, 3 месяца, 1 год. Результаты работы сглаживания приведены на рисунках 22-26 соответственно (для фильтров также были найдены необходимые начальные состояния, чтобы решить возникающую проблему провала в начале временного интервала у `lfilter`).

Сделаем небольшую выжимку из полученного: если мы хотим получить как можно более точные результаты, отражающие все важные краткосрочные изменения в данных, можем использовать  $T = \text{день или неделя}$ , такие фильтры хорошо передадут всю краткосрочную динамику, чуть сгладя её от случайных выбросов для лучшего отражения общих дневных-недельных изменений; при ненадобности краткосрочных эффектов можем полностью их устранить, используя  $T = 1 \text{ месяц}$ ; если же мы хотим отразить долгосрочные тренды, то однозначно нужно использовать  $T = 3 \text{ месяца или 1 год}$ .

В итоге всё сводится к нашим нуждам. Отсюда идея - давайте будем применять сглаживание в зависимости от текущего масштаба: при малом захватываемом временном периоде мы интуитивно хотим больше анализировать краткосрочные эффекты, поэтому будем применять фильтры с малым  $T$  (день или неделя), тогда как при большом окне логичнее будет использовать сильное сглаживание ( $T = 3 \text{ месяца} - \text{целый год}$ ), чтобы устранить всякий «шум» и сделать акцент на долгосрочных трендах. Изменение масштаба, соответственно, будет приводить и к изменениям в наблюдаемых на экране данных, подстраивая их под наши интуитивные человеческие «хотелки».



Рис. 22: Сглаживание котировок ( $T = 1$  день)



Рис. 23: Сглаживание котировок ( $T = 1$  неделя)

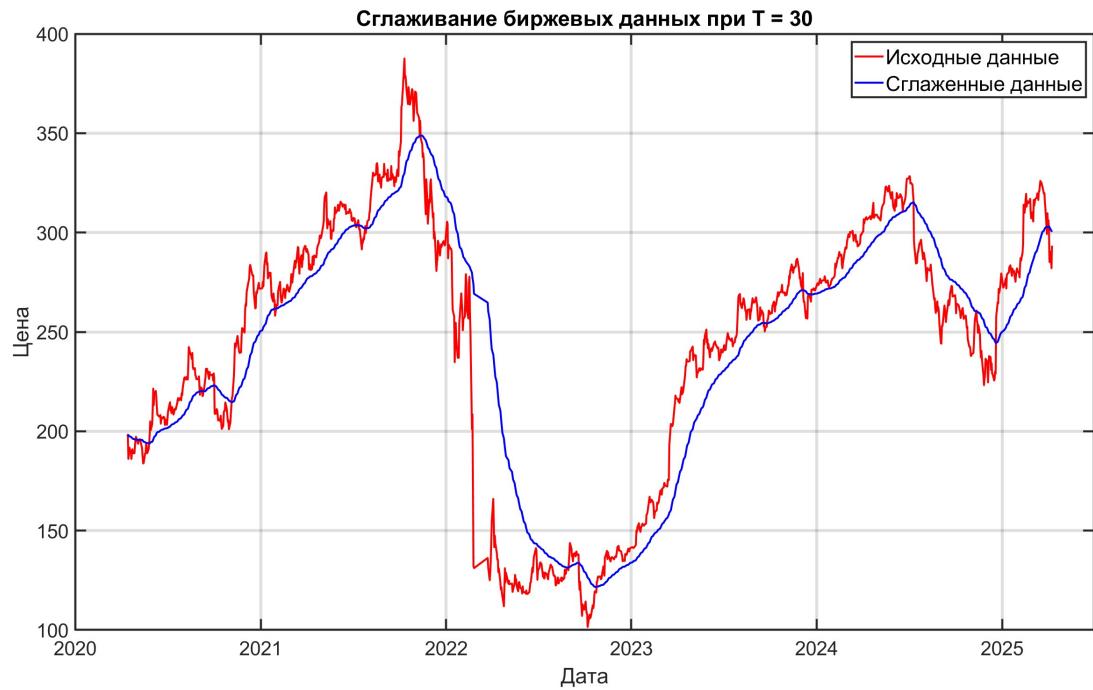


Рис. 24: Сглаживание котировок ( $T = 1$  месяц)

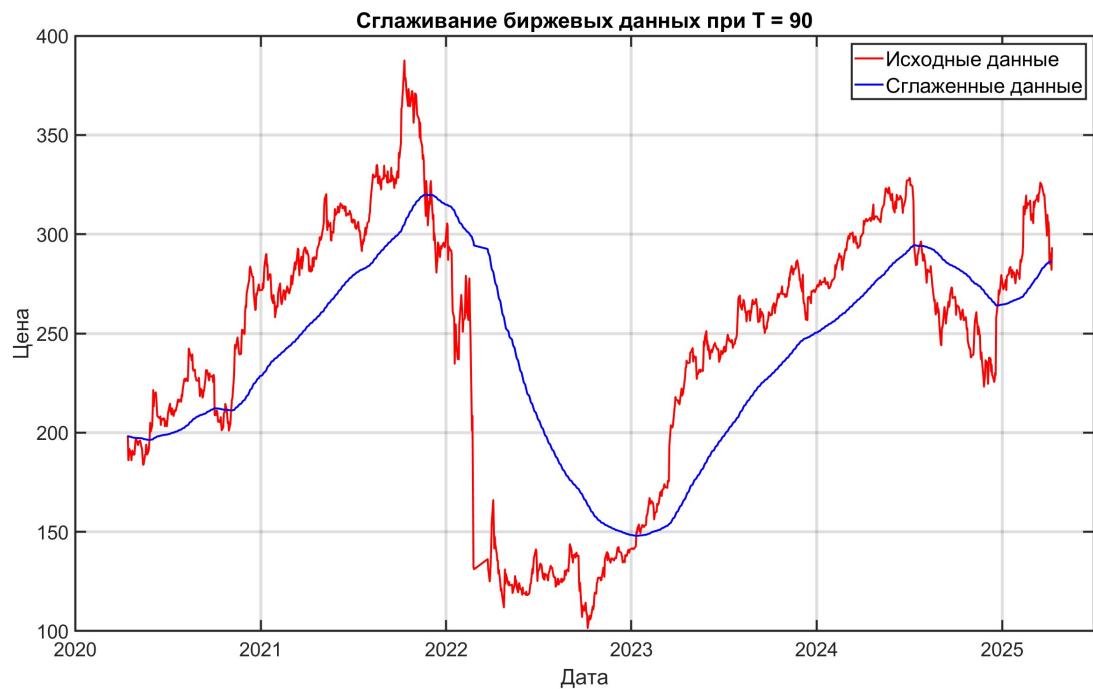
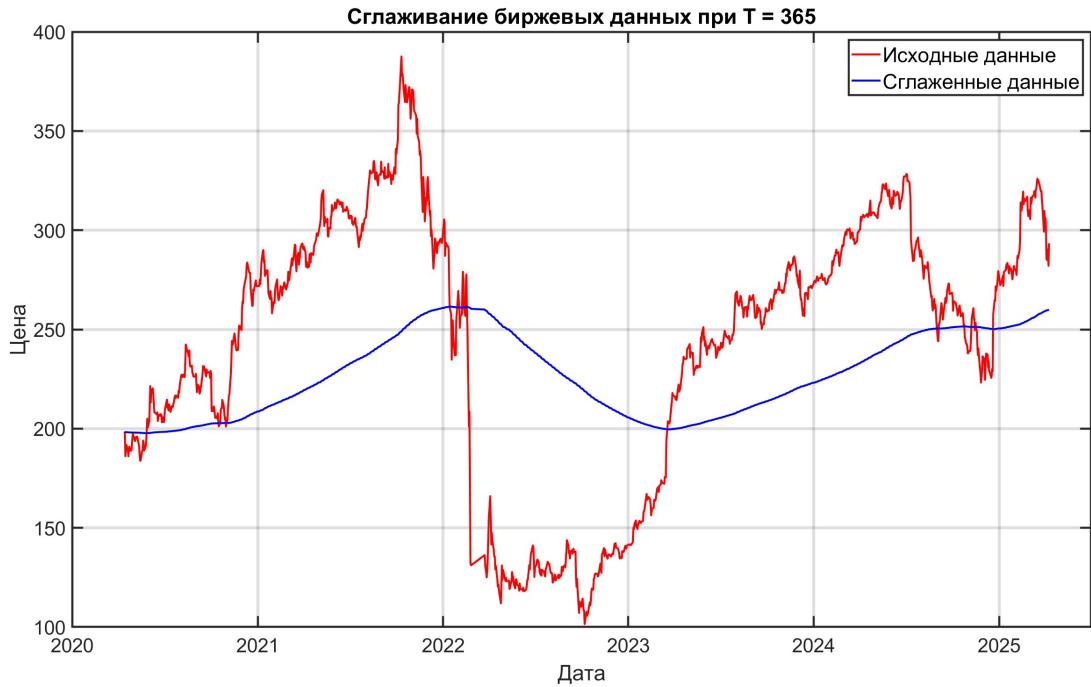


Рис. 25: Сглаживание котировок ( $T = 3$  месяца)



*Рис. 26: Сглаживание котировок ( $T = 1$  год)*

### 3 Общие выводы

В ходе выполнения работы были исследованы линейные фильтры первого порядка и полосовые режекторные фильтры второго порядка, а также применение низкочастотных для сглаживания биржевых данных. Фильтры первого порядка дают простую реализацию и хорошую эффективность в снижении шумов, однако вносят задержки в сигнал и мало «разбираются», что же они в действительности подавляют, из-за плавности действия в частотной области. Режекторные фильтры дали точечное подавление определённого отрезка частот, что делает их полезными для устранения локализованных помех. При обработке биржевых данных линейные фильтры позволили сгладить кратковременные колебания, а также выделить общие месячные и годовые тренды. В целом, динамическая фильтрация показала себя с лучшей стороны в обработке сигналов, несмотря на все возникшие ограничения и трудности.

**На этом всё, спасибо!**