Научно исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе А
Линейно-квадратичные радости
Вариант 11

Выполнил студент группы R3380 Мовчан Игорь Евгеньевич
Преподаватель Пашенко Артем Витальевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Исследование LQR

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x_0 = x(0) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$$

В соответствии с вариантом, матрицы A и B имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 13 \\ 6 & -1 & 6 \\ -6 & -1 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Проверим система на стабилизируемость. Для этого перейдем к Жордановой форме системы с матрицами $\hat{A}$, имеющей собственными числами $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 3$, $\hat{B}$ и матрицей T перехода:

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Можно получить обратную матрицу к T:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Таким образом, обнулилась первая строка матрицы $\hat{B}$, связанная с собственным числом $\lambda_1 = -2$, значит, оно не управляемо. Для пары компексно-сопряженных $\lambda_{23} = 2 \pm 3i$ хотя бы одна из двух соответствующих строчек матрицы $\hat{B}$ не обнулена ($\hat{B}_2 = 0$, но $\hat{B}_3 \neq 0$), значит, они управляемы.

По итогу система является частично управляемой, но стабилизируемой, так как единственное неуправляемое собственное число имеет отрицательную вещественную часть ($\Re(\lambda_1) = -2 < 0$) и является устойчивым, а значит, возможно создать стабилизирующее управление, сводящее вектор состояния к нулю.

Замкнем систему регулятором $u = Kx$. Соответствующая схема приведена на рисунке:

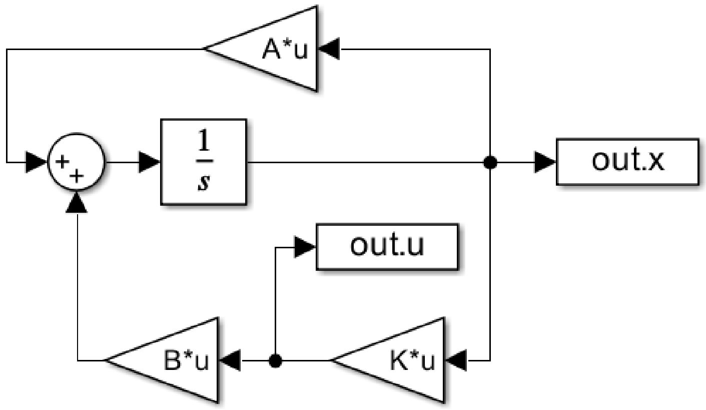

Рис. 1: Схема замкнутой системы при LQR

Зададимся значениями матриц:

$$Q^* = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \quad R^* = 1 \succ 0$$

а также значением параметра $\alpha = 15 > 0$. С их помощью сформируем четыре набора матриц (Q, R):

$$(Q_1, R_1) = (Q^*, R^*), \quad (Q_2, R_2) = (\alpha Q^*, R^*)$$
$$(Q_3, R_3) = (Q^*, \alpha R^*), \quad (Q_4, R_4) = (\alpha Q^*, \alpha R^*)$$

или:

$$(Q_1, R_1) = (I, 1), \quad (Q_2, R_2) = (15I, 1)$$
$$(Q_3, R_3) = (I, 15), \quad (Q_4, R_4) = (15I, 15)$$

Для каждого из наборов матриц (Q, R) синтезируем регулятор, минимизирующий функционал качества:

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

Для выполнения поставленной задачи будем решать матричное уравнение Риккати относительно матрицы $P \succ 0$ при $\nu = 1$:

$$A^T P + PA + Q - \nu PBR^{-1}B^T P = 0$$

и вычислять матрицу K обратной связи как:

$$K = -R^{-1}B^T P$$

Отметим, что в LQR-регуляторах матрицы Q и R играют роль штрафов за медленные процессы и большие управления соответственно. Изучим их влияние на вид синтезируемых регуляторов.

Начнём с пары $(Q_1, R_1) = (I, 1)$**.**

Решением соответствующего уравнения Риккати при $Q = Q_1$ и $R = R_1$ является матрица P_1:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.6791 & -0.2724 & 2.3301 \\ -0.2724 & 1.0726 & -0.1762 \\ 2.3301 & -0.1762 & 2.3594 \end{bmatrix} \succ 0$$

Тогда матрица регулятора K_1 равна:

$$K_1 = -R_1^{-1}B^T P_1 = \begin{bmatrix} -5.3581 & 0.5448 & -4.6602 \end{bmatrix}$$

На основе P_1, можно вычислить минимальное значение функционала качества, которого и достигает найденный регулятор при интегрировании на бесконечном промежутке времени ($x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$):

$$J_{min1} = x_0^T P_1 x_0 = 9.87405$$

Также можно найти экспериментальное значением функционала качества, то есть ограничиться временем $t_1 = 2$:

$$J_{exp1} = \int_0^{t_1} (x^T Q_1 x + (K_1 x)^T R_1 (K_1 x)) dt = 9.87383$$

Видим, что значения J_{min1} и J_{exp1} *очень* близки друг к другу. При ещё большем увеличении времени за счёт положительной определенности матриц Q и R значение J_{exp1} возрастёт, придя «на бесконечности» к минимальному J_{min1}.

Теперь рассмотрим пару $(Q_2, R_2) = (15I, 1)$**.**

Решением всё того же уравнения Риккати при $Q = Q_2$ и $R = R_2$ будет

$$P_2 = \begin{bmatrix} 4.7281 & 0.3869 & 2.8534 \\ 0.3869 & 4.5266 & 1.9003 \\ 2.8534 & 1.9003 & 4.9640 \end{bmatrix} \succ 0$$

Тогда обратная связь K_2 равна:

$$K_2 = -R_2^{-1} B^T P_2 = \begin{bmatrix} -9.4563 & -0.7738 & -5.7068 \end{bmatrix}$$

Аналогично предыдущему случаю, можно найти минимальное значение функционала качества (условия те же):

$$J_{min2} = x_0^T P_2 x_0 = 20.03906$$

и его экспериментальное значение при $t_2 = 2$:

$$J_{exp2} = \int_0^{t_1} (x^T Q_2 x + (K_2 x)^T R_2 (K_2 x)) dt = 20.0369$$

Далее возьмём пару $(Q_3, R_3) = (I, 15)$**.**

Решим уравнение Риккати при $Q = Q_3$ и $R = R_3$:

$$P_3 = \begin{bmatrix} 31.1904 & -5.0159 & 30.6312 \\ -5.0159 & 12.0429 & -4.8657 \\ 30.6312 & -4.8657 & 30.5511 \end{bmatrix} \succ 0$$

Матрица регулятора K_3 равна:

$$K_3 = -R_3^{-1} B^T P_3 = \begin{bmatrix} -4.1587 & 0.6688 & -4.0842 \end{bmatrix}$$

Минимальное значение функционала качества при начальном состоянии x_0:

$$J_{min3} = x_0^T P_3 x_0 = 77.971$$

Его экспериментальное значение при $t_3 = 2$:

$$J_{exp3} = \int_0^{t_3} (x^T Q_3 x + (K_3 x)^T R_3 (K_3 x)) dt = 77.9652$$

Наконец, рассмотрим пару $(Q_4, R_4) = (15I, 15)$**.**

Решением соответствующего уравнения Риккати при $Q = Q_4$ и $R = R_4$ является матрица P_4:

$$P_4 = \begin{bmatrix} 40.1859 & -4.0857 & 34.9516 \\ -4.0857 & 16.0893 & -2.6436 \\ 34.9516 & -2.6436 & 35.3909 \end{bmatrix} \succ 0$$

Матрица регулятора K_4 равна:

$$K_4 = -R_4^{-1} B^T P_4 = \begin{bmatrix} -5.3581 & 0.5448 & -4.6602 \end{bmatrix}$$

Минимальное значение функционала качества при x_0:

$$J_{min4} = x_0^T P_4 x_0 = 98.7405$$

Его экспериментальное значение при $t_4 = 2$:

$$J_{exp4} = \int_0^{t_4} (x^T Q_4 x + (K_4 x)^T R_4 (K_4 x)) dt = 98.7383$$

Проведем компьютерное моделирование системы с найденными регуляторами при начальном состоянии $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. На рисунках 2-5 изображены графики состояний системы при соответствующих им парах (Q_i, R_i). На рисунке 6 изображены графики синтезированных управлений. На рисунке 7 - графики экспериментальных и минимальных значений функционалов качества.

Сравним полученные результаты. Для этого также дополнительно вычислим получающиеся в результате синтеза регулятора значения собственных чисел матрицы замкнутой системы $A + BK_i$:

$$A + BK_1 = \begin{bmatrix} 0.2838 & -0.9105 & 3.6796 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A + BK_1) = \{-3.3581 \pm 3.7785i, -2\}$$

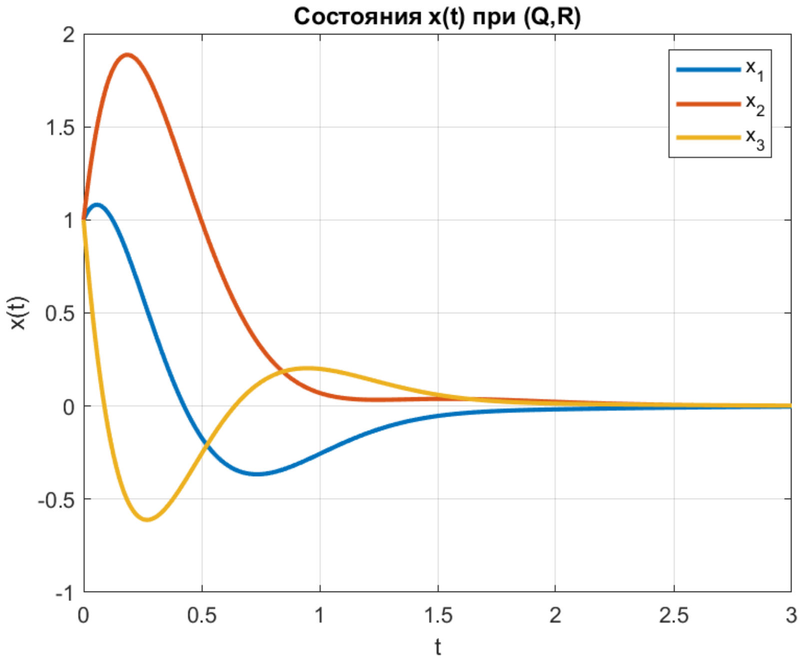

Рис. 2: Графики состояний системы с $(Q_1, R_1) = (I, 1)$ *при LQR*

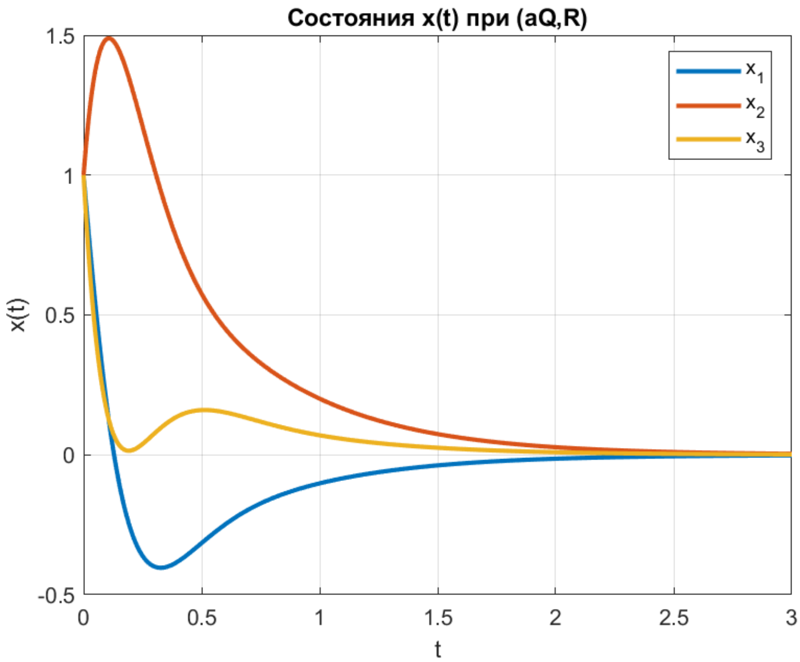

Рис. 3: Графики состояний системы с $(Q_2, R_2) = (\alpha I, 1)$ *при LQR*

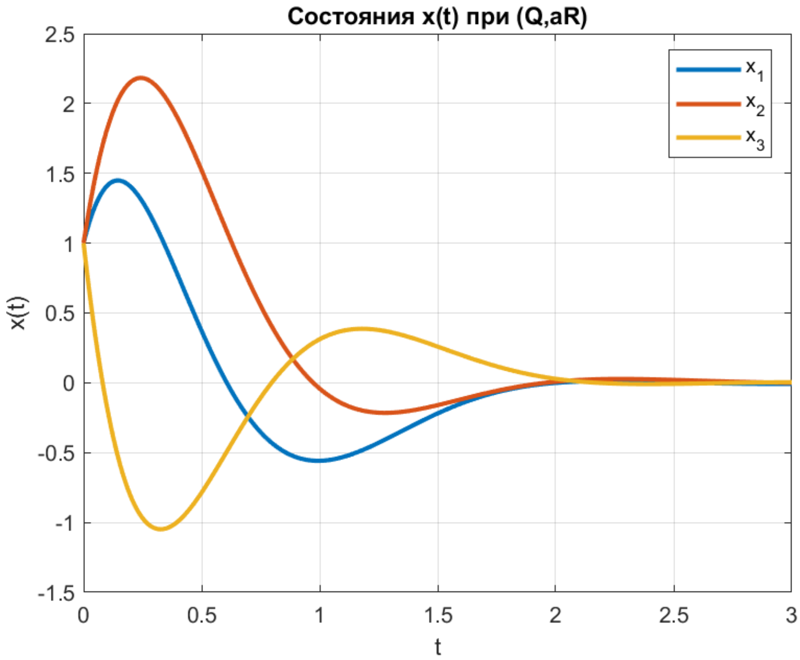

Рис. 4: Графики состояний системы с $(Q_3, R_3) = (I, \alpha)$ *при LQR*

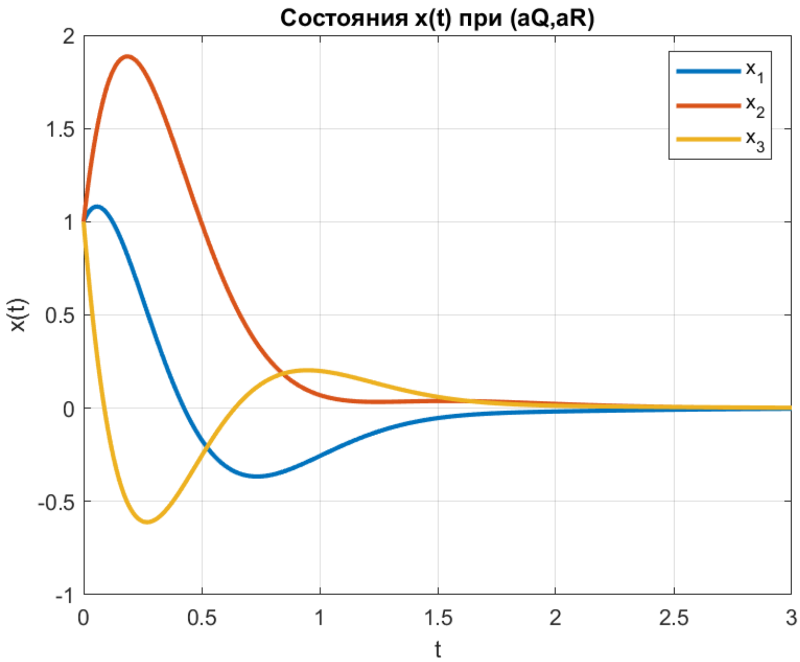

Рис. 5: Графики состояний системы с $(Q_4, R_4) = (\alpha I, \alpha)$ *при LQR*

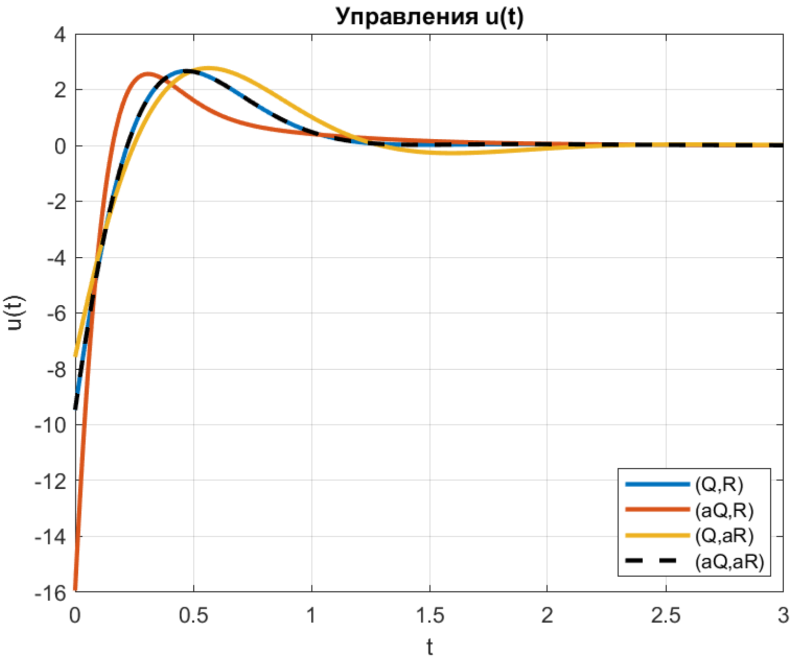

Рис. 6: Графики управлений с соответствующими парами (Q_i, R_i) *при* LQR

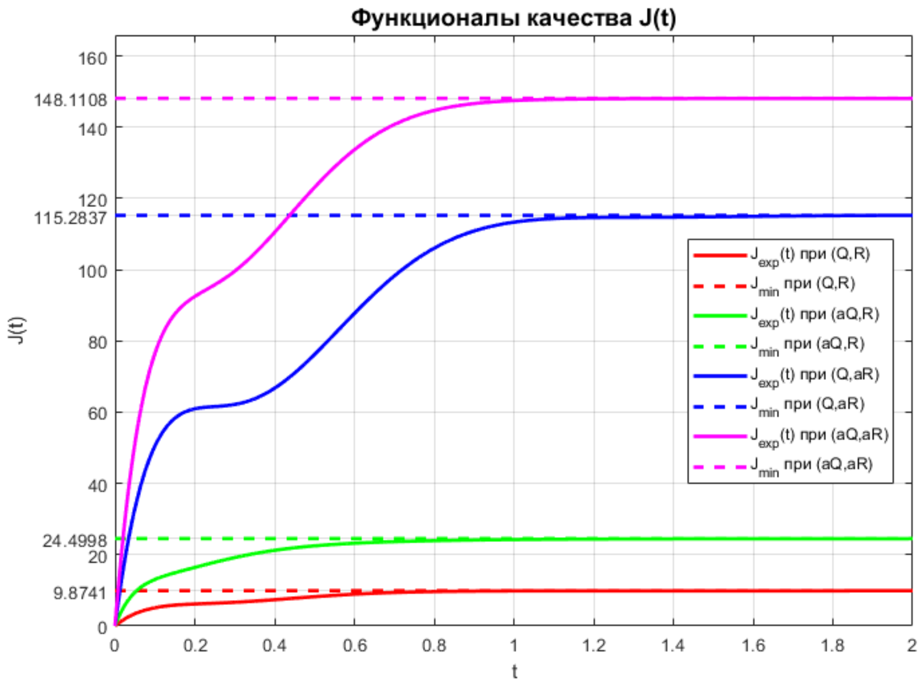

Рис. 7: Графики $J_{exp}(t)$ *и* $J_{min}(t)$ *с соответствующими парами* (Q_i, R_i) *при* LQR

$$A + BK_2 = \begin{bmatrix} -7.9125 & -3.5476 & 1.5864 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$
$$\sigma(A + BK_2) = \{-7.4563 \pm 5.5313i, -2\}$$
$$A + BK_3 = \begin{bmatrix} 2.6826 & -0.6624 & 4.8317 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$
$$\sigma(A + BK_3) = \{-2.1587 \pm 3.0865i, -2\}$$
$$A + BK_4 = \begin{bmatrix} 0.2838 & -0.9105 & 3.6796 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$
$$\sigma(A + BK_4) = \{-3.3581 \pm 3.7785i, -2\}$$

Итак, наиболее «мягко» ведёт себя система при $(Q_3, R_3) = (I, \alpha)$, то есть когда штраф за большие управления велик. Здесь имеем самые близкие к нулю вещественные части собственных чисел, соответственно, и медленные процессы - управление низкое.

При $(Q_2, R_2) = (\alpha I, 1)$ ситуация противоположная - собственные числа системы достигают наиболее отдаленных от нуля значений, что соответствует наиболее «жесткому» регулятору. Можем видеть резкие изменения состояний системы (рисунок 3) по сравнению с другими случаями (хотя неуправляемое собственное число и несколько ограничивает «быстродействие»)

При $(Q_1, R_1) = (I, 1)$ и $(Q_4, R_4) = (\alpha I, \alpha)$ замкнутые системы, их собственные числа и управления *идентичны*. По сути единственное отличие этих случаев - экспериментальные и минимальные значения функционалов качества, при (Q_4, R_4) они больше в α раз (рисунок 7 - там же можем видеть, что при $t = 2$ все $J_{exp}(t)$ приходят к соответствующим $J_{min}(t)$, что было получено ранее численно). Всё это говорит о том, что на вид синтезируемого регулятора влияет именно *соотношение* матриц Q и R. Соответственно, чем больше Q относительно R, тем большее быстродействие получается. Чем больше R относительно Q, тем меньше быстродействие, но и значения управления. При равных Q и R получается тогда некий «баланс».

2 Исследование LQE

Рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f \\ y = Cx + \xi \end{cases} \qquad x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

В соотвествие с вариантом, матрицы A, C имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 5 & -16 & 9 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ 32 & 9 & -25 & 14 \\ 8 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Также зададимся *детерминированными* сигналами $f(t)$ и $\xi(t)$, представляющими собой гармонические колебания:

$$f(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ 2\sin(4t) \\ 3\cos(t) \\ 4\sin(3t) \end{bmatrix}, \quad \xi(t) = \sin(5t)$$

Перед синтезом наблюдателей проверим, можно ли вообще их синтезировать. Для этого проверим, является ли система обнаруживаемой. Опять-таки используем Жорданову форму системы с матрицами $\hat{A}$, имеющей собственными числами $\lambda_{12} = \pm i$ и $\lambda_{34} = \pm 2i$, $\hat{C}$ и матрицей T перехода:

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 1 \\ 1 & -0.5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Откуда матрица C в жордановом базисе равна:

$$\hat{C} = CT = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Для каждой из пар комплексно-сопряженных чисел хотя бы один из соответствующих им столбцов матрицы $\hat{C}$ не обнуляется ($\hat{C}_2 = 0$, но $\hat{C}_1 = -0.5 \neq 0$ для λ_{12}, $\hat{C}_3 = -0.5 \neq 0$ и $\hat{C}_4 = 0.5 \neq 0$ для λ_{34}). Таким образом, каждое из собственных чисел наблюдаемо, следовательно, вся система является полностью наблюдаемой, соответственно, и обнаруживаемой, так как вообще нет ненаблюдаемых собственных чисел. Можем синтезировать наблюдатель.

Итак, схема наблюдателя состояния $\hat{x} = A\hat{x}+L(C\hat{x}-y)$ приведена на рисунке ниже:

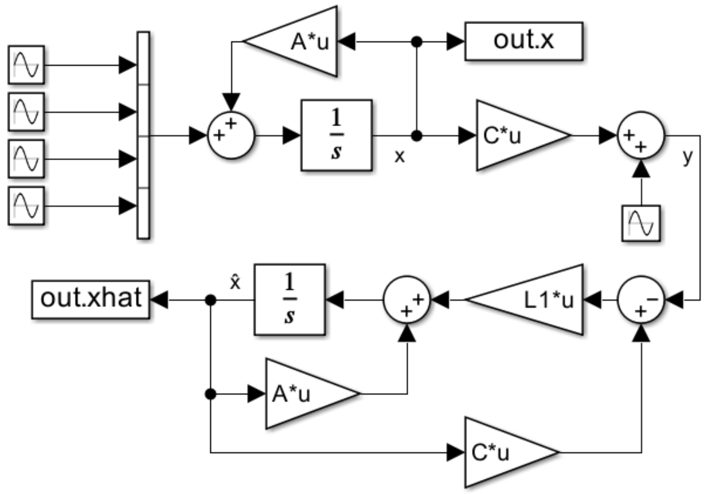

Рис. 8: Схема наблюдателя состояния при LQE

Теперь зададимся матрицами Q^* и R^*:

$$Q^* = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \quad R^* = 1 \succ 0$$

а также параметром $\alpha = 25 > 0$. С их помощью сформируем четыре набора матриц (Q, R):

$$(Q_1, R_1) = (Q^*, R^*), \quad (Q_2, R_2) = (\alpha Q^*, R^*)$$

$$(Q_3, R_3) = (Q^*, \alpha R^*), \quad (Q_4, R_4) = (\alpha Q^*, \alpha R^*)$$

или:

$$(Q_1, R_1) = (I, 1), \quad (Q_2, R_2) = (25I, 1)$$
$$(Q_3, R_3) = (I, 25), \quad (Q_4, R_4) = (25I, 25)$$

Для каждой из пар значений (Q, R) синтезируем наблюдатель с «критерием доверия»:

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T Q^{-1} x + \xi^T R^{-1} \xi) dt$$

Для этого решим матричное уравнение Риккати относительно матрицы $P \succ 0$ при $\nu = 1$:

$$AP + PA^T + Q - \nu P C^T R^{-1} C P = 0$$

После чего вычислим матрицу коррекции наблюдателя L как:

$$L = -PC^T R^{-1}$$

Отметим, что в LQE матрцы Q (ковариация шума процесса) и R (ковариация шума измерений) играют роль доверительных характеристик к модели и датчикам соответственно. Изучим их влияние на синтезируемый наблюдатель.

Опять-таки, начнём с $(Q_1, R_1) = (I, 1)$.

Решением уравнения Риккати для наблюдателя при $Q = Q_1$ и $R = R_1$ является положительно-определённая P_1:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 128.3827 & 43.1957 & 236.9805 & 122.1419 \\ 43.1957 & 19.2208 & 78.5788 & 37.3454 \\ 236.9805 & 78.5788 & 449.4129 & 242.4209 \\ 122.1419 & 37.3454 & 242.4209 & 142.2572 \end{bmatrix} \succ 0$$

Матрица коррекции наблюдателя L_1 тогда равна:

$$L_1 = -P_1 C^T R_1^{-1} = \begin{bmatrix} 13.5441 \\ 1.9623 \\ 29.9885 \\ 21.9782 \end{bmatrix}$$

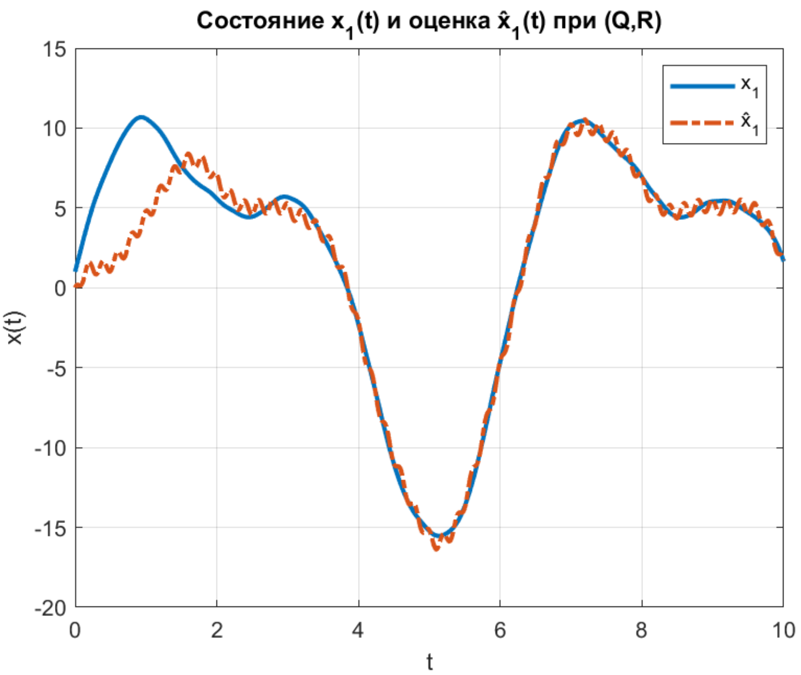

Рис. 9: Графики первого состояния с $(Q_1, R_1) = (I, 1)$ *при LQE*

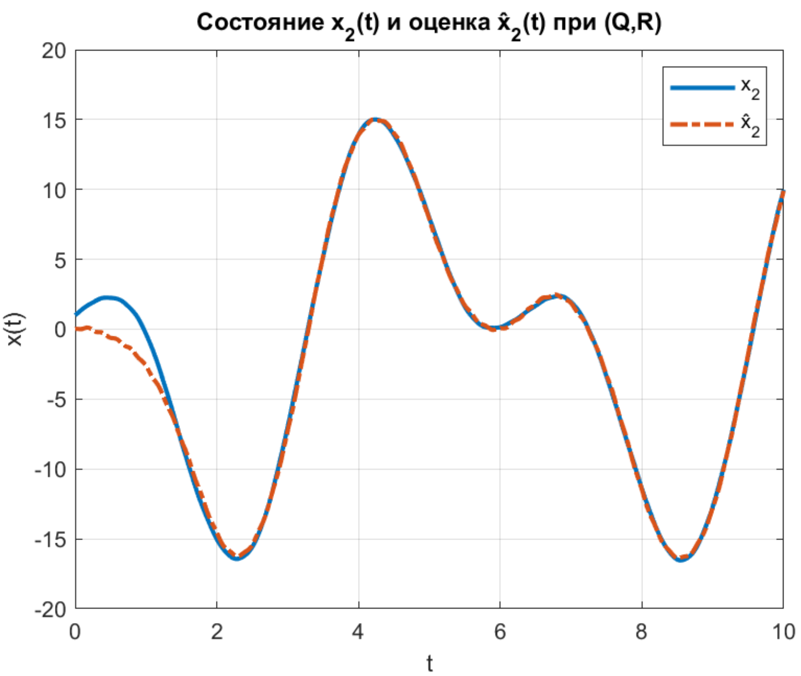

Рис. 10: Графики второго состояния с $(Q_1, R_1) = (I, 1)$ *при LQE*

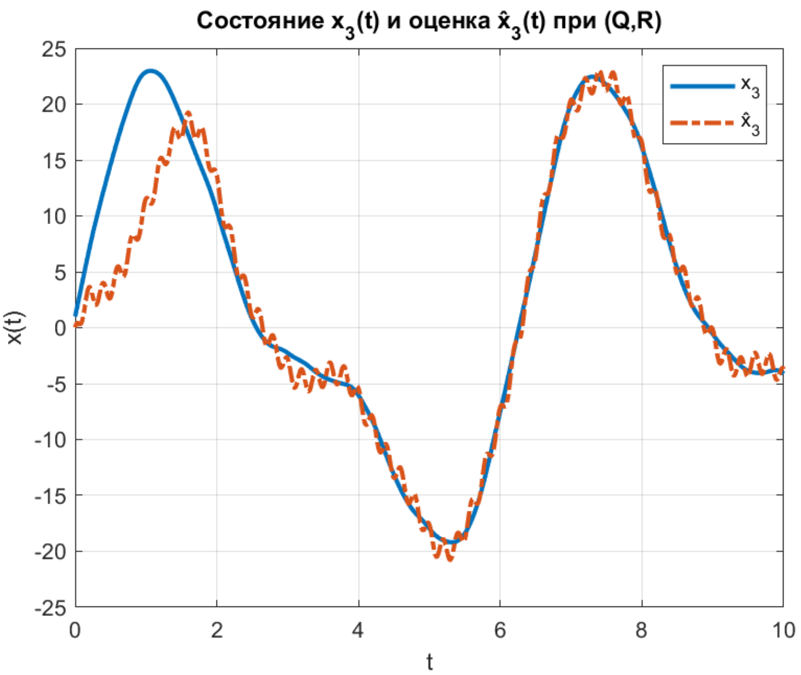

Рис. 11: Графики третьего состояния с $(Q_1, R_1) = (I, 1)$ *при LQE*

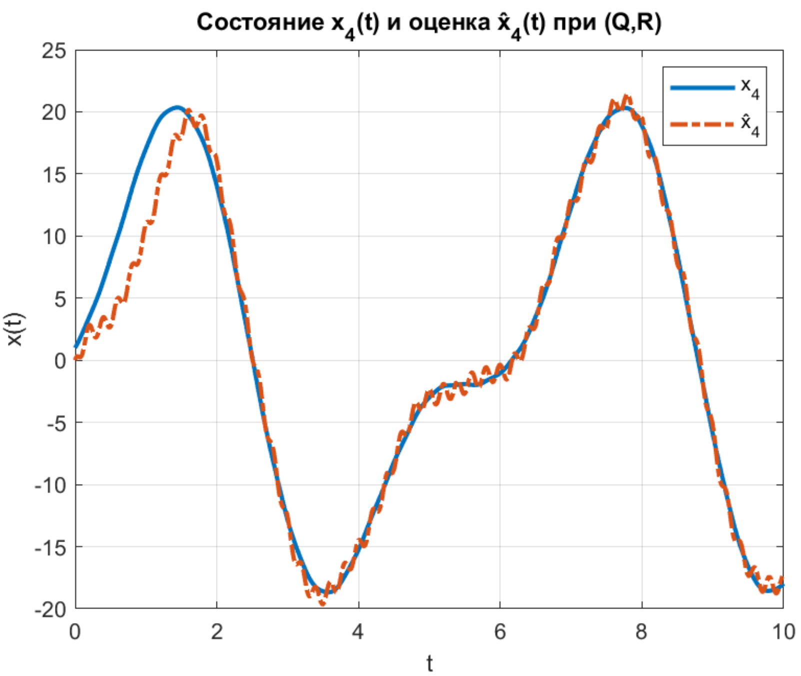

Рис. 12: Графики четвертого состояния с $(Q_1, R_1) = (I, 1)$ *при LQE*

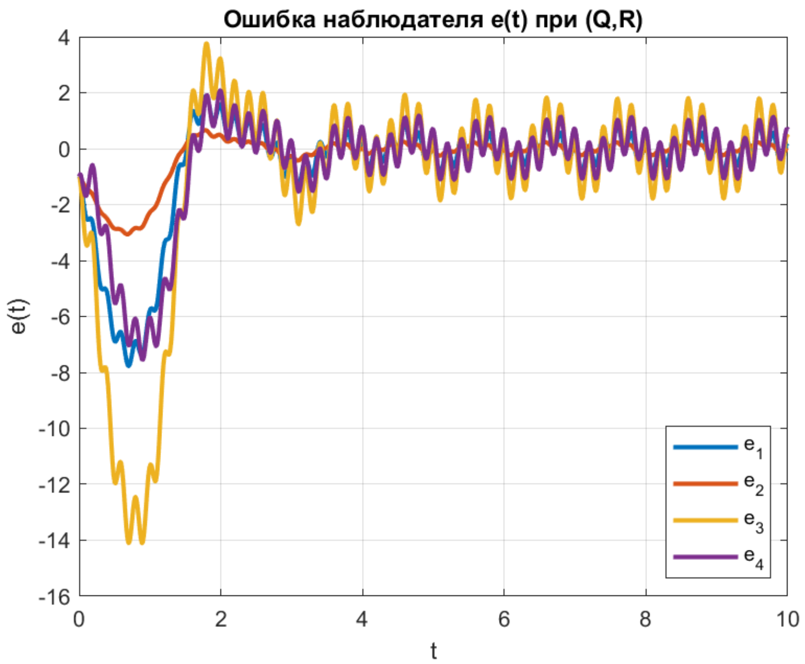

Рис. 13: График ошибкок $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$ с $(Q_1, R_1) = (I, 1)$ при LQE

Выполним компьютерное моделирование с L_1 и нулевыми начальными условиями наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. На рисунках 9-12 изображены графики состояний системы и наблюдателя. На рисунке 13 представлен график ошибки оценки $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$.

Теперь рассмотрим пару $(Q_2, R_2) = (25I, 1)$.

Решением рассматриваемого в пункте уравнения Риккати при $Q = Q_2$ и $R = R_2$ будет:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2041.4721 & 748.8486 & 3512.9148 & 1538.1147 \\ 748.8486 & 294.7013 & 1286.3000 & 558.1005 \\ 3512.9148 & 1286.3000 & 6173.4061 & 2792.9160 \\ 1538.1147 & 558.1005 & 2792.9160 & 1333.8949 \end{bmatrix} \succ 0$$

Из найденного можно вычислить матрицу L_2:

$$L_2 = -P_2 C^T R_2^{-1} = \begin{bmatrix} 66.6721 \\ 20.6491 \\ 132.4246 \\ 79.0937 \end{bmatrix}$$

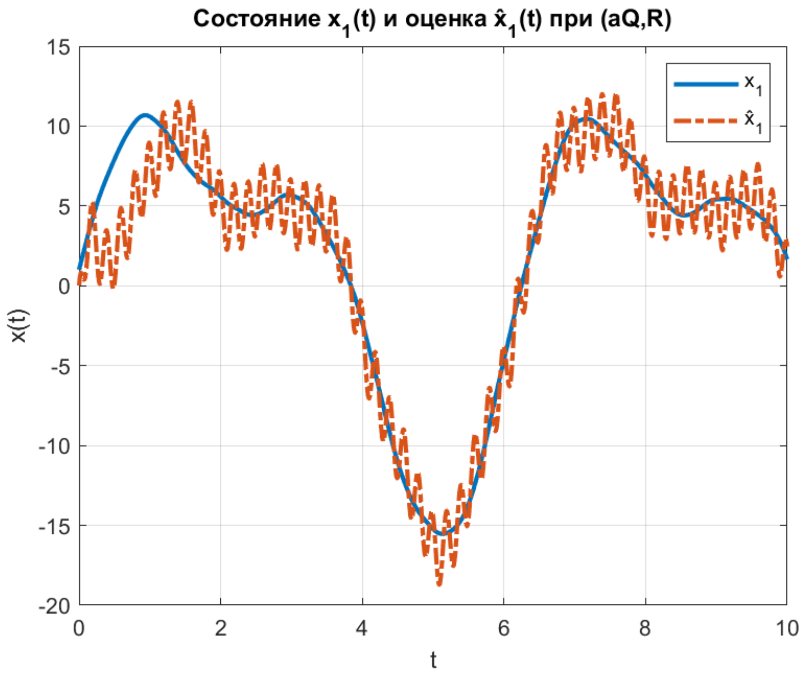

Рис. 14: Графики первого состояния с $(Q_2, R_2) = (25I, 1)$ *при LQE*

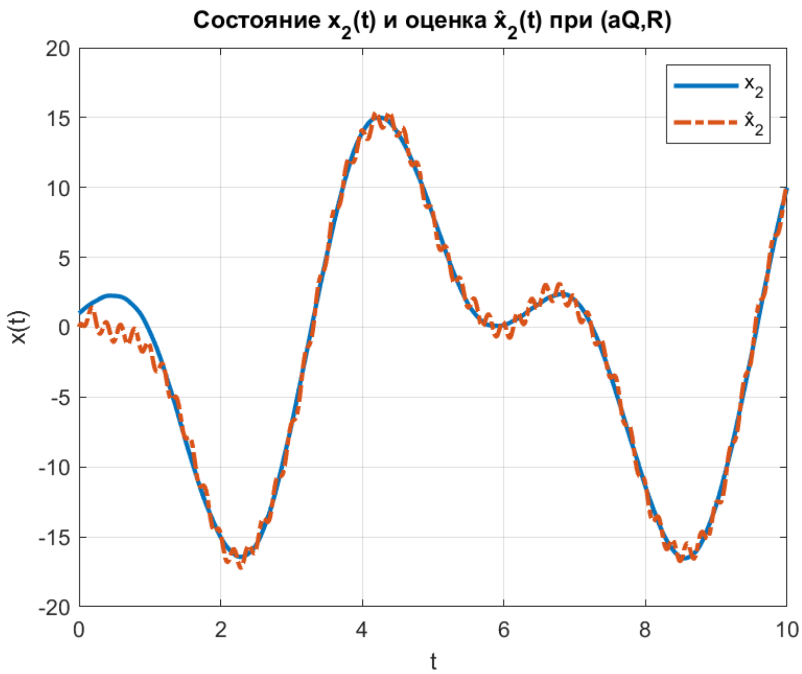

Рис. 15: Графики второго состояния с $(Q_2, R_2) = (25I, 1)$ *при LQE*

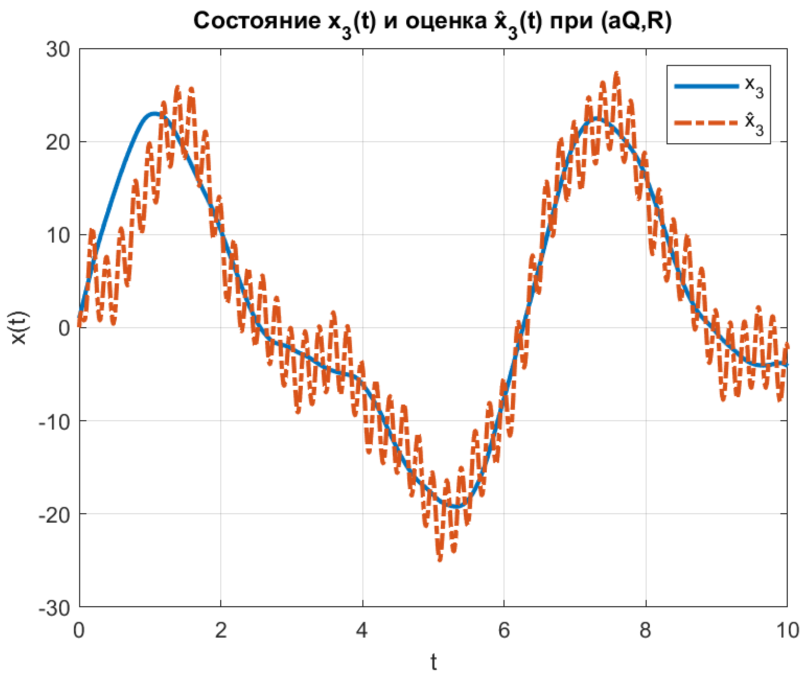

Рис. 16: Графики третьего состояния с $(Q_2, R_2) = (25I, 1)$ *при LQE*

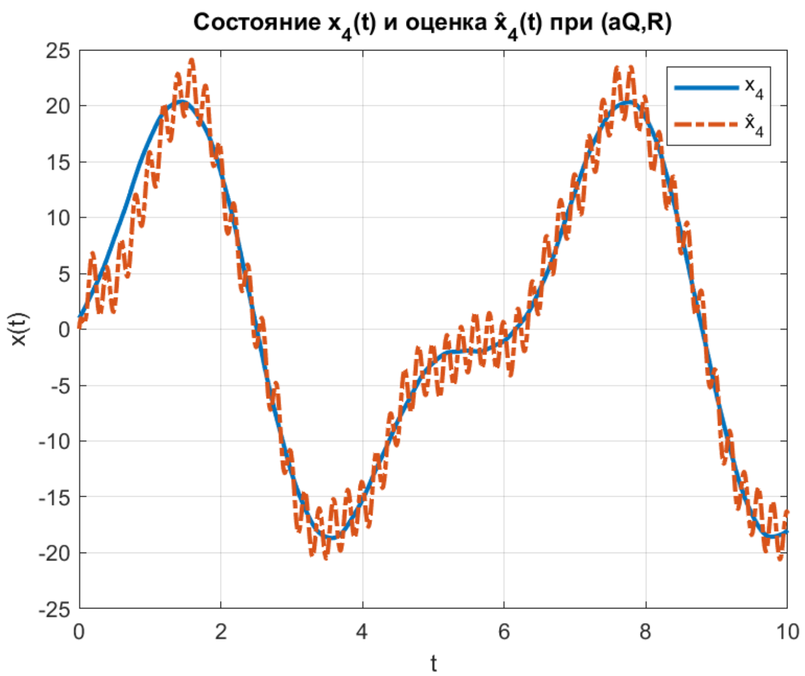

Рис. 17: Графики четвертого состояния с $(Q_2, R_2) = (25I, 1)$ *при LQE*

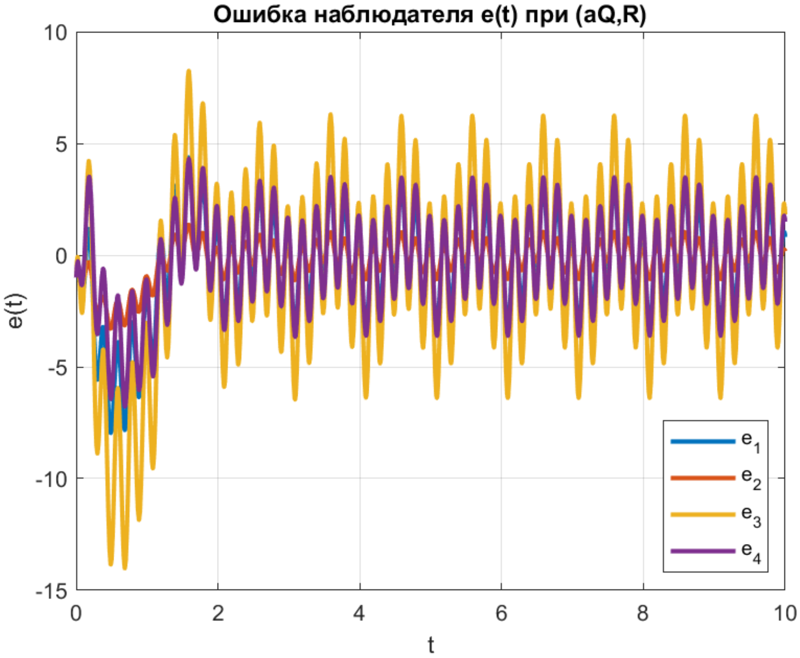

Рис. 18: График ошибкок $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$ с $(Q_2, R_2) = (25I, 1)$ при LQE

Промоделируем систему с матрицей L_2 при нулевых начальных условиях наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. На рисунках 14-17 изображены состояния системы и найденного наблюдателя. На рисунке 18 представлен график ошибки оценки $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$.

Далее возьмём пару $(Q_3, R_3) = (I, 25)$.

Решением соответствующего уравнения Риккати при $Q = Q_3$ и $R = R_3$ будет матрица P_3:

$$P_3 = \begin{bmatrix} 216.6412 & 38.2700 & 424.4798 & 257.3331 \\ 38.2700 & 84.5543 & 76.9858 & 9.8890 \\ 424.4798 & 76.9858 & 898.6119 & 612.0852 \\ 257.3331 & 9.8890 & 612.0852 & 502.3009 \end{bmatrix} \succ 0$$

Аналогично предыдущему случаю, матрица L_3 можно найти:

$$L_3 = -P_3 C^T R_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1.9798 \\ -1.1531 \\ 5.5181 \\ 5.9020 \end{bmatrix}$$

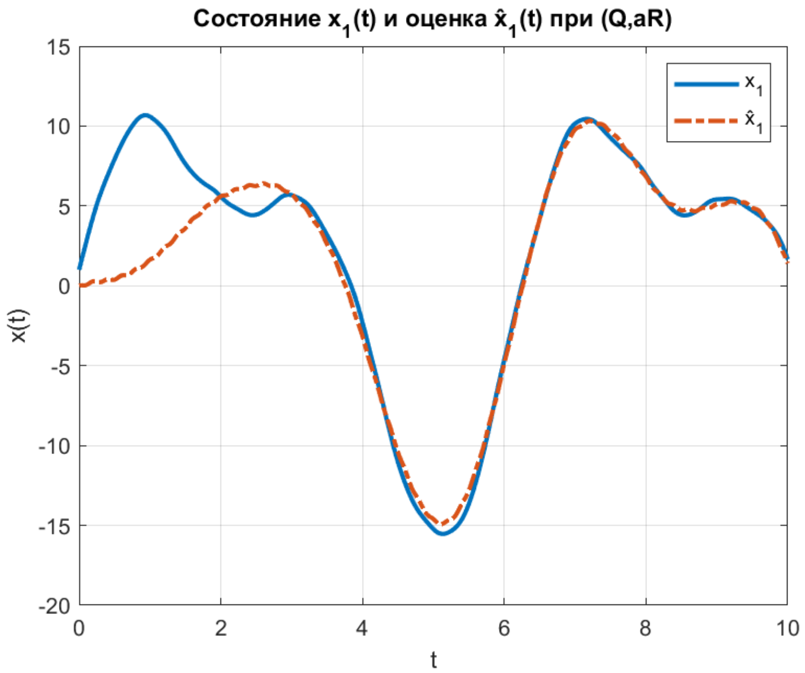

Рис. 19: Графики первого состояния с $(Q_3, R_3) = (I, 25)$ *при LQE*

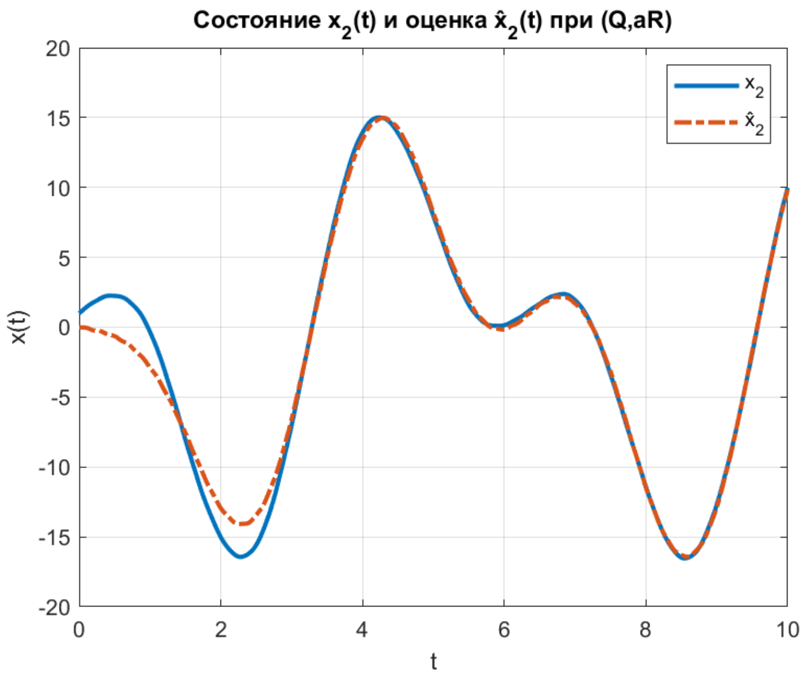

Рис. 20: Графики второго состояния с $(Q_3, R_3) = (I, 25)$ *при LQE*

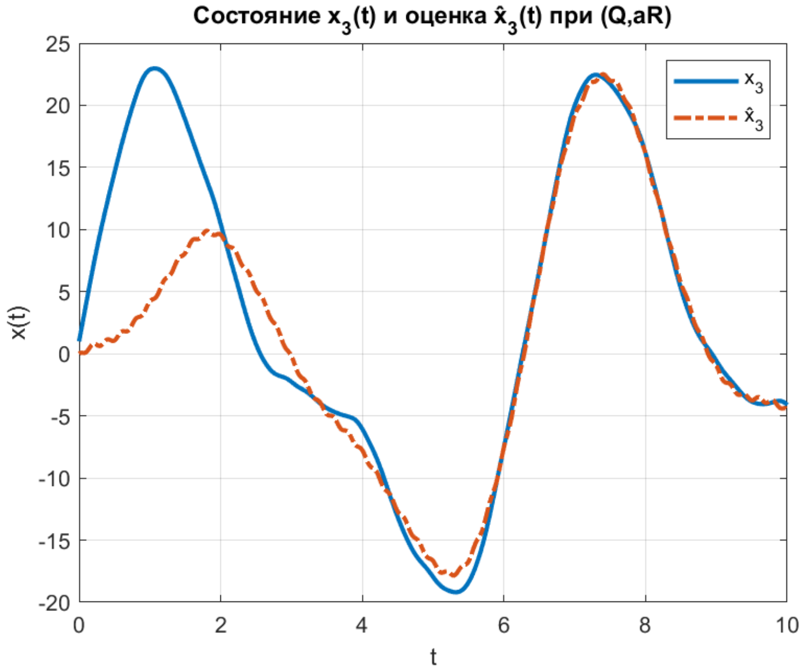

Рис. 21: Графики третьего состояния с $(Q_3, R_3) = (I, 25)$ *при LQE*

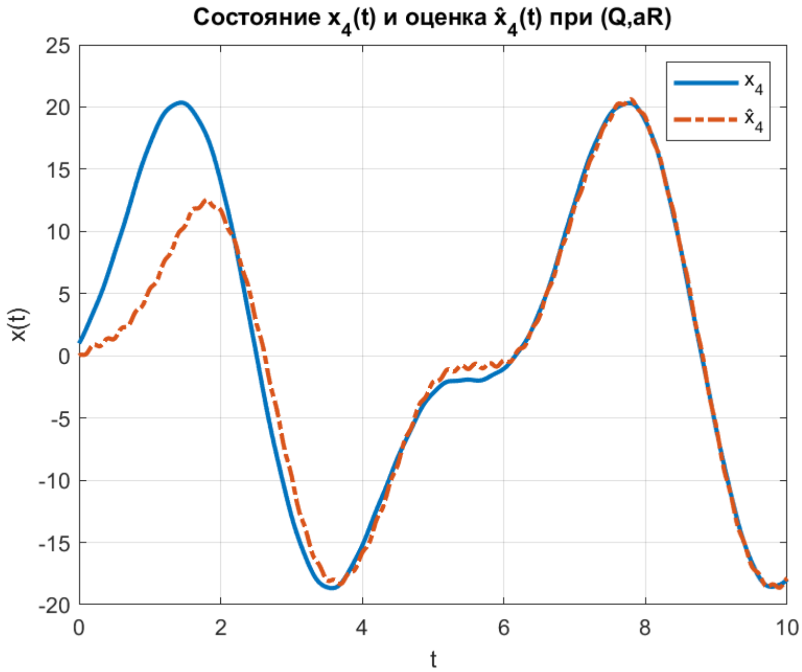

Рис. 22: Графики четвертого состояния с $(Q_3, R_3) = (I, 25)$ *при LQE*

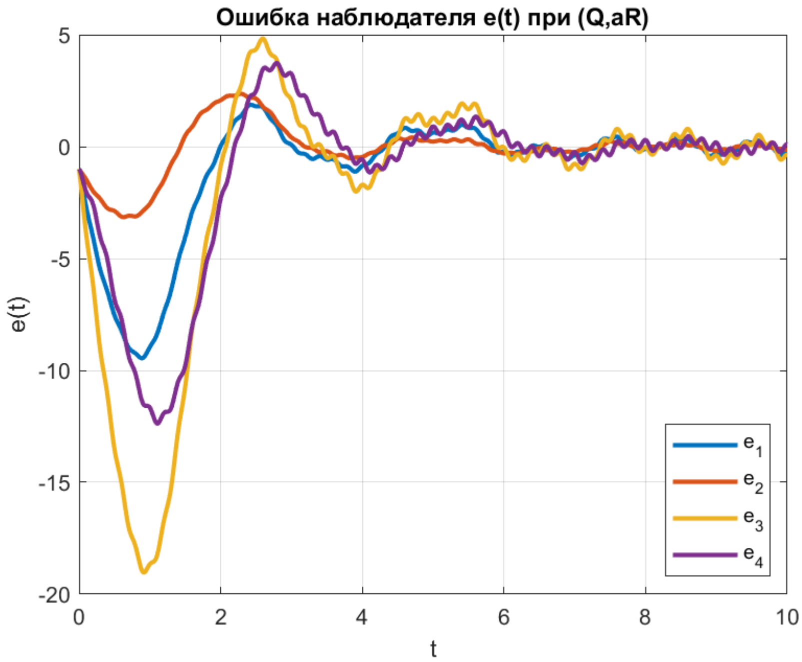

Рис. 23: График ошибкок $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$ с $(Q_3, R_3) = (I, 25)$ при LQE

Проведём моделирование системы и наблюдателя с матрицей коррекции L_3 при нулевых начальных условиях $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. На рисунках 19-22 изображены графики состояний. На рисунке 23 представлен график ошибки оценки наблюдения $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$.

Наконец, рассмотрим пару $(Q_4, R_4) = (25I, 25)$**.**

Решим уравнение Риккати при $Q = Q_4$ и $R = R_4$:

$$P_4 = \begin{bmatrix} 3209.5667 & 1079.8935 & 5924.5132 & 3053.5487 \\ 1079.8935 & 480.5200 & 1964.4706 & 933.6352 \\ 5924.5132 & 1964.4706 & 11235.3231 & 6060.5235 \\ 3053.5487 & 933.6352 & 6060.5235 & 3556.4294 \end{bmatrix} \succ 0$$

Откуда матрица L_4 равна:

$$L_4 = -P_4 C^T R_4^{-1} = \begin{bmatrix} 13.5441 \\ 1.9623 \\ 29.9885 \\ 21.9782 \end{bmatrix}$$

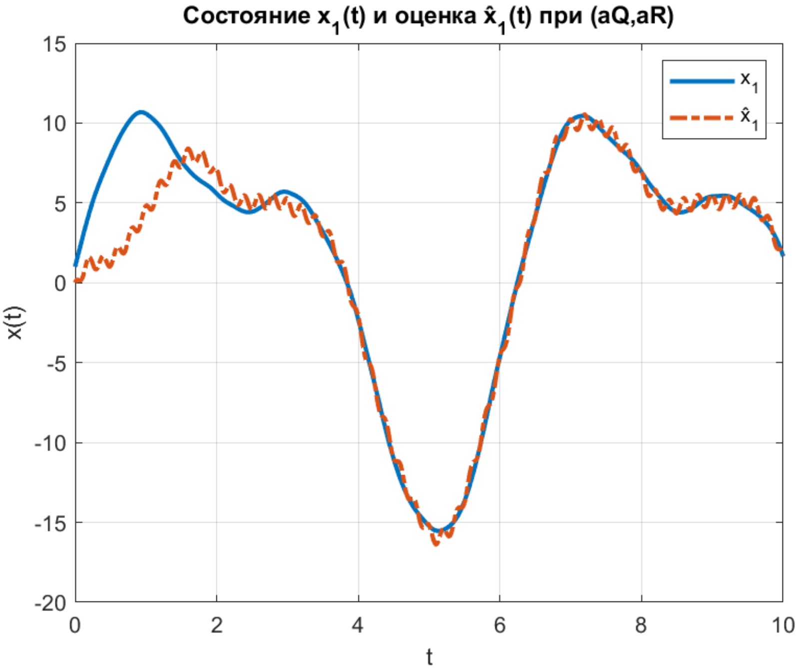

Рис. 24: Графики первого состояния с $(Q_4, R_4) = (25I, 25)$ *при LQE*

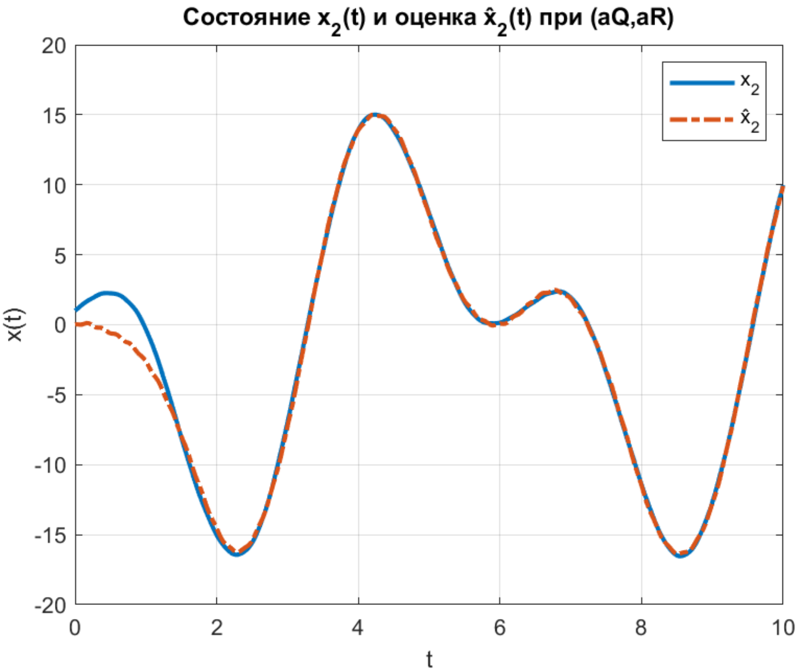

Рис. 25: Графики второго состояния с $(Q_4, R_4) = (25I, 25)$ *при LQE*

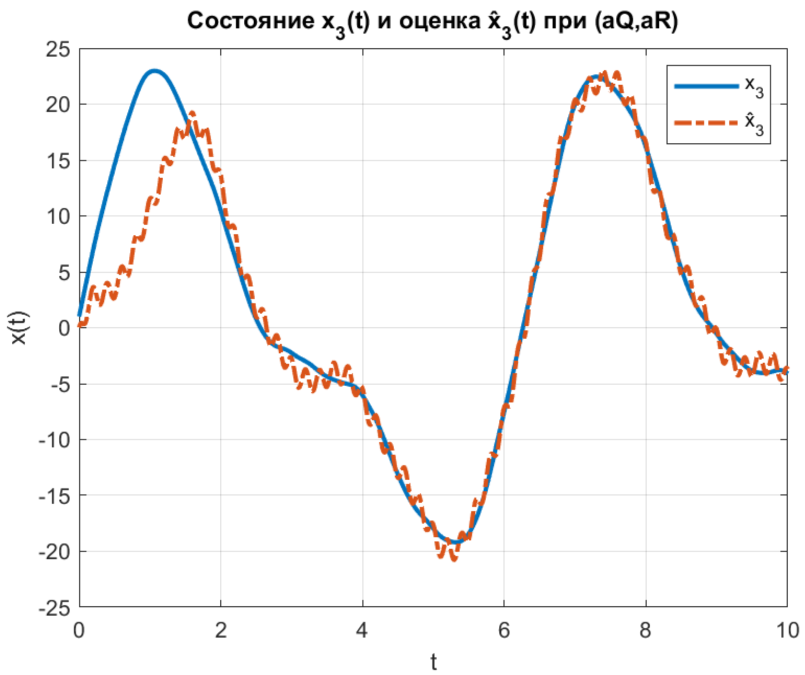

Рис. 26: Графики третьего состояния с $(Q_4, R_4) = (25I, 25)$ *при LQE*

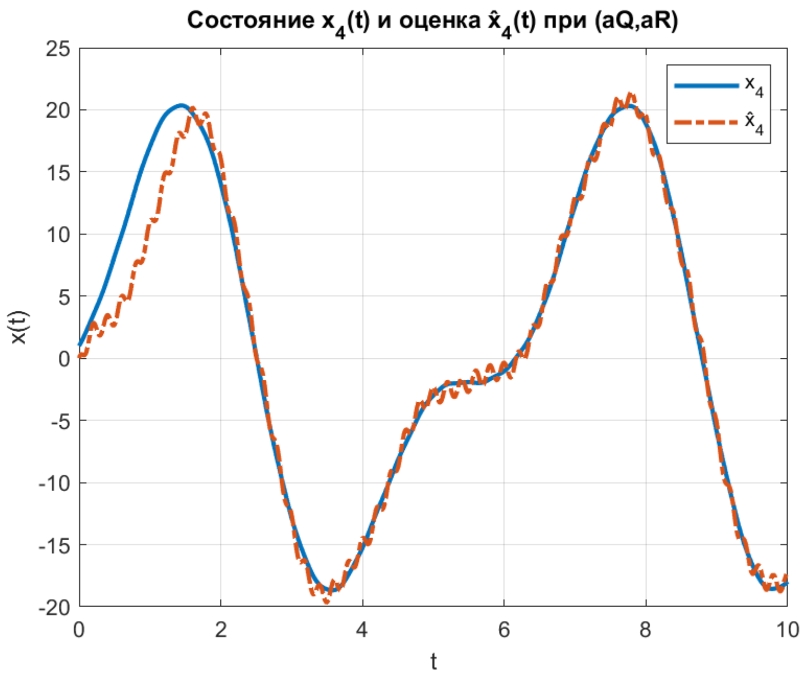

Рис. 27: Графики четвертого состояния с $(Q_4, R_4) = (25I, 25)$ *при LQE*

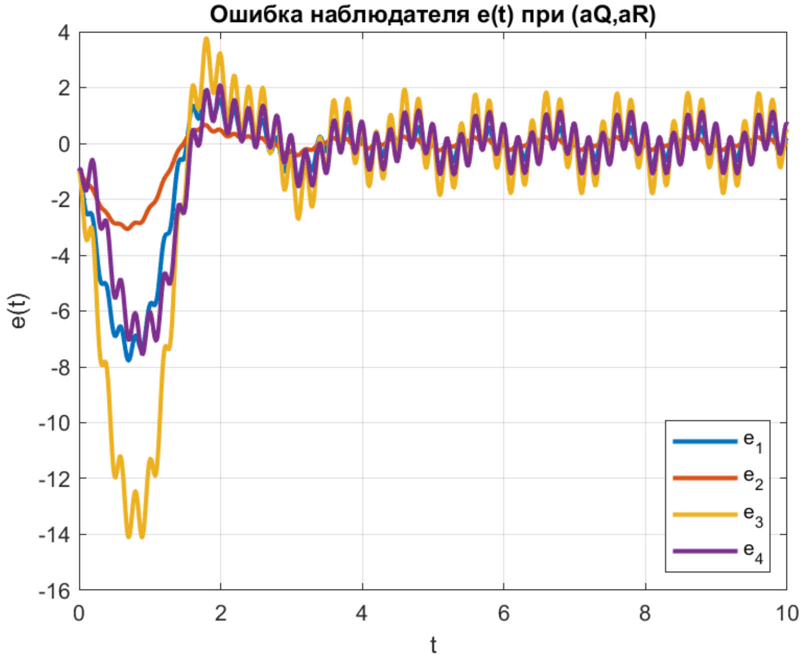

Рис. 28: График ошибкок $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$ с $(Q_4, R_4) = (25I, 25)$ при LQE

Аналогично предыдущим случаям, замоделируем систему и наблюдатель с матрицей коррекции L_4 при нулевых начальных условиях $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. На рисунках 24-27 изображены графики состояний. На рисунке 28 представлен график ошибки оценки наблюдения $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$.

Сравним полученные результаты. При $(Q_3, R_3) = (I, 25)$ ошибки оценки $e_i(t)$ имеют малые амплитуды колебаний, однако наблюдатель «заторможен» (рисунок 11 - шум от выхода визуально отсутствует, но имеются проблемы с реагированием на быстрые изменения в системе). Наблюдатель больше доверяет модели, чем датчикам.

При $(Q_2, R_2) = (25I, 1)$ ошибки $e_i(t)$ огромны, состояния $\hat{x}_i(t)$ постоянно скачут, однако наблюдатель достаточно быстро адаптируется к возникающим изменениям в системе, сильно доверяет датчикам.

При $(Q_1, R_1) = (I, 1)$ и $(Q_4, R_4) = (25I, 25)$ ошибки идентичны, то есть опять приходим к выводу, что важно именно соотношение матриц Q и R, а не их значения. В этом случае также виден «баланс» между шумом и реагированием.

Здесь важно отметить, что при правильном выборе матриц Q и R, отражающих действительное распределение между доверием к модели и измерениям, наблюдатель идеально сойдется к состояниям системы, без шума, и будет быстро реагировать на изменения в системе. К «правильному» выбору пары (Q, R) и стремимся, делая верные или не очень предположения о взаимоотношении доверий и находя наблюдатель, минимизируя соответствующие «критерии доверия». Отметим также, что в случае верных матриц Q и R достигается минимальное значение функционала J для наблюдателя.

3 Исследование LQG

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f \\ y = Cx + Du + \xi \end{cases} \qquad x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

В соответствии с вариантом, матрицы A и B имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & 5 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \\ 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрицы C и D же:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Также зададимся *случайными* сигналами $f(t)$ и $\xi(t)$ в виде гауссовских белых шумов, то есть сигналы подчиняются нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием, с диагональными матрицами ковариации F и E соответственно:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Прежде чем переходить к синтезам LQR-регулятора и LQE, в паре и представляющих LQG, проверим систему на стабилизируемость и обнаруживаемость и поймём, возможно ли вообще создать управление и наблюдение для рассматриваемой системы. Для этого перейдём к Жордановой форме системы с матрицами $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$, а также матрицей T для перехода к базису Жордана:

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Откуда можно найти матрицы $\hat{B}$ и $\hat{C}$:

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Можем видеть, что каждому собственному числу в матрице $\hat{A}$ соответствует ненулевая строка в матрице $\hat{B}$, а значит, все собственные числа системы управляема. Система в такой случае является полностью управляемой, следовательно, и стабилизируемой (так как вообще нет неуправляемых собственных чисел).

Также заметим, что четвертый столбец в матрице $\hat{C}$ состоит из нулей, а значит, собственное число $\lambda_4 = -12$ является ненаблюдаемым. Всем остальным λ_i соответствует ненулевая строка в матрице $\hat{C}$ - они наблюдаемы. Система тогда является частично наблюдаемой, но обнаруживаемой, так как единственное ненаблюдаемое λ_4 имеет отрицательную вещественную часть ($\mathrm{Re}(\lambda_4) = -12 < 0$).

Таким образом, система является стабилизируемой и обнаруживаемой, а значит, для неё возможно создать управление и наблюдение. Схема моделирования, состоящая из регулятора и наблюдателя состояния, управления $u = K\hat{x}$, изображена на рисунке 29.

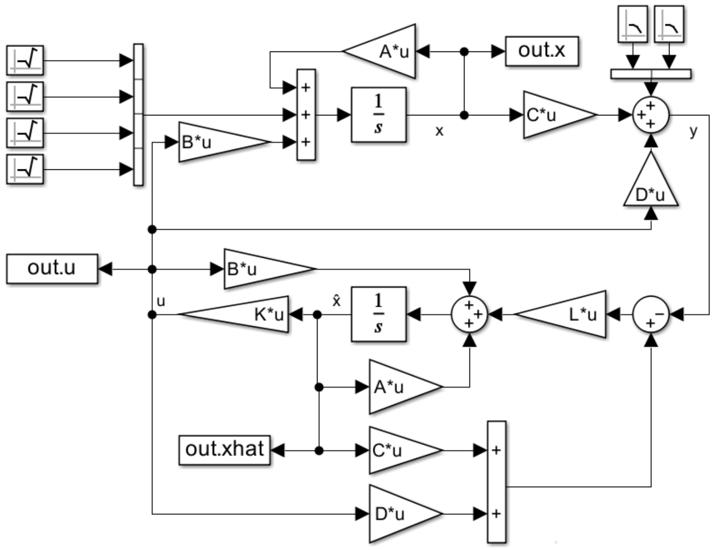

Рис. 29: Схема моделирования системы при LQG

Теперь зададимся значениями пары матриц (Q_k, R_k) регулятора:

$$Q_k = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \quad R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0$$

А также для пары (Q_l, R_l) для наблюдателя:

$$Q_l = F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \succ 0, \quad R_l = E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \succ 0$$

Выбор именно таких матриц наблюдателя опирается на теорию фильтра Калмана: при верно выбранной паре (Q_l, R_l), то есть при выборе реальной ковариации шумов модели и измерений, математическое ожидание ошибки оценки наблюдения будет наименьшим.

Итак, синтезируем матрицу регулятора, решая уравнение Риккати при $\nu = 1$, $Q = Q_k$ и $R = R_k$:

$$A^T P + PA + Q - \nu PBR^{-1}B^T P = 0$$

Откуда матрица P_k равна:

$$P_k = \begin{bmatrix} 526.9134 & 354.0717 & -632.6571 & 248.4114 \\ 354.0717 & 251.0646 & -436.6226 & 168.5971 \\ -632.6571 & -436.6226 & 770.0936 & -299.3527 \\ 248.4114 & 168.5971 & -299.3527 & 117.8224 \end{bmatrix} \succ 0$$

Тогда матрица K обратной связи:

$$K = -R_k^{-1} B^T P_k = \begin{bmatrix} 120.8624 & 68.0104 & -136.8063 & 52.0664 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Далее, решая уравнение Риккати для наблюдателя при $\nu = 1$, $Q = Q_l$ и $R = R_l$:

$$AP + PA^T + Q - \nu PC^T R^{-1} CP = 0$$

Откуда матрица P_l равна:

$$P_l = \begin{bmatrix} 526.9134 & 354.0717 & -632.6571 & 248.4114 \\ 354.0717 & 251.0646 & -436.6226 & 168.5971 \\ -632.6571 & -436.6226 & 770.0936 & -299.3527 \\ 248.4114 & 168.5971 & -299.3527 & 117.8224 \end{bmatrix} \succ 0$$

Вычислим матрицу коррекции наблюдателя L как:

$$L = -P_l C^T R_l^{-1} = \begin{bmatrix} -2.0433 & 78.0928 \\ 2.1077 & -35.4308 \\ -2.2480 & -78.1021 \\ -2.1836 & -35.4307 \end{bmatrix}$$

Синтез проведен, перейдем к моделированию. На рисунке 30 изображены графики управлений, на рисунках 31-34 - графики состояний и оценок, а на рисунке 35 - графики ошибок оценки.

Таким образом, наблюдатель дал очень качественную оценку состояний системы, ошибки находятся в пределах от -1 до 1, в районе 0. Регулятор также справляется со своей задачей, успешно стабилизирует систему, хотя и остаются остаточные скачки от воздействия $f(t)$, но они в данном случае неискоренимы.

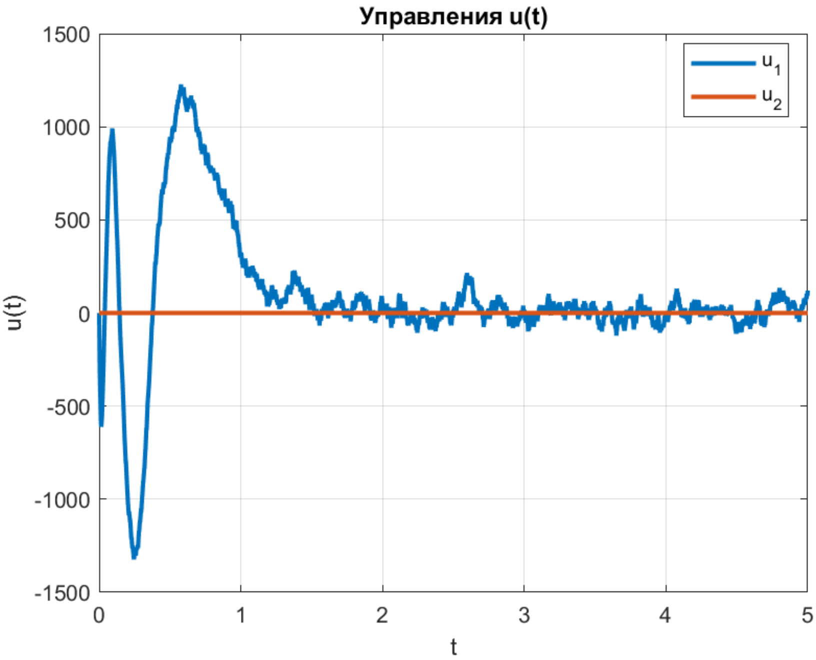

Рис. 30: Графики управлений с (Q_k, R_k) регулятора и (Q_l, R_l) наблюдателя

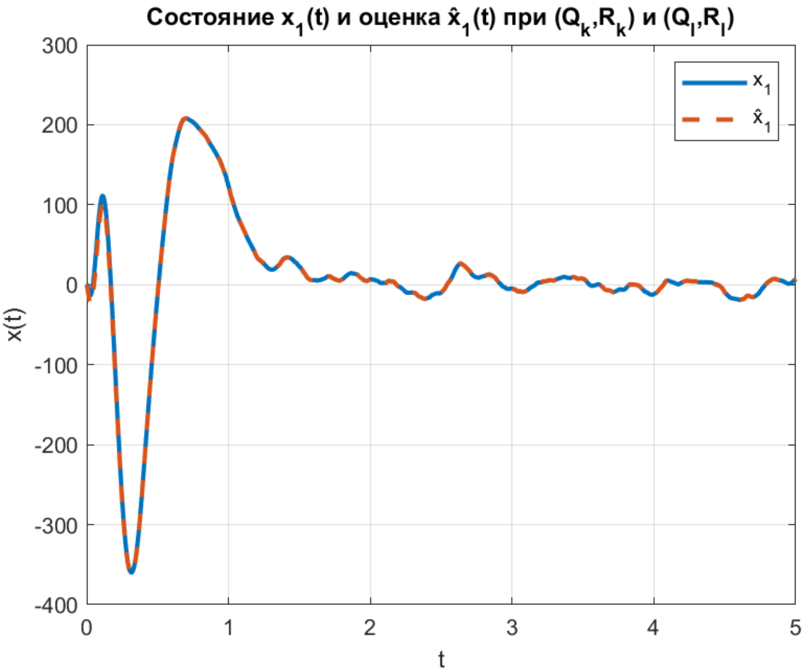

Рис. 31: Графики первой компоненты состояний и оценок при LQG

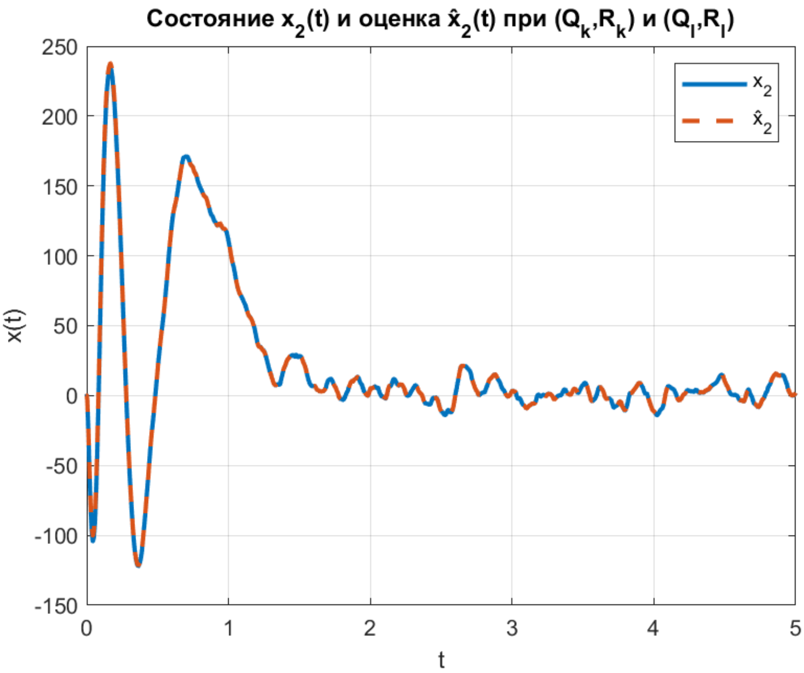

Рис. 32: Графики второй компоненты состояний и оценок при LQG

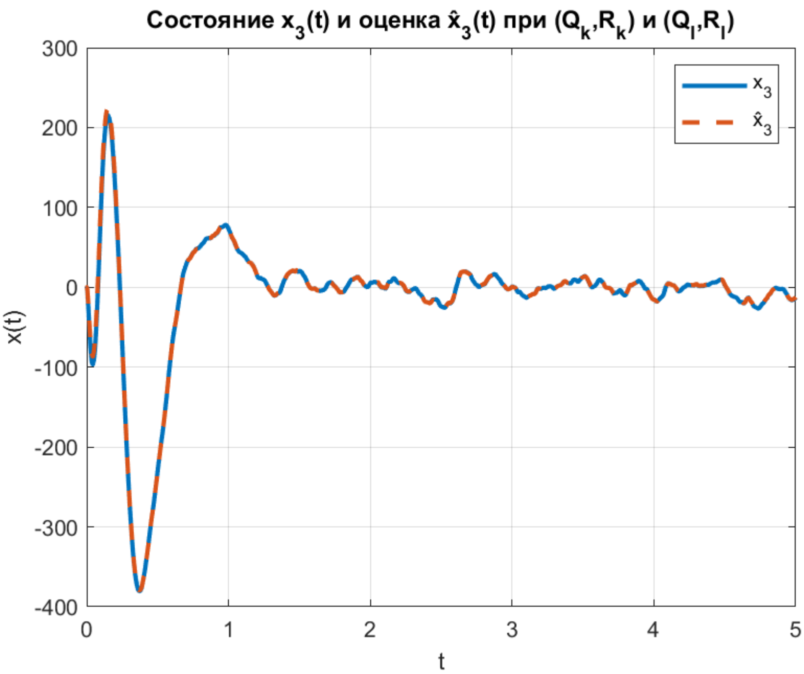

Рис. 33: Графики третьей компоненты состояний и оценок при LQG

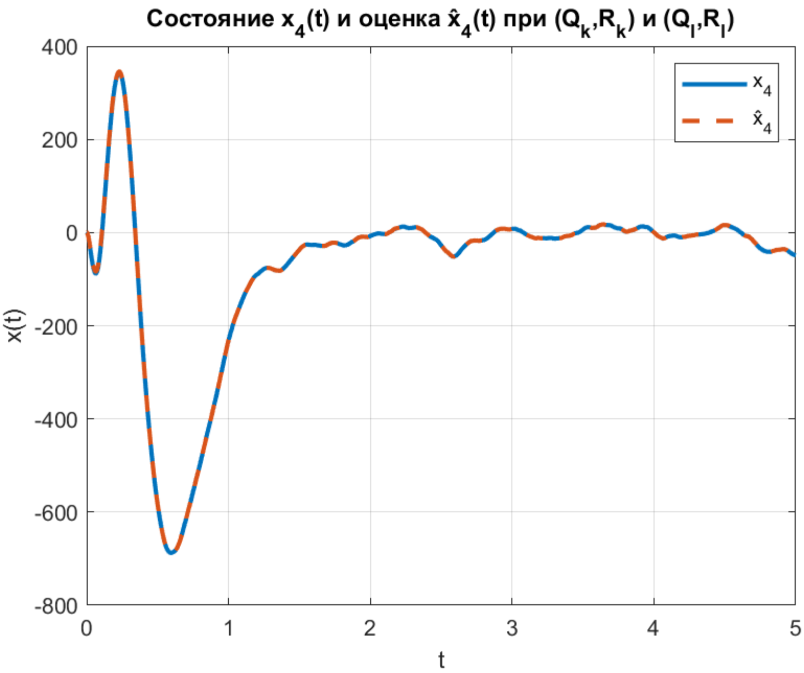

Рис. 34: Графики четвертой компоненты состояний и оценок при LQG

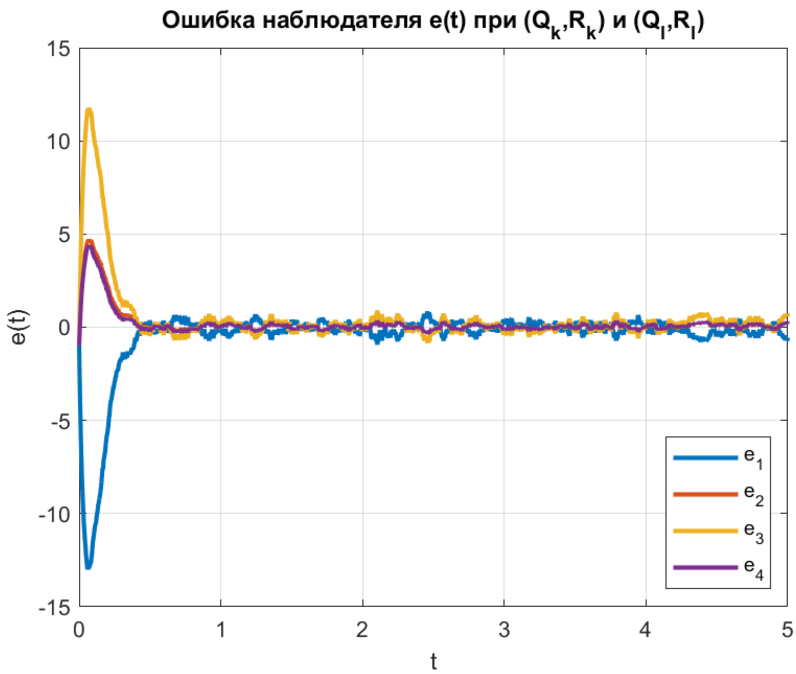

Рис. 35: График ошибки оценки состояний при LQG

4 Общие выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены линейно-квадратичные регуляторы, наблюдатели и их комбинация - LQG.

Было получено, что задача синтеза LQR полностью опирается на выбор матриц Q и R и того, что хочется от системы получить (так, при более быстрых желаемых процессах матрица R должна быть меньше, а матрица Q - больше, и наоборот).

В случае LQE матрицы Q и R сыграли играют ключевую роль и определяют качество оценки состояний системы (при верно расставленных приоритетах в доверии к модели и измерениям можно получить идеальную оценку состояний системы).

Все выводы вышесказанные выводы также подтвердились и моделированиями.