

НАУЧНО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по лабораторной работе №5  
Связь непрерывного и дискретного

Выполнил студент группы Р3380  
Преподаватели

Мовчан И.Е.  
Пашенко А.В., Перегудин А.А.

Санкт-Петербург  
2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Разные преобразования Фурье</b>	<b>2</b>
1.1	Численное интегрирование . . . . .	3
1.2	Использование DFT и различия . . . . .	13
1.3	Приближение непрерывного с помощью DFT . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Сэмплирование</b>	<b>38</b>
2.1	Гармоники . . . . .	38
2.2	Кардинальный синус . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Общие выводы</b>	<b>51</b>
<b>4</b>	<b>Приложение</b>	<b>52</b>

# 1 Разные преобразования Фурье

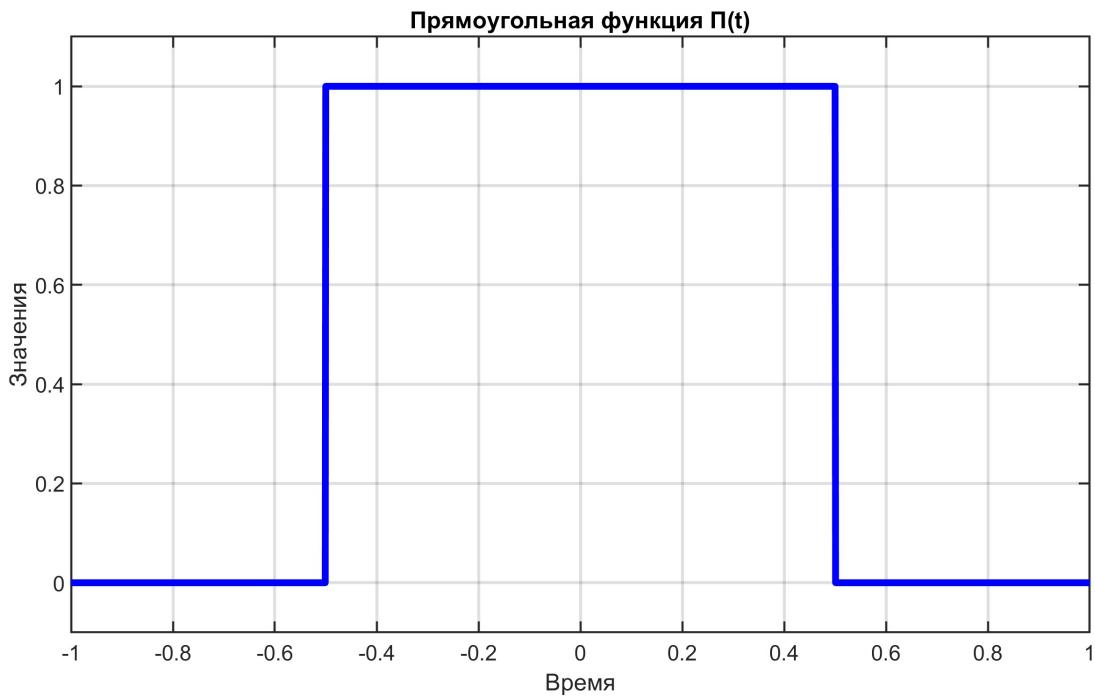
Прежде, чем приступить к выполнению задания, рассмотрим уже знакомую прямоугольную функцию  $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

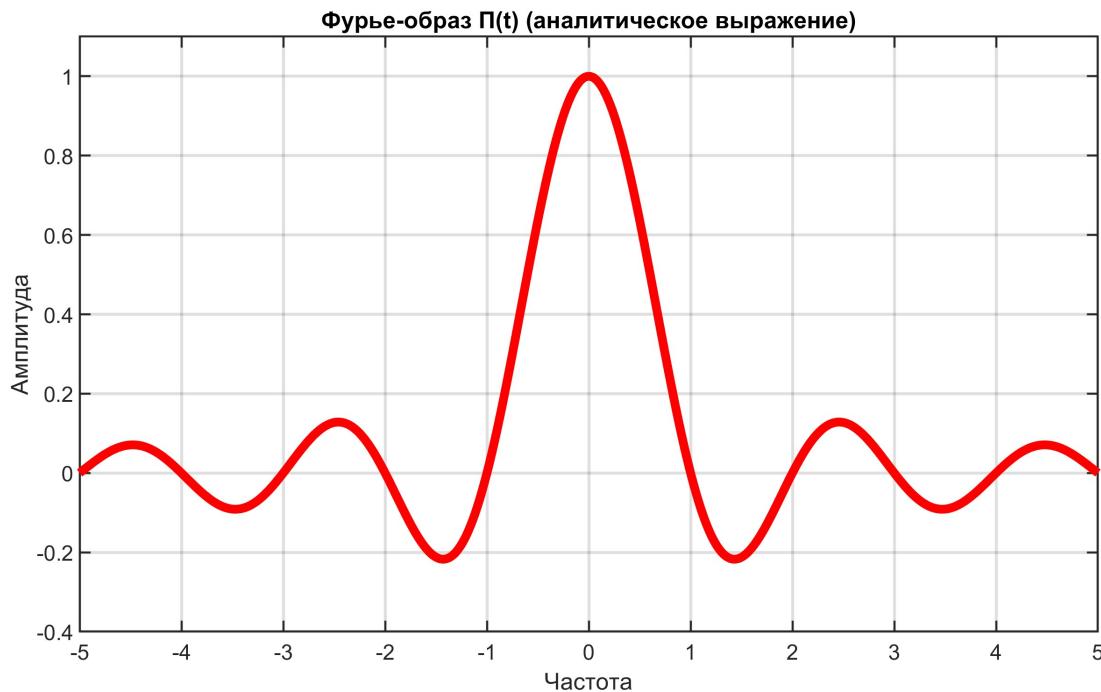
Её Фурье-образом будет являться аналитическое выражение

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \nu t} dt = \frac{ie^{-2\pi i \nu t}}{2\pi \nu} \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu}.$$

Данный результат уже был нам известен, так что не будем заострять на нём какое-то особое внимание (напомним лишь вид графиков описанных функций - рисунки 1 и 2).



*Рис. 1: График функции  $\Pi(t)$*

Рис. 2: График функции  $\hat{P}(\nu)$ 

## 1.1 Численное интегрирование

Прямоугольная волна - одна из самых базовых и фундаментальных функций в теории сигналов, в то же время имеющая достаточно понятный образ Фурье, не вызывающий никаких вопросов. Но что если перед нами будет стоять задача вычисления более сложных объектов? Считать всё вручную - слишком мутная затея, которая в большинстве ситуаций не окупится.

По этой причине люди прибегают к различных способам оптимизации, одним из которых является численное интегрирование. Давайте переложим долгую и нудную задачу вычисления известных интегралов Фурье преобразования на компьютер, а сами посмотрим, что же в итоге получится.

Результаты такой работы при промежутке интегрирования по времени  $T = 2$ , шаге дискретизации  $\Delta t = 0.025$ , промежутке интегрирования по частоте  $V = 10$  и шаге частот  $\Delta\nu = 0.1$  приведены на рисунках 4 и 3.

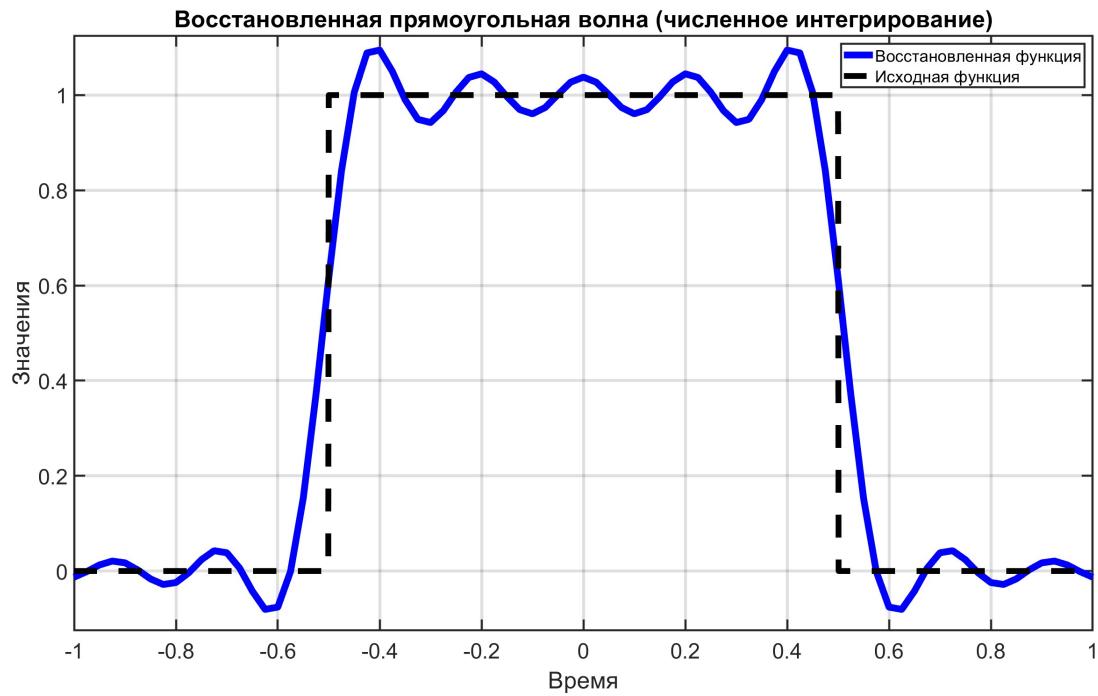


Рис. 3: Восстановление при  $T = 2$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $V = 10$  и  $\Delta\nu = 0.1$

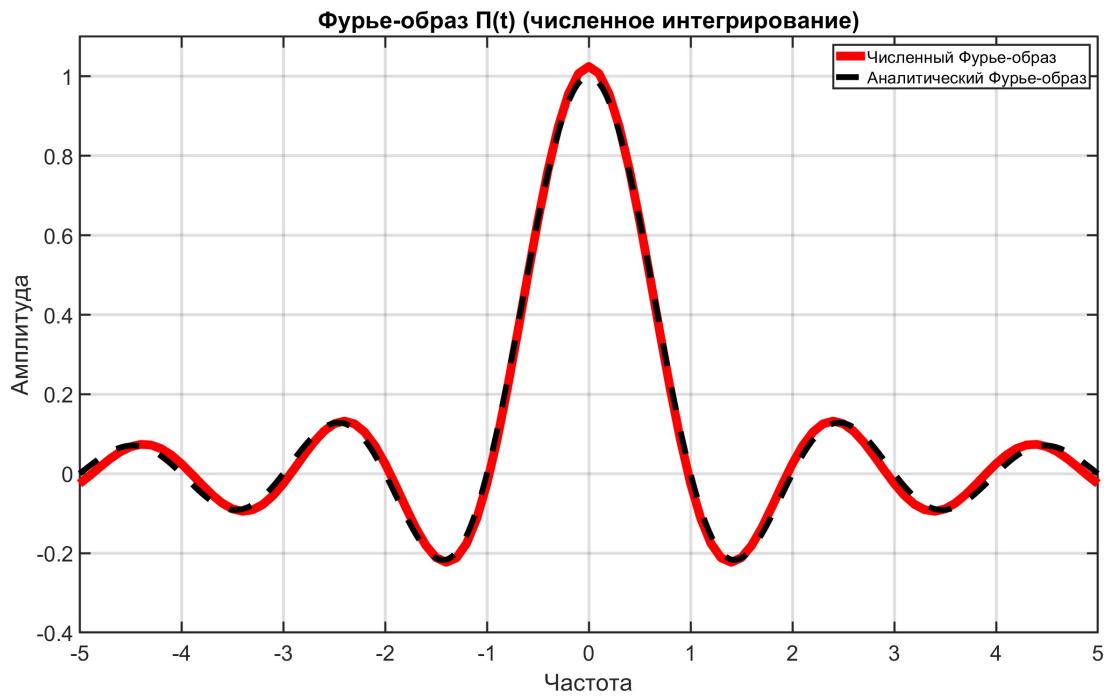


Рис. 4: Численный Фурье-образ при  $T = 2$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $V = 10$  и  $\Delta\nu = 0.1$

Что ж, итоги точно нас не воодушевляют: Фурье-образ явно отличается от истинного, восстановленной функции очень не достаёт плавности, а колебания, которые в ней присутствуют, ещё больше отдаляют нас от исходного сигнала. Посмотрим, можно ли каким-то образом улучшить возникшую ситуацию - для этого проварырем параметры и исследуем их влияние на получаемые функции.

Начнём с шага дискретизации  $\Delta t$ . Он напрямую влияет, с какой точностью строятся графики во временной области (соответственно, чем мельче шаг, тем более гладкими они выходят). Также мелкость  $\Delta t$  влияет на ширину правильно находимых амплитуд в частотной области, большие значения  $\Delta t$  дают весомые расхождения численно вычисленного образа Фурье от аналитического на высоких частотах. Визуализирующие эти выводы графики при значении  $\Delta t = 0.075$  изображены на рисунках 5 и 6 («зигзагообразная» форма восстановленной функции, расхождения образов даже на низких частотах), при значении  $\Delta t = 0.001$  - на рисунках 7 и 8 (гармоники сгладились, образ Фурье максимально приближен к исходному на данном  $V$ ).

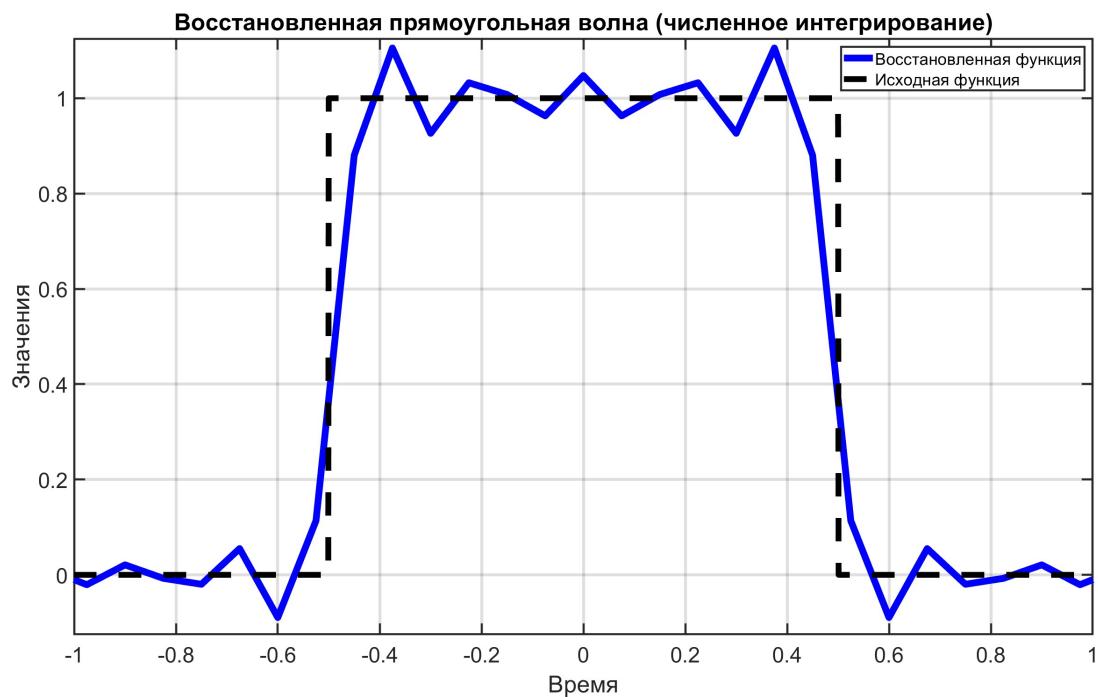


Рис. 5: Восстановление при  $T = 2$ ,  $\Delta t = 0.075$ ,  $V = 10$  и  $\Delta\nu = 0.1$

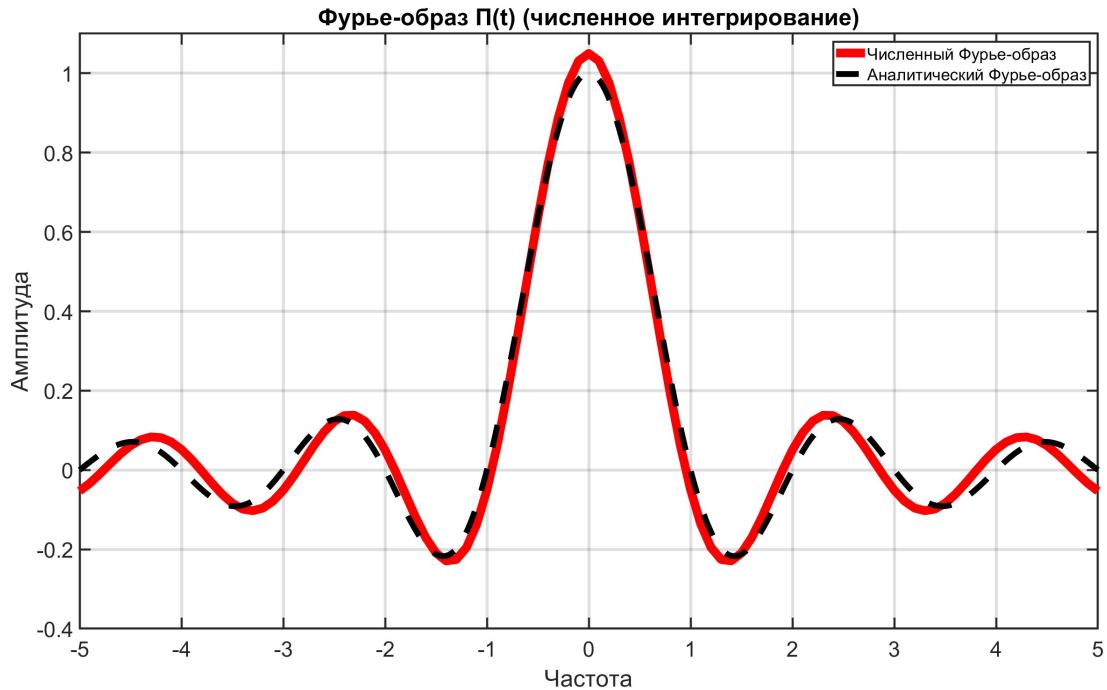


Рис. 6: Численный Фурье-образ при  $T = 2$ ,  $\Delta t = 0.075$ ,  $V = 10$  и  $\Delta\nu = 0.1$

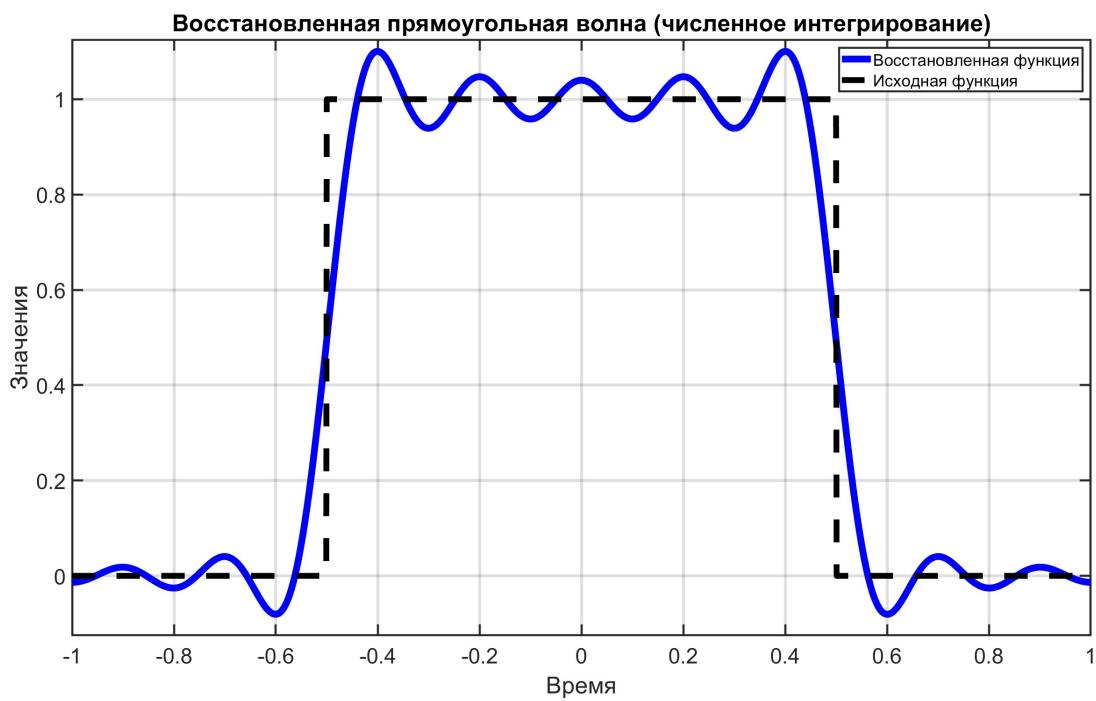


Рис. 7: Восстановление при  $T = 2$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $V = 10$  и  $\Delta\nu = 0.1$

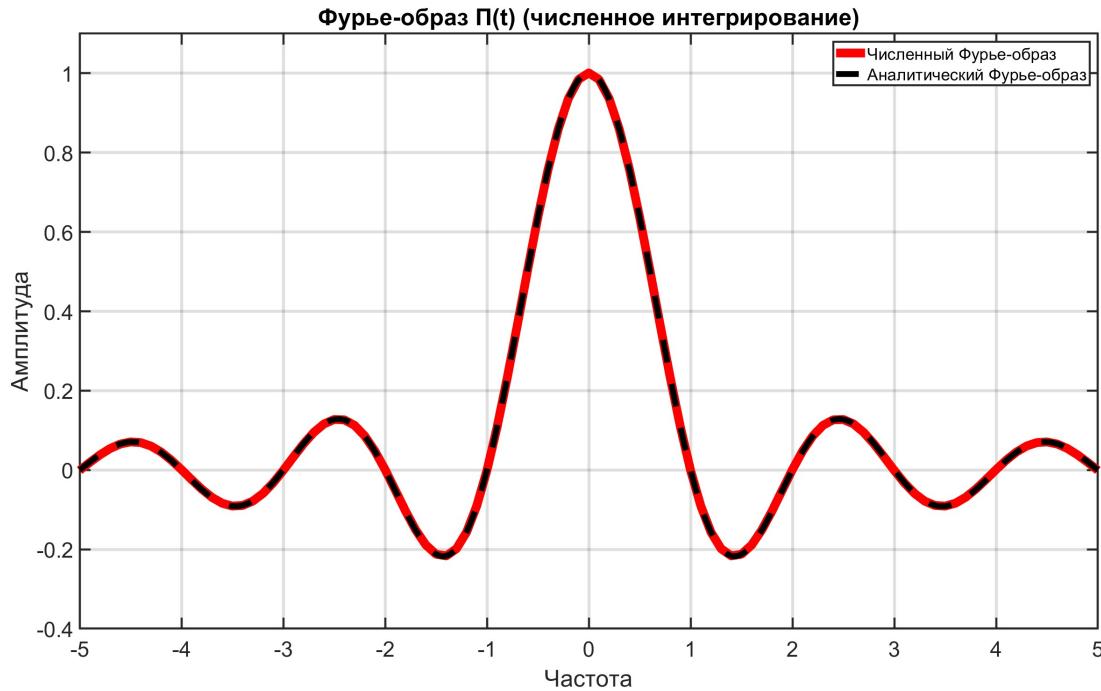
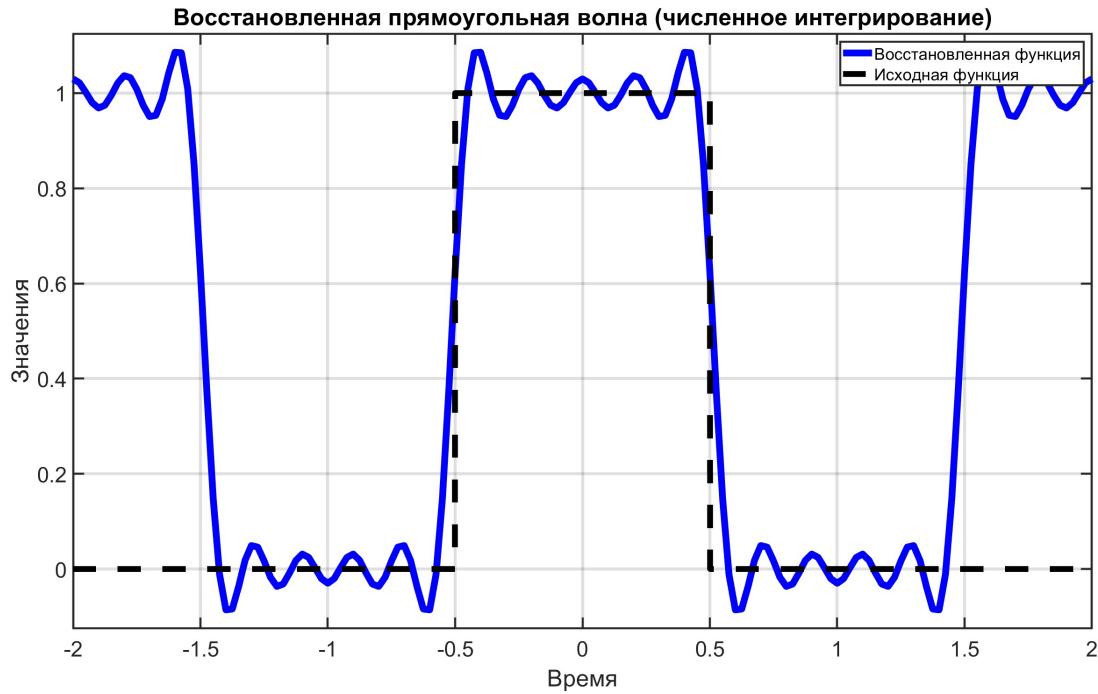
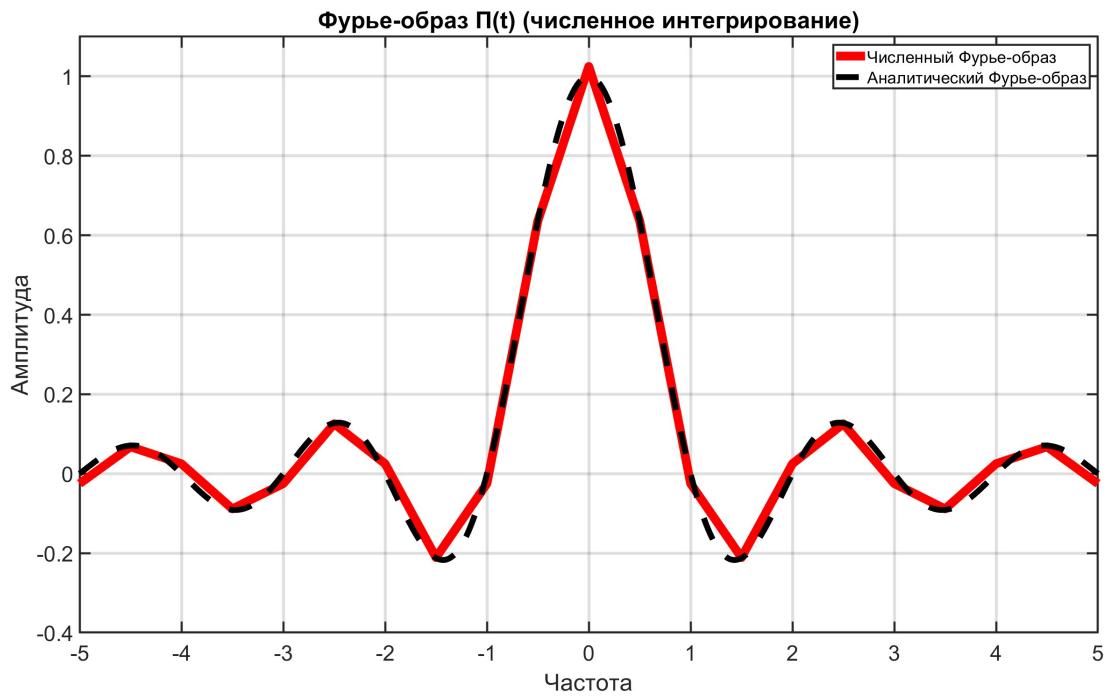
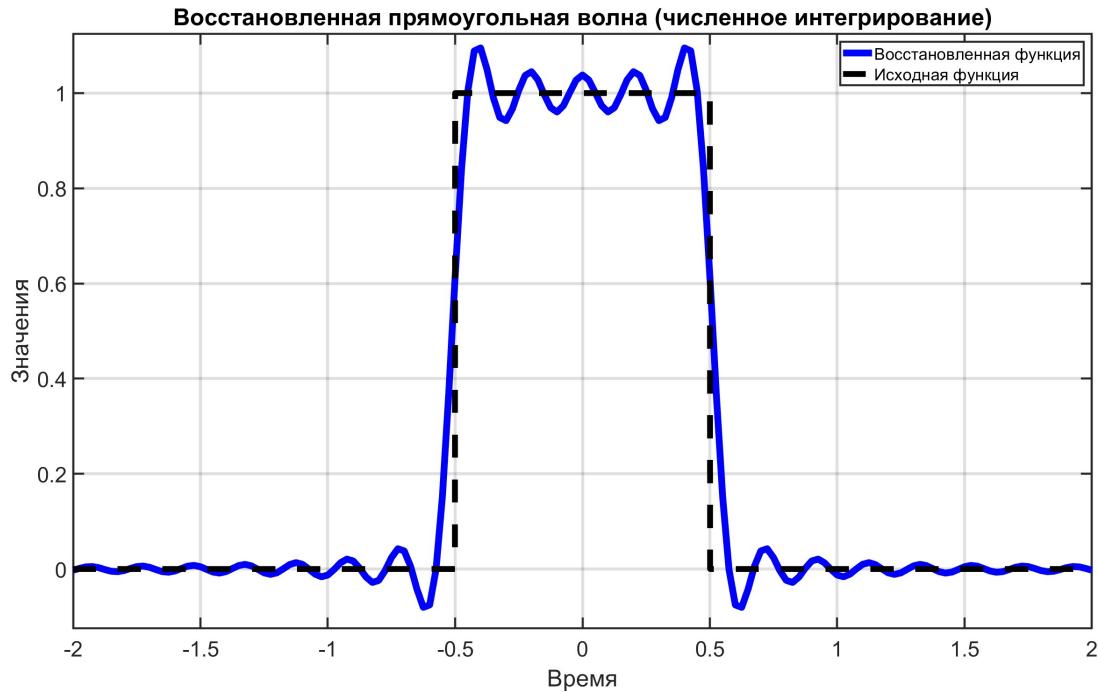
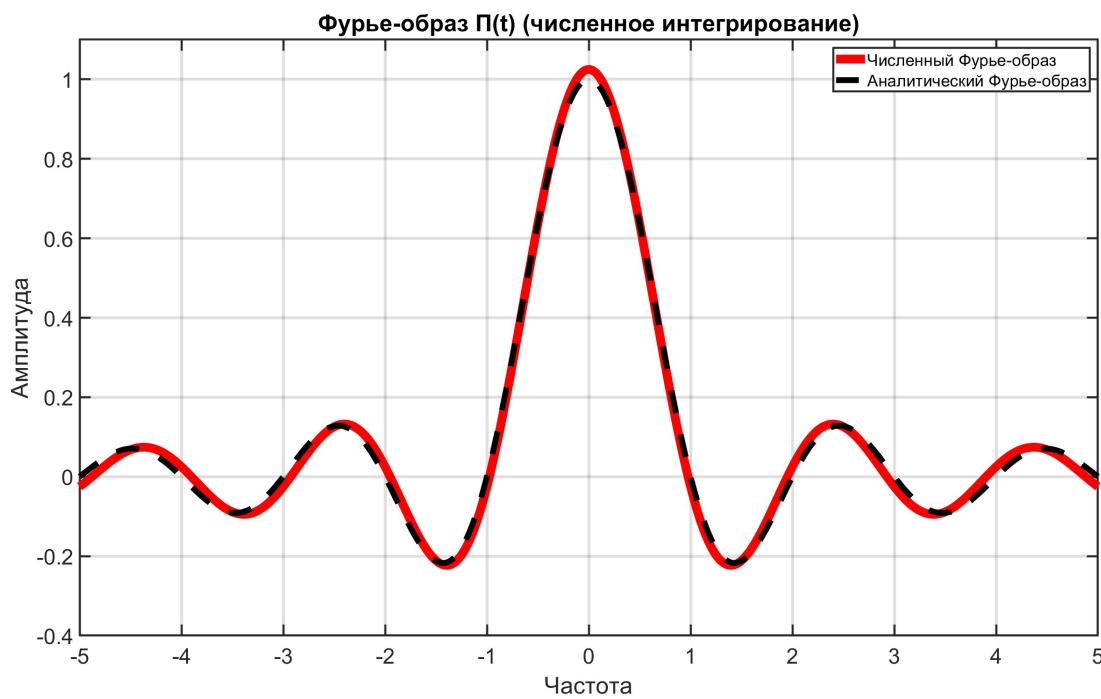


Рис. 8: Численный Фурье-образ при  $T = 2$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $V = 10$  и  $\Delta\nu = 0.1$

Рассмотрим далее влияние шага частот  $\Delta\nu$ . Результаты работы при параметре  $\Delta\nu = 0.5$  представлены на рисунках 9 и 10, при параметре  $\Delta\nu = 0.001$  - на рисунках 11 и 12 (в обоих случаях мы расширили захватываемую временную область за счёт увеличения  $T$  до 4, чтобы можно было явно отследить все происходящие изменения; остальные параметры при этом остались теми же). Как можно видеть, кратное уменьшение шага по частоте сильно сглаживает вычисляемый Фурье-образ, а также расширяет временную область, в которой исходный сигнал корректно восстанавливается (увеличение  $\Delta\nu$  приводит к уменьшению периода восстанавливаемой функции - в итоге получаем расхождения на больших значениях времени; на самом деле похожее происходило и с парой  $\Delta t$  и  $V$ , и в том числе поэтому на высоких частотах при большом шаге по времени выходили ошибки в сравнении с истинными значениями образа Фурье).

Немаловажными параметрами являются и промежутки интегрирования по времени  $T$  и частоте  $V$ , задающие пределы, в которых мы хотим работать с соответствующими областями. Комбинации боль-

Рис. 9: Восстановление при  $T = 4$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $V = 10$  и  $\Delta\nu = 0.5$ Рис. 10: Численный Фурье-образ при  $T = 4$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $V = 10$  и  $\Delta\nu = 0.5$

Рис. 11: Восстановление при  $T = 4$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $V = 10$  и  $\Delta\nu = 0.001$ Рис. 12: Численный Фурье-образ при  $T = 4$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $V = 10$  и  $\Delta\nu = 0.001$

ших  $T$  с относительно большими  $\Delta\nu$ , как мы видели, дают неверно восстанавливаемые сигналы на заданном интервале. Похожее можно сказать и про  $V$  с  $\Delta t$  - результаты при  $V = 4$  изображены на рисунках 13 и 14, при  $V = 100$  - на рисунках 15 и 16. Чрезмерное сужение и расширение частотного отрезка к тому же приводят к неточностям в восстановленной функции, так как на выходе получаем либо недостаток «вращений» для приближения сигнала, либо их перебор за счёт повторений и увеличение значений функций (рисунок 15).

В идеале нужно захватывать как можно большие «куски» по времени и частоте на верно вычисляемых промежутках, и в случае появления ломаных линий или других недочётах либо кратно делить шаги  $\Delta t$  или  $\Delta\nu$ , либо сужать области, уменьшая параметры  $T$  или  $V$ . На рисунках 17 и 18 как раз изображен случай хорошо восстанавливаемого сигнала при параметрах  $T = 50$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $V = 100$  и  $\Delta\nu = 0.01$ . Но и тут не обошлось без трудностей, ведь возле точек разрыва прямоугольной волны ( $t = \pm 0.5$ ) восстанавливаемый сигнал бешено осциллирует, причем с весомой амплитудой.

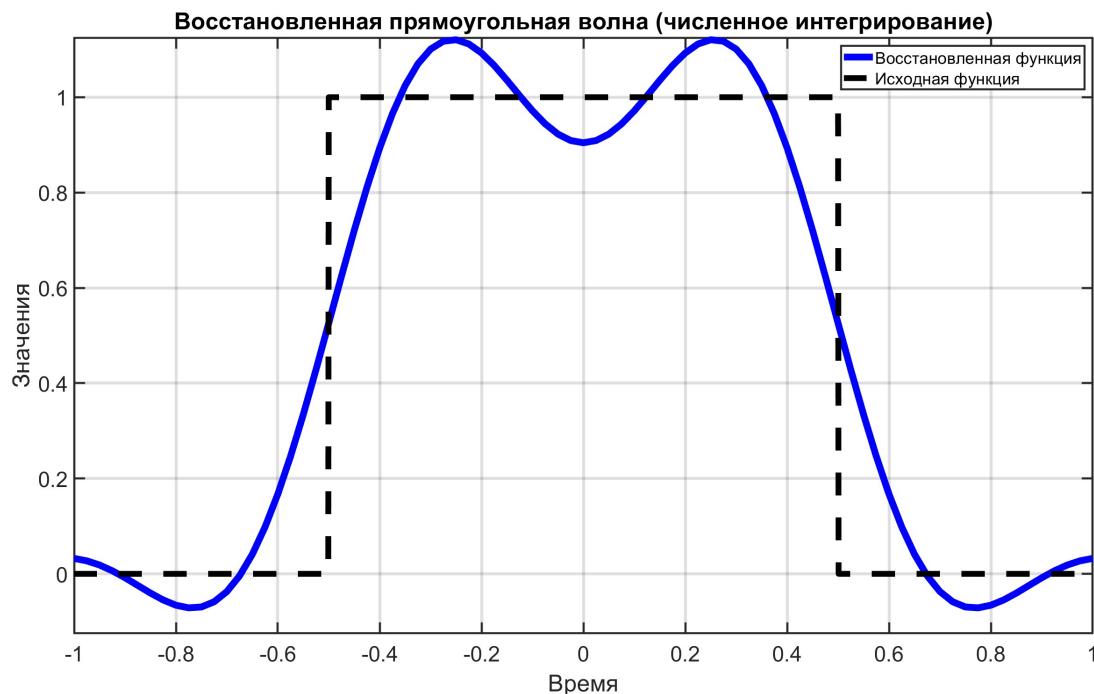


Рис. 13: Восстановление при  $T = 2$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $V = 4$  и  $\Delta\nu = 0.1$

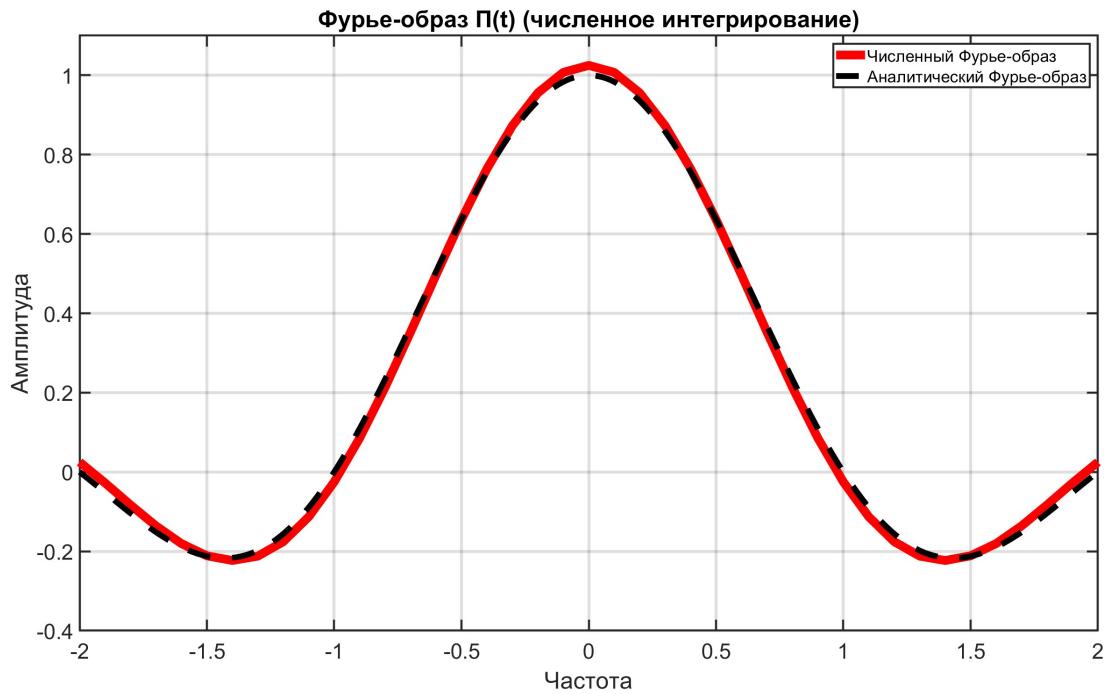


Рис. 14: Численный Фурье-образ при  $T = 2$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $V = 4$  и  $\Delta\nu = 0.1$

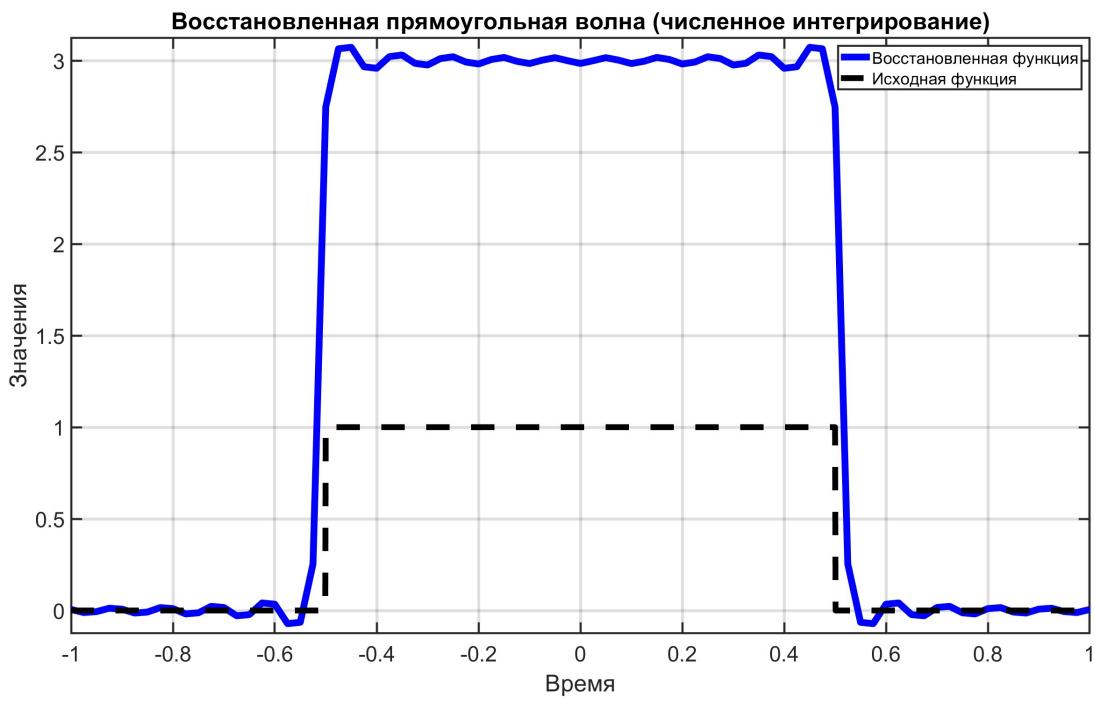


Рис. 15: Восстановление при  $T = 2$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $V = 100$  и  $\Delta\nu = 0.1$

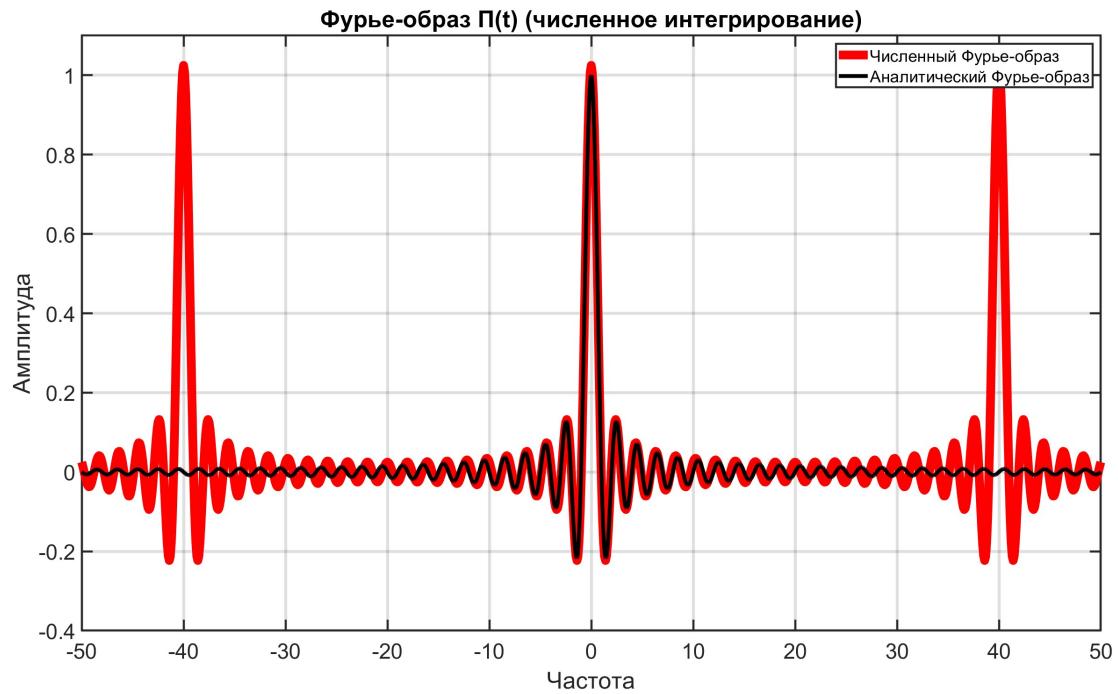


Рис. 16: Численный Фурье-образ при  $T = 2$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $V = 100$  и  $\Delta\nu = 0.1$

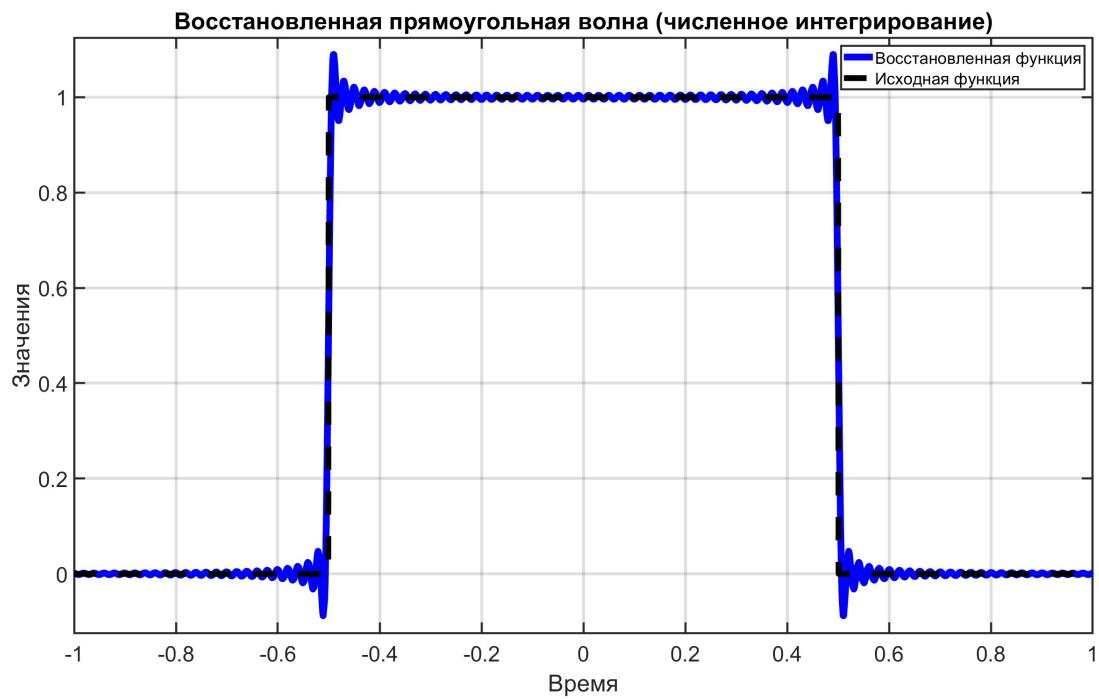


Рис. 17:  $\Pi(t)$  при  $T = 50$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $V = 100$ ,  $\Delta\nu = 0.01$  (приближение)

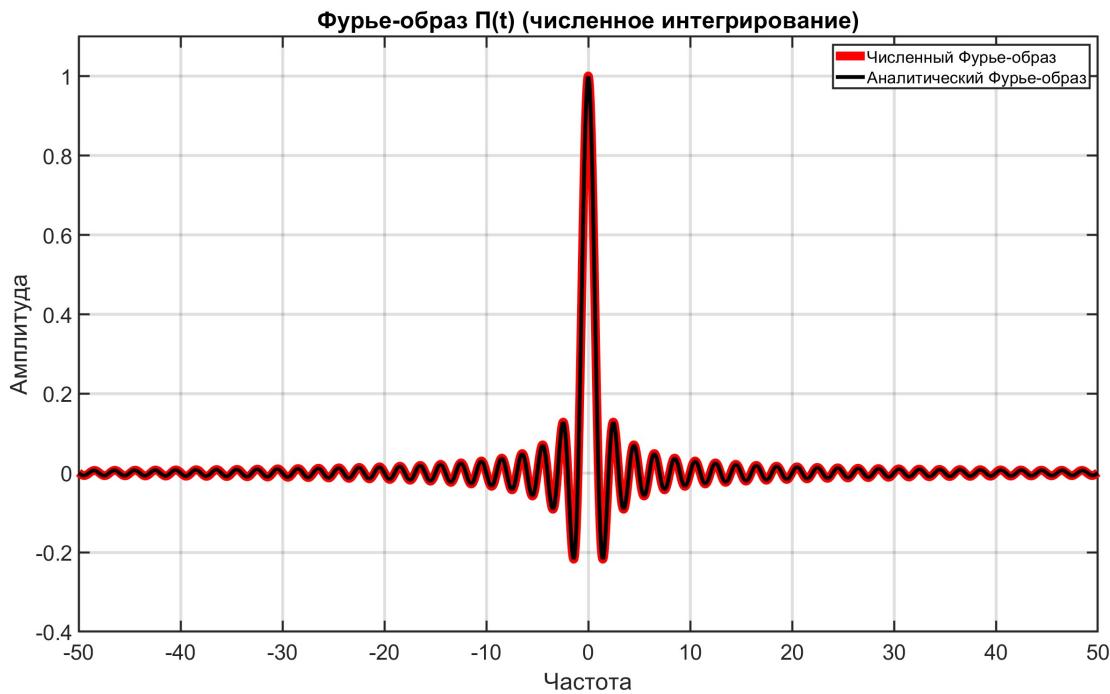


Рис. 18: Численный Фурье-образ при  $T = 50$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $V = 100$  и  $\Delta\nu = 0.01$

Ко всем вышеперечисленным проблемам добавляется и ключевой недостаток метода - его медлительность. Даже не при самом большом количестве точек мы вынуждены ждать по несколько секунд, а то и более, чтобы получить хоть какие-то удовлетворительные результаты. Численное интегрирование - очень трудоёмкий процесс, обходящийся нам дорого по времени, поэтому возникает естественный вопрос - «а можно ли быстрее?». Оказывается, можно!

## 1.2 Использование DFT и различия

Решить проблему с быстродействием и точностью восстанавливаемой функции помогает, как ни странно, *быстрое преобразование Фурье* (БПФ или fft). Сразу проверим его в действии, установив значения параметра промежутка по времени  $T = 4$  и шага дискретизации  $\Delta t = 0.05$ , а также соответствующие им  $V = 1/\Delta t = 20$  (промежуток по частоте) и  $\Delta\nu = 1/T = 0.25$  (шаг по частоте). Результаты представлены на рисунках 19 и 20 (стоит отметить, что здесь

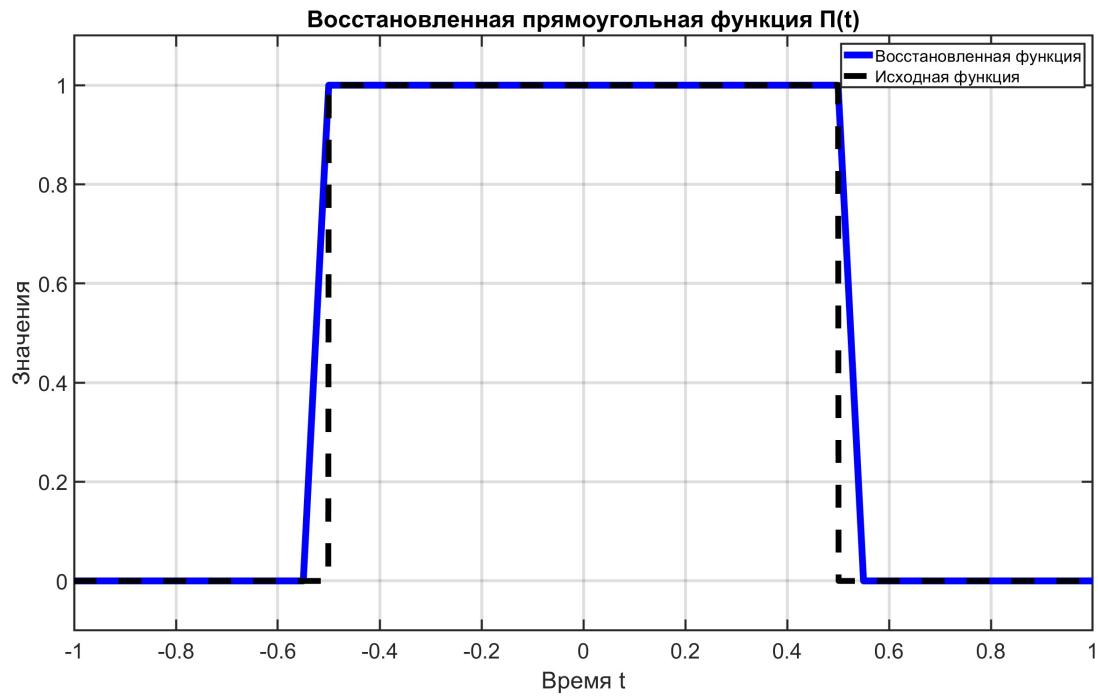


Рис. 19: Восстановление при DFT с  $T = 4$ ,  $\Delta t = 0.05$  (приближение)

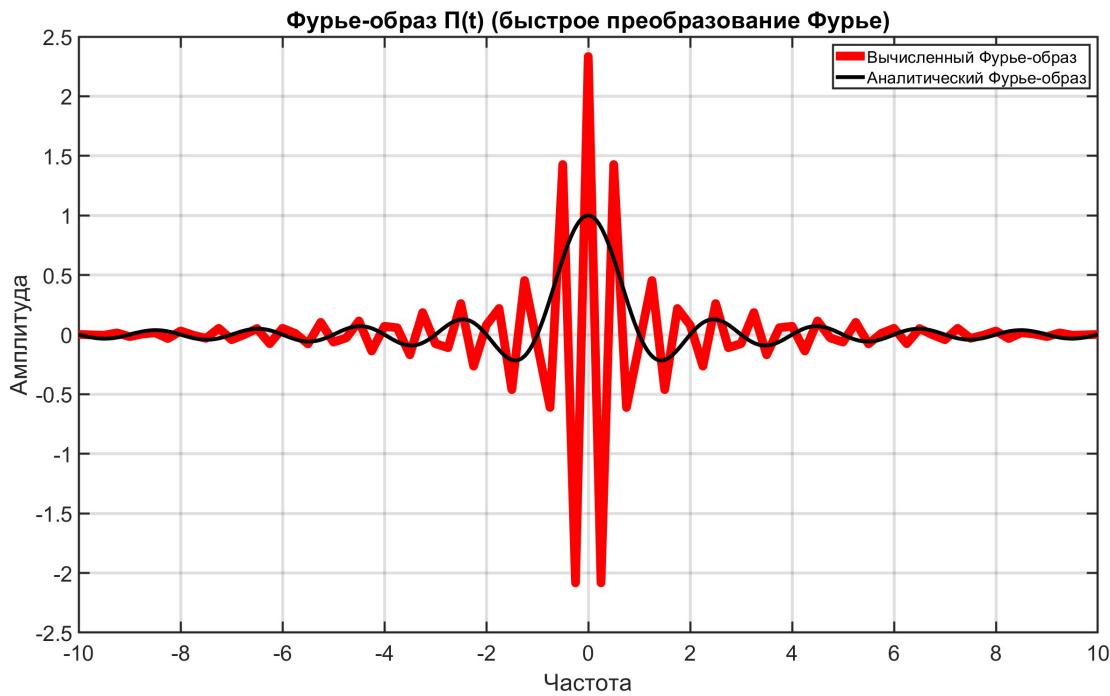


Рис. 20: Фурье-образ при DFT с параметрами  $T = 4$ ,  $\Delta t = 0.05$

и везде далее в пункте будет использоваться только преобразование *унитарной* формы).

По итогу прямоугольная функция, если сравнивать с предыдущим методом, использующим численное интегрирование, восстанавливается очень даже неплохо, хотя и не без проблем, ведь на выходе получилось нечто трапецеидальное. А вот её образ Фурье мало чем напоминает своего аналитически вычисленного аналога: имеются жёсткие пики, различие по амплитудам и смена знаков получаемых значений на каждый шаг (из плюса в минус и обратно).

Всё дело в том, что быстрое преобразование Фурье предполагает работу с дискретными, а не непрерывными, как было до этого, величинами, и по своей сути является ускоренной версией дискретного преобразования Фурье (DFT). Теперь мы не пытаемся приблизить истинные значения интегралов численными средствами (чем-то прерывистым) - мы напрямую работает с тем, что на самом деле записано на компьютере. Это другой подход, поэтому и вычисляемый Фурье-образ отличен от аналитического, ведь имеет иную природу.

Вышесказанное объясняет и с первого взгляда странно введённую связь между параметрами ( $V = 1/\Delta t$  и  $\Delta\nu = 1/T$ ). В дискретном случае она явно зашита в формулах: чем шире промежуток, тем ниже шаг, и наоборот (обратное наблюдалось и при численном интегрировании, где мелкость шага по времени расширяла частотный отрезок, где найденное было хорошо приближено к реальному).

Итак, раз мы получили что-то новое, давайте разберёмся, на что оно способно и как работает - исследуем влияния промежутка по времени  $T$  и шага дискретизации  $\Delta t$ .

Начнём с  $\Delta t$ . Результаты при параметре  $\Delta t = 0.1$  ( $V = 10$ ) - на рисунках 21 и 22, при  $\Delta t = 0.0075$  ( $V = 133$ ) - на рисунках 23, 24 и 25 ( $T$  при этом зафиксирован и равен 4, откуда  $\Delta\nu = 0.25$ ). Заметно, что мелкий шаг дискретизации сильно «выпрямляет» графики за счёт уплотнения временной области, резкие переходы становятся более различимыми. При уменьшении  $\Delta t$  также увеличивается амплитуда образа Фурье и расширяется частотная область (за счёт соотношения  $V = 1/\Delta t$ ), в которой он в целом рассматривается (и верно определяется, так как получаем лучшее восстановление).

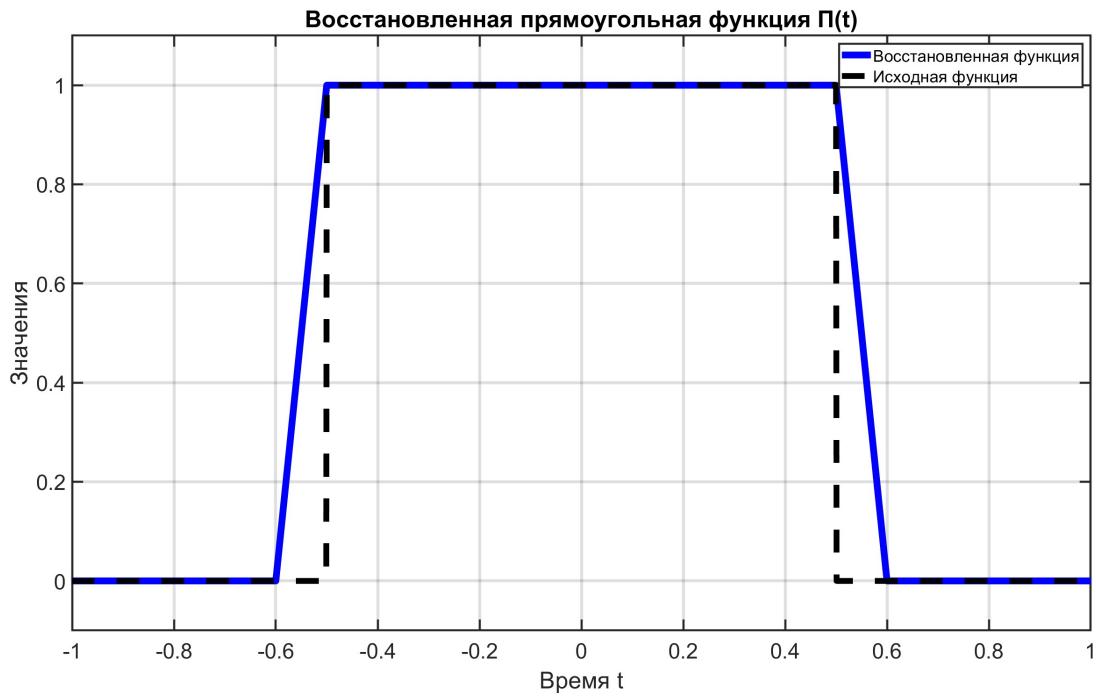


Рис. 21: Восстановление при DFT с  $T = 4$ ,  $\Delta t = 0.1$  (приближение)



Рис. 22: Фурье-образ при DFT с параметрами  $T = 4$ ,  $\Delta t = 0.1$

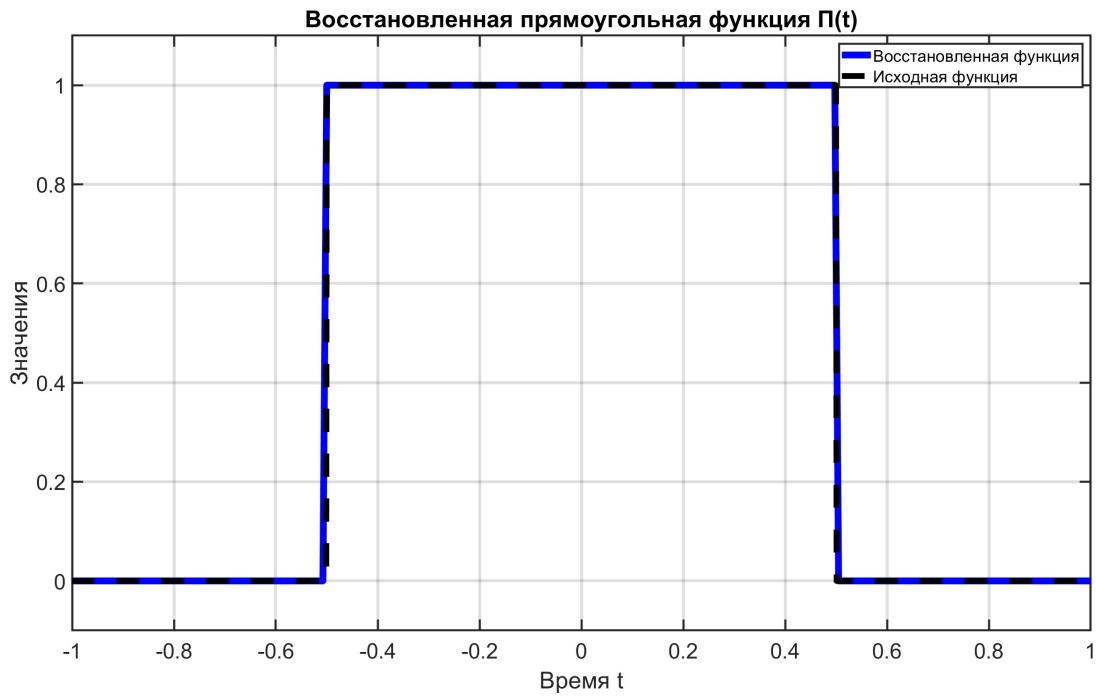


Рис. 23: Восстановление при DFT с  $T = 4$ ,  $\Delta t = 0.0075$  (приближение)

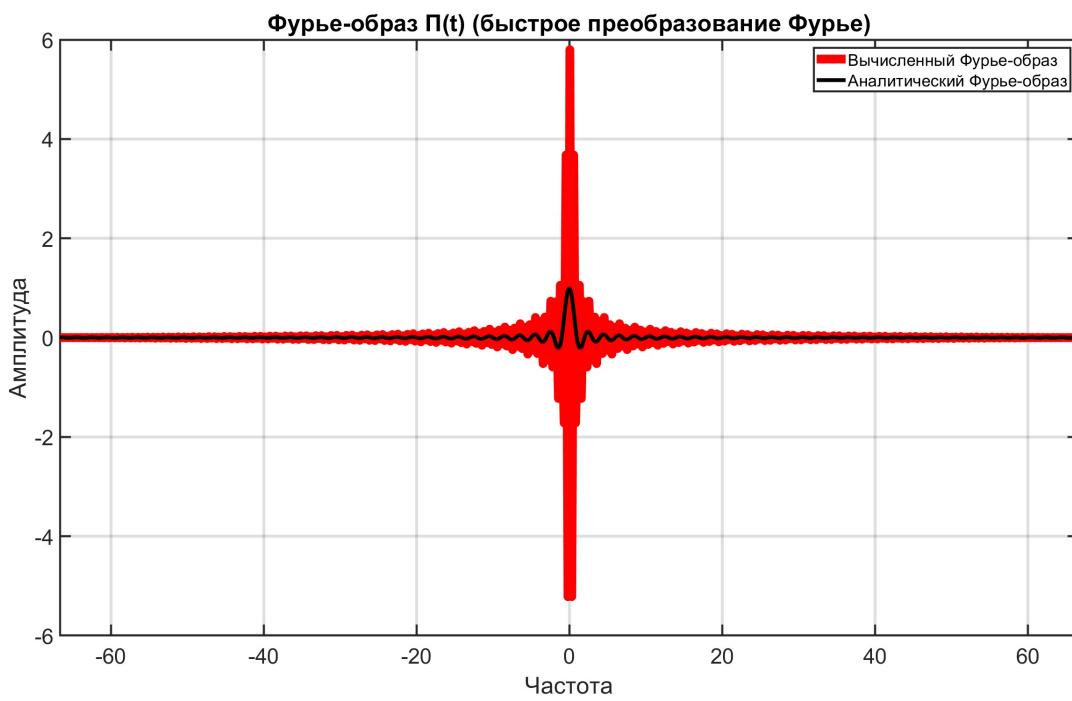
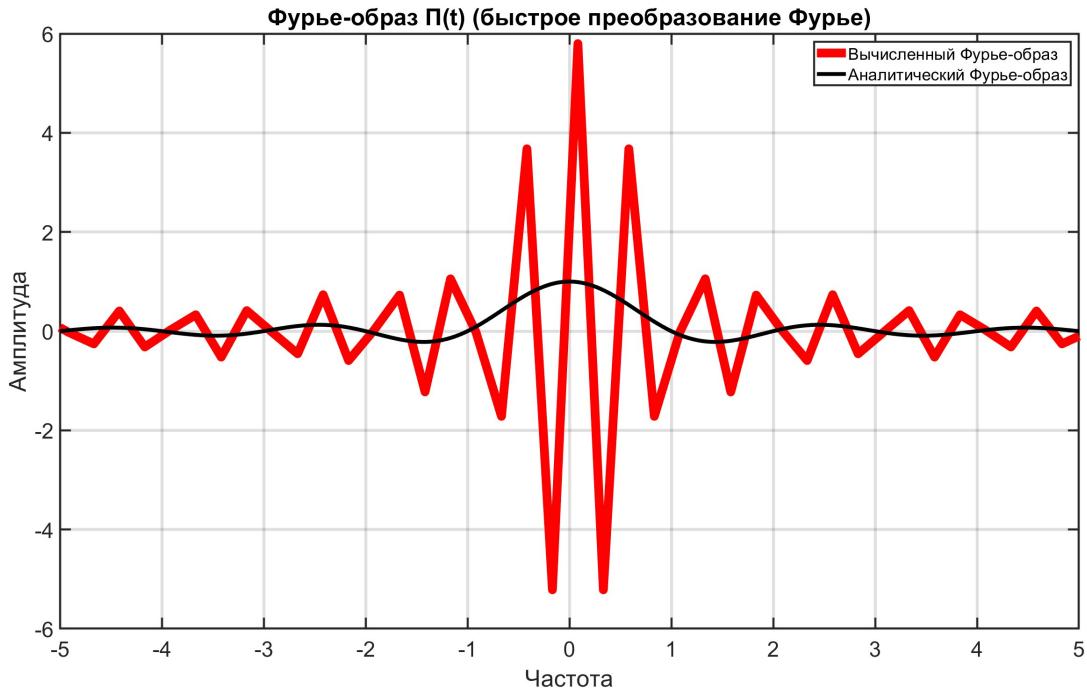


Рис. 24: Фурье-образ при DFT с параметрами  $T = 4$ ,  $\Delta t = 0.0075$



*Рис. 25: Фурье-образ при DFT с параметрами  $T = 4$ ,  $\Delta t = 0.0075$*

Далее изучим роль промежутка по времени  $T$ . Графики при параметре  $T = 3$  ( $\Delta\nu = 0.33$ ) приведены на рисунках 26 и 27, при  $T = 30$  ( $\Delta\nu = 0.033$ ) - на рисунках 28, 29 и 30 ( $\Delta t = 0.05$  в обоих случаях,  $V = 20$ ). Можно видеть, что временная область, в которой задаётся восстанавливаемая функция, при увеличении  $T$  расширяется, однако точность при этом остаётся той же (сравнение рисунков 26 и 29 - они одинаковы). Образ Фурье же становится более частым (так как  $\Delta\nu = 1/T$ ), а его амплитуда снижается.

Таким образом, идеальное восстановление сочетает в себе большие промежутки и маленькие шаги дискретизации по времени и частоте. Пример результатов, когда всё работает чуть ли не идеально, приведён на рисунках 31-34, где были выбраны параметры  $T = 100$ ,  $\Delta t = 0.001$  и соответствующие им  $V = 1000$  и  $\Delta\nu = 0.01$ .

Отдельного внимания заслуживает быстрота метода. В сравнении с численным интегрированием она действительно космическая: теперь на каждом шаге не требуется вычисление громоздкого интеграла, уменьшается цена одной операции. Кроме того, как было

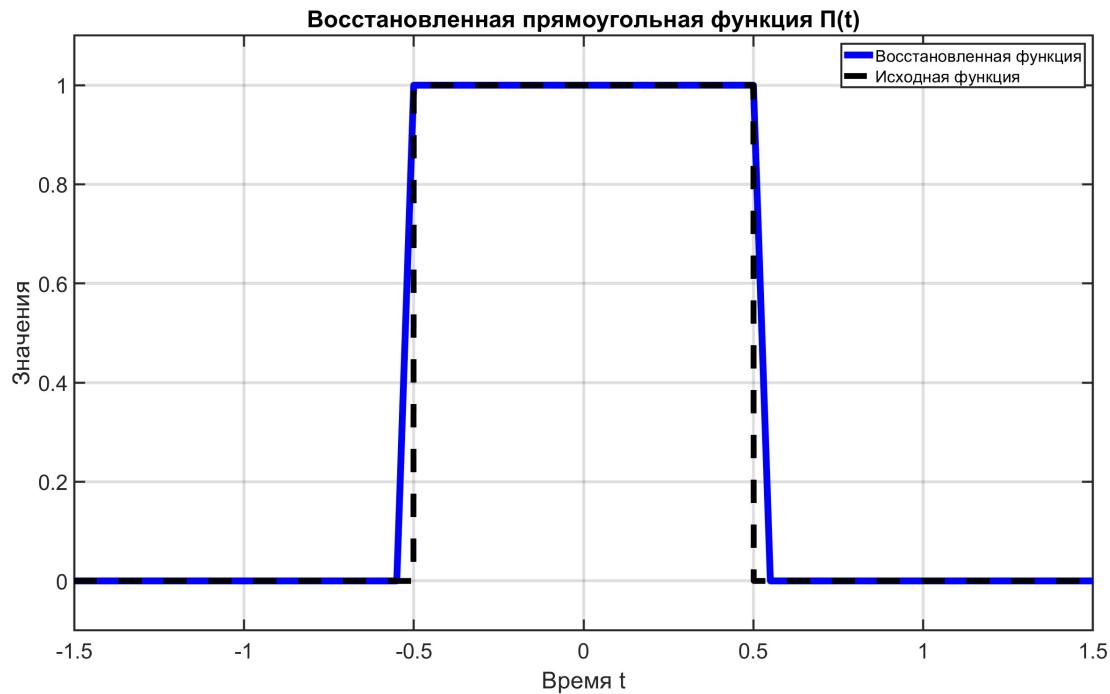


Рис. 26: Восстановление при DFT с параметрами  $T = 3$ ,  $\Delta t = 0.05$

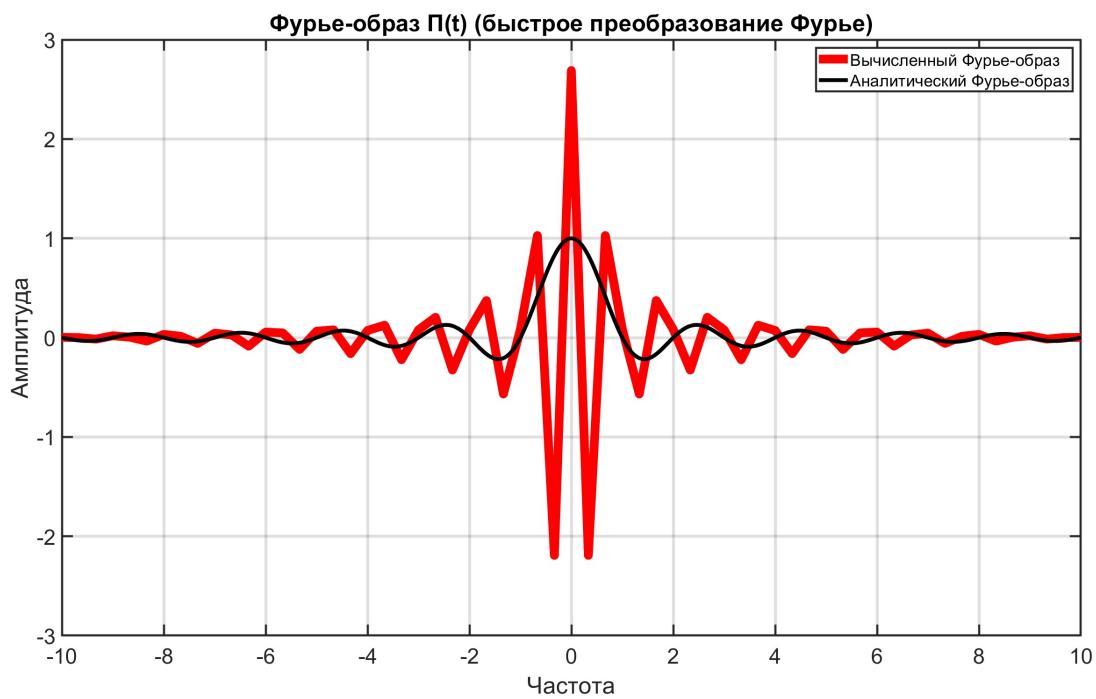


Рис. 27: Фурье-образ при DFT с параметрами  $T = 3$ ,  $\Delta t = 0.05$

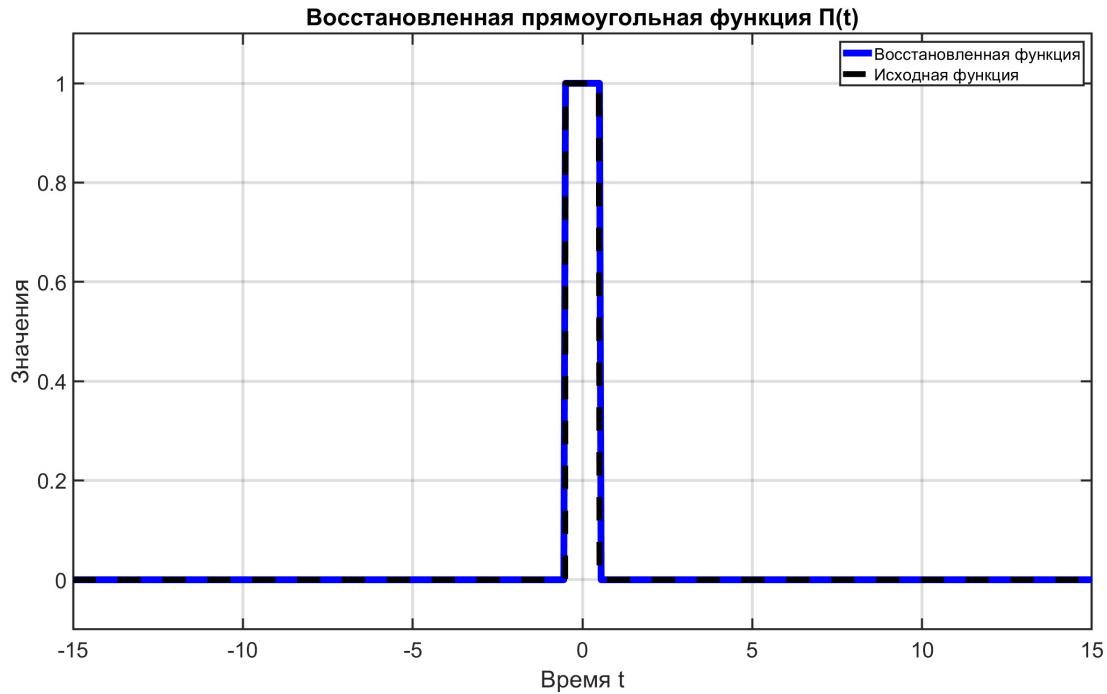
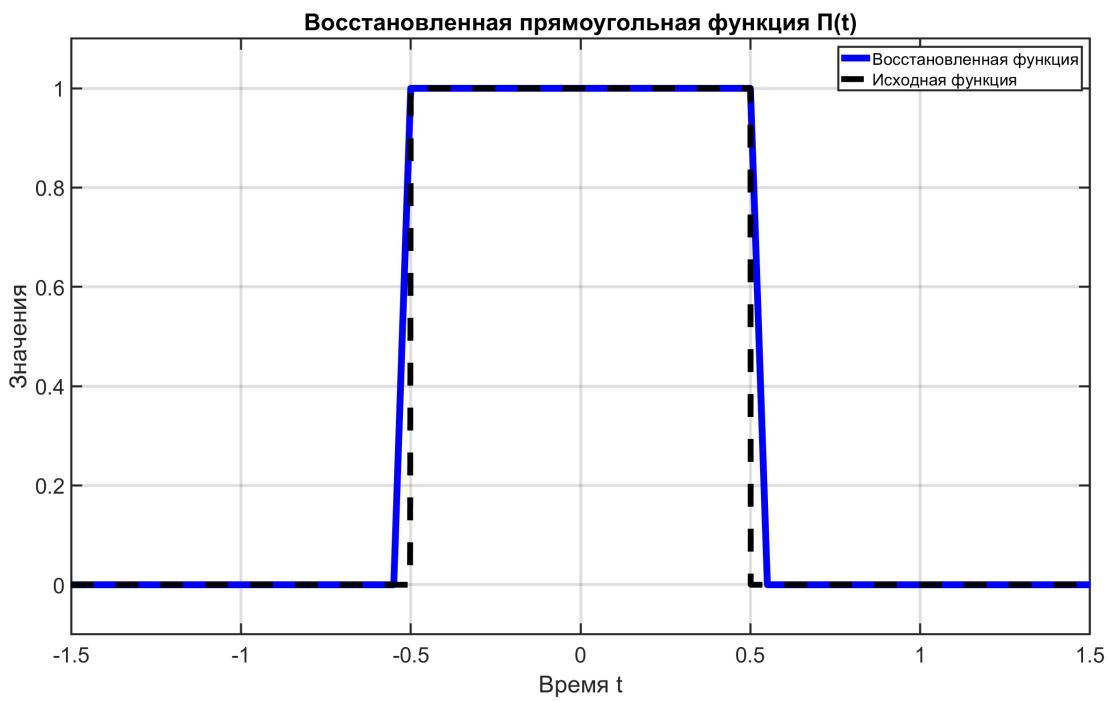
Рис. 28: Восстановление при DFT с параметрами  $T = 30$ ,  $\Delta t = 0.05$ Рис. 29: Восстановление при DFT с  $T = 30$ ,  $\Delta t = 0.05$  (приближение)



Рис. 30: Фурье-образ при DFT с параметрами  $T = 30$ ,  $\Delta t = 0.05$

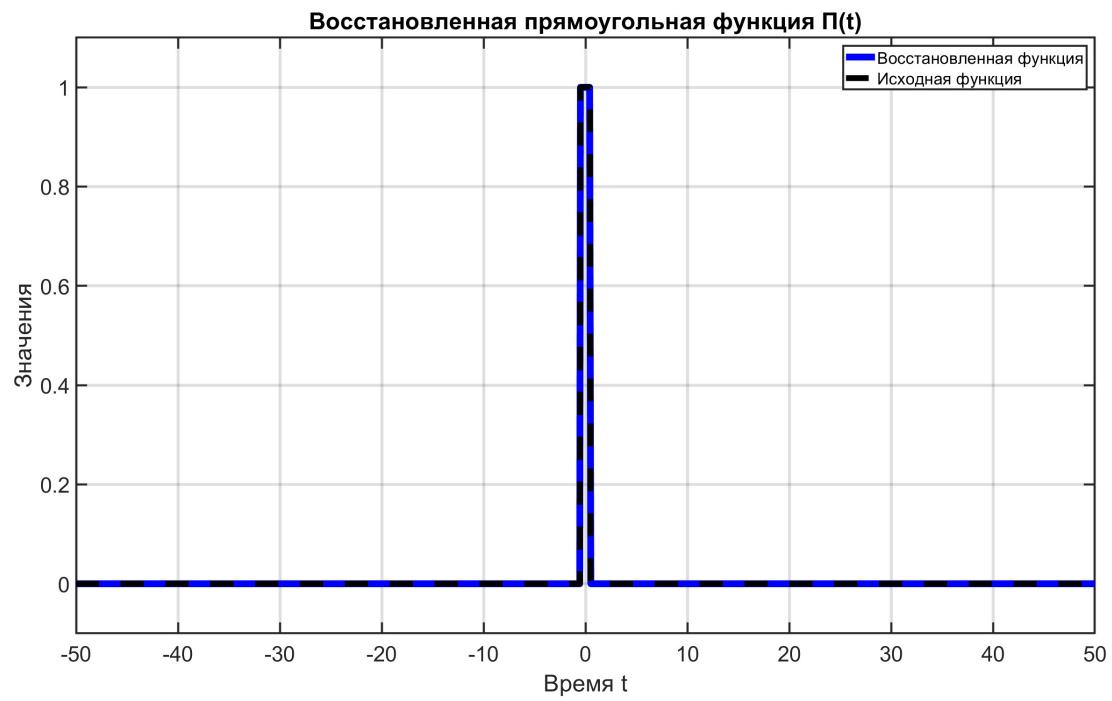


Рис. 31: Восстановление при DFT с параметрами  $T = 100$ ,  $\Delta t = 0.001$

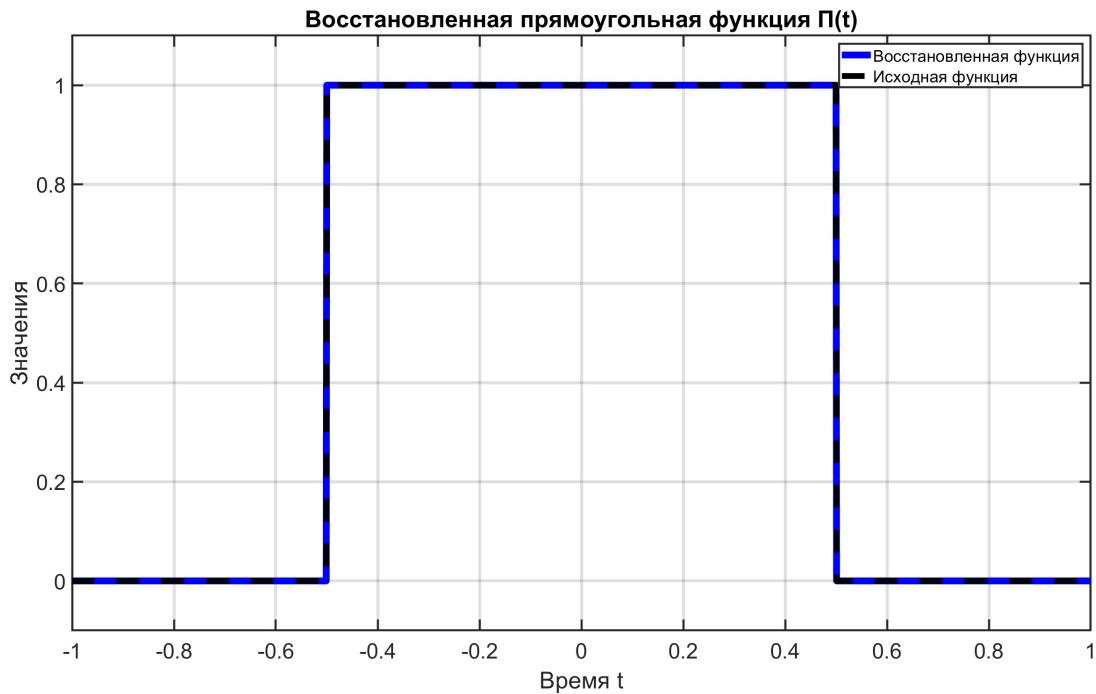


Рис. 32: Восстановление при DFT с  $T = 100$ ,  $\Delta t = 0.001$  (приближение)

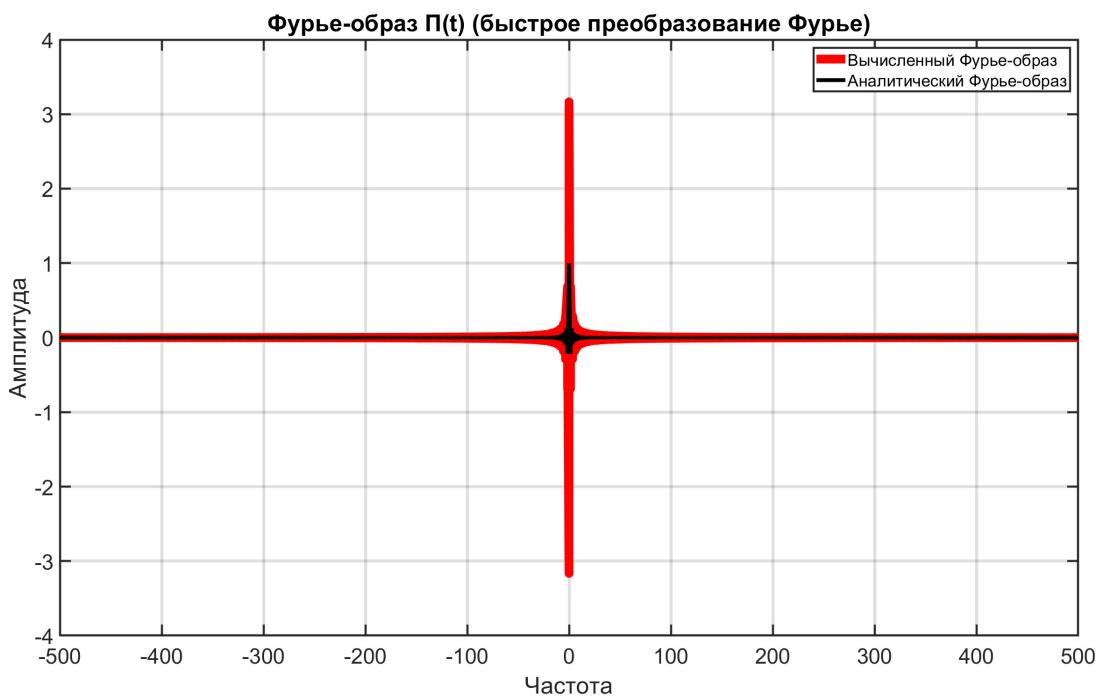


Рис. 33: Фурье-образ при DFT с параметрами  $T = 100$ ,  $\Delta t = 0.001$

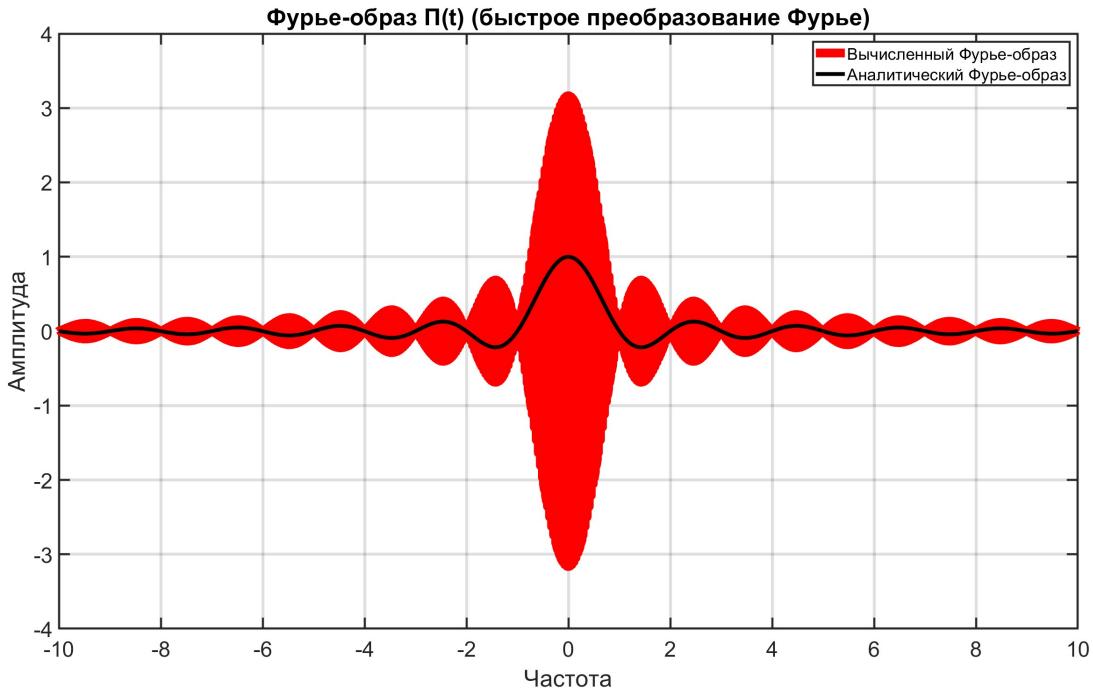


Рис. 34: Фурье-образ при DFT с  $T = 100$ ,  $\Delta t = 0.001$  (приближение)

сказано, БПФ само по себе сокращает число операций, так что мы выигрываем вдвое.

К тому же дискретное преобразование является более точным при восстановлении, так как мы работаем не с самой функцией, пытаясь приблизить её «вращениями», то есть чем-то непрерывным (что нас сильно сковывает, так как мы не способны корректно передать тот же разрыв), а с отдельными точками, которые мы можем восстанавливать напрямую (и зачастую более точно), поэтому даже когда, например, имеются скачки, мы задаём их более лучшим образом, отчасти потому что они даже не воспринимаются таковыми.

Однако быстрое преобразование всё ещё даёт серьёзные различия в образах (как было сказано, численное интегрирование при работе как раз стремится приблизить истинный Фурье-образ, заданный через интегралы, от этого у метода и выходит похоже, тогда как дискретное преобразование выдаёт абсолютно другой по своей сущности объект, который даже и не стремится что-либо приближать), что может быть важно. Посмотрим, можно ли это как-то исправить.

### 1.3 Приближение непрерывного с помощью DFT

Давайте попробуем соединить преимущества обоих методов: точность численного интегрирования в частотной области и быстродействие и четкость при восстановлении исходной функции быстрого преобразования Фурье. Для этого используем fft для приближения значений интеграла через суммы Римана

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi i \nu t} dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{-2\pi i \nu t_n} \Delta t,$$

где  $t_n = -\frac{T}{2} + n\Delta t$ ,  $\Delta t = \frac{T}{N}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Заметим, что дискретное преобразование имеет вид

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i \frac{nm}{N}}, m = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Теперь положим  $\nu_m = \frac{m}{T} = \frac{m}{N\Delta t}$ ,  $t_n = -\frac{T}{2} + n\Delta t$ . Откуда

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu_m) &\approx \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i \nu_m t_n} \Delta t = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i \frac{m}{N\Delta t} (n\Delta t - \frac{T}{2})} = \\ &= \Delta t \cdot e^{\pi i m} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i \frac{nm}{N}} = \Delta t \cdot e^{\pi i m} F_m = (-1)^m \Delta t F_m = c_m F_m. \end{aligned}$$

Выходит, мы ввели некоторые замены и свели нижние суммы Римана, которыми мы приближаем заданное непрерывное преобразование Фурье (так как ещё с математического анализа известно, что при бесконечно малом шаге они задают интегралы), к дискретному (DFT) с некоторым коэффициентом  $c_m$ . Из этих выкладок также следует, что при  $\Delta t \rightarrow 0$  значение полученного метода в точке  $\nu_m$  будет всё ближе идти к своему истинному,  $\hat{f}(\nu_m)$ :

$$c_m F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i \nu_m t_n} \Delta t \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi i \nu_m t} dt = \hat{f}(\nu_m)$$

Новый метод с введенными коэффициентами  $c_m = (-1)^m \Delta t$  проводит масштабирование получаемых от DFT значений на постоянную  $\Delta t$ , а также устраняет уже упомянутые «дерганья» от плюса к минусу образа дискретного преобразования. Итоговая работа происходит по схеме

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\} &\rightarrow \text{fftshift}(c.*\text{fft}(f)), \\ \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\} &\rightarrow \text{ifft}(\text{ifftshift}(\text{hatf})./\text{c}).\end{aligned}$$

Графики при параметрах  $T = 4$ ,  $dt = 0.05$  и соответствующих им  $V = 1/dt = 20$  и  $\Delta\nu = 1/T = 0.25$  изображены на рисунках 35 и 36. Точность метода при восстановлении функции по времени остаётся той же, что была и у DFT (из схемы выше ясно, что все изменения были внесены только в представление функций в частотной области, по сути же мы используем тот же метод БПФ, что и был до этого, ведь все введённые домножения на коэффициенты  $c_m$ , которые лишь проводят некоторую знакопеременную нормировку, снимаются последующим делением, а значит, при обратном преобразовании с помощью iift берётся тот же образ, что и при дискретном случае), а вот у Фурье-образа заметны серьёзные улучшения: хоть всё ещё и видны отличия от аналитической функции (однако это зависит уже от промежутка по времени и шага дискретизации), но метод сгладил те неровности, которые существовали до этого, - пропала знакопеременность, исчезли различия по амплитудам.

Что ж, пора провести небольшие исследования. Восстановленная функция и образ Фурье при параметре  $\Delta t = 0.1$  ( $V = 10$ ) приведены на рисунках 37 и 38, при  $\Delta t = 0.01$  ( $V = 100$ ) - на рисунках 39 и 40 ( $T = 2$  и  $\Delta\nu = 0.5$  в обоих случаях). Мелкость шага по прежнему уплотняет временную область, за счёт чего функции становятся более близкими к своим непрерывным (верным) аналогам. В частотной области уменьшение  $\Delta t$ , как и в случае с непрерывным преобразованием Фурье, расширяет отрезок, в котором хорошо вычисляются амплитудные значения (сравнение рисунков 38 и 41; так как при стремлении шага дискретизации к 0, как мы выяснили, суммы Римана, которые и считаются, идут к истинным значениям интегралов), рассматриваемая  $V = 1/\Delta t$  при этом увеличивается.

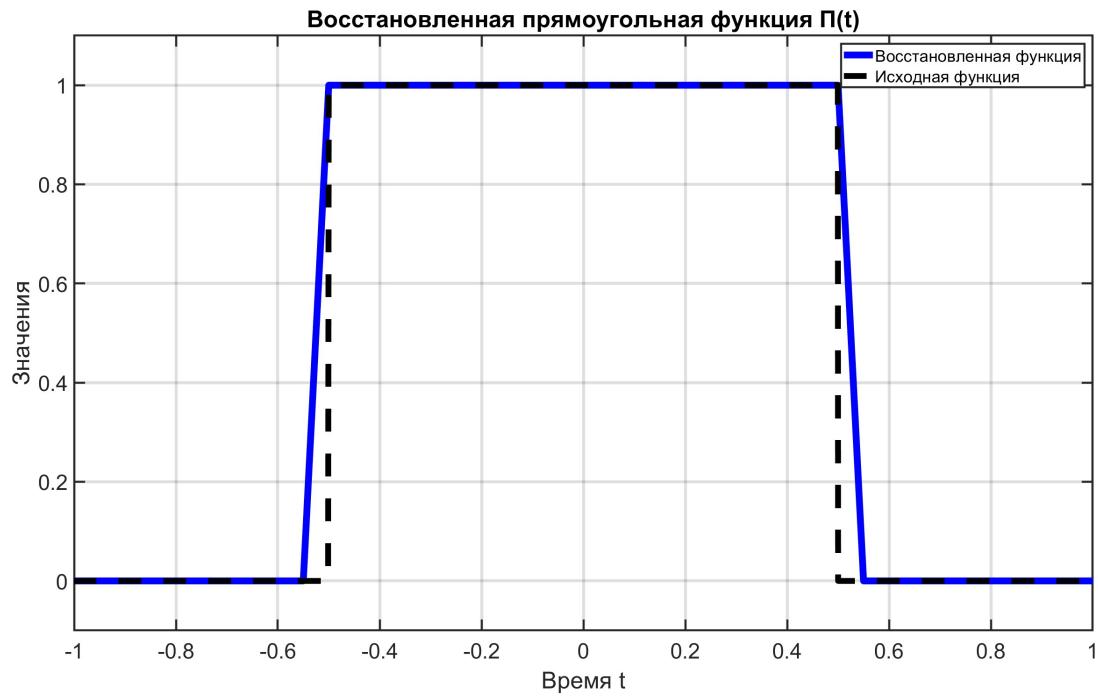


Рис. 35: Восстановление улучшенным DFT с  $T = 4$ ,  $\Delta t = 0.05$  (приближение)



Рис. 36: Фурье-образ при улучшенном DFT с  $T = 4$ ,  $\Delta t = 0.05$

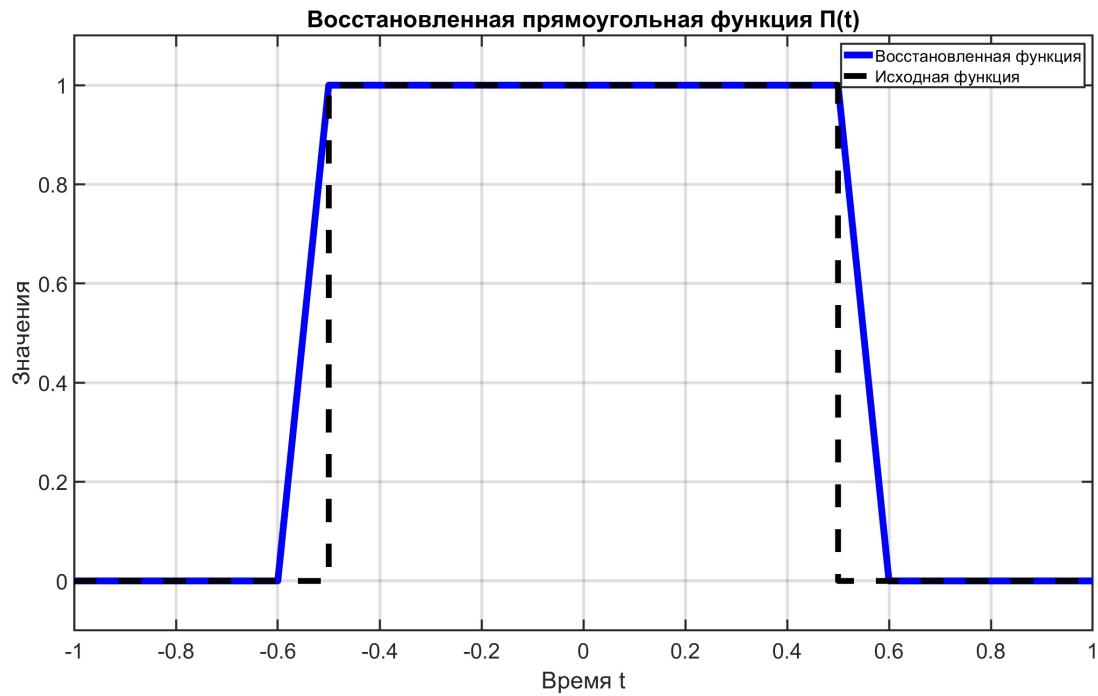


Рис. 37: Восстановление при улучшенном DFT с  $T = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$

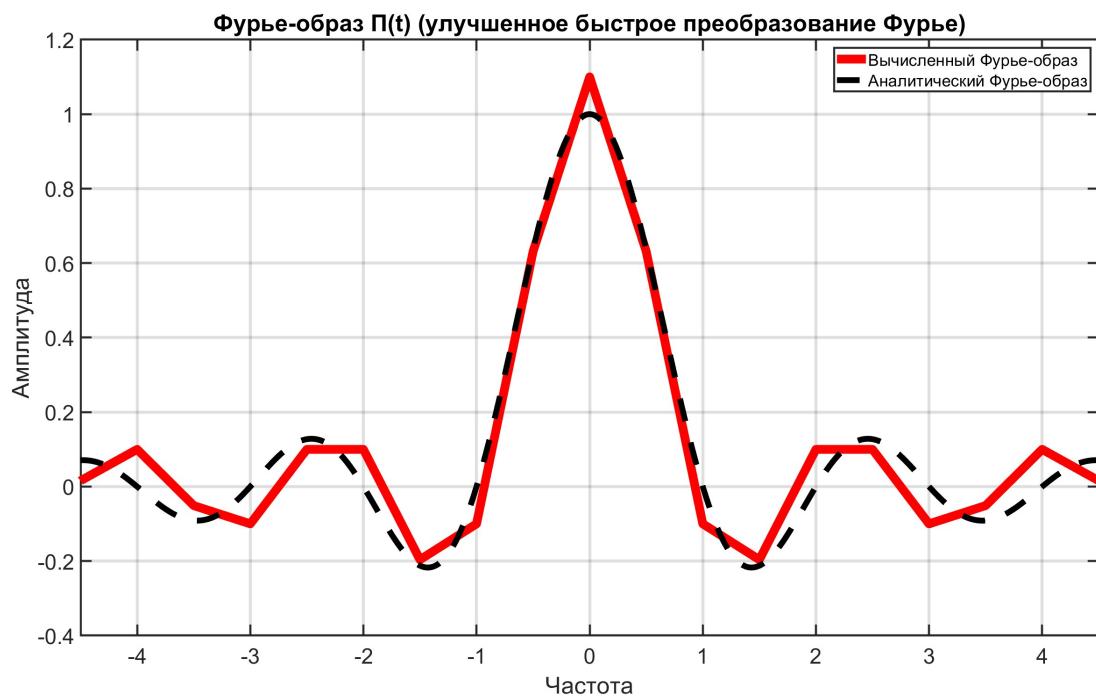


Рис. 38: Фурье-образ при улучшенном DFT с  $T = 2$ ,  $\Delta t = 0.1$

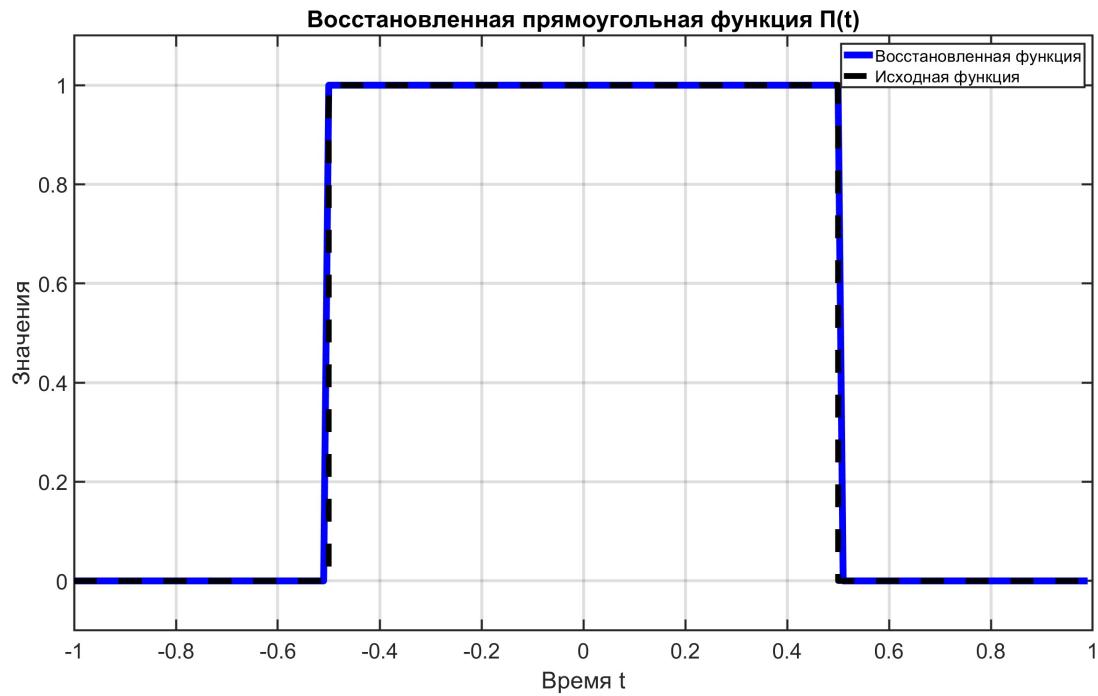


Рис. 39: Восстановление при улучшенном DFT с  $T = 2$ ,  $\Delta t = 0.01$

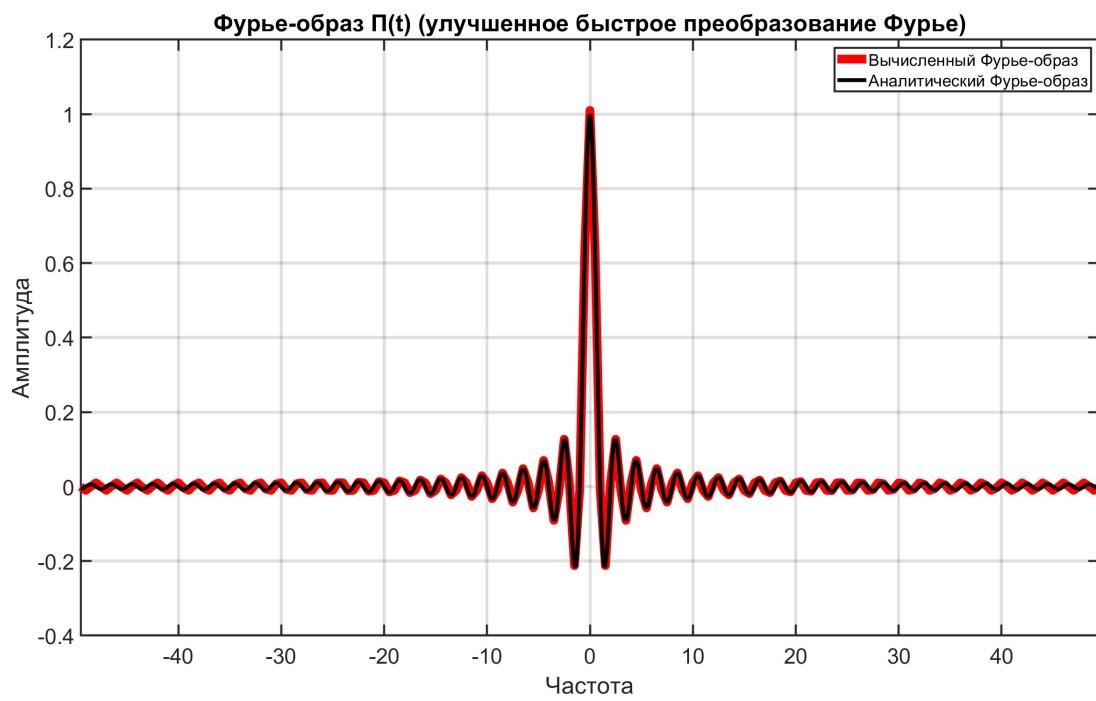


Рис. 40: Фурье-образ при улучшенном DFT с  $T = 2$ ,  $\Delta t = 0.01$

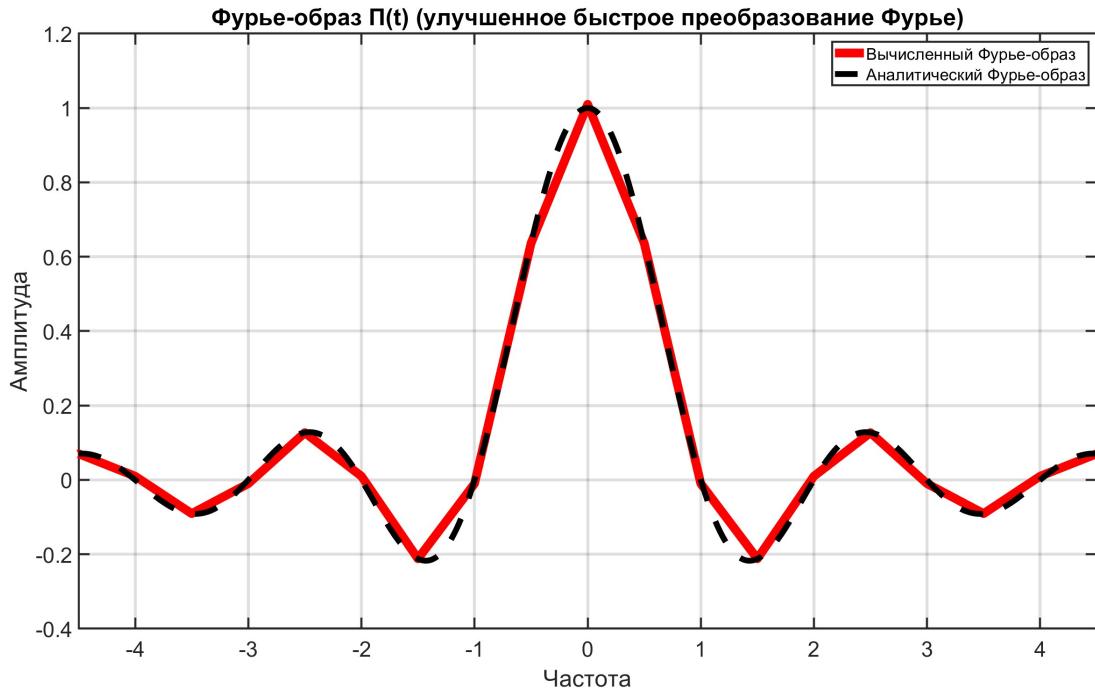


Рис. 41: Фурье-образ при улучшенном DFT с  $T = 2$ ,  $\Delta t = 0.01$  (приближение)

Рассмотрим теперь реакцию на изменение параметра промежутка времени  $T$ . Графики при значениях  $T = 3$  изображены на рисунках 42 и 43, при  $T = 30$  по времени - на рисунках 44, 45 и 46. Как можно видеть, рассматриваемый промежуток по времени прямо связан с гладкостью Фурье-образа (а значит, увеличение одного даёт другое), так как  $\Delta\nu = 1/T$ . При этом изменение  $T$  практически не сказывается на качестве восстановления, кроме расширения временного отрезка, - если не поднять  $\Delta t$ , то область по прежнему останется разреженной и не удастся добиться должного качества восстановления, функции не придут к своему непрерывному виду на конкретном промежутке.

Из всего сказанного можно сделать вывод - идеальная работа метода включает в себя расширение временного отрезка до необходимого уровня за счёт увеличения  $T$ , а также кратное деление шага времени до позволимой нормы (по времени и памяти). При  $T = 100$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $V = 1000$  и  $\Delta\nu = 0.01$  достигается весомая точность как в Фурье-образе, так и в восстановленной функции. На рисунках 47,

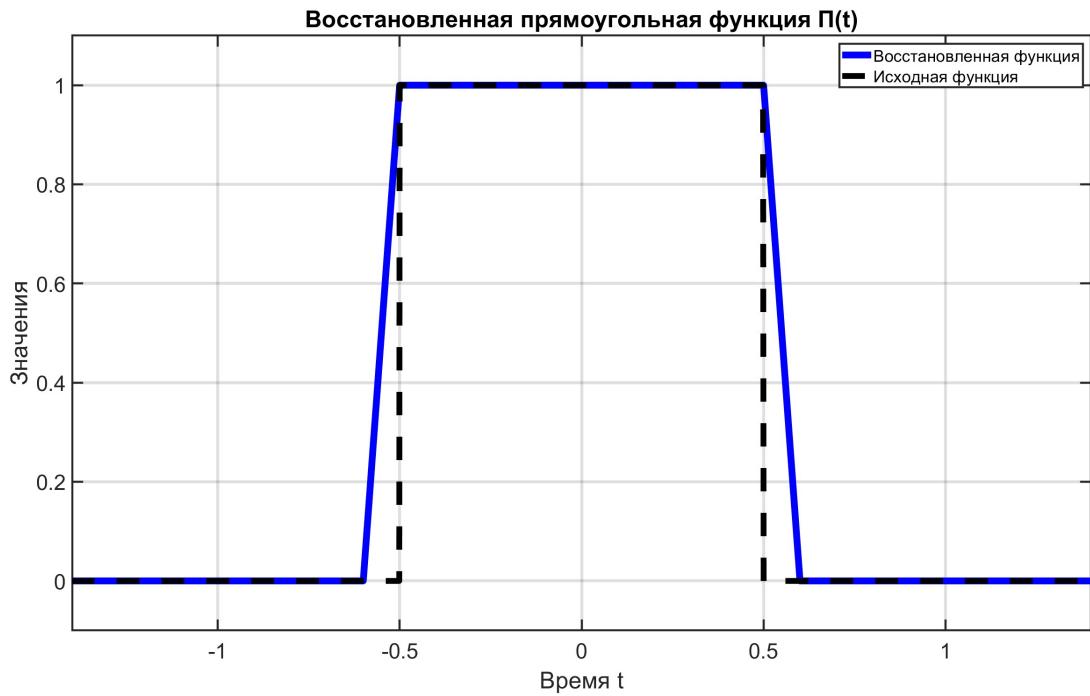


Рис. 42: Восстановление при улучшенном DFT с  $T = 3$ ,  $\Delta t = 0.1$

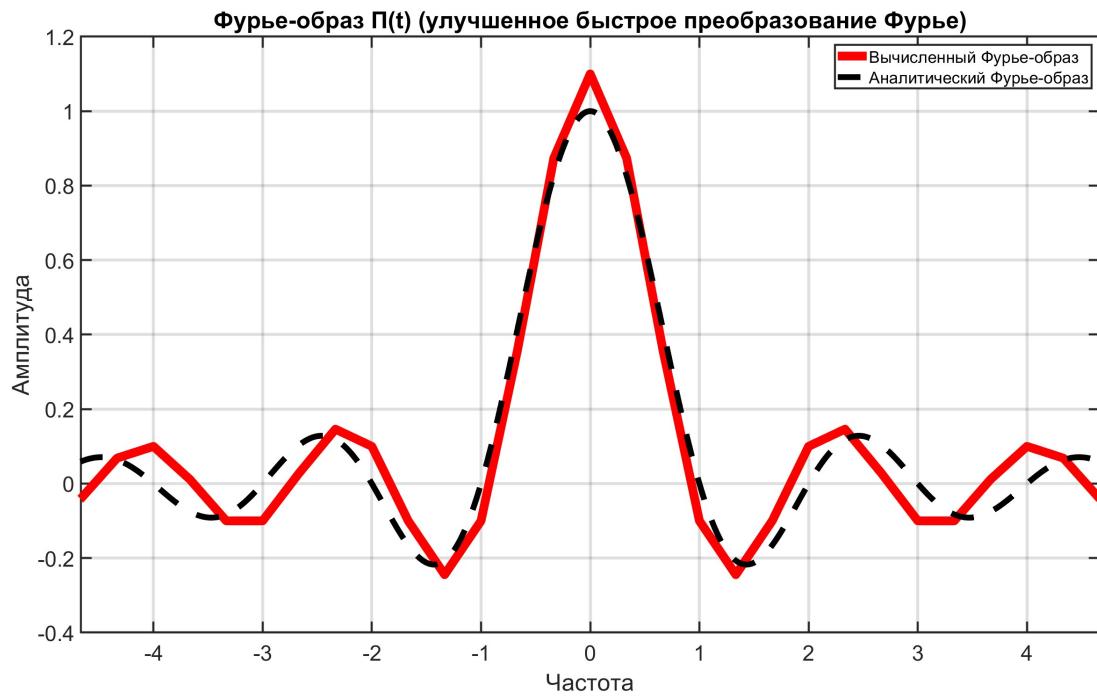
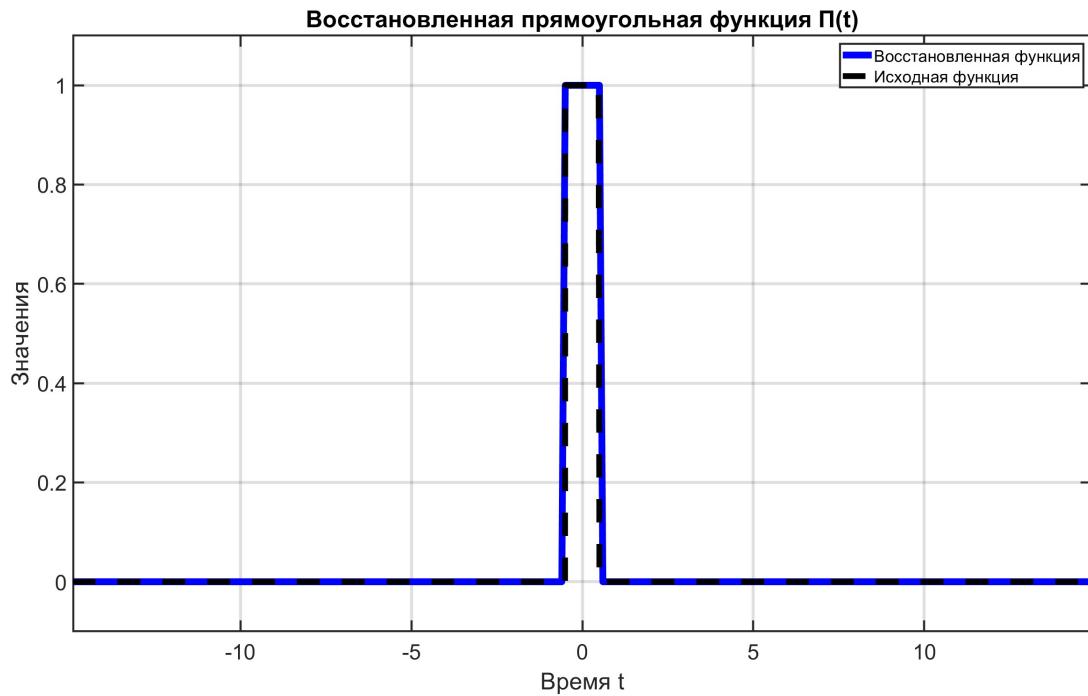
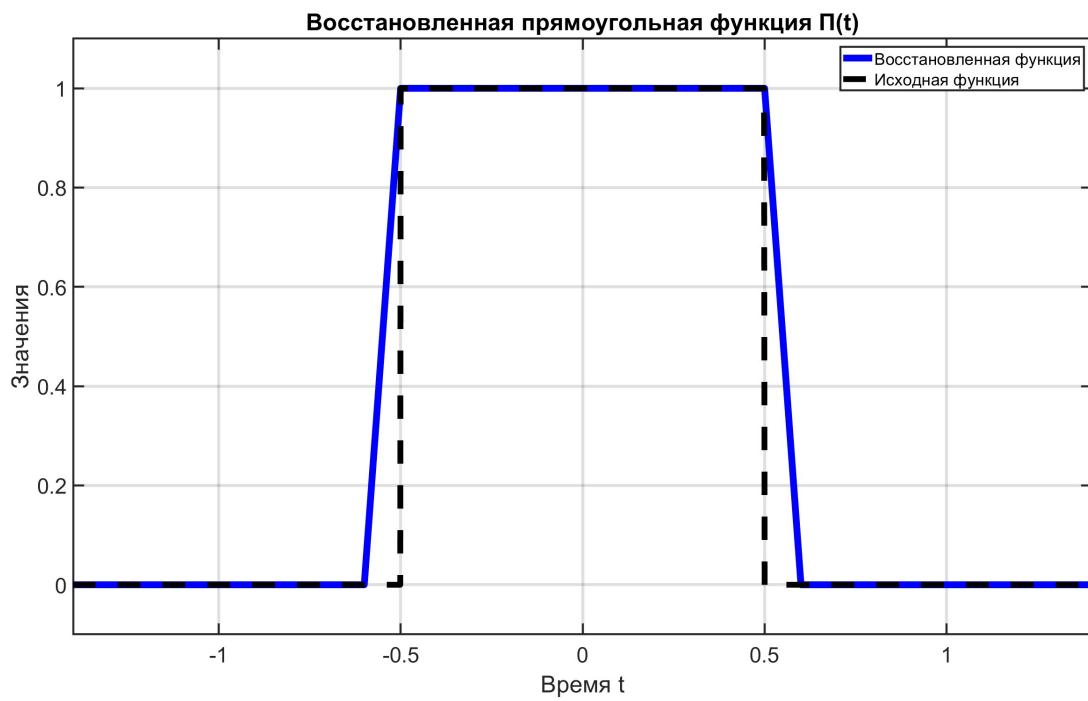
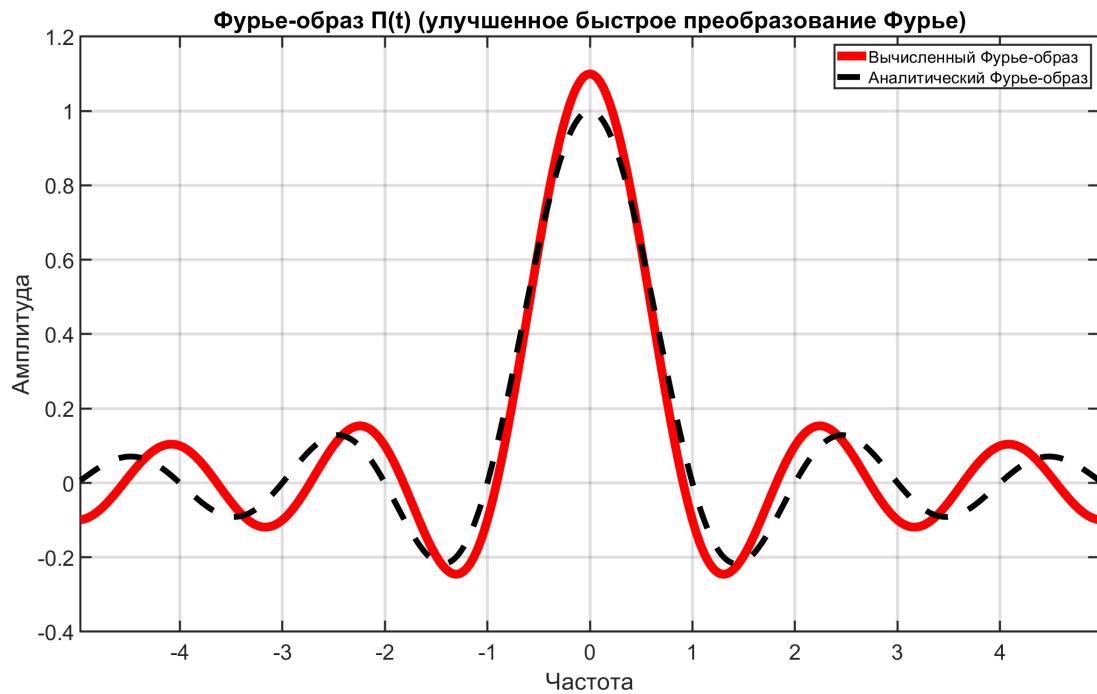


Рис. 43: Фурье-образ при улучшенном DFT с  $T = 3$ ,  $\Delta t = 0.1$

Рис. 44: Восстановление при улучшенном DFT с  $T = 30$ ,  $\Delta t = 0.1$ Рис. 45:  $\Pi(t)$  при улучшенном DFT с  $T = 30$ ,  $\Delta t = 0.1$  (приближение)

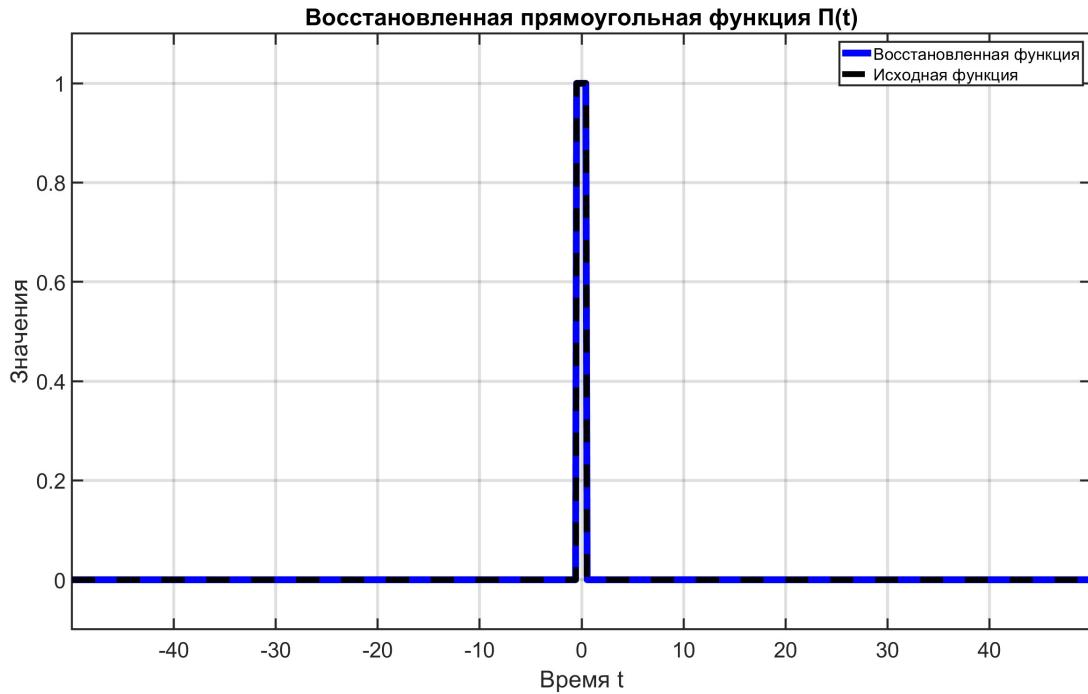
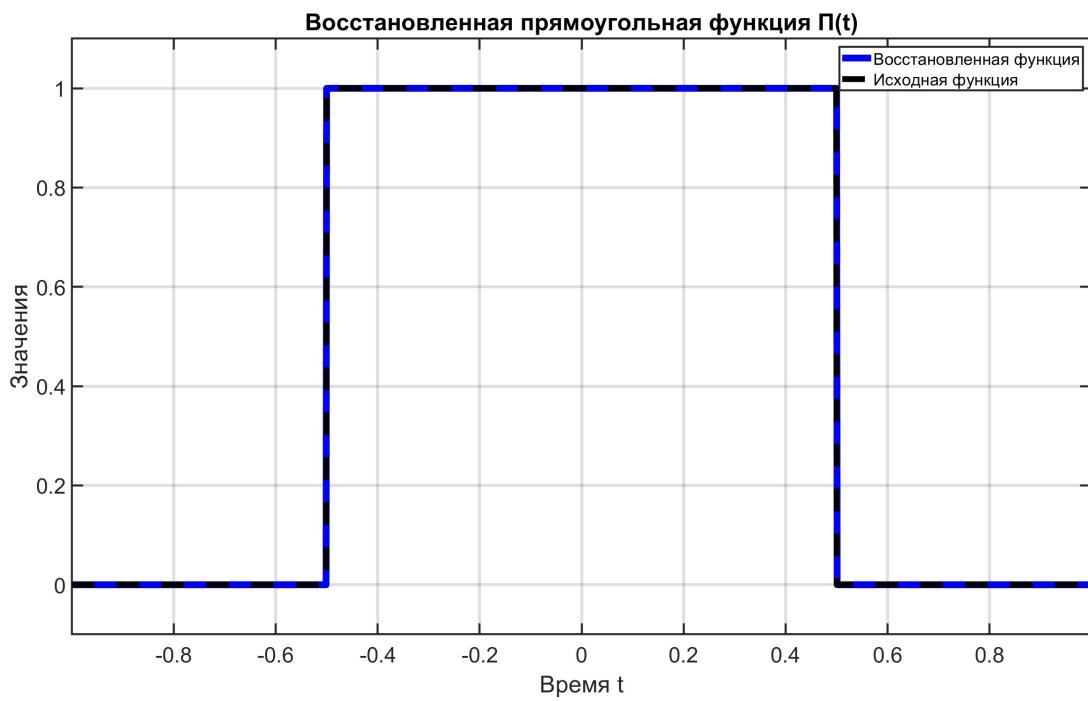


*Rис. 46: Фурье-образ при улучшенном DFT с  $T = 30$ ,  $\Delta t = 0.1$*

48 показаны графики во временной области, на рисунках 49, 50 - в частотной (всё при указанных выше параметрах).

Сравним новый метод с предыдущими. Как уже было сказано, улучшенное fft всегда выигрывает в точности у обычного в приближении истинного образа Фурье, так как последний даже не пытается что-либо приближать, при этом остаётся та же точность по времени, опять-таки потому что все внесенные в новый метод изменения относятся только к частотной области.

Однако с численным интегрированием возникают серьёзные различия: новый метод проигрывает в точности Фурье-образов при плохой дискретизации (малых  $\Delta t$  и  $T$ ), ведь trapz использует трапецеидальное приближение значений интегралов, которое (известно из лабораторных по математическому анализу) даёт погрешность порядка  $O(h^2)$ , тогда как суммы Римана, которые мы и используем в улучшенном fft для приближения значений по частотам, даёт погрешности порядка  $O(h)$ ,  $h = \Delta\nu$  - шаг интегрирования. В восстановлении функции же дискретное преобразование явно выигрывает.

Рис. 47: Восстановление при улучшенном DFT с  $T = 100$ ,  $\Delta t = 0.001$ Рис. 48:  $\Pi(t)$  при улучшенном DFT с  $T = 100$ ,  $\Delta t = 0.001$  (приближение)

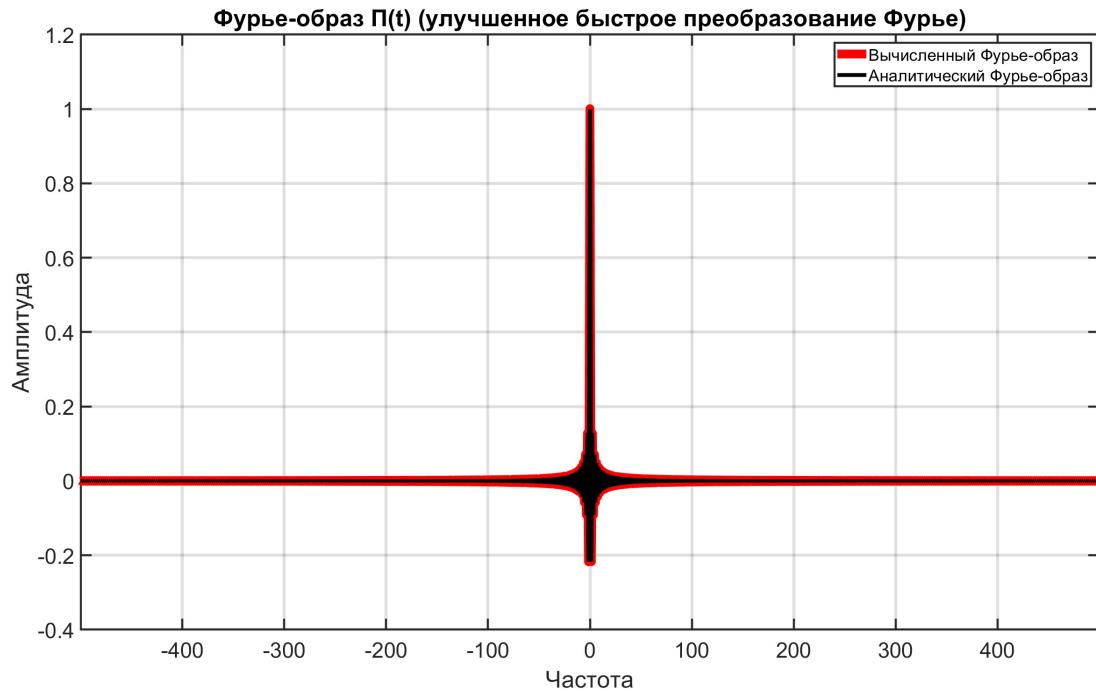


Рис. 49: Фурье-образ при улучшенном DFT с  $T = 100$ ,  $\Delta t = 0.001$



Рис. 50: Фурье-образ с улучшенным DFT и  $T = 100$ ,  $\Delta t = 0.001$  (приближение)

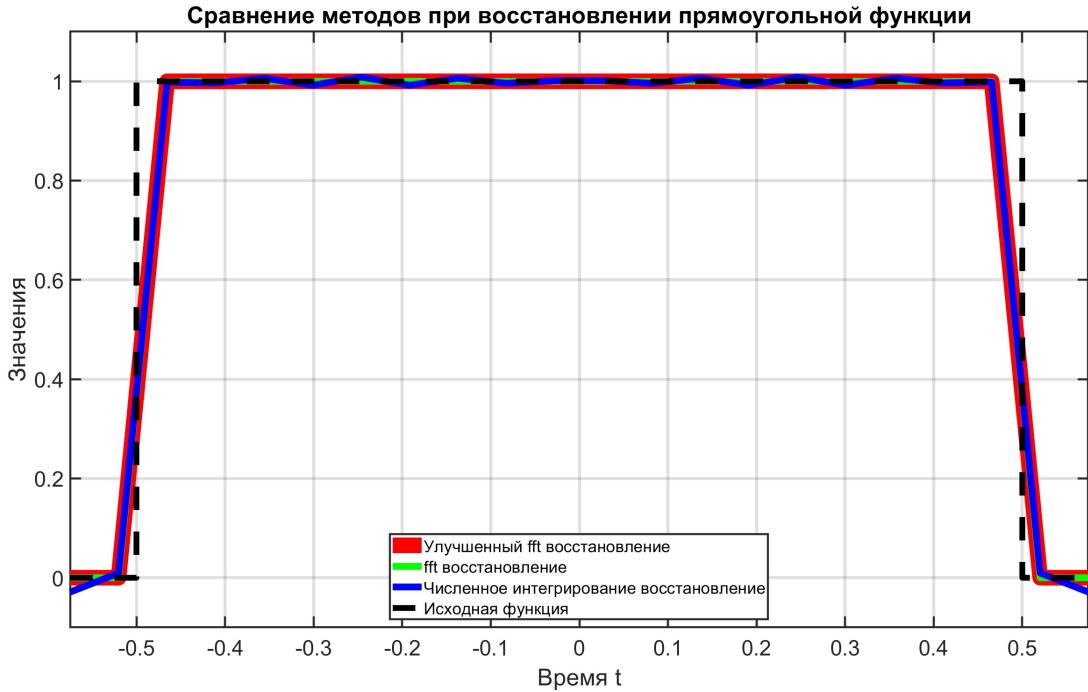
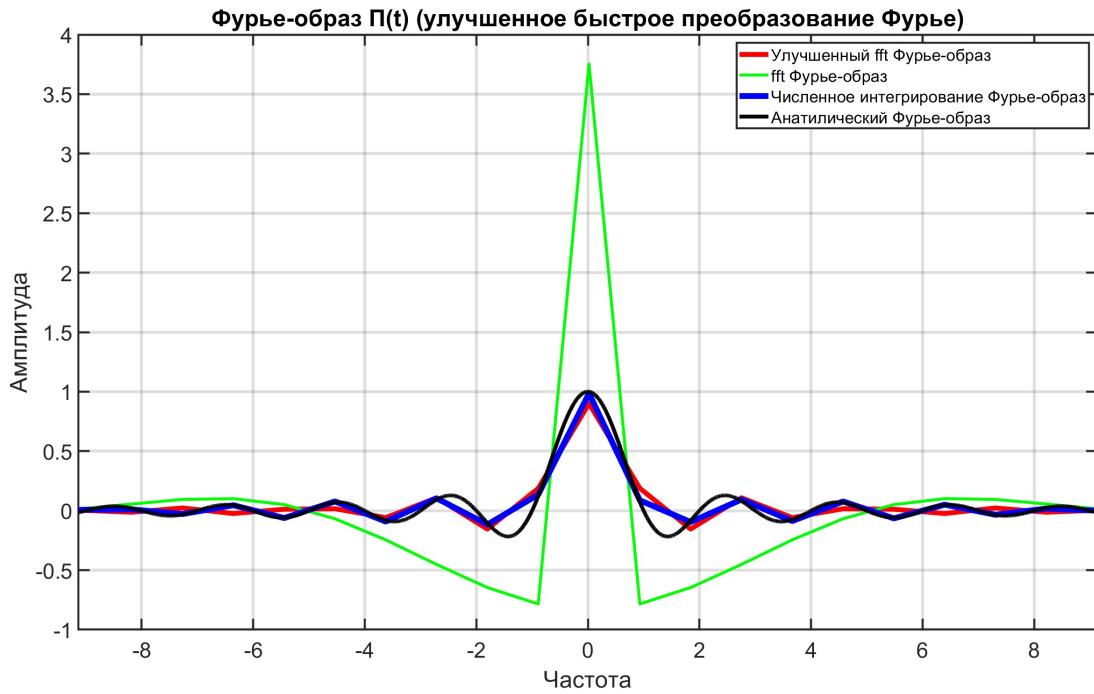
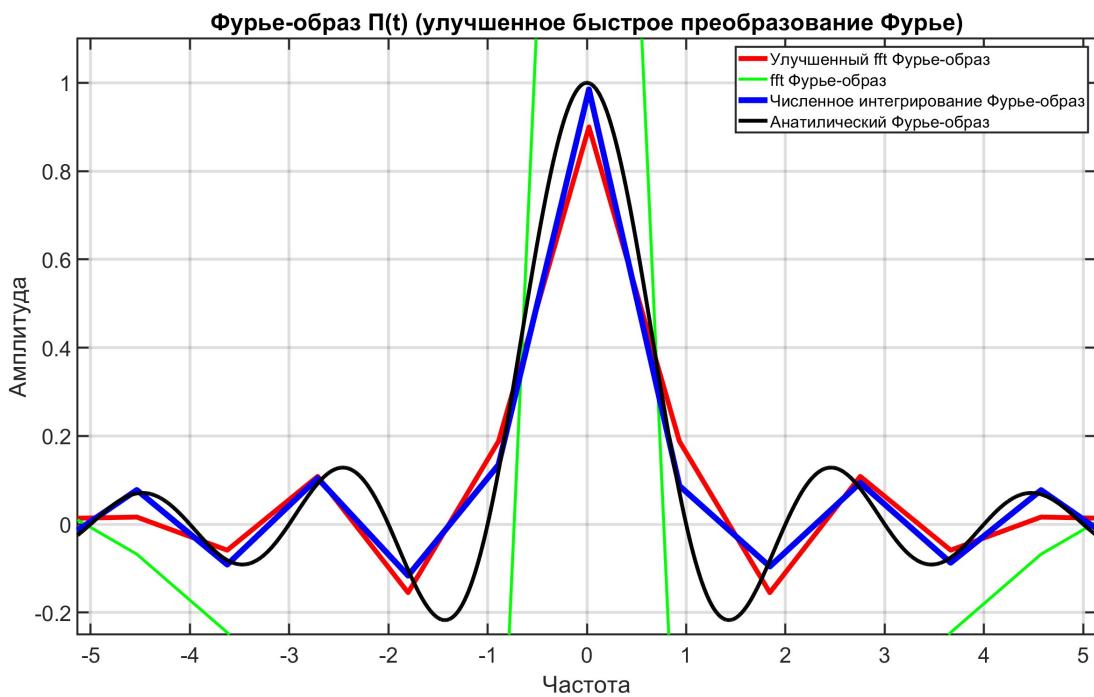


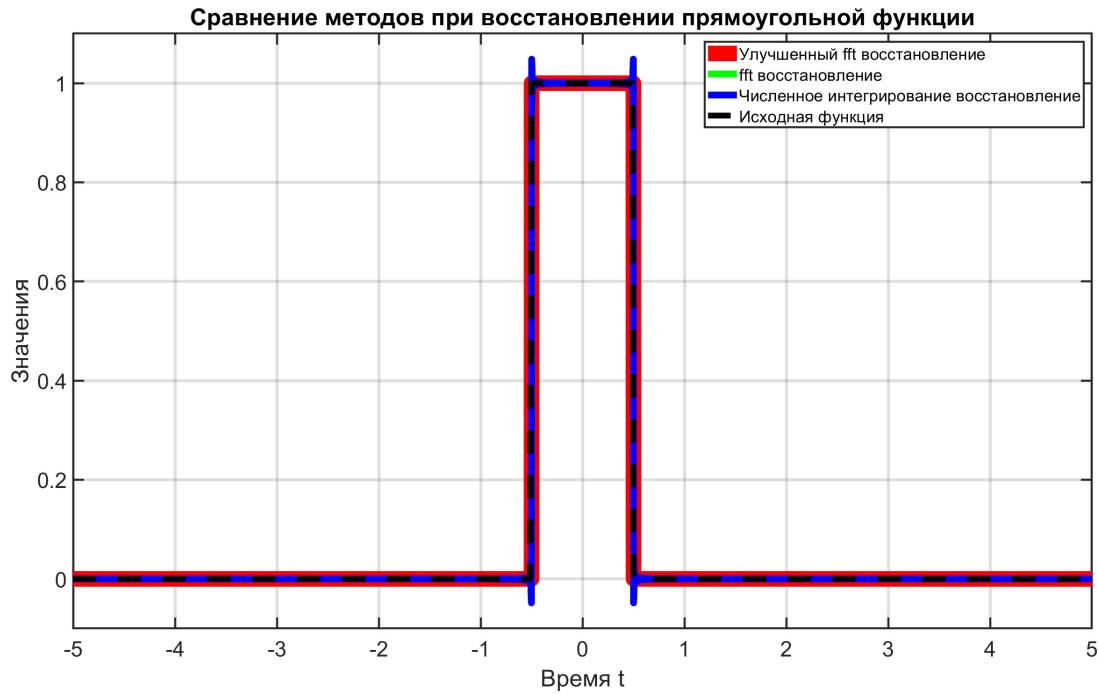
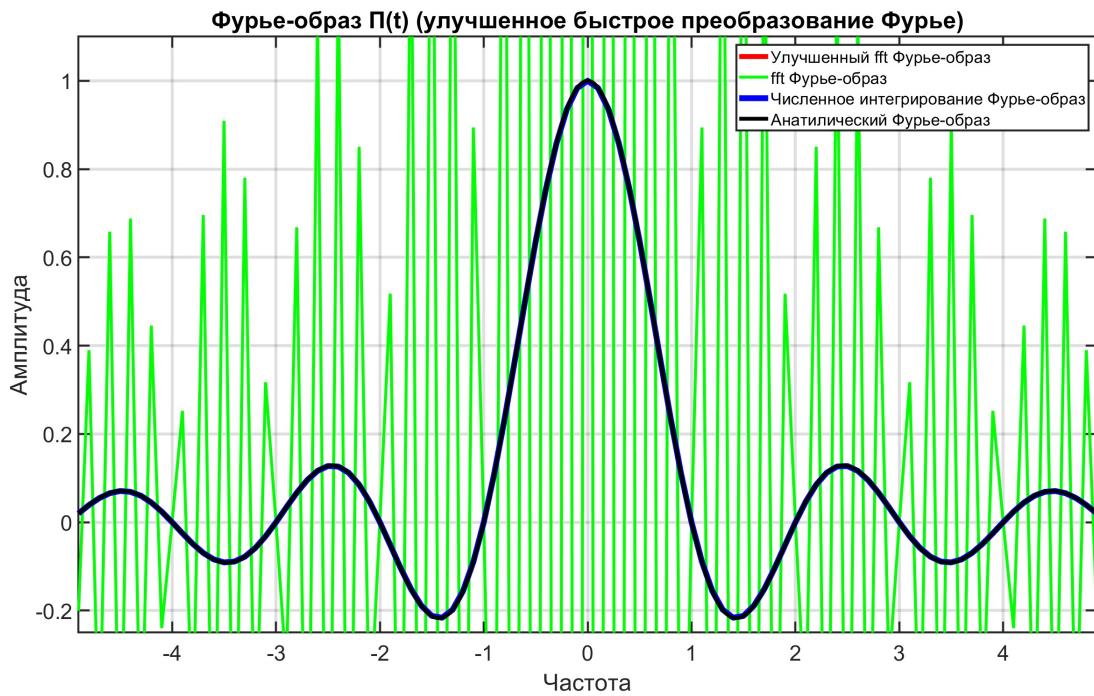
Рис. 51: Сравнение методов во временной области с  $T = 1.15$ ,  $\Delta t = 0.05$

Все слова выше про сравнения методов подтверждают и графики, представленные с параметрами  $T = 1.15$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $V = 20$  и  $\Delta\nu \approx 0.87$  на рисунках 51, 52 и 53, а с  $T = 10$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $V = 1000$  и  $\Delta\nu = 0.1$  - на рисунках 54 и 55. В первом случае плохая дискретизация, и метод численного интегрирования даёт более близкие значения образов Фурье (его общая сумма ошибок  $\approx 0.21$ , у улучшенного fft -  $\approx 0.8$ ), но при лучшей ситуации (при меньшем  $\Delta t$ ) всё уже примерно равно, новый метод даёт очень точные значения.

Улучшенное fft также чуть менее быстрое относительно обычного быстрого преобразования Фурье, так как теперь необходимо считать и совершать операции с коэффициентами  $c_m$ , однако всё ещё молниеносно обрабатывает данные в сравнении с методом численного интегрирования, ведь использует все те же ускорения fft.

Важно отметить и то, что БПФ при исследовании гармоник будет давать те же результаты (причем за скорое время), что и методы выше, так как в этом случае Фурье-образ - набор дельта-функций, локализованных в определённых точках, соответственно, нет смысла

Рис. 52: Сравнение методов в частотной области с  $T = 1.15$ ,  $\Delta t = 0.05$ Рис. 53: Сравнение Фурье-образов с  $T = 1.15$ ,  $\Delta t = 0.05$  (приближение)

Рис. 54: Сравнение методов во временной области с  $T = 10$ ,  $\Delta t = 0.001$ Рис. 55: Сравнение Фурье-образов с  $T = 10$ ,  $\Delta t = 0.001$  (приближение)

ла в нормиках (бесконечно большие значения в теории), а также в исследованиях на всём промежутке.

Таким образом, мы получили метод получения Фурье-образа и восстановления исходной функции, работающий очень быстро и дающий точные результаты при больших  $T$ , увеличивающих, кроме рассматриваемого промежутка по времени, ещё и гладкость образа, и малых  $\Delta t$ , делающих представление дискретизированного сигнала схожим с непрерывным и расширяющими частотную область, в которой все значения амплитуд вычисляются более точно.

## 2 Сэмплирование

Попробуем изученную на лекциях теорему Найквиста-Шеннона-Котельникова для восстановления непрерывного сигнала по его дискретизации в действии. Для этого зададимся параметрами  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0.5$ ,  $w_1 = 10\pi = 2\pi \cdot 5 = 5$  Гц,  $w_2 = 20\pi = 2\pi \cdot 10 = 10$  Гц,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi/4$  и  $b = 4\pi$  и рассмотрим функции  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ :

$$y_1(t) = a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \quad y_2(t) = \text{sinc}(bt);$$

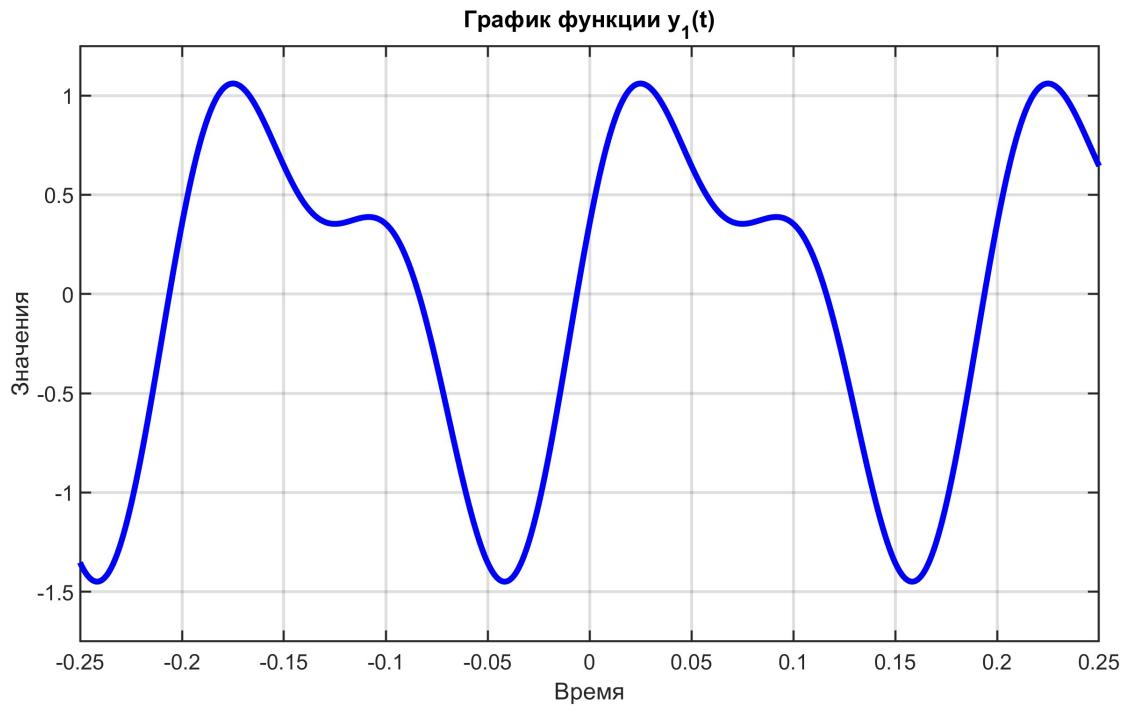
$$y_1(t) = \sin(10\pi t) + 0.5 \sin(20\pi t + \pi/4), \quad y_2(t) = \text{sinc}(20t).$$

Их графики изображены на рисунках 56 и 57 соответственно.

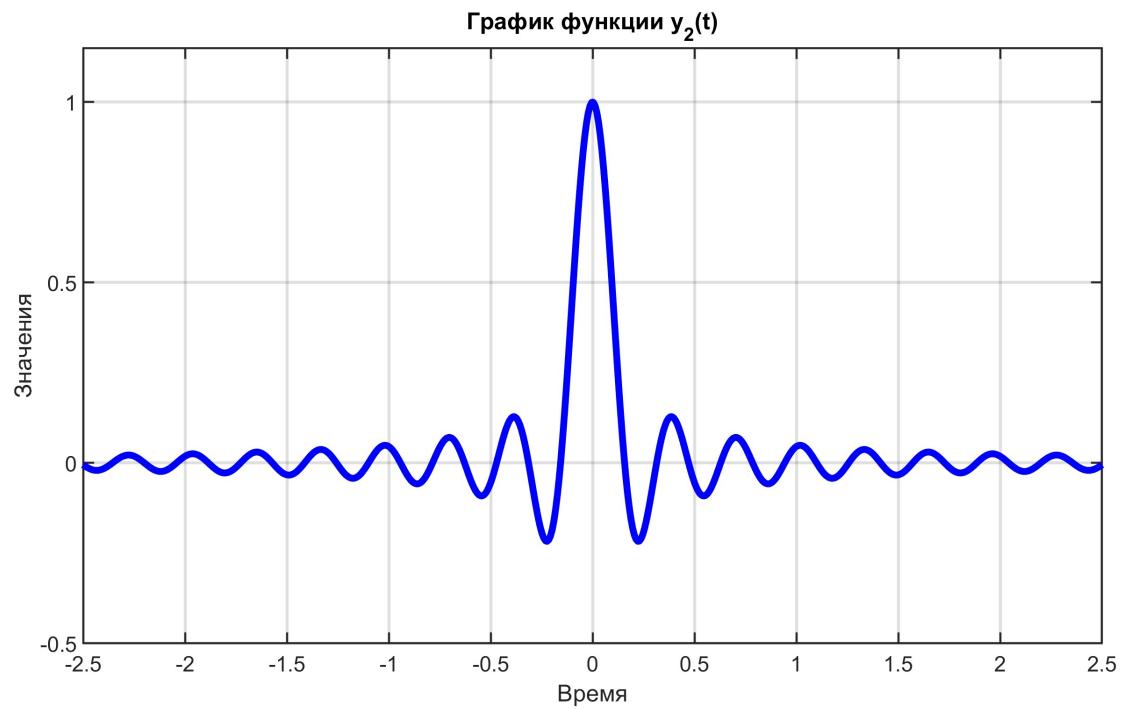
### 2.1 Гармоники

Исследуем каждую функцию  $y_i(t)$  по отдельности. Начнём с  $y_1(t)$ , как видим она представляет из себя сумму гармоник, двух синусоид разной частоты, амплитуды и начальной фазы, а её образ Фурье полностью содержится на отрезке (рисунок 58).

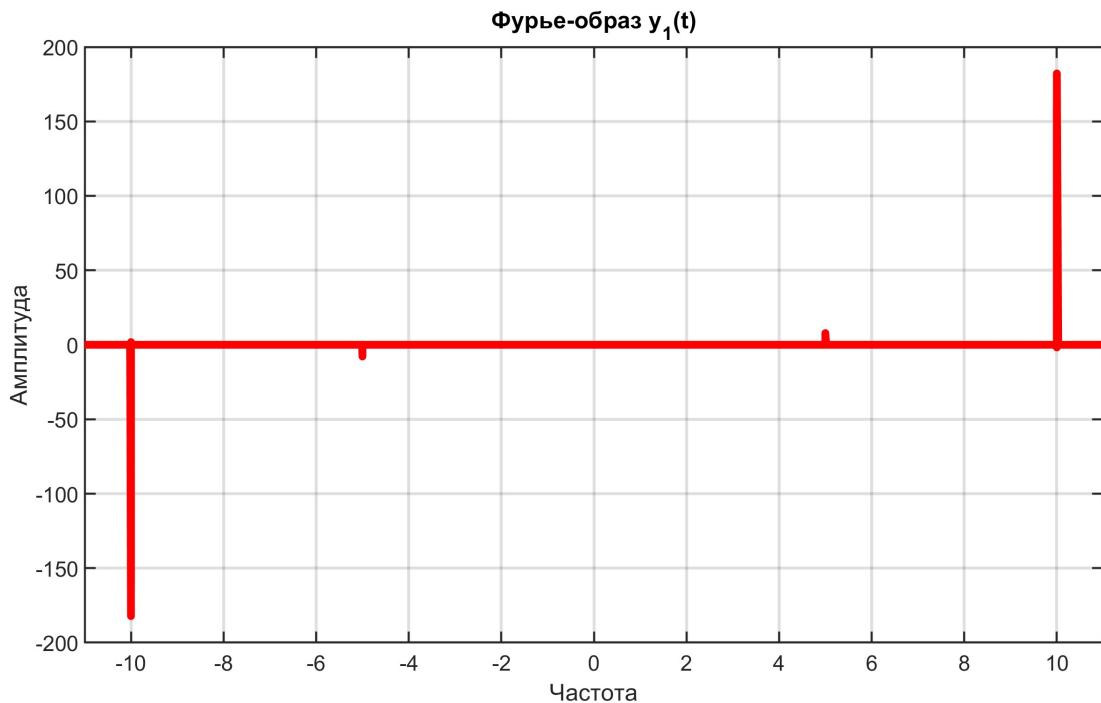
Теорема Найквиста-Шеннона-Котельникова говорит о том, что можно полностью восстановить изначально непрерывную функцию  $f(t)$  по её дискретизации по формуле, если образ Фурье  $\hat{f}(\nu)$  полностью содержится в отрезке  $[-B/2; B/2]$ , а шаг дискретизации  $\Delta t <$



*Рис. 56: График функции  $y_1(t)$*



*Рис. 57: График функции  $y_2(t)$*

Рис. 58: Образ Фурье функции  $y_1(t)$ 

$1/B$ ,  $B$  - промежуток интегрирования по частоте:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t_n) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t - t_n)\right).$$

Но так как мы физически не способны на бесконечное число интеграций на компьютере, то рассматривается определённый конечный промежуток по времени  $T$ , на котором восстанавливается и дискретизируется с шагом  $\Delta t$  функция  $f(t)$ , откуда имеем:

$$f(t) = \sum_{n=0}^N f(t_n) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t - t_n)\right),$$

где  $t_n = -T/2 + \Delta t/N$ ,  $\Delta t = T/N < 1/B$ .

Что ж, проверим теорему на деле. Зададимся параметрами рассматриваемого промежутка по времени  $T = 0.5$  и шага дискретизации  $\Delta t = 1/(B + 10) = 1/30$ , так как  $B = 20$  - удвоенная макси-

Рис. 59: Теорема Котельникова при  $T = 0.5$ ,  $\Delta t = 1/30$  (время)Рис. 60: Теорема Котельникова при  $T = 0.5$ ,  $\Delta t = 1/30$  (частоты)



Рис. 61: Использование теоремы с  $T = 0.5$ ,  $\Delta t = 1/30$  (частоты, приближение)

мальная частота ненулевой амплитуды, содержащейся в образе Фурье  $y_2(t)$ , тем самым создадим сэмплированный сигнал ( $V = 30$ , а  $\Delta\nu = 2$ ). Используя приведенную выше формулу, восстановим исходный сигнал через интерполяцию. На рисунках 59, 60 и 61 изображены графики исходного сигнала, интерполяции и сэмплирования во временной области, а также их Фурье-образы, строящиеся с помощью улучшенного fft. Получаем чуть ли не идеальное сходство восстановления с исходной функцией, однако в спектре заметны проблемы - образ интерполяции хоть и имеет некоторое сходство с оригиналом (дельта-выступы в  $\nu = \pm 10$ ), но всё ещё ошибается, не давая, например, нужные пики в  $\nu = \pm 5$  (что связано, в том числе с большими значениями  $\Delta\nu = 1/T$ ). Уменьшение частоты дискретизации при этом даёт, как и подразумевается, неточности в восстановлении исходной функции (возникают искажения за счёт явления алиасинга - наложения высоких частот на низкие, рисунок 64; частотного промежутка  $V = 1/\Delta t < B$  как бы становится недостаточно, чтобы покрыть все необходимые значения, верно применив теорему) - де-

монстрирующие данное графики при параметре  $\Delta t = 1/15$  показаны на рисунках 62, 63 и 64 (при этом  $T = 0.5$ ,  $V = 15$ , а  $\Delta\nu = 2$ ).

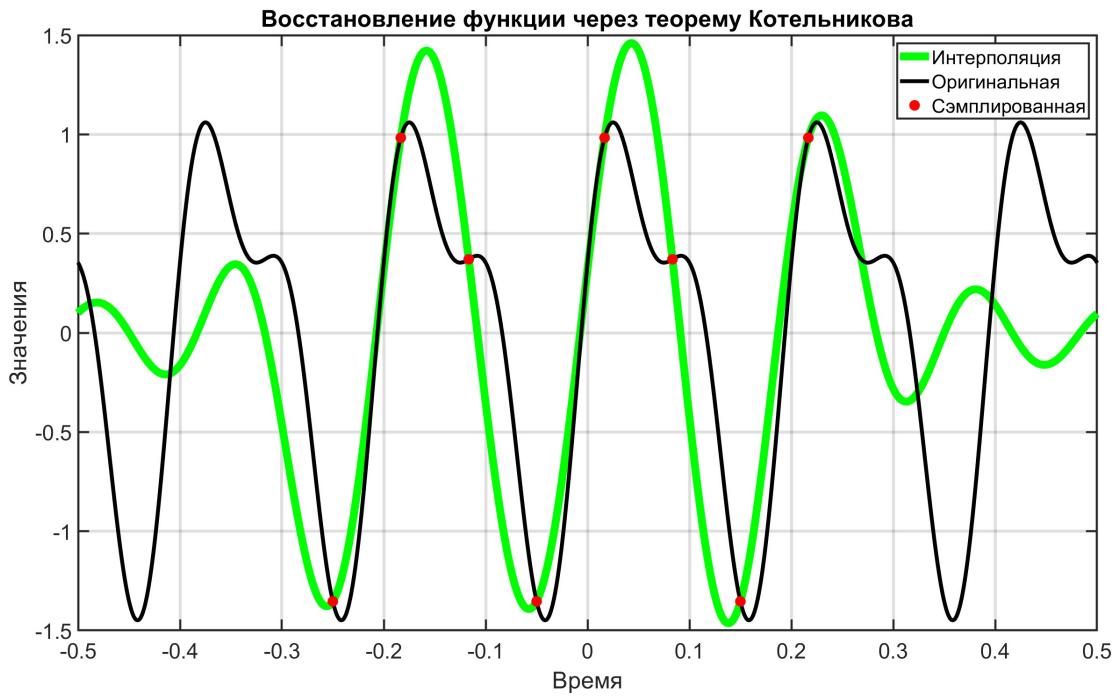


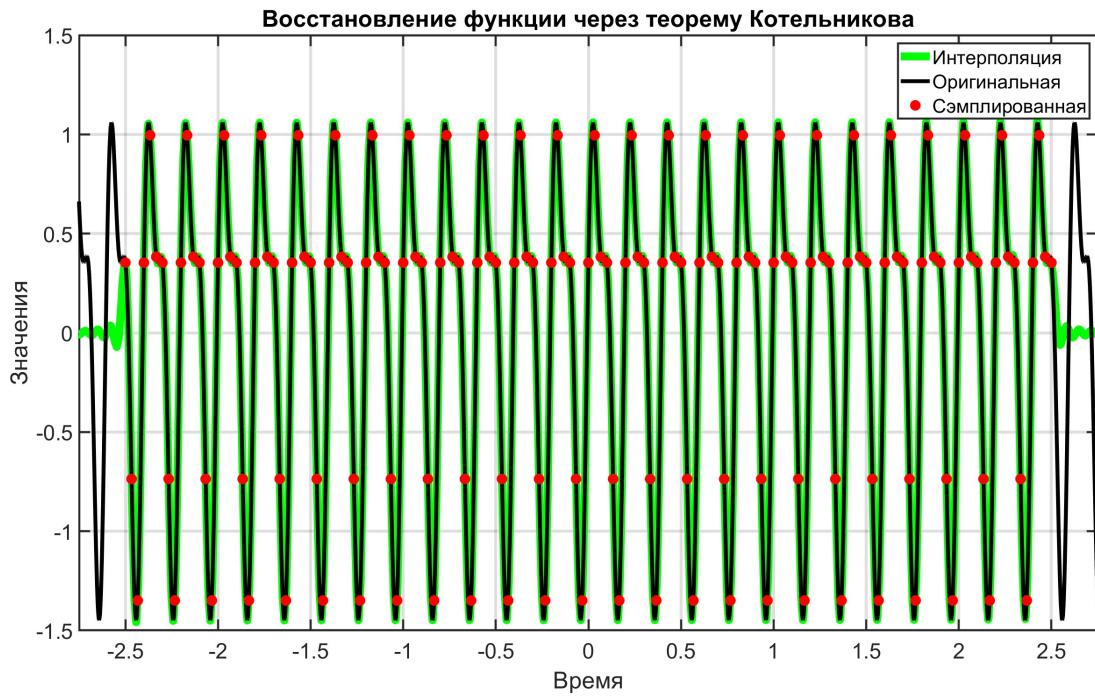
Рис. 62: Теорема Котельникова при  $T = 0.5$ ,  $\Delta t = 1/15$  (время)

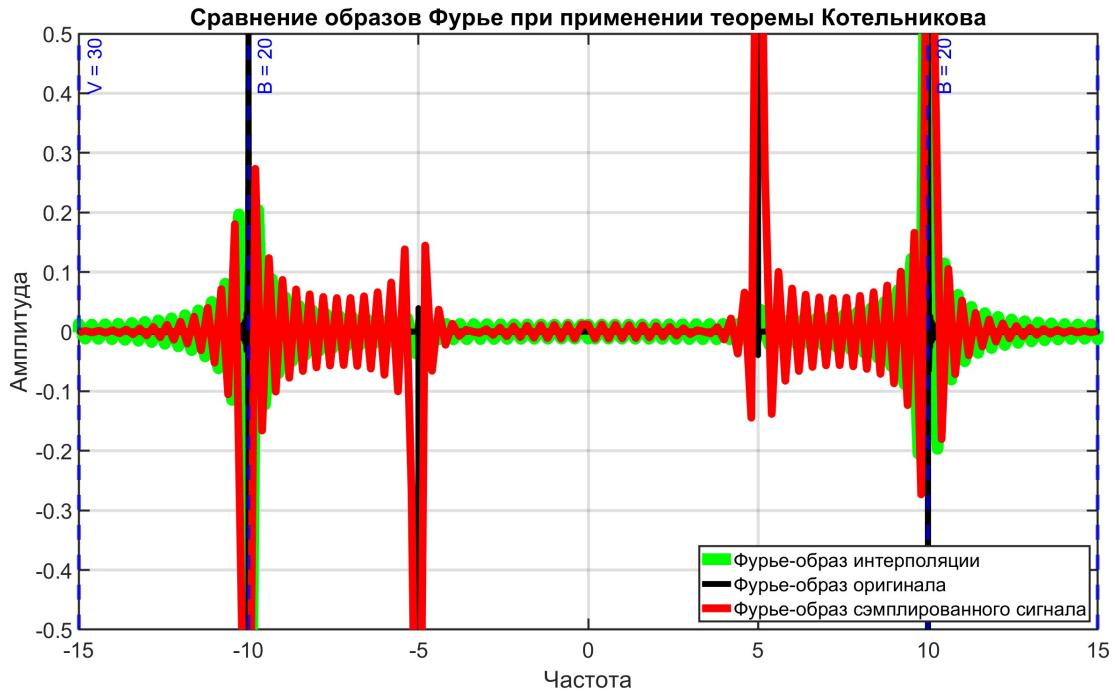
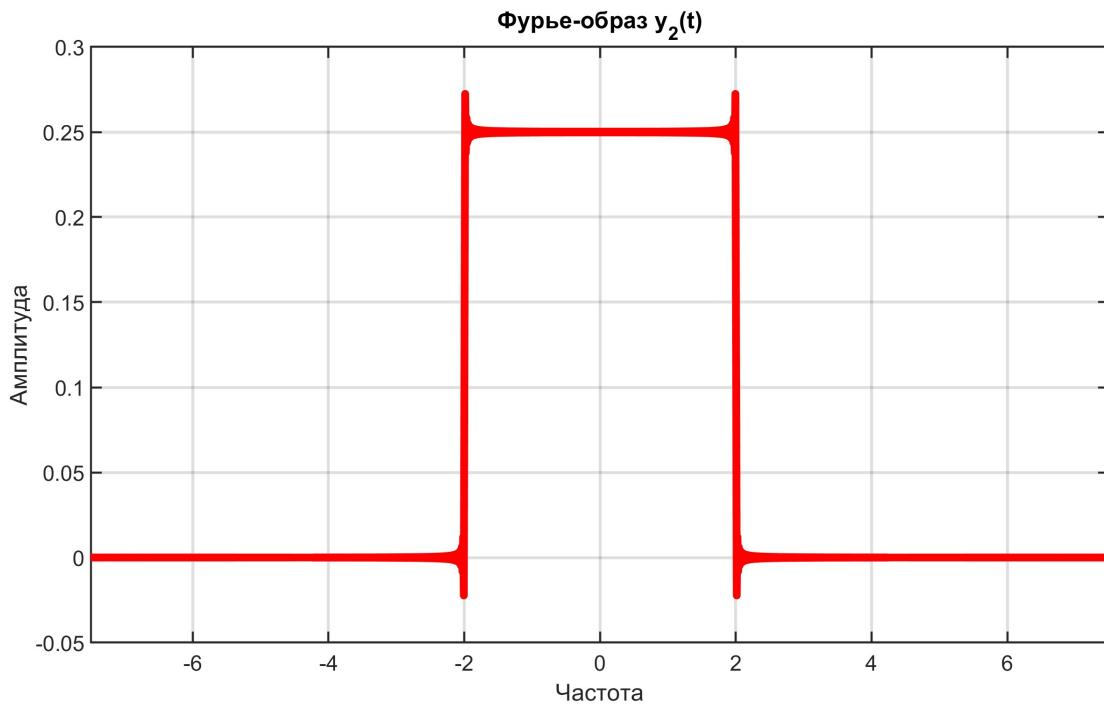
Промежуток по времени  $T$  задаёт отрезок времени, в котором реализуется дискретизация и интерполяция. Соответственно, выбирается тот промежуток, в котором хочется проводить исследования и видеть итоги. Увеличение параметра за счёт связи  $\Delta\nu = 1/T$  также уплотняет частотную область, приближая графики к своему истинному виду и сглаживая их. Результаты восстановления при  $T = 5$  и  $\Delta t = 1/30$  ( $V = 30$ ,  $\Delta\nu = 0.1$ ) представлены на рисунке 65, Фурьеобразы - на рисунках 66 и 67.

## 2.2 Кардинальный синус

Проверим теперь работу уже рассмотренной теоремы на функции кардинального синуса  $y_2(t) = \text{sinc}(bt) = \frac{\sin(bt)}{bt}$  (её образ Фурье изображен на рисунке 68; как видим, он полностью содержится в отрезке  $[-B/2, B/2] = [-2, 2]$ , остальное - зануляется).

Рис. 63: Теорема Котельникова при  $T = 0.5$ ,  $\Delta t = 1/15$  (частоты)Рис. 64: Использование теоремы с  $T = 0.5$ ,  $\Delta t = 1/15$  (частоты, приближение)

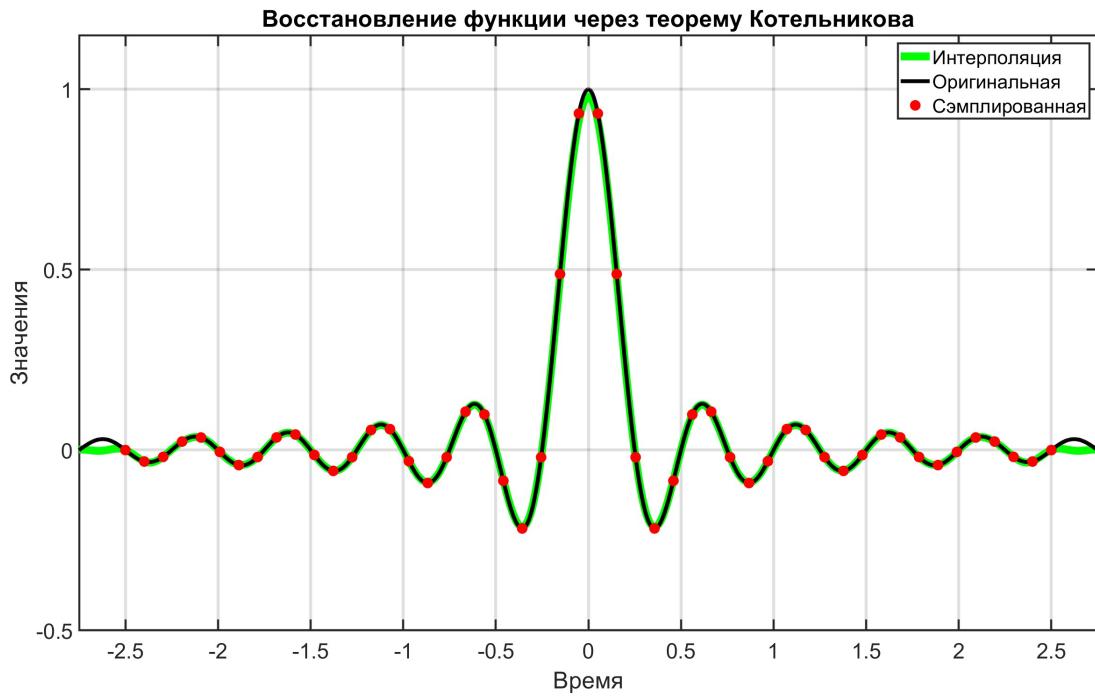
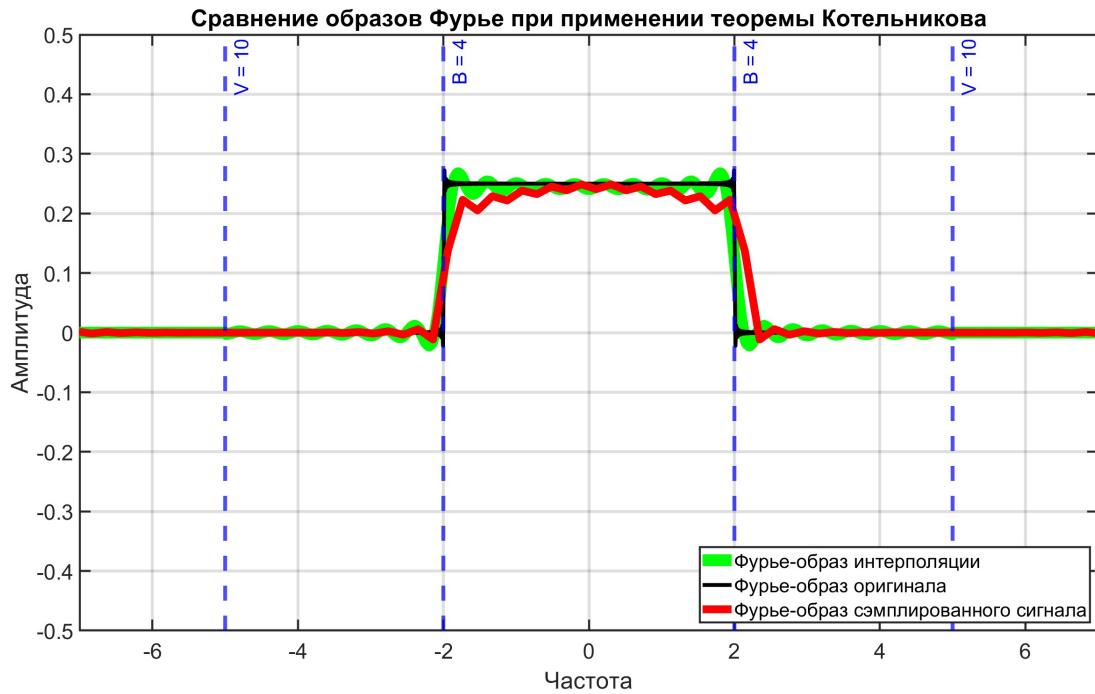
Рис. 65: Теорема Котельникова при  $T = 5$ ,  $\Delta t = 1/30$  (время)Рис. 66: Теорема Котельникова при  $T = 5$ ,  $\Delta t = 1/30$  (частоты)

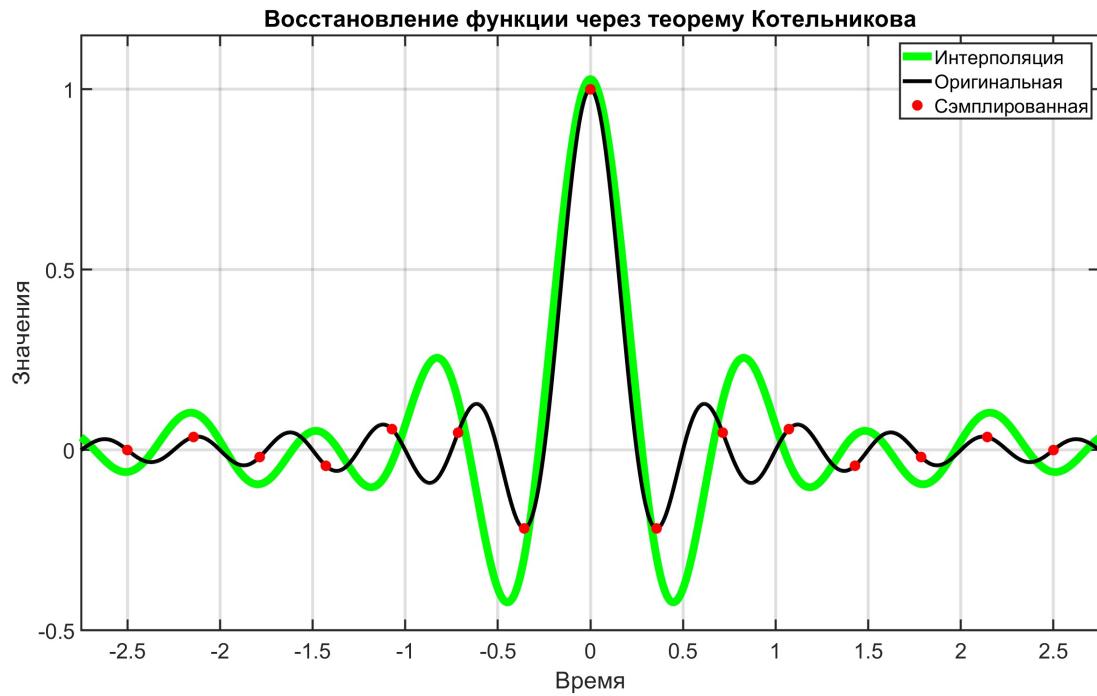
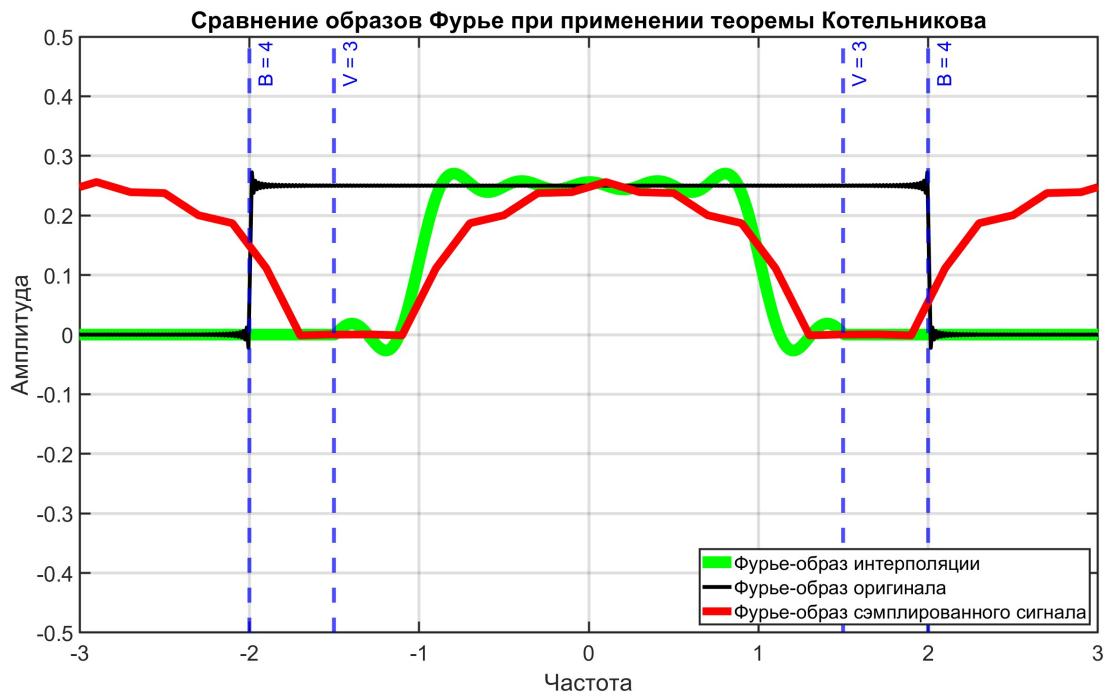
Рис. 67: Использование теоремы с  $T = 5$ ,  $\Delta t = 1/30$  (частоты, приближение)Рис. 68: Образ Фурье функции  $y_2(t)$

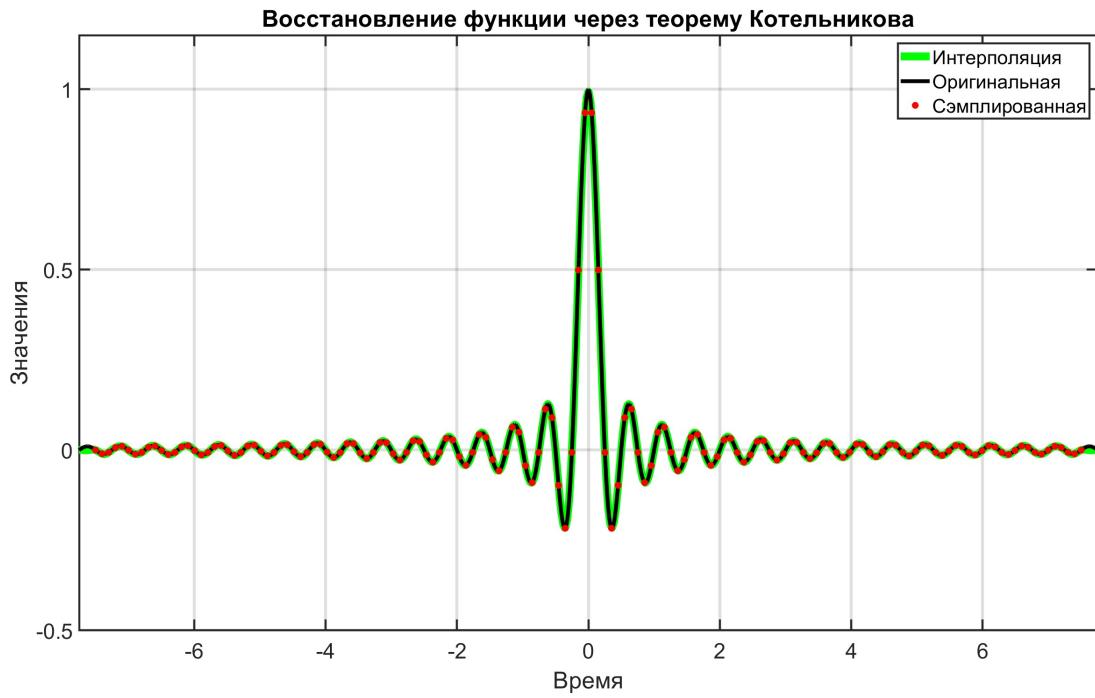
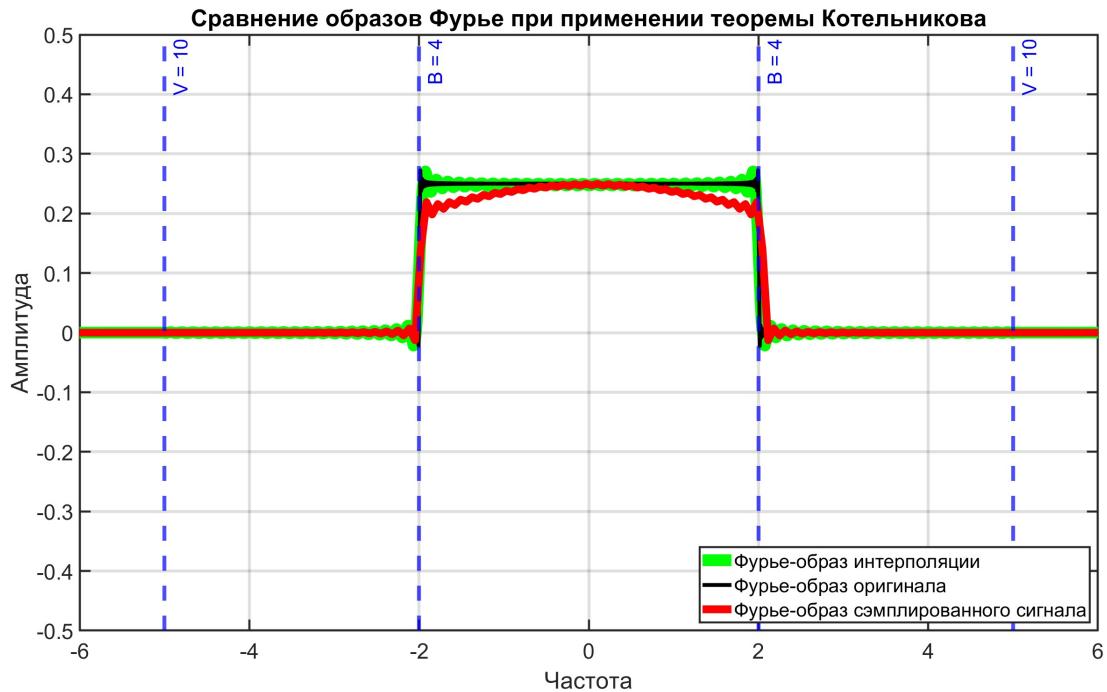
Зададимся шагом дискретизации  $\Delta t = 1/10$  и промежутком интегрирования  $T = 5$  (им соответствуют  $V = 10$  и  $\Delta\nu = 0.2$ ), тем самым проведем сэмплирование исходного сигнала. Далее попытаемся его восстановить. По теореме Котельникова при шаге  $\Delta t < 1/B = 1/4$ , сигнал можно восстановить с полной точностью, что мы и наблюдаем на рисунке 69, где представлено само восстановление, и 70, где видны образы Фурье всех используемых функций. Увеличение шага, как и ожидается, нарушает условия теоремы, и образы верной интерполяции не происходит (демонстрирующие рисунки 71 и 72 при параметрах  $T = 5$ ,  $\Delta t = 1/3$ ,  $V = 3$  и  $\Delta\nu = 0.2$ ). Причем заметно, что при малой частоте дискретизации восстановленная функция и Фурье-образы интерполяции дают всё тот же кардиальный синус, только большей амплитуды и меньшей частоты. Всё дело в том, что исследуемый метод работает схожим образом с обратным преобразованием Фурье - он берёт спектр сэмплированного сигнала, урезает его до нужного отрезка частот  $[-B/2, B/2]$ , в котором и хранится вся информация исходного сигнала, а после проводит восстановление; а так как в данном случае на отрезке наблюдается вся та же прямоугольная функция, только чуть иной длины, то и интерполяция пытается приблизить не исходный кардиальный синус, а его «сродича», тоже sinc, имеющего Фурье образ, содержащийся в промежутке  $[-V/2, V/2]$ .

Параметр  $T$ , как и в предыдущих примерах, задаёт используемый промежуток времени и сглаживает спектры (демонстрирующие рисунки 73 и 74 с  $T = 15$ ,  $\Delta t = 1/10$ ,  $V = 10$  и  $\Delta\nu = 1/15$ ).

Таким образом, теорема Найквиста-Шеннона-Котельникова работает, с её помощью мы можем восстанавливать непрерывный сигнал по его дискретизации со сколь угодно большой точностью при тех условиях, что образ функции задан на определённом промежутке по частотам  $[-B/2, B/2]$ , а шаг дискретизации сэмплированного сигнала  $\Delta t < 1/B$ . Однако стоит сказать и то, что эти условия весьма жёсткие: мало для каких функций существует ограниченный спектр, а значит, его уже придётся обрезать, даже если Фурье-образ достаточно хорошо убывает, что уже рушит нашу идеализацию. Кроме того, сэмплирования с бесконечной точностью не существует - с по-

Рис. 69: Теорема Котельникова при  $T = 5$ ,  $\Delta t = 1/10$  (время)Рис. 70: Теорема Котельникова при  $T = 5$ ,  $\Delta t = 1/10$  (частоты)

Рис. 71: Теорема Котельникова при  $T = 5$ ,  $\Delta t = 1/3$  (время)Рис. 72: Теорема Котельникова при  $T = 5$ ,  $\Delta t = 1/3$  (частоты)

Рис. 73: Теорема Котельникова при  $T = 15$ ,  $\Delta t = 1/10$  (время)Рис. 74: Теорема Котельникова при  $T = 15$ ,  $\Delta t = 1/10$  (частоты)

мощью теоремы мы можем лишь улучшать точность хранящегося на памяти сэмплирования, но сигнал по-прежнему останется в памяти дискретным (впрочем, другим храниться он и не может).

### 3 Общие выводы

В ходе лабораторной работы были исследованы различные методы нахождения Фурье-образов функций, включая численное интегрирование, быстрое дискретное преобразование Фурье (БПФ) и его модифицированную версию с использованием приближённых коэффициентов вида  $c_m = \Delta t \cdot (-1)^m$ . Было показано, что точность образов существенно зависит от выбора временного отрезка ширины  $T$  и шага дискретизации  $\Delta t$ , а также от (связанных с ними) промежутка частот  $V$  и шага частот  $\Delta\nu$ . Также была рассмотрена теорема Найквиста-Шеннона-Котельникова на примерах функций  $y_1 = a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + a_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_1)$  и  $y_2 = \text{sinc}(bt)$ . Установлено, что при нарушении условия теоремы (частота дискретизации ниже удвоенной максимальной частоты сигнала  $B$ ) возникают искажения спектра и ошибки интерполяции во временной области. Анализ Фурье-образов исходного, сэмплированного и интерполяционного сигналов позволил более точно понять закулисье изученного способа восстановления функций по их дискретизации.

## 4 Приложение

*Листинг 1: Код для метода численного интегрирования*

```

1 T = 25;
2 dt = 0.001;
3 t = -T/2:dt:T/2;
4 p = zeros( size(t) );
5 p( abs(t) <= 1/2 ) = 1;
6
7 nt = -T/2:0.001:T/2;
8 np = zeros( size(nt) );
9 np( abs(nt) <= 1/2 ) = 1;
10
11 V = 100;
12 dnu = 0.01;
13 nu = -V/2:dnu:V/2;
14 nnu = -V/2:0.01:V/2;
15 hatp = sinc(nnu);
16
17 Pi_nu = zeros( size(nu) );
18 for k = 1:length(nu)
19     Pi_nu(k) = trapz(t, p .* exp(-1j*2*pi*nu(k)*t));
20 end
21
22 Pi_t_rec = zeros( size(t) );
23 for k = 1:length(t)
24     Pi_t_rec(k) = trapz(nu, Pi_nu .* exp(1j*2*pi*nu*t(k)));
25 end
26
27 Pi_t_rec = real(Pi_t_rec);

```

*Листинг 2: Код для метода fft*

```

1 T = 4;
2 dt = 0.0075 ;
3 t = -T/2:dt:T/2;
4
5 nt = -T/2:0.001:T/2;
6 np = zeros(size(nt));
7 np(abs(nt) ≤ 1/2) = 1;
8
9 Pi_t = double(abs(t) ≤ 0.5);
10 N = length(Pi_t);
11 Pi_f = fftshift(fft(Pi_t)) / sqrt(N);
12
13 dnu = 1/T;
14 V = 1/dt;
15 nu = -V/2:dnu:V/2;
16
17 nnu = -V/2:0.01:V/2;
18 hatp = sinc(nnu);
19
20 Pi_t_rec = ifft(ifftshift(Pi_f)) * sqrt(N);

```

*Листинг 3: Код для метода модифицированного fft*

```

1 T = 4;
2 dt = 0.05 ;
3 N = T/dt;
4 t = linspace(-T/2, T/2-dt, N);
5 func = double(abs(t) ≤ 0.5);
6
7 nt = -T/2:0.0001:T/2;
8 np = zeros(size(nt));
9 np(abs(nt) ≤ 1/2) = 1;
10
11 m = linspace(-N/2, N/2-1, N);
12 c = dt * (-1).^m;
13 V = 1/dt;
14 dnu = 1/T;
15 nu = m / T;
16
17 F_fft = fftshift(c .* fft(func));
18
19 nnu = -V/2:0.001:V/2;
20 hatp = sinc(nnu);
21
22 f_recovered = real(ifft(ifftshift(F_fft) ./ c));

```

*Листинг 4: Код для сравнения различных методов нахождения образов*

```

1 T = 1.15 ;
2 dt = 0.05 ;
3 N = T/dt ;
4 t = linspace (-T/2 , T/2 , N) ;
5 p = double (abs (t) ≤ 0.5) ;
6
7 nt = -T/2:0.0001:T/2;
8 np = zeros (size (nt)) ;
9 np (abs (nt) ≤ 1/2) = 1;
10
11 m = 0:N-1 ;
12 c = dt * (-1) .^m ;
13 V = 1/dt ;
14 dnu = 1/T ;
15 nu = linspace (-V/2 , V/2-dnu , N) ;
16
17 F_fft = fftshift (c .* fft (p)) ;
18
19 nnu = -V/2:0.001:V/2;
20 hatp = sinc (nnu) ;
21
22 f_recovered = real (ifft (ifftshift (F_fft) ./ c)) ;
23
24 F_plain = fftshift (fft (p)) / sqrt (N) ;
25 f_recovered_with_ifft = ifft (ifftshift (F_plain)) * sqrt (N) ;
26
27
28 hdnu = 1/T ;
29 hV = 1/dt ;
30 hnu = nu ;
31
32 Pi_nu = zeros (size (hnu)) ;
33 for k = 1:length (hnu)
34     Pi_nu (k) = trapz (t , p .* exp (-1j * 2 * pi * hnu (k) * t)) ;
35 end
36
37 Pi_t_rec = zeros (size (t)) ;
38 for k = 1:length (t)
39     Pi_t_rec (k) = trapz (hnu , Pi_nu .* exp (1j * 2 * pi * hnu * t (k))) ;
40 end
41
42 Pi_t_rec = real (Pi_t_rec) ;
43
44 sum (abs (abs (sinc (nu)) - abs (F_fft)))
45 sum (abs (abs (sinc (hnu)) - abs (Pi_nu)))

```

*Листинг 5: Код для исследования теоремы Котельникова (гармоники)*

```

1 a1 = 1;
2 a2 = 0.5;
3 w1 = 2*pi*5;
4 w2 = 2*pi*10;
5 phi1 = 0;
6 phi2 = pi/4;
7 B1 = 20;
8
9 T = 1e3;
10 T1 = 5;
11 dt = 1e-3;
12 t = -T/2:dt:T/2;
13 N = length(t);
14 m = 0:N-1;
15 c = dt * (-1).^m;
16
17 y1 = a1*sin(w1*t + phi1) + a2*sin(w2*t + phi2);
18
19 y1_fft = fftshift(c .* fft(y1));
20
21 Fs = 30;
22 dt_sample = 1/Fs;
23 t_sample = -T1/2:dt_sample:T1/2;
24
25 y1_sample = a1*sin(w1*t_sample + phi1) + a2*sin(w2*t_sample + phi2);
26
27 y1_interp = zeros(size(t));
28 for k = 1:length(t_sample)
29     y1_interp = y1_interp + y1_sample(k)*sinc(Fs*(t - t_sample(k)));
30 end
31
32 y1_fft_interp = fftshift(c .* fft(y1_interp));
33
34 c1_sample = dt_sample * (-1).^(0:length(t_sample)-1);
35 y1_sample_fft = fftshift(c1_sample .* fft(y1_sample));
36
37
38 V = 1/dt_sample;
39 dnu = 1/T1;
40 nu = -1/dt/2:1/T1/dt/2;
41 N_sample = T1/dt_sample+1;
42 nu_sample = linspace(-V/2, V/2, N_sample);

```

*Листинг 6: Код для исследования теоремы Кохельникова (sinc)*

```

1 b = 4*pi;
2 B2 = 4;
3
4 T = 1e2;
5 T2 = 5;
6 dt = 1e-3;
7 N = T/dt;
8 t = linspace(-T/2, T/2, N);
9 N = length(t);
10 m = 0:N-1;
11 c = dt * (-1).^m;
12
13 y2 = sinc(b*t/pi);
14
15 y2_fft = fftshift(c .* fft(y2));
16
17 Fs = 3;
18 dt_sample = 1/Fs;
19 N_sample = T2/dt_sample+1;
20 t_sample = linspace(-T2/2, T2/2, N_sample);
21
22 y2_sample = sinc(b*t_sample/pi);
23
24 y2_interp = zeros(size(t));
25 for k = 1:length(t_sample)
26     y2_interp = y2_interp + y2_sample(k)*sinc(Fs*(t - t_sample(k)));
27 end
28
29 y2_fft_interp = fftshift(c .* fft(y2_interp));
30
31 c2_sample = dt_sample * (-1).^(0:length(t_sample)-1);
32 y2_sample_fft = fftshift(c2_sample .* fft(y2_sample));
33
34 V = 1/dt_sample;
35 dnu = 1/T2;
36 nu = linspace(-1/dt/2, 1/dt/2, N);
37 nu_sample = linspace(-V/2, V/2, N_sample);

```