

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по лабораторной работе №1  
**Поиск минимума с помощью методов  
статический оптимизации**  
Вариант 21

Выполнил студент  
Проверил преподаватель

Мовчан Игорь Евгеньевич, R3480  
Парамонов Алексей Владимирович

Санкт-Петербург  
2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Поиск глобального минимума</b>	<b>2</b>
1.1	Поиск минимума без ограничений . . . . .	2
1.2	С ограничением в виде равенства . . . . .	3
1.3	С ограничением в виде неравенства . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Градиентный поиск минимума</b>	<b>5</b>
2.1	Метод Ньютона-Рафсона . . . . .	5
2.2	Метод наискорейшего спуска . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Общие выводы</b>	<b>7</b>

# 1 Поиск глобального минимума

Рассмотрим функцию двух переменных:

$$J(x, u) = 8x^2 + 3u^2 + 6xu + x + 4u - 13$$

Целью работы ставится поиск глобального минимума  $J(x, u)$  различными методами. Сперва взглянем на теоретические подходы на основе необходимого и достаточного условий и ограничениях.

## 1.1 Поиск минимума без ограничений

Для начала примем, что все ограничения отсутствуют. Найдем градиент функции:

$$\nabla J(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial x} \\ \frac{\partial J}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16x + 6u + 1 \\ 6x + 6u + 4 \end{bmatrix} = 0$$

По необходимому условию градиент должен быть равен нулю, так что в итоге получаем систему на  $x$  и  $u$ :

$$\begin{cases} 16x + 6u + 1 = 0 \\ 6x + 6u + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x = 3 \\ 3x + 3u + 2 = 0 \end{cases}$$

Откуда имеем

$$\begin{cases} x = 0.3 \\ 0.9 + 3u = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* = \frac{3}{10} \\ u^* = -\frac{29}{30} \end{cases}$$

Для определения типа полученной точки найдем матрицу Гессе:

$$H(x) = \begin{bmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

Она положительно определена, а значит, найденная  $(x^*, u^*)$  - точка глобального минимума **выпуклой** функции  $J(x, u)$ .

## 1.2 С ограничением в виде равенства

Пусть теперь задано ограничение  $c(x, u) = 0$ :

$$c(x, u) = x^2 - 8u - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = (x^2 - 4)/8$$

Минимум тогда можно найти с помощью функции Лагранжа

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, u, \lambda) &= J(x, u) + \lambda c(x, u) = \\ &= 8x^2 + 3u^2 + 6xu + x + 4u - 13 + \lambda(x^2 - 8u - 4) \end{aligned}$$

Здесь  $\lambda$  — множитель Лагранжа.

Поиск минимума с ограничениями в виде равенства тогда сводится к решению системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = c(x, u) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 8u - 4 = 0 \\ 16x + 6u + 1 + 2\lambda x = 0 \\ 6x + 6u + 4 - 8\lambda = 0 \end{cases}$$

Система имеет единственное вещественное решение

$$\begin{cases} x^* \approx 0.121 \\ u^* \approx -0.498 \\ \lambda^* \approx 0.217 \end{cases}$$

Для проверки того, что найденная точка действительно является точкой глобального минимума подставим полученное из ограничения  $c(x, u) = 0$  выражение на  $u$  в функцию  $J(x, u)$ :

$$\begin{aligned} J(x) &= 8x^2 + \frac{3}{64}x^4 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}x^3 - 3x + \frac{1}{2}x^2 - 2 - 13 = \\ &= \frac{3}{64}x^4 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{65}{8}x^2 - 2x - \frac{57}{4} \end{aligned}$$

Теперь это функция одной переменной с положительным коэффициентом при старшей чётной степени (а это значит, что функция ограничена снизу). Найдём её вторую производную:

$$J'(x) = \frac{3}{16}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{65}{4}x - 2$$

$$J''(x) = \frac{9}{16}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{65}{4}$$

Проверим дискриминант:

$$D = \frac{81}{4} - \frac{9 \cdot 65}{16} = -\frac{261}{16} < 0$$

При этом  $J''(x)$  - парабола с ветвями вверх, а значит, вторая производная положительна для всех  $x$ . Выходит, найденная  $(x^*, u^*)$  действительно является точкой минимума.

### 1.3 С ограничением в виде неравенства

Пусть задано ограничение  $c(x, u) \leq 0$ :

$$c(x, u) = x^2 - 8u - 4 \leq 0$$

Для решения задачи введем в рассмотрение функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, u, \lambda) = J(x, u) + \lambda c(x, u) =$$

$$= 8x^2 + 3u^2 + 6xu + x + 4u - 13 + \lambda(x^2 - 8u - 4)$$

Найдем экстремальные точки через необходимые условия

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = c(x, u) \leq 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda c(x, u) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 8u - 4 \leq 0 \\ 16x + 6u + 1 + 2\lambda x = 0 \\ 6x + 6u + 4 - 8\lambda = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda c(x, u) = 0 \end{cases}$$

Сперва рассмотрим случай  $\lambda = 0$ . Задача тогда сводится к безусловной минимизации  $J(x, u)$ , которая была уже проведена и для которой получены следующие значения:

$$\begin{cases} x^* = \frac{3}{10} \\ u^* = -\frac{29}{30} \end{cases} \Rightarrow c(x^*, u^*) = \frac{9}{100} + \frac{116}{15} - 4 > 0$$

Найденная точка нарушает ограничение, значит,  $\lambda > 0$ . Тогда по условию дополнительной нежесткости получаем систему с ограничением в виде равенства, для которой уже была получена точка

$$\begin{cases} x^* \approx 0.121 \\ u^* \approx -0.498 \\ \lambda^* \approx 0.217 \end{cases}$$

Она удовлетворяет неравенству, а значит, является стационарной. Здесь важно, что неравенство  $c(x, u) \leq 0$  порождает выпуклое множество, сама  $J(x, u)$  тоже является выпуклой, поэтому найденная  $(x^*, u^*)$  является точкой минимума.

## 2 Градиентный поиск минимума

Пусть мы исследуем всё тот же критерий качества

$$J(x, u) = 8x^2 + 3u^2 + 6xu + x + 4u - 13$$

Необходимо динамическими методами найти точки глобального минимума. Далее исследуем два различных подхода.

### 2.1 Метод Ньютона-Рафсона

Поставленная задача оптимизации с помощью данного метода решается последовательным нахождением точек

$$\bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)} - H^{-1}(\bar{x}^{(n)}) \nabla J(\bar{x}^{(n)})$$

Здесь были введены вектор переменных и градиент в точке

$$\bar{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}, \quad \nabla J(\bar{x}^{(n)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial x} \\ \frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16x + 6u + 1 = 0 \\ 6x + 6u + 4 = 0 \end{bmatrix}$$

А также матрица Гессе вторых частных производных:

$$H(\bar{x}^{(n)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial u} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Суть подхода заключается в движении в направлении наискорейшего убывания - по антиградиенту - с учётом кривизны функции с помощью матрицы Гессе.

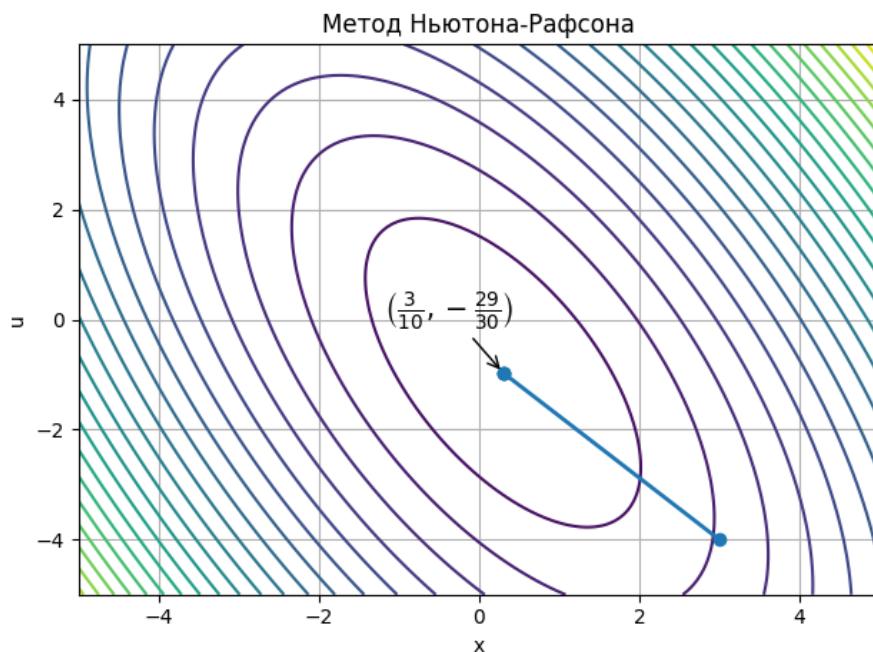


Рис. 1: Применение метода Ньютона-Рафсона для поиска минимума

Применение метода при точке старта  $\bar{x}^{(0)} = [3 \ -4]^T$  продемонстрировано на рисунке 1. Критерием останова было выбрано увеличение значения  $J(\bar{x}^{(n)})$ . Видим, что траектория приходит в уже найденную в первом пункте точку минимума за один шаг. Успех!

## 2.2 Метод наискорейшего спуска

В методе Ньютона-Рафсона на каждом шаге необходимо считать матрицу вторых производных, а после её обращать, это *очень* тяжеловесно. В связи с этим возникает идея упрощения множителя перед антиградиентом до константы  $\gamma$ , получаем:

$$\bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)} - \gamma \nabla J(\bar{x}^{(n)})$$

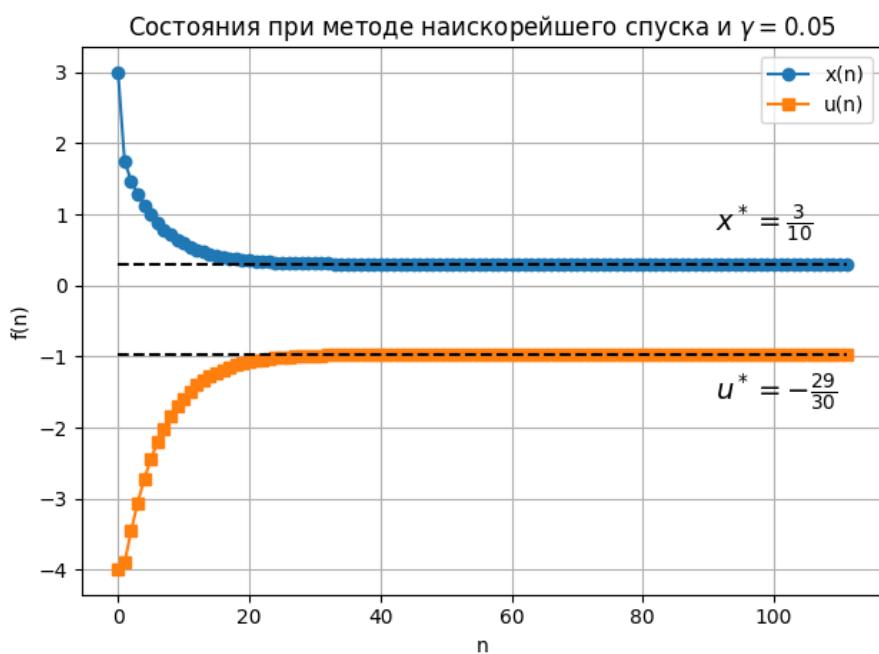
Это и назовём методом наискорейшего спуска или же градиентным спуском. Суть его также заключается в движении в направлении наискорейшего убывания функции, но более просто - без учёта локальной кривизны. Поэтому на практике, если взять слишком большое значение  $\gamma$ , то состояние  $\bar{x}^{(n)}$  начнёт «раскачивать».

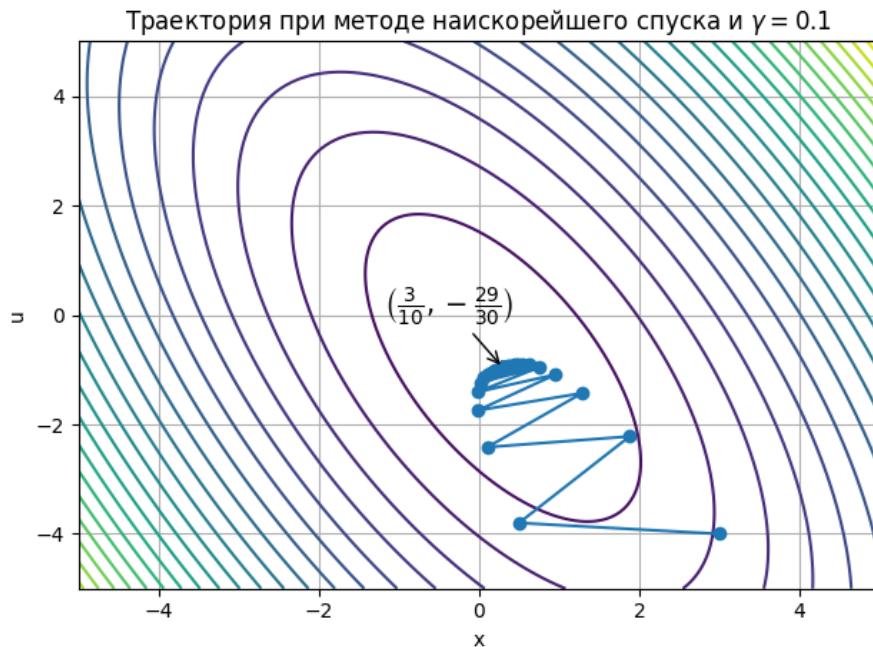
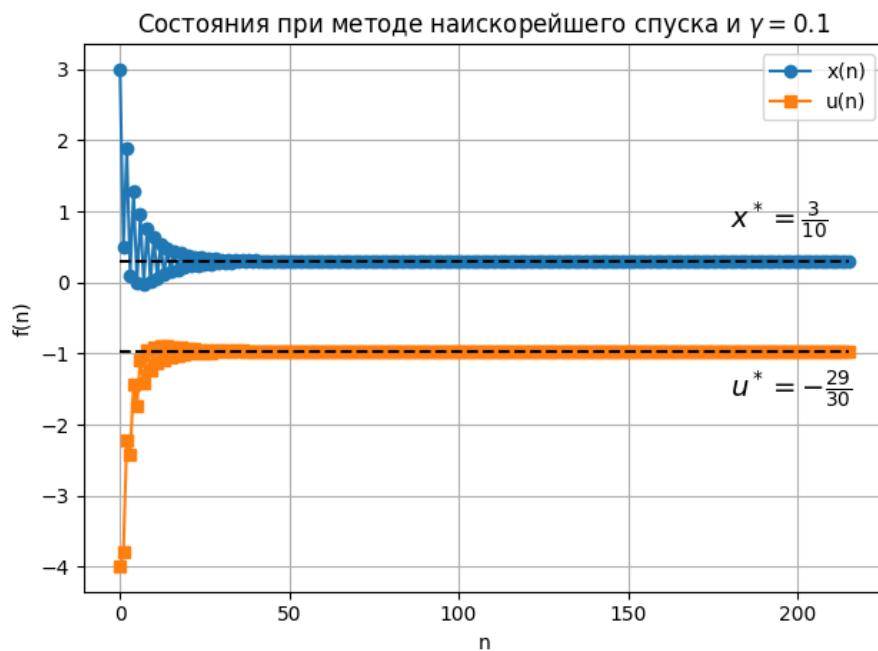
Итак, применение метода при параметрах  $\gamma = 0.05$  и  $\gamma = 0.125$ , начальном условии  $\bar{x}^{(0)} = [3 \ -4]^T$  и критерии останова в виде увеличения значения  $J(\bar{x}^{(n)})$  приведено на рисунках 2-5.

Можем видеть, что параметр  $\gamma = 0.05$  соответствует апериодической сходимости, а его повышение до  $\gamma = 0.1$  уже приводит к колебаниям и требует большего числа шагов для попадания в окрестность точки глобального минимума. В целом обе вариации отработали хорошо и дошли до вычисленных стационарных точек.

## 3 Общие выводы

В ходе лабораторной работы были исследованы аналитические и численные методы поиска глобального минимума квадратичной функции двух переменных. Показано, что для выпуклой функции без ограничений минимум находится точно через систему уравнений,

Рис. 2: Применение градиентного спуска: траектория,  $\gamma = 0.05$ Рис. 3: Применение градиентного спуска: состояния,  $\gamma = 0.05$

Рис. 4: Применение градиентного спуска: траектория,  $\gamma = 0.1$ Рис. 5: Применение градиентного спуска: состояния,  $\gamma = 0.1$

задаваемую градиентом, и подтверждается положительной определённостью матрицы Гессе. При наличии ограничений — как равенства, так и неравенства — использован метод множителей Лагранжа с учётом условий Куна–Таккера, и найдены соответствующие стационарные точки, удовлетворяющие критериям оптимальности. Численные методы — Ньютона–Рафсона и градиентного спуска — подтвердили аналитические результаты: первый обеспечил сходимость за один шаг благодаря точной учёту кривизны, второй — продемонстрировал чувствительность к выбору шага, также сошёлся, причем с меньшей вычислительной нагрузкой на каждый шаг.