Научно исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Отчет
по дисциплине
«Моделирование динамических систем»
Практическая работа №3
Вариант №3

Выполнили Воротников А.А., Гридусов Д.Д., Мовчан И.Е.
Преподаватель Семенов Д.М.

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Задание

Пусть дана нелинейная система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = rx_2 - x_2^3 + x_2^5. \end{cases}$$

Необходимо

- Найти возможные бифуракции в системе, положения равновесия, определить их тип в зависимости от параметра r.
- Построить фазовые портреты при различных значениях этого параметра.

2 Решение

Найдём положения равновесия, решив систему на равенство нулю производных:

$$\begin{cases} -x_1 = 0, \\ rx_2 - x_2^3 + x_2^5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2(r - x_2^2 + x_2^4) = 0, \end{cases}$$

откуда положения равновесия:

$$\begin{cases} x_1^* = 0, \\ x_2^* = 0; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_1^* = 0, \\ x_2^* = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-4r}}{2}}; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_1^* = 0, \\ x_2^* = \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-4r}}{2}}. \end{cases} \tag{3}$$

Первое (1) положение существует при любых параметрах $r \in \mathbb{R}$, второе и третье (2) - при $r \leq \frac{1}{4}$, четвертое и пятое (3) - при $0 \leq r \leq \frac{1}{4}$.

Исследуем на устойчивость (линеаризовав в окрестности положения равновесия), используя:

$$\dot{x} = Ax, \text{ где } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & r - 3x_2^2 + 5x_2^4 \end{bmatrix} \Bigg|_{x=x^*}.$$

Видим, что устойчивость пар точек 2 одинакова (для 3 то же самое), поэтому дальше будем исследовать поведение только одного элемента пары.

Подставим в матрицу A точки, найдём собственные числа. Начнём с 1:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & r - 3x_2^2 + 5x_2^4 \end{bmatrix} \Bigg|_{x=x^*} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -1, \\ \lambda = r. \end{array} \right.$$

При $r > 0$ положение равновесия является седлом, при $r < 0$ - устойчивым узлом.

Рассмотрим теперь точку из пары 2:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5r - 5x_2^2 + 5x_2^4 - 4r + 2x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4r + 2x_2^2 \end{bmatrix},$$

так как точки были найдены из решения уравнения $r - x_2^2 + x_2^4 = 0$.

Получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = -1, \\ \lambda = -4r + 1 + \sqrt{1-4r} = \sqrt{1-4r}(\sqrt{1-4r} + 1) > 0. \end{array} \right.$$

Отсюда положения равновесия из пары 2 являются седлом.

Аналогичные рассуждения над матрицей A дают собственные числа матрицы A для положения равновесия 3:

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = -1, \\ \lambda = -4r + 1 - \sqrt{1-4r} = \sqrt{1-4r}(\sqrt{1-4r} - 1) < 0. \end{array} \right.$$

Итак, положение равновесия является устойчивым узлом. Отметим также, что здесь и в прошлом случае мы делали выводы о λ из условий на существование положений равновесия.

Проведём дополнительное исследование, построив фазовый портрет системы для различных значений параметра r. Результаты на рис. 1, 2 и 3. Как можно видеть, численные результаты дают те же типы положений, что и были найдены.

3 Выводы

В результате выполнения лабораторной работы было исследовано влияние бифуракционных параметров на свойства системы (её положения равновесия, а также их типы), а также построены фазовые портреты для различных значений этих параметров для численных проверок результатов.

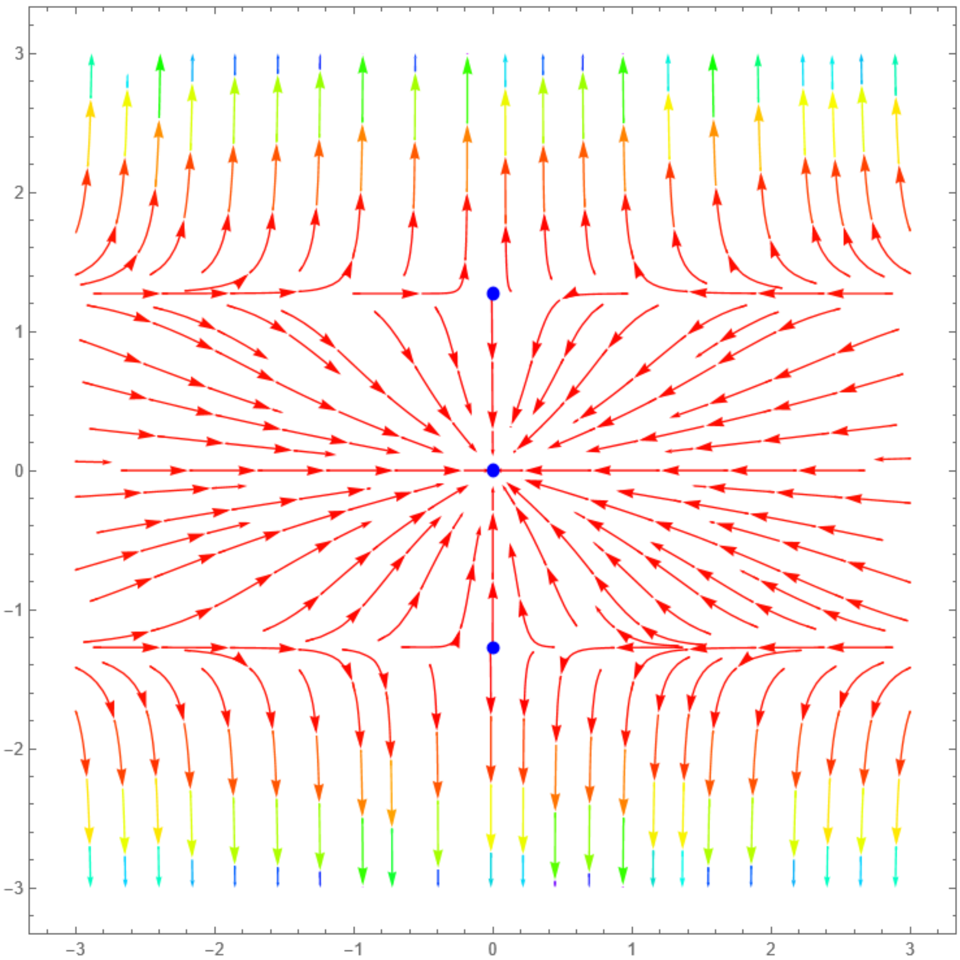

Рис. 1: Фазовый портрет системы при $r \in (-\infty, 0)$

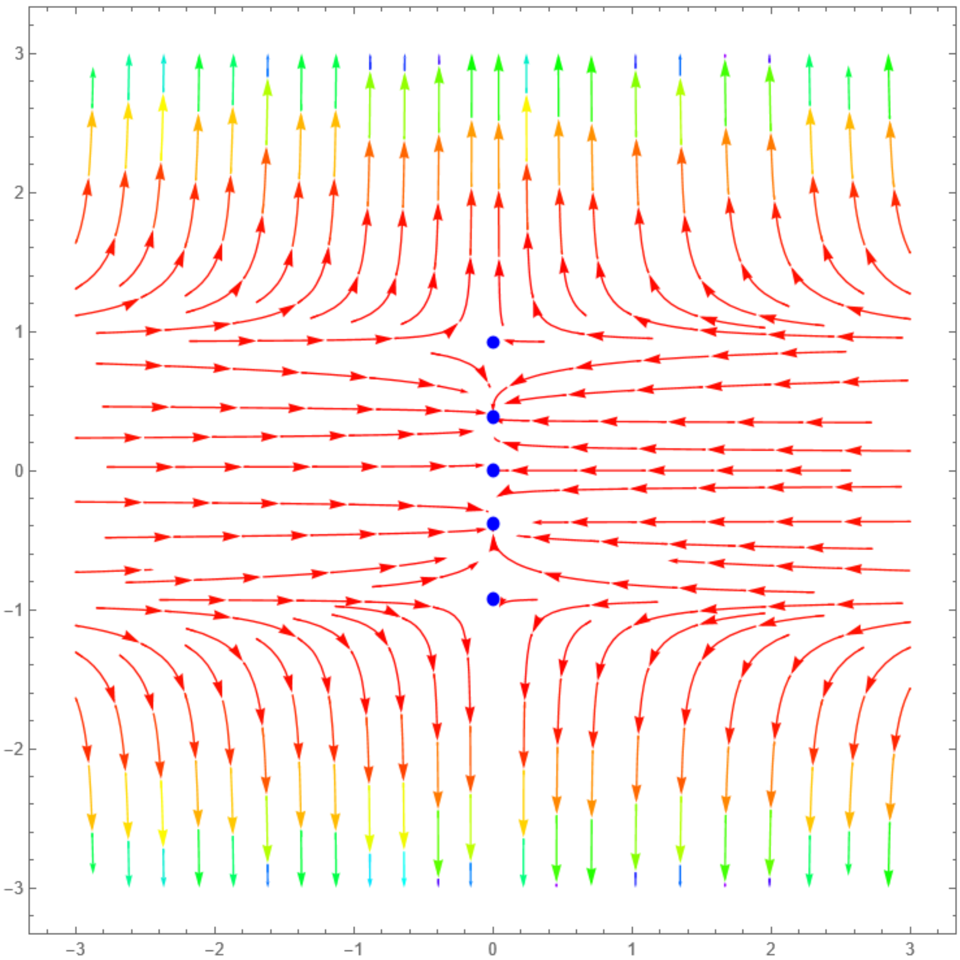

Рис. 2: Фазовый портрет системы при $r \in (0, \frac{1}{4})$

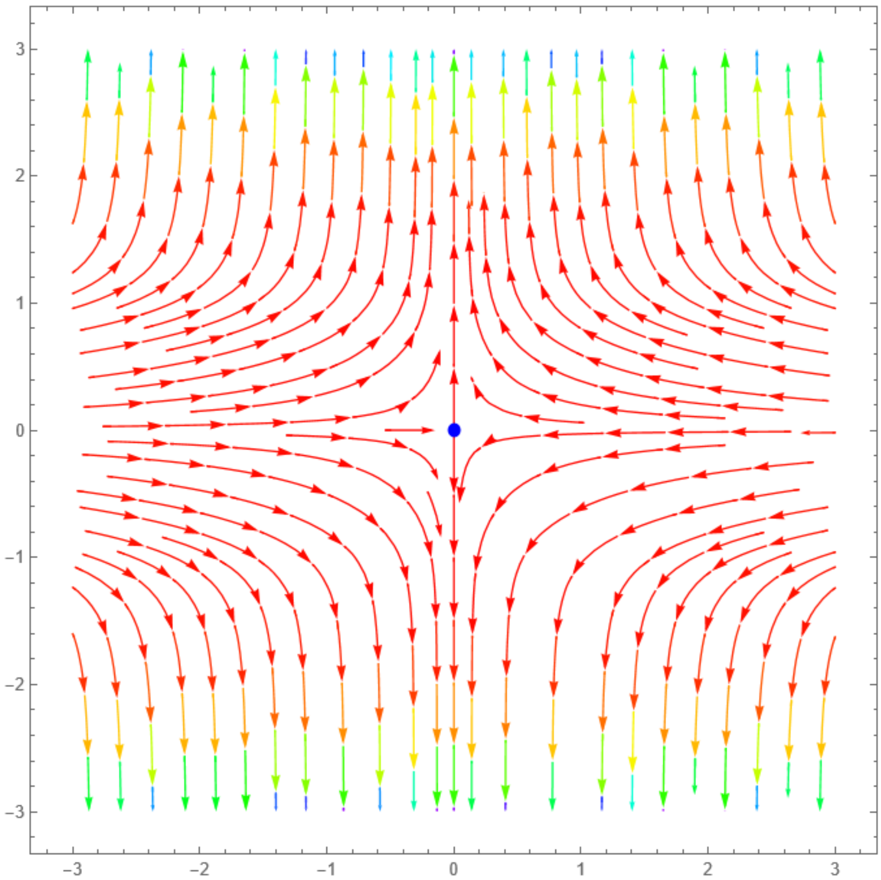

Рис. 3: Фазовый портрет системы при $r \in (\frac{1}{4}, +\infty)$