Научно-исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №2

Синтез оптимального управления

Принцип максимума

Вариант 21

Выполнил студент Мовчан Игорь Евгеньевич, R3480
Проверил преподаватель Парамонов Алексей Владимирович

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Построение оптимального регулятора

Пусть имеется система:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -3x_1 - 6x_2 + u \end{cases} \tag{1}$$

Начальное и конечное (в момент времени $t = 1$) состояния:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(1) = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Минимизируемый критерий качества:

$$J = \int_0^1 u^2(\tau) d\tau$$

Задачей синтеза оптимального регулятора поставим нахождение такого управления $u(t)$, которое минимизирует критерий качества при заданных начальном и конечном состояниях. Назовем его оптимальным управлением и обозначим $u^*(t)$.

Для решения задачи сперва составим функцию Гамильтона:

$$H = u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-3x_1 - 6x_2 + u)$$

Запишем условие оптимальности:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^*(t) = -\frac{\lambda_2(t)}{2}$$

А также уравнения сопряженной системы:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 3\lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = \lambda_1 - 6\lambda_2 \end{cases}$$

Откуда:

$$\ddot{\lambda}_1 + 6\dot{\lambda}_1 - 3\lambda_1 = 0$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет решения

$$\alpha = -3 + \sqrt{12}, \quad \beta = -3 - \sqrt{12}$$

Значит, решение общее решение первой части

$$\lambda_1(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$$

Теперь можем найти решение и для второй части

$$\lambda_2(t) = \frac{\dot{\lambda}_1}{3} = \frac{\alpha}{3} C_1 e^{\alpha t} + \frac{\beta}{3} C_2 e^{\beta t}$$

Осталось отыскать константы C_i из начальных и конечных условий системы.