

НАУЧНО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по лабораторной работе Е
Управление многоканальной системой
Вариант 11

Выполнил студент группы R3480
Преподаватель

Мовчан Игорь Евгеньевич
Пашенко Артем Витальевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Исследование свойств многоканальной системы	2
2	Слежение в условиях внешних возмущений	12
3	Общие выводы	29

1 Исследование свойств многоканальной системы

Рассмотрим многоканальную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

В соответствии с вариантом, матрицы A , B и C имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Определим собственные числа матрицы A :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Теперь определим передаточную матрицу $W(s)$ системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX = AX + BU \\ Y = CX \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (sI - A)X = BU \\ Y = CX \end{cases}$$

$$\begin{cases} (sI - A)X = BU \\ Y = CX \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = (sI - A)^{-1}BU \\ Y = CX \end{cases}$$

Откуда:

$$Y = CX = C(sI - A)^{-1}BU$$

$$W(s) = \frac{Y}{U} = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2-s}{s^2-s+1} & \frac{2(s+1)}{s^2-s+1} \\ \frac{3(s-1)}{s^2-s+1} & \frac{-6}{s^2-s+1} \end{bmatrix}$$

Рассчитаем нулей и полюсов системы. Для этого найдем определитель матрицы $W(s)$:

$$\det(W(s)) = \begin{vmatrix} \frac{2-s}{s^2-s+1} & \frac{2(s+1)}{s^2-s+1} \\ \frac{3(s-1)}{s^2-s+1} & \frac{-6}{s^2-s+1} \end{vmatrix} = \frac{-6}{s^2 - s + 1}$$

Следовательно, нулей у системы нет, а полюса равны $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. Также важно, что знаменатель определителя матрицы $W(s)$ совпадает с характеристическим полиномом матрицы A , значит, полюса системы равны её собственным числам. Таким образом, передаточная матрица полностью отражает динамику системы, и её характеристики можно спокойно рассматривать для исследования свойств.

Исследуем систему на управляемость по состоянию и стабилизируемость. Для этого найдем матрицу управляемости:

$$U = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\text{rank}(U) = 2$$

Ранг матрицы U равен размерности вектора состояния, а значит, система полностью управляема, следовательно, и стабилизируема (так как вообще нет неуправляемых мод).

Исследуем систему на наблюдаемость. Для этого найдем матрицу наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\text{rank}(V) = 2$$

Ранг матрицы V равен размерности вектора состояния, значит, система полностью наблюдаема, следовательно, обнаруживаема (так как нет ненаблюдаемых мод).

Исследуем систему на управляемость по выходу. Для этого найдем матрицу управляемости по выходу:

$$U_y = CU = [CB \ CAB] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\text{rank}(U_y) = 2$$

Ранг матрицы U_y равен количеству выходов, а значит, система полностью управляема по выходу.

Выведем выражения для временных характеристик системы. Для весовой характеристики (реакции на импульс) поэлементно найдем обратное преобразование Лапласа от передаточной матрицы $W(s)$, найденной ранее:

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \begin{bmatrix} w_{11}(t) & w_{12}(t) \\ w_{21}(t) & w_{22}(t) \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{bmatrix}\right\} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\{W_{11}(s)\} & \mathcal{L}^{-1}\{W_{12}(s)\} \\ \mathcal{L}^{-1}\{W_{21}(s)\} & \mathcal{L}^{-1}\{W_{22}(s)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2-s}{s^2-s+1}\right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+1)}{s^2-s+1}\right\} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-1)}{s^2-s+1}\right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-6}{s^2-s+1}\right\} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Найдем обратный образ Лапласа от каждого элемента, используя таблицу стандартных преобразований:

$$\begin{aligned}\omega_{11}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2-s}{s^2-s+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-(s-\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\} = \\ &= e^{\frac{t}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) = \\ &= e^{\frac{t}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \\ \omega_{12}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+1)}{s^2-s+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s-\frac{1}{2})+3}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\} \\ &= e^{\frac{t}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \\ \omega_{21}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-1)}{s^2-s+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-\frac{1}{2})-\frac{3}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\} \\ &= e^{\frac{t}{2}}\left(3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{22}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-6}{s^2 - s + 1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-6}{(s - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right\} = \\ &= e^{\frac{t}{2}} \left(-4\sqrt{3} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right)\end{aligned}$$

Итоговая матрица (весовая характеристика) тогда:

$$\omega(t) = e^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} -\cos \left(\frac{\sqrt{3}t}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{\sqrt{3}t}{2} \right) & 2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}t}{2} \right) + 2\sqrt{3} \sin \left(\frac{\sqrt{3}t}{2} \right) \\ 3 \cos \left(\frac{\sqrt{3}t}{2} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\frac{\sqrt{3}t}{2} \right) & -4\sqrt{3} \sin \left(\frac{\sqrt{3}t}{2} \right) \end{bmatrix}$$

Выведем также выражения для переходной характеристики:

$$h(t) = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}$$

Найдем обратный образ от каждого элемента:

$$h_{11}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2-s}{s(s^2-s+1)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s} - \frac{2s-1}{s^2-s+1} \right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s} - 2 \frac{s - \frac{1}{2}}{(s - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right\} = 2 - 2e^{\frac{t}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$$

$$h_{12}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2(s+1)}{s(s^2-s+1)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s} + \frac{2(2-s)}{s^2-s+1} \right\} =$$

$$= 2 + 2\mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{s - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{(s - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right\} =$$

$$= 2 + 2e^{\frac{t}{2}} \left(-\cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right)$$

$$h_{21}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3(s-1)}{s(s^2-s+1)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{3}{s} + \frac{3s}{s^2-s+1} \right\} =$$

$$= -3 + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3(s - \frac{1}{2}) + \frac{3}{2}}{(s - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= -3 + e^{\frac{t}{2}} \left(3 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right) \\
h_{22}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-6}{s(s^2 - s + 1)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{6}{s} + \frac{6(s-1)}{s^2 - s + 1} \right\} = \\
&= -6 + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6(s - \frac{1}{2}) - 3}{(s - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right\} = \\
&= -6 + e^{\frac{t}{2}} \left(6 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) - 2\sqrt{3} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right)
\end{aligned}$$

Итоговая матрица переходной характеристики:

$$h(t) = \begin{bmatrix} 2 - 2e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t & 2 + e^{\frac{t}{2}} \left(-2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + 2\sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \\ -3 + e^{\frac{t}{2}} \left(3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) & -6 + e^{\frac{t}{2}} \left(6 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - 2\sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \end{bmatrix}$$

Построим графики найденных временных характеристик:

Теперь найдем частотные характеристики системы. Для этого сначала вычислим матрицу $W(j\omega)$:

$$\begin{aligned}
W(j\omega) &= \begin{bmatrix} W_{11}(j\omega) & W_{12}(j\omega) \\ W_{21}(j\omega) & W_{22}(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2-j\omega}{(j\omega)^2 - j\omega + 1} & \frac{2(j\omega+1)}{(j\omega)^2 - j\omega + 1} \\ \frac{3(j\omega-1)}{(j\omega)^2 - j\omega + 1} & \frac{-6}{(j\omega)^2 - j\omega + 1} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2-j\omega}{1-\omega^2-j\omega} & \frac{2(j\omega+1)}{1-\omega^2-j\omega} \\ \frac{3(j\omega-1)}{1-\omega^2-j\omega} & \frac{-6}{1-\omega^2-j\omega} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Найдем модуль каждого элемента:

$$|W_{11}(j\omega)| = \left| \frac{2-j\omega}{1-\omega^2-j\omega} \right| = \sqrt{\frac{4+\omega^2}{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}} = \sqrt{\frac{4+\omega^2}{1-\omega^2+\omega^4}}$$

$$|W_{12}(j\omega)| = \left| \frac{2(j\omega+1)}{1-\omega^2-j\omega} \right| = 2\sqrt{\frac{1+\omega^2}{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}} = 2\sqrt{\frac{1+\omega^2}{1-\omega^2+\omega^4}}$$

$$|W_{21}(j\omega)| = \left| \frac{3(j\omega - 1)}{1 - \omega^2 - j\omega} \right| = 3\sqrt{\frac{1 + \omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}} = 3\sqrt{\frac{1 + \omega^2}{1 - \omega^2 + \omega^4}}$$

$$|W_{22}(j\omega)| = \left| \frac{-6}{1 - \omega^2 - j\omega} \right| = 6\sqrt{\frac{1}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}} = 6\sqrt{\frac{1}{1 - \omega^2 + \omega^4}}$$

Таким образом, получим АЧХ:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2 + \omega^4}} \begin{bmatrix} \sqrt{4 + \omega^2} & 2\sqrt{1 + \omega^2} \\ 3\sqrt{1 + \omega^2} & 6 \end{bmatrix}$$

Также можно получить ЛАЧХ:

$$L(\omega) = \begin{bmatrix} L_{11}(\omega) & L_{12}(\omega) \\ L_{21}(\omega) & L_{22}(\omega) \end{bmatrix} = 20 \lg(A(\omega)) = 20 \lg |W(j\omega)|$$

Где, вычисляя каждый элемент, можно получить:

$$L_{11}(\omega) = 20 \lg |W_{11}(j\omega)| = 10 \lg(4 + \omega^2) - 10 \lg(1 - \omega^2 + \omega^4)$$

$$L_{12}(\omega) = 20 \lg |W_{12}(j\omega)| = 20 \lg 2 + 10 \lg(1 + \omega^2) - 10 \lg(1 - \omega^2 + \omega^4)$$

$$L_{21}(\omega) = 20 \lg |W_{21}(j\omega)| = 20 \lg 3 + 10 \lg(1 + \omega^2) - 10 \lg(1 - \omega^2 + \omega^4)$$

$$L_{22}(\omega) = 20 \lg |W_{22}(j\omega)| = 20 \lg 6 - 10 \lg(1 - \omega^2 + \omega^4)$$

Найдем теперь фазу каждого элемента. Для этого воспользуемся тем, что фаза дроби равна разности фаз числителя и знаменателя. Знаменатель $D(j\omega) = 1 - \omega^2 - j\omega$ общий для всех элементов:

$$\arg(D(j\omega)) = \text{atan2}(-\omega, 1 - \omega^2) = -\text{atan2}(\omega, 1 - \omega^2)$$

Фазы числителей же:

$$N_{11}(\omega) = 2 - j\omega \Rightarrow \arg(N_{11}(\omega)) = \text{atan2}(-\omega, 2) = -\text{atan2}(\omega, 2)$$

$$N_{12}(\omega) = 2(1 + j\omega) \Rightarrow \arg(N_{12}(\omega)) = \text{atan2}(\omega, 1)$$

$$N_{21}(\omega) = 3(1 - j\omega) \Rightarrow \arg(N_{21}(\omega)) = \text{atan2}(\omega, -1)$$

$$N_{22}(\omega) = -6 \Rightarrow \arg(N_{22}(\omega)) = \pi$$

Таким образом, ФЧХ каждого элемента:

$$\Phi_{11}(\omega) = -\text{atan2}(\omega, 2) + \text{atan2}(\omega, 1 - \omega^2)$$

$$\Phi_{12}(\omega) = \text{atan2}(\omega, 1) + \text{atan2}(\omega, 1 - \omega^2)$$

$$\Phi_{21}(\omega) = \text{atan2}(\omega, -1) + \text{atan2}(\omega, 1 - \omega^2)$$

$$\Phi_{22}(\omega) = \pi + \text{atan2}(\omega, 1 - \omega^2)$$

В виде матрицы:

$$\Phi(\omega) = \begin{bmatrix} -\text{atan2}(\omega, 2) + \text{atan2}(\omega, 1 - \omega^2) & \text{atan2}(\omega, 1) + \text{atan2}(\omega, 1 - \omega^2) \\ \text{atan2}(\omega, -1) + \text{atan2}(\omega, 1 - \omega^2) & \pi + \text{atan2}(\omega, 1 - \omega^2) \end{bmatrix}$$

Построим графики всех найденных характеристик. На рисунках 1 и 2 изображены весовая и переходная характеристики (реакции на импульс и единичный скачок соответственно), а на рисунках 3-6 - графики АЧХ, ЛАЧХ, ФЧХ и ЛФЧХ (частотные характеристики) соответственно.

Таким образом, была определена передаточная матрица системы, найдены её нули (пустое множество) и полюса, получено, что последние полностью совпадают с собственными числами матрицы A . Исследуемая система оказалась полностью управляемой по состоянию и выходу, полностью наблюдаемой. Были выведены и замоделированы временные (весовая и переходная) и частотные (АЧХ, ЛАЧХ, ФЧХ и ЛФЧХ) характеристики системы.

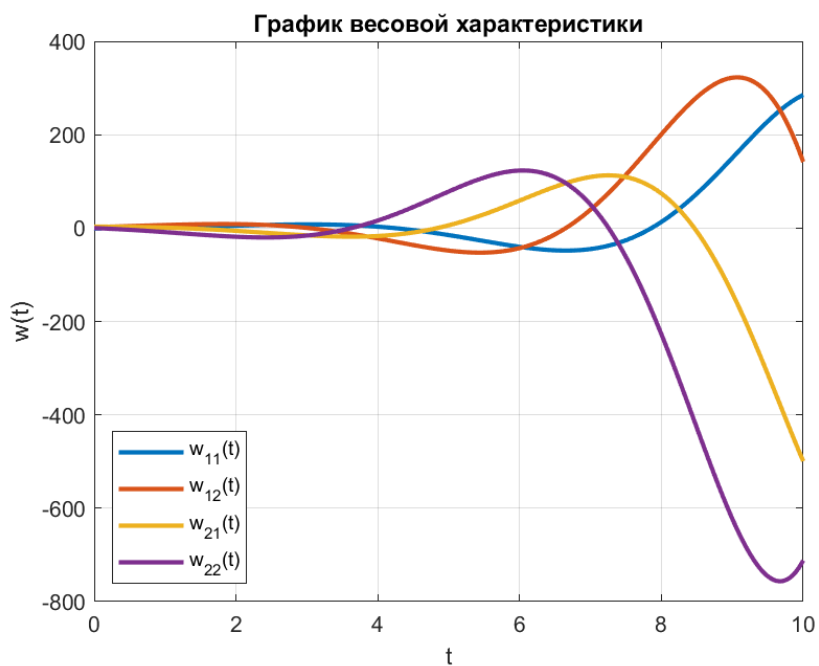


Рис. 1: Весовая характеристика многоканальной системы

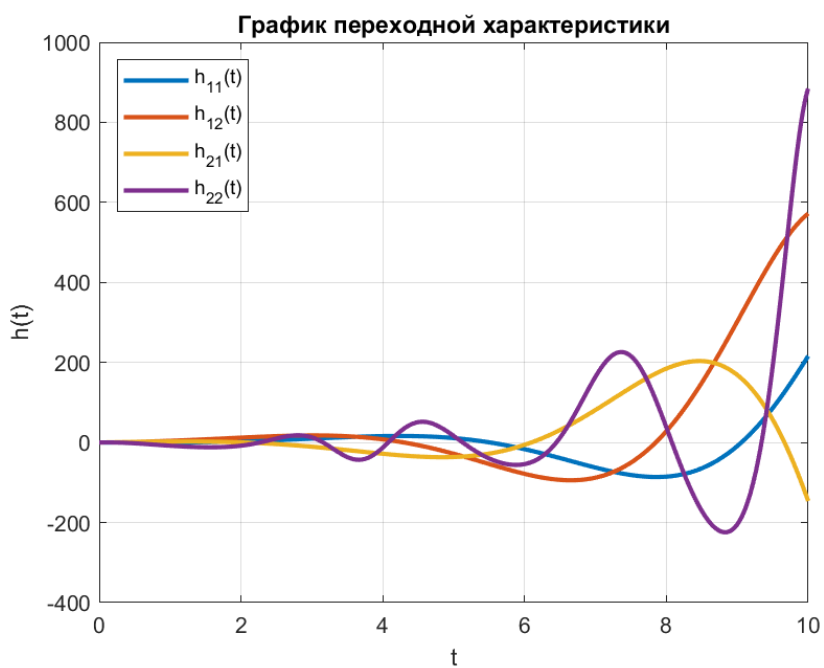


Рис. 2: Переходная характеристика многоканальной системы

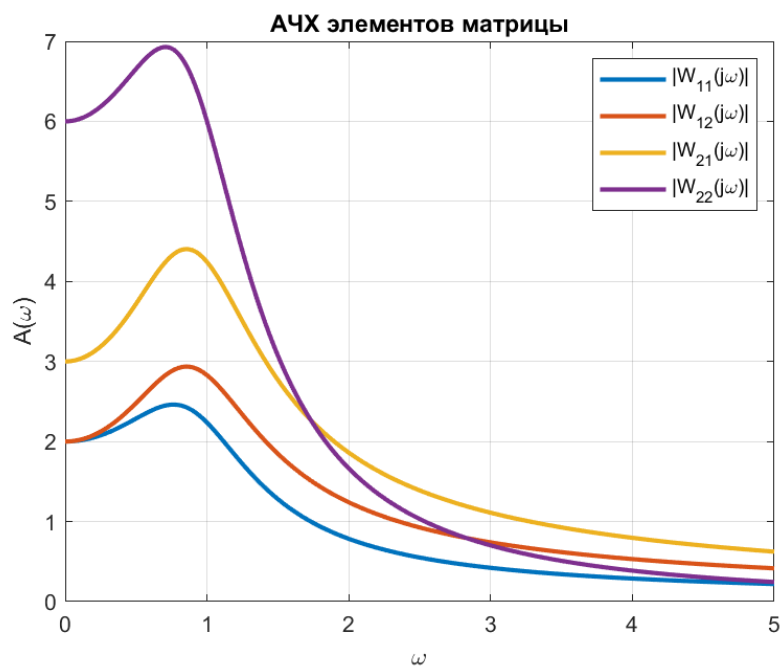


Рис. 3: АЧХ многоканальной системы

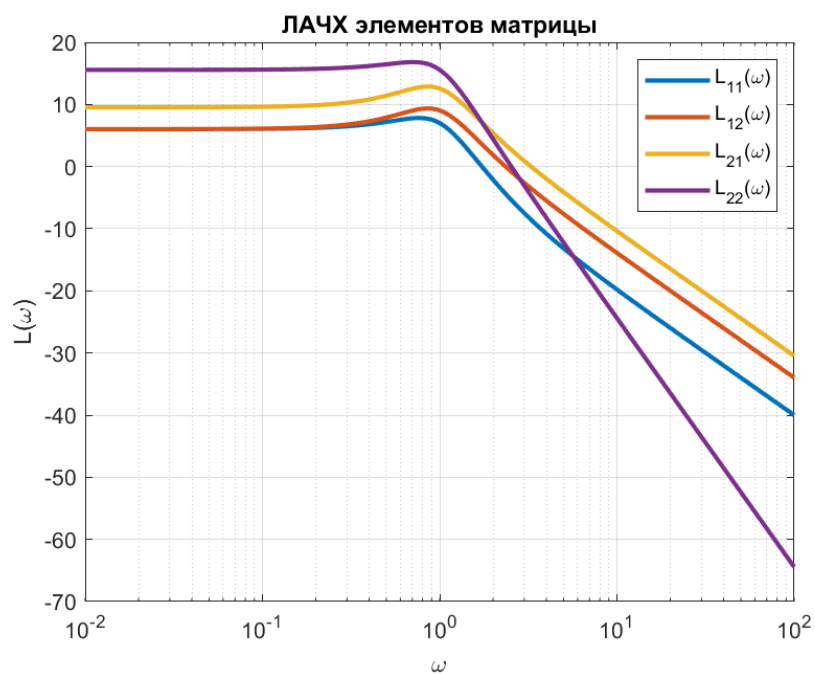


Рис. 4: ЛАЧХ многоканальной системы

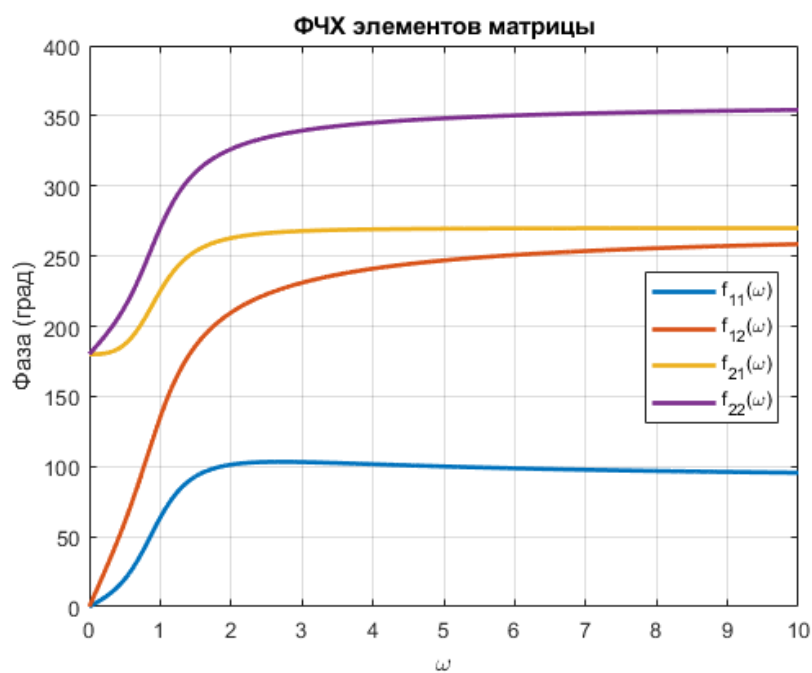


Рис. 5: ФЧХ многоканальной системы

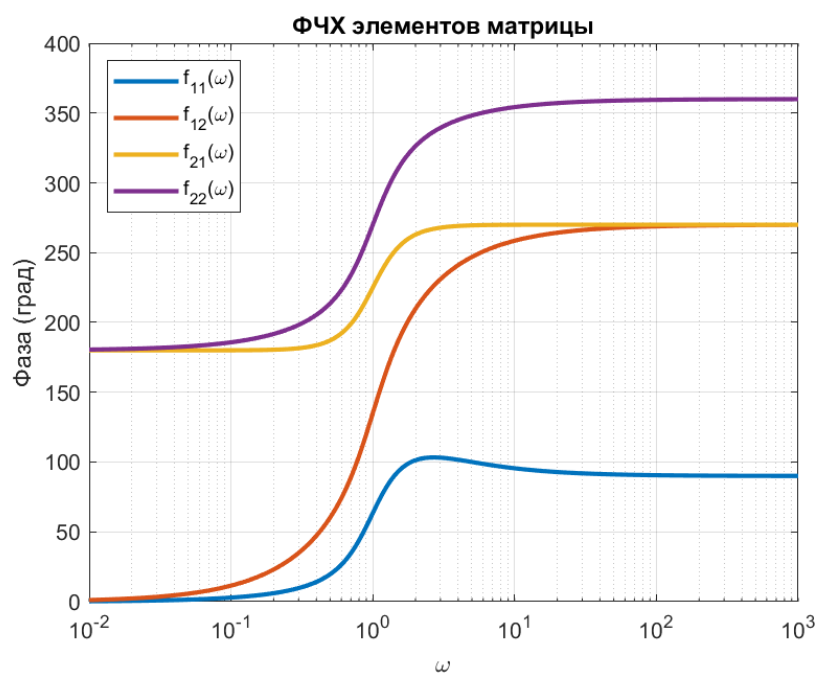


Рис. 6: ЛФЧХ многоканальной системы

2 Слежение в условиях внешних возмущений

Рассмотрим многоканальную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f_1 \\ z = C_z x + D_z u - g \\ y = Cx + Du + D_f f_2 \end{cases} \quad x(0) = [1 \ 1]^T$$

Оставим матрицы A , B и C теми же, D зададим, в итоге получим:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

А матрицы B_f , D_f , C_z и D_z согласно варианту, имеют вид:

$$B_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_z = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Также рассмотрим внешние воздействия f_1 , f_2 и g :

$$f_1 = \begin{bmatrix} 7 \cos(7t) \\ 3 \sin(t) \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 5 \sin(3t) \\ 3 \cos(7t) \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 2 \cos(2t) \\ 3 \sin(2t) \end{bmatrix}$$

Далее будем считать, что только величины $y(t)$ и $g(t)$ являются доступными к измерению.

Исследуем систему на управляемость по состоянию и стабилизируемость. Найдем матрицу управляемости:

$$U = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\text{rank}(U) = 2$$

Ранг оказался равен размерности вектора состояния, значит, система является полностью управляемой по состоянию, следовательно, и стабилизируемой (так как не оказалось неуправляемых мод).

Проверим теперь систему на наблюдаемость и обнаруживаемость относительно выхода $y(t)$. Найдем матрицу наблюдаемости:

$$V_y = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\text{rank}(V_y) = 2$$

Опять-таки, ранг равен размерности вектора состояния, значит, система является полностью наблюдаемой относительно выхода $y(t)$, следовательно, и обнаруживаемой.

Также исследуем систему на наблюдаемость относительно виртуального (*регулируемого*) выхода $z(t)$. Найдем матрицу V_z :

$$V_z = \begin{bmatrix} C_z \\ C_z A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\text{rank}(V_z) = 2$$

В итоге ранг равен размерности системы, значит, она является полностью наблюдаемой относительно виртуального (*регулируемого*) выхода $z(t)$, следовательно, и обнаруживаемой.

Проанализируем также на управляемость по выходам $y(t)$ и $z(t)$. Найдем матрицы управляемости:

$$U_y = [CU \ D] = [CB \ CAB \ D] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_z = [C_z U \ D_z] = [C_z B \ C_z AB \ D_z] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 & -3 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\text{rank}(U_y) = \text{rank}(U_z) = 2$$

Ранги оказались равны размерности вектора состояния, значит, система является полностью управляемой по выходам $y(t)$ и $z(t)$.

Составим передаточные матрицы системы от управляющего воздействия $u(t)$ к выходам $y(t)$ и $z(t)$:

$$W_y(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{s^2 - s + 1} \begin{bmatrix} -3s^2 + 2s - 1 & 2(s + 1) \\ 3(s - 1) & s^2 - s - 5 \end{bmatrix}$$

$$W_z(s) = C_z(sI - A)^{-1}B + D_z = \frac{1}{s^2 - s + 1} \begin{bmatrix} -3s^2 + 6s - 5 & 2(s - 3) \\ 4s & s^2 + 7s - 7 \end{bmatrix}$$

Найдем определители найденных передаточных матриц:

$$\det(W_y(s)) = \frac{-3s^2 + 2s + 11}{s^2 - s + 1} \neq 0$$

$$\det(W_z(s)) = \frac{-3s^2 - 18s + 35}{s^2 - s + 1} \neq 0$$

Получается, определители передаточных функций тождественно не равны нулю, значит, $W_y(s)$ и $W_z(s)$ не вырождены.

Теперь зададим генератор внешних воздействий с начальными условиями $\omega(0)$:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \Gamma_{\omega}\omega \\ g = Y_g\omega \\ f_1 = Y_1\omega \\ f_2 = Y_2\omega \end{cases}$$

Матрицу Γ зададим так, чтобы она включала все необходимые гармоники, используемые в воздействиях:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g &= \begin{bmatrix} 2 \cos(2t) \\ 3 \sin(2t) \end{bmatrix} \Rightarrow Y_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ f_1 &= \begin{bmatrix} 7 \cos(7t) \\ 3 \sin(t) \end{bmatrix} \Rightarrow Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ f_2 &= \begin{bmatrix} 5 \sin(3t) \\ 3 \cos(7t) \end{bmatrix} \Rightarrow Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$
$$\omega(0) = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$$

На рисунке 7 изображена схема моделирования многоканальной системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателей состояний и внешних воздействий, а также закона управления $u = K\hat{x} + K_w\hat{w}$, обеспечивающим выполнение целевого условия

15

Отметим, что схема была построена по расширенной модели многоканальной системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_\omega = \bar{A}x_\omega + \bar{B}u \\ y_\omega = y - g = \bar{C}x_\omega + Du \end{cases} \quad x_\omega = \begin{bmatrix} \omega \\ x \end{bmatrix}$$

Начальные условия при этом:

$$x_\omega(0) = \begin{bmatrix} \omega(0) \\ x(0) \end{bmatrix}$$

Матрицы \bar{A} , \bar{B} и \bar{C} же:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ B_f Y_1 & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [D_f Y_2 - Y_g \quad C]$$

Наблюдатель также строится по расширенной модели (начальные условия состояния \hat{x}_ω при этом примем нулевыми):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_\omega = \bar{A}\hat{x}_\omega + \bar{B}u + L(\hat{y}_\omega - y_\omega) \\ \hat{y}_\omega = \bar{C}\hat{x}_\omega + Du \end{cases} \quad \hat{x}_\omega = \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

Управление тогда:

$$u = K\hat{x} + K_\omega\hat{\omega} = \bar{K}\hat{x}_\omega$$

Где матрица \bar{K} :

$$\bar{K} = [K_\omega \quad K]$$

Перейдем к синтезу K - «feedback»-компоненты регулятора. Сначала зададимся эталонной моделью по варианту:

$$1 < |Re(\lambda_i^*)| < 3 \quad 0 \leq |Im(\lambda_i^*)| < 3$$

Тогда возьмем:

$$\lambda_{1,2}^* = -2 \pm 2i$$

Для синтеза будем использовать уравнение Сильвестра:

$$AP - PG = BY$$

Пусть матрица G такова, что имеет собственными числами λ_i^* , а матрица Y такова, что пара (Y, G) является наблюдаемой:

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим взятую пару:

$$V = \begin{bmatrix} Y \\ YG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -4 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\text{rank}(V) = 2$$

Ранг равен размерности вектора состояния, значит, **пара (Y, G) полностью наблюдаема.**

Также собственные матрицы A , найденные в пункте 1, равны:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

А значит, **спектры матриц A и G не пересекаются.**

Отметим и то, что **пара (A, B) является управляемой** (матрица управляемости U имеет ранг, равный размерности вектора состояния x системы).

Проверим теперь матрицу BY :

$$BY = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\text{rank}(BY) = 1$$

В итоге, **произведение BY имеет единичный ранг**, к тому же **раскладывается на произведение векторов b и h** , так что $BY = bh$, где:

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Для них выполнено условие, что пара (A, b) является полностью управляемой:

$$U_{Ab} = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\text{rank}(U_{Ab}) = 2$$

Ранг равен размерности вектора состояния, значит, **пара (A, b) является управляемой**.

Аналогично, для пары (h, G) выполнено, что пара (h, G) является полностью наблюдаемой:

$$V_{hG} = \begin{bmatrix} h \\ hG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\text{rank}(V_{hG}) = 2$$

Ранг равен размерности вектора состояния, значит, **пара (h, G) является наблюдаемой**.

Таким образом, все условия (выделенные жирным шрифтом) существования единственного обратимого решения рассматриваемого уравнения Сильвестра выполнены. Можем найти матрицу P :

$$P = \begin{bmatrix} 0.2018 & 1.3394 \\ -0.0826 & 0.7248 \end{bmatrix}$$

Теперь можно найти «feedback»-компоненту регулятора:

$$K = -YP^{-1} = \begin{bmatrix} -3.1429 & 4.4286 \\ -3.1429 & 4.4286 \end{bmatrix}$$

Перейдем к синтезу K_ω - «feedforward»-компоненты регулятора. Составим систему матричных уравнений Франкиса-Дэвисона:

$$\begin{cases} P\Gamma - (A + BK)P - B_f Y_1 = BK_\omega \\ (C_z + D_z K)P + D_z K_\omega = Y_g \end{cases}$$

Проверим условия существования решения этой системы:

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} A + BK - I\lambda_{i\Gamma} & B \\ C_z + D_z K & D_z \end{bmatrix} \right) = \text{rank}(E_{\lambda_{i\Gamma}}) = \text{число строк}$$

$\lambda_{i\Gamma}$ - собственные числа матрицы Γ

$$\lambda_{1,2\Gamma} = \pm i, \quad \lambda_{3,4\Gamma} = \pm 2i, \quad \lambda_{5,6\Gamma} = \pm 3i, \quad \lambda_{7,8\Gamma} = \pm 7i$$

Откуда:

$$\text{rank}(E_{\lambda_{1,2\Gamma}}) = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} -9.4286 \pm i & 14.2857 & 1 & 2 \\ -4.1429 & 5.4286 \pm i & 1 & 0 \\ -11.5714 & 19.7143 & 4 & 0 \\ 0.8571 & 4.4286 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 4$$

$$\text{rank}(E_{\lambda_{3,4\Gamma}}) = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} -9.4286 \pm 2i & 14.2857 & 1 & 2 \\ -4.1429 & 5.4286 \pm 2i & 1 & 0 \\ -11.5714 & 19.7143 & 4 & 0 \\ 0.8571 & 4.4286 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 4$$

$$\text{rank}(E_{\lambda_{5,6\Gamma}}) = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} -9.4286 \pm 3i & 14.2857 & 1 & 2 \\ -4.1429 & 5.4286 \pm 3i & 1 & 0 \\ -11.5714 & 19.7143 & 4 & 0 \\ 0.8571 & 4.4286 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 4$$

$$\text{rank}(E_{\lambda_{7,8\Gamma}}) = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} -9.4286 \pm 7i & 14.2857 & 1 & 2 \\ -4.1429 & 5.4286 \pm 7i & 1 & 0 \\ -11.5714 & 19.7143 & 4 & 0 \\ 0.8571 & 4.4286 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 4$$

Таким образом, условия существования решения системы матричных уравнений Франкиса-Дэвисона выполнены. Можем найти матрицу P и K_ω :

$$P = \begin{bmatrix} -0.4809 & -0.4949 & -0.0944 & -0.7285 & 0 & 0 & 0.4664 & -0.4514 \\ -6.9455 & 2.8716 & 0.3558 & -0.3980 & 0 & 0 & 0.0150 & -0.9178 \end{bmatrix}$$

$$K_\omega = \begin{bmatrix} 32.8402 & -15.5847 & -1.5269 & -0.1460 & 0 & 0 & 1.2751 & 3.2176 \\ 31.1710 & -12.2928 & -1.4948 & -0.6131 & 0 & 0 & -0.4664 & 4.4514 \end{bmatrix}$$

Наконец, синтезируем наблюдатель расширенной системы. Для этого сначала проверим, обнаруживается ли пара (\bar{C}, \bar{A}) . Используем критерий Калмана:

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \bar{C}\bar{A}^2 \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^9 \end{bmatrix} \right) = 10$$

Ранг оказался равен размерности вектора состояния x_ω , значит, пара (\bar{C}, \bar{A}) является обнаруживаемой, поэтому возможно создать наблюдатель расширенной системы.

Для этого воспользуемся методом уравнений Риккати для обеспечения заданной экспоненциальной сходимости:

$$AP + PA^T - \nu PC^T R^{-1} CP + \alpha P + Q = 0$$

Будем решать уравнение с матрицами $Q = 0$ и $R = 1$, коэффициентом $\alpha = 2$, обозначающего желаемую степень сходимости, и $\nu = 2$ относительно положительно определенной $P_L \succ 0$, получаем:

$$\bar{A}P_L + P_L\bar{A}^T - 2P_L\bar{C}^T R^{-1}\bar{C}P_L + 4P_L + Q = 0$$

Откуда:

$$P_L = \begin{bmatrix} 7.98 & 1.83 & 10.93 & 25.28 & 7.88 & -6.46 & -0.08 & -0.15 & -65.33 & -25.35 \\ 1.83 & 9.61 & -10.36 & 27.89 & 7.05 & 2.42 & 1.28 & -1.11 & -70.30 & -30.54 \\ 10.93 & -10.36 & 45.29 & 6.65 & 3.65 & -20.03 & -1.49 & 0.11 & -29.29 & -4.80 \\ 25.28 & 27.89 & 6.65 & 136.53 & 39.14 & -11.85 & 3.19 & -3.18 & -344.45 & -143.48 \\ 7.88 & 7.05 & 3.65 & 39.14 & 12.17 & -3.74 & 0.81 & -0.97 & -95.29 & -40.97 \\ -6.46 & 2.42 & -20.03 & -11.85 & -3.74 & 10.31 & 0.57 & -0.04 & 39.53 & 11.20 \\ -0.08 & 1.28 & -1.49 & 3.19 & 0.81 & 0.57 & 0.56 & -0.15 & -7.43 & -3.65 \\ -0.15 & -1.11 & 0.11 & -3.18 & -0.97 & -0.04 & -0.15 & 0.79 & 7.69 & 3.87 \\ -65.33 & -70.30 & -29.29 & -344.45 & -95.29 & 39.53 & -7.43 & 7.69 & 903.33 & 361.81 \\ -25.35 & -30.54 & -4.80 & -143.48 & -40.97 & 11.20 & -3.65 & 3.87 & 361.81 & 152.01 \end{bmatrix} \succ 0$$

Теперь можно найти матрицу коррекции наблюдателя L :

$$L = -P_L \bar{C}^T R^{-1} = \begin{bmatrix} 4.1909 & 0.4711 \\ 0.6064 & 4.1241 \\ 10.1350 & -1.0783 \\ 11.5144 & 11.2776 \\ 1.9433 & 3.0578 \\ -5.6377 & 0.2235 \\ 0.0253 & -0.3153 \\ 0.0486 & -1.6143 \\ -40.6213 & -29.8023 \\ -11.3676 & -14.6398 \end{bmatrix}$$

Всё синтезировано! Проверим, выполняется ли поставленное целевое условие и решается ли задача слежения для многоканальной системы с возмущениями - проведем моделирование с нулевыми начальными условиями наблюдателя.

Итак, на рисунке 8 изображено формируемое управление $u(t)$, на 9 - внешнее воздействие $f_1(t)$, на 10 - внешнее воздействие $f_2(t)$, на 11 - воздействие $g(t)$, на 12 - состояние системы $x(t)$ и его оценка $\hat{x}(t)$, на 13 - компоненты генератора $w_1(t)$ и $w_2(t)$ и их оценки $\hat{w}_1(t)$ и $\hat{w}_2(t)$, на рисунке 14 - компоненты генератора $w_3(t)$ и $w_4(t)$ и их оценки $\hat{w}_3(t)$ и $\hat{w}_4(t)$. На рисунке 15 представлены компоненты генератора $w_5(t)$ и $w_6(t)$ и оценки $\hat{w}_5(t)$ и $\hat{w}_6(t)$, а на 16 - компоненты генератора $w_7(t)$ и $w_8(t)$ и оценки $\hat{w}_7(t)$ и $\hat{w}_8(t)$, на рисунке 17 же - ошибка наблюдателя $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, на рисунке 18 изображена

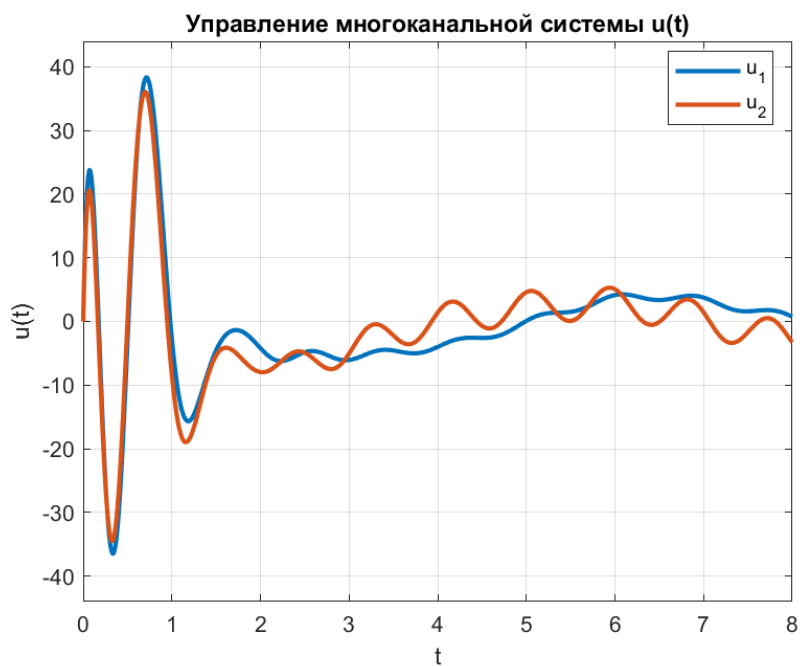


Рис. 8: Формируемое регулятором управление $u(t)$

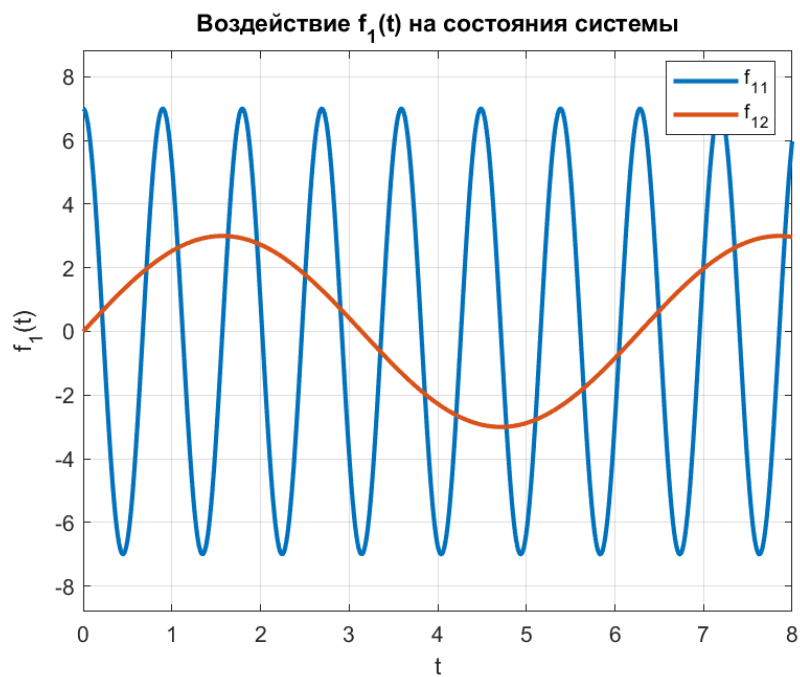


Рис. 9: Внешнее воздействие $f_1(t)$

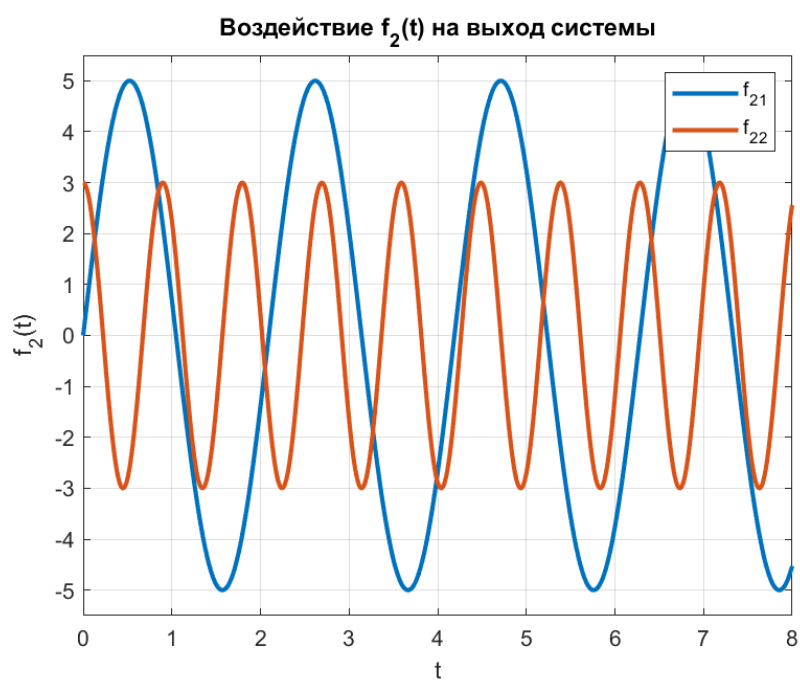
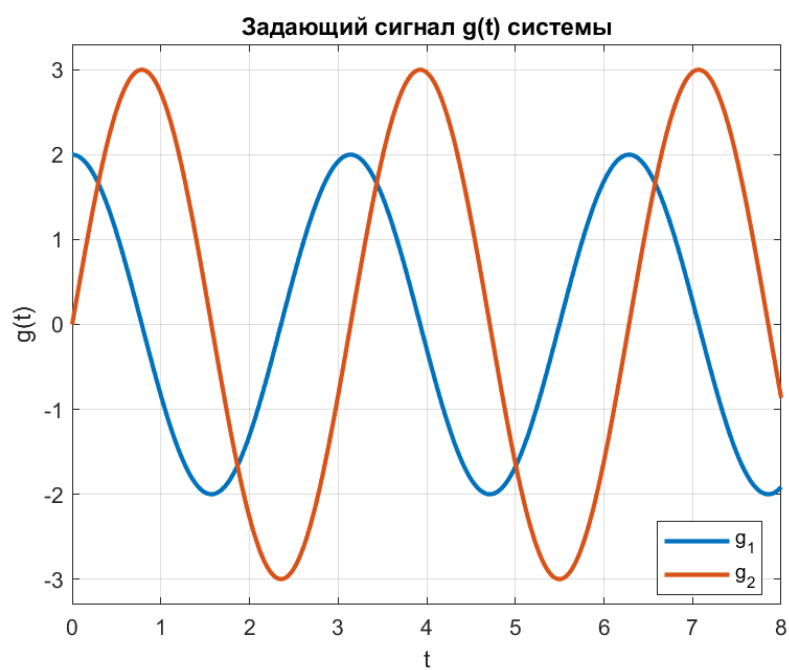
Рис. 10: Внешнее воздействие $f_2(t)$ Рис. 11: Внешнее воздействие $g(t)$



Рис. 12: Сравнительный график состояния системы $x(t)$ и его оценки $\hat{x}(t)$

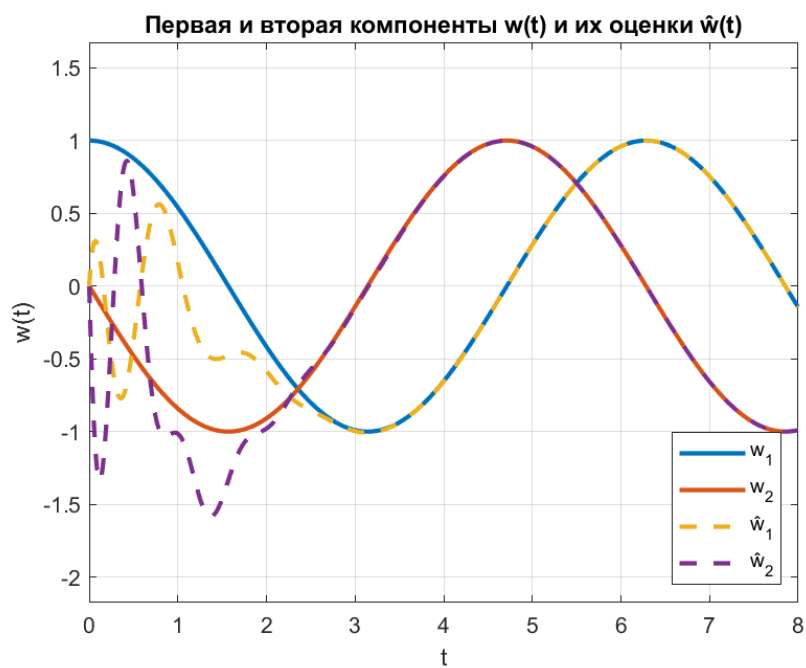


Рис. 13: Компоненты генератора $w_1(t)$ и $w_2(t)$ и оценки $\hat{w}_1(t)$ и $\hat{w}_2(t)$

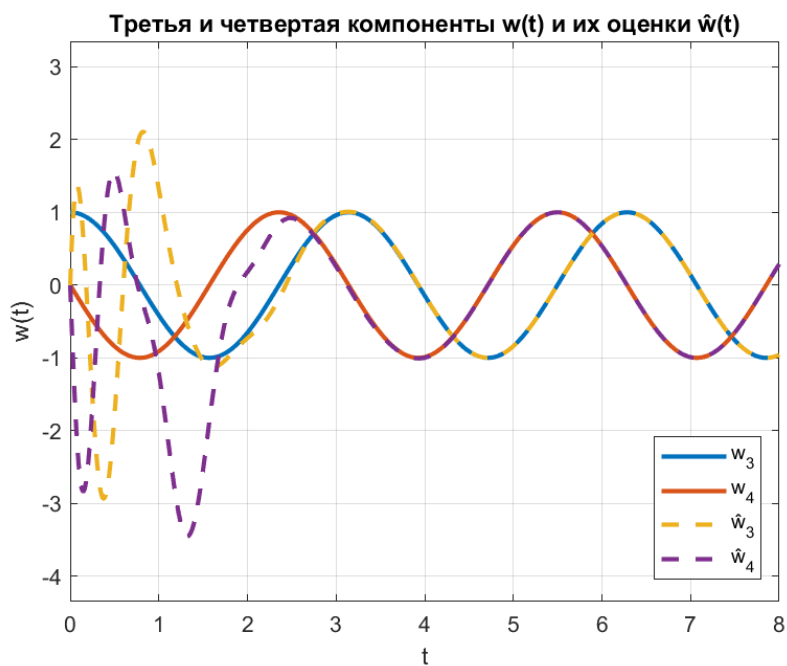


Рис. 14: Компоненты генератора $w_3(t)$ и $w_4(t)$ и оценки $\hat{w}_3(t)$ и $\hat{w}_4(t)$

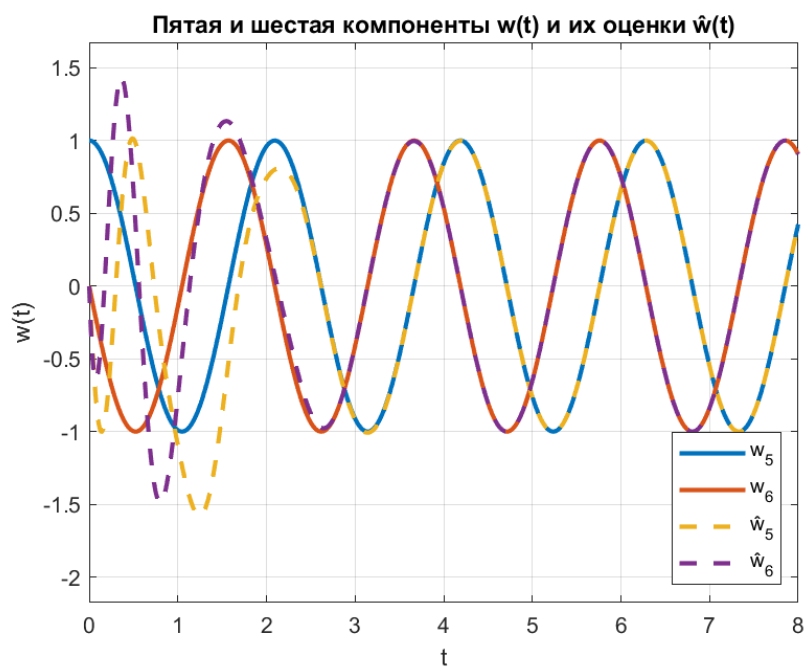


Рис. 15: Компоненты генератора $w_5(t)$ и $w_6(t)$ и оценки $\hat{w}_5(t)$ и $\hat{w}_6(t)$

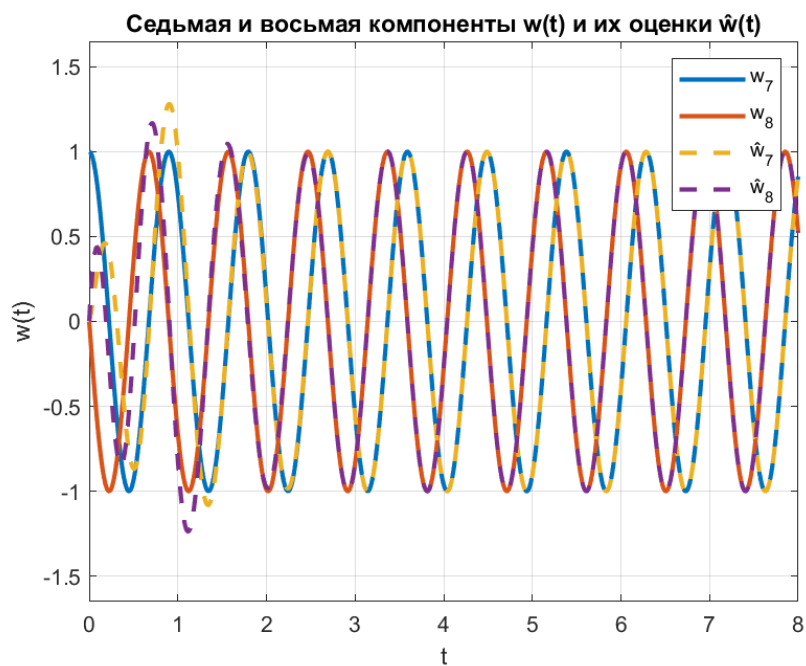


Рис. 16: Компоненты генератора $w_7(t)$ и $w_8(t)$ и оценки $\hat{w}_7(t)$ и $\hat{w}_8(t)$

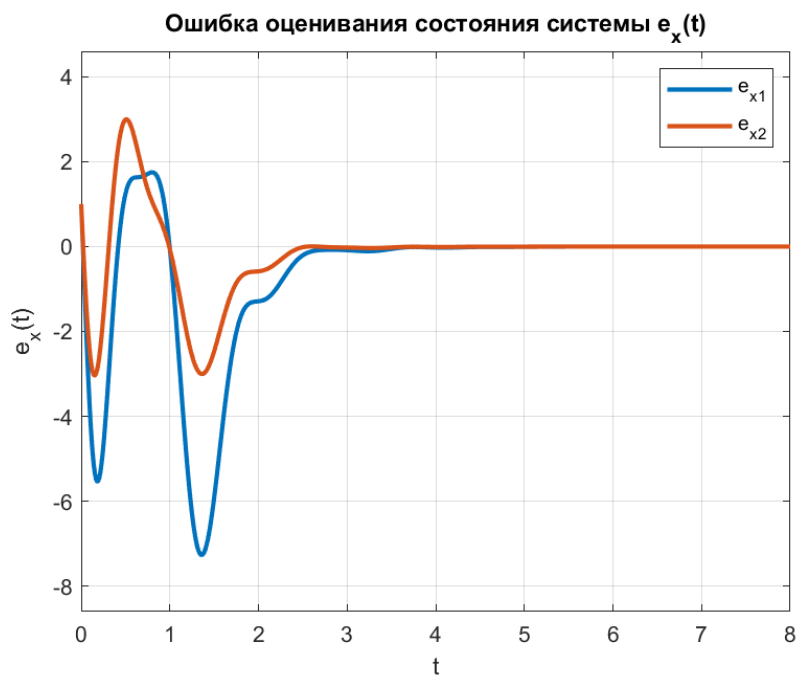


Рис. 17: Ошибка наблюдателя $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

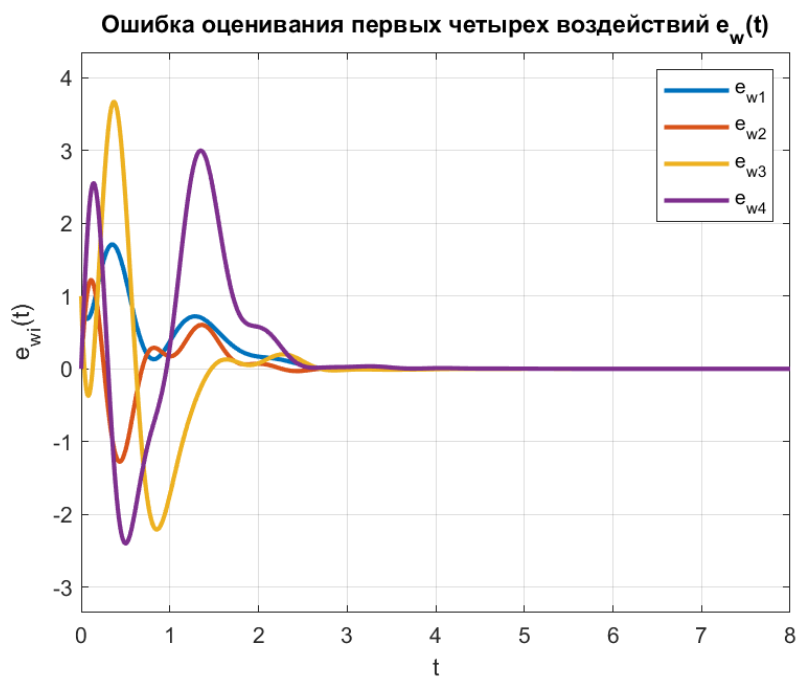


Рис. 18: Ошибка наблюдателя для воздействий $w_1(t)$ и $w_2(t)$ и $w_3(t)$ и $w_4(t)$

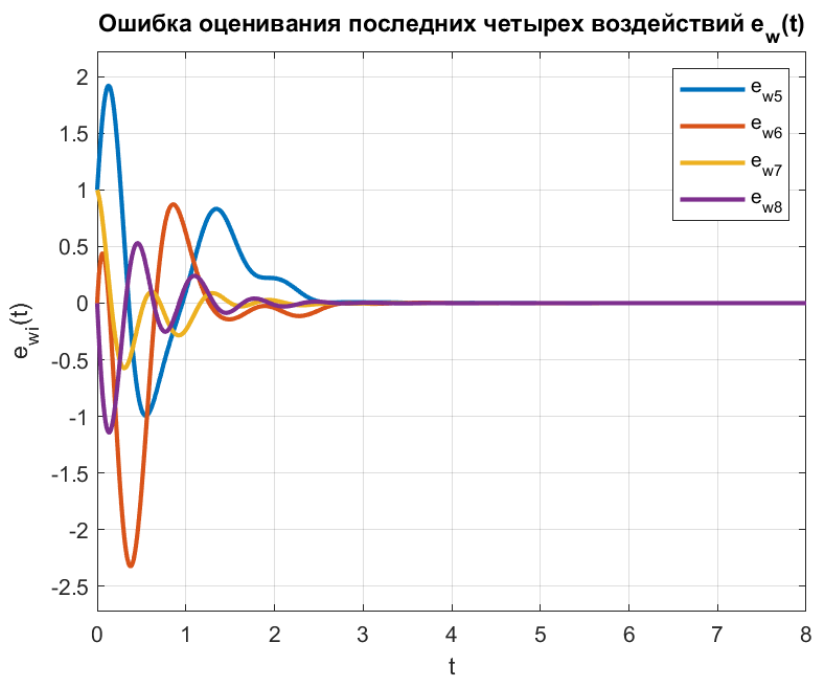


Рис. 19: Ошибка наблюдателя для воздействий $w_5(t)$ и $w_6(t)$ и $w_7(t)$ и $w_8(t)$

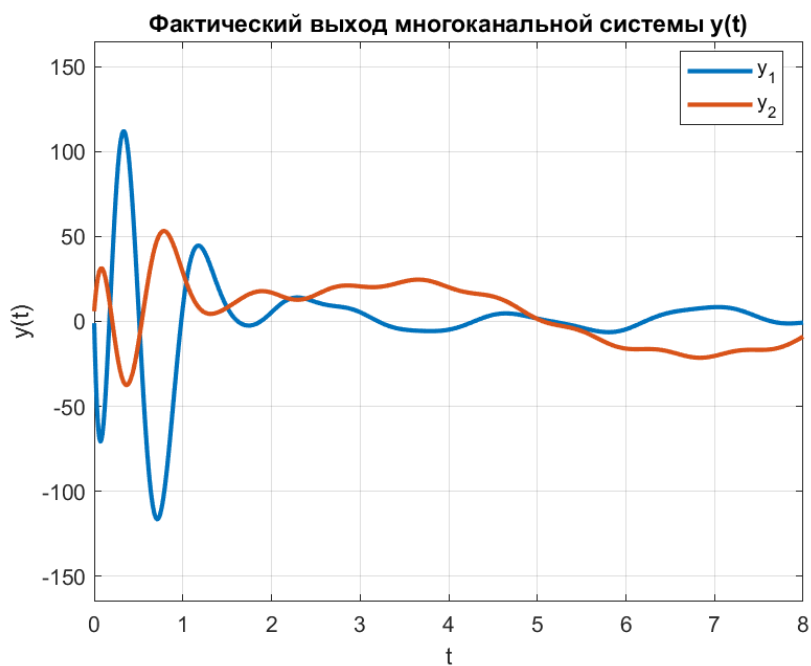


Рис. 20: Выход $y(t)$ системы

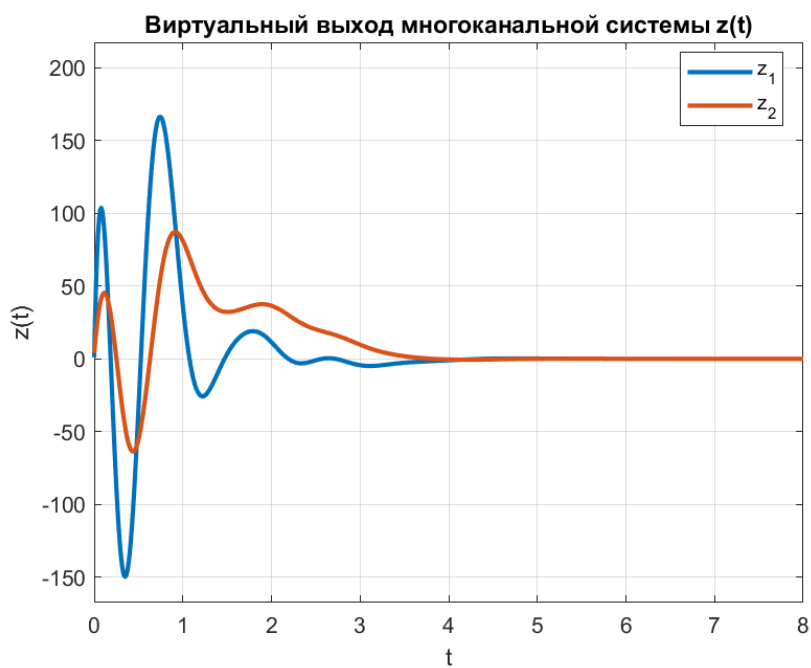


Рис. 21: Виртуальный (регулируемый) выход $z(t)$ системы

ошибка наблюдателя для воздействий $w_1(t)$ и $w_2(t)$ и $w_3(t)$ и $w_4(t)$, на рисунке 19 - ошибка наблюдателя для воздействий $w_5(t)$ и $w_6(t)$ и $w_7(t)$ и $w_8(t)$. Наконец, на рисунках 20 и 21 изображены фактический и виртуальный выходы $y(t)$ и $z(t)$ системы.

Можем видеть, что целевое условие $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ выполняется, а значит, задача слежения для многоканальной системы с возмущениями решена. Наблюдатель успешно отслеживает состояние системы и воздействия - уже после 3 секунды все ошибки визуально равны 0. Также отметим, что фактический выход $y(t)$ не стремится к 0, но он и не должен - всё же целевое условие формулировалось не для него. В управлении $u(t)$ же после некоторого времени наблюдаются стабильные колебания, связанные с тем, что система уже отследила воздействие $g(t)$, а дальше только его поддерживает.

3 Общие выводы

В данной работе была рассмотрена многоканальная система. В первом пункте были исследованы её временные и частотные характеристики, построена передаточная матрица от состояния к выходу, исследована управляемость и наблюдаемость - оказалось, что система со всех сторон управляема и наблюдаема. Также были вычислены полюса и нули передаточной матрицы, они оказались равны собственным числам матрицы A системы.

Во втором пункте была успешно выполнен синтез следящего регулятора, который успешно решал задачу слежения для многоканальной системы с возмущениями. Были получены и передаточные матрицы от состояний к фактическому и виртуальному выходам, выполнено необходимое условие невырожденности этих матриц для решения системы матричных уравнений Франкиса-Дэвисона.