

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по лабораторной работе №1
**Адаптивное управление многомерным
объектом по состоянию**
Вариант 9

Выполнили студенты
Преподаватель

Мовчан Игорь Евгеньевич
Копылов Андрей Михайлович
Парамонов Алексей Владимирович

Санкт-Петербург
2025

Содержание

| | |
|---|-----------|
| 1 Цель работы | 2 |
| 2 Постановка задачи | 2 |
| 3 Построение эталонной модели | 3 |
| 4 Синтез управления для отслеживания | 4 |
| 5 Создание адаптивного управления | 9 |
| 6 Выводы | 22 |

1 Цель работы

Освоение принципов построения адаптивной системы управления многомерным объектом с использованием эталонной модели.

2 Постановка задачи

Пусть дан объект:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Матрицы объекта задаются как:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Здесь a_i - неизвестные параметры, b_0 - известный коэффициент.

Задача заключается в формировании управления для компенсации параметрической неопределенности объекта и обеспечения следующего целевого равенства:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_M(t) - x(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$$

Вектор состояния эталонной модели $x_M(t)$ задаётся системой с задающим воздействием $g(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_M(t) = A_M x_M(t) + b_M g(t), \\ y_M(t) = C_M x_M(t) \end{cases}$$

Матрицы эталонной модели $A_M = A + b\theta^T$ для некоторого n -мерного вектора θ , b_M и C_M выбираются так, чтобы обеспечить требуемые характеристики переходного процесса и желаемое качество

воспроизведения задающего воздействия $g(t)$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{M0} & -a_{M1} & -a_{M2} & \cdots & -a_{M(n-1)} \end{bmatrix}, \quad b_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{M0} \end{bmatrix}$$

$$C_M = [1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0]$$

3 Построение эталонной модели

Согласно варианту задания, матрицы объекта задаются как:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0]$$

К тому же известны параметры времени переходного процесса t_n (допустим, по 5%-критерию) и максимального перерегулирования $\bar{\sigma}$:

$$t_n = 0.9, \quad \bar{\sigma} = 0$$

Матрицы A_M , b_M и C_M эталонной модели же имеют вид:

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{M0} & -a_{M1} \end{bmatrix}, \quad B_M = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{M0} \end{bmatrix}, \quad C_M = [1 \ 0]$$

Для поиска необходимых коэффициентов запишем стандартный характеристический полином для двумерного случая $n = 2$ и нулевого перерегулирования:

$$s^2 + a_{M1}s + a_{M0} = s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2, \quad \omega_n = \frac{4.8}{t_n} = 5\frac{1}{3}$$

Откуда можно найти коэффициенты эталонной модели:

$$a_{M0} = \omega_n^2 = 28\frac{4}{9}, \quad a_{M1} = 2\omega_n = 10\frac{2}{3}$$

Отлично! Теперь построим графики переходной функции модели, то есть при задающем воздействии $g(t) = 1(t)$, и убедимся, что они соответствуют заданным параметрам времени переходного процесса t_n и перерегулирования $\bar{\sigma}$. Результат изображен на рисунке 1.

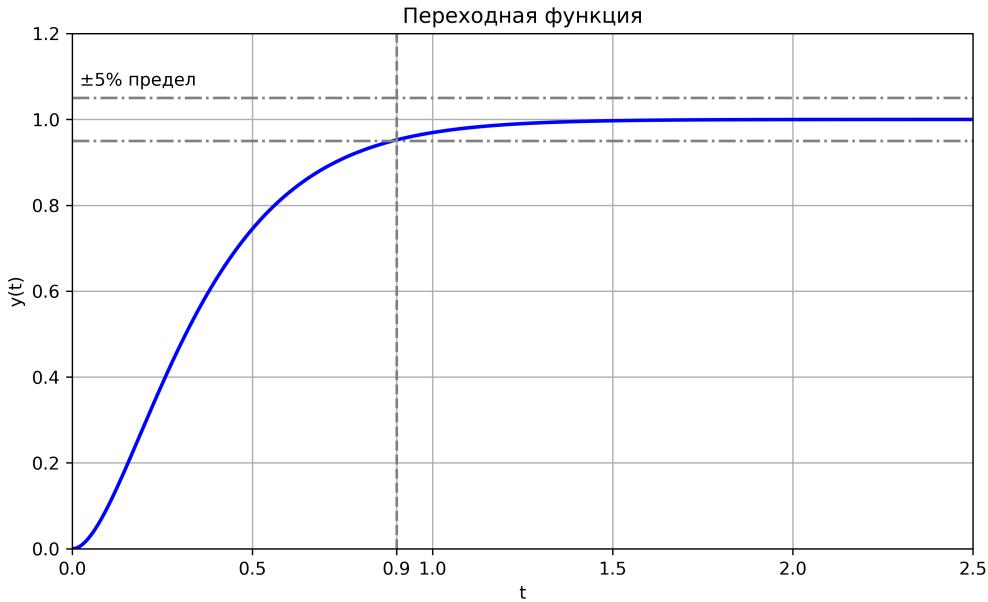


Рис. 1: Переходный процесс эталонной модели

Видим, что всё соответствует требованиям - можем использовать эталонную модель для дальнейшего синтеза управления.

4 Синтез управления для отслеживания

Сначала предположим **известными параметры объекта**, тогда можно прямо вычислить вектор $\theta^T = [\theta_1 \ \theta_2]$, определяемый рассогласованиями между матрицами A и $A_M = A + b\theta^T$:

$$\theta_1 = \frac{-a_{M0} + a_0}{b_0} \approx -3.16, \quad \theta_2 = \frac{-a_{M1} + a_1}{b_0} \approx -1.185, \quad \kappa = \frac{b_0}{a_{M0}}$$

Откуда управление может быть задано как:

$$u(t) = \theta^T x(t) + \frac{1}{\kappa} g(t), \quad g(t) = 9 \sin(0.2t) + 9 \cos(0.1t) + 15$$

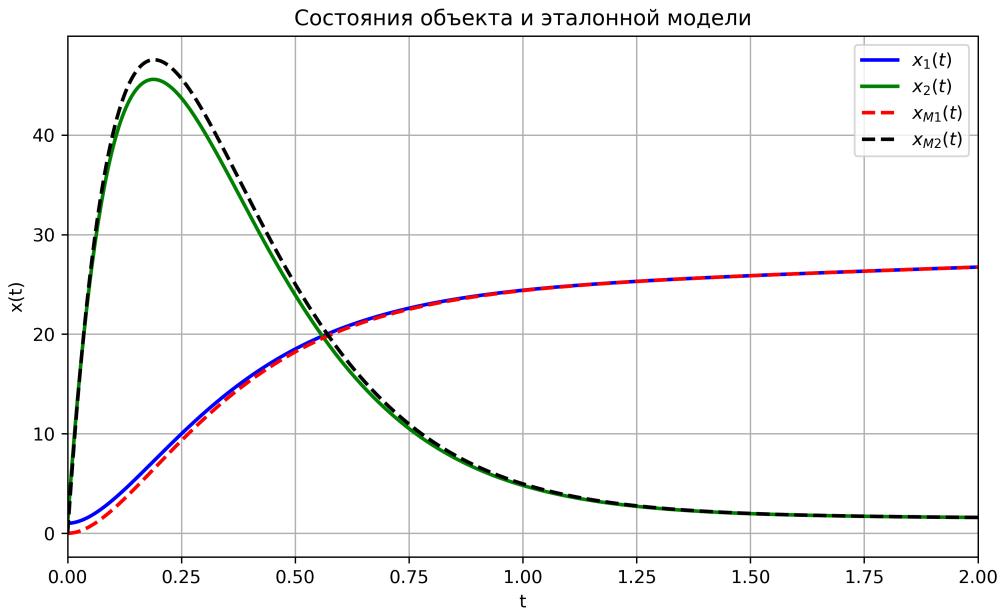


Рис. 2: Графики $x_M(t)$ и $x(t)$ при расчетных значениях параметров

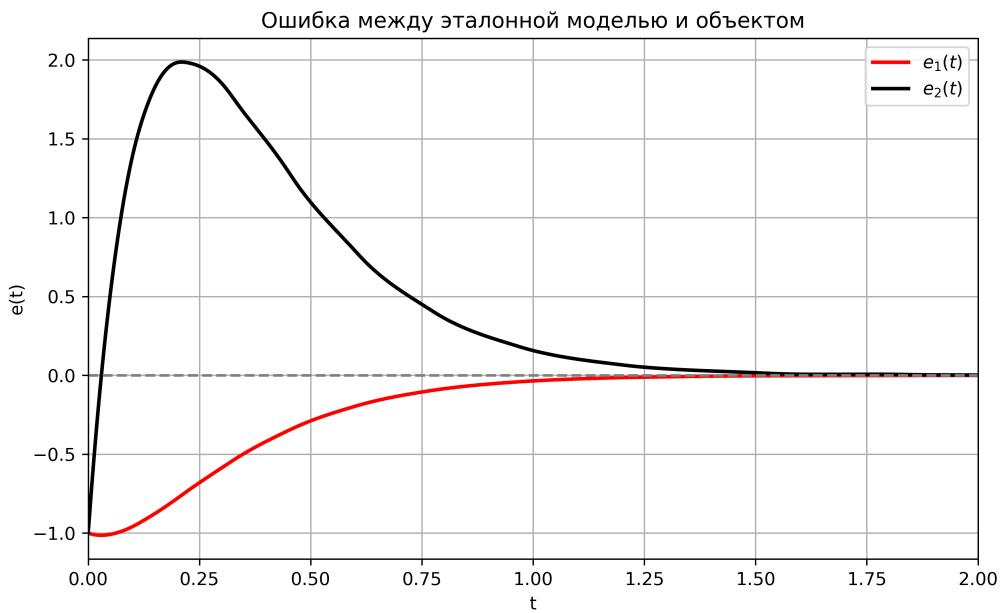


Рис. 3: Ошибка $e(t) = x_M(t) - x(t)$ при расчетных значениях параметров

Используем полученное выражение и построим траектории движения x_M эталонной модели, а также x объекта при этом управлении и задающем воздействии при начальных условиях $x_M(0) = [0 \ 0]^T$ и $x(0) = [1 \ 1]^T$. Дополнительно к этому найдем ошибку между состояниями $e = x_M - x$. Результаты приведены на рисунках 2 и 3.

Можем видеть, что с течением времени ошибка стремится к нулю, значит, регулятор построен верно.

Попробуем немного отклонить параметры объекта так, чтобы система осталась устойчивой, θ при этом оставим прежним:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 + 1 & -a_1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Построим для этих параметров траектории движения и ошибку между состояниями. Результаты приведены на рисунках 4 и 5.

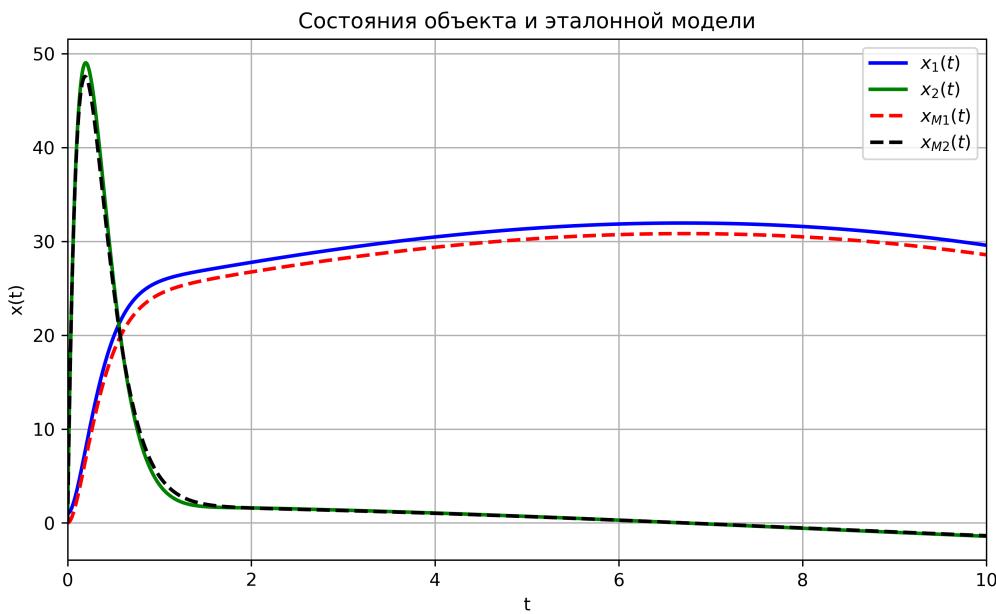


Рис. 4: Графики $x_M(t)$ и $x(t)$ при незначительном отклонении параметров

Заметим, что объект по-прежнему остается устойчивым, но ошибки между состояниями уже не стремятся к нулю, а остаются в некоторой окрестности от него. Сам объект в целом имеет похожую на эталонную динамику.

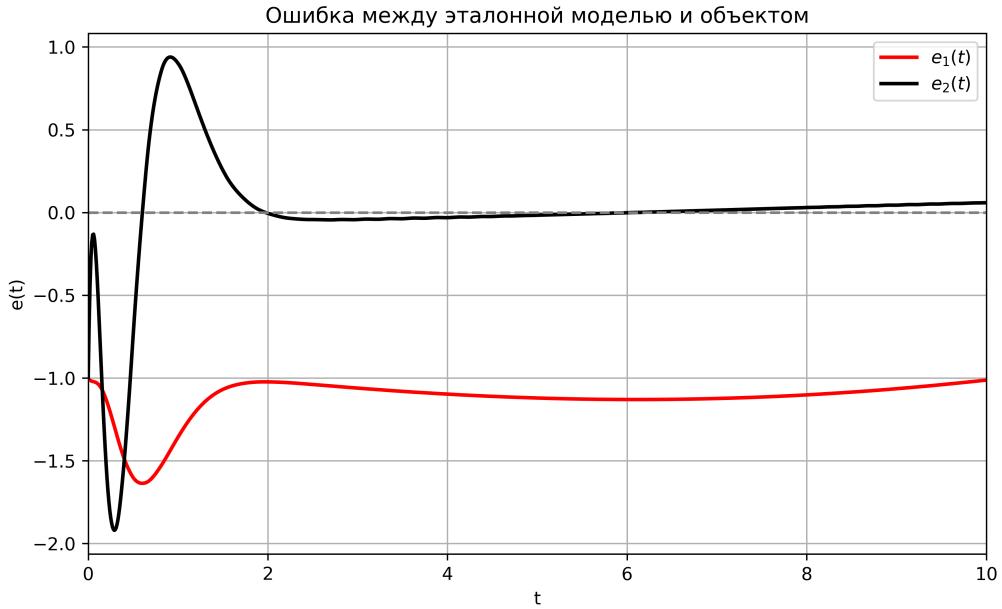


Рис. 5: Ошибка $e(t) = x_M(t) - x(t)$ при незначительном отклонении параметров

Всё вышесказанное связано с тем, что регулятор основывает свою работу в том числе на неверном векторе θ , который при измененных параметрах матрицы A объекта остался прежним. Появилось расхождение $\bar{\theta} = \theta - \theta'$ между реальной связью между объектом и эталоном θ' и используемой θ , а значит, управление уже не способно правильно компенсировать расхождения между ними.

Математически строго это выходит из того, что уравнение управления было получено из динамики ошибки системы с известными параметрами:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}_M(t) - \dot{x}(t) = A_M e(t) + b(\theta^T x(t) - u(t) + \frac{1}{k}g(t))$$

Которое при верном управлении сводится к:

$$\dot{e}(t) = A_M e(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Однако, при небольшом отклонении параметров:

$$\dot{e}(t) = A_M e(t) + b(\theta^T x(t) - \theta'^T x(t)) = A_M e(t) + b\bar{\theta}^T x(t)$$

В динамике ошибки остаётся остаточный член $b\bar{\theta}^T x(t)$, который в общем случае не позволяет ей устремиться к нулю.

К тому же при **значительном отклонении параметров** система может стать неустойчивой, то есть управление не будет способно даже «удержать» её. Попробуем взять:

$$A'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 + 12 & -a_1 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$$

Построим для взятых параметров аналогичные графики состояний систем и ошибок, результаты приведены на рисунках 6 и 7.

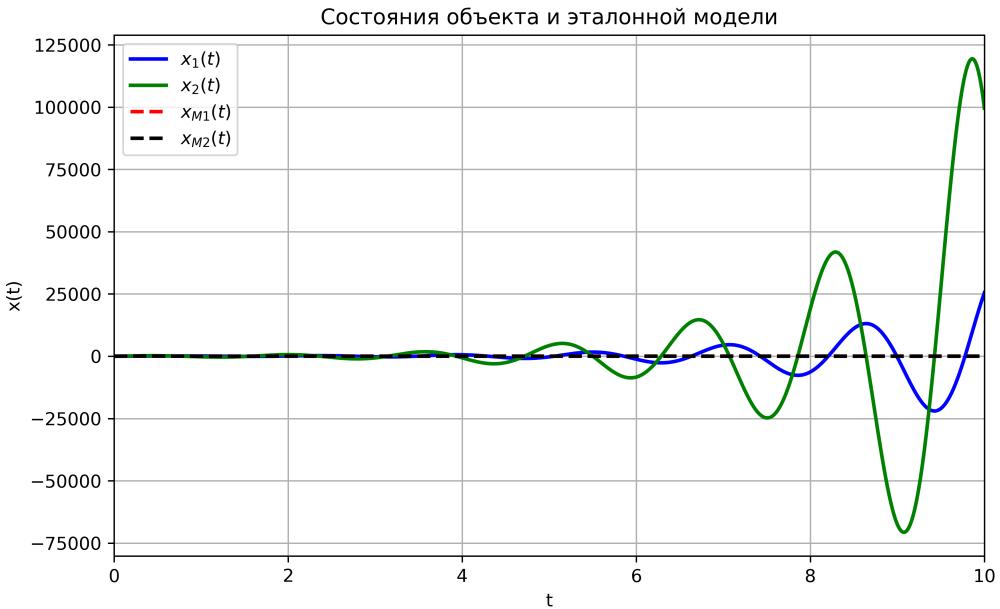


Рис. 6: Графики $x_M(t)$ и $x(t)$ при сильном отклонении параметров

Видим, что объект стал неустойчивым. Выходит, управление с неверными параметрами не способно породить корректную замкнутую систему, поэтому необходимо использовать адаптивное управление, которое при той же работе будет дополнительно оценивать вектор θ , контролируя поведение объекта даже без знаний о его точных параметрах матрицы A .



Рис. 7: Ошибка $e(t) = x_M(t) - x(t)$ при сильном отклонении параметров

5 Создание адаптивного управления

Итак, для формирования адаптивного управления дополнитель-но добавим оценку вектора θ :

$$u(t) = \hat{\theta}^T x(t) + \frac{1}{\kappa} g(t), \quad \dot{\hat{\theta}} = \gamma x(t) b^T P e(t), \quad \hat{\theta}(0) = 0$$

В данном случае $P = P^T \succ 0$ - положительная определенная симметричная матрица, удовлетворяющая уравнению Ляпунова:

$$A_M^T P + P A_M = -Q, \quad Q = I \succ 0$$

Примем $\gamma = 1$ - коэффициент адаптации, влияющий на скорость сходимости оценки параметров $\hat{\theta}(t)$ к истинным значениям θ . Также зададим всё тот же сигнал и те же начальные условия для состояний объекта и эталонной модели:

$$g(t) = 9 \sin(0.2t) + 9 \cos(0.1t) + 15, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_M(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Повторим всё проделанное в предыдущем пункте, но уже с алгоритмом адаптации, то есть примем новые матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$$

Получаются эксперименты с расчетными параметрами объекта, а также при небольшом и сильном их отклонении. Итак, для них замоделируем динамику с вышеприведенным в пункте управлением и условиями $x(0)$, $x_M(0)$. Все графики приведены на рисунках 8 - 16.

Можем видеть, что даже при значительном отклонении параметров объекта адаптивное управление способно обеспечить устойчивость системы и стремление ошибки к нулю. Это достигается за счёт оценки параметров $\hat{\theta}(t)$, которая корректируется в процессе работы системы, стремясь к истинным значениям θ .

Таким образом, обеспечивается *ограниченность* всех сигналов в замкнутой системе и *асимптотическое стремление ошибок к нулю* - выполнены первые свойства алгоритма управления!



Рис. 8: Состояния при расчетных значениях параметров и оценке $\hat{\theta}(t)$

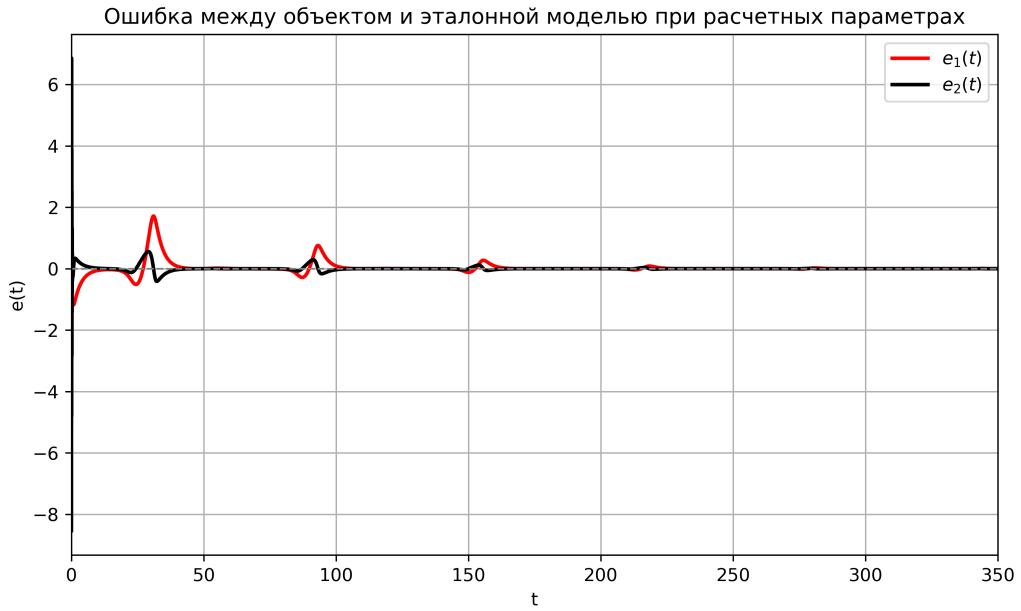


Рис. 9: Ошибка при расчетных значениях параметров и оценке $\hat{\theta}(t)$

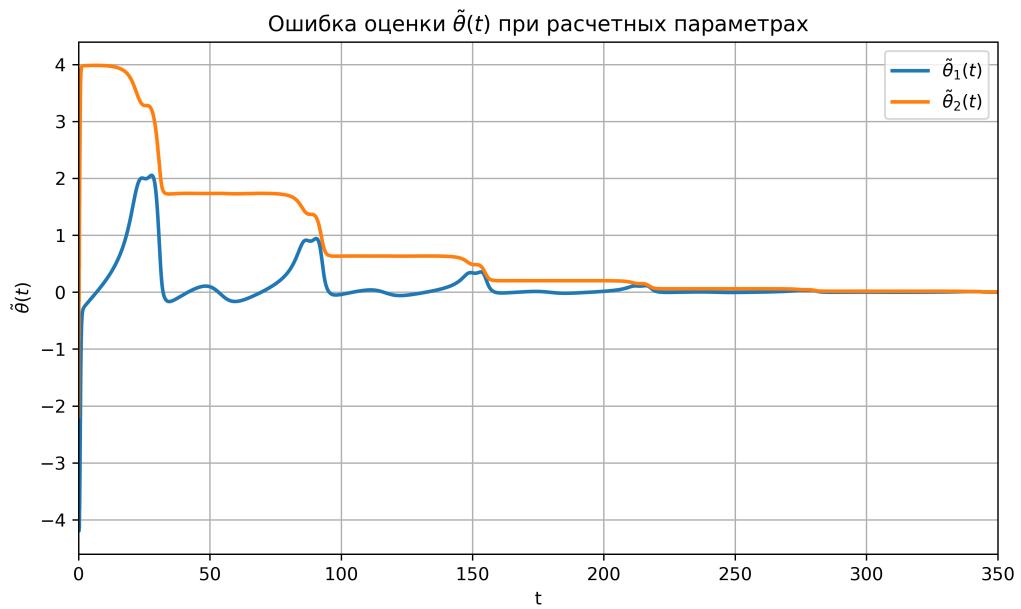


Рис. 10: Ошибка $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$ при расчетных значениях параметров



Рис. 11: Состояния при незначительном отклонении параметров и оценке $\hat{\theta}(t)$



Рис. 12: Ошибка при незначительном отклонении параметров и оценке $\hat{\theta}(t)$

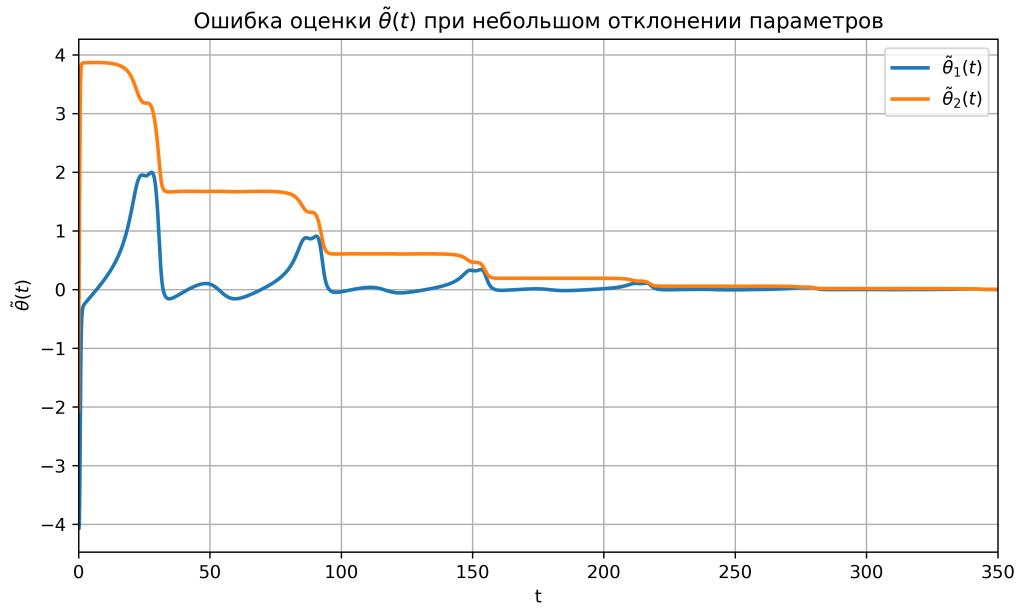


Рис. 13: Ошибка $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$ при незначительном отклонении параметров



Рис. 14: Состояния при сильном отклонении параметров и оценке $\hat{\theta}(t)$

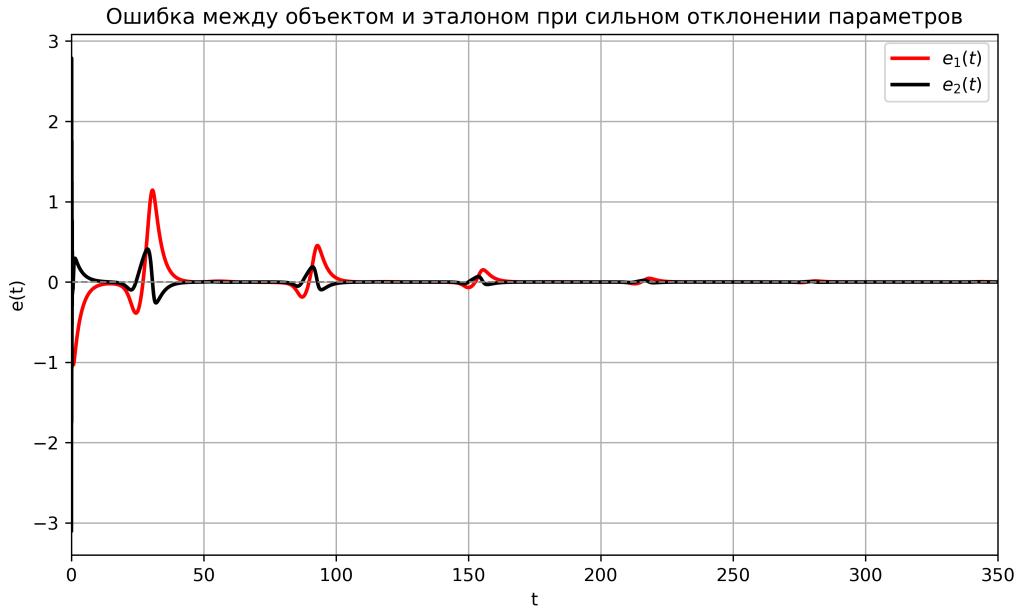


Рис. 15: Ошибка при сильном отклонении параметров и оценке $\hat{\theta}(t)$

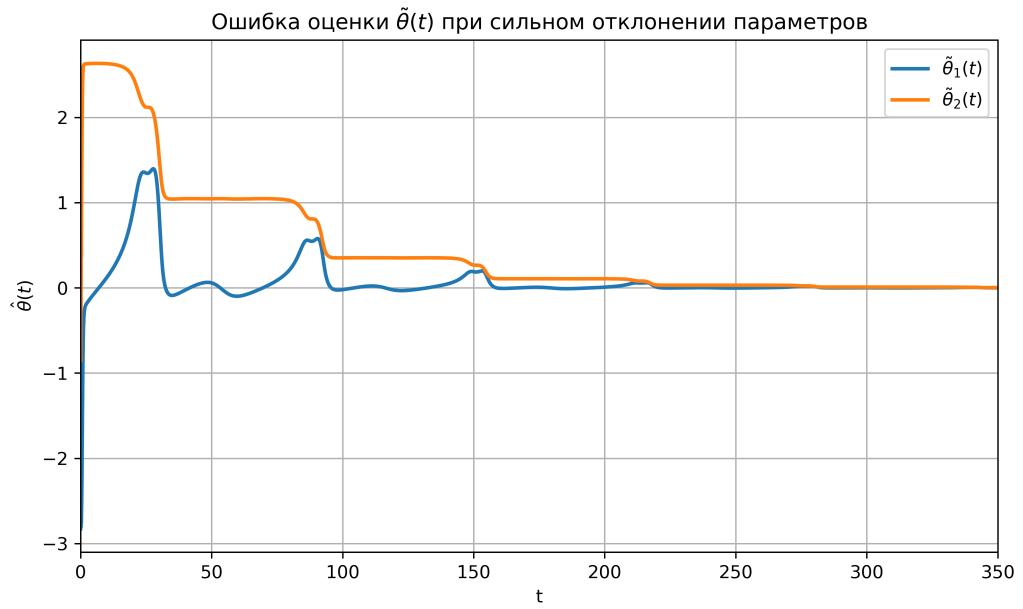


Рис. 16: Ошибка $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$ при сильном отклонении параметров

Отметим, что если вектор x удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения:

$$\exists \alpha > 0, T > 0 : \int_t^{t+T} x(\tau)x^T(\tau)d\tau \geq \alpha I, \quad \forall t \geq 0$$

То оценка параметров $\hat{\theta}(t)$ будет асимптотически сходиться к истинным значениям θ . А так как в рамках пункта решается задача слежения, то условие неисчезающего возбуждения можно свести к таковому для задающего воздействия $g(t)$. Гармоники в составе $g(t)$ обеспечивают выполнение этого условия, поэтому составляющие ошибки $\tilde{\theta}(t)$ в наших экспериментах и получились близкими к нулю.

Также при выполнении условия должно существовать оптимальное γ , при котором скорость сходимости параметрической ошибки $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ максимальна. Проверим это, изменения коэффициент адаптации $\gamma \in \{5, 50, 200\}$. Результаты приведены на рисунках 17 - 25.



Рис. 17: Оценка параметров $\hat{\theta}(t)$

Можем видеть, что увеличение параметра γ сначала привело к более высокой скорости сходимости оценки, однако при дальнейшем

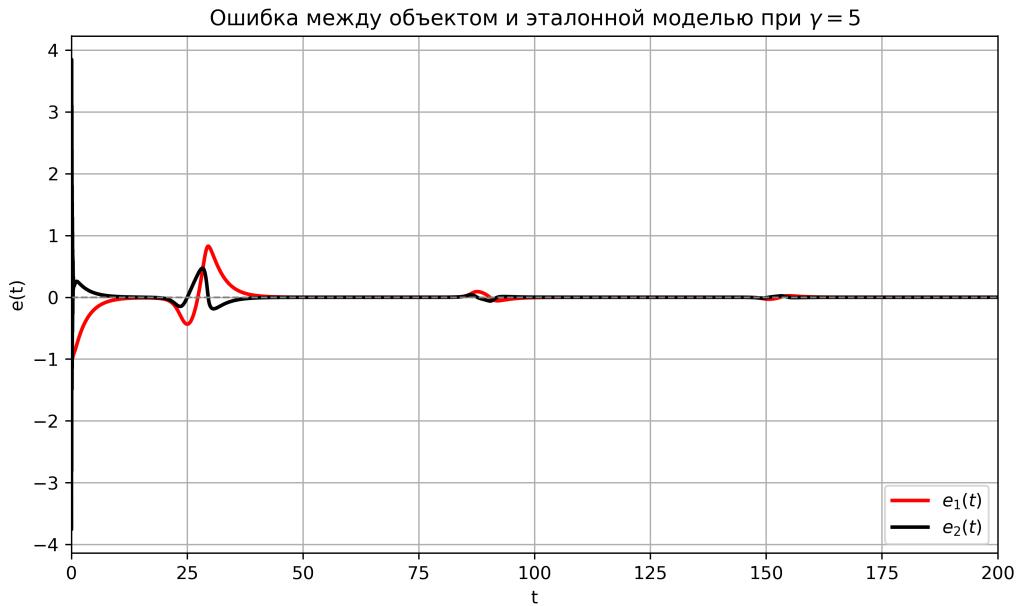


Рис. 18: Ошибка при расчетных значениях параметров и $\gamma = 5$

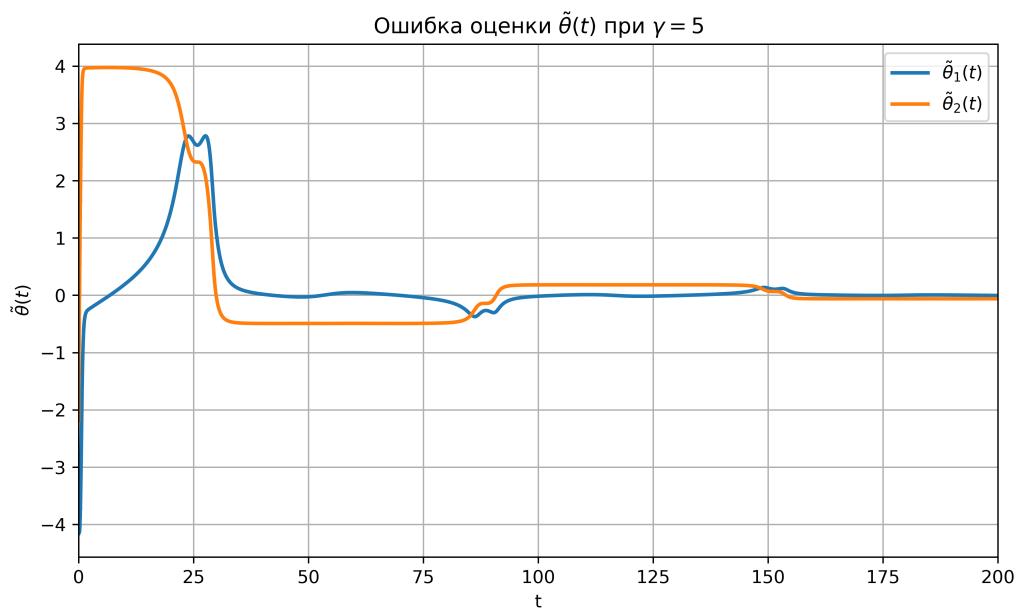


Рис. 19: Ошибка $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$ при расчетных значениях и $\gamma = 5$



Рис. 20: Состояния при расчетных значениях параметров и $\gamma = 50$

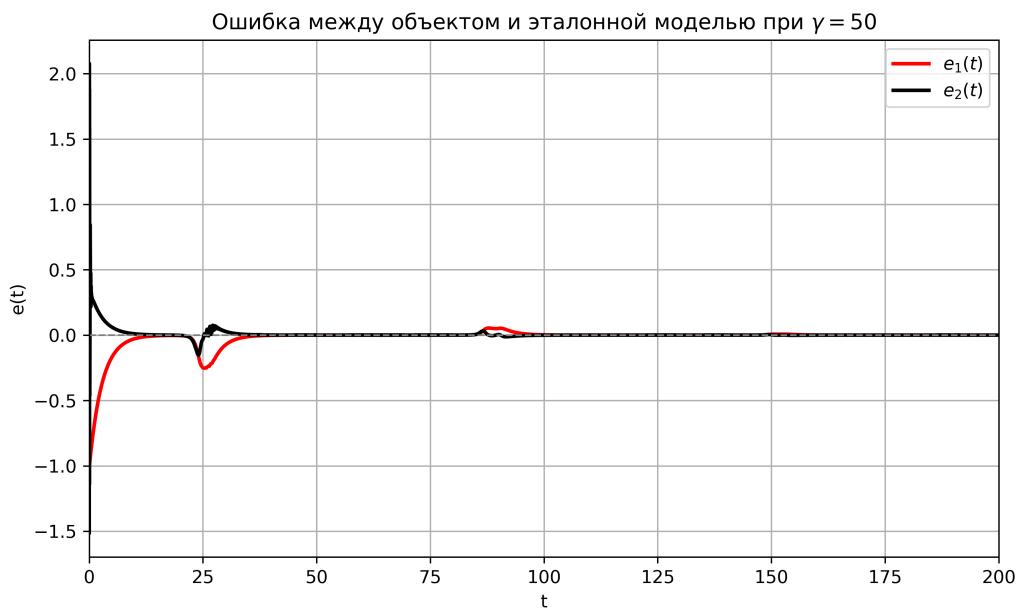


Рис. 21: Ошибка при расчетных значениях параметров и $\gamma = 50$

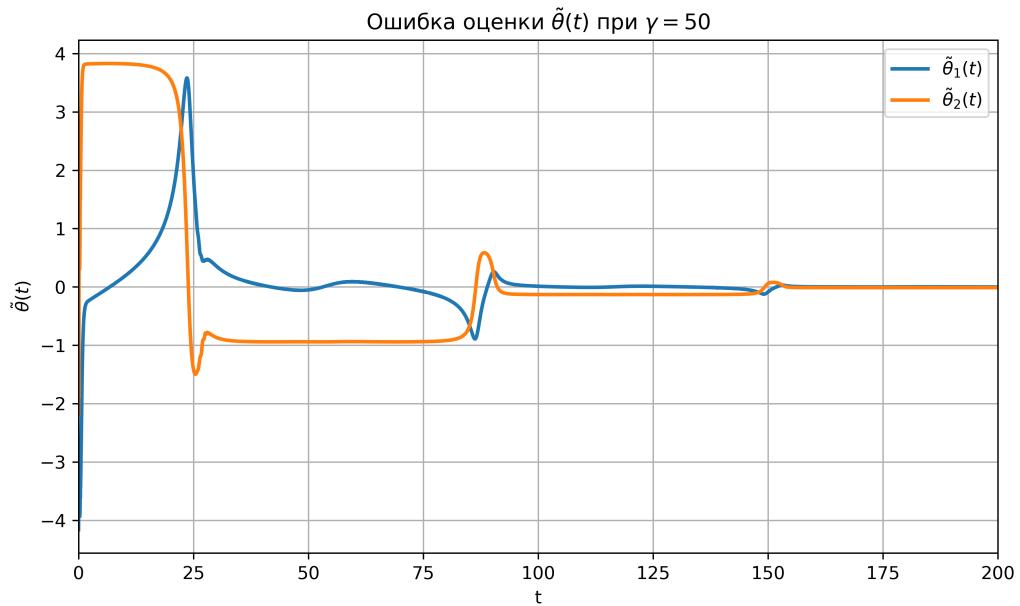


Рис. 22: Ошибка $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$ при расчетных значениях u и $\gamma = 50$

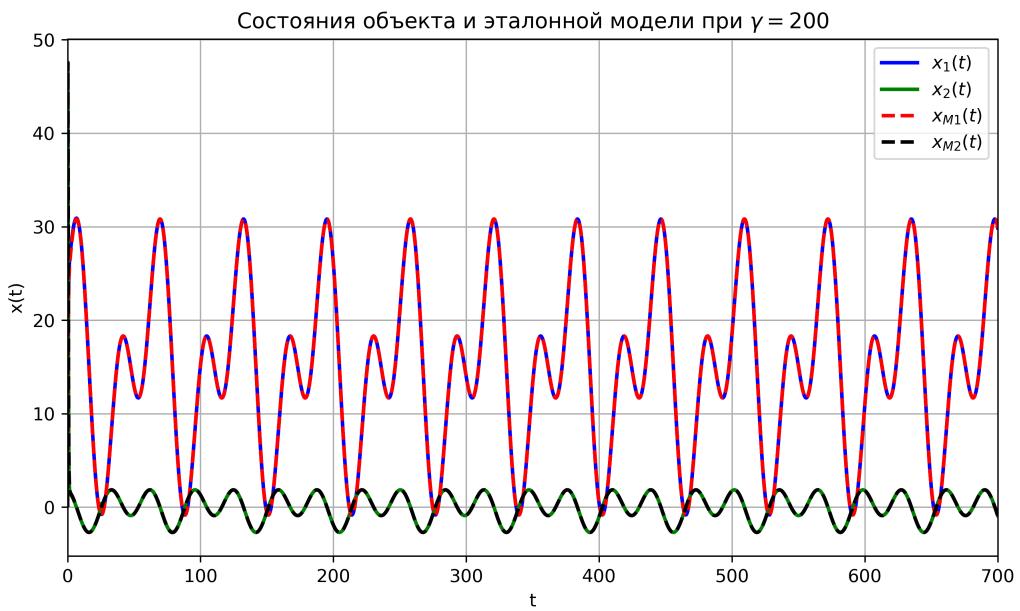


Рис. 23: Состояния при расчетных значениях параметров u и $\gamma = 200$

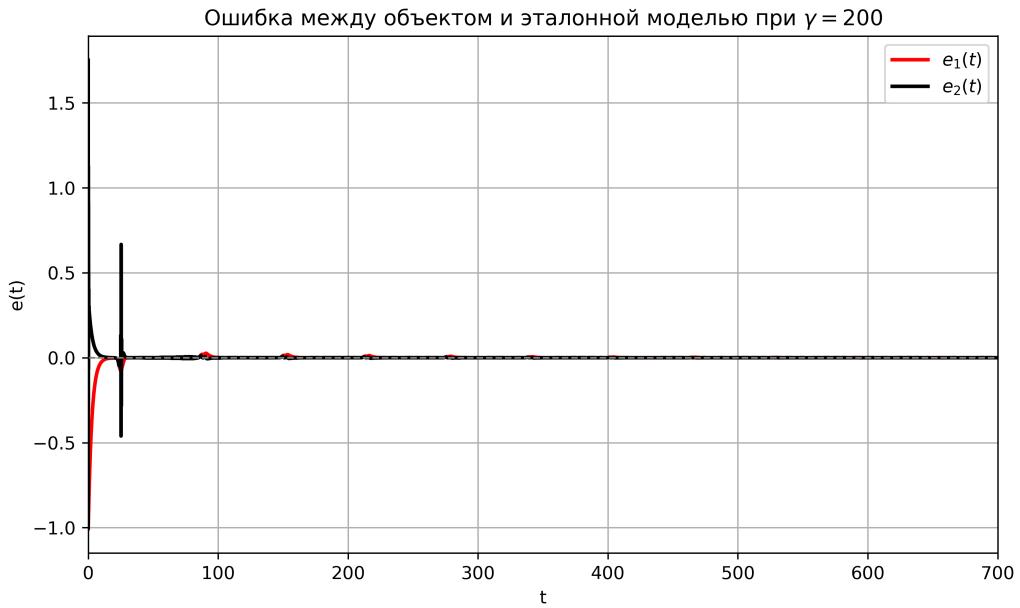


Рис. 24: Ошибка при расчетных значениях параметров и $\gamma = 200$

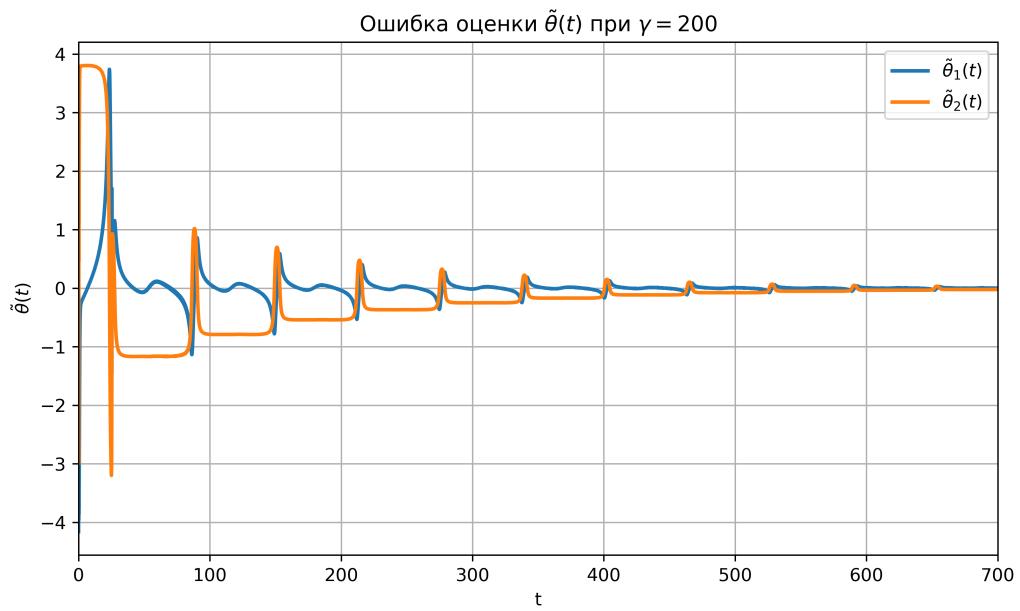


Рис. 25: Ошибка $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$ при расчетных значениях и $\gamma = 200$

его увеличении быстродействие сильно упало, вплоть до более худших значений в сравнении с $\gamma = 5$. Таким образом, оптимальное значение γ лежит где-то около 5 и 50 - выполняется свойство *существования оптимального коэффициента адаптации* алгоритма.

Теперь посмотрим, что будет при постоянном задающем воздействии $g(t) = 1$. Для моделирования используем алгоритм адаптации с параметром $\gamma = 1$ и начальные условия $\hat{x} = [0 \ 0]^T$ и $x = [1 \ 1]^T$, а также расчётные значения параметров θ . Результаты приведены на рисунках 26 - 28.

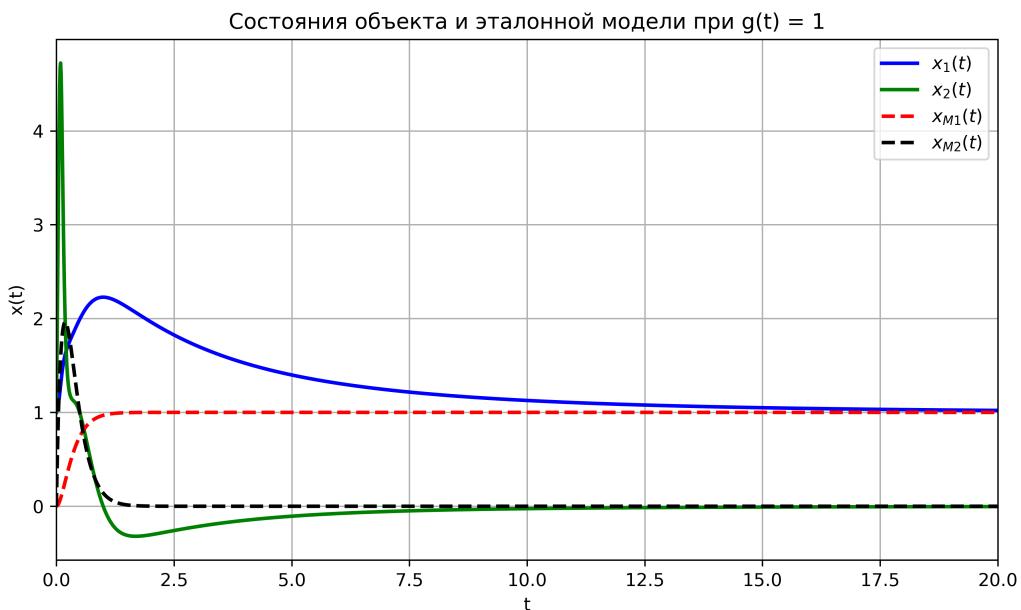


Рис. 26: Состояния при расчетных значениях параметров, $\gamma = 1$ и $g(t) = 1$

Все оценки состояний сошлились, ошибка стремится к нулю, однако оценки параметров $\hat{\theta}(t)$ не сходятся к истинным значениям θ . Это связано с тем, что при постоянном задающем воздействии условие неисчезающего возбуждения не выполняется, так как состояния быстро выходят на стационарный режим и перестают изменяться. Следовательно, одно из собственных чисел матрицы интеграла:

$$\int_t^{t+T} x(\tau)x^T(\tau)d\tau \geq \alpha I, \quad \forall t \geq 0$$

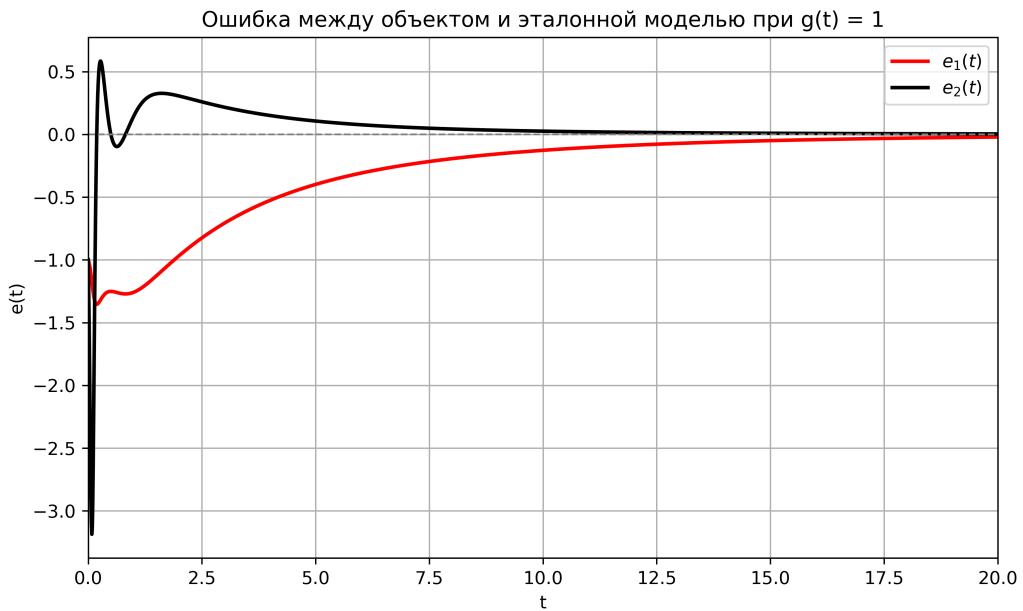


Рис. 27: Ошибка при расчетных значениях параметров, $\gamma = 1$ и $g(t) = 1$

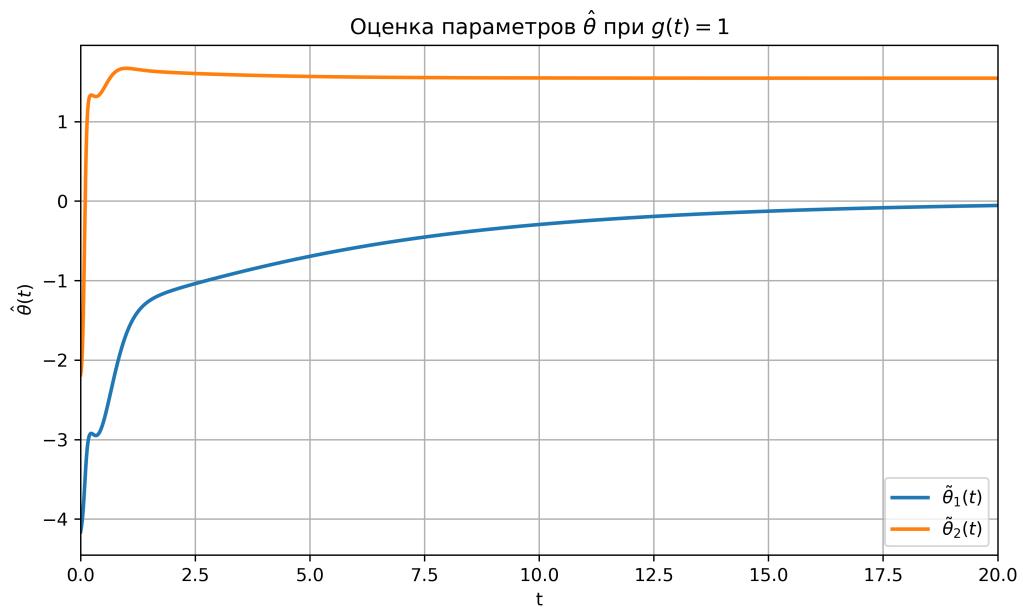


Рис. 28: Ошибка $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$ при расчетных значениях, $\gamma = 1$ и $g(t) = 1$

Становится равным нулю, из-за чего условие неисчезающего возбуждения нарушается, и оценки параметров не могут сойтись к истинным значениям - не происходит достаточного возбуждения системы для корректной оценки всех её параметров. Следовательно, условие неисчезающих возбуждений действительно является ключевым в рассматриваемом алгоритме адаптации для сходжения к нулю ошибки оценки параметров $\hat{\theta}(t)$.

6 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были исследованы методы построения адаптивного управления многомерным объектом с параметрической неопределенностью. Разработана и проверена эталонная модель с требуемыми характеристиками переходного процесса. Показано, что регулятор с неадаптивным управлением работает корректно только при известных точных параметрах объекта, а при их отклонениях теряет асимптотические свойства или становится неустойчивым.

Синтезированный адаптивный регулятор с динамической оценкой параметров объекта демонстрирует устойчивость и обеспечивает асимптотическое стремление ошибки к нулю даже при значительных отклонениях параметров. Установлено, что выбор коэффициента адаптации критически влияет на скорость сходимости, и существует оптимальное его значение. Подтверждена важность условия неисчезающего возбуждения для сходимости оценок параметров к истинным значениям.