



ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

**Лабораторная работа №1
по Теории идентификации**

Метод наименьших квадратов
Вариант 23

Работу выполнили: Соколов Дмитрий Алексеевич, gr: R3443, isu: 368825
Мовчан Игорь Евгеньевич, gr: R3480, isu: 368540
Тенишев Алексей Николаевич, gr: R3435, isu: 387157

Дата выполнения: 16.11.2025 г.
Преподаватель: Ведяков Алексей Алексеевич

Содержание

1 Задание 1	4
1.1 Оценка параметров	4
1.2 Графики $y(t)$ и $\hat{y}(t)$	4
1.3 Графики ошибок	5
1.4 Выводы	6
2 Задание 2	7
2.1 Представление гипотез в виде линейной регрессии	7
2.2 Оценка параметров	7
2.3 Графики аппроксимаций	7
2.4 Выводы	10
3 Задание 3	11
3.1 Модель для zad31	11
3.2 Модель для zad32	11
3.3 Графики аппроксимаций	11
3.4 Выводы	12

1 Задание 1

Исходная модель имеет вид:

$$y(t) = x_1(t)\theta_1 + x_2(t)\theta_2 + x_3(t)\theta_3 + v(t),$$

где $v(t)$ — шум измерений, $v(t)(0, 1)$. Требуется оценить параметры $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ по данным `zad11` и `zad12`.

1.1 Оценка параметров.

Запишем модель в матричном виде:

$$y = X\theta + v, \quad X = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & x_3(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1(N) & x_2(N) & x_3(N) \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}.$$

МНК-оценка параметров:

$$\hat{\theta} = (X^\top X)^{-1} X^\top y.$$

Полученные результаты:

$$\textbf{zad11: } \hat{\theta}_1 = 1.994, \hat{\theta}_2 = -8.004, \hat{\theta}_3 = -6.001.$$

$$\textbf{zad12: } \hat{\theta}_1 = 1.286, \hat{\theta}_2 = -8.005, \hat{\theta}_3 = -6.004.$$

1.2 Графики $y(t)$ и $\hat{y}(t)$

$$\hat{y}(t) = X(t)\hat{\theta}$$

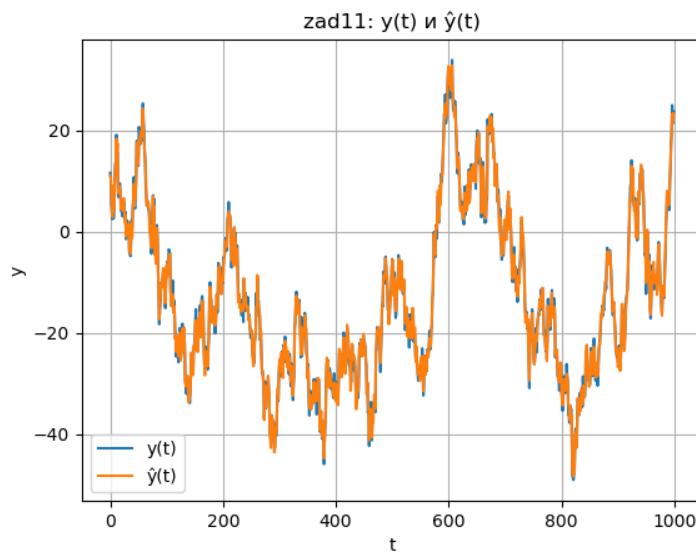


Рис. 1: Оценка данных из файла `zad11`

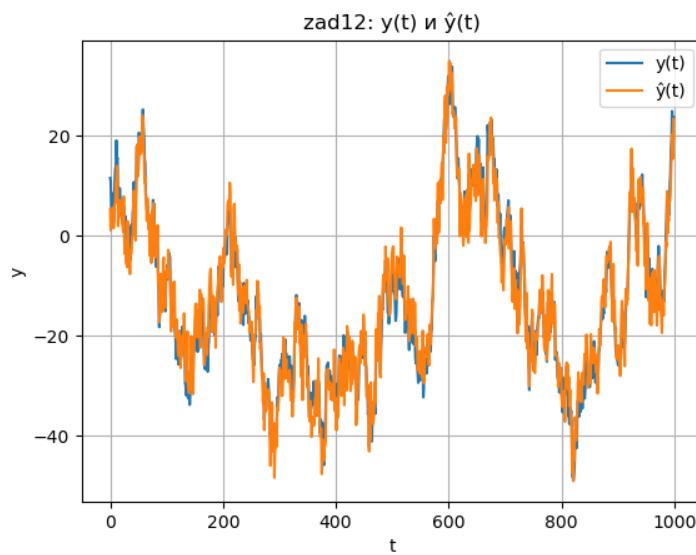


Рис. 2: Оценка данных из файла zad12

1.3 Графики ошибок

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$$

Средние ошибки:

$$\text{zad11: } \bar{e} = 0.013, \sigma_e = 0.98,$$

$$\text{zad12: } \bar{e} = 0.053, \sigma_e = 3.35.$$

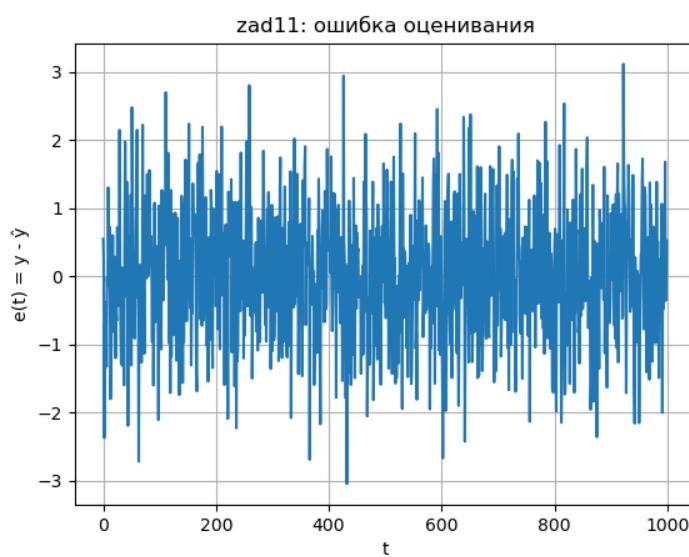


Рис. 3: Ошибка оценки данных из файла zad11

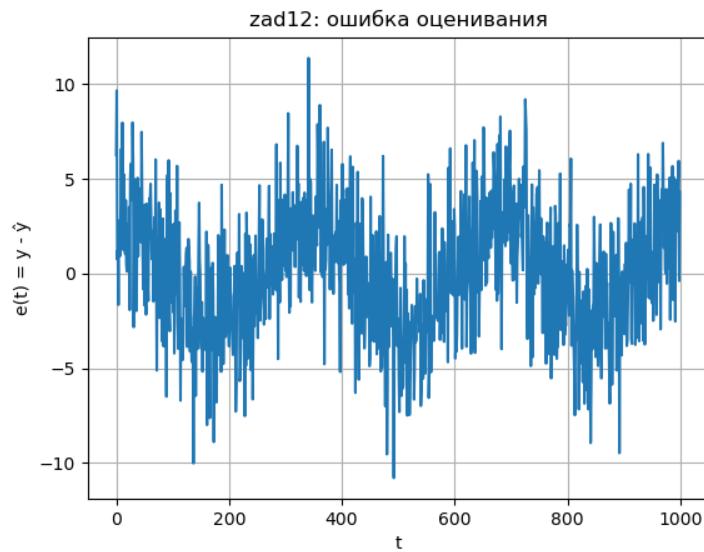


Рис. 4: Ошибка оценки данных из файла zad12

1.4 Выводы

- Среднее ошибки близко к нулю — обе оценки являются **несмещёнными**.
- Дисперсия ошибки у набора zad11 в районе 1, что говорит о стандартном нормальном распределении, что нельзя сказать про набор zad12.
- В рамках линейной регрессии (при $E[v] = 0, D[v] = \sigma^2 I$) МНК является оптимальной.

2 Задание 2

Имеются зависимости скорости реакции V от температуры T в файлах `zad21` и `zad22`. Рассматриваются две гипотезы:

$$(H1) : V = bT + c, \quad (H2) : V = aT^2 + bT + c.$$

2.1 Представление гипотез в виде линейной регрессии

Линейная модель:

$$V = bT + c = [T \ 1] \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}.$$

Квадратичная модель:

$$V = aT^2 + bT + c = [T^2 \ T \ 1] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

2.2 Оценка параметров

$$\hat{\theta} = (X^\top X)^{-1} X^\top V.$$

Результаты:

zad21: H1: $b = 18.98, c = 3.19, \bar{e} = 7.308, \sigma_e^2 = 64.6$;
 H2: $a = 0.0102, b = 17.97, c = 26.66, \bar{e} = -1.023, \sigma_e^2 = 62.8$.

zad22: H1: $b = 17.95, c = 69.89, \bar{e} = -1.949, \sigma_e^2 = 1097$;
 H2: $a = -0.2503, b = 42.73, c = -506.84, \bar{e} = -7.552, \sigma_e^2 = 41.4$.

2.3 Графики аппроксимаций

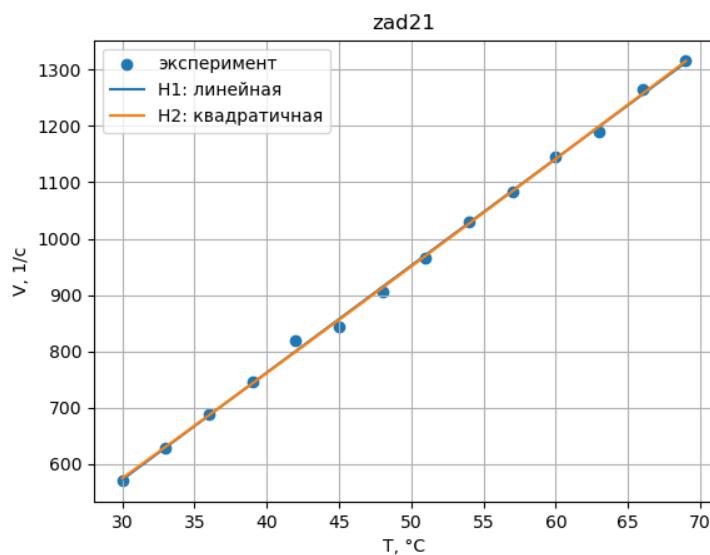


Рис. 5: Оценка данных для двух гипотез из файла `zad21`

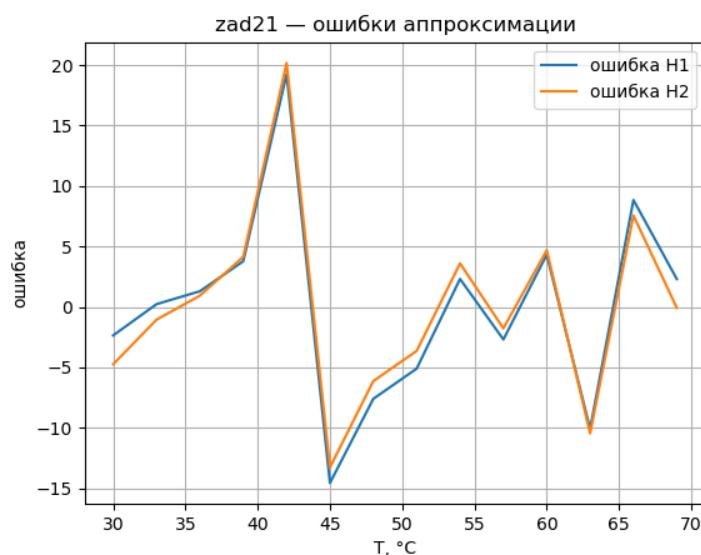


Рис. 6: Ошибка оценки данных из файла zad21

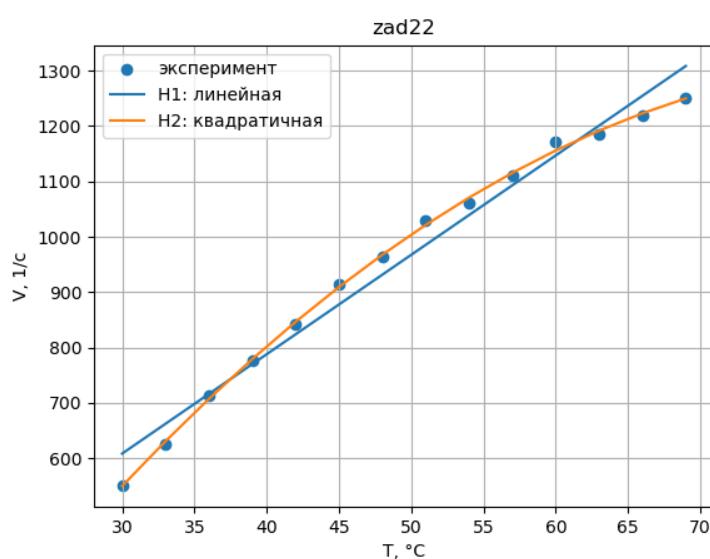


Рис. 7: Оценка данных для двух гипотез из файла zad22

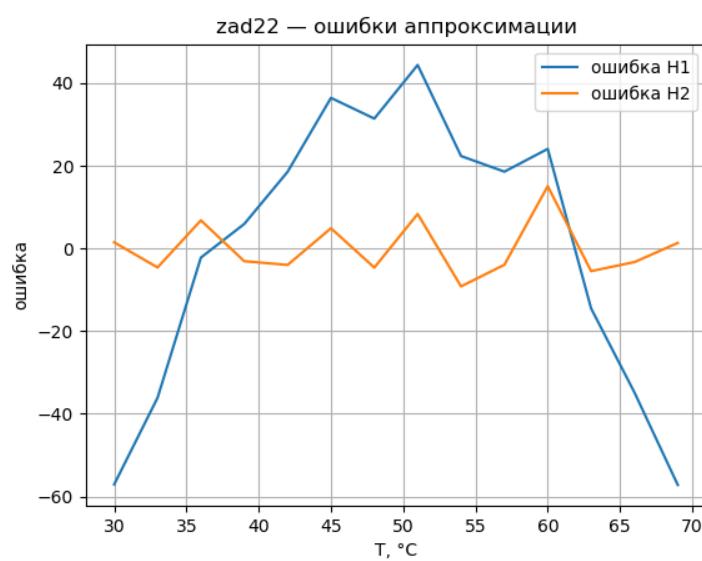


Рис. 8: Ошибка оценки данных из файла zad21

2.4 Выводы

- Для zad21 различие малое — **линейная модель достаточно точна**.
- Для zad22 ошибка квадратичной аппроксимации в десятки раз меньше. Следовательно, **гипотеза (H2)** является наиболее достоверной.

3 Задание 3

Даны функция $y = f(x, p_1, p_2)$ и экспериментальные точки из zad31 и zad32.

3.1 Модель для zad31

Предположим степенную зависимость:

$$y = p_1 x^{p_2}.$$

Линеаризуем логарифмированием:

$$\ln y = \ln p_1 + p_2 \ln x.$$

В виде линейной регрессии:

$$Z = a + bU, \quad Z = \ln y, \quad U = \ln x.$$

Оценки:

$$p_1 = 4.34, \quad p_2 = -0.391.$$

3.2 Модель для zad32

Предположим экспоненциальную зависимость:

$$y = p_1 e^{p_2 x}.$$

Линеаризуем:

$$\ln y = \ln p_1 + p_2 x.$$

Оценки:

$$p_1 = 1.00, \quad p_2 = -0.20.$$

3.3 Графики аппроксимаций

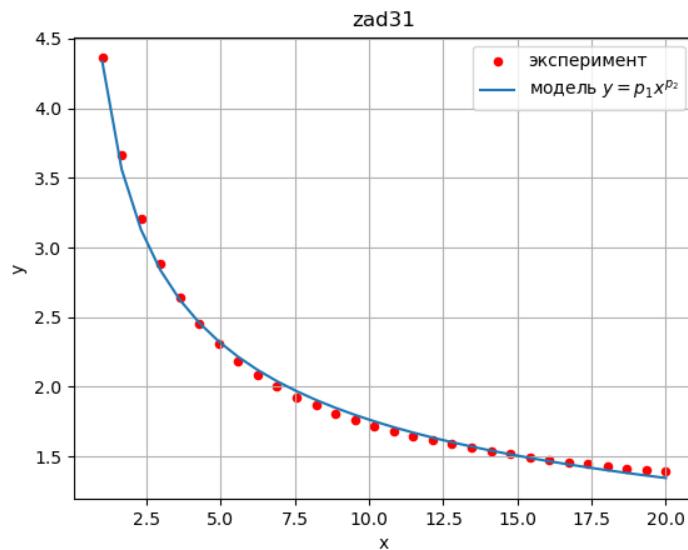


Рис. 9: График оценки данных из файла zad31

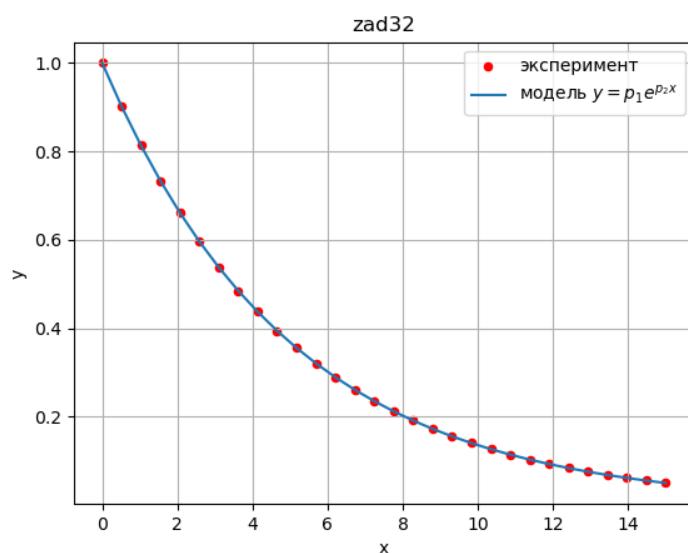


Рис. 10: График оценки данных из файла zad32

3.4 Выводы

- Для zad31 экспериментальные данные хорошо соответствуют степенной функции.
- Для zad32 оптимальна экспоненциальная модель.