

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ
по дисциплине
«Моделирование динамических систем»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

Вариант №3

Студенты:

Воротников А.А, Гридусов Д.Д, Мовчан И.Е

Предподаватель:

Семенов Д.М

Санкт-Петербург 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1	ЗАДАНИЕ 1	3
1.1	Условие	3
1.2	Решение	3
1.2.1	Положения равновесия	3
1.2.2	Линеаризация системы	3
1.2.3	Доказательство устойчивости с помощью метода функций Ляпунова	4
1.2.4	График	4
2	ЗАДАНИЕ 2	6
2.1	Условие	6
2.2	Решение	6
3	ЗАДАНИЕ 3	9
3.1	Условие	9
3.2	Решение	9

1 ЗАДАНИЕ 1

1.1 Условие

Дана нелинейная система:

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = x - 4y - \arctan 2y \end{cases}$$

- найти ее положения равновесия (все имеющиеся);
- линеаризовать систему около одного из положений равновесия, исследовать полученную систему на устойчивость;
- доказать устойчивость исходной системы с помощью метода функций Ляпунова;
- построить графики исходной и линеаризованной систем.

1.2 Решение

1.2.1 Положения равновесия

Из условия $f(x^*) = 0$ найдем положения равновесия:

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ x - 4y - \arctan 2y = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 3x \\ -11x - \arctan 6x = 0 \end{cases}$$

Откуда точка $(0, 0)$ - положение равновесия системы.

1.2.2 Линеаризация системы

Линеаризуем систему в окрестности положения равновесия:

$$J = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & \frac{-2(8y^2+3)}{4y^2+1} \end{bmatrix}, \dot{x} = J|_{x=x^*} = Ax = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} x$$

Определим тип положения равновесия $(0, 0)$. Найдем собственные числа матрицы A :

$$\det\{\lambda I - A\} = \lambda^2 + 9\lambda + 17$$

Получаем $\lambda_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{13}}{2}$, значит $(0, 0)$ - *устойчивый узел*.

1.2.3 Доказательство устойчивости с помощью метода функций Ляпунова

Исследуем глобальную устойчивость системы с помощью метода функций Ляпунова:

$$V(x) = x^2 + y^2$$

$$\dot{V}(x) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(-3x + y) + 2y(x - 4y - \arctan 2y) =$$

$$= -6x^2 + 4xy - 8y^2 - 2y \arctan 2y$$

$$= -(x - 2y)^2 - 5x^2 - 7y^2 - 2y \arctan(2y) < 0, \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

Получаем, что для введенной функции $V(x)$ и исследуемой системы выполняются условия теоремы об асимптотической устойчивости, а значит, нулевое решение системы глобально асимптотически устойчиво.

1.2.4 График

Построим графики исходной и линеаризованной систем.

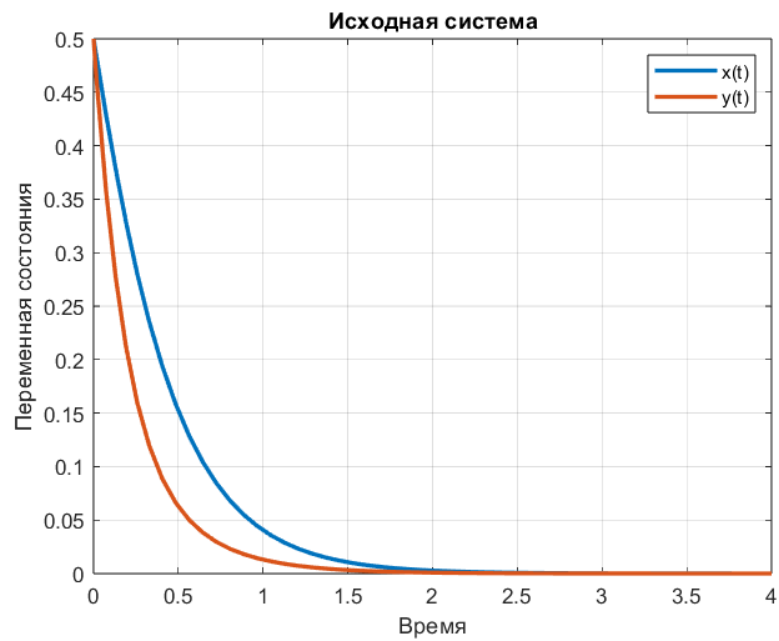


Рисунок 1 — График исходной системы

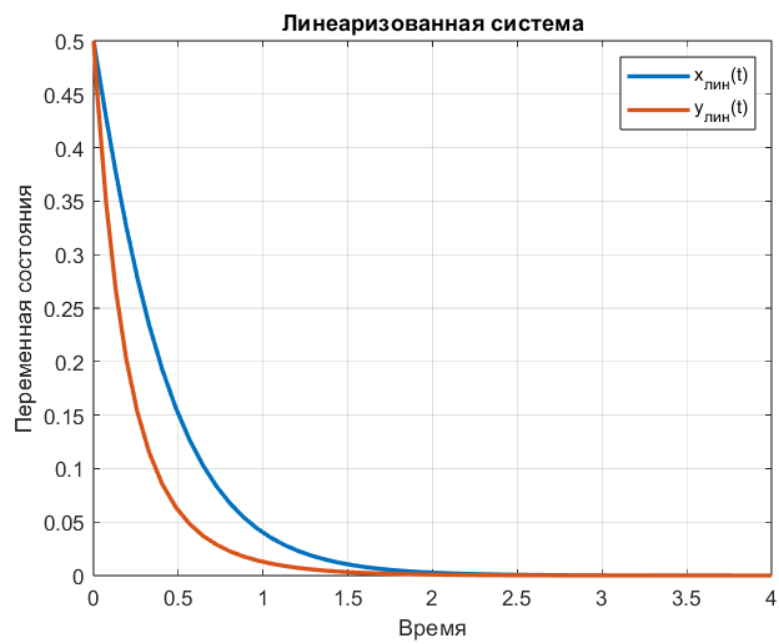


Рисунок 2 — График линеаризованной системы

Линеаризованная система сходится чуть быстрее, однако разница не слишком заметна.

2 ЗАДАНИЕ 2

2.1 Условие

Дана нелинейная система:

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \sigma = c^*x,$$

$$\xi = \varphi(\sigma, t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi = \frac{e^\sigma - e^{-\sigma}}{e^\sigma + e^{-\sigma}}$$

С помощью кругового критерия доказать экспоненциальную устойчивость системы.

2.2 Решение

Проверим выполнение всех пунктов кругового критерия:

1. Секторное условие $\mu_1 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq \mu_2, \sigma \neq 0, \forall t \in (0, \infty)$

$$\mu_1 \sigma \leq \frac{e^\sigma - e^{-\sigma}}{e^\sigma + e^{-\sigma}} \leq \mu_2 \sigma$$

Возьмем производную по σ :

$$\mu_1 \leq 1 - \frac{e^{4\sigma} - 2e^{2\sigma} + 1}{e^{4\sigma} + 2e^{2\sigma} + 1} \leq \mu_2$$

Откуда $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$.

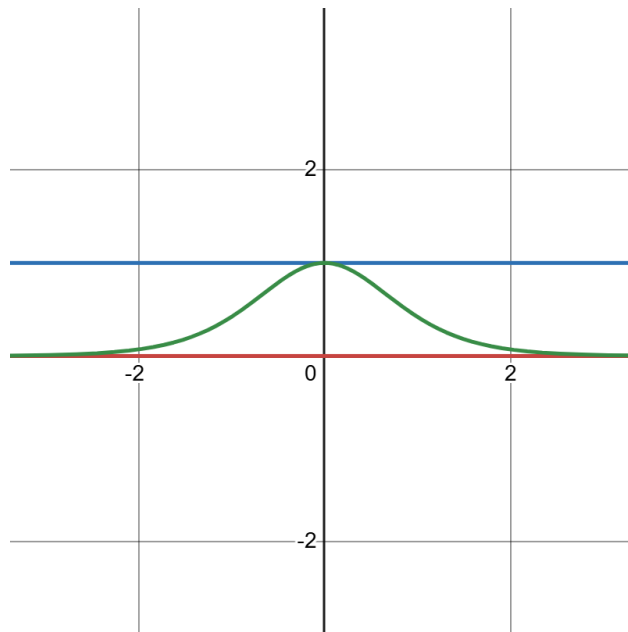


Рисунок 3 — Проверка "секторного" условия

Секторное условие выполняется.

2. Проверим матрицу A на наличие чисто мнимых собственных значений

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = -3, -1$$

Матрица A не имеет чисто мнимых собственных значений \rightarrow условие выполнено.

3. Асимптотическая устойчивость системы при $\xi = \mu_0 \sigma$.

Значение μ_0 выбирается из промежутка $[\mu_1, \mu_2]$, поэтому берём $\mu_0 = 0$, тогда система принимает вид $\dot{x} = Ax$, а такая система асимптотически устойчива, так как собственные числа матрицы A имеют отрицательную вещественную часть (показано в предыдущем пункте).

Условие выполняется.

4. Выполнение «частотного условия».

Найдем передаточную функцию $W(\lambda)$:

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= c^T (A - \lambda I)^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda^2 + 4\lambda + 3} \begin{bmatrix} -\lambda - 2 & -1 \\ -1 & -\lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda^2 + 4\lambda + 3} \begin{bmatrix} -\lambda - 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{\lambda^2 + 4\lambda + 3} \end{aligned}$$

Теперь возьмем $\lambda = iw$ и проверим выполнение неравенства

$$\begin{aligned}
 & Re\{[1 + \mu_1 W(iw)][1 + \mu_2 W(iw)]^*\} > 0, \omega \in [-\infty, +\infty] \\
 & Re\{[1 + \mu_2 W(iw)]^*\} = Re\{[1 + \frac{-1}{-w^2 + 3 + 4iw}]^*\} \\
 & = Re\{[1 + \frac{-(3 - w^2 - 4iw)}{(-w^2 + 3)^2 + 16w^2}]^*\} = Re\{[\frac{(-w^2 + 3)^2 + 17w^2 - 3 + 4iw}{(-w^2 + 3)^2 + 16w^2}]\} \\
 & = \frac{w^4 - 6w^2 + 9 + 17w^2 - 3}{(-w^2 + 3)^2 + 16w^2} = \frac{w^4 + 11w^2 + 6}{(-w^2 + 3)^2 + 16w^2} > 0
 \end{aligned}$$

Числитель и знаменатель полученной дроби положительны при $\forall w$.
 Все условия теоремы выполнены, следовательно, система экспоненциально устойчива.

3 ЗАДАНИЕ 3

3.1 Условие

Дана нелинейная система:

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \sigma = c^*x,$$

$$\xi = \varphi(\sigma)$$

,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\xi = \begin{cases} 2\sigma, |\sigma| < 1 \\ 2\text{sign}(\sigma), |\sigma| \geq 1 \end{cases}$$

С помощью критерия Попова доказать асимптотическую устойчивость системы.

3.2 Решение

1. Выполнение «секторного условия»:

$$0 \leq \varphi(\sigma)/\sigma \leq \mu_0 \leq +\infty, \sigma \neq 0, \forall t \in (0, \infty)$$

Для любого промежутка μ_0 - минимум 2 $((2\sigma)' = 2, \lim_{\sigma \rightarrow +1} (2\text{sign}(\sigma)) = 2)$, можно взять $\mu_0 = 2.5$

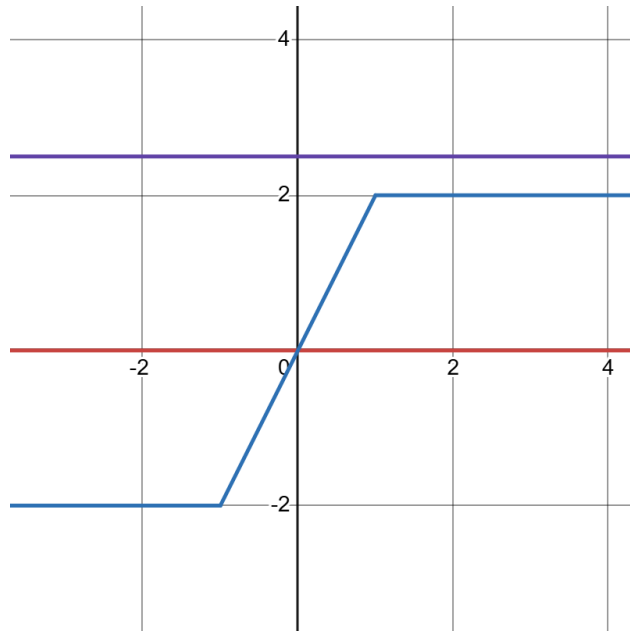


Рисунок 4 — Проверка "секторного" условия

Секторное условие выполняется.

2. Устойчивость матрицы A

$$\det\{\lambda I - A\} = \lambda^2 + 5\lambda + 1 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2} \rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$$

Матрица A устойчива.

3. Выполнение «частотного условия».

Найдем передаточную функцию $W(\lambda)$:

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= c^T (A - \lambda I)^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda^2 + 5\lambda + 1} \begin{bmatrix} -4 - \lambda & 3 \\ 1 & -\lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\lambda^2 + 5\lambda + 1} \end{aligned}$$

Возьмем $\lambda = iw$ и проверим выполнение неравенства

$$\begin{aligned} \mu_0^{-1} + \operatorname{Re}[(1 + iw\nu)W(iw)] &> 0, \forall w \in [0, +\infty) \\ \frac{2}{5} + \operatorname{Re}[(1 + iw\nu) \frac{1}{-w^2 + 1 + 5iw}] &= \frac{2}{5} + \operatorname{Re}[\frac{(1 + iw\nu)(-w^2 + 1 - 5iw)}{(-w^2 + 1)^2 + 25w^2}] = \\ &= \frac{2}{5} + \operatorname{Re}[\frac{-w^2 + 1 - 5iw - iw^3\nu + iw\nu + 5w^2\nu}{(-w^2 + 1)^2 + 25w^2}] \\ &= \frac{2}{5} + \frac{-w^2 + 1 + 5w^2\nu}{(-w^2 + 1)^2 + 25w^2} = \frac{2((-w^2 + 1)^2 + 25w^2) - 5w^2 + 5 + 25w^2\nu}{5((-w^2 + 1)^2 + 25w^2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2(-w^2 + 1)^2 + 45w^2 + 5 + 25w^2\nu}{5((-w^2 + 1)^2 + 25w^2)}$$

При $\nu \geq 0$ числитель и знаменатель полученной дроби положительны при $\forall w$. Условие выполняется.

Все условия теоремы выполнены - система асимптотически устойчива.