Научно исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №2
Канонические формы представления динамических систем

Выполнил студент группы R3380 Мовчан И.Е.
Преподаватели Лопарев А.В., Золотаревич В.П.

Санкт-Петербург
2024

1 Цель работы

Ознакомление с методами взаимного перехода между моделями вход-выход и вход-состояние-выход, а также с каноническими формами представления моделей вход-состояние-выход.

2 От вход-выход к вход-состояние-выход

Модель задаётся (согласно варианту 11) уравнением

$$y'' + 0.8y' + 30y = 3u' + 30u,$$

откуда получаем канонические представления.

Математическая модель вход-состояние-выход в канонической управляемой форме ($a_0 = 30$, $a_1 = 0.8$, $b_0 = 30$, $b_1 = 3$):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -30 & -0.8 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Математическая модель вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -30 \\ 1 & -0.8 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 3 \end{bmatrix},\ C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Передаточная функция системы имеет следующий вид:

$$W(s) = \frac{3s + 30}{s^2 + 0.8s + 30}.$$

При моделировании систем в системе SIMULINK ожидаем получить одни и те же графики, посмотрим, действительно ли это так.

Моделирование при нулевых начальных условиях представлено на рисунке 1, графики на рисунке 2.

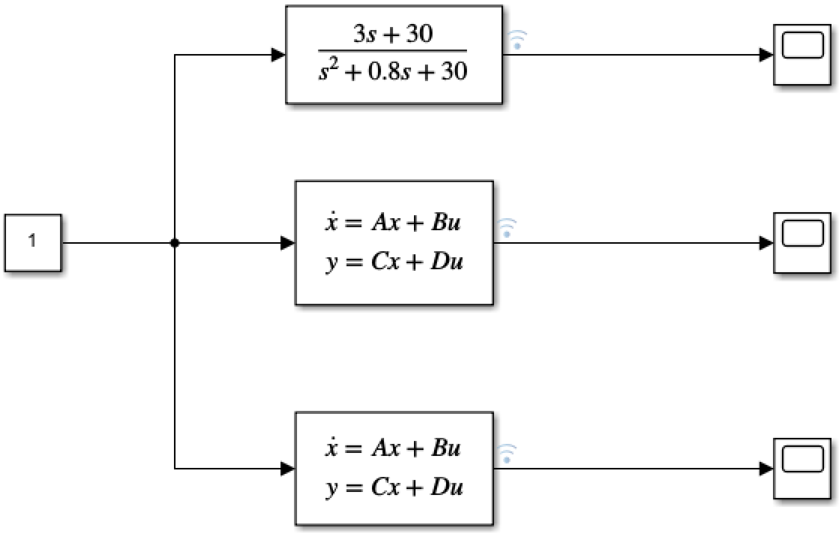

Рис. 1: Моделирование системы

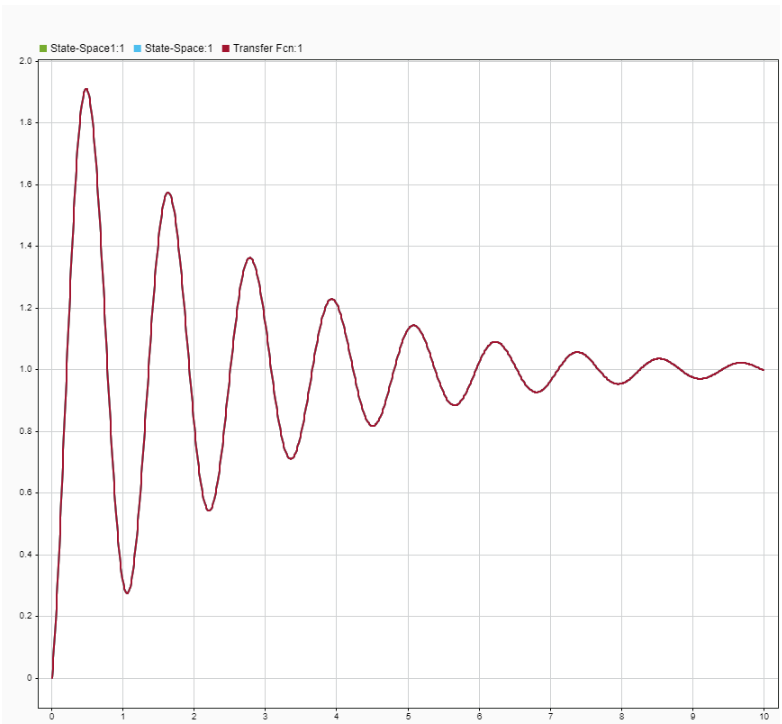

Рис. 2: Графики при ступенчатом воздействии

3 От вход-состояние-выход к вход-выход

Согласно варианту 11 модель вход-состояние-выход задаётся:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -10 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix},\ C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Выведем передаточную функцию системы:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 6.5 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 10 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2+4s+23} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -10 & s+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{s^2+4s+23} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{s+3}{2} + 2 \\ -4 + s \end{bmatrix} = \frac{4.5s + 15}{s^2+4s+23}$$

Отсюда можем получить канонические формы.

Математическая модель вход-состояние-выход в канонической управляемой форме:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -23 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 15 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

Математическая модель вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -23 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 15 \\ 4.5 \end{bmatrix},\ C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Матрица преобразования исходной модели к канонической наблюдаемой форме вычисляется следующим образом:

$$M = N_y \hat{N}_y^{-1},$$

где $N_y = [b\ Ab]$, $\hat{N}_y = [\hat{b}\ \hat{A}\hat{b}]$ - матрицы управляемости исходной и преобразованной модели соответственно.

Отсюда:

$$M = \begin{bmatrix}0.5 & 1.51 & -8\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -4\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}0.5 & 1.51 & -8\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3.5 & 0.5\\ -4 & 1\end{bmatrix}$$

Матрица преобразования исходной модели к канонической управляемой форме вычисляется аналогично и имеет вид:

$$M = \begin{bmatrix}0.5 & 1.5\\ 1 & -8\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1.5 & -103.5\\ 4.5 & -3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{51} & -\frac{3}{17}\\ \\ \frac{4}{51} & -\frac{2}{51}\end{bmatrix}$$

Моделирование и соответствующие графики (нулевые начальные условия):

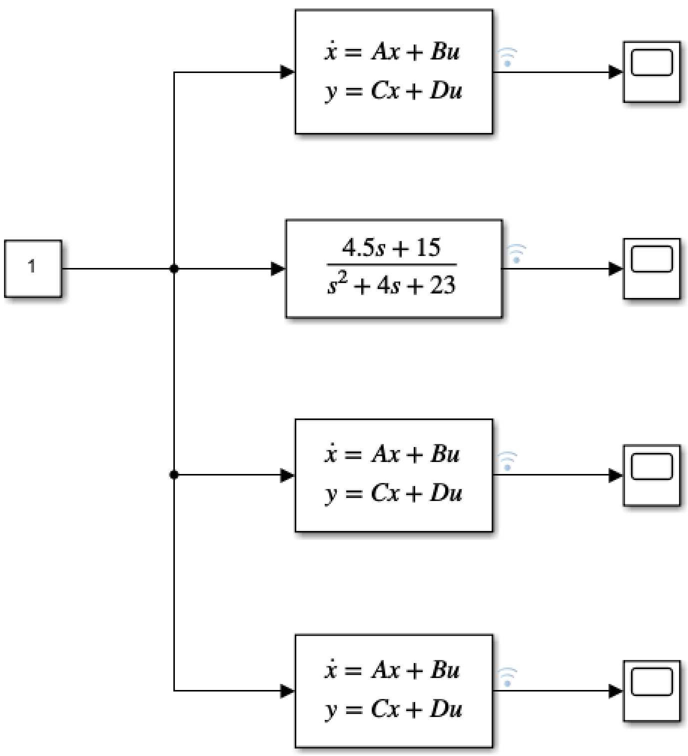

Рис. 3: Моделирование систем

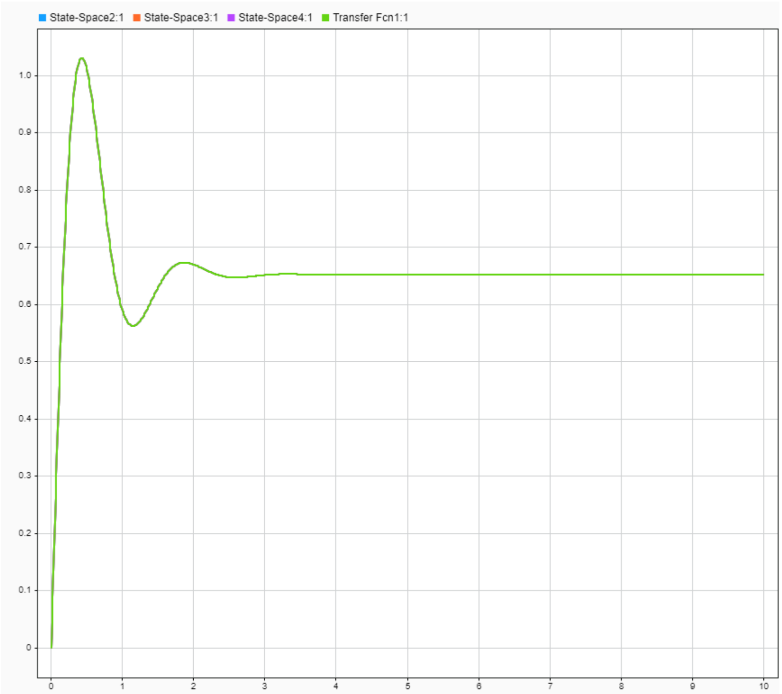

Рис. 4: Графики при ступенчатом воздействии

4 Замена базиса

Матрицы преобразования координат M из варианта 11 имеет следующий вид:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Сделаем преобразование изначальной системы:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -10 & -3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -10 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -5 & -1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 28 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = M^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CM = \begin{bmatrix} 6.5 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.5 & 16 \end{bmatrix}$$

Осуществим моделирование:

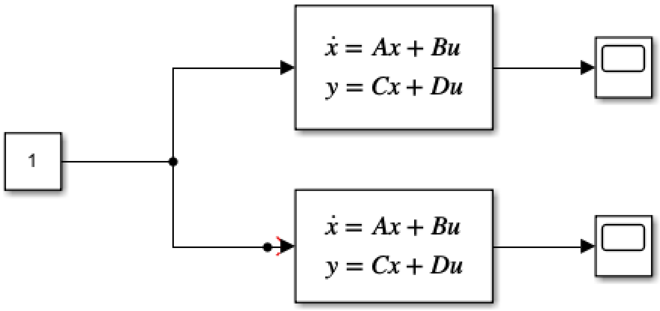

Рис. 5: Моделирование систем

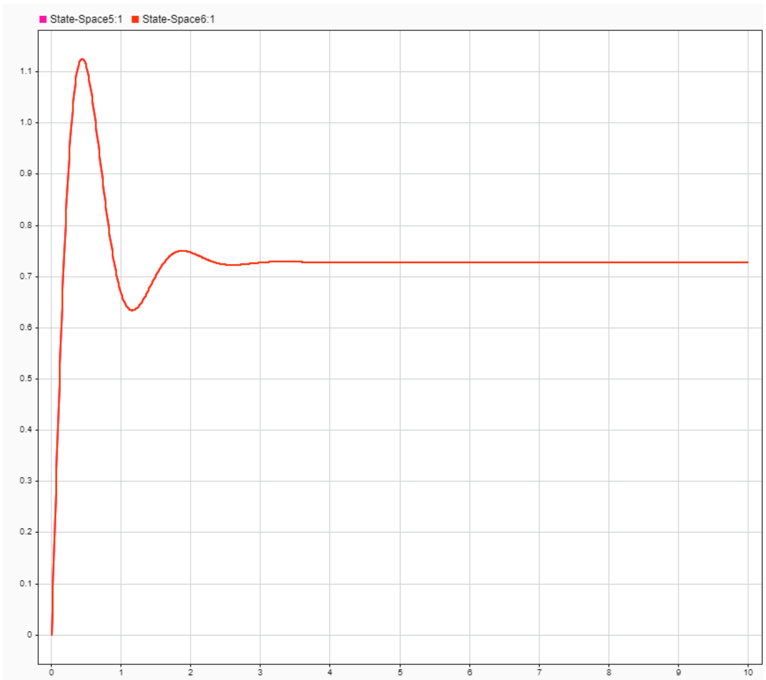

Рис. 6: Графики при ступенчатом воздействии

5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены методы перехода между разными представлениями модели, а также их каноническими формами в среде SIMULINK.