Нелинейные системы управления

Лабораторная работа №5

Авторы: Ибахаев З.Р. | Белоус С.Э. | Мовчан И.Е.
Преподаватель: Зименко К. А.

2025

Содержание

1 Задание 1 **3**
1.1 Синтез стабилизирующего разрывного регулятора 3
1.2 Анализ устойчивости разрывного регулятора 5
1.3 Синтез стабилизирующего непрерывного регулятора 6
1.4 Анализ устойчивости непрерывного регулятора 6
1.5 Моделирование 8

2 Задание 2 **9**
2.1 Синтез разрывного регулятора 9
2.2 Синтез стабилизирующего непрерывного регулятора 10
2.3 Моделирование 12

3 Задание 3 **13**
3.1 Теоретическое решение 13
3.2 Моделирование 15

1 Задание 1

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = \theta_1 x_1^2 + (2+\theta_2)u, \end{cases}$$

где $|\theta_1| \le 1$, $|\theta_2| \le 1$, и весь вектор состояния измерим.

1.1 Синтез стабилизирующего разрывного регулятора

Рассмотрим скользящую поверхность в виде

$$s = x_2 + kx_1 = 0, \quad k > 0$$

На поверхности s = 0 имеем

$$x_2 = -kx_1$$

Подставим в первое уравнение системы и получим динамику скользящего режима

$$\dot{x_1} = x_2 + sin(x_1) \to \dot{x_1} = -kx_1 + sin(x_1)$$

Рассмотрим квадратичную функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}x_1^2, \quad V > 0 \quad \forall x_1 \ne 0$$

Вычислим ее производную вдоль траектории системы:

$$\dot{V} = x_1\dot{x_1} = -kx_1^2 + x_1 sin(x_1)$$

С учетом того, что $|x_1 sin(x_1) \le x_1^2|$, получим оценку:

$$\dot{V} = -kx_1^2 + x_1 sin(x_1) \le -(k-1)x_1^2$$

При выборе $k > 1$ выполняется $\dot{V} < 0$ при $x_1 \ne 0$, что гарантирует асимтотическую устойчивость ненулевого решения

Целью управления является обеспечение попадания системы на скользящую поверхность $s = 0$ за конечное время и удержание на ней. Вычислим производную скользящей переменной:

$$\dot{s} = \dot{x_2} + k\dot{x_1} = \theta_1 x_1^2 + (2+\theta_2)u + k(x_2 + sin(x_1))$$

Перепишем уравнение в виде

$$\dot{s} = (2 + \theta_2)u + f(x_1, x_2)$$

где

$$f(x_1, x_2) = \theta_1 x_1^2 + k(x_2 + sin(x_1))$$

Запишем оценки неопределенностей системы

$$\begin{cases} |\theta_1| \leq 1 \\ |\theta_2| \leq 1 \\ |sin(x_1)| \leq 1 \end{cases}$$

Следовательно, верхняя граница модуля функции $f(x)$ оценивается как:

$$|f(x)| \leq x_1^2 + k|x_2| + k = \rho(x_1, x_2)$$

Коэффициент при управлении $2 + \theta_2 \in [1, 3]$, то есть ограничен снизу $b_{min} = 1$.

Выберем разрывное управление в виде

$$u = -M(x)\text{sgn}(s), \quad M(x) > 0$$

Требуется обеспечить выполнение условия достижимости скользящего режима:

$$s\dot{s} \leq -\eta|s|, \quad \eta > 0$$

Подставим в выражение формулу для управления:

$$\dot{s} = (2 + \theta_2)(-M(x)\text{sgn}(s)) + f(x_1, x_2)$$

Рассмотрим случай $s > 0$, тогда $\text{sgn}(s) = 1$:

$$u = -M(x),$$

следовательно

$$\dot{s} = -(2 + \theta_2)M(x) + f(x_1, x_2)$$

Учитывая, что $|\theta_2| \leq 1$, имеем $2 + \theta_2 \geq 1$, поэтому

$$-(2 + \theta_2)M(x) \leq -M(x)$$

Также $f(x) \leq |f(x)| \leq \rho(x)$, где

$$\rho(x) = |\theta_1 x_1^2| + |kx_2| + |ksin(x_1)| \leq x_1^2 + k|x_2| + k$$

Следовательно

$$\dot{s} \leq -M(x) + \rho(x), \quad s > 0$$

Чтобы обеспечить $\dot{s} \leq -\eta$, достаточно:

$$-M(x) + \rho(x) \leq -\eta \Longrightarrow M(x) \leq \rho(x) + \eta$$

Аналогичным образом для случая $s < 0 (sign(s) = -1)$ требуется то же условие. Следовательно, выбираем амплитуду разрывного управления:

$$M(x) = x_1^2 + k|x_2| + k + \eta \tag{21}$$

И окончательно стабилизирующий разрывный регулятор на основе скользящих режимов принимает вид:

$$u = -\left(x_1^2 + k|x_2| + k + \eta\right) \operatorname{sgn}(s), \quad s = x_2 + kx_1$$

1.2 Анализ устойчивости разрывного регулятора

Выше было показано, что при $k > 1$ система на скользящей поверхности асимптотически устойчива. Проверим достижимость скользящей поверхности. Рассмотрим функцию Ляпунова $V_s = \frac{1}{2}s^2$, её производная:

$$\dot{V}_s = s\dot{s} \leq -\eta|s| = -\eta\sqrt{2V_s}$$

Проанализируем конечное время достижения. Из неравенства следует:

$$\frac{d\sqrt{V_s}}{dt} \leq -\frac{\eta}{\sqrt{2}}$$

Откуда время достижения t_r оценивается как:

$$t_r \leq \frac{\sqrt{2V_s(0)}}{\eta} = \frac{|s(0)|}{\eta}$$

Следовательно система достигает скользящей поверхности за конечное время

1.3 Синтез стабилизирующего непрерывного регулятора

Воспользуемся подходом с разделением на эквивалентное и разрывное составляющие с непрерывной аппроксимацией:

$$u = u_{eq} + u_{sw}$$

где u_{eq} — эквивалентное управление (идеальная компенсация известной динамики), u_{sw} — непрерывная аппроксимация разрывной составляющей.

В идеальном случае ($\theta_1, \theta_2 = 0$) из условия $\dot{s} = 0$:

$$0 = 2u_{eq} + k(x_2 + \sin x_1) \Rightarrow u_{eq} = -\frac{k}{2}(x_2 + \sin x_1)$$

Для синтеза u_{sw} воспользуемся непрерывной аппроксимацией функции знака:

$$u_{sw} = -\frac{1}{2}\eta(x)\text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

Функция насыщения определяется следующим образом:

$$\text{sat}(z) = \begin{cases} \text{sgn}(z), & |z| > 1 \\ z, & |z| \leq 1 \end{cases}$$

Подставим в управление:

$$u_{sw} = -\frac{1}{2}\eta(x)\text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) = -\frac{1}{2}\left(2x_1^2 + k(|x_2| + 1) + 2\alpha\right)\text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

1.4 Анализ устойчивости непрерывного регулятора

Вновь введём в рассмотрение функцию Ляпунова $V_s = \frac{1}{2}s^2$. Её производная с динамикой системы:

$$\dot{V}_s = s\left(\theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2}k(x_2 + \sin x_1) - \frac{2+\theta_2}{2}\eta(x)\text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)$$

Введём обозначение для возмущения:

$$d(x) = \theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2}k(x_2 + \sin x_1)$$

Оценка возмущения:

$$|d(x)| \leq |\theta_1| x_1^2 + \frac{|\theta_2|}{2}k(|x_2| + |\sin x_1|) \leq x_1^2 + \frac{k}{2}(|x_2| + 1) = \rho(x)$$

Выполним анализ для области $|s| > \varepsilon$. В этом случае

$$\text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) = \text{sgn}(s).$$

поэтому $\text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) = |s|$. Тогда:

$$\dot{V}_s = -\frac{2+\theta_2}{2}\eta(x)|s| + d(x)s$$

Подставляем $\eta(x) = 2\rho(x) + 2\alpha$:

$$\dot{V}_s \leq -\frac{1}{2}(2\rho(x) + 2\alpha)|s| + \rho(x)|s| = -\alpha|s| < 0$$

В области $|s| \leq \varepsilon$ имеем $\text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) = \frac{s}{\varepsilon}$:

$$\dot{V}_s \leq -\frac{1}{2}\eta(x)\frac{s^2}{\varepsilon} + \rho(x)|s|$$

Система попадает в окрестность скользящей поверхности, где обеспечивается практическая устойчивость. Проведем моделирование

1.5 Моделирование

Проведём моделирование при $\theta_1 = 0.8$, $\theta_2 = -0.6$, $a = 2$, $\beta_0 = 0.001$ и $\varepsilon = 0.05$. Построим графики состояний x_1, x_2 и управления u, при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$

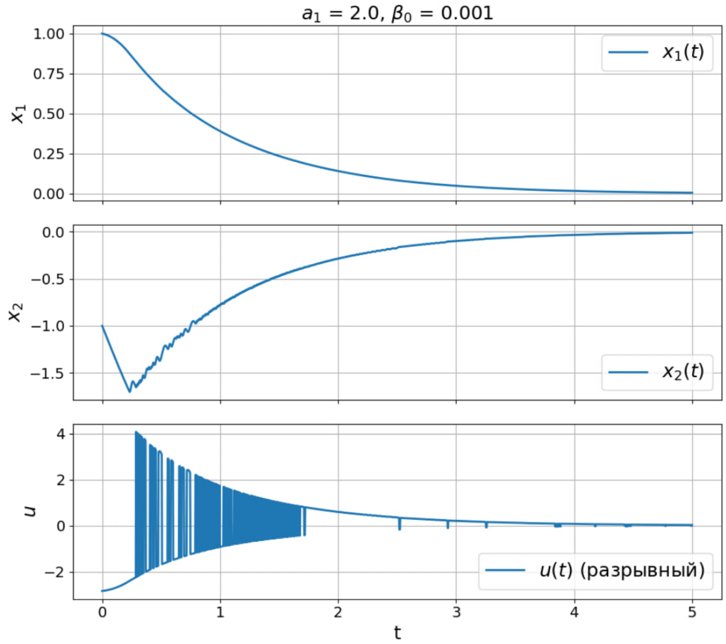

Рис. 1: Результаты моделирования для разрывного регулятора

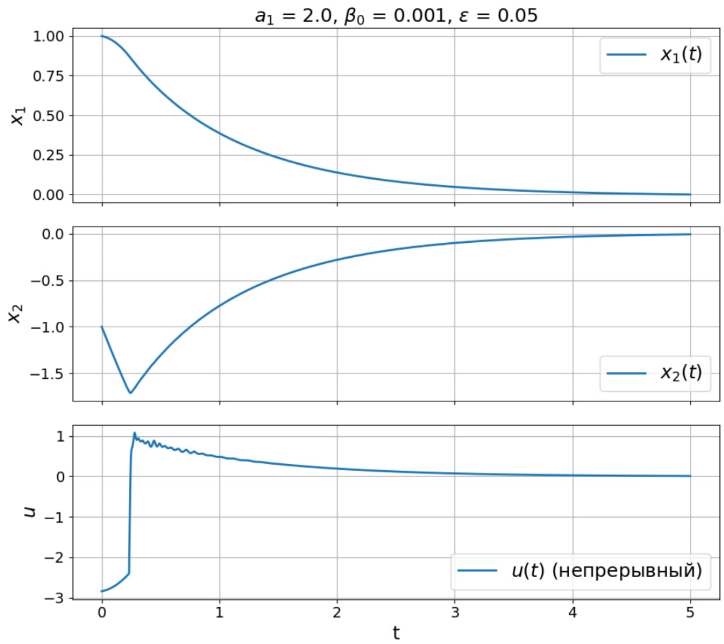

Рис. 2: Результаты моделирования для непрерывного регулятора

2 Задание 2

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + a_1 x_1 \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 x_2 + 3u, \end{cases}$$

где a_1, a_2 — неизвестные параметры, $|a_1 - 1| \le 1$, $|a_2 - 1| \le 1$. Весь вектор состояния измерим.Необходимо синтезировать стабилизирующий регулятор на основе скользящих режимов, провести соответствующий анализ устойчивости и провести математическое моделирование.

2.1 Синтез разрывного регулятора

Выберем линейную поверхность скольжения:

$$s = ax_1 + x_2, \quad a > 0.$$

На поверхности $s = 0$ динамика системы редуцируется к уравнению:

$$\dot{x}_1 = -ax_1,$$

которое является экспоненциально устойчивым при $a > 0$.

Вычислим производную поверхности скольжения:

$$\dot{s} = a\dot{x}_1 + \dot{x}_2.$$

С учётом динамики системы получаем:

$$\dot{s} = a(x_2 + a_1 x_1 \sin x_1) + a_2 x_1 x_2 + 3u.$$

Введём номинальные модели параметров, выбирая их средние значения:

$$\hat{a}_1 = 1, \quad \hat{a}_2 = 1.$$

Тогда номинальная часть динамики имеет вид:

$$\hat{h}(x) = ax_1 \sin x_1 + x_1 x_2.$$

Запишем управление в виде суммы эквивалентной и разрывной частей:

$$u = u_{eq} + v,$$

где эквивалентное управление задаётся как:

$$u_{eq} = -ax_2 + \hat{h}(x) = -ax_2 + ax_1 \sin x_1 + x_1 x_2.$$

Подставляя управление в производную поверхности, получаем:

$$\dot{s} = ax_2 + a_1 a x_1 \sin x_1 + a_2 x_1 x_2 + 3(u_{eq} + v).$$

Группируя члены, имеем:

$$\dot{s} = \delta(x) + 3v,$$

где суммарная неопределённость определяется выражением:

$$\delta(x) = a(a_1 - 1)x_1 \sin x_1 + (a_2 - 1)x_1 x_2.$$

Оценим её модуль, учитывая, что $|a_1 - 1| \le 1$, $|a_2 - 1| \le 1$ и $|\sin x_1| \le |x_1|$:

$$|\delta(x)| \le a|x_1|^2 + |x_1 x_2| \triangleq \rho(x).$$

Выберем разрывную составляющую управления в виде:

$$v = -\beta(x) \cdot \operatorname{sgn}(s),$$

где

$$\beta(x) = \rho(x) + \beta_0, \quad \beta_0 > 0.$$

Итоговый разрывной регулятор имеет вид:

$$u = -a(x_2 + x_1 \sin x_1) + x_1 x_2 - ax_2 - \frac{1}{3}(a|x_1|^2 + |x_1 x_2| + \beta_0) \cdot \operatorname{sgn}(ax_1 + x_2).$$

2.2 Синтез стабилизирующего непрерывного регулятора

Для устранения дребезга заменим функцию $\operatorname{sgn}(s)$ на функцию насыщения:

$$\operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} \frac{s}{\varepsilon}, & |s| \le \varepsilon, \\ \operatorname{sgn}(s), & |s| > \varepsilon, \end{cases} \quad \varepsilon > 0.$$

Непрерывный регулятор сохраняет структуру разрывного и задаётся выражением:

$$u = -a(x_2 + x_1 \sin x_1) + x_1 x_2 - ax_2 - \frac{1}{3}(a|x_1|^2 + |x_1 x_2| + \beta_0) \cdot \operatorname{sat}\left(\frac{ax_1 + x_2}{\varepsilon}\right).$$

Анализ устойчивости

Рассмотрим функцию Ляпунова, связанную с поверхностью скольжения:

$$V(s) = \frac{1}{2}s^2, \quad V(0) = 0, \quad V > 0 \quad \forall s \ne 0.$$

Производная функции Ляпунова имеет вид:

$$\dot{V} = s\dot{s}.$$

С учётом динамики поверхности:

$$\dot{s} = \delta(x) + 3v,$$

и выбора разрывной составляющей управления:

$$v = -\beta(x) \cdot \mathrm{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right), \quad \beta(x) = \rho(x) + \beta_0,$$

получаем:

$$\dot{V} = s\delta(x) - 3\beta(x)|s|.$$

Используя оценку $|\delta(x)| \leq \rho(x)$, имеем:

$$\dot{V} \leq |s|\rho(x) - 3(\rho(x) + \beta_0)|s| \leq -3\beta_0|s|.$$

Следовательно:

$$\dot{V} < 0 \quad \forall s \neq 0.$$

Таким образом, поверхность:

$$s = ax_1 + x_2 = 0$$

достигается за конечное время при любых начальных условиях. После попадания на поверхность скольжения динамика редуцируется к уравнению:

$$\dot{x}_1 = -ax_1,$$

которое является экспоненциально устойчивым при $a > 0$.

Рассмотрим теперь случай непрерывного регулятора. Вне пограничного слоя при $|s| > \varepsilon$ выполняется:

$$\dot{V} \leq -3\beta_0|s| < 0.$$

Внутри $|s| \leq \varepsilon$ управление является непрерывным. Все сигналы системы остаются ограниченными. В результате устанавливается режим:

$$|s(t)| \leq \varepsilon, \quad t \geq T.$$

2.3 Моделирование

Проведём моделирование при $a_1 = 1.8$, $a_2 = 0.3$, $a = 2$, $\beta_0 = 0.001$ и $\varepsilon = 0.05$. Построим графики состояний x_1, x_2 и управления u, при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$

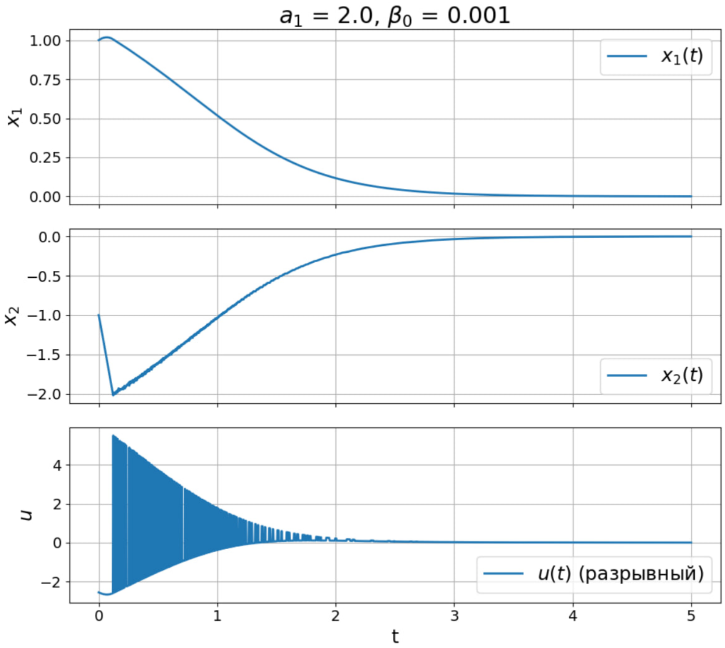

Рис. 3: Результаты моделирования для разрывного регулятора

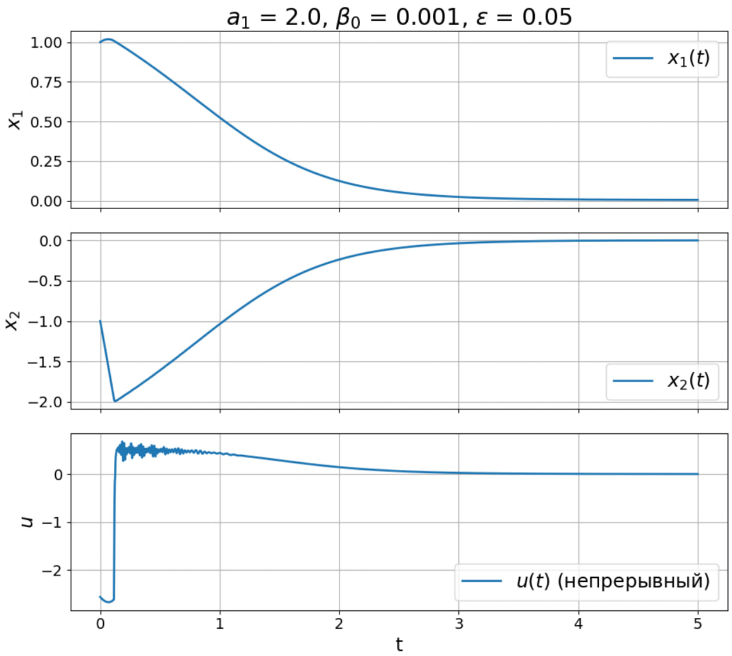

Рис. 4: Результаты моделирования для непрервыного регулятора

3 Задание 3

$$ml\ddot{\theta} + mg\sin\theta + kl\dot{\theta} = \frac{T}{l} + mh(t)\cos\theta,$$

где h — горизонтальное ускорение, T — управляющий момент. Предположим, что:

$$0.8 \le l \le 1, \quad 0.5 \le m \le 1, \quad 0.1 \le k \le 0.2, \quad |h(t)| \le 0.5,$$

и $g = 9.81$. Требуется стабилизировать маятник при $\theta = 0$ для произвольных начальных условий. Необходимо разработать непрерывный регулятор на основе скользящего режима с обратной связью по состоянию.

3.1 Теоретическое решение

Для удобства обозначим $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$. Выразим из уравнения $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{ml^2}T + \frac{1}{l}h(t)\cos\theta - \frac{k}{m}x_2 - \frac{g}{l}\sin x_1. \tag{52}$$

Отделим известную внутреннюю динамику системы $F(x)$ и возмущение $D(t,x)$:

$$F(x) = -\frac{k}{m}x_2 - \frac{g}{l}\sin x_1, \quad D(t,x) = \frac{1}{l}h(t)\cos x_1. \tag{53}$$

Тогда система в форме пространства состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{ml^2}T + F(x) + D(t,x). \end{cases} \tag{54}$$

Запишем поверхность скольжения:

$$s = \lambda x_1 + x_2, \quad \lambda > 0. \tag{55}$$

Найдём $\dot{s}$:

$$\dot{s} = \lambda\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = \lambda x_2 + \frac{1}{ml^2}T + G(x) + D(t,x),$$

где $G(x) = F(x) = -\frac{k}{m}x_2 - \frac{g}{l}\sin x_1$.

где $G(x) = F(x) + \lambda x_2$. Пусть $\dot{s} = -\beta_0$. Введём управление в виде:

$$T = ml^2\left(-\hat{G}(x) + u_{sw}(s)\right), \tag{57}$$

где $u_{sw} = -\beta_0 \mathrm{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$.

Так как истинные параметры m, l, k неизвестны, воспользуемся их номинальными оценками:

$$\hat{m} = 0.5, \quad \hat{l} = 0.8, \quad \hat{k} = 0.2. \tag{58}$$

Запишем регулятор с оценками:

$$T(x) = \hat{m}\hat{l}^2 \left(-\hat{G}(x) - \beta_0 \text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right), \tag{59}$$

где

$$\hat{G}(x) = -\frac{\hat{k}}{\hat{m}} x_2 - \frac{g}{\hat{l}} \sin x_1 + \lambda x_2. \tag{60}$$

Анализ устойчивости (функция Ляпунова $V_s = \frac{1}{2}s^2$) показывает:

$$\dot{V}_s \leq -(\gamma\beta_0 - \rho)|s|, \tag{61}$$

При выборе достаточно большого B_0 обеспечивается устойчивость системы, и состояния маятника сходятся к положению равновесия

3.2 Моделирование

Проведём моделирование при $l = 0.9$, $m = 0.7$, $k = 0.15$, $g = 9.81$, $a = 2$, $\beta_0 = 0.001$ и $\varepsilon = 0.05$

Построим графики состояний θ, $\dot{\theta}$ и управления u.

Начальные условия для эксперимента: $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

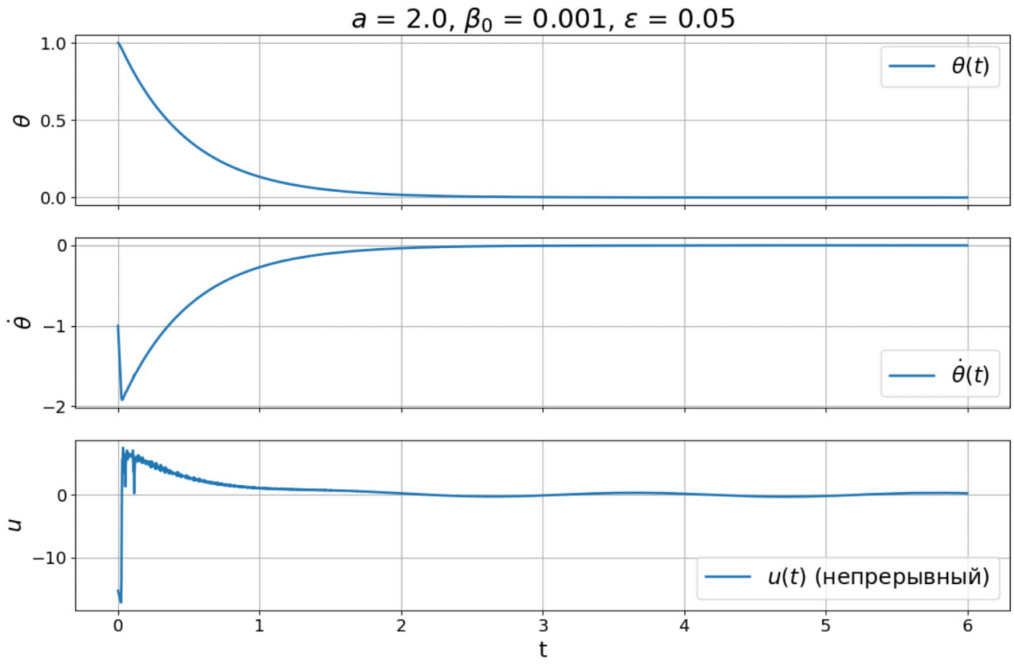

Рис. 5: Результаты моделирования для непрервыного регулятора