Научно-исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №1
Моделирование и устойчивость
Вариант 11

Выполнили студенты — Мовчан Игорь Евгеньевич, Боглачев Артём Сергеевич
Преподаватель — Краснов Александр Юрьевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Влияние дискретного элемента

Реализуем схему с дискретным элементом с периодом дискретизации $T = 0.2$ с и коэффициентом передачи ОУ $K_{CO} = 7.2$:

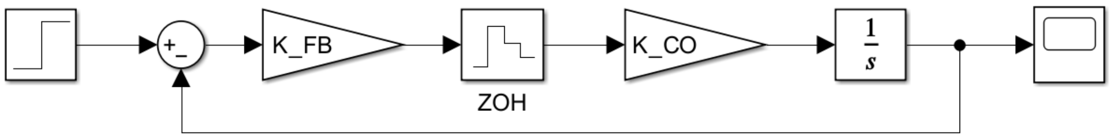

Рис. 1: Система с дискретным элементом

Выведем разностное уравнение этой схемы. На выходе экстрополятора нулевого порядка имеем $u(t) = u[k]$ при $t \in [kT, (k+1)T]$. Тогда интегратору на вход подается постоянная величина, а значит

$$y((k+1)T) = y(kT) + K_{CO}Tu[k]$$

Откуда при компактном обозначении $y[k] = y(kT)$:

$$y[k+1] = y[k] + K_{CO}Tu[k]$$

Далее, учитывая, что $u[k] = K_{FB}(r[k] - y[k])$:

$$y[k+1] = (1 - K_{FB}K_{CO}T)y[k] + K_{FB}K_{CO}Tr[k]$$

В данном случае $r[k]$ - дискретный входной сигнал от $r(t)$ в моменты времени $t = kT$. Для рассматриваемой схемы

$$r(t) = g(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Для дальнейшего анализа полезным будет ввести переменную, характеризующую движение системы без входного сигнала $r(t)$:

$$z = 1 - K_{FB}K_{CO}T \Rightarrow y[k+1] = zy[k] + K_{FB}K_{CO}Tr[k]$$

Нейтральная граница $z = 1$, колебательная $z = -1$.

Затухающие колебания при $-1 \leq z < 0$, максимальные при $z = -1$, при $z < -1$ - расходящиеся колебания. При $z \geq 0$ - отсутствие колебаний. При $0 \leq z \leq 1$ - затухание. При $z > 1$ - расходящиеся экспоненты.

Оптимальное по быстродействию значение $z = 0$.

2 Исследование устойчивости

Рассмотрим непрерывный ОУ, заданный уравнением $\ddot{y} = u$, где $u(t)$ - управляющее воздействие, $y(t)$ - выходная величина.

Зададимся $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$, а значит, $\dot{x_1}(t) = x_2(t)$, а $\dot{x_2}(t) = u(t)$. Тогда модель в форме вход-состояние-выход будет:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = A_{\text{н}}x + B_{\text{н}}u$$

Дискретизируем ее с использованием выражений:

$$A = e^{A_{\text{н}}T} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{\text{н}}^i T^i}{i!}, \quad B = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{\text{н}}^{i-1} T^i}{i!} B_{\text{н}}$$

Заметим, что $A^2 = 0$, а значит, $A^n = 0$ для любого $n \geq 2$. Тогда

$$A = I + A_{\text{н}}T = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = TB_{\text{н}} + \frac{A_{\text{н}}T^2 B_{\text{н}}}{2} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

Теперь зададим управляющее воздействие в виде

$$u(k) = -Kx(k) = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

А также матрицу динамики замкнутой системы:

$$F = A - BK = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - k_1T^2/2 & T - k_2T \\ -k_1T^2/2 & 1 - k_2T \end{bmatrix}$$

Характеристический полином для замкнутой системы тогда:

$$P(z) = \det(zI - F) = \begin{vmatrix} z - 1 + k_1T^2/2 & -T + k_2T \\ k_1T^2/2 & z - 1 + k_2T \end{vmatrix} =$$

$$= (z - 1 + k_1T^2/2)(z - 1 + k_2T) - (-T + k_2T)(k_1T^2/2) =$$
$$= z^2 + z(-2 + k_1T^2/2 + k_2T) + (1 - k_1T^2/2 - k_2T + k_1T^3/2)$$

С помощью матрицы M размерности 2×2 такой, что $x = M\xi$ и существует M^{-1}, перейдем к базису ξ системы, где матрица F была бы диагональной и имела собственными числами z_1 и z_2:

$$F_d = M^{-1}FM = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}, \quad \xi(m+1) = F_d\xi(m), \quad \xi_i(m) = z_i^m\xi(0)$$

Характеристический полином замкнутой системы в этом случае:

$$P(z) = \det(zI - F_d) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2$$

Зная, что при переходе в новый базис характеристический полином остается тем же:

$$\det(zI - F_d) = \det(M^{-1}(zI - F)M) = \det(zI - F)$$

Получаем систему уравнений на коэффициенты k_1 и k_2:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 - k_1T^2/2 - k_2T \\ z_1z_2 = 1 - k_1T^2/2 - k_2T + k_1T^3/2 \end{cases}$$

Решим ее аналитически с введенными $s = z_1 + z_2$ и $p = z_1z_2$:

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{2(1 - s + p)}{T^3} \\ k_2 = \dfrac{2 - s}{T} - \dfrac{1 - s + p}{T^2} \end{cases}$$

Отлично! Теперь можно синтезировать матрицу K по желаемым корням z_1 и z_2 замкнутой системы, а также взятому периоду дискретизации $T = 0.2$ с. Рассмотрим пять случаев:

1. $z_1 = 0.1$ и $z_2 = 0.7$: обратная связь $K_1 = \begin{bmatrix} 67.5 & -0.75 \end{bmatrix}^T$
2. $z_1 = -1.2$ и $z_2 = -0.4$: обратная связь $K_2 = \begin{bmatrix} 770 & -59 \end{bmatrix}^T$
3. $z_1 = 0.1$ и $z_2 = 0.5$: обратная связь $K_3 = \begin{bmatrix} 112.5 & -4.25 \end{bmatrix}^T$
4. $z_{12} = \pm 1.2j$: обратная связь $K_4 = \begin{bmatrix} 610 & -51 \end{bmatrix}^T$
5. $z_{12} = -0.8 \pm 0.7j$: обратная связь $K_5 = \begin{bmatrix} 932.5 & -75.25 \end{bmatrix}^T$

Наконец, осуществим моделирование полученных систем с начальными условиями $y(0) = 1$ и $\dot{y}(0) = 0$. Переходный процесс при входе $r(t) = g(t)$.

3 Построение командных генераторов

Синтезируем командный генератор гармонического сигнала вида $g(k) = A\sin(kT\omega)$ с параметрами из варианта:

$$T = 0.2 \text{ с}, \quad A = -1.3, \quad \omega = 0.87 \text{ рад/с}$$

Найдем разностное уравнение для этого сигнала:

$$g(k+1) = A\sin((k+1)T\omega) = A(\sin(kT\omega)\cos(T\omega) + \cos(kT\omega)\sin(T\omega))$$

Введем переменные состояния:

$$\xi_1(k) = g(k) = A\sin(kT\omega), \quad \xi_2(k) = A\cos(kT\omega)$$

Тогда система уравнений для состояний:

$$\begin{cases} \xi_1(k+1) = \quad \xi_1(k)\cos(T\omega) + \xi_2(k)\sin(T\omega) \\ \xi_2(k+1) = -\xi_1(k)\sin(T\omega) + \xi_2(k)\cos(T\omega) \end{cases}$$

Запишем эту систему в матричном виде:

$$\xi(k+1) = \begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(T\omega) & \sin(T\omega) \\ -\sin(T\omega) & \cos(T\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \end{bmatrix} = \Gamma_d \xi(k)$$

Тогда итоговая модель задается уравнением

$$g(k) = H\xi(k) = H\Gamma_d^k\xi(0)$$

При начальных условиях и матрице H:

$$\xi(0) = \begin{bmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\sin(0) \\ A\cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Далее синтезируем дискретную модель возмущения $g(k) = A + BkT + C(kT)^2$ с параметрами из варианта:

$$A = 5, \quad B = 5.5, \quad C = 1.5$$

Также выведем разностное уравнение для этого сигнала. Зададимся первой переменной состояния:

$$\xi_1(k) = g(k)$$

Возьмем вторую переменную состояния:

$$\xi_2(k) = \xi_1(k+1) = A + BkT + C(kT)^2 + BT + 2CkT^2 + CT^2$$

Откуда:

$$\xi_2(k) = \xi_1(k) + BT + 2CkT^2 + CT^2$$

Возьмем третью переменную состояния:

$$\xi_3(k) = \xi_2(k+1) = \xi_1(k+1) + BT + 2CkT^2 + CT^2 + 2CT^2$$

Откуда:

$$\xi_3(k) = \xi_1(k+1) + \xi_2(k) - \xi_1(k) + 2CT^2 = 2\xi_2(k) - \xi_1(k) + 2CT^2$$

Далее, имеем:

$$\xi_3(k+1) = 2\xi_2(k+1) - \xi_1(k+1) + 2CT^2$$

Из выражения для $\xi_3(k)$ можно выразить CT^2:

$$CT^2 = \xi_3(k) - 2\xi_2(k) + \xi_1(k)$$

И тогда:

$$\xi_3(k+1) = 2\xi_2(k+1) - \xi_1(k+1) + \xi_3(k) - 2\xi_2(k) + \xi_1(k) =$$

$$= 3\xi_3(k) - 3\xi_2(k) + \xi_1(k)$$

В матричной форме система записывается как

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \\ \xi_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix} = \Gamma_d \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix}$$

Имеем также

$$g(k) = H\xi(k) = H\Gamma_d^k \xi(0), \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Начальные условия задаются через $k = 0$ и $g(0) = A$:

$$\xi(0) = \begin{bmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \\ \xi_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A + BT + CT^2 \\ A + 2BT + 3CT^2 \end{bmatrix}$$