Научно исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Отчет
по дисциплине
«Моделирование динамических систем»

Практическая работа №5

Вариант №3

Выполнили Воротников А.А., Гридусов Д.Д., Мовчан И.Е.
Преподаватель Семенов Д.М.

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Задание 1

1.1 Условие

Пусть задана система с задержкой:

$$\dot{x}(t) = -\mathrm{sign}(x(t-h)), \quad t \geq 0, \ h = 2 > 0,$$

h - постоянная задержка, $x(t) = \varphi(t)$ на $[-h, 0]$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0.5, & t \in [-2, -1), \\ -t - 0.5, & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Необходимо построить решение системы методом шагов.

1.2 Решение

Так как производная $\dot{x}$ как бы запаздывает в своих значениях, мы можем определить значения исходной функции x по ней, используя предыдущие. Итак, пусть $t \in [0, 2]$, из начальных условий знаем $x(0) = \varphi(0) = -0.5$, тогда

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -1, & \varphi(t-2) > 0, \\ \dot{x}(t) = 1, & \varphi(t-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = -1, & t \in [0, 1.5), \\ \dot{x}(t) = 1, & t \in [1.5, 2]. \end{cases}$$

Теперь если $\dot{x}(t) = -1$ на $[0, 1.5)$, то $x(t) = -t + C$, где $-0.5 = 0 + C \Rightarrow C = -0.5$, и $x(1.5) = -1.5 - 0.5 = -2$.

А для $[1.5, 2)$: $\dot{x}(t) = -1$, откуда $x(t) = t + C$, где $-2 = 1.5 + C \Rightarrow C = -3.5$, и $x(2) = 2 - 3.5 = -1.5$.

Аналогично можем распространить решение и на отрезок $[2, 4]$. В данном случае $\dot{x} = 1$ на всём $[2, 4]$, так как на предыдущем шаге получили отрицательную функцию на промежутке $(0, 2]$, но тогда $x(t) = t + C$, где $2 + C = -1.5 \Rightarrow C = -3.5$.

А также на отрезок $[4, 6]$: $x(t) = t - 3.5$ на $[4, 5.5)$, $x(t) = -t + 7.5$ на $[5.5, 6]$.

График системы выходит следующим:

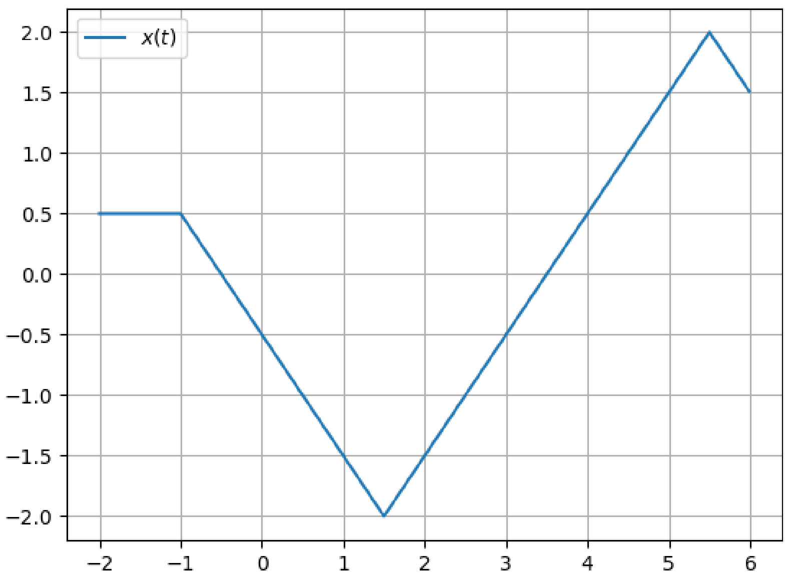

Рис. 1: График системы при $h = 2$

2 Задание 2

2.1 Условие

Пусть дана система с произвольной задержкой $\tau(t)$:

$$\dot{x} = -2x(t) - 0.1x(t - \tau(t))$$

Необходимо построить функцию Ляпунова и с помощью метода Разумихина доказать устойчивость данной системы.

2.2 Решение

Функция Ляпунова задаётся выражением

$$V(x) = x^2.$$

Её производная тогда

$$V'(x) = 2x\dot{x} = 2x(-2x + 0.1x(t - \tau(t))) = -4x^2 + 0.2x(t)x(t - \tau(t)).$$

Для устойчивости системы необходимо, чтобы $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ для всех $x(t+\theta)$ ($\theta \in [-h, 0]$), удовлетворяющих $V(x(t+\theta)) <= V(x(t))$. По методу же Разумихина данное выполнено, если

$$\Psi = \begin{bmatrix} A^T P + PA + qP & PA_1 \\ A_1^T P & -qP \end{bmatrix} < 0,\ q > 0,\ P > 0$$

В нашем случае $A = -2, A_1 = -0.1$, а это значит, что

$$\Psi = \begin{bmatrix} -4P + qP & -0.1P \\ -0.1P & -qP \end{bmatrix} < 0,\ q > 0,\ P > 0$$

Решим с помощью критерия Сильвестра:

$$\begin{cases} -4P + qP = -P(4 - q) < 0, \\ -P^2((-4 + q)q + 0.01) > 0, \\ q > 0, \\ P > 0. \end{cases}$$

Откуда получаем, что система разрешима при $q \in (0.0025, 3.9975)$, а значит, она асимптотически устойчива.

3 Задание 3

3.1 Условие

Пусть дана система с постоянной задержкой $h = 3$:

$$\dot{x} = Ax(t) + A_1 x(t - h),\ A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Необходимо построить графики системы (смоделировать её) и доказать её устойчивость.

3.2 Решение

По методу функционалов Ляпунова-Красовского, система устойчива, если разрешимо

$$\Psi = \begin{bmatrix} A^TP + PA + Q & PA_1 \\ A_1^TP & -(1-\dot{\tau}(t))Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^TP + PA + Q & PA_1 \\ A_1^TP & -Q \end{bmatrix} < 0$$

для $P > 0$, $Q > 0$.

Решение в MATLAB даёт

$$P = \begin{bmatrix} 0.3183 & -0.0205 \\ -0.0205 & 0.3154 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 1.0558 & 0.1102 \\ 0.1102 & 1.2894. \end{bmatrix}$$

Неравенство разрешилось, а значит, система устойчива. Посмотрим на графиках:

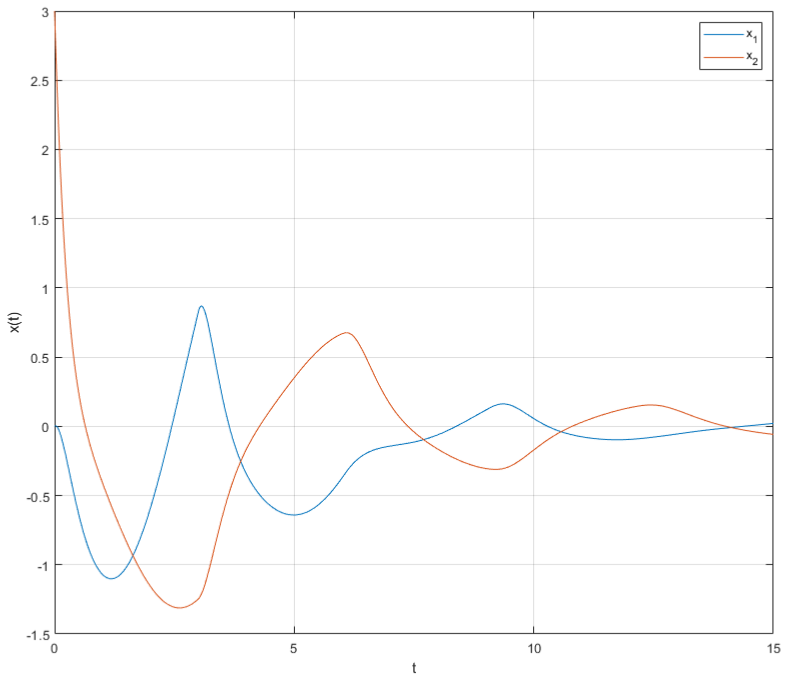

Рис. 2: Моделирование системы

4 Выводы

По результатам выполнения лабораторной работы был изучен способ построения графика решения системы с постоянной задержкой h (метод шагов), исследованы способы доказать устойчивость системы с задержкой (методы Лянуова-Красовского и Разумихина, использующие матричные неравенства для достижения результатов).