

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по лабораторной работе №1  
Моделирование и устойчивость  
Вариант 11

Выполнили студенты

Мовчан Игорь Евгеньевич  
Боглачев Артём Сергеевич  
Краснов Александр Юрьевич

Преподаватель

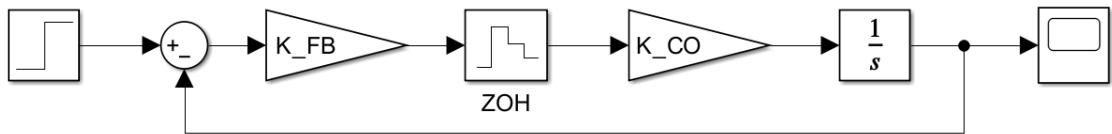
Санкт-Петербург  
2025

## Содержание

<b>1 Влияние дискретного элемента</b>	<b>2</b>
<b>2 Исследование устойчивости</b>	<b>3</b>
<b>3 Построение командных генераторов</b>	<b>5</b>

# 1 Влияние дискретного элемента

Реализуем схему с дискретным элементом с периодом дискретизации  $T = 0.2$  с и коэффициентом передачи ОУ  $K_{CO} = 7.2$ :



*Рис. 1: Система с дискретным элементом*

Выведем разностное уравнение этой схемы. На выходе экстраполатора нулевого порядка имеем  $u(t) = u[k]$  при  $t \in [kT, (k + 1)T]$ . Тогда интегратору на вход подается постоянная величина, а значит

$$y((k + 1)T) = y(kT) + K_{CO}Tu[k]$$

Откуда при компактном обозначении  $y[k] = y(kT)$ :

$$y[k + 1] = y[k] + K_{CO}Tu[k]$$

Далее, учитывая, что  $u[k] = K_{FB}(r[k] - y[k])$ :

$$y[k + 1] = (1 - K_{FB}K_{CO}T)y[k] + K_{FB}K_{CO}Tr[k]$$

В данном случае  $r[k]$  - дискретная версия входного сигнала  $r(t)$  в моменты времени  $t = kT$ . Для рассматриваемой схемы

$$r(t) = g(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Для дальнейшего анализа полезным будет ввести переменную, характеризующую движение системы без входного сигнала  $r(t)$ :

$$z = 1 - K_{FB}K_{CO}T \Rightarrow y[k + 1] = zy[k] + K_{FB}K_{CO}Tr[k]$$

Нейтральная граница  $z = 1$ , колебательная  $z = -1$ .

Затухающие колебания при  $-1 \leq z < 0$ , максимальные при  $z = -1$ , при  $z < -1$  - расходящиеся колебания. При  $z \geq 0$  - отсутствие колебаний. При  $0 \leq z \leq 1$  - затухание. При  $z > 1$  - расходящиеся экспоненты.

Оптимальное по быстродействию значение  $z = 0$ .

## 2 Исследование устойчивости

Рассмотрим непрерывный ОУ, заданный уравнением  $\ddot{y} = u$ , где  $u(t)$  - управляющее воздействие,  $y(t)$  - выходная величина.

Зададимся  $x_1(t) = y(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{y}(t)$ , а значит,  $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ , а  $\dot{x}_2(t) = u(t)$ . Тогда модель в форме вход-состояние-выход будет:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = A_{\text{H}}x + B_{\text{H}}u$$

Дискретизируем ее с использованием выражений:

$$A = e^{A_{\text{H}}T} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{\text{H}}^i T^i}{i!}, \quad B = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{\text{H}}^{i-1} T^i}{i!} B_{\text{H}}$$

Заметим, что  $A^2 = 0$ , а значит,  $A^n = 0$  для любого  $n \geq 2$ . Тогда

$$A = I + A_{\text{H}}T = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = TB_{\text{H}} + \frac{A_{\text{H}}T^2B_{\text{H}}}{2} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

В итоге, получаем дискретную модель:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Теперь зададим управляющее воздействие в виде

$$u(k) = -Kx(k) = -[k_1 \ k_2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

А также матрицу динамики замкнутой системы:

$$F = A - BK = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - k_1T^2/2 & T - k_2T^2/2 \\ -k_1T & 1 - k_2T \end{bmatrix}$$

Характеристический полином для замкнутой системы тогда:

$$\begin{aligned} P(z) &= \det(zI - F) = \begin{vmatrix} z - 1 + k_1T^2/2 & -T + k_2T^2/2 \\ k_1T & z - 1 + k_2T \end{vmatrix} = \\ &= \left( z - 1 + \frac{k_1T^2}{2} \right) (z - 1 + k_2T) + k_1T \left( T - \frac{k_2T^2}{2} \right) = \\ &= (z - 1)^2 + k_2T(z - 1) + \frac{k_1T^2}{2}(z - 1) + \frac{k_1k_2T^3}{2} + k_1T^2 - \frac{k_1k_2T^3}{2} = \\ &= z^2 + \left( -2 + k_2T + \frac{k_1T^2}{2} \right) z + \left( 1 - k_2T + \frac{k_1T^2}{2} \right) \end{aligned}$$

С помощью матрицы  $M$  размерности  $2 \times 2$  такой, что  $x = M\xi$  и существует  $M^{-1}$ , перейдем к базису  $\xi$  системы, где матрица  $F$  была бы диагональной и имела собственными числами  $z_1$  и  $z_2$ :

$$F_d = M^{-1}FM = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}, \quad \xi(m+1) = F_d\xi(m), \quad \xi_i(m) = z_i^m \xi(0)$$

Характеристический полином замкнутой системы в этом случае:

$$P(z) = \det(zI - F_d) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2$$

Зная, что при переходе в новый базис характеристический полином остается тем же:

$$\det(zI - F_d) = \det(M^{-1}(zI - F)M) = \det(zI - F)$$

Получаем систему уравнений на коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$ :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 - k_2T - \frac{k_1T^2}{2} \\ z_1z_2 = 1 - k_2T + \frac{k_1T^2}{2} \end{cases}$$

Решим ее аналитически с введенными  $s = z_1 + z_2$  и  $p = z_1 z_2$ :

$$k_1 = \frac{1 - s + p}{T^2}, \quad k_2 = \frac{3 - s - p}{2T}$$

Отлично! Теперь можно синтезировать матрицу  $K$  по желаемым корням  $z_1$  и  $z_2$  замкнутой системы, а также взятому периоду дискретизации  $T = 0.2$  с. Рассмотрим пять случаев:

1.  $z_1 = 0.1$  и  $z_2 = 0.7$ : обратная связь  $K_1 = [6.75 \quad 5.325]^T$
2.  $z_1 = -1.2$  и  $z_2 = -0.4$ : обратная связь  $K_2 = [77 \quad 10.3]^T$
3.  $z_1 = 0.1$  и  $z_2 = 0.5$ : обратная связь  $K_3 = [11.25 \quad 5.875]^T$
4.  $z_{12} = \pm 1.2j$ : обратная связь  $K_4 = [61 \quad 3.9]^T$
5.  $z_{12} = -0.8 \pm 0.7j$ : обратная связь  $K_5 = [93.25 \quad 8.675]^T$

Наконец, осуществим моделирование полученных систем с начальными условиями  $y(0) = 1$  и  $\dot{y}(0) = 0$ . Переходный процесс при входе  $r(t) = g(t)$ .

### 3 Построение командных генераторов

Синтезируем командный генератор гармонического сигнала вида  $g(k) = A \sin(kT\omega)$  с параметрами из варианта:

$$T = 0.2 \text{ с}, \quad A = -1.3, \quad \omega = 0.87 \text{ рад/с}$$

Найдем разностное уравнение для этого сигнала:

$$g(k+1) = A \sin((k+1)T\omega) = A(\sin(kT\omega) \cos(T\omega) + \cos(kT\omega) \sin(T\omega))$$

Введем переменные состояния:

$$\xi_1(k) = g(k) = A \sin(kT\omega), \quad \xi_2(k) = A \cos(kT\omega)$$

Тогда система уравнений для состояний:

$$\begin{cases} \xi_1(k+1) = \xi_1(k) \cos(T\omega) + \xi_2(k) \sin(T\omega) \\ \xi_2(k+1) = -\xi_1(k) \sin(T\omega) + \xi_2(k) \cos(T\omega) \end{cases}$$

Запишем эту систему в матричном виде:

$$\xi(k+1) = \begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(T\omega) & \sin(T\omega) \\ -\sin(T\omega) & \cos(T\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \end{bmatrix} = \Gamma_d \xi(k)$$

Тогда итоговая модель задается уравнением

$$g(k) = H\xi(k) = H\Gamma_d^k \xi(0)$$

При начальных условиях и матрице  $H$ :

$$\xi(0) = \begin{bmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \sin(0) \\ A \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}, \quad H = [1 \ 0]$$

Далее синтезируем дискретную модель возмущения  $g(k) = A + BkT + C(kT)^2$  с параметрами из варианта:

$$A = 5, \quad B = 5.5, \quad C = 1.5$$

Также выведем разностное уравнение для этого сигнала. Зададимся первой переменной состояния:

$$\xi_1(k) = g(k)$$

Возьмем вторую переменную состояния:

$$\xi_2(k) = \xi_1(k+1) = A + BkT + C(kT)^2 + BT + 2CkT^2 + CT^2$$

Откуда:

$$\xi_2(k) = \xi_1(k) + BT + 2CkT^2 + CT^2$$

Возьмем третью переменную состояния:

$$\xi_3(k) = \xi_2(k+1) = \xi_1(k+1) + BT + 2CkT^2 + CT^2 + 2CT^2$$

Откуда:

$$\xi_3(k) = \xi_1(k+1) + \xi_2(k) - \xi_1(k) + 2CT^2 = 2\xi_2(k) - \xi_1(k) + 2CT^2$$

Далее, имеем:

$$\xi_3(k+1) = 2\xi_2(k+1) - \xi_1(k+1) + 2CT^2$$

Из выражения для  $\xi_3(k)$  можно выразить  $CT^2$ :

$$CT^2 = \xi_3(k) - 2\xi_2(k) + \xi_1(k)$$

И тогда:

$$\begin{aligned} \xi_3(k+1) &= 2\xi_2(k+1) - \xi_1(k+1) + \xi_3(k) - 2\xi_2(k) + \xi_1(k) = \\ &= 3\xi_3(k) - 3\xi_2(k) + \xi_1(k) \end{aligned}$$

В матричной форме система записывается как

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \\ \xi_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix} = \Gamma_d \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix}$$

Имеем также

$$g(k) = H\xi(k) = H\Gamma_d^k \xi(0), \quad H = [1 \ 0 \ 0]$$

Начальные условия задаются через  $k = 0$  и  $g(0) = A$ :

$$\xi(0) = \begin{bmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \\ \xi_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A + BT + CT^2 \\ A + 2BT + 3CT^2 \end{bmatrix}$$