МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет ИТМО"
(Университет ИТМО)

Факультет Систем управления
и Робототехники

Отчет № 6
по дисциплине
"Нелинейные системы управления"

по теме:
ФИНИТНЫЙ ОДНОРОДНЫЙ РЕГУЛЯТОР С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ КОМПЕНСАЦИЕЙ ОБОБЩЕННОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ДИНАМИКИ

Студенты:
Группа № R3480 *И.Е. Мовчан*
Группа № R3436 *З.Р. Ибахаев*
Группа № R3435 *С.Э. Белоус*

Предподаватель:
преподаватель, кандидат технических наук , доцент *К.А. Зименко*

СОДЕРЖАНИЕ

1 БЕЗМОДЕЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С КОНЕЧНОВРЕМЕННОЙ СТАБИЛИЗАЦИЕЙ

1.1. Выбранная нелинейная система

В работе рассматривается нелинейная управляемая система второго порядка с одним входом и одним выходом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(t,x_1,x_2) + u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t)$ — управляющее воздействие (единственный вход), $y(t)$ — измеряемый выход (единственный выход), а $f(\cdot)$ — неизвестная нелинейная динамика и возмущения.

В численном моделировании использовался конкретный вид неизвестной динамики:

$$f(t,x_1,x_2) = -a\,x_2 - b\,\tanh(x_1) + 0.2\,x_1^2 + d(t) \tag{2}$$

где a,b — неопределённые параметры, $d(t)$ — внешнее возмущение, $\tanh(\cdot)$ — гиперболический тангенс, обеспечивающий насыщающую нелинейность.

1.2. Безмодельное представление и цепь интеграторов

Предполагая наличие существенных неопределённостей в математической модели, используется безмодельное (ultra-local) представление системы, введённое в model-free управлении [1]:

$$y^{(n)}(t) = F(t) + u(t). \tag{3}$$

В данной работе выбран минимальный порядок $n = 2$, что приводит к модели:

$$\ddot{y}(t) = F(t) + u(t), \tag{4}$$

где $F(t)$ — обобщённая неизвестная динамика, включающая все нелинейности, неопределённые параметры и внешние возмущения.

В терминах состояний $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ система (1) приводится к цепи интеграторов с согласованной неизвестной динамикой:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = u + F(t). \tag{5}$$

1.3. Оценка обобщённой неизвестной динамики

Поскольку функция $F(t)$ неизвестна, в model-free подходе вводится её оценка $\hat{F}(t)$. В соответствии с подходом, изложенным в [1], оценка строится с учётом насыщения управляющего сигнала:

$$\hat{F}(t_k) = \widehat{\ddot{y}}(t_k) - \mathrm{sat}(u(t_{k-1})), \tag{6}$$

где $\widehat{\ddot{y}}(t_k)$ — оценка второй производной выхода, $\mathrm{sat}(\cdot)$ — функция насыщения, учитывающая физические ограничения управления, $u(t_{k-1})$ — уже применённое управление.

Для построения оценки $\widehat{\ddot{y}}(t_k)$ используется гиперэкспоненциальный дифференциатор, обеспечивающий ускоренную сходимость и робастность к шумам [2]. В дискретном времени оценка первой производной формируется по рекуррентному соотношению:

$$\widehat{\dot{y}}(t_k) = \alpha\, \widehat{\dot{y}}(t_{k-1}) + \frac{1-\alpha}{T_s}\big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big), \tag{7}$$

где $\alpha = e^{-T_s/\tau}$ — коэффициент фильтрации, $\tau > 0$ — постоянная времени фильтра, T_s — период дискретизации.

Оценка второй производной строится аналогично как фильтрованное дифференцирование оценки первой производной:

$$\widehat{\ddot{y}}(t_k) = \alpha\, \widehat{\ddot{y}}(t_{k-1}) + \frac{1-\alpha}{T_s}\big(\widehat{\dot{y}}(t_k) - \widehat{\dot{y}}(t_{k-1})\big). \tag{8}$$

Данная схема оценивания обеспечивает ограниченную ошибку оценок $\widehat{\dot{y}}(t)$ и $\widehat{\ddot{y}}(t)$, что гарантирует ограниченность оценки $\hat{F}(t)$ и позволяет эффективно компенсировать влияние обобщённой неизвестной динамики в законе управления.

Таким образом, оценка $\hat{F}(t)$ используется не для идентификации модели системы, а исключительно для компенсации неизвестной динамики, что является ключевым принципом безмодельного подхода.

1.4. Ошибка и терминальная (однородная) поверхность

Целью управления является стабилизация выхода системы:

$$y(t) \to y_{\mathrm{ref}}(t), \tag{1}$$

где $y_{\mathrm{ref}}(t)$ — заданное значение.

Вводится ошибка слежения:

$$e(t) = y(t) - y_{\mathrm{ref}}(t). \tag{9}$$

Для реализации конечновременной стабилизации используется терминальная (однородная) поверхность:

$$s(t) = \dot{e}(t) + c\,|e(t)|^{\gamma}\,\mathrm{sgn}(e(t)), \quad c > 0, \quad 0 < \gamma < 1. \tag{10}$$

Такая поверхность является однородной отрицательной степени и обеспечивает конечновременную сходимость ошибки в непрерывном времени при идеальных условиях.

1.5. Закон управления с конечновременной стабилизацией

Итоговый закон управления формируется как сумма компенсации обобщённой неизвестной динамики и стабилизирующего конечновременного члена:

$$u(t) = -\hat{F}(t) + u_0(t). \tag{11}$$

Стабилизирующая часть выбирается в виде конечновременного однородного закона:

$$u_0(t) = -k\,|s(t)|^{\rho}\,\mathrm{sgn}(s(t)), \quad k > 0,\ 0 < \rho < 1. \tag{12}$$

Использование дробной степени ρ обеспечивает однородность закона управления и конечновременное затухание переменной $s(t)$.

Таким образом, регулятор сочетает:

-- компенсацию обобщённой неизвестной динамики через $\hat{F}(t)$;

-- конечновременный однородный стабилизирующий закон $u_0(t)$.

2 МОДЕЛИРОВАНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Результаты моделирования

Начальные условия: $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$.

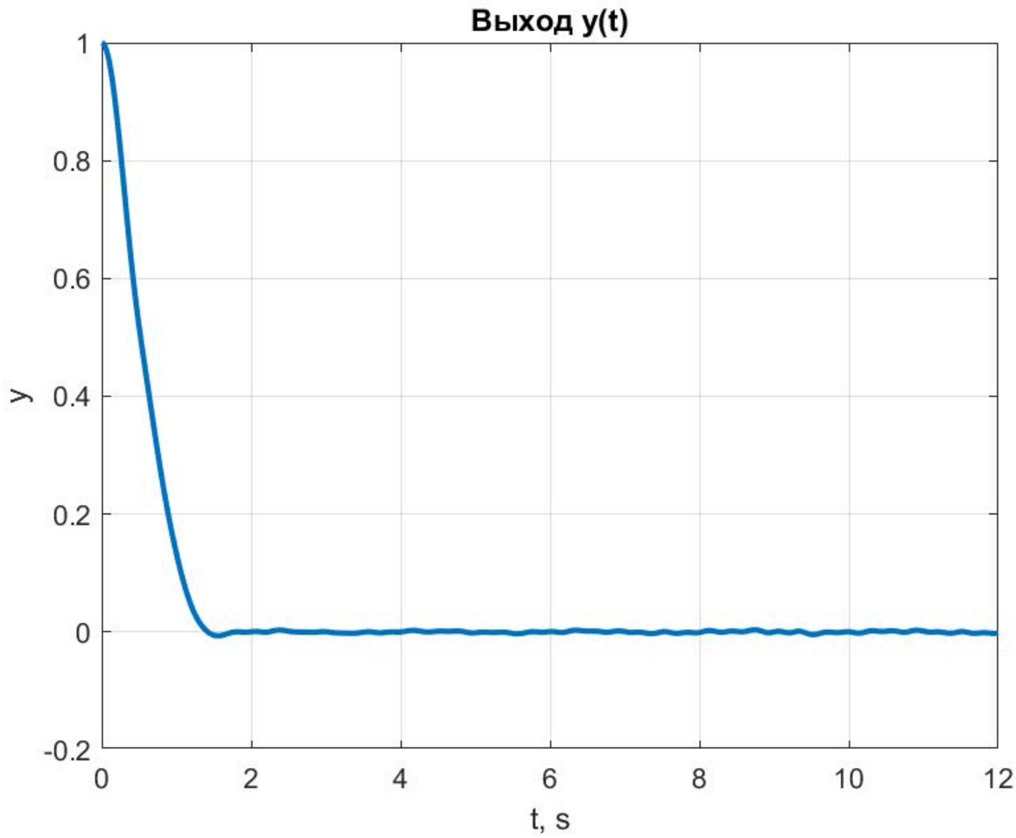

Рисунок 1 --- Выход системы $y(t)$

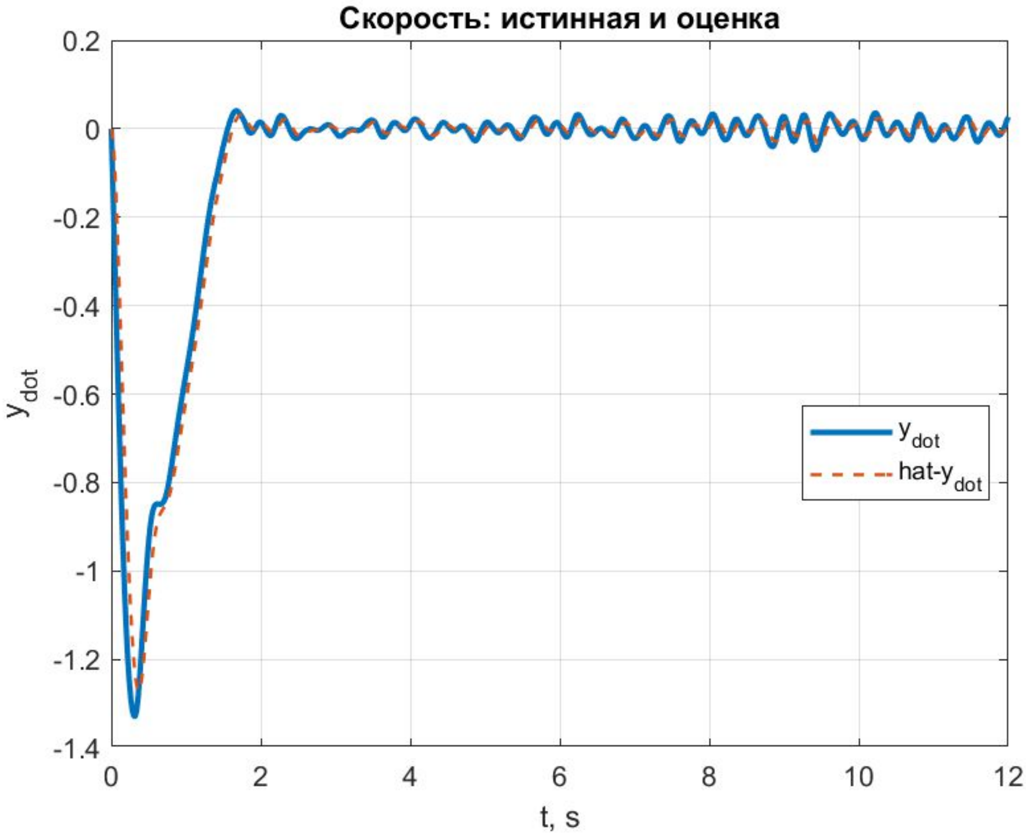

Рисунок 2 --- Скорость $\dot{y}(t)$ и её оценка $\hat{\dot{y}}(t)$

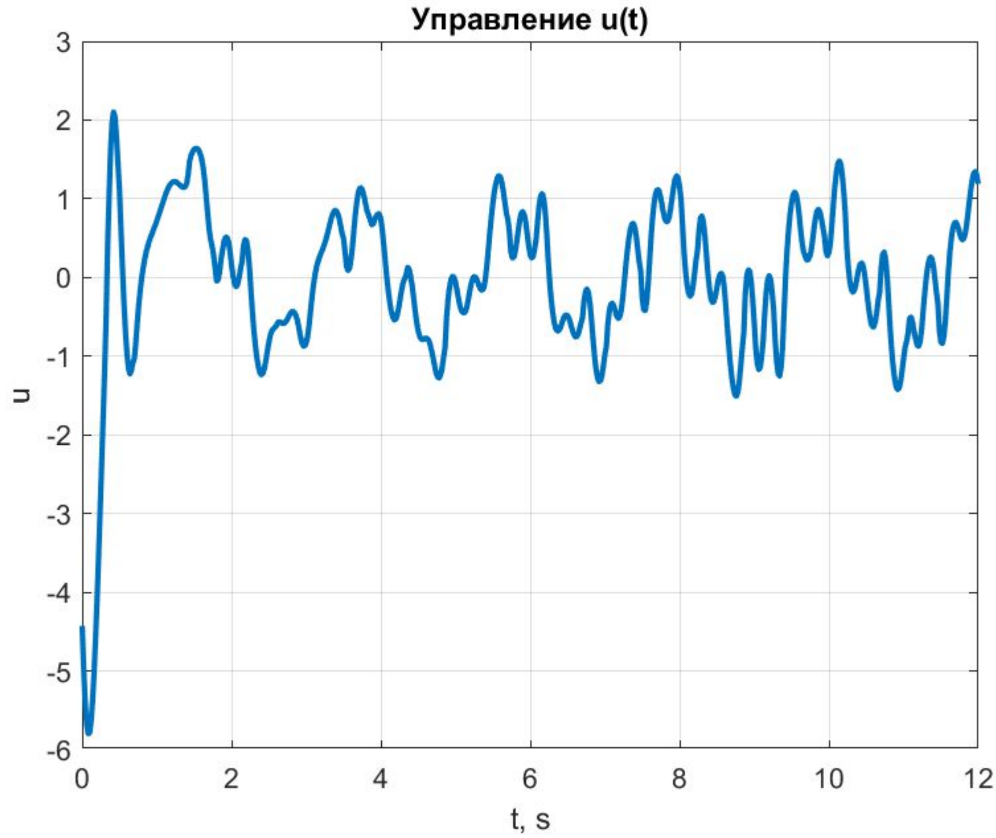

Рисунок 3 --- Управление $u(t)$

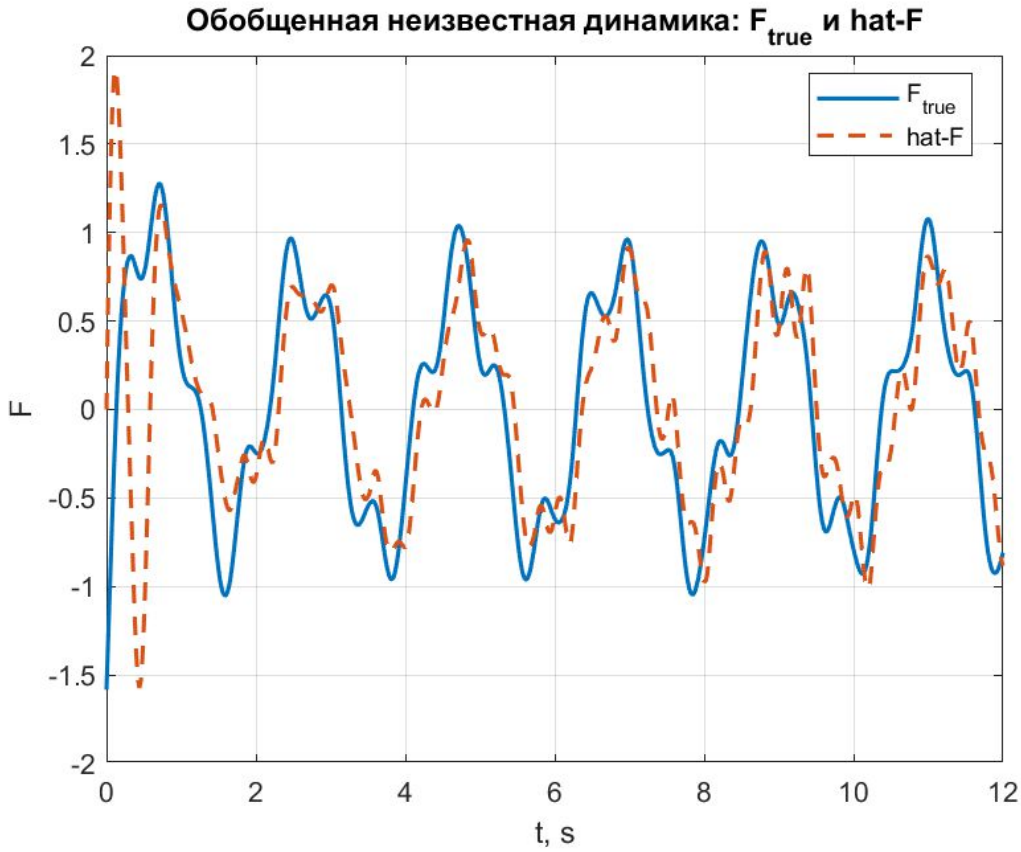

Рисунок 4 --- Обобщённая неизвестная динамика $F_{\text{true}}(t)$ и её оценка $\hat{F}(t)$

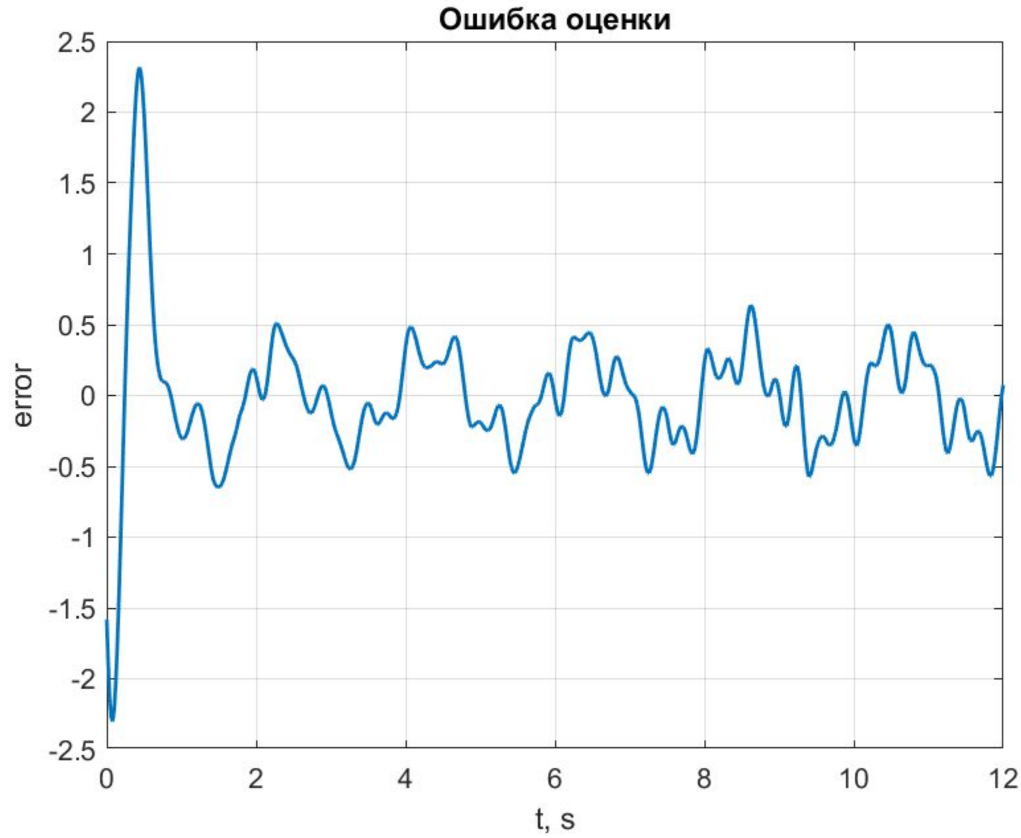

Рисунок 5 --- Ошибка оценки неизвестной динамики $F_{\text{true}}(t) - \hat{F}(t)$

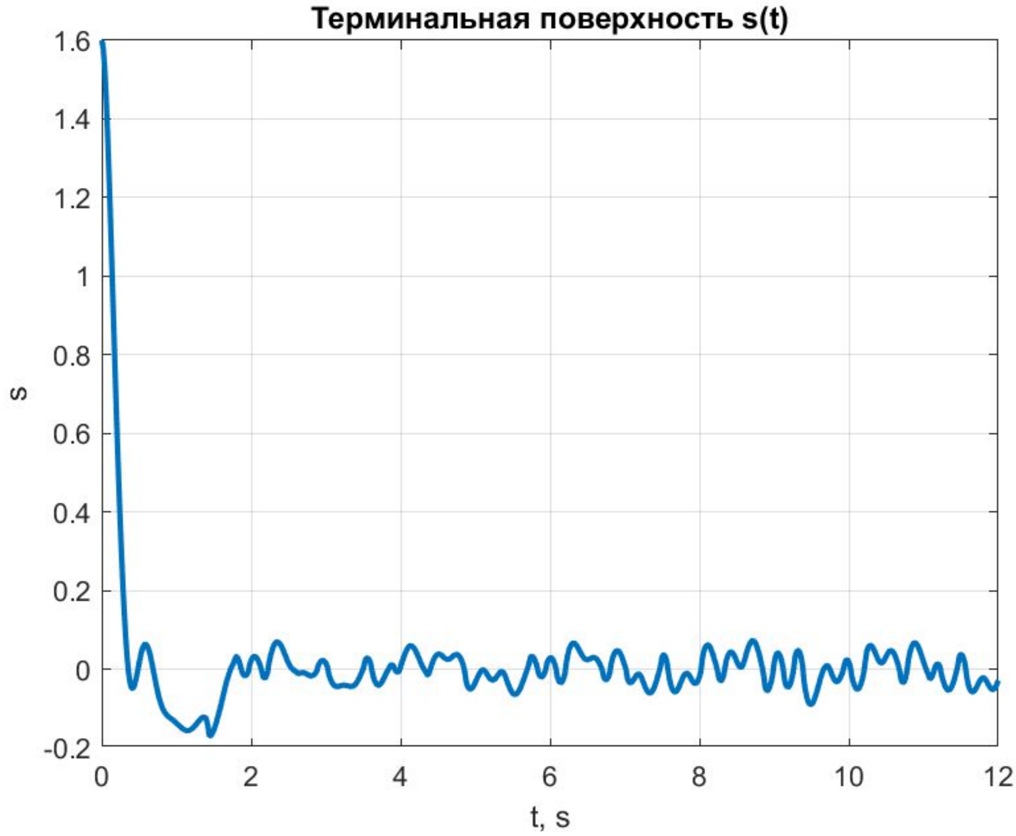

Рисунок 6 --- Терминальная поверхность $s(t)$

2.2. Краткий анализ результатов

По графикам видно, что выход $y(t)$ за конечное время попадает в малую окрестность нуля. Терминальная поверхность $s(t)$ также быстро уменьшается и далее колеблется вблизи нуля, что соответствует практической конечновременной стабилизации в условиях дискретной реализации и сглаживания. Управление $u(t)$ остаётся ограниченным и компенсирует возмущения, а оценка $\hat{F}(t)$ повторяет основную (низкочастотную) составляющую неизвестной динамики $F_{\text{true}}(t)$.

Полученные результаты демонстрируют эффективность предложенного подхода безмодельного управления с конечновременной стабилизацией для систем с существенными неопределённостями.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Fliess M.*, *Join C.* Model-free control // International Journal of Control. — 2013. — Vol. 86, no. 12. — P. 2228–2252. — Основополагающая работа по безмодельному управлению, вводит ultra-local модель.
2. *Wang J.*, *Zimenko K.*, *Polyakov A.*, *Efimov D.* An exact robust high-order differentiator with hyperexponential convergence // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2025. — Vol. 70, no. 1. — P. 627–634. — Предлагает гиперэкспоненциальный дифференциатор для оценки производных.