

НАУЧНО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по лабораторной работе №4  
Слежение и компенсация: виртуальный выход  
Вариант 11

Выполнил студент группы R3380  
Преподаватель

Мовчан Игорь Евгеньевич  
Пашенко Артем Витальевич

Санкт-Петербург  
2025

## Содержание

|   |                                       |    |
|---|---------------------------------------|----|
| 1 | Компенсирующий регулятор по состоянию | 2  |
| 2 | Следящий регулятор по состоянию       | 9  |
| 3 | Слежение и компенсация по выходу      | 15 |
| 4 | Тележка и меандр                      | 29 |
| 5 | Общие выводы                          | 34 |

## 1 Компенсирующий регулятор по состоянию

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_f w_f, \quad x(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$$

генератор внешнего возмущения

$$\dot{w}_f = \Gamma w_f, \quad w_f(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

и виртуальный выход вида

$$z = C_z x.$$

В соответствии с вариантом, матрицы  $A$ ,  $B$  и  $B_f$  имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 13 \\ 6 & -1 & 6 \\ -6 & -1 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Матрицы  $\Gamma$  и  $C_z^T$  же:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 35 & 56 & 22 & -42 \\ -11 & -17 & -7 & 12 \\ -6 & -10 & -5 & 10 \\ 11 & 18 & 6 & -13 \end{bmatrix}, \quad C_z^T = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

В жордановой форме матрица  $\Gamma$ , имеющая собственными числами  $\lambda_{12} = \pm i$  и  $\lambda_{34} = \pm 3i$ , и матрица перехода  $T$  к ней будут:

$$\hat{\Gamma} = T^{-1}\Gamma T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда характер внешнего возмущения - некоторые гармонические *незатухающие* колебания с частотами  $\omega_1 = 1$  и  $\omega_2 = 3$ . Также отметим, что  $\sigma(\Gamma) \subset \overline{\mathbb{C}_+}$ .

Замкнем систему компенсирующим регулятором  $u = K_1x + K_2w_f$ , обеспечивающим выполнение целевого условия  $z(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  при внешнем воздействии  $w_f$ , задаваемом генератором. Соответствующая схема моделирования представлена на рисунке 1.

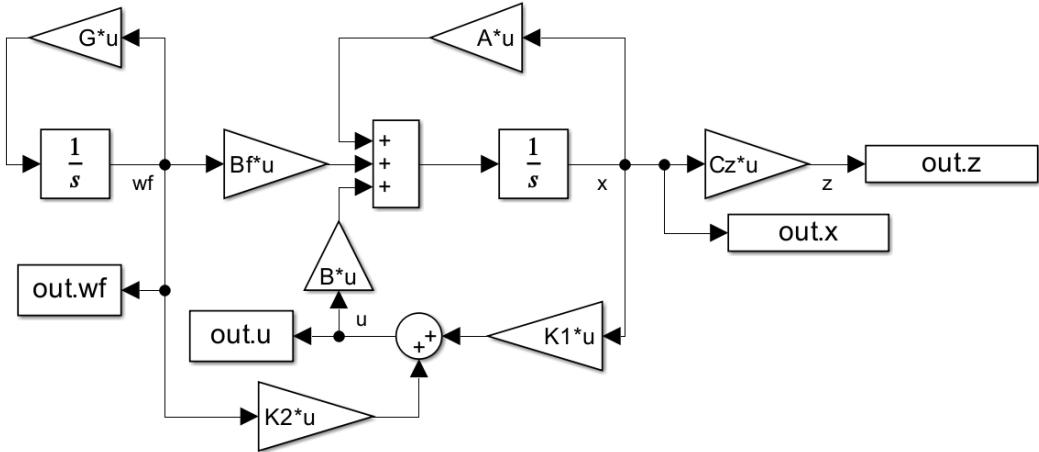


Рис. 1: Схема моделирования системы с компенсирующим регулятором

Синтезируем «feedback»-компоненту компенсирующего регулятора путем минимизации функционала

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

То есть будем использовать LQR. Для синтеза используем уравнение Риккати при параметре  $v = 1$ :

$$A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0$$

Зададимся также  $Q = I$  и  $R = 1$ . Тогда решением будет:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.6791 & -0.2724 & 2.3301 \\ -0.2724 & 1.0726 & -0.1762 \\ 2.3301 & -0.1762 & 2.3594 \end{bmatrix}$$

Откуда можно найти матрицу обратной связи  $K_1$  регулятора:

$$K_1 = -R^{-1}B^T P_1 = [-5.3581 \ 0.5448 \ -4.6602]$$

Синтезируем теперь «feedforward»-компоненту  $K_2$  компенсирующего регулятора путем решения системы:

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY + B_f \\ C_z P = 0 \end{cases}$$

Откуда матрицы  $P_2$  и  $Y_2$ :

$$P_2 = \begin{bmatrix} 12.687 & 25.303 & 9.801 & -16.740 \\ 2.720 & 6.190 & 2.362 & -3.893 \\ -17.213 & -32.036 & -12.516 & 21.801 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 9.204 \\ = 15.747 \\ 6.081 \\ -9.817 \end{bmatrix}^T$$

Наконец, используем найденное для синтеза  $K_2$ :

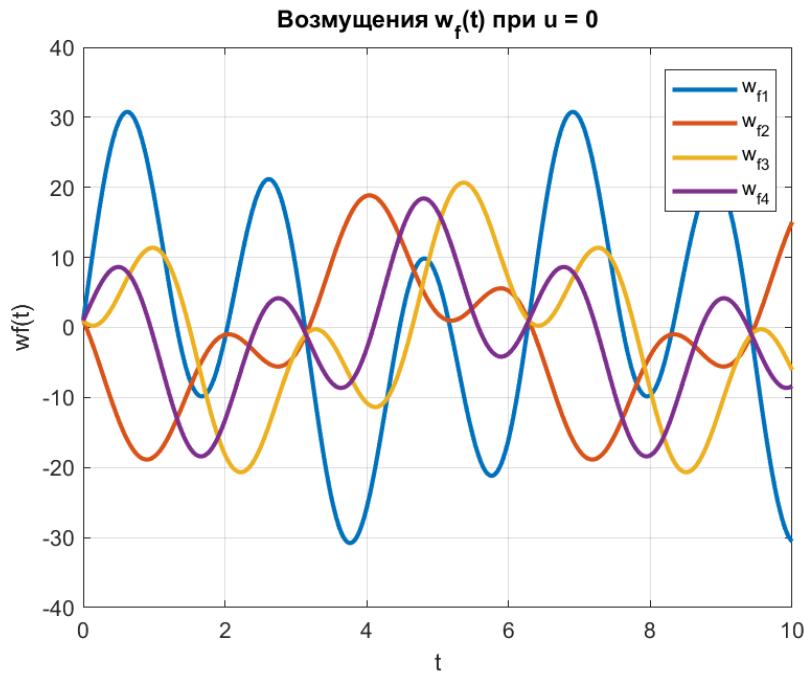
$$K_2 = Y_2 - K_1 P_2 = [-4.5154 \ -1.3439 \ -1.0174 \ 4.2048]$$

Выполним компьютерное моделирование разомкнутой системы. На рисунке 2 изображен график вектора состояния генератора внешнего возмущения  $w_f(t)$ , на рисунке 4 - график виртуального выхода  $z(t)$ , а на рисунке 3 - график вектора состояния  $x(t)$  при  $u = 0$ .

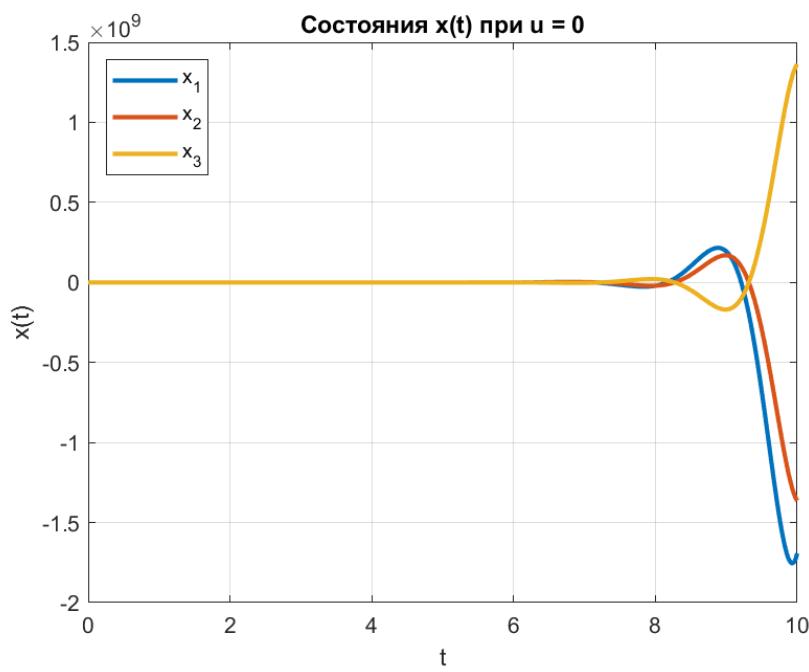
Можем видеть, что внешнее воздействие  $w_f$  действительно представляет из себя сумму гармоник. Вектор состояния  $x(t)$  системы является неустойчивым, уходя в огромные значения на большом интервале времени. Аналогичная ситуация наблюдается и с виртуальным выходом  $z(t)$ , который явно не сходится к 0.

Теперь выполним моделирование системы с регуляторами  $u = K_1 x$  и  $u = K_1 x + K_2 w_f$ . На рисунках 5 и 6 изображены графики векторов состояния  $x(t)$ , на рисунке 7 - формируемых управлений  $u(t)$ , а на рисунке 8 - виртуальных выходов  $z(t)$ .

В случае  $u = K_1 x$  система не уходит в бесконечность, однако наблюдаются стабильные колебания как в виртуальном выходе, так и в векторе состояния и управлении. Связано это с тем, что регулятор  $u = K_1 x$  лишь убирает из спектра матрицы  $A$  собственные числа с неотрицательной вещественной частью, делает их устойчивыми ( $A + BK_1$  имеет спектр, полностью лежащий в левой комплексной



*Рис. 2: Вектор состояния внешнего возмущения  $w_f(t)$  при компенсации*



*Рис. 3: Вектор состояния  $x(t)$  при  $u = 0$  при компенсации*

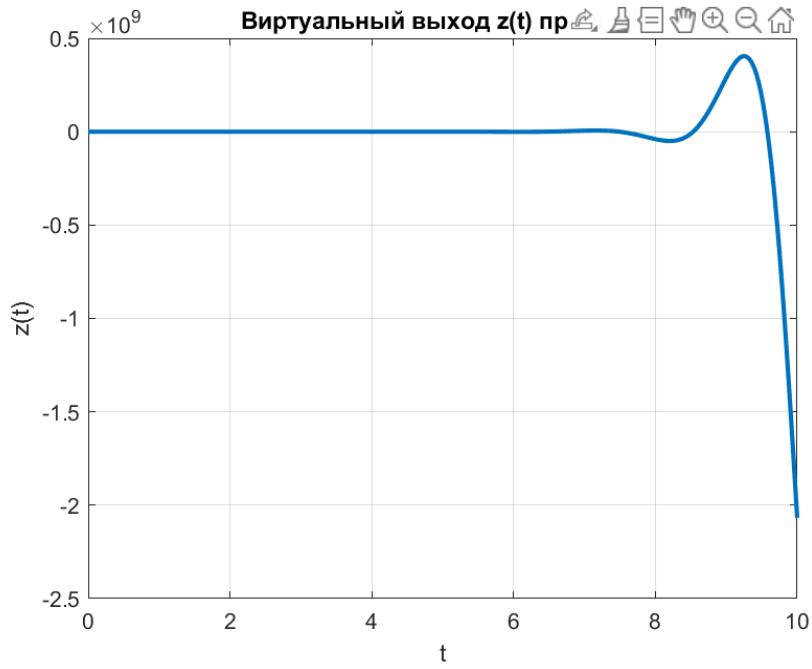


Рис. 4: Виртуальный выход  $z(t)$  при  $u = 0$  при компенсации

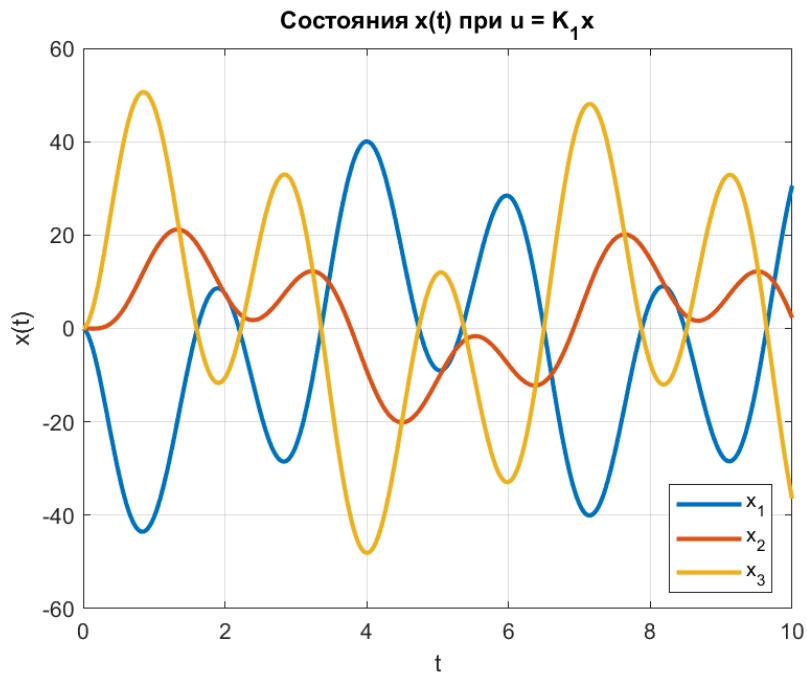


Рис. 5: Вектор состояния  $x(t)$  при  $u = K_1x$  при компенсации

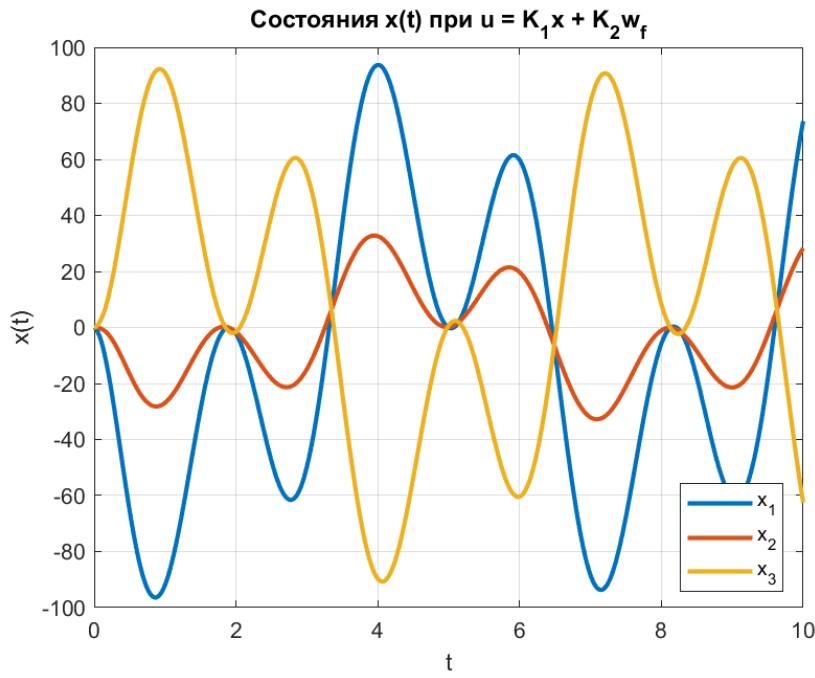


Рис. 6: Вектор состояния  $x(t)$  при  $u = K_1x + K_2w_f$  при компенсации

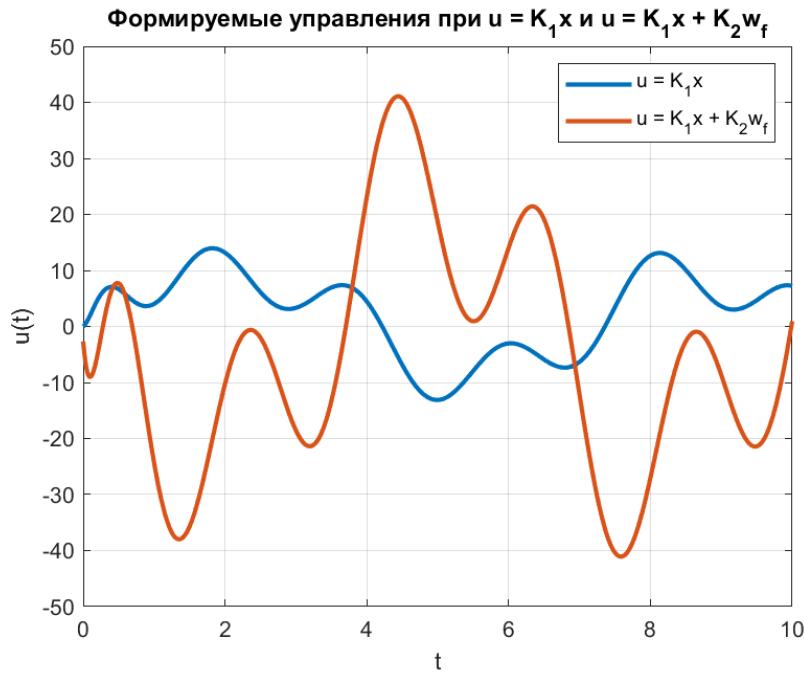


Рис. 7: Формируемое управление  $u = K_1x$  и  $u = K_1x + K_2w_f$  при компенсации

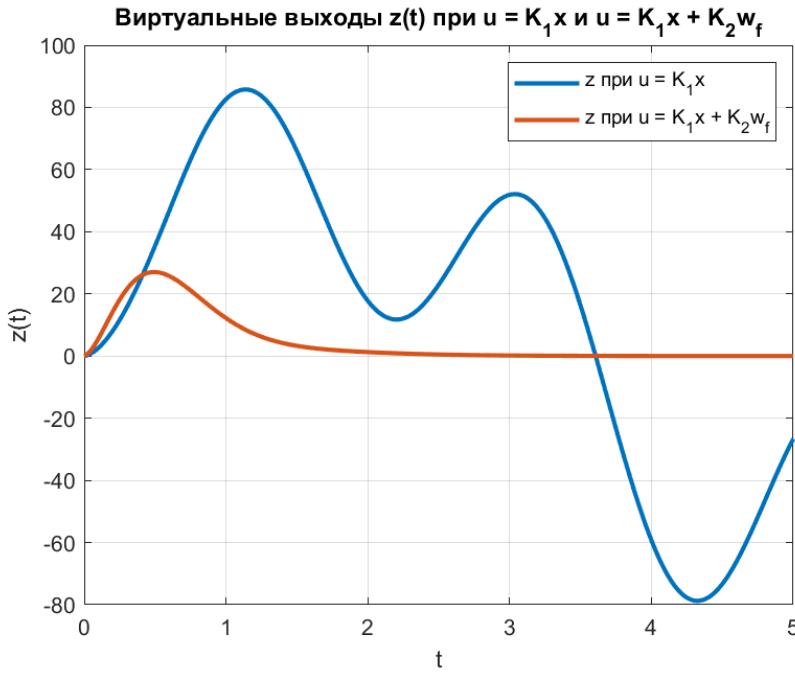


Рис. 8: Виртуальные выходы  $z(t)$  при  $u = K_1x$  и  $u = K_1x + K_2w_f$  и компенсации

полуплоскости), но никак не учитывает влияние возмущения  $w_f$  на выход. В итоге на длительном интервале времени  $z(t)$  полностью состоит из некоторой совокупности создаваемых этим возмущением колебаний. Здесь стоит отметить, что если бы спектр  $\Gamma$  не лежал «на границе» (хотя бы одно из собственных чисел матрицы  $\Gamma$  имело положительную вещественную часть, то есть одна из мод нарастала со временем), то выход  $z(t)$ , равно как и сама система, бы уходил в бесконечность даже с учётом используемого LQR-регулятора.

При  $u = K_1x + K_2w_f$  же задача компенсации выполняется успешно. Виртуальный выход  $z(t)$  сходится к 0 с течением времени - уже после 4 секунды график визуально неотличим от 0. Здесь важно, что в системе всё ещё наблюдаются колебания, ведь регулятор был направлен только на устранение влияния  $w_f$  на виртуальный выход. Постоянные колебания присущи и управлению, поскольку компенсируемые возмущения существуют всё время. Также значения управления в случае с  $u = K_1x + K_2w_f$  несколько больше, чем при  $u = K_1x$ , за счёт добавления «feedforward»-компоненты в регулятор.

## 2 Следящий регулятор по состоянию

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$$

генератор задающего сигнала

$$\dot{w}_g = \Gamma w_g, \quad w_g(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

и виртуальный выход вида

$$z = C_z x + D_z w_g.$$

Матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C_z$  оставим теми же:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 13 \\ 6 & -1 & 6 \\ -6 & -1 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_z^T = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Так же поступим и с  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 35 & 56 & 22 & -42 \\ -11 & -17 & -7 & 12 \\ -6 & -10 & -5 & 10 \\ 11 & 18 & 6 & -13 \end{bmatrix}$$

Матрица  $D_z$  же:

$$D_z = [3 \ 4 \ 2 \ -3]$$

Так как  $\Gamma$  не изменилась, то и собственные числа матрицы остались теми же:

$$\lambda_{12} = \pm i, \quad \lambda_{34} = \pm 3i$$

А значит, характер задающего сигнала - гармонические *незатухающие* колебания с частотами  $\omega_1 = 1$  и  $\omega_2 = 3$ .

Замкнем систему следящим регулятором  $u = K_1 x + K_2 w_g$ , обеспечивающим выполнение целевого условия  $z(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  при  $w_g$ . Соответствующая схема моделирования представлена на рисунке 9.

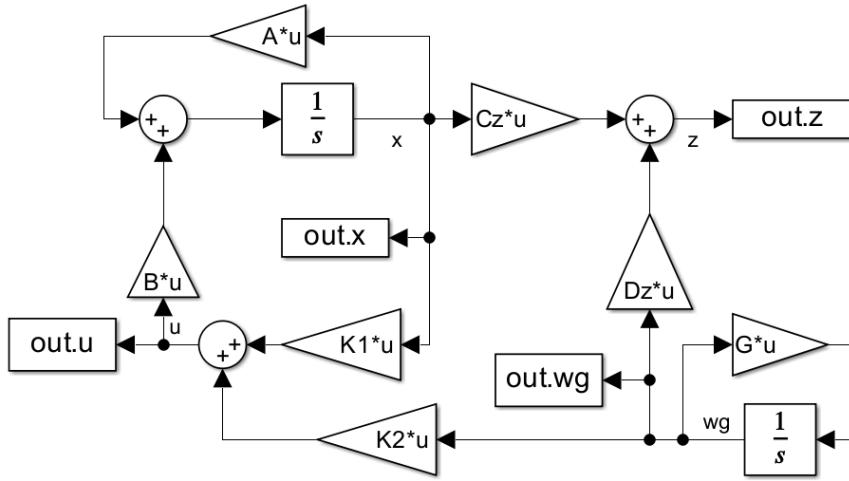


Рис. 9: Схема моделирования системы со следящим регулятором

Отметим, что целевое условие можно переписать в виде  $(C_z x + D_z w_g) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  или  $C_z x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -D_z w_g$ , то есть регулятор должен привести условный выход  $C_z x$  к некоторому  $-D_z w_g$ , то есть как раз таки выполнить задачу слежения.

Аналогично предыдущему пункту, синтезируем «feedback» компоненту  $K_1$  регулятора путем минимизации функционала качества

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

Для синтеза используем уравнение Риккати при параметре  $v = 1$ :

$$A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0$$

Зададимся также  $Q = 0$  и  $R = 1$ . Тогда решением будет:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.0000 & -0.3333 & 2.0000 \\ -0.3333 & 0.7778 & -0.3333 \\ 2.0000 & -0.3333 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

Откуда можно найти матрицу обратной связи  $K_1$  регулятора:

$$K_1 = -R^{-1} B^T P_1 = [-4.0000 \ 0.6667 \ -4.0000]$$

Синтезируем теперь  $K_2$  путем решения системы:

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY \\ C_z P + D_z = 0 \end{cases}$$

Откуда матрицы  $P_2$  и  $Y_2$ :

$$P_2 = \begin{bmatrix} -5.111 & -7.855 & -3.398 & 5.912 \\ -3.305 & -4.928 & -2.199 & 3.706 \\ 3.305 & 4.928 & 2.199 & -3.706 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} -0.208 \\ 0.109 \\ -0.299 \\ 0.059 \end{bmatrix}^T$$

Наконец, используем найденное для синтеза компоненты:

$$K_2 = Y_2 - K_1 P_2 = [-5.2262 \ -8.3167 \ -3.6290 \ 6.4118]$$

Выполним компьютерное моделирование разомкнутой системы. На рисунке 10 изображен график вектора состояния генератора задающего сигнала  $w_g(t)$ , на рисунке 11 - график виртуального выхода  $z(t)$ , а на рисунке 12 - график вектора состояния  $x(t)$  при  $u = 0$ .

Можем видеть, что состояния системы и виртуальный выход явно не сходятся к 0, а  $w_g(t)$  в силу неизменности матрицы  $\Gamma$  представляет из себя всю ту же сумму гармоник (синусоид).

Теперь замоделируем систему с регуляторами  $u = K_1 x$  и  $u = K_1 x + K_2 w_g$ . На рисунках 13, 14 изображены графики векторов состояния  $x(t)$ , на рисунке 15 - формируемых управлений  $u(t)$ , а на рисунке 16 - виртуальных выходов  $z(t)$ .

В случае  $u = K_1 x$  в отсутствие внешних воздействий на состояния  $x(t)$  системы LQR-регулятор лишь выполнил задачу стабилизации, не сведя при этом виртуальный выход  $z(t)$  к 0, как требовалось. В итоге формируемое управление  $u(t) = K_1 x(t)$  затухает со временем, а в  $z(t)$  наблюдаются стабильные колебания, идущие от задающего сигнала  $w_g(t)$ .

Регулятор  $u = K_1 x + K_2 w_g$  же успешно выполнил поставленную перед ним задачу слежения за  $w_g(t)$ . Виртуальный выход  $z(t)$  сходится к 0 с течением времени, то есть выполняется целевое условие,

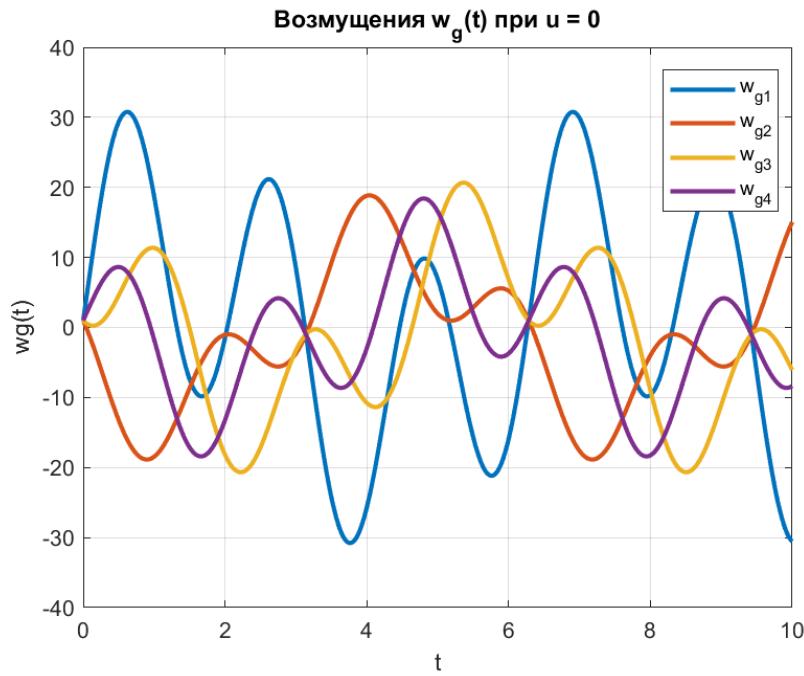


Рис. 10: Вектор состояния генератора задающего сигнала  $w_g(t)$  при слежении

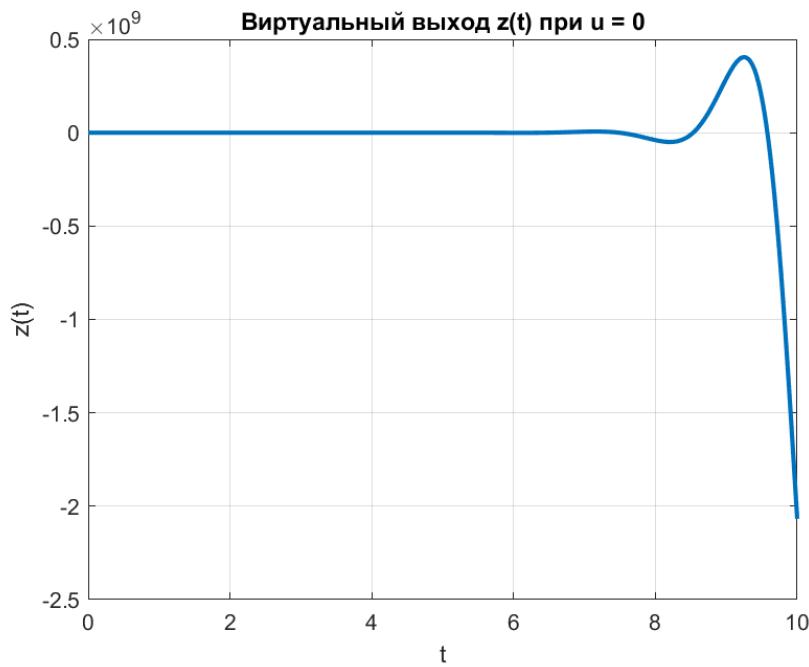


Рис. 11: Виртуальный выход  $z(t)$  при  $u = 0$  при слежении

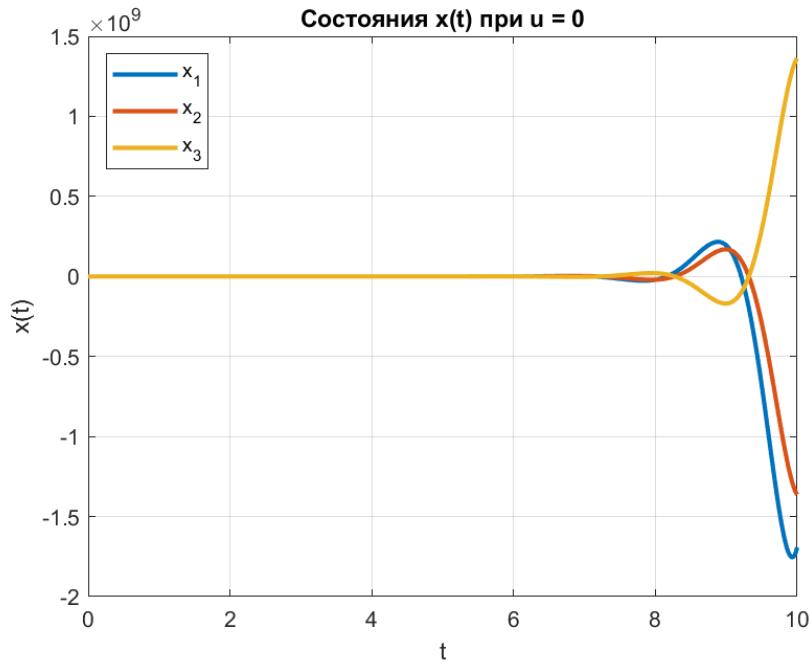


Рис. 12: Вектор состояния  $x(t)$  при  $u = 0$  при слежении

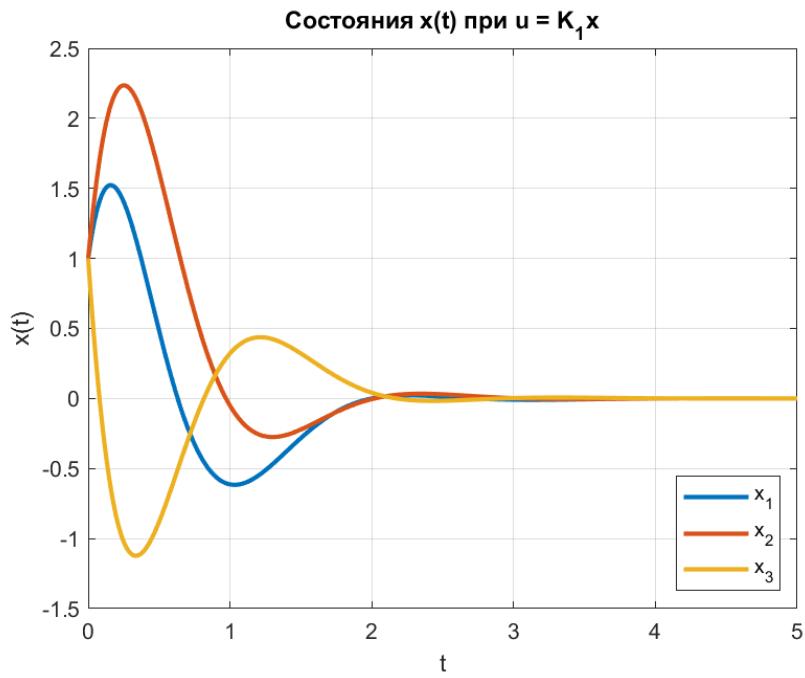


Рис. 13: Вектор состояния  $x(t)$  при  $u = K_1x$  при слежении

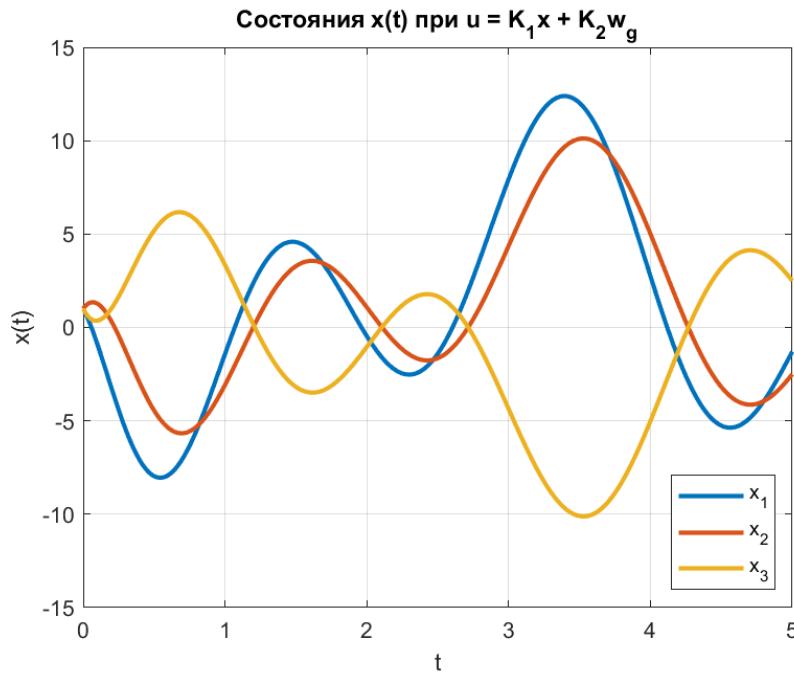


Рис. 14: Вектор состояния  $x(t)$  при  $u = K_1x + K_2w_g$  при слежении

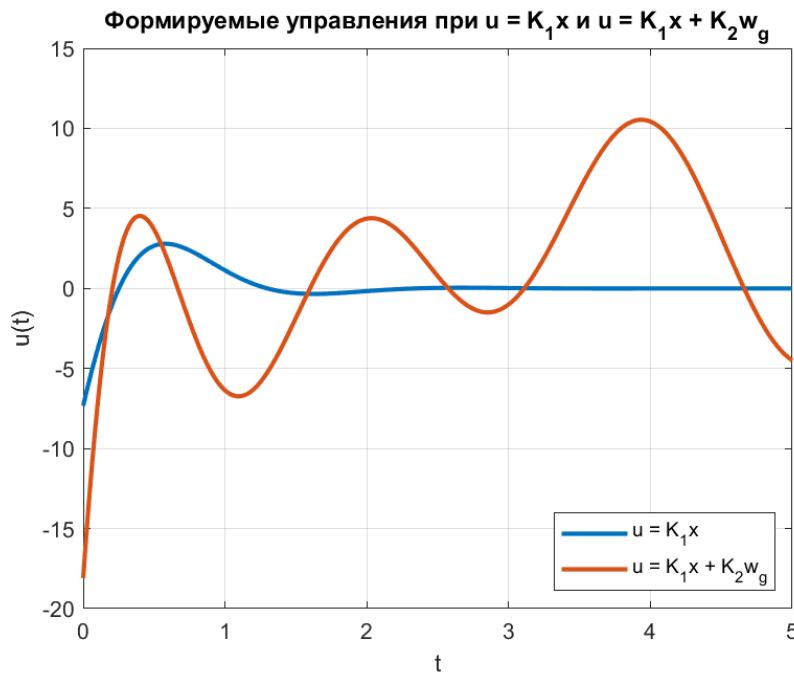


Рис. 15: Формируемое управление  $u = K_1x + K_2w_g$  при слежении

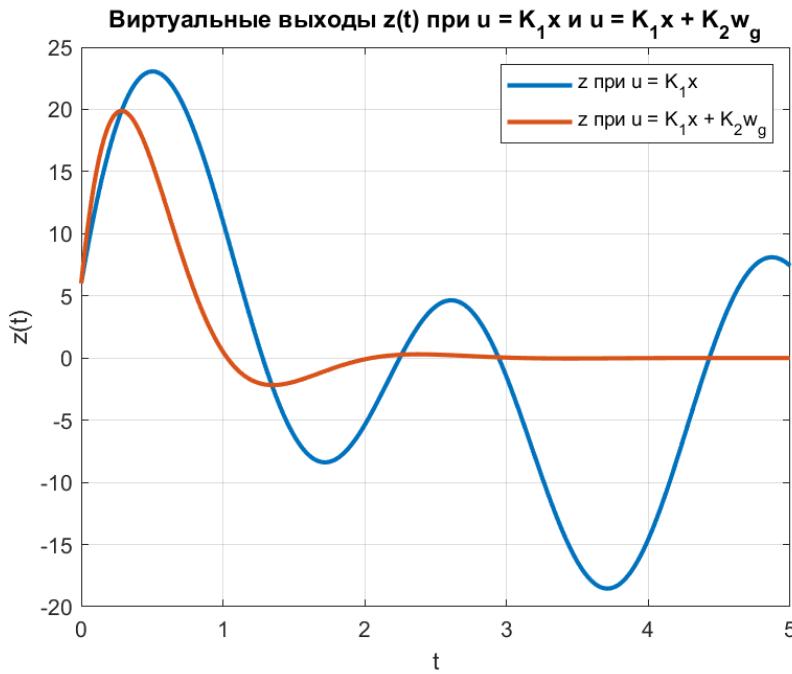


Рис. 16: Виртуальный выход  $z(t)$  при  $u = K_1x$  и  $u = K_1x + K_2w_g$  при слежении

однако в состояниях  $x(t)$  и управлении  $u(t)$  при этом наблюдаются явные колебания. Управление дестабилизирует систему, делая её неустойчивой, чтобы добиться необходимого выхода системы.

### 3 Следжение и компенсация по выходу

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f w \\ y = Cx + Dw \end{cases} \quad \text{при } x(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$$

генератор внешнего воздействия

$$\dot{w} = \Gamma w, \quad w(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

В соответствии с вариантом, матрицы  $A$ ,  $B$  и  $B_f$ , относящиеся к

производной вектора состояния  $x(t)$  системы, имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 13 \\ 6 & -1 & 6 \\ -6 & -1 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрицы  $C$  и  $D$  же задаются как:

$$C = [2 \ -2 \ 1], \quad D = [1 \ 2 \ 1 \ -1]$$

Наконец, матрицы  $\Gamma$  остается прежней и имеет вид:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 35 & 56 & 22 & -42 \\ -11 & -17 & -7 & 12 \\ -6 & -10 & -5 & 10 \\ 11 & 18 & 6 & -13 \end{bmatrix}$$

Как и прежде,  $\Gamma$  имеет спектр  $\lambda_{12} = \pm i$  и  $\lambda_{34} = \pm 3i$ , что задает внешнее воздействие в виде суммы гармонических *незатухающих* колебаний с частотами  $\omega_1 = 1$  и  $\omega_2 = 3$ .

Исследуем расширенную систему вида

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_f \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \end{cases}$$

На наблюдаемость и обнаруживаемость. Введем обозначения:

$$A_{xw} = \begin{bmatrix} A & B_f \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}, \quad C_{xw} = [C \ D]$$

Таким образом, матрица наблюдаемости для пары  $C_{xw}$  и  $A_{xw}$ :

$$V = \begin{bmatrix} C_{xw} \\ C_{xw}A_{xw} \\ C_{xw}A_{xw}^2 \\ \vdots \\ C_{xw}A_{xw}^6 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$V = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 6 & -10 & -6 & -3 & 3 \\ -10 & -11 & -14 & -221 & -374 & -145 & 275 \\ -92 & 45 & -84 & 250 & 382 & 131 & -221 \\ -238 & 223 & -254 & 1379 & 2218 & 845 & -1641 \\ 244 & 507 & 276 & 650 & 1530 & 741 & -1281 \\ 4070 & -1271 & 4006 & -12425 & -20078 & -7801 & 14879 \end{bmatrix}$$

Посчитаем ранг матрицы  $V$ :

$$\text{rank}(V) = 7$$

Таким образом, рассматриваемая расширенная система является полностью наблюдаемой, а значит, и обнаруживаемой. Следовательно, возможно осуществить слежение и компенсацию по выходу.

Замкнем систему регулятором, состоящем из расширенного наблюдателя

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} - Ly = \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} y$$

и закона управления

$$u = K_1 \hat{x} + K_2 \hat{w}$$

обеспечивающего выполнение целевого условия  $z \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  при внешнем воздействии  $w$ , задаваемом генератором. Соответствующая схема моделирования представлена на рисунке 17.

Отметим, что матрица  $\bar{A}$  расширенного наблюдателя задаётся:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A + BK_1 + L_1 C & B_f + BK_2 + L_1 D \\ L_2 C & \Gamma + L_2 D \end{bmatrix}$$

Перейдем к синтезу регулятора. Для начала найдем «feedback»-компоненту путем минимизации функционала

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

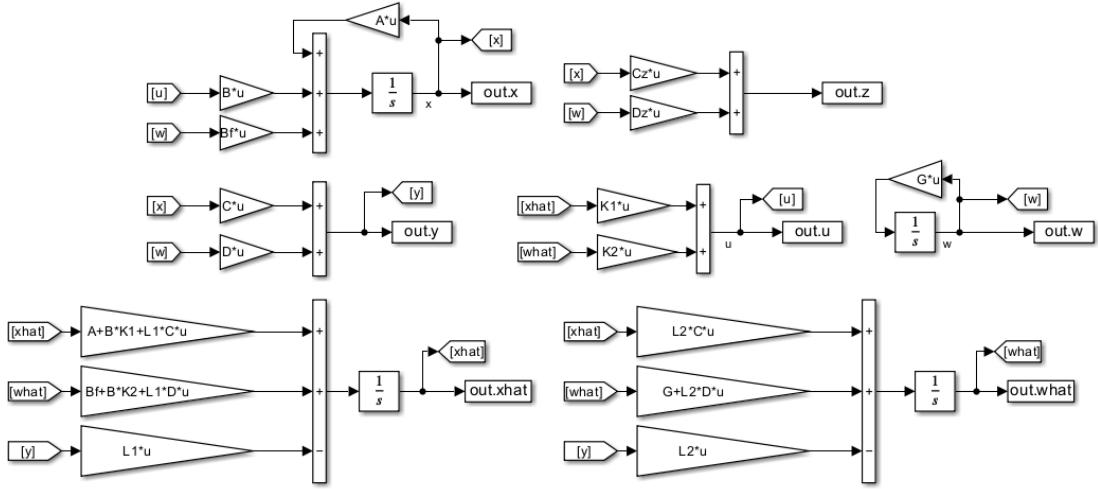


Рис. 17: Схема со следящим и компенсирующим регулятором по выходу

То есть будем использовать LQR. Для синтеза используем уравнение Риккати при параметре  $v = 1$ :

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

Зададимся также  $Q = I$  и  $R = 1$ . Тогда решением будет:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.6791 & -0.2724 & 2.3301 \\ -0.2724 & 1.0726 & -0.1762 \\ 2.3301 & -0.1762 & 2.3594 \end{bmatrix}$$

Откуда можно найти матрицу обратной связи  $K_1$  регулятора:

$$K_1 = -R^{-1}B^T P_1 = [-5.3581 \ 0.5448 \ -4.6602]$$

Вычислим теперь матрицу коррекции  $L$ . Ранее получено, что расширенная система с матрицами  $A_{xw}$  и  $C_{xw}$  полностью наблюдаема, а значит, возможно достичь любых желаемых собственных чисел для наблюдателя. Итак, зададимся матрицей  $G$ , имеющей спектром  $\lambda_{1-3} = -2$ ,  $\lambda_{4-6} = -3$  и  $\lambda_7 = -4$ , а также  $Y$ , причем такой, что пара

$G$  и  $Y$  является управляемой:

$$G = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

То есть используем модальный наблюдатель. Для синтеза  $L$  решим уравнение Сильвестра:

$$GQ_{xw} - Q_{xw}A_{xw} = YC_{xw}$$

Откуда:

$$Q = \begin{bmatrix} -0.2667 & 0.5485 & 0.2147 & 2.6850 & 5.1229 & 1.8614 & -3.7739 \\ -0.2652 & 0.5128 & 0.1793 & 2.2561 & 4.3415 & 1.5667 & -3.2235 \\ -0.2414 & 0.4023 & 0.0920 & 1.2960 & 2.5544 & 0.9029 & -1.9385 \\ -0.2414 & 0.4003 & 0.0899 & 1.2685 & 2.5048 & 0.8841 & -1.9040 \\ -0.2413 & 0.3943 & 0.0837 & 1.1945 & 2.3701 & 0.8334 & -1.8091 \\ -0.2384 & 0.3703 & 0.0616 & 0.9533 & 1.9237 & 0.6671 & -1.4894 \\ -0.2000 & 0.2667 & 0.0000 & 0.3382 & 0.7434 & 0.2372 & -0.6185 \end{bmatrix}$$

Используем «это» для получения матрицы  $L$ :

$$L = Q_{xw}^{-1}Y = \begin{bmatrix} 318.3822 \\ 490.8725 \\ 441.9540 \\ 517.5079 \\ -331.5118 \\ -3.0635 \\ -9.6058 \end{bmatrix}$$

Так как матрица коррекции  $L$  состоит из двух блоков  $L_1$  и  $L_2$ , относящийся к динамике вектора состояния  $x(t)$  и вектора состояния

генератора  $w(t)$  соответственно, то можно получить их отдельно:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 318.3822 \\ 490.8725 \\ 441.9540 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 517.5079 \\ -331.5118 \\ -3.0635 \\ -9.6058 \end{bmatrix}$$

Теперь рассмотрим два случая виртуального выхода:  $z = C_z x + D_z w$  и  $z = Cx + Dw = y$ . В соответствие с вариантом, матрицы  $C_z$ ,  $D_z$ ,  $C$  и  $D$  имеют вид:

$$C_z = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}^T, \quad D_z = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}^T, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}^T$$

Для каждого из них найдем «feedforward»-компоненту компенсирующего регулятора.

**Начнём со случая**  $z = C_z x + D_z w$ .

Будем решать систему:

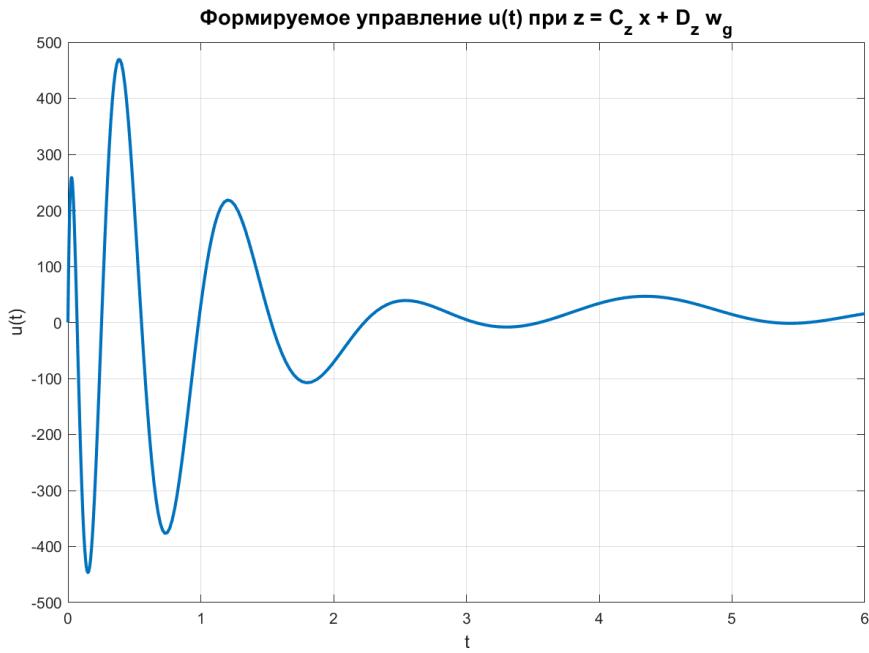
$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY + B_f \\ C_z P + D_z = 0 \end{cases}$$

Откуда матрицы  $P_2$  и  $Y_2$ :

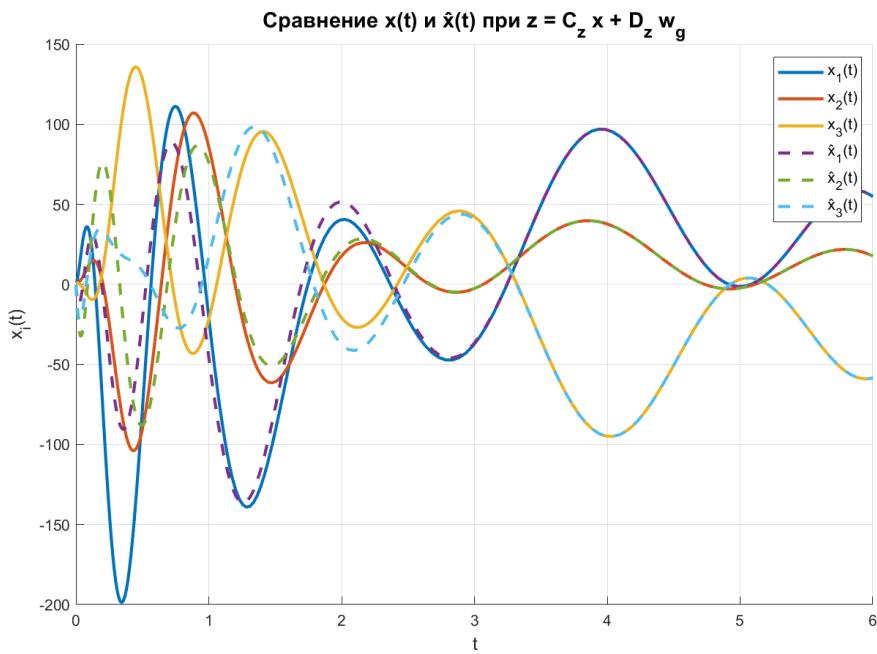
$$P_2 = \begin{bmatrix} 7.576 & 17.448 & 6.403 & -10.829 \\ -0.585 & 1.262 & 0.163 & -0.187 \\ -13.907 & -27.109 & -10.317 & 18.095 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 8.995 \\ 15.855 \\ 5.783 \\ -9.758 \end{bmatrix}^T$$

Используем найденное для синтеза  $K_2$  компоненты:

$$K_2 = Y_2 - K_1 P_2 = [-14.9034 \ -17.6763 \ -8.0777 \ 16.6505]$$



*Рис. 18: Формируемое управление  $u(t)$  при  $z = C_z x + D_z w$*



*Рис. 19: Сравнение состояний  $x(t)$  и их оценок  $\hat{x}(t)$  при  $z = C_z x + D_z w$*

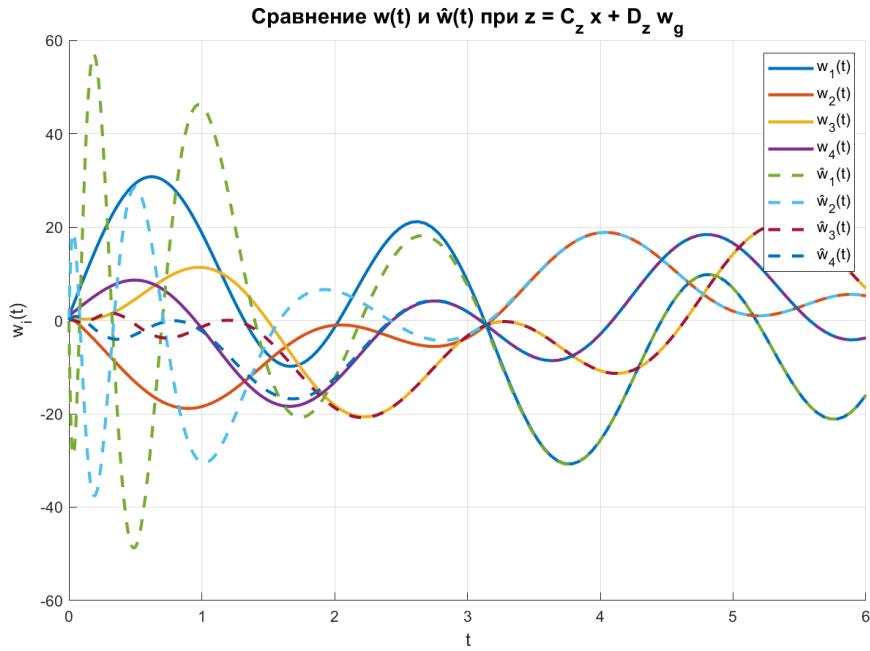


Рис. 20: Сравнение возмущений  $w(t)$  и их оценок  $\hat{w}(t)$  при  $z = C_z x + D_z w_g$

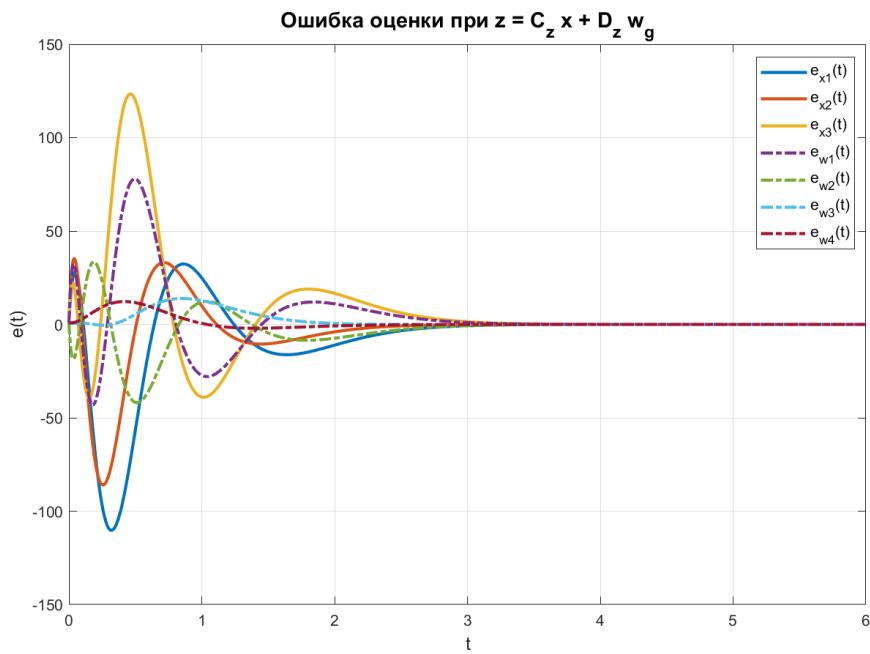


Рис. 21: Ошибка оценки состояний  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  при  $z = C_z x + D_z w_g$

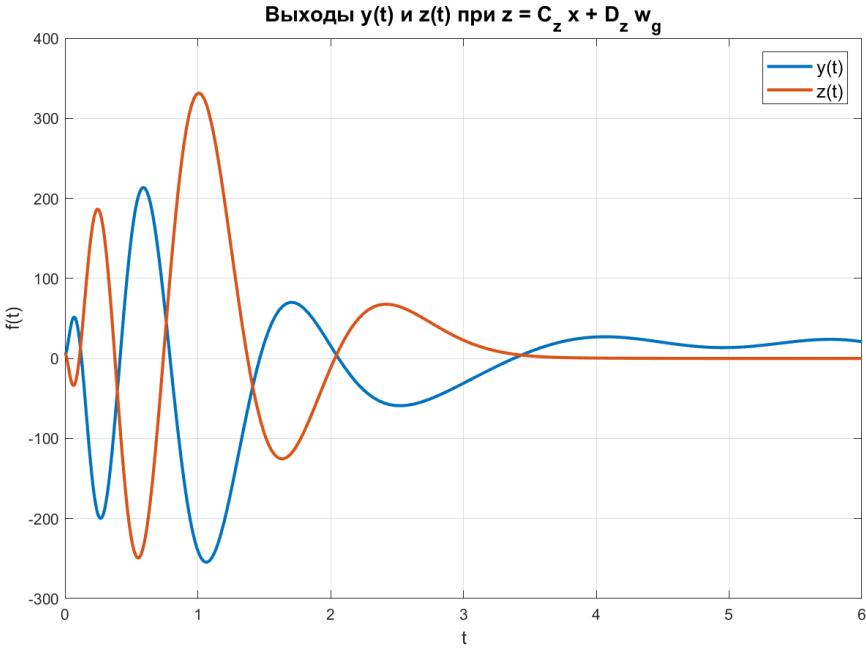


Рис. 22: Виртуальный выход  $z(t)$  и выход  $y(t)$  при  $z = C_z x + D_z w$

Итак, регулятор синтезирован. Можно перейти к моделированию системы. На рисунке 18 изображено формируемое управление  $u(t)$ , на рисунке 19 - сравнение состояний  $x(t)$  и их оценок  $\hat{x}(t)$ , на рисунке 20 - сравнение возмущений  $w(t)$  и их оценок  $\hat{w}(t)$ , на рисунке 21 - ошибка оценки состояний  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , на рисунке 22 - виртуальный выход  $z(t)$  и выход  $y(t)$ .

В итоге виртуальный выход  $z(t)$  сходится к 0 с течением времени, то есть выполнено целевое условие. Уже после 4 секунды график визуально неотличим от 0. Этого нельзя сказать о выходе  $y(t)$ ,  $x(t)$  и  $w(t)$ ,  $u(t)$ , где наблюдаются колебания, так как перед ними и не ставилась задача устойчивого схождения к 0 - они лишь успешно подстроились под выполнение задачи слежения и компенсации.

Ошибка на наблюдения как состояний, так и возмущений стремится к 0 - аналогично, после 4 секунды графики визуально неотличимы от 0, а значит, наблюдатель сумел оценить  $x(t)$  и  $w(t)$ .

Теперь представим регулятор в форме вход-состояние-выход, где вход -  $y(t)$ , а выход -  $u(t)$ . Для этого вернемся к уравнению расши-

ренного наблюдателя:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} - Ly$$

Из ранее написанного имеем:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A + BK_1 + L_1C & B_f + BK_2 + L_1D \\ L_2C & \Gamma + L_2D \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

Также, очевидно, что:

$$u(t) = K_1\hat{x} + K_2\hat{w} = [K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix}$$

В итоге регулятор в форме вход-состояние-выход имеет системы:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_1 + L_1C & B_f + BK_2 + L_1D \\ L_2C & \Gamma + L_2D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} y \\ u(t) = [K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Для полноты картины занесем минус в «матрицу управления»  $L$ , получим канонический вид линейной системы:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_1 + L_1C & B_f + BK_2 + L_1D \\ L_2C & \Gamma + L_2D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_1 \\ -L_2 \end{bmatrix} y \\ u(t) = [K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Найдем собственные числа полученной матрицы  $\bar{A}$ :

$$\lambda_{12} = -23.997 \pm 149.648i, \quad \lambda_{34} = -0.057 \pm 2.942i$$

$$\lambda_{56} = -0.3 \pm 1.022i, \quad \lambda_7 = -2.008$$

Для матрицы  $\Gamma$  генератора возмущения же:

$$\lambda'_{12} = \pm i, \quad \lambda'_{34} = \pm 3i$$

Можем видеть, что хоть  $\lambda'_{34}$  довольно близки с  $\lambda_{34}$ , но спектры матриц не имеют пересечения. Это нормально, так как  $z \neq y$ .

**Наконец, рассмотрим случай  $z = Cx + Dw = y$ .**

Будем решать систему:

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY + B_f \\ CP = 0 \end{cases}$$

Откуда матрицы  $P_2$  и  $Y_2$ :

$$P_2 = \begin{bmatrix} -7.100 & -3.169 & -2.969 & 7.538 \\ -9.231 & -10.062 & -5.031 & 10.662 \\ -5.262 & -15.785 & -5.123 & 7.246 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 10.569 \\ 20.800 \\ 7.631 \\ -11.162 \end{bmatrix}^T$$

Используем найденное для синтеза  $K_2$ :

$$K_2 = Y_2 - K_1 P_2 = [-46.9647 \quad -64.2597 \quad -29.4128 \quad 57.1911]$$

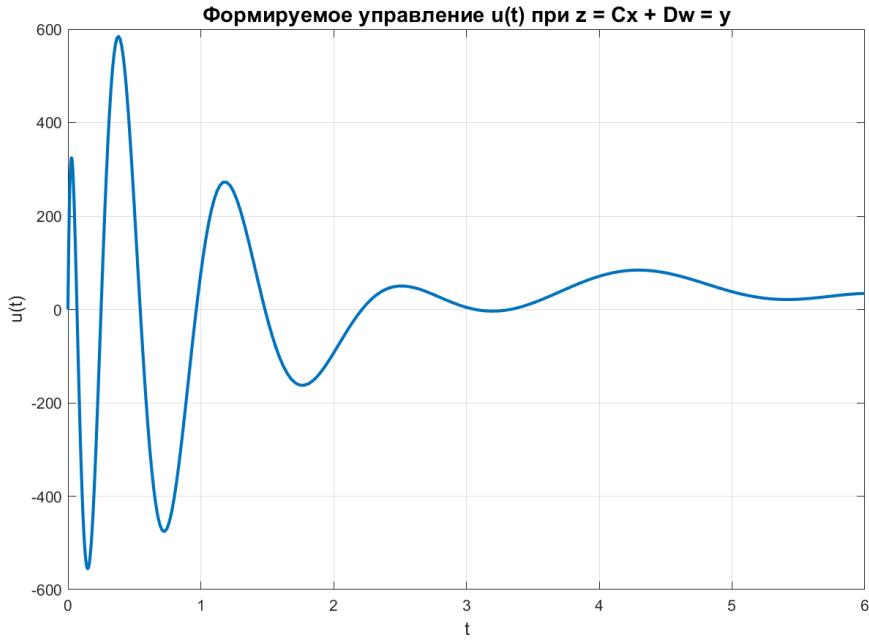
Промоделируем систему. На рисунке 23 изображено формируемое управление  $u(t)$ , на рисунке 24 - сравнение состояний  $x(t)$  и их оценок  $\hat{x}(t)$ , на рисунке 25 - сравнение возмущений  $w(t)$  и их оценок  $\hat{w}(t)$ , на рисунке 26 - ошибка оценки состояний  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , на рисунке 27 - виртуальный выход  $z(t)$  и выход  $y(t)$ .

Видим, что целевое условие, также как и в предыдущем случае, выполнено. Виртуальный выход вместе с выходом  $y(t)$  визуально неотличим от 0 после 4 секунды.

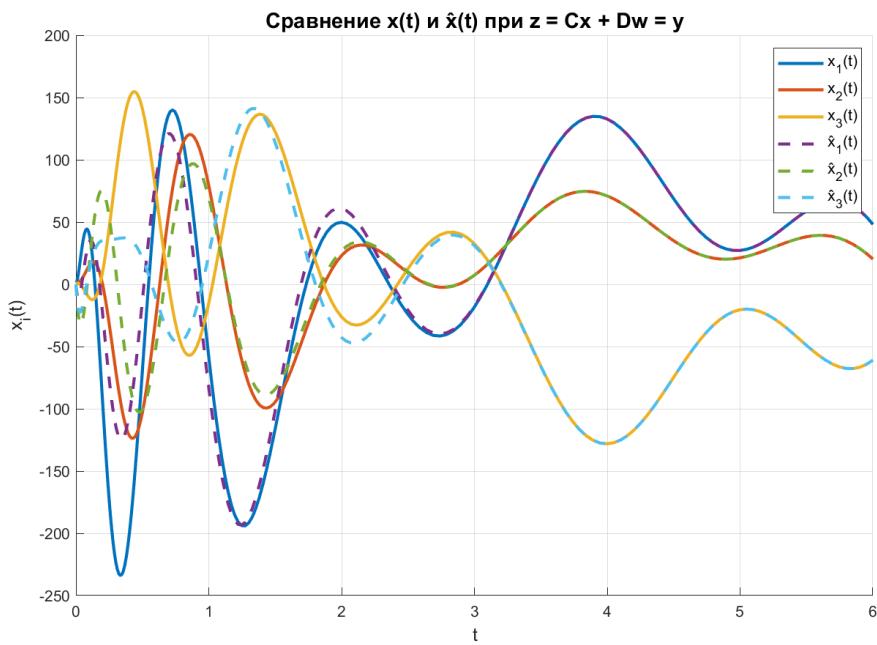
Аналогично предыдущему случаю найдем спектр матрицы  $\bar{A}$ :

$$\lambda_{12} = -24.356 \pm 168.237i, \quad \lambda_{34} = \pm 3i$$

$$\lambda_{56} = \pm i, \quad \lambda_7 = -2.005$$



*Рис. 23: Формируемое управление  $u(t)$  при  $z = Cx + Dw = y$*



*Рис. 24: Сравнение состояний  $x(t)$  и их оценок  $\hat{x}(t)$  при  $z = Cx + Dw = y$*

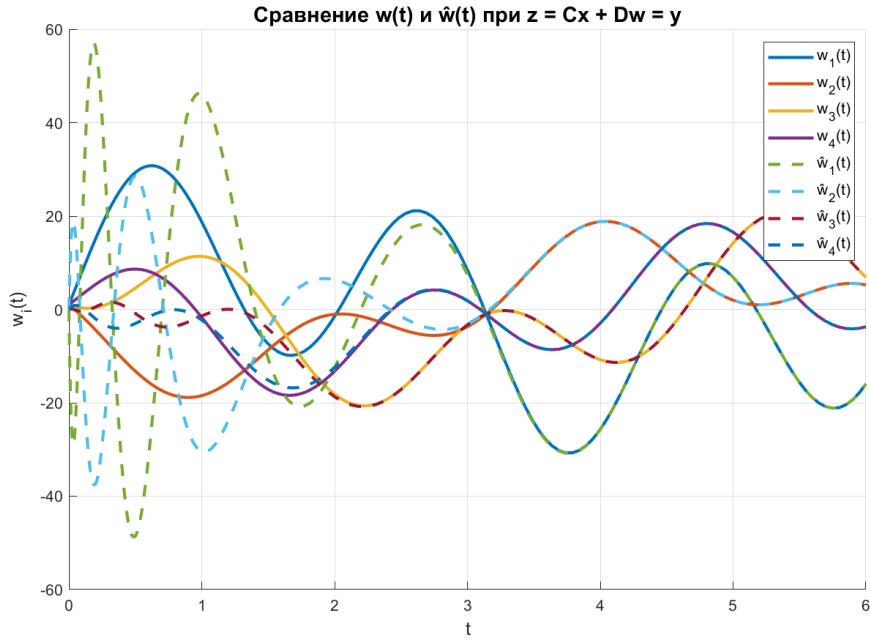


Рис. 25: Сравнение возмущений  $w(t)$  и их оценок  $\hat{w}(t)$  при  $z = Cx + Dw = y$

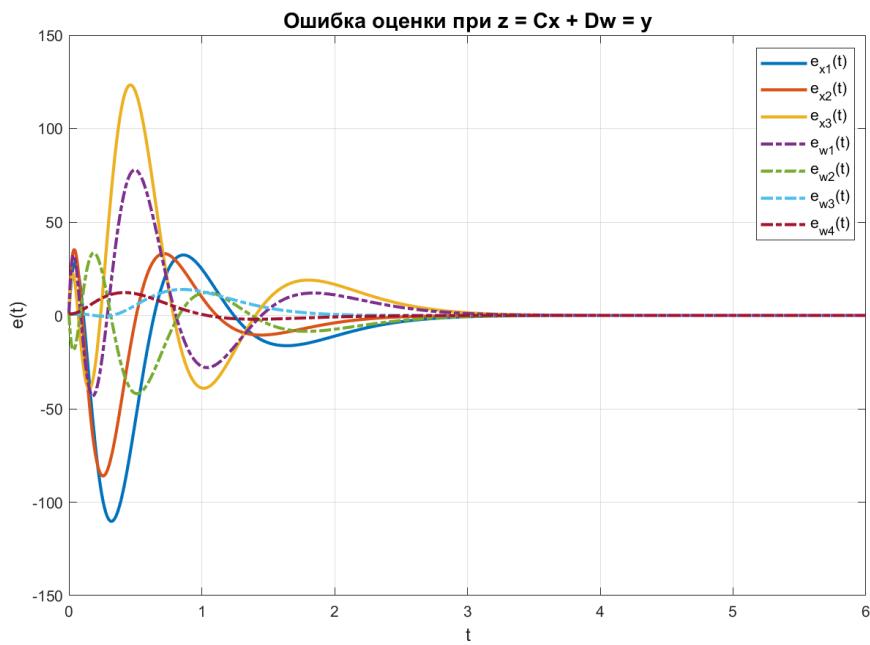


Рис. 26: Ошибка оценки состояний  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  при  $z = Cx + Dw = y$

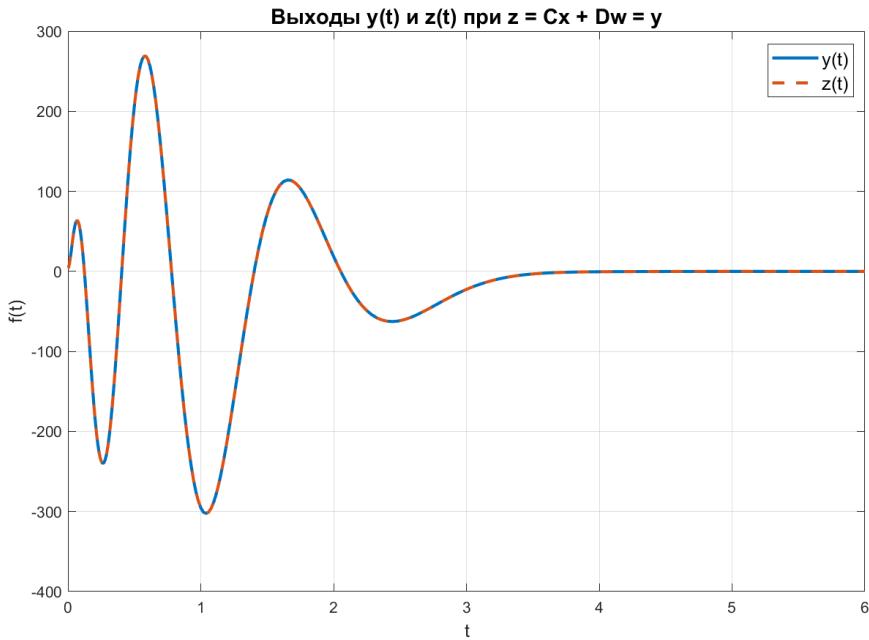


Рис. 27: Виртуальный выход  $z(t)$  и выход  $y(t)$  при  $z = Cx + Dw = y$

Для матрицы  $\Gamma$  генератора возмущения же:

$$\lambda'_{12} = \pm i, \quad \lambda'_{34} = \pm 3i$$

Видим, что  $\lambda'_{12}$  полностью соотносится с  $\lambda_{56}$ , а  $\lambda'_{34}$  - с  $\lambda_{34}$ . Выполняется принцип внутренней модели ( $z = y$ ), при котором регулятор содержит в себе моды внешнего возмущения, создаваемые генератором с матрицей  $\Gamma$ , способен их «воспроизводить».

Итак, в обоих случаях выполнено целевое условие  $z \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  при  $w$  или  $w_g$  соответственно, все задачи успешно решились. Наблюдатели успешно оценили состояния  $x(t)$  и  $w(t)$ , позволив синтезировать необходимые компенсирующие и следящие регуляторы. Это же подтверждает и моделирование.

## 4 Тележка и меандр

Рассмотрим объект управления «тележка», представленный на рисунке 28. Для него синтезируем математическую модель.

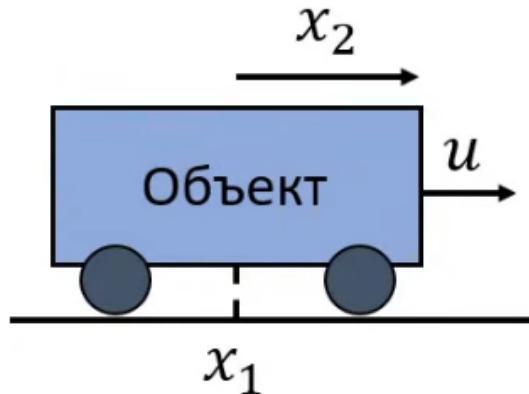


Рис. 28: Объект управления «тележка»

Итак, в качестве выхода примем линейную координату тележки  $x_1(t)$ , тогда система будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases}$$

Перепишем через матрицы:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Или же:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

где матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0]$$

Примем задающий сигнал  $g(t)$  в виде меандра с амплитудой 4 и периодом  $2\pi$ :

$$g(t) = \begin{cases} 4, & 0 < t \leq \pi \\ -4, & \pi < t \leq 2\pi \end{cases}, \quad g(t + \pi) = g(t)$$

Представим его в виде ряда Фурье:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

Вычислим  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = \frac{1}{\pi} (-4\pi + 4\pi) = 0$$

Функция  $g(t)$  является нечётной, а значит,  $a_n = 0 \quad \forall n > 0$ .

Найдем  $b_n$ :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 4 \sin nt dt = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n}.$$

Пусть берётся только  $m = 5$  первых членов ряда, тогда приближение задающего сигнала будет:

$$\begin{aligned} \bar{g}(t) &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^5 \left( \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin(nt) \right) = \\ &= \frac{16}{\pi} \left( \sin(t) + \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{5} \sin(5t) \right) \end{aligned}$$

Сформируем генератор типа  $\dot{w}_g = \Gamma w_g$  с матрицей  $\Gamma$  для порождения выбранных гармоник-компонент  $\bar{g}(t)$ :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим теперь задачу слежения за сигналом  $\bar{g}(t)$ . Зададимся виртуальным выходом  $z(t) = C_z x + D_z w_g$ , причем матрицы  $C_z$  и  $D_z$  такие, что при выполнении целевого условия  $z(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  выполнено:

$$\bar{g}(t) = D_z w_g, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{g}(t) - y(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |D_z w_g - Cx| = 0$$

Из первого получаем:

$$D_z = \frac{16}{\pi} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

Из второго и целевого условия  $z(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow C_z x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -D_z w$ :

$$C_z = -C$$

Опять-таки, будем решать задачу слежения выходом  $y(t)$  за приближением меандра  $\bar{g}(t)$ . Проверим систему на управляемость:

$$U = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(U) = 2$$

Система полностью управляема, можно синтезировать регулятор, обеспечивающий экспоненциальную устойчивость  $\alpha = 2$ . Для синтеза используем уравнение Риккати при параметрах  $v = 2$ ,  $Q = 0$ ,  $R = 1$ :

$$A^T P + PA - 2PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Тогда решением будет:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 32 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Откуда можно найти матрицу обратной связи  $K_1$  регулятора:

$$K_1 = -R^{-1}B^T P_1 = [-8 \ -4]$$

Найдем «feedforward»-компоненту  $K_2$  регулятора путем решения системы:

$$\begin{cases} P_1 \Gamma - AP_1 = BY_1 \\ C_z P_1 + D_z = 0 \end{cases}$$

Откуда матрицы  $P_2$  и  $Y_2$ :

$$P_2 = \begin{bmatrix} 5.0930 & 0.0000 & 1.6977 & 0.0000 & 1.0186 & 0.0000 \\ 0.0000 & 5.0930 & 0.0000 & 5.0930 & 0.0000 & 5.0930 \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = [-5.0930 \ 0.0000 \ -15.2789 \ 0.0000 \ -25.4648 \ 0.0000]$$

Используем найденное для синтеза  $K_2$ :

$$\begin{aligned} K_2 &= Y_2 - K_1 P_2 = \\ &= [35.6507 \ 20.3718 \ -1.6977 \ 20.3718 \ -17.3161 \ 20.3718] \end{aligned}$$

Выполним моделирование системы с синтезированным регулятором при начальных условиях  $x(0) = [0, 0]^T$ ,  $w(0) = [0, 1, 0, 1, 0, 1]^T$ . На рисунке 29 изображено формируемое управление  $u(t)$ , на рисунке 30 - вектор состояния  $x(t)$ , на рисунке 31 - выход  $y(t)$ .

Можем видеть, что со временем выход  $y(t)$  практически совпадает с приближением меандра  $\bar{g}(t)$ , то есть задача слежения выполнена, а целевое условие достигнуто. Таким образом, с помощью рядов Фурье можно представлять сигнал в виде суммы гармонических колебаний, после идущих в качестве задающего сигнала в систему. Тем самым возможно аппроксимировать, а следовательно, и отследить произвольный сигнал. Причем тем более точно, чем больше членов ряда Фурье берётся - однако это сильно будет нагружать систему.



Рис. 29: Формируемое управление  $u(t)$  в задаче слежения за меандром



Рис. 30: Вектор состояния  $x(t)$  в задаче слежения за меандром

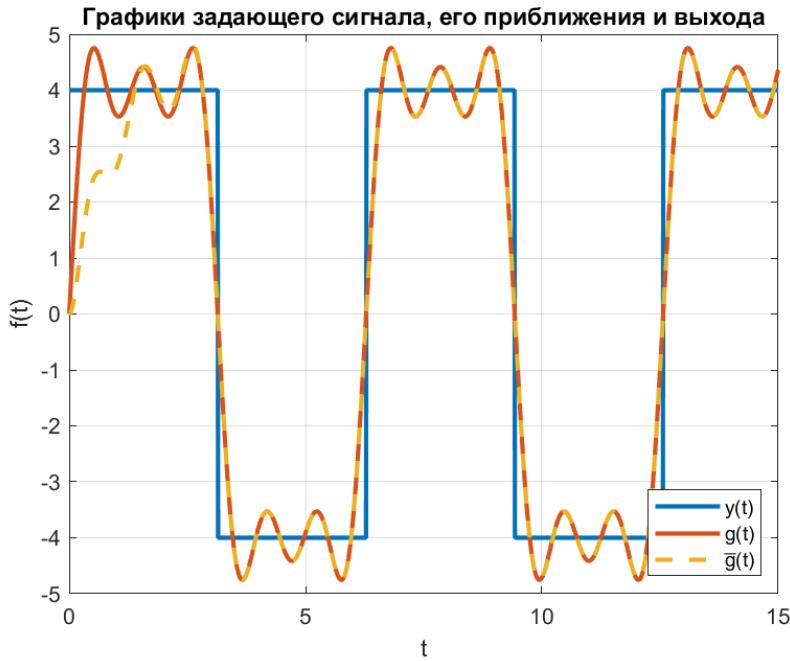


Рис. 31: Выход  $y(t)$  в задаче слежения за меандром

## 5 Общие выводы

При выполнении лабораторной работы были синтезированы компенсирующий регулятор по состоянию, следящий регулятор по состоянию и компенсирующий регулятор по выходу. Все успешно выполнили поставленные перед ними задачи компенсации внешних воздействий и слежения за сигналом. Моделирование также показало, что регулятор лишь с «feedback»-компонентой не способен на выполнение поставленных задач, то есть добавление «feedforward»-компоненты необходимо.

Также были синтезированы регуляторы для системы с меандром. Была проверена возможность аппроксимации произвольного сигнала рядом Фурье и его использования в качестве задающего сигнала.