

НАУЧНО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по лабораторной работе №3
Регуляторы с заданной степенью устойчивости
Вариант 11

Выполнил студент группы R3380
Преподаватель

Мовчан Игорь Евгеньевич
Пашенко Артем Витальевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Регулятор с заданной степенью устойчивости	2
2 Управление по выходу	25
3 Качественная экспоненциальная устойчивость	43
4 Общие выводы	55

1 Регулятор с заданной степенью устойчивости

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

В соответствии с вариантом, матрицы A и B имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 13 \\ 6 & -1 & 6 \\ -6 & -1 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Выполним анализ управляемости системы и её собственных чисел. Для этого используем Жорданову форму $\hat{A} = T^{-1}AT$ матрицы A , имеющей собственными числами $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_{23} = 2 \pm 3i$, а также вспомогательную матрицу T для перехода к ней:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Можно получить обратную матрицу к T :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Заметим, что хоть элемент \hat{B}_2 матрицы \hat{B} , соответствующий одному из мнимых собственных чисел, и равен нулю, он не влияет на управляемость λ_2 , так как та достигается через сопряженное λ_3 .

Также отметим, что $\hat{B}_1 = 0$, а значит, λ_1 не управляемо. Вся же система, таким образом, является частично управляемой, но стабилизируемой, так как единственное неуправляемое собственное число

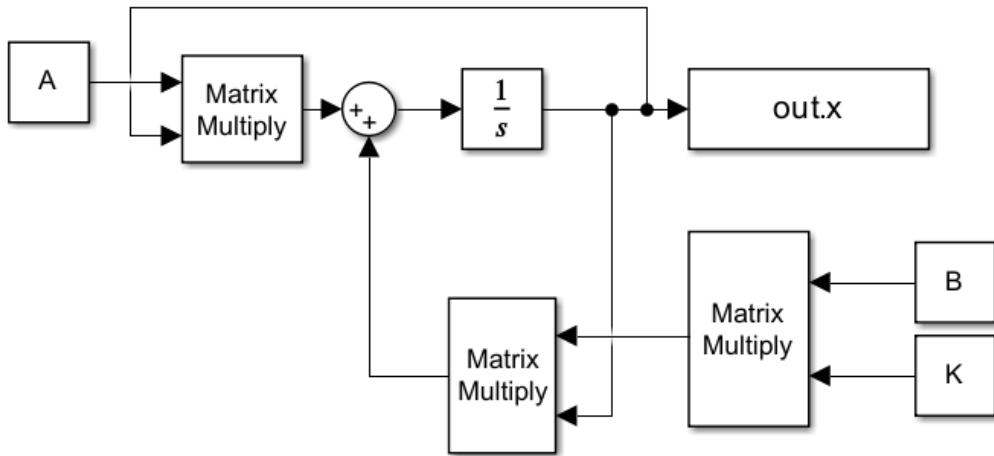


Рис. 1: Схема моделирования системы с статическим регулятором

λ_1 лежит в левой полуплоскости - имеет отрицательную вещественную часть, а значит, является асимптотически устойчивым.

Замкнем систему статическим регулятором:

$$u = Kx$$

Матрица K коэффициентов обратной связи выбирается так, чтобы собственные числа уже замкнутой системы с матрицей $A + BK$ были устойчивыми.

Схема моделирования системы с таким регулятором приведена на рисунке 1.

Неуправляемость λ_1 накладывает ограничение на максимальную степень устойчивости α_{max} , достижимую с помощью статического регулятора. В данном случае, α_{max} равна 2, так как это минимальный модуль вещественных частей неуправляемых собственных чисел ($\lambda_1 = -2 \Rightarrow \alpha_{max} = |\Re(\lambda_1)| = 2$).

Зададимся теперь *достижимыми* значениями желаемой степени устойчивости, исходя из $\alpha_{max} = 2$:

$$\alpha_1 = 0.5, \quad \alpha_2 = 1.25, \quad \alpha_3 = 2$$

И для каждого из значений α_i выполним синтез регулятора.

Начнём с $\alpha_1 = 0.5$.

Пусть не задано ограничений на управление. Тогда задача сводится к решению матричного неравенства типа Ляпунова относительно $P \succ 0$ и Y , а после вычислению матрицы обратной связи K :

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0, \quad K = YP^{-1}$$

Итак, для $\alpha = \alpha_1 = 0.5$ получаем решение неравенства:

$$P_{1,1} = \begin{bmatrix} 5.7102 & 0.4622 & -1.4882 \\ 0.4622 & 4.4696 & -0.6161 \\ -1.4882 & -0.6161 & 1.7273 \end{bmatrix}, \quad Y_{1,1} = \begin{bmatrix} -24.0344 \\ -6.7335 \\ 8.4948 \end{bmatrix}^T$$

Откуда:

$$K_{1,1} = [-3.7894 \quad -0.9327 \quad 1.3204]$$

Выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_{1,1} = \begin{bmatrix} 3.4211 & -3.8653 & 15.6407 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_{1,1}) = \{-2, -1.7894 \pm 9.4808i\}$$

У всех собственных чисел вещественная часть меньше α_1 , что соответствует заданной устойчивости - синтез проведен корректно.

Заметим однако, что значения спектра получились достаточно отдаленными от заданного α_1 (слишком «большими», из-за чего переходные процессы протекают быстрее). Как известно из лабораторной работы 2, это приводит к скачкам значений в управлении, чего, возможно, хотелось бы избежать. Поэтому дополнительно исследуем ещё и задачу *минимизации управления*. К вышеперечисленному синтезу добавим условия (параметр γ минимизируется, $x_0 = [1, 1, 1]^T$ - начальное состояние системы, если не знаем - любое)

$$\begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \gamma I \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad \|u(t)\| \leq \sqrt{\gamma} \text{ для } x_0$$

Итак, для $\alpha_1 = 0.5$ при решении неравенства Ляпунова совместно с этим условием получаем:

$$P_{2,1} = \begin{bmatrix} 1508.3683 & 7.7509 & -1505.3764 \\ 7.7509 & 10.3940 & -6.8852 \\ -1505.3764 & -6.8852 & 1506.5237 \end{bmatrix}, \quad Y_{2,1} = \begin{bmatrix} -8.5532 \\ 1.0113 \\ -1.5315 \end{bmatrix}^T$$

Откуда:

$$K_{2,1} = [-2.5013 \ 0.3071 \ -2.4990]$$

Выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_{2,1} = \begin{bmatrix} 5.9974 & -1.3857 & 8.0019 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_{2,1}) = \{-2, -0.5 \pm 3.7541i\}$$

Все управляемые собственные числа имеют вещественную часть, равную α_1 , а для неуправляемого λ_1 выполнено $\Re(\lambda_1) < \alpha_1$. Это соответствует желаемой степени устойчивости, а значит, синтез проведен корректно. Важно, что вследствии решаемой задачи, вещественная часть спектра была «прижата» к минимально допустимому значению α_1 . Отметим, что *минимизация* управления в такой постановке может быть рассмотрена только при известных начальных условиях, в остальном x_0 берется любым, решением достигаются близкие к заданной степени устойчивости вещественные части спектра замкнутой системы, и как следствие, более низкие значения управления.

Проведем моделирование системы с полученными регуляторами при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1]^T$. На рисунках 2 и 3 представлены векторы состояния с матрицами обратной связи $K_{1,1}$ и $K_{2,1}$, а на рисунке 4 - соответствующие управления системой.

Можем видеть, что при минимизации управления, скорость сходимости к нулю замедляется более чем в 2.5 раза, при этом величина самого управления уменьшилась почти в 2 раза. Все ранее сделанные выводы ещё раз подтвердились.

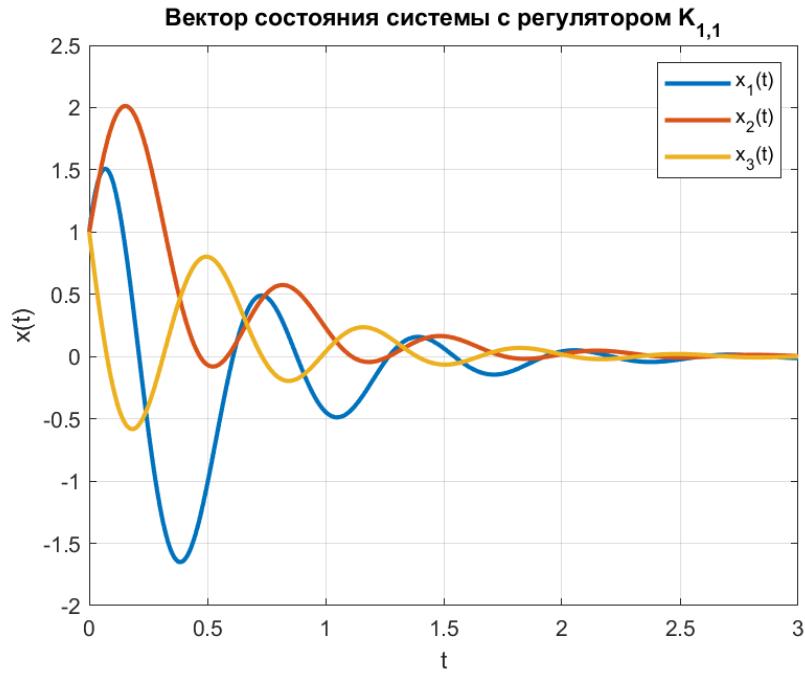


Рис. 2: Вектор состояния при заданной устойчивости $\alpha_1 = 0.5$

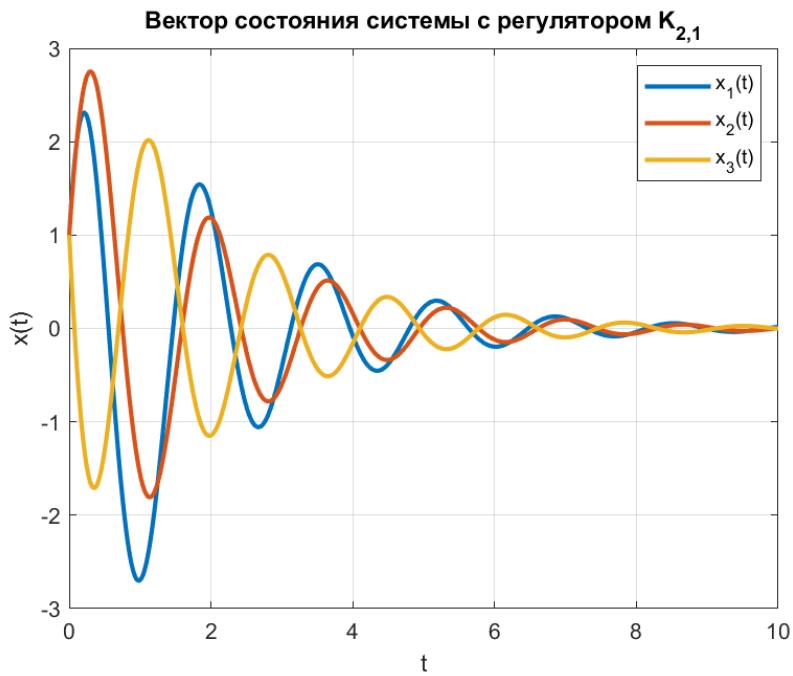


Рис. 3: Вектор состояния при $\alpha_1 = 0.5$ и минимизации управления

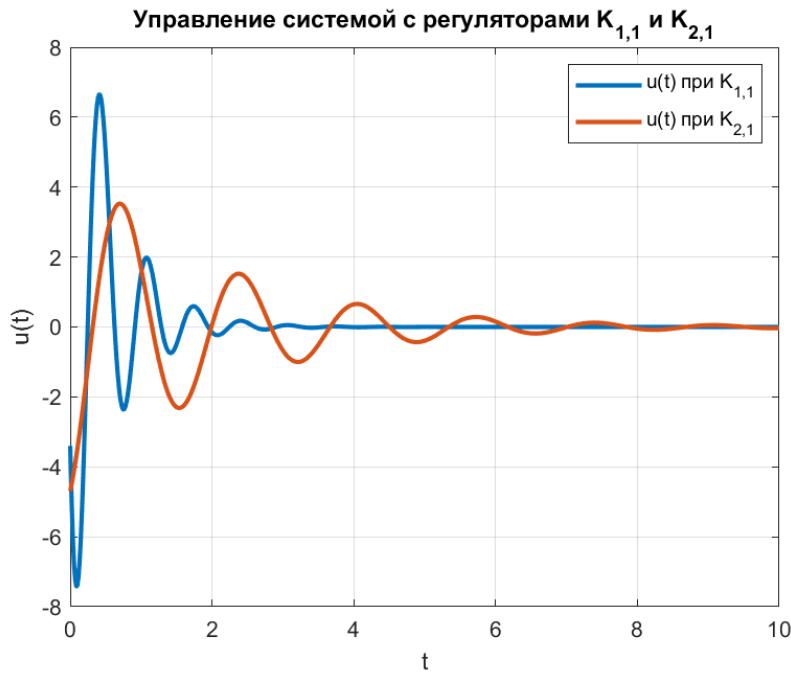


Рис. 4: Управления системой с регуляторами $K_{1,1}$ и $K_{2,1}$

Рассмотрим теперь случай $\alpha_2 = 1.25$.

Пусть не задано ограничений на управление. Тогда решением матричного неравенства типа Ляпунова относительно $P \succ 0$ и Y при $\alpha = \alpha_2 = 1.25$ является:

$$P_{1,2} = \begin{bmatrix} 5.6978 & -0.2749 & -1.6787 \\ -0.2749 & 5.3479 & -0.3439 \\ -1.6787 & -0.3439 & 1.9520 \end{bmatrix}, \quad Y_{1,2} = \begin{bmatrix} -25.5207 \\ -2.7559 \\ 8.5408 \end{bmatrix}^T$$

Откуда:

$$K_{1,2} = Y P^{-1} = \begin{bmatrix} -4.3675 & -0.7080 & 0.4946 \end{bmatrix}$$

Выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_{1,2} = \begin{bmatrix} 2.2650 & -3.4161 & 13.9893 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_{1,2}) = \{-2, -2.3675 \pm 9.1089i\}$$

Все собственные числа имеют вещественную часть, меньшую α_2 , а значит, синтез проведен корректно.

Решим теперь задачу нахождения регулятора, обеспечивающего экспоненциальную устойчивость с $\alpha_2 = 1.25$, совместно с *минимизацией управления*. Матрицы P и Y принимают вид:

$$P_{2,2} = \begin{bmatrix} 1416.3035 & 4.9330 & -1413.0401 \\ 4.9330 & 9.6008 & -5.3336 \\ -1413.0401 & -5.3336 & 1414.4506 \end{bmatrix}, \quad Y_{2,2} = \begin{bmatrix} -15.9035 \\ 1.6835 \\ 0.6955 \end{bmatrix}^T$$

Откуда:

$$K_{2,2} = YP^{-1} = [-3.2513 \ 0.0418 \ -3.2474]$$

Выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

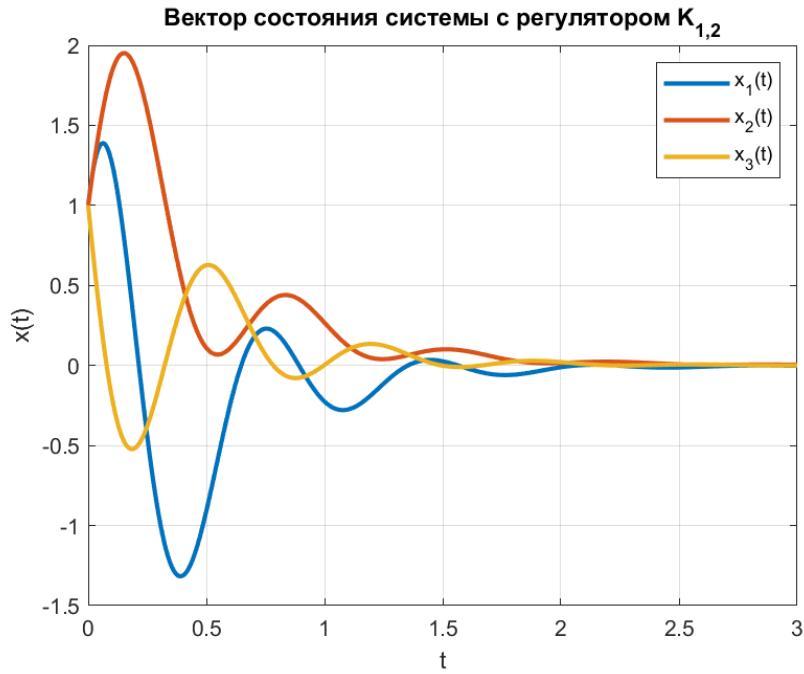
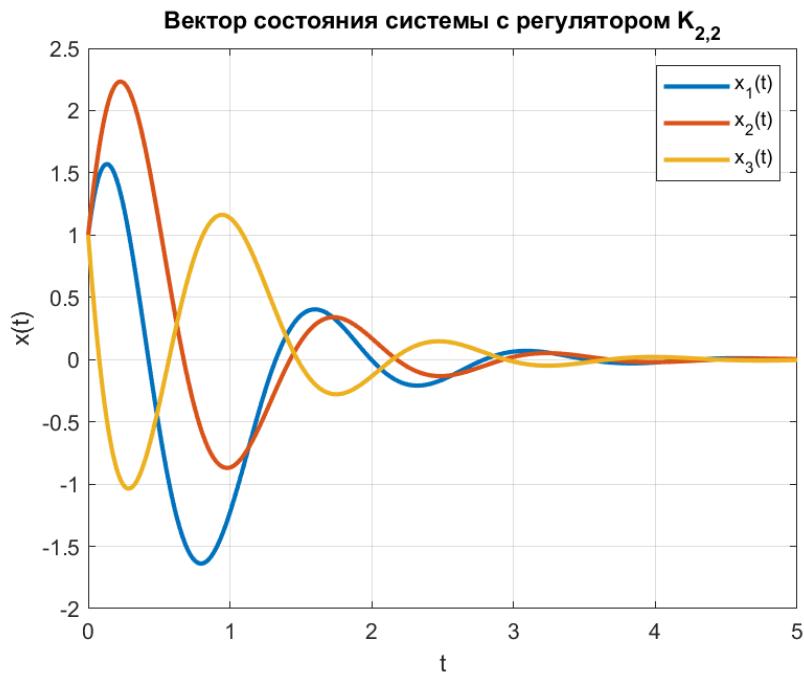
$$A + BK_{2,2} = \begin{bmatrix} 4.4974 & -1.9163 & 6.5051 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_{2,2}) = \{-2, -1.25 \pm 4.1811i\}$$

Все управляемые собственные числа имеют вещественную часть, *равную* α_2 , а для неуправляемого λ_1 выполнено $\Re(\lambda_1) < \alpha_2$. Это соответствует заданной желаемой степени устойчивости, а значит, синтез проведен корректно.

Проведем моделирование системы с полученными регуляторами при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1]^T$. На рисунках 5 и 6 представлены векторы состояния с матрицами обратной связи $K_{1,2}$ и $K_{2,2}$, а на рисунке 7 - соответствующие управлению системой.

Рис. 5: Вектор состояния при $\alpha_2 = 1.25$ Рис. 6: Вектор состояния при $\alpha_2 = 1.25$ и минимизации управления

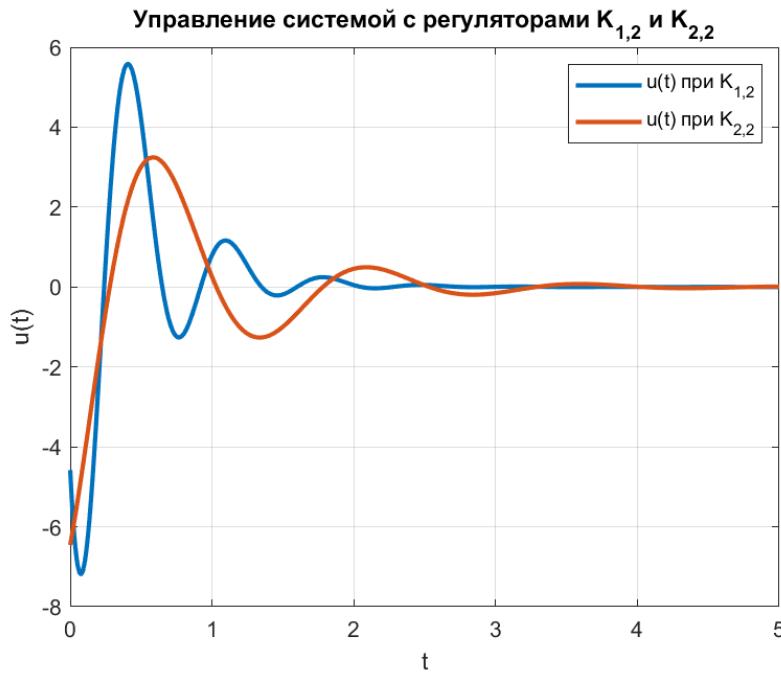


Рис. 7: Управления системой с регуляторами $K_{1,2}$ и $K_{2,2}$

Наконец, возьмем степень устойчивости $\alpha_3 = \alpha_{max} = 2$. Пусть не задано ограничений на управление. Тогда решением матричного неравенства типа Ляпунова относительно $P \succ 0$ и Y при $\alpha = \alpha_3 = 2$ является:

$$P_{1,3} = \begin{bmatrix} 7.3122 & -0.5963 & -2.2882 \\ -0.5963 & 5.9556 & -0.6526 \\ -2.2882 & -0.6526 & 2.6532 \end{bmatrix}, \quad Y_{1,3} = \begin{bmatrix} -34.7384 \\ -0.7010 \\ 11.7490 \end{bmatrix}^T$$

Откуда:

$$K_{1,3} = Y P^{-1} = \begin{bmatrix} -4.7323 & -0.5688 & 0.2071 \end{bmatrix}$$

Выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_{1,3} = \begin{bmatrix} 1.5354 & -3.1377 & 13.4142 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_{1,3}) = \{-2, -2.7323 \pm 9.0054i\}$$

Все собственные числа имеют вещественную часть, меньшую либо равную α_3 , а значит, синтез проведен корректно.

Решим теперь задачу нахождения регулятора, обеспечивающего экспоненциальную устойчивость с $\alpha_3 = 2$ и минимизацию управления. Матрицы P и Y принимают вид:

$$P_{2,3} = \begin{bmatrix} 1361.0988 & 2.9343 & -1356.2851 \\ 2.9343 & 8.8454 & -4.4085 \\ -1356.2851 & -4.4085 & 1357.0198 \end{bmatrix}, \quad Y_{2,3} = \begin{bmatrix} -28.3550 \\ 2.5196 \\ 6.7239 \end{bmatrix}^T$$

Откуда:

$$K_{2,3} = YP^{-1} = \begin{bmatrix} -4.0000 & -0.3789 & -3.9941 \end{bmatrix}$$

Выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

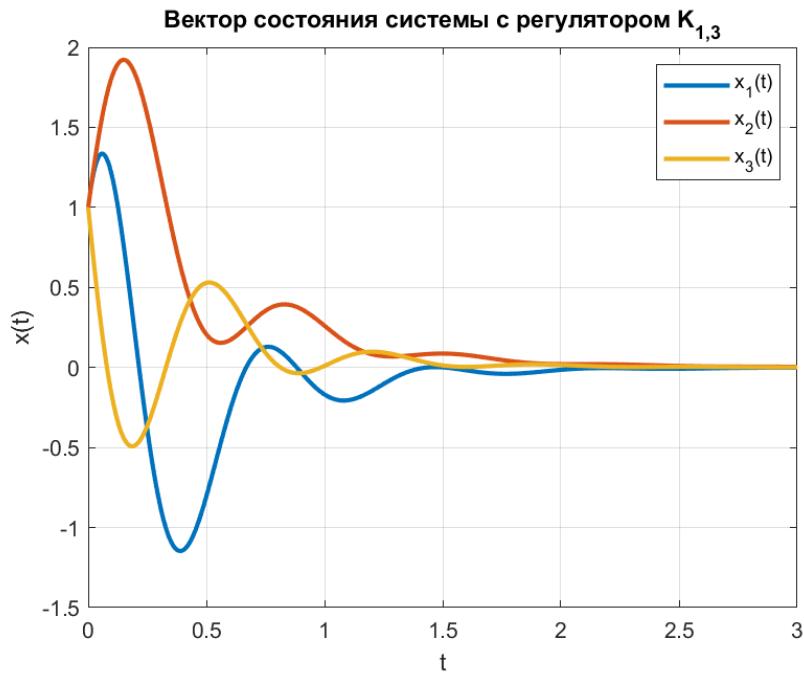
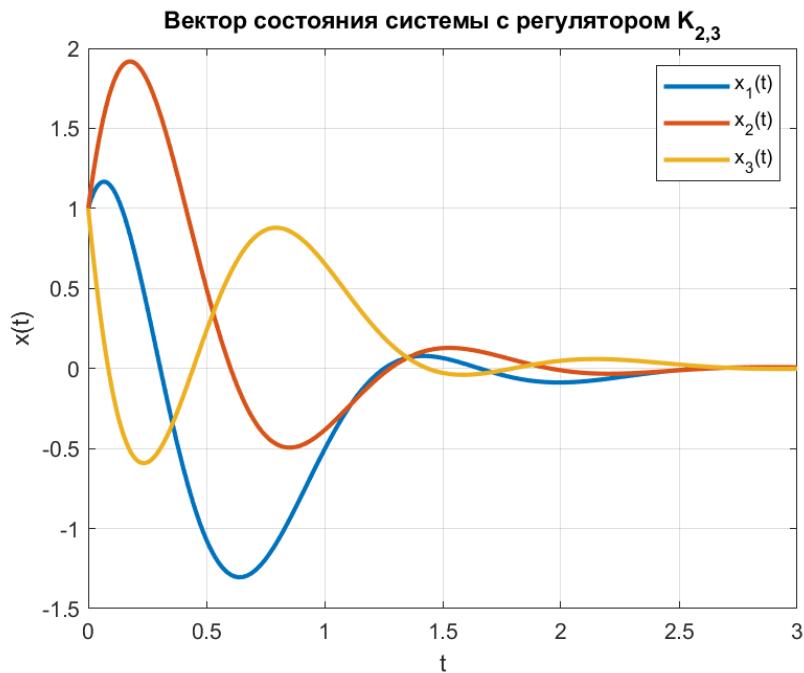
$$A + BK_{2,3} = \begin{bmatrix} 3.0000 & -2.7578 & 5.0118 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_{2,3}) = \{-2, -2 \pm 4.6494i\}$$

Все собственные числа имеют вещественную часть, *равную* α_3 . Данное достиглось за счет $\Re(\lambda_1) = \alpha_{max} = \alpha_3$. Это соответствует заданной желаемой степени экспоненциальной устойчивости, а значит, синтез проведен корректно.

Проведем моделирование системы с полученными регуляторами при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1]^T$. На рисунках 8 и 9 представлены векторы состояния с матрицами обратной связи $K_{1,3}$ и $K_{2,3}$, а на рисунке 10 - соответствующие управлениия системой.

Рис. 8: Вектор состояния при $\alpha_3 = 2$ Рис. 9: Вектор состояния при $\alpha_3 = 2$ и минимизации управления

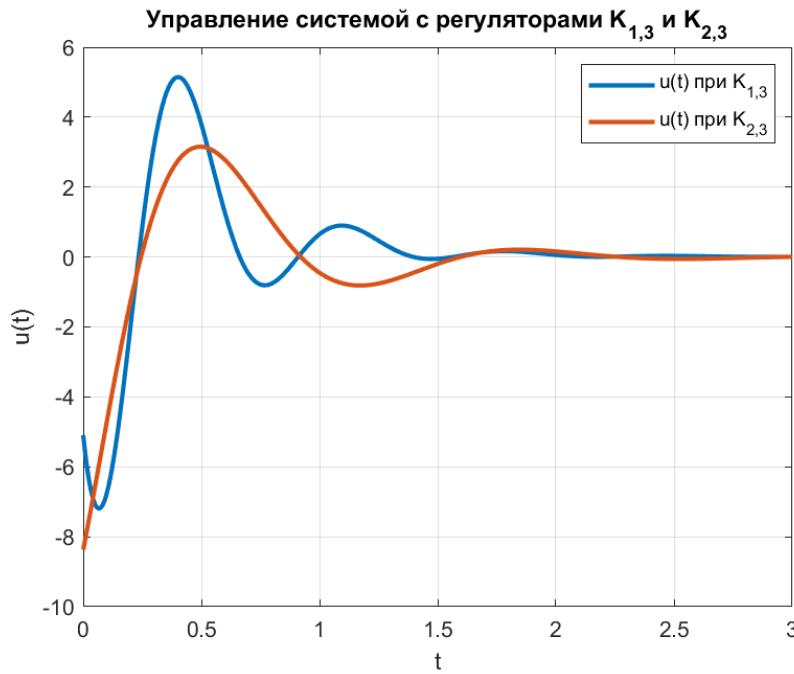


Рис. 10: Управления системой с регуляторами $K_{1,3}$ и $K_{2,3}$

Таким образом, во всех случаях была достигнута желаемая степень устойчивости $\alpha > 0$. Сравнивая полученные результаты, заметим, что при постановке задачи минимизации управления, скорость сходимости к нулю во всех случаях падает за счет уменьшения вещественной части спектра, вследствие величина (норма) самого управления уменьшается. При α_3 однако этот эффект менее заметен, что можно объяснить близкими к α_3 вещественными частями спектра, получившегося при обычной задаче синтеза регулятора, обеспечивающего экспоненциальную устойчивость.

Также важно, что увеличение желаемой степени устойчивости приводит к ускорению переходных процессов (для $\alpha_3 = 2$ они более чем в 2 раза быстрее в сравнении с $\alpha_1 = 0.5$ - рисунки 3 и 9). Таким образом, можно регулировать необходимую степень быстродействия системы, задача же минимизации, если это необходимо, позволит добиться меньших значений управления, оставаясь при этом в контексте нужной степени устойчивости.

Подойдем к задаче синтеза регуляторов с заданной степенью экс-

поненциальной устойчивости иначе. Будем решать не неравенства, а *уравнения Риккати* при $\nu = 2$ и $R = 1$ относительно $P \succ 0$, после находить матрицу обратной связи K с вариацией параметров α и Q :

$$A^T P + PA + Q - \nu PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P = 0, \quad K = R^{-1}B^T P$$

Опять-таки, начнём с $\alpha_1 = 0.5$.

Пусть $Q = I$. Тогда решением уравнения Риккати при $\alpha = \alpha_1 = 0.5$ будет:

$$P_{3,1} = \begin{bmatrix} 1.6725 & -0.0392 & 1.3849 \\ -0.0392 & 0.8967 & 0.1240 \\ 1.3849 & 0.1240 & 1.5434 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$K_{3,1} = R^{-1}B^T P = \begin{bmatrix} -3.3450 & 0.0785 & -2.7698 \end{bmatrix}$$

Выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_{3,1} = \begin{bmatrix} 4.0000 & -2.0392 & 6.0000 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_{3,1}) = \{-2, -1.345 \pm 4.8828i\}$$

Все собственные числа имеют вещественную часть, меньшую α_1 . Это соответствует заданной желаемой степени устойчивости, а значит, синтез проведен корректно.

Пусть теперь $Q = 0$. Тогда решением уравнения Риккати при $\alpha = \alpha_1 = 0.5$ будет:

$$P_{4,1} = \begin{bmatrix} 1.2500 & -0.1042 & 1.2500 \\ -0.1042 & 0.5382 & -0.1042 \\ 1.2500 & -0.1042 & 1.2500 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$K_{4,1} = R^{-1}B^TP = [-2.5000 \ 0.2083 \ -2.5000]$$

Выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_{4,1} = \begin{bmatrix} 6.0000 & -1.5833 & 8.0000 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

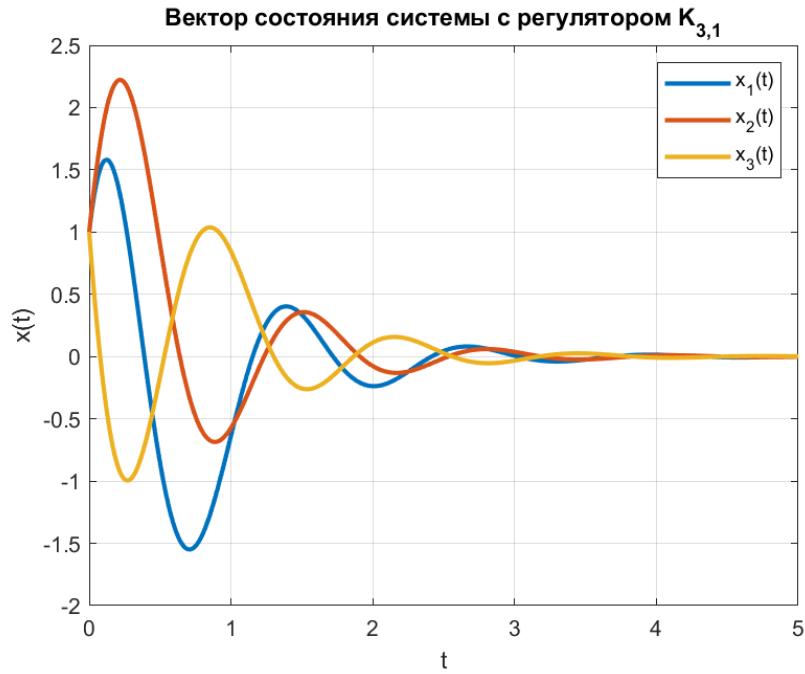
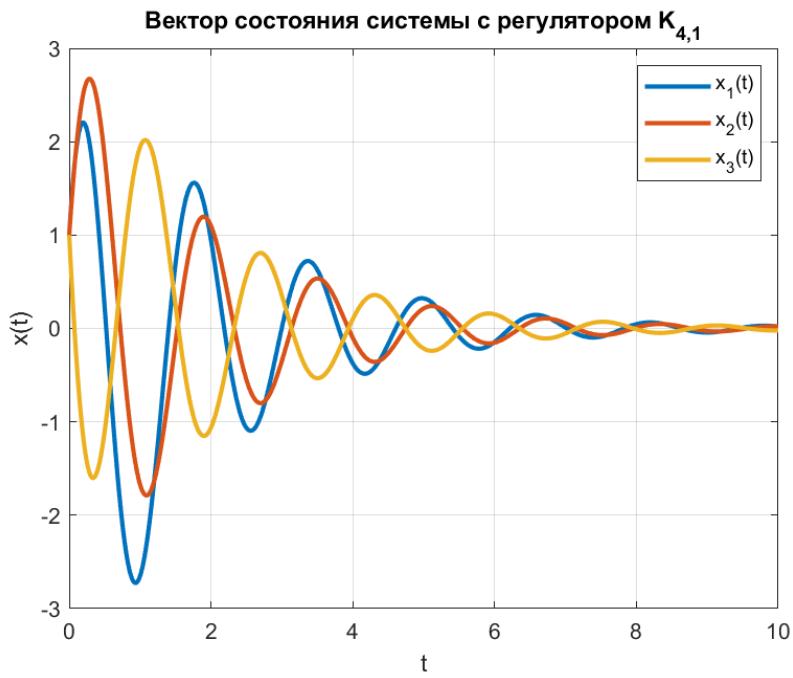
$$\sigma(A + BK_{4,1}) = \{-2, -0.5 \pm 3.9051i\}$$

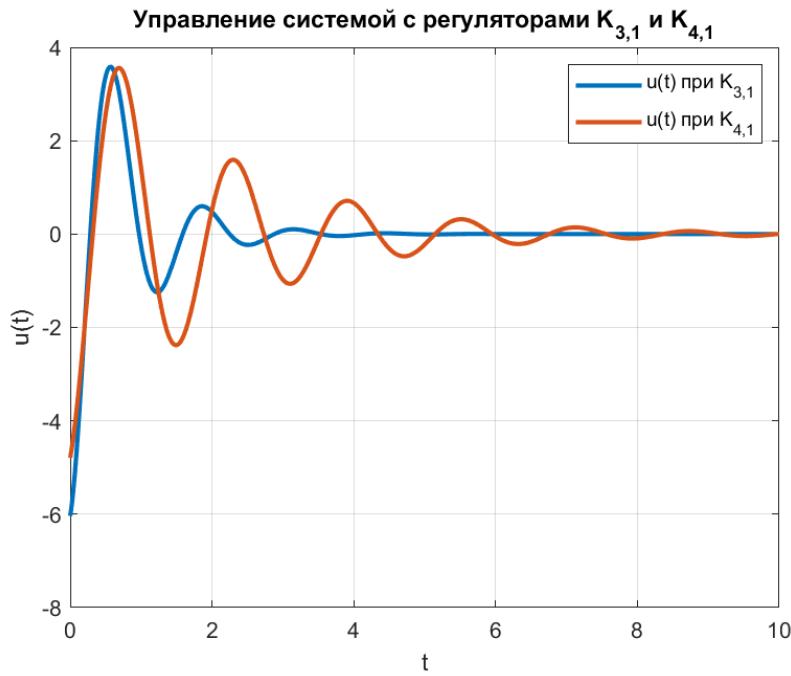
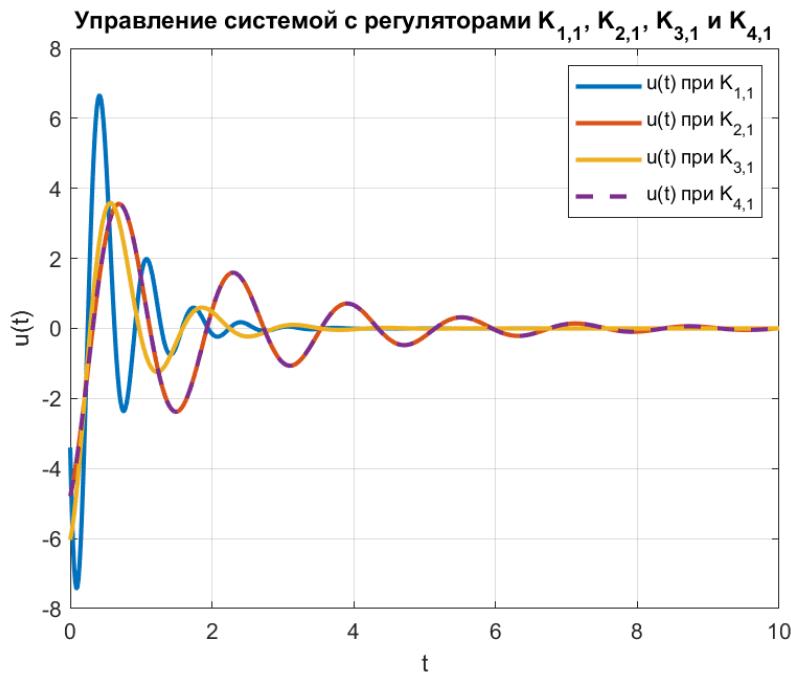
Все управляемые собственные числа имеют вещественную часть, равную α_1 , а для неуправляемого λ_1 выполнено $\Re(\lambda_1) < \alpha_1$. Это соответствует заданной желаемой степени устойчивости, а значит, синтез проведен корректно.

Проведем моделирование системы с полученными регуляторами при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1]^T$. На рисунках 11 и 12 представлены векторы состояния с матрицами обратной связи $K_{3,1}$ и $K_{4,1}$, а на рисунках 13 и 14 - соответствующие управления системой.

Можем видеть, что при $Q = 0$ полученные графики управления практически совпадают с полученными ранее при решении неравенства Ляпунова совместно с задачей минимизации управления. Дело в том, что в уравнениях Риккати пары (Q, R) как раз и определяет важность быстродействия системы и меньших затрат на управления ей соответственно. Соотношение $Q = 0$ и $R = 1$ говорит, что хочется достичь необходимой степени устойчивости, не затрачивая больших усилий на управление (задача минимизации). Пара $Q = I$ и $R = 1$ же даёт отношение, в котором нам важно как быстродействие, так и управление, в равной степени.

При $Q = 0$ и $R = 1$ также получили вещественные части спектра, равные α_1 , за счет чего переходные процессы протекают быстрее, а управления затрачивается больше, чем при $Q = I$ и $R = 1$.

Рис. 11: Вектор состояния при $\alpha_1 = 0.5$ Рис. 12: Вектор состояния при $\alpha_1 = 0.5$ и минимизации управления

Рис. 13: Управления системы с регуляторами $K_{3,1}$ и $K_{4,1}$ Рис. 14: Управления системы с регуляторами $K_{1,1}, K_{2,1}, K_{3,1}$ и $K_{4,1}$

Сходимость к нулю у вектора состояния при $Q = I$ и $R = 1$ несколько медленнее, чем при регуляторе, полученном при решении неравенства Ляпунова ($K_{3,1}$), однако затраты на управление при этом меньше, что можно объяснить большими значениями собственных чисел спектра замкнутой системы у последнего. Ситуацию можно изменить, например, увеличив параметр Q при неизменном $R = 1$.

Теперь рассмотрим степень устойчивости $\alpha_2 = 1.25$.

Пусть $Q = I$. Тогда решением уравнения Риккати при $\alpha = \alpha_2 = 1.25$ будет:

$$P_{3,2} = \begin{bmatrix} 1.9380 & 0.1062 & 1.6424 \\ 0.1062 & 1.6204 & 0.6475 \\ 1.6424 & 0.6475 & 2.2142 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$K_{3,2} = R^{-1}B^TP = \begin{bmatrix} -3.8760 & -0.2125 & -3.2849 \end{bmatrix}$$

Выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_{3,2} = \begin{bmatrix} 3.2480 & -2.4250 & 6.4303 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_{3,2}) = \{-2, -1.876 \pm 5.1842i\}$$

Все собственные числа имеют вещественную часть, меньшую α_2 . Это соответствует заданной желаемой степени устойчивости, а значит, синтез проведен корректно.

Пусть теперь $Q = 0$. Тогда решением уравнения Риккати при $\alpha = \alpha_2 = 1.25$ будет:

$$P_{4,2} = \begin{bmatrix} 1.6250 & 0.0677 & 1.6250 \\ 0.0677 & 0.8859 & 0.0677 \\ 1.6250 & 0.0677 & 1.6250 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$K_{4,2} = R^{-1}B^T P = [-3.2500 \ -0.1354 \ -3.2500]$$

Выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_{4,2} = \begin{bmatrix} 4.5000 & -2.2708 & 6.5000 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_{4,2}) = \{-2, -1.25 \pm 4.423i\}$$

Все управляемые собственные числа имеют вещественную часть, равную α_2 , а для неуправляемого λ_1 выполнено $\Re(\lambda_1) < \alpha_2$. Это соответствует заданной желаемой степени устойчивости, а значит, синтез проведен корректно.

Проведем моделирование системы с полученными регуляторами при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1]^T$. На рисунках 15 и 16 представлены векторы состояния с матрицами обратной связи $K_{3,2}$ и $K_{4,2}$, а на рисунках 17 и 18 - соответствующие управления системой.

Наконец, примем степень устойчивости $\alpha_3 = \alpha_{max} = 2$.

Пусть $Q = I$. Тогда решением уравнения Риккати при $\alpha = \alpha_3 = 2$ будет:

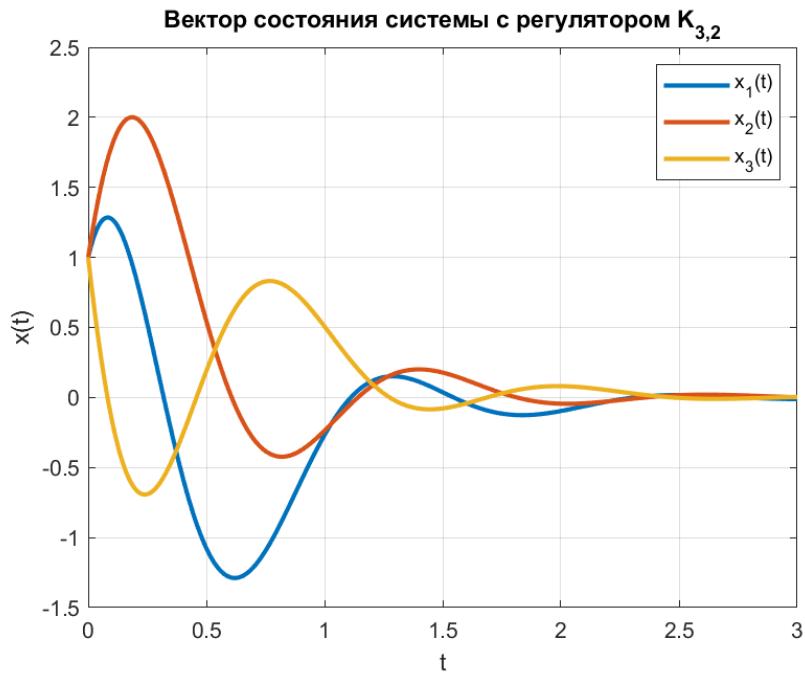
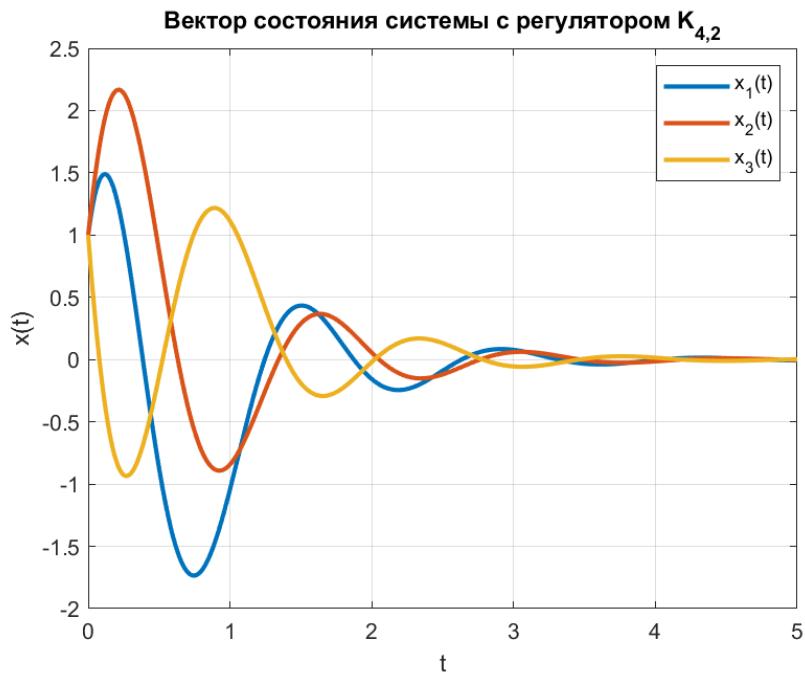
$$P_{3,3} = \begin{bmatrix} 2.2302 & 0.3368 & 1.9363 \\ 0.3368 & 65454.4790 & 65453.1972 \\ 1.9363 & 65453.1972 & 65454.8673 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$K_{3,3} = R^{-1}B^T P = [-4.4604 \ -0.6735 \ -3.8727]$$

Выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_{3,3} = \begin{bmatrix} 2.0791 & -3.3471 & 5.2547 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

Рис. 15: Вектор состояния при $\alpha_2 = 1.25$ Рис. 16: Вектор состояния при $\alpha_2 = 1.25$ и минимизации управления

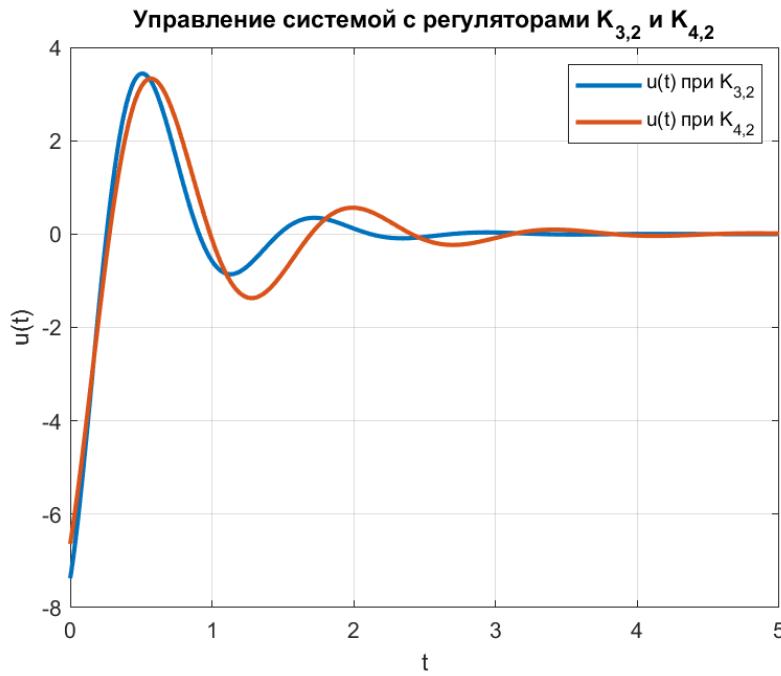


Рис. 17: Управления системы с регуляторами $K_{3,2}$ и $K_{4,2}$

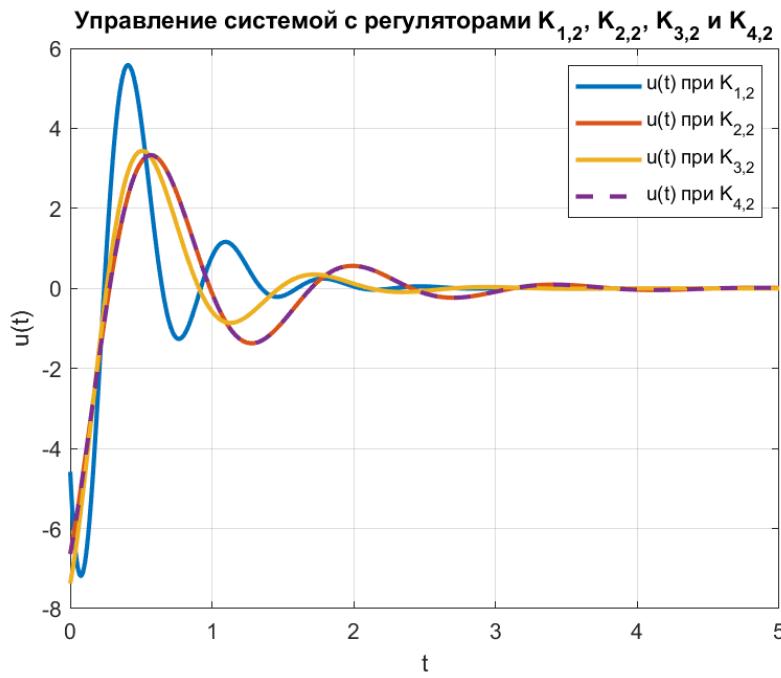


Рис. 18: Управления системы с регуляторами $K_{1,2}$, $K_{2,2}$, $K_{3,2}$ и $K_{4,2}$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_{3,3}) = \{-2, -2.4604 \pm 5.568i\}$$

Все управляемые собственные числа имеют вещественную часть, меньшую α_3 , а для неуправляемого λ_1 выполнено $\Re(\lambda_1) = \alpha_3$. Это соответствует заданной желаемой степени устойчивости, а значит, синтез проведен корректно.

Пусть теперь $Q = 0$. Тогда решением уравнения Риккати при $\alpha = \alpha_3 = 2$ будет:

$$P_{4,3} = \begin{bmatrix} 2.0000 & 0.3333 & 2.0000 \\ 0.3333 & 1.4444 & 0.3333 \\ 2.0000 & 0.3333 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$K_{4,3} = R^{-1}B^TP = \begin{bmatrix} -4.0000 & -0.6667 & -4.0000 \end{bmatrix}$$

Выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

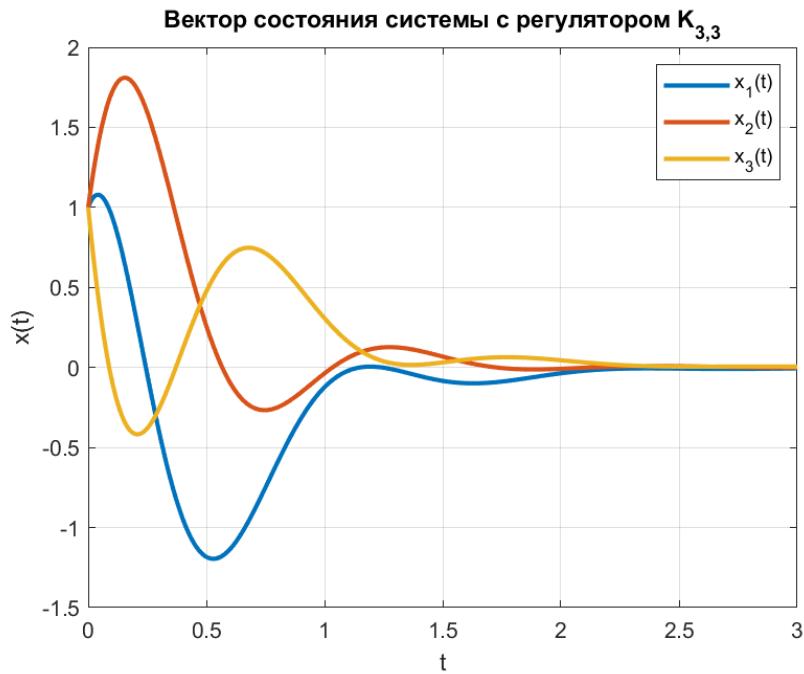
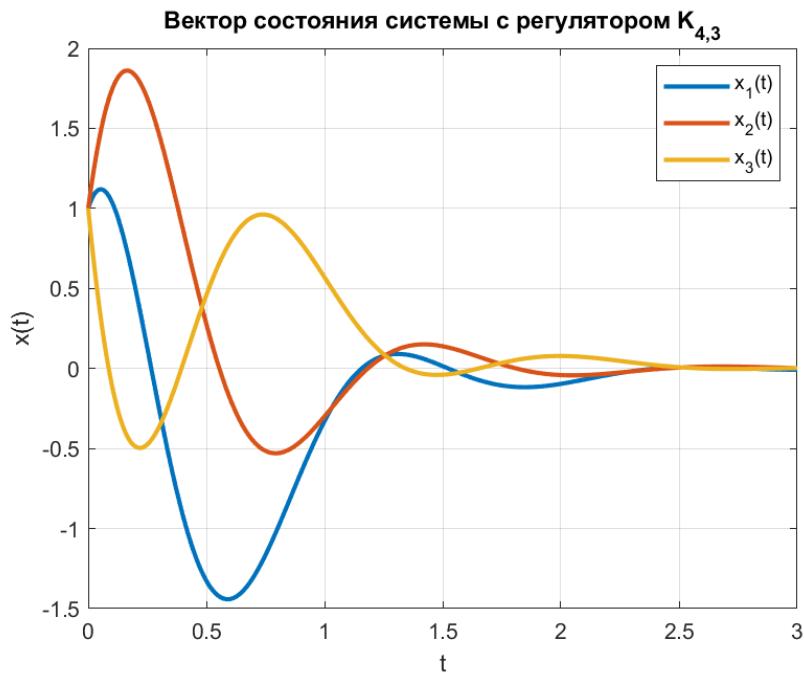
$$A + BK_{4,3} = \begin{bmatrix} 3.0000 & -3.3333 & 5.0000 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

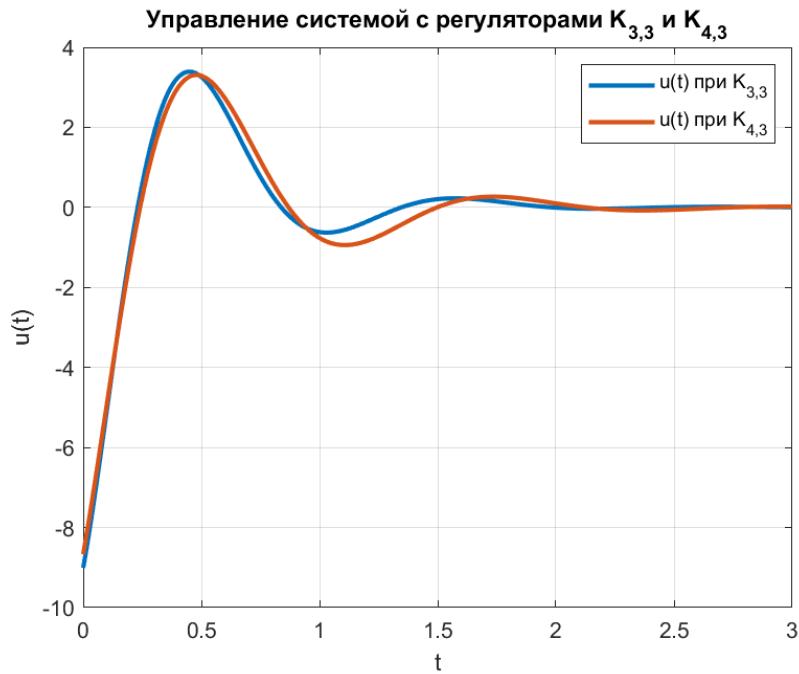
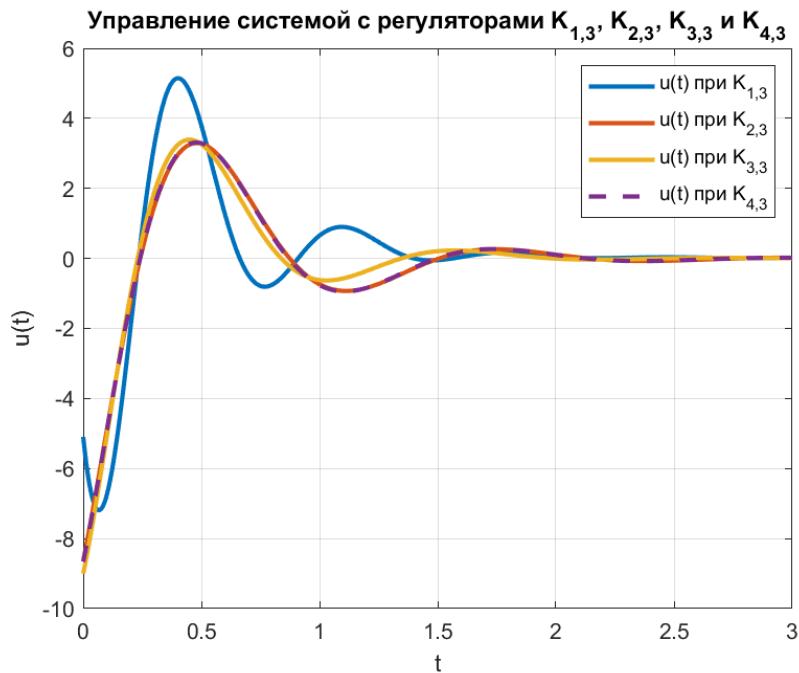
Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_{4,3}) = \{-2, -2 \pm 5i\}$$

Все собственные числа имеют вещественную часть, *равную* $\alpha_3 = \alpha_{max} = 2$. Данное достиглось за счет $\Re(\lambda_1) = \alpha_{max} = 2$. Это соответствует заданной желаемой степени устойчивости, а значит, синтез проведен корректно.

Проведем моделирование системы с полученными регуляторами при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1]^T$. На рисунках 19 и 20 представлены векторы состояния с матрицами обратной связи $K_{3,3}$ и $K_{4,3}$, а на рисунках 21 и 22 - соответствующие управления системой.

Рис. 19: Вектор состояния при $\alpha_3 = 2$ Рис. 20: Вектор состояния при $\alpha_3 = 2$ и минимизации управления

Рис. 21: Управления системой с регуляторами $K_{3,3}$ и $K_{4,3}$ Рис. 22: Управления системой с регуляторами $K_{1,3}$, $K_{2,3}$, $K_{3,3}$ и $K_{4,3}$

Таким образом, во всех случаях была достигнута желаемая степень устойчивости $\alpha > 0$. При увеличении желаемой степени устойчивости переходные процессы ускоряются, что видно по графикам вектора состояния (рисунки 12 и 20 при $\alpha_1 = 0.5$ и $\alpha_3 = 2$ соответственно). Соотношение Q и R в задаче синтеза регуляторов с помощью уравнений Риккати полностью определяет, насколько важно быстродействие системы по сравнению с управлением. Так, при $Q = 0$ и $R = 1$ при всех значениях α вещественная часть спектра замкнутой системы совпадала с α (спектр был «прижат» к α), а графики управления совпадали с графиками управления при синтезе регуляторов с помощью неравенства Ляпунова совместно с задачей минимизации управления.

При сравнении ситуаций с $Q = I$ и $Q = 0$ при $R = 1$ видно, что при $Q = I$ переходные процессы протекают быстрее, чем при $Q = 0$. Данное объясняется тем, что при $Q = 0$ была поставлена задача нахождения регулятора, всё ещё обеспечивающего заданную степень устойчивости $\alpha > 0$, но с минимальными затратами на управление. Тогда как при $Q = I$ был важен некий баланс между быстродействием и затратами на управление.

В общем, уравнения Риккати позволяют более точно управлять получаемым спектром замкнутой системы, получать различные соотношения между быстродействием и затратами на управление.

Во всех ситуациях задача минимизации управления позволила добиться меньших значений управления за счет уменьшения скорости сходимости системы к нулю с помощью «прижатия» вещественной части спектра замкнутой системы к заданной желаемой степени устойчивости $\alpha > 0$. Всё подтверждается и моделированием.

2 Управление по выходу

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

В соответствии с вариантом, матрицы A , B и C имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & 5 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Выполним анализ управляемости и наблюдаемости системы. Для этого найдем Жорданову форму матрицы A и вспомогательную матрицу T для перехода к ней:

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

В матрице управления B нет нулей, а значит, все собственные числа системы управляемы, следовательно, система является полностью управляемой, а значит, и стабилизируемой (так как вообще нет неуправляемых собственных чисел).

Отметим, что при помощи регулятора вида $u = Kx$ можно добиться любой желаемой степени устойчивости, так как λ_i можно придать любое необходимое значение из комплексной плоскости.

В матрице наблюдения C обнуляется последний столбец, соответствующий $\lambda_4 = -12$, а значит, собственное число λ_4 не наблюдаемо. Для остальных λ_{1-3} все столбцы $\hat{C}_1 = [0, 4]^T \neq 0$, $\hat{C}_2 = [0, 8]^T \neq 0$ и $\hat{C}_3 = [4, 0]^T \neq 0$ ненулевые, а значит, все они являются наблюдаемыми. Таким образом, система является частично наблюдаемой, но обнаруживаемой, так как $\Re(\lambda_4) = -12 < 0$.

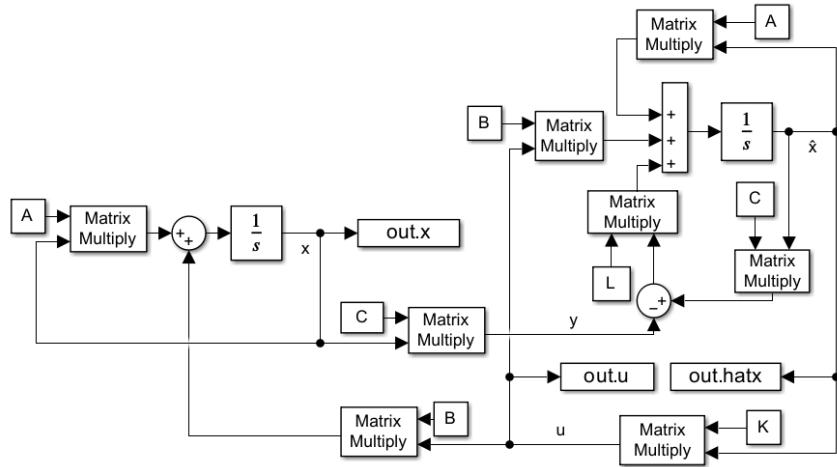


Рис. 23: Схема моделирования системы с управлением по выходу

В итоге, так как степень устойчивости задаётся минимальной вещественной частью мнимых собственных чисел, а λ_4 является ненаблюдаемым, то есть оно всегда присутствует в спектре матрицы $A + LC$ наблюдателя полной размерности, то максимальная желаемая степень сходимости α_{max} , которую можно достичь с помощью этого наблюдателя, равна 12 ($\lambda_4 = -12 \Rightarrow \alpha_{max} = |\Re(\lambda_4)| = 12$).

Построим схему моделирования системы (изображена на рисунке 23), замкнутой регулятором, состоящем из наблюдателя состояния $x = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u + L(\hat{C}\hat{x} - y)$ и регулятора $u = K\hat{x}$.

Теперь зададися парой значений $\alpha > 0$:

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 12$$

Используя их, составим наборы желаемых степеней устойчивости α_K системы и желаемой степени сходимости α_L наблюдателя:

$$\alpha_K = \alpha_L : \quad \alpha_{K1} = \alpha_2 = 12, \quad \alpha_{L1} = \alpha_2 = 12$$

$$\alpha_K > \alpha_L : \quad \alpha_{K2} = \alpha_2 = 12, \quad \alpha_{L2} = \alpha_1 = 1$$

$$\alpha_K < \alpha_L : \quad \alpha_{K3} = \alpha_1 = 1, \quad \alpha_{L3} = \alpha_2 = 12$$

Условно их можно назвать: наблюдатель и регулятор имеют сопоставимые значения α , регулятор «сильнее» и наблюдатель «сильнее». Теперь перейдем к синтезу соответствующих управлений по выходу.

Сначала рассмотрим случай $\alpha_K = \alpha_L = \alpha_1 = 12$.

Сначала синтезируем регулятор, обеспечивающий желаемую степень устойчивости $\alpha_K = \alpha_2$. Для этого воспользуемся методом уравнений Риккати, при этом будем минимизировать отклонения фактических собственных чисел спектра замкнутой системы от желаемой устойчивости α_K (что, как было выяснено в предыдущем пункте, отчасти эквивалентно минимизации управления с $Q = 0$ и $R = 1$).

Задача была подробно описана в предыдущем пункте, так что вдаваться в подробности не будем. Решением уравнения Риккати при $\alpha = \alpha_{K1} = \alpha_2 = 12$ и заданными матрицами $Q = 0$ и $R = 1$ будет:

$$P_{K1} = \begin{bmatrix} 6850.5757 & 6301.0517 & -9779.8256 & 3371.8019 \\ 6301.0517 & 5897.2436 & -9091.7833 & 3106.5121 \\ -9779.8256 & -9091.7833 & 14053.5154 & -4818.0935 \\ 3371.8019 & 3106.5121 & -4818.0935 & 1660.2204 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$K_1 = -R^{-1}B^TP_{K1} = [427.8880 \ 352.1103 \ -574.5543 \ 205.4440]$$

Выполним проверку корректности синтеза регулятора, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_1 = \begin{bmatrix} 860.7761 & 699.2206 & -1158.1086 & 413.8880 \\ 2562.3282 & 2117.6619 & -3450.3259 & 1241.6641 \\ 2558.3282 & 2109.6619 & -3442.3259 & 1237.6641 \\ 858.7761 & 713.2206 & -1144.1086 & 415.8880 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_1) = \{-12, -12, -12 \pm 38.7814i\}$$

Все собственные числа имеют вещественную часть, равную α_K , а значит, синтез проведен корректно.

Теперь синтезируем наблюдатель, обеспечивающий степень сходимости $\alpha_{L1} = \alpha_1 = 12$ совместно с минимизацией отклонений фактических собственных чисел спектра наблюдателя от желаемой степени сходимости, что соответствует задаче «минимизации» наблюдателя. Опять-таки воспользуемся методом уравнений Риккати, то

есть при $\alpha = \alpha_{L1}$, $v = 2$, $R = 1$ и $Q = 0$ относительно $P \succ 0$ будем решать и находить матрицу коррекции наблюдателя L :

$$AP + PA^T - 2PC^TR^{-1}CP + 2\alpha P + Q = 0, \quad L = -PC^TR^{-1}$$

Здесь матрицы Q и R , как и прежде, показывают, соответственно, насколько важна быстрота сходимости (в данном случае наблюдателя) и возникающее при этом перерегулирование (в начале наблюдения). При взятых $Q = 0$ и $R = 1$ ставится задача обеспечения желаемой степени сходимости α_{L1} с минимально возможными рывками в наблюдении в первые моменты времени. Итак, решением будет:

$$P_{L1} = \begin{bmatrix} 633.1250 & -233.3750 & -631.1250 & -231.3750 \\ -233.3750 & 87.1250 & 231.3750 & 85.1250 \\ -631.1250 & 231.3750 & 633.1250 & 233.3750 \\ -231.3750 & 85.1250 & 233.3750 & 87.1250 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$L_1 = -P_{L1}C^TR^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 130 \\ 4 & -52 \\ -4 & -130 \\ -4 & -52 \end{bmatrix}$$

Выполним проверку корректности синтеза наблюдателя, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + L_1C = \begin{bmatrix} 131 & 389 & -143 & 389 \\ -53 & -155 & 53 & -143 \\ -143 & -389 & 131 & -389 \\ -53 & -143 & 53 & -155 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + L_1C) = \{-12, -12 \pm 25.923i\}$$

Все собственные числа имеют вещественную часть, *равную* α_{L1} , а значит, синтез проведен корректно. Перейдем к моделированию системы с полученными регулятором и наблюдателем при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ и $x_0 = [0, 0, 0, 0]^T$.

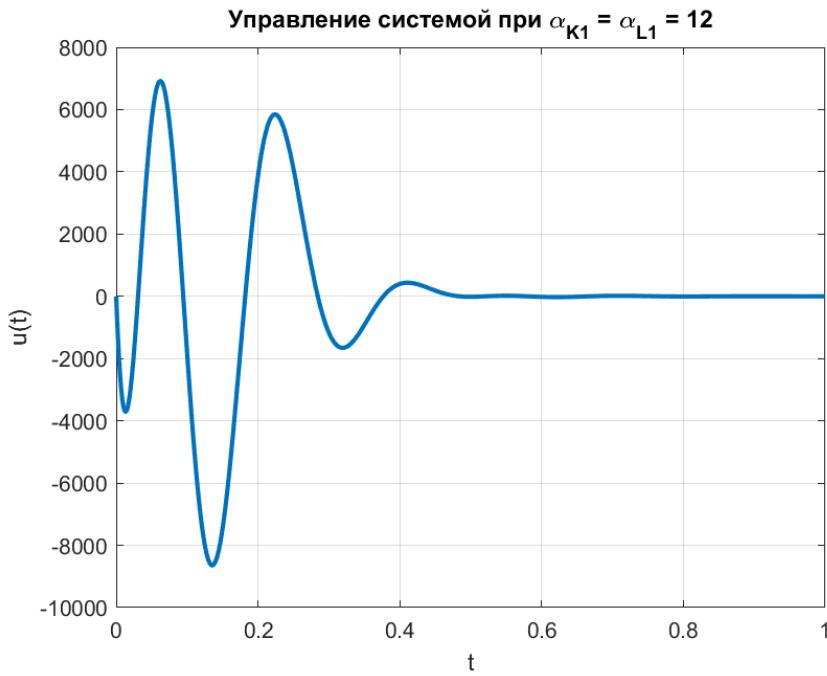


Рис. 24: Управления системой при $\alpha_{K1} = \alpha_{L1} = 1$

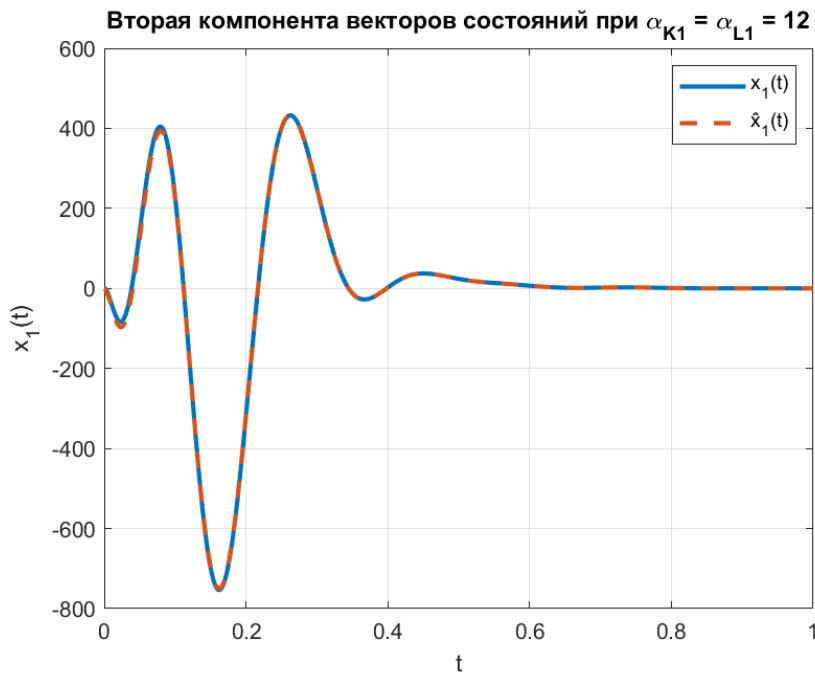


Рис. 25: Первые компоненты $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при $\alpha_{K1} = \alpha_{L1} = 1$

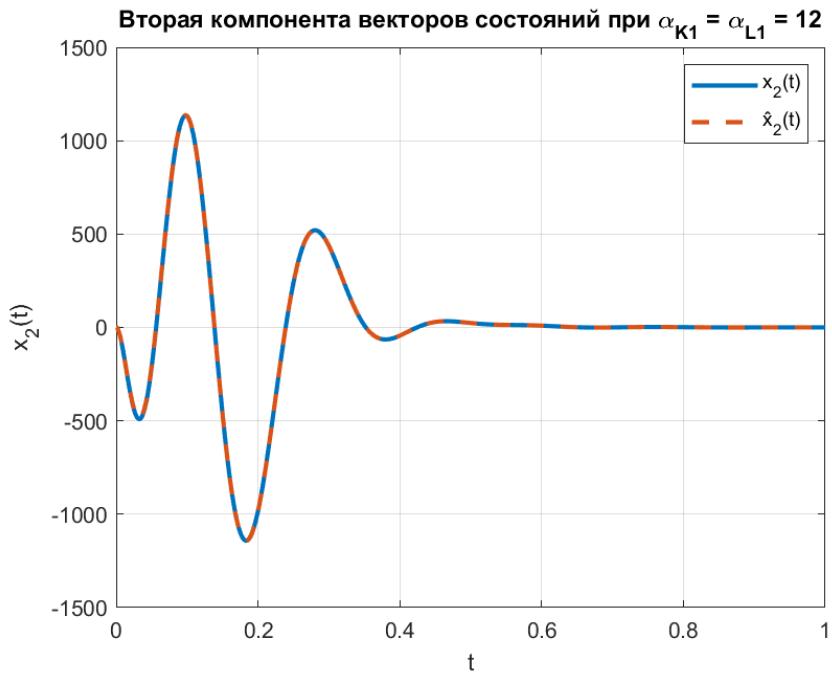


Рис. 26: Вторые компоненты $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при $\alpha_{K1} = \alpha_{L1} = 1$

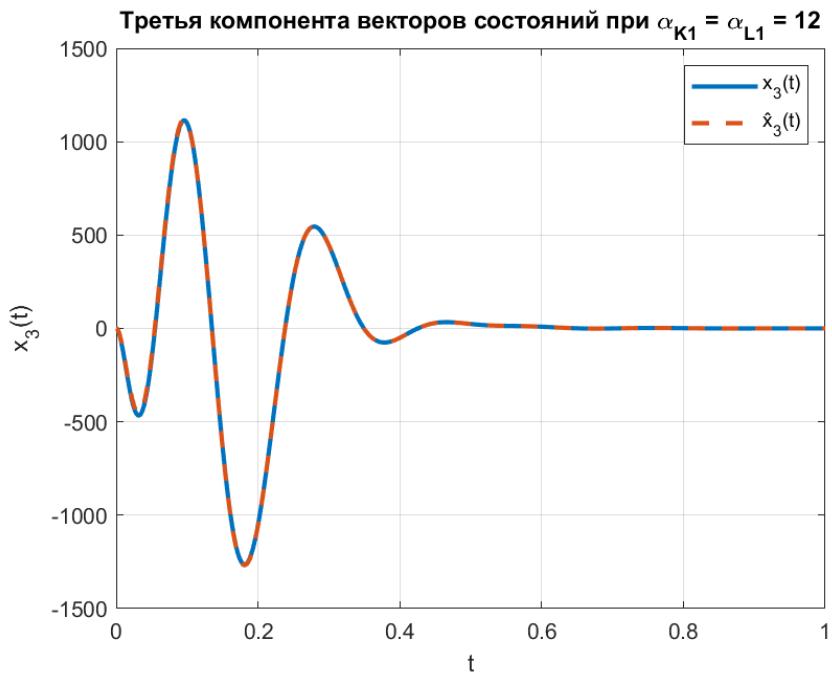


Рис. 27: Трети компоненты $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при $\alpha_{K1} = \alpha_{L1} = 1$

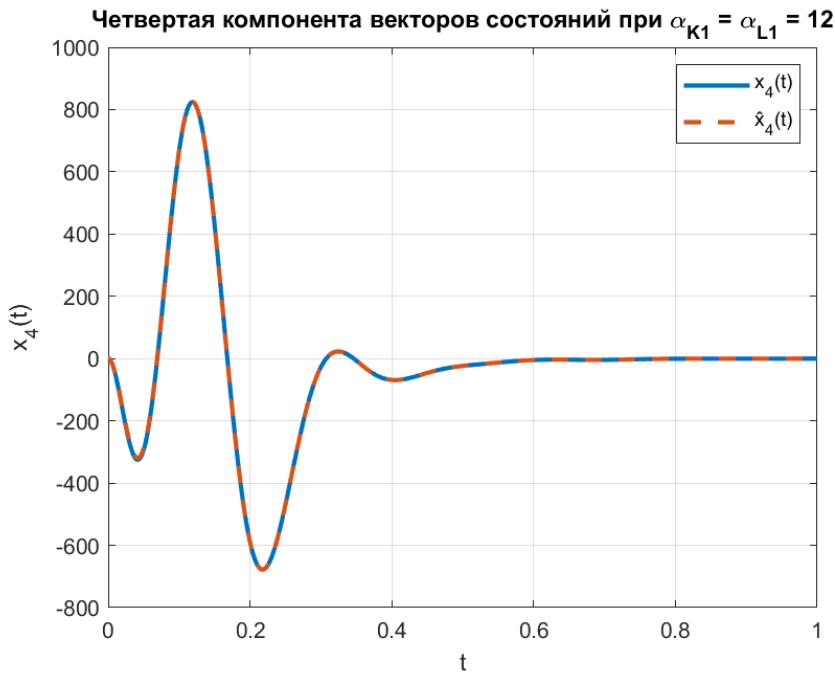


Рис. 28: Четвертые компоненты $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при $\alpha_{K1} = \alpha_{L1} = 1$

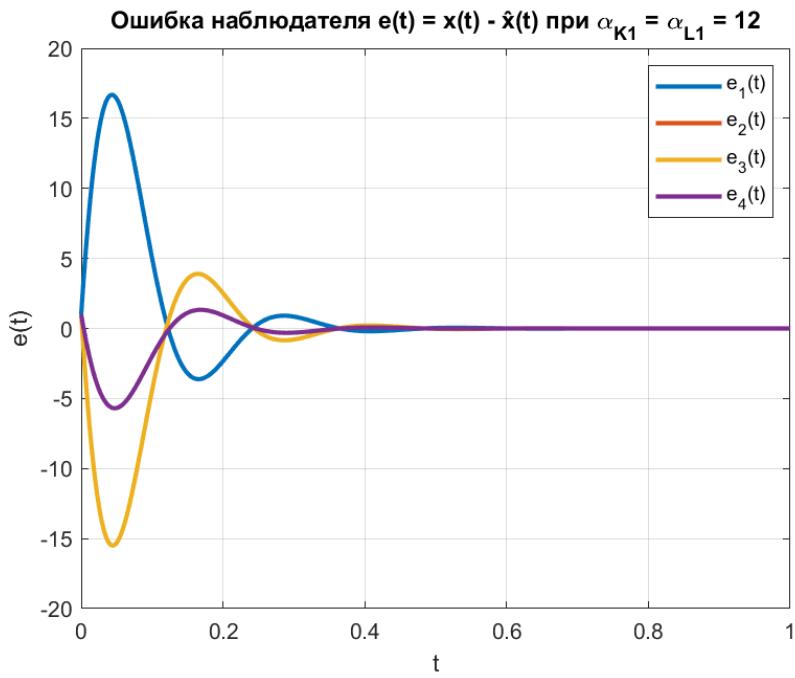


Рис. 29: Ошибка наблюдателя при $\alpha_{K1} = \alpha_{L1} = 1$

На рисунке 24 представлен график формируемого регулятором управления $u(t)$, на рисунках 25 - 28 - сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ для каждой из компонент, а на рисунке 29 - график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Можем видеть, что всё быстро сходится к нулю, а после первой секунды все приведенные графики визуально равны нулю.

Проделаем то же для $\alpha_{K2} = \alpha_2 = 12$ и $\alpha_L = \alpha_1 = 1$.

Синтез регулятора остаётся тем же, так как $\alpha_{K2} = \alpha_{K1} = \alpha_2 = 12$. Поэтому возьмём решение, полученное ранее:

$$P_{K2} = P_{K1} = \begin{bmatrix} 6850.5757 & 6301.0517 & -9779.8256 & 3371.8019 \\ 6301.0517 & 5897.2436 & -9091.7833 & 3106.5121 \\ -9779.8256 & -9091.7833 & 14053.5154 & -4818.0935 \\ 3371.8019 & 3106.5121 & -4818.0935 & 1660.2204 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$K_2 = K_1 = [427.8880 \ 352.1103 \ -574.5543 \ 205.4440]$$

Теперь синтезируем наблюдатель со степенью сходимости $\alpha_{L2} = \alpha_1 = 1$. Аналогично будем использовать метод уравнений Риккати при $\alpha = \alpha_{L2}$, $v = 2$, $R = 1$ и $Q = 0$. Решением в таком случае будет:

$$P_{L2} = \begin{bmatrix} 123.3008 & -48.6523 & -122.6758 & -48.0273 \\ -48.6523 & 19.7070 & 48.0273 & 19.0820 \\ -122.6758 & 48.0273 & 123.3008 & 48.6523 \\ -48.0273 & 19.0820 & 48.6523 & 19.7070 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$L_2 = -P_{L2}C^T R^{-1} = \begin{bmatrix} -1.25 & 44.0625 \\ 1.25 & -19.6875 \\ -1.25 & -44.0625 \\ -1.25 & -19.6875 \end{bmatrix}$$

Выполним проверку корректности синтеза наблюдателя, для это-

го найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + L_2 C = \begin{bmatrix} 47.8125 & 128.4375 & -54.3125 & 133.9375 \\ -23.4375 & -55.3125 & 17.9375 & -48.8125 \\ -54.3125 & -133.9375 & 47.8125 & -128.4375 \\ -17.9375 & -48.8125 & 23.4375 & -55.3125 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + L_2 C) = \{-1, -1 \pm 14.8661i, -12\}$$

Все собственные числа имеют вещественную часть, меньшую либо равную α_{K2} , а значит, синтез проведен корректно. Отметим, что минимизировать расстояние вещественной части спектра наблюдателя до α_{L2} полностью невозможно, так как одно собственное число $\lambda_4 = -12$ является ненаблюдаемым.

Выполним моделирование системы с полученными регулятором и наблюдателем. Зададим начальные условия $x(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ и $x_0 = [0, 0, 0, 0]^T$ и построим графики формируемого регулятором управления $u(t)$ (рисунок 30), сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ (рисунки 31 - 34) и графики ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ (рисунок 35).

Наконец, рассмотрим $\alpha_K = \alpha_1 = 1$ и $\alpha_L = \alpha_2 = 12$.

Синтез регулятора наблюдателя остается тем же, что и в первом случае, так как $\alpha_{L3} = \alpha_{L1} = \alpha_2 = 12$. Поэтому возьмём решение, полученное ранее:

$$P_{L3} = P_{L1} = \begin{bmatrix} 633.1250 & -233.3750 & -631.1250 & -231.3750 \\ -233.3750 & 87.1250 & 231.3750 & 85.1250 \\ -631.1250 & 231.3750 & 633.1250 & 233.3750 \\ -231.3750 & 85.1250 & 233.3750 & 87.1250 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$L_3 = L_1 = \begin{bmatrix} -4 & 130 \\ 4 & -52 \\ -4 & -130 \\ -4 & -52 \end{bmatrix}$$

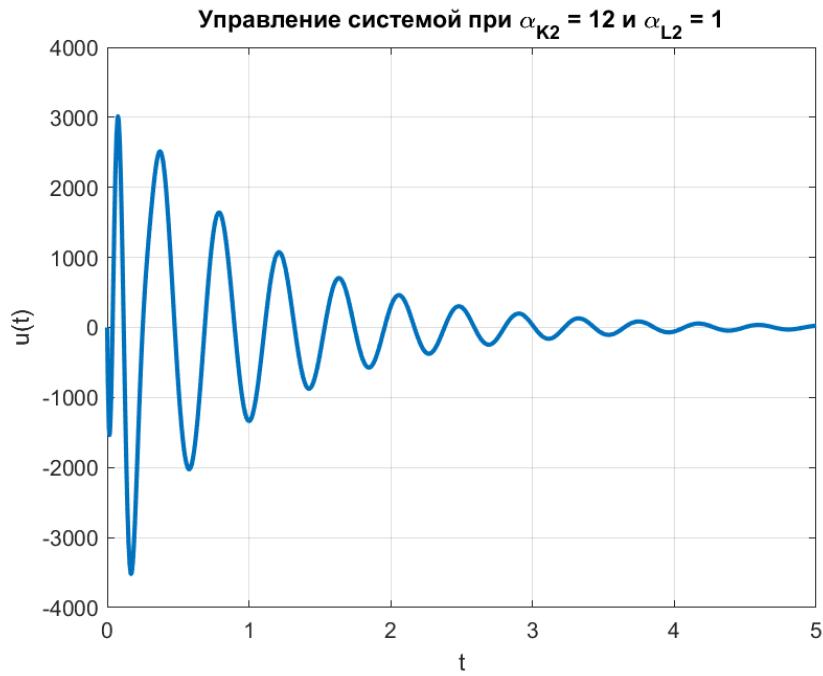


Рис. 30: Управления системой при $\alpha_{K2} = 12$ и $\alpha_{L2} = 1$

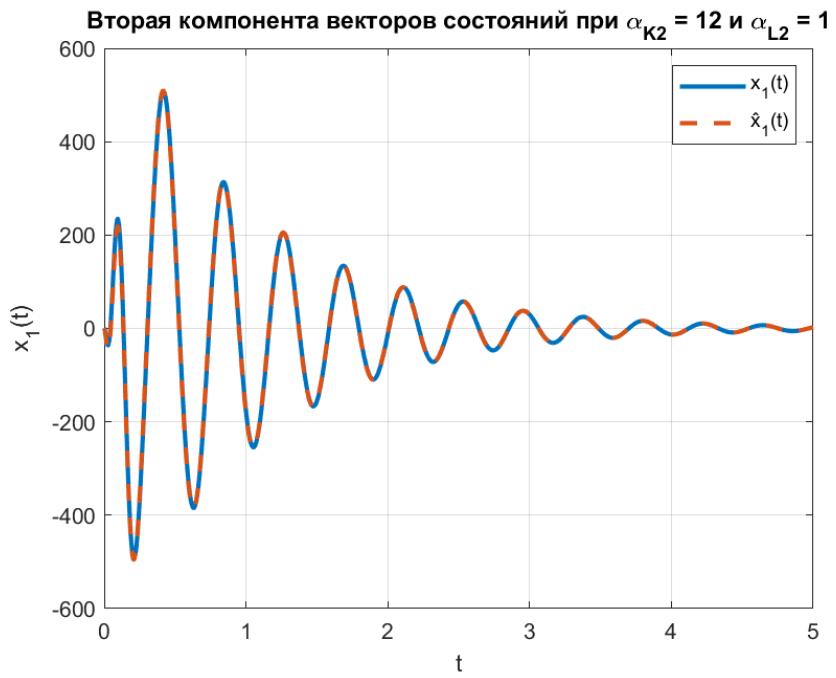


Рис. 31: Первые компоненты $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при $\alpha_{K2} = 12$ и $\alpha_{L2} = 1$

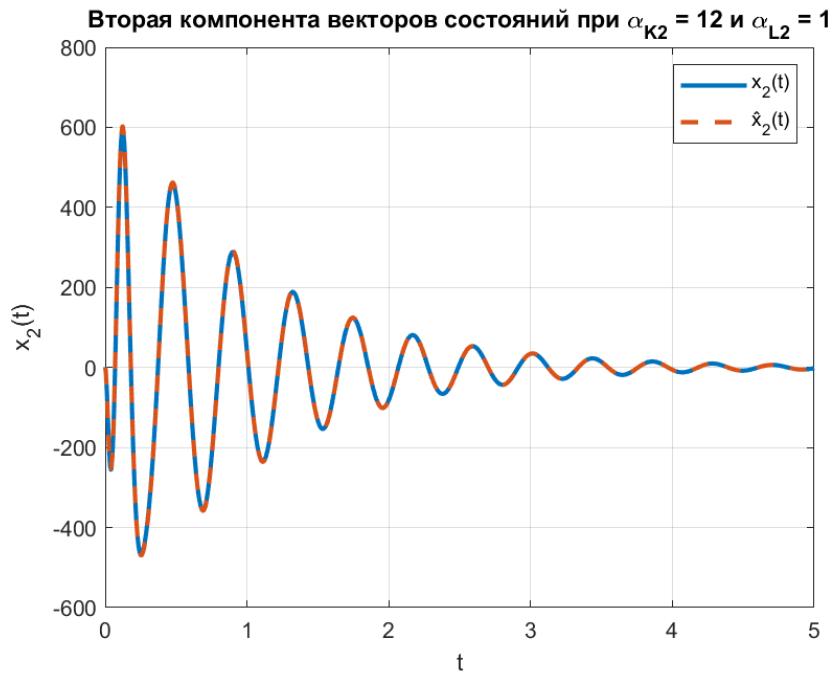


Рис. 32: Вторые компоненты $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при $\alpha_{K2} = 12$ и $\alpha_{L2} = 1$

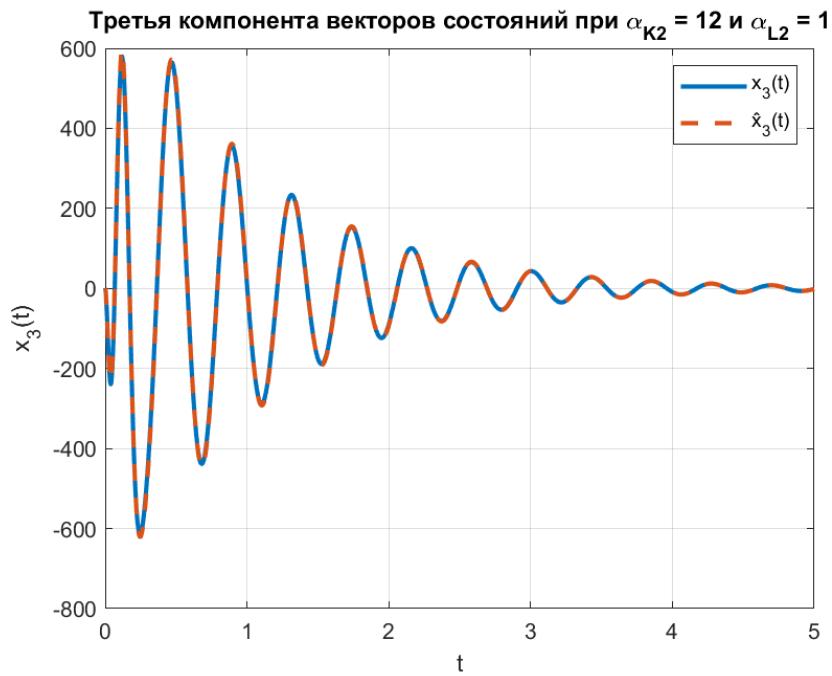


Рис. 33: Трети компоненты $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при $\alpha_{K2} = 12$ и $\alpha_{L2} = 1$

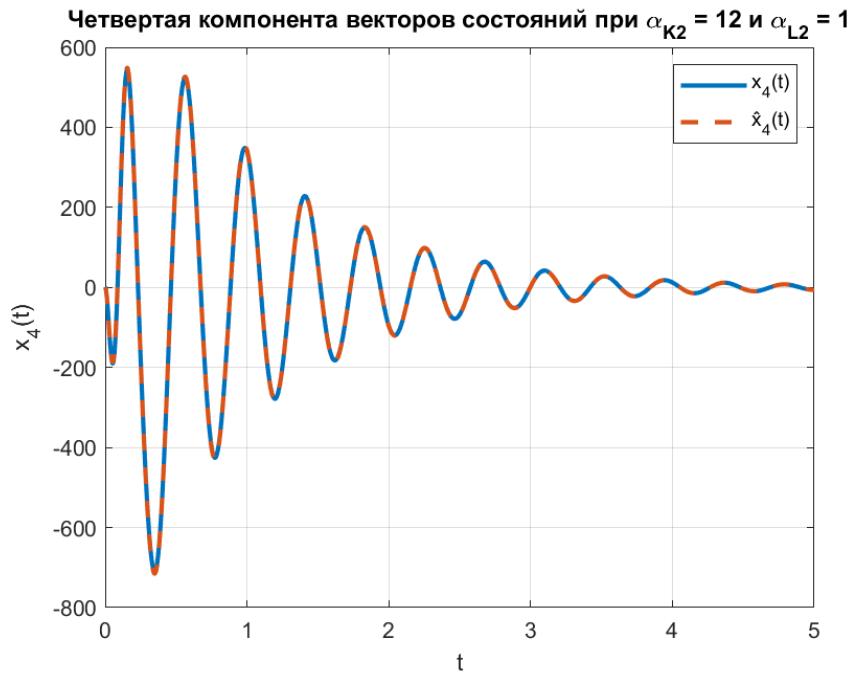


Рис. 34: Четвертые компоненты $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при $\alpha_{K2} = 12$ и $\alpha_{L2} = 1$

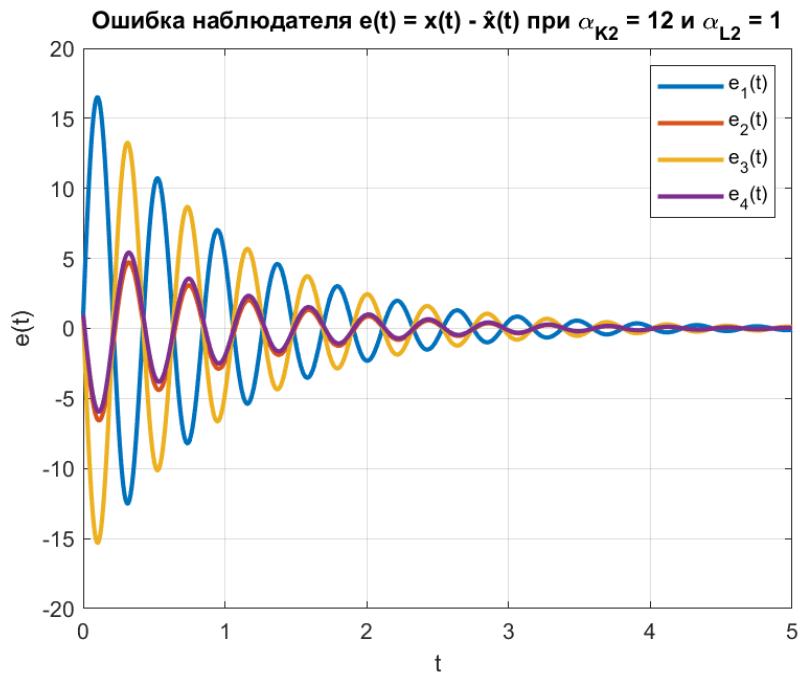


Рис. 35: Ошибка наблюдателя при $\alpha_{K2} = 12$ и $\alpha_{L2} = 1$

Выполним теперь синтез регулятора, который будет обеспечивать степень устойчивости $\alpha_{K3} = \alpha_1 = 1$. Задействуем метод матричных неравенств типа Ляпунова относительно $P \succ 0$ и Y при $\alpha = \alpha_{K3}$ совместно с минимизацией управления (что позволит «прижать» управляемые собственные числа спектра замкнутой системы к α_{K3} , минимизировав отклонения между фактическими собственными числами и желаемой степенью устойчивости). Итак, решением будет:

$$P_{K3} = \begin{bmatrix} 104.01 & 103.96 & 103.97 & -104.04 \\ 103.96 & 103.98 & 103.98 & -103.95 \\ 103.97 & 103.98 & 104.02 & -103.86 \\ -104.04 & -103.95 & -103.86 & 104.38 \end{bmatrix}, \quad Y_{K3} = \begin{bmatrix} 0.37 \\ 0.04 \\ -0.05 \\ -0.96 \end{bmatrix}^T$$

Откуда:

$$K_3 = [46.3177 \ 24.0566 \ -51.5896 \ 18.7837]$$

Выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_3 = \begin{bmatrix} 97.6355 & 43.1133 & -112.1792 & 40.5674 \\ 272.9064 & 149.3398 & -312.5376 & 121.7022 \\ 268.9064 & 141.3398 & -304.5376 & 117.7022 \\ 95.6355 & 57.1133 & -98.1792 & 42.5674 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_3) = \{-1, -1 \pm 13.3236i, -12\}$$

Все собственные числа имеют вещественную часть, меньшую либо равную α_{K3} , а значит, синтез проведен корректно.

Заметим, что одно собственное число $\lambda_4 = -12$ осталось неизменным. Дело в том, что оно уже удовлетворяет условию $\Re(\lambda_4) < \alpha_K$ - регулятору в поставленной задаче нет смысла его изменять, отдавая ещё больше управления, задача минимизации которого ставилась. Таким образом, добиться нулевого отклонения вещественной части спектра замкнутой системы от α_{K1} с помощью минимизации

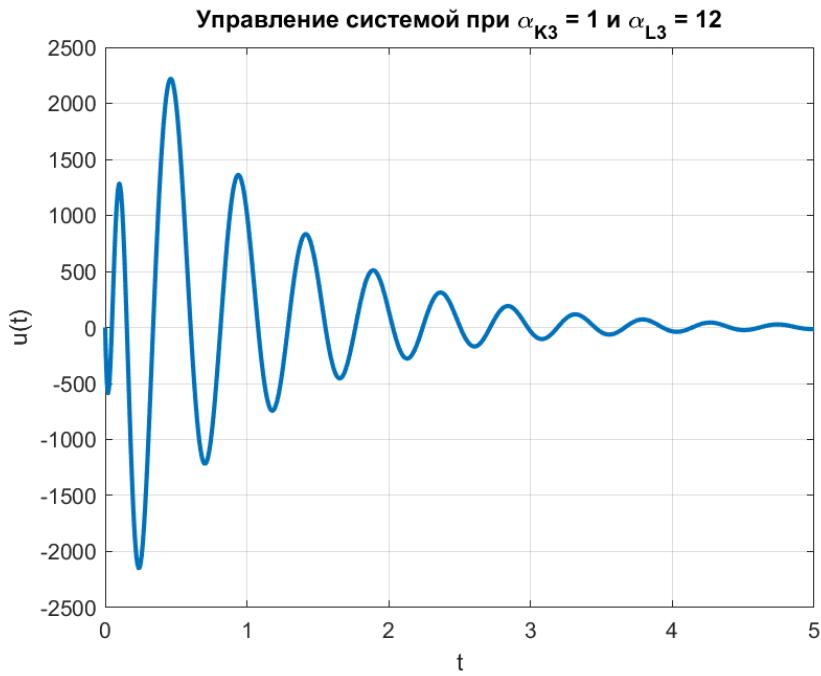


Рис. 36: Управления системой при $\alpha_{K3} = 1$ и $\alpha_{L3} = 12$

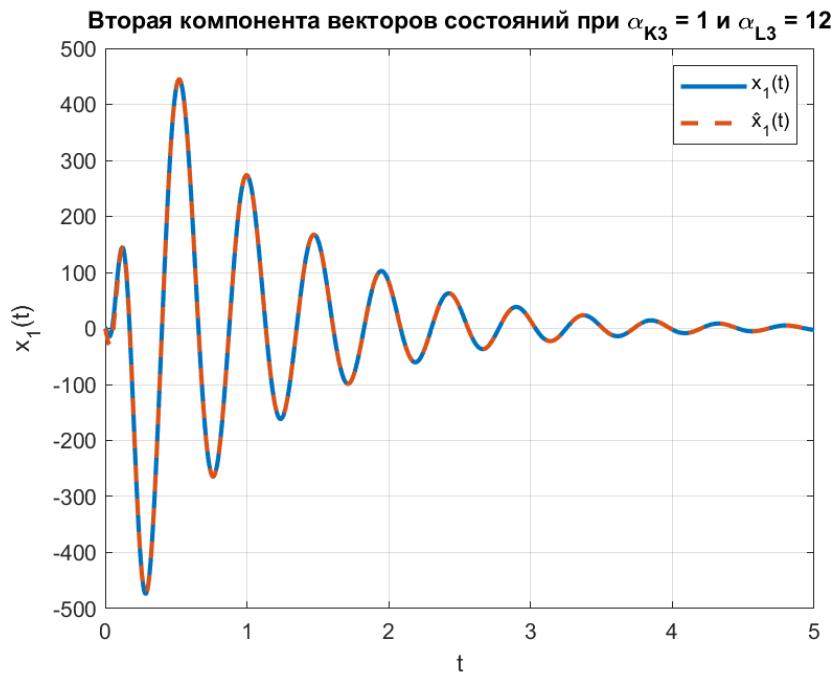


Рис. 37: Первые компоненты $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при $\alpha_{K3} = 1$ и $\alpha_{L3} = 12$

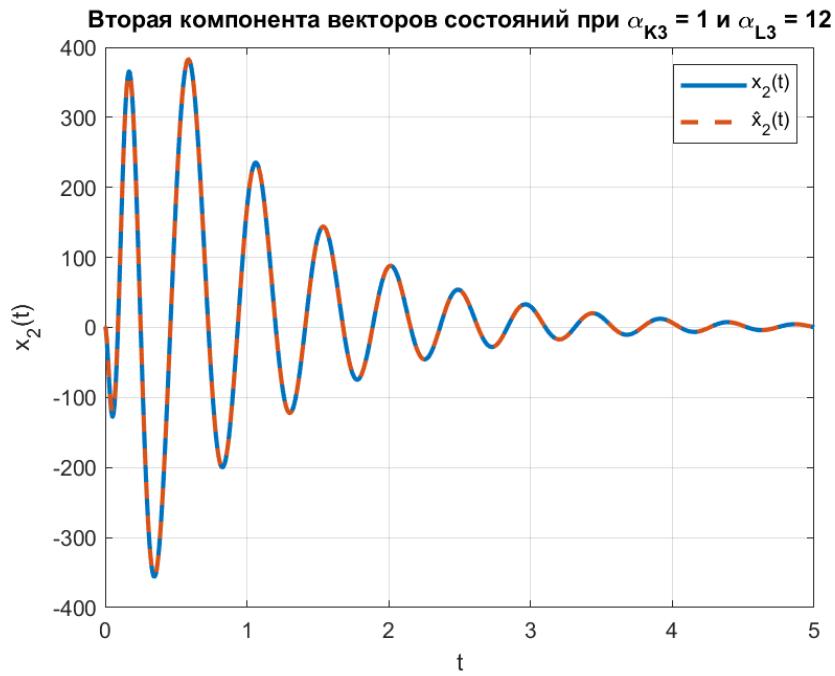


Рис. 38: Вторые компоненты $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при $\alpha_{K3} = 1$ и $\alpha_{L3} = 12$

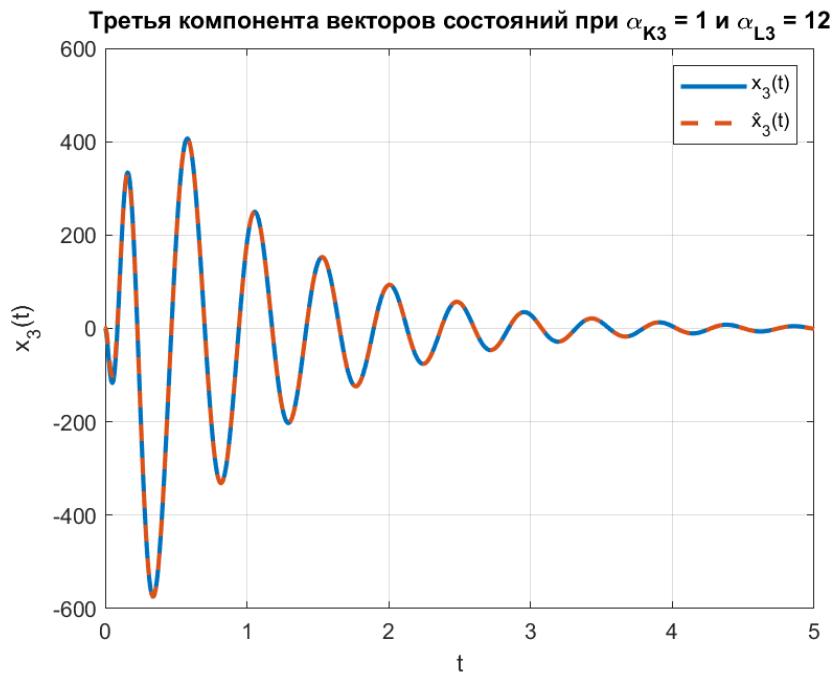


Рис. 39: Трети компоненты $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при $\alpha_{K3} = 1$ и $\alpha_{L3} = 12$

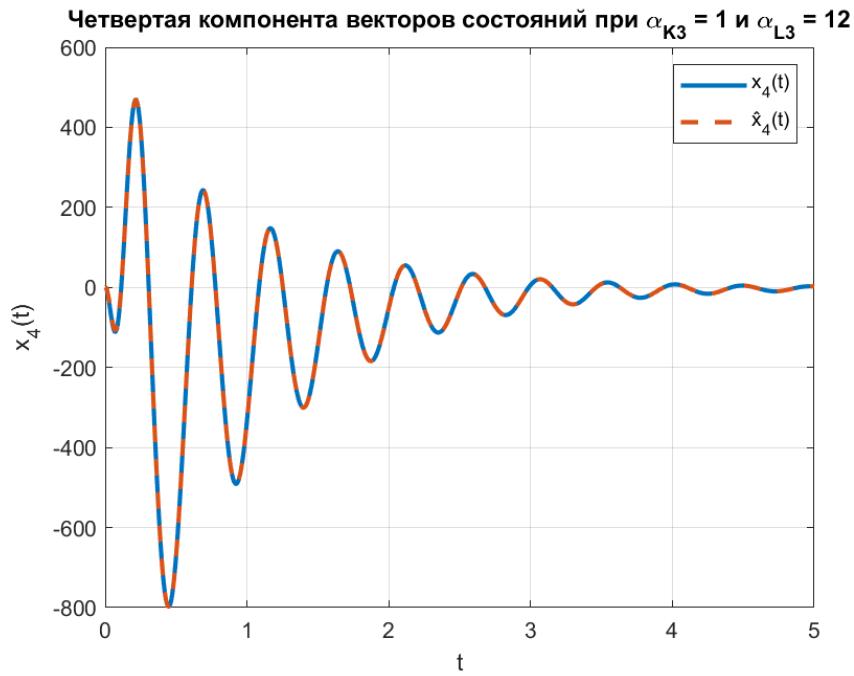


Рис. 40: Четвертые компоненты $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ при $\alpha_{K3} = 1$ и $\alpha_{L3} = 12$

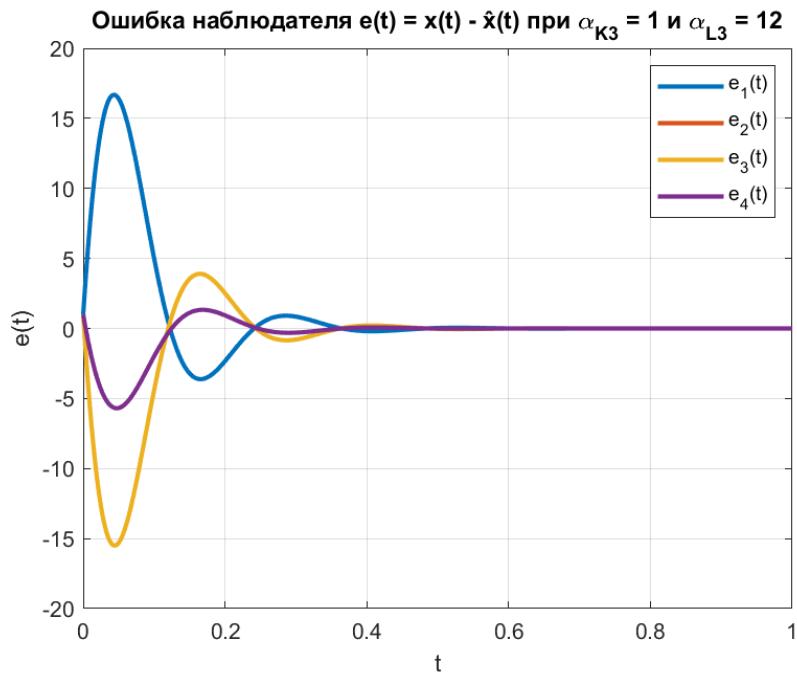


Рис. 41: Ошибка наблюдателя при $\alpha_{K3} = 1$ и $\alpha_{L3} = 12$

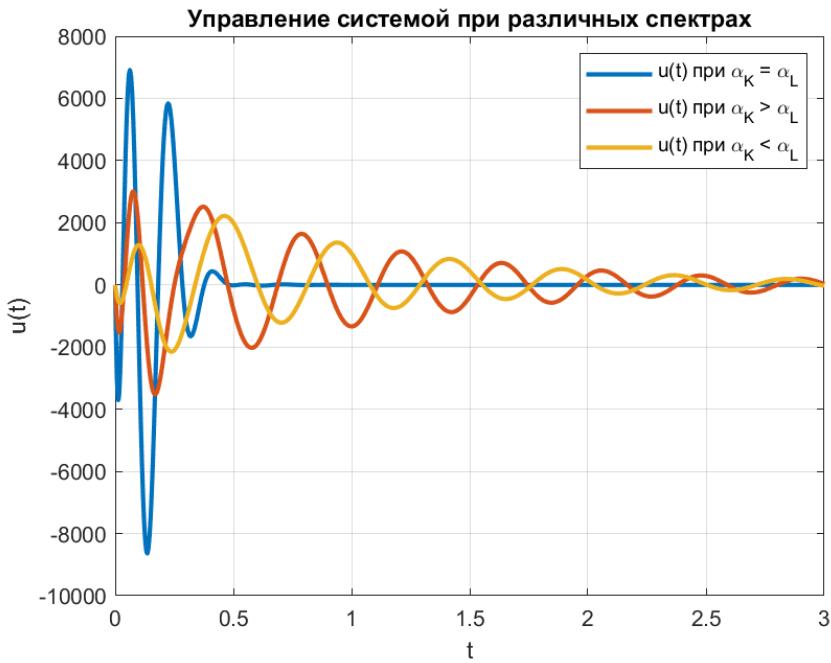


Рис. 42: Управления системой при различных спектрах

управления при наличии подобных на λ_4 собственных чисел полностью невозможно. Синтез регулятора при обычной постановке задачи обеспечения заданной экспоненциальной устойчивости же даст отклонения при *всех* собственных числах, так как уведёт λ_{1-3} ещё дальше от α_{K1} в сравнении с задачей минимизации управления, где это расстояние как бы оказывается минимальным.

Выполним моделирование системы с полученными регулятором и наблюдателем. Зададим начальные условия $x(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ и $x_0 = [0, 0, 0, 0]^T$ и построим графики формируемого регулятором управления $u(t)$ (рисунок 36), сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ (рисунки 37 - 40) и графики ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ (рисунок 41). Для сравнения всех случаев также построен график управления всех трех полученных систем вместе (рисунок 42).

Сравним полученные результаты для различных наборов α_K и α_L . Наименьшее время стабилизации системы у регулятора с одинаковыми значениями α_K и α_L , в остальных же случаях она примерно одинаковая, но меньшие значения амплитуд возникающих колебаний

управлений и состояний достигаются всё же при $\alpha_K > \alpha_L$, то есть при более «сильном» регуляторе.

Ошибка наблюдения сходится быстрее при $\alpha_L > \alpha_K$, так как в этом случае наблюдатель имеет более «сильную» степень сходимости, при этом значения достигаются несколько большие, чем при $\alpha_L < \alpha_K$, где, помимо прочего, возникают серьезные колебания в графиках ошибки наблюдения. Последнее несколько «сковывает» мощное управление, так как оно ориентируется на слабый наблюдатель, сходящийся достаточно медленно.

Также отметим, что понижение любого из параметров α_K или α_L приводит к серьезному увеличению времени стабилизации системы, переходные процессы состояний и управлений становятся более колебательными и медленными.

В общем случае оптимальным является вариант, когда наблюдатель имеет несколько более «сильную» степень сходимости, чем регулятор, позволяя давать ему своевременные показания о состоянии системы и качественно управлять ей.

3 Качественная экспоненциальная устойчивость

Наконец, рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

В соответствии с вариантом, матрицы A и B имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 13 \\ 6 & -1 & 6 \\ -6 & -1 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Выполним анализ управляемости и наблюдаемости системы. Для этого найдем Жорданову форму матрицы A и вспомогательную матрицу T для перехода к ней:

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Таким образом, система является частично управляемой, но стабилизируемой, так как есть единственное неуправляемое собственное число $\lambda_1 = -2$, которому соответствует нулевая первая строка в матрице \hat{B} и для которого $\Re(\lambda_1) < 0$. Комплексно-сопряженные собственные числа $\lambda_2 = 2 + 3i$ и $\lambda_3 = 2 - 3i$ управляемы, так как хотя бы одна из строк в матрице \hat{B} является ненулевой.

Теперь зададимся значениями параметра $\beta < 0$, характеризующего среднее значение поведения траекторий ($|\beta|$ как «средняя степень устойчивости»), и параметра $r > 0$, $\beta + r < 0$, характеризующего разброс поведения траекторий относительно среднего значения β , причем таким образом, чтобы $r = \frac{|\beta|}{k}$, где $1.5 \leq k \leq 4$:

$$\beta = -3, \quad r = \frac{3}{1.5} = 2$$

Также отметим, что неуправляемое собственное число λ_1 лежит на комплексной плоскости в пределах круга радиуса r с центром в точке $(\beta, 0)$. Вообще, вся суть метода как раз и заключается в том, чтобы «сдвинуть» спектр замкнутой системы в пределы данного круга при помощи статического регулятора.

Рассмотрим четыре набора параметров Q и R :

- $Q = I, R = 1$
- $Q = I, R = 0$
- $Q = 0, R = 1$
- $Q = 0, R = 0$

Для каждого из наборов синтезируем регулятор вида $u = Kx$, обеспечивающего качественную экспоненциальную устойчивость при

помощи матричного уравнения Риккати:

$$(A - BK - \beta I)^T P(A - BK - \beta I) - r^2 P = -Q$$

Матрица K обратной связи тогда находится как:

$$K = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P(A - \beta I)$$

Начнём с $Q = I$ и $R = 1$.

Решением уравнения Риккати при $\beta = -3$, $r = 2$, $Q = I$ и $R = 1$ будет:

$$P_{K1} = \begin{bmatrix} 6.6038 & 1.3758 & 5.7366 \\ 1.3758 & 0.6638 & 1.3004 \\ 5.7366 & 1.3004 & 5.4981 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$K_1 = [-4.8359 \quad 1.1813 \quad -4.7726]$$

Найдем матрицу замкнутой с помощью найденного регулятора системы:

$$A + BK_1 = \begin{bmatrix} 1.3282 & 0.3626 & 3.4548 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_1) = \{-2, -2.8359 \pm 1.1015i\}$$

Все собственные числа находятся в пределах круга радиуса r с центром в точке $(\beta, 0)$, а значит, синтез проведен корректно. Это подтверждается и рисунком 43.

Проведем моделирование системы с регулятором K_1 при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1]^T$. На рисунках 45 и 44 представлены векторы состояния и управления с матрицей обратной связи K_1 .

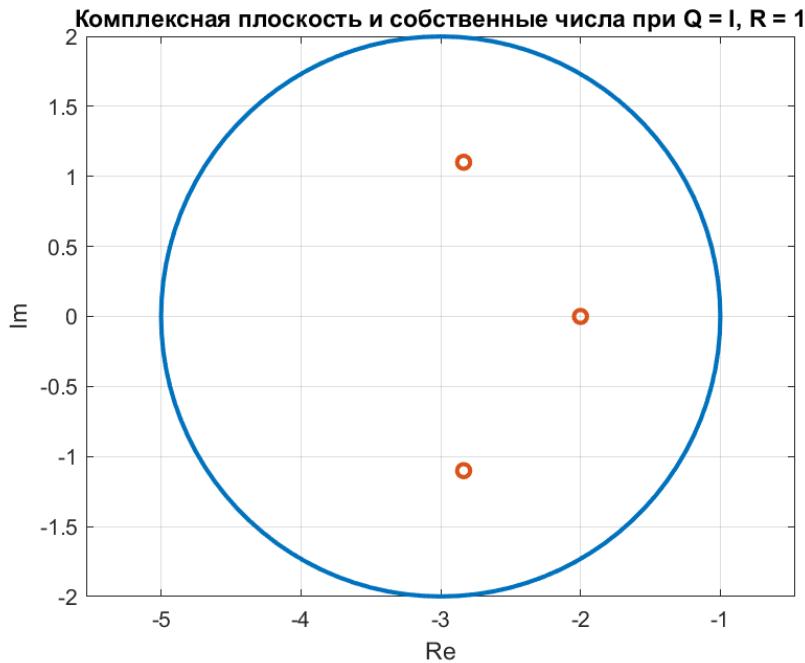


Рис. 43: Собственные числа при $(Q = I, R = 1)$, регуляторе K_1

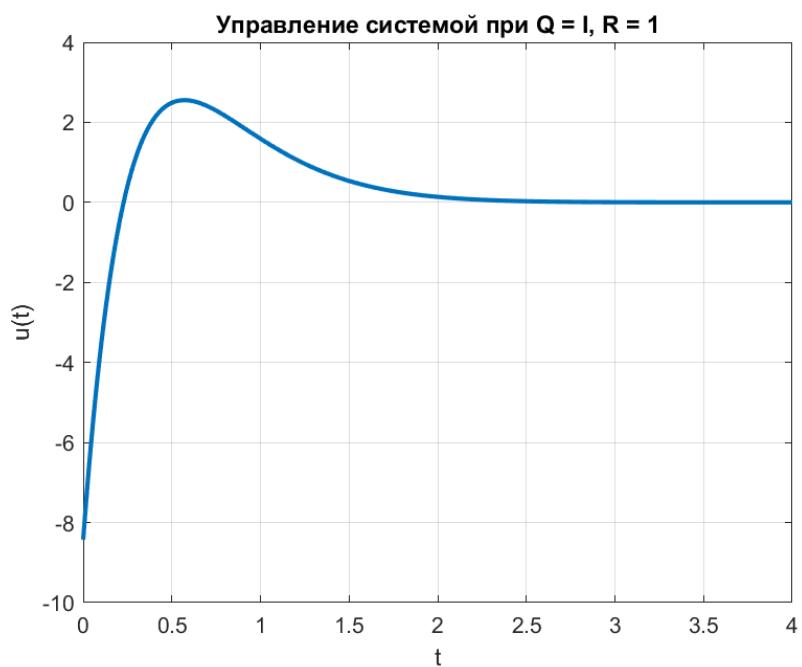


Рис. 44: Управление системой при $(Q = I, R = 1)$, регуляторе K_1

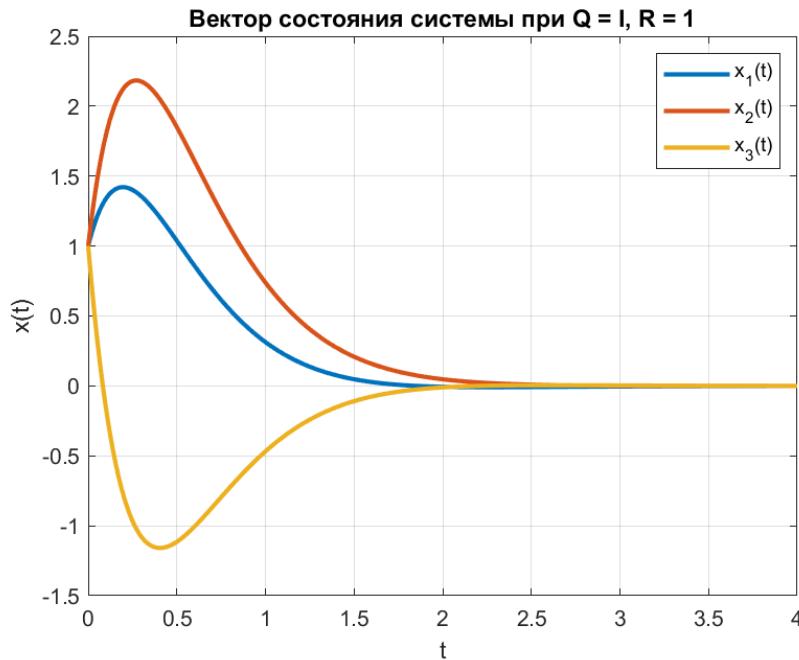


Рис. 45: Вектор состояния системы при ($Q = I, R = 1$), регуляторе K_1

Рассмотрим случай $Q = I$ и $R = 0$.

Решением рассматриваемого уравнения Риккати будет:

$$P_{K2} = \begin{bmatrix} 5.7062 & 1.2305 & 4.8679 \\ 1.2305 & 0.5897 & 1.1600 \\ 4.8679 & 1.1600 & 4.6553 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$K_2 = [-5.0876 \quad 1.2109 \quad -5.0142]$$

Найдем матрицу замкнутой с помощью найденного регулятора системы:

$$A + BK_2 = \begin{bmatrix} 0.8248 & 0.4218 & 2.9717 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_2) = \{-2, -3, -3.1752\}$$

Все собственные числа лежат в пределах круга радиуса r с центром в точке $(\beta, 0)$, а значит, синтез проведен корректно. Это подтверждается и рисунком 46.

Проведем моделирование системы с регулятором K_2 при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1]^T$. На рисунках 48 и 47 представлены векторы состояния и управления с матрицей обратной связи K_2 .

Рассмотрим случай $Q = 0$ и $R = 1$.

Решением уравнения Риккати будет:

$$P_{K3} = \begin{bmatrix} 1.8750 & 1.5743 & 1.8750 \\ 0.1457 & 0.5733 & 0.1457 \\ 1.8750 & 1.5743 & 1.8750 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$K_3 = [-5.7520 \quad 0.5827 \quad -5.7520]$$

Найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_3 = \begin{bmatrix} -0.5040 & -0.8347 & 1.4960 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_3) = \{-2, -3.752 \pm 1.8532i\}$$

Все собственные числа лежат в пределах круга радиуса r с центром в точке $(\beta, 0)$, а значит, синтез проведен корректно. Это подтверждается и рисунком 49.

Проведем моделирование системы с регулятором K_3 при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1]^T$. На рисунках 51 и 50 представлены векторы состояния и управления с матрицей обратной связи K_3 .

Наконец, примем $Q = 0$ и $R = 0$.

Решением уравнения Риккати будет:

$$P_{K4} = 1e^{-38} \begin{bmatrix} -0.1131 & 0.0643 & -0.0069 \\ 0.3260 & 0.1883 & 0.4913 \\ -0.6704 & 0.2686 & 0.5877 \end{bmatrix}$$



Рис. 46: Собственные числа при $(Q = I, R = 0)$, регуляторе K_2

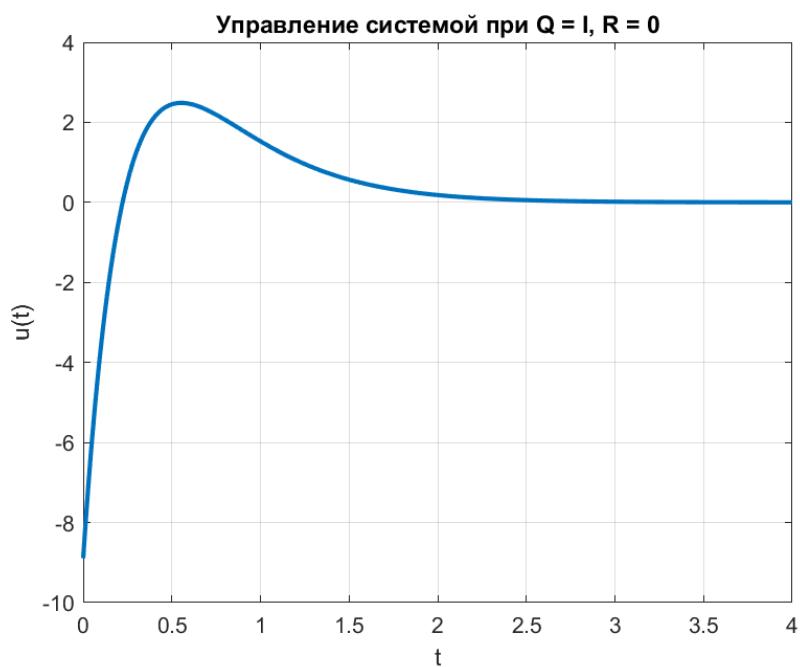


Рис. 47: Управление системой при $(Q = I, R = 0)$, регуляторе K_2

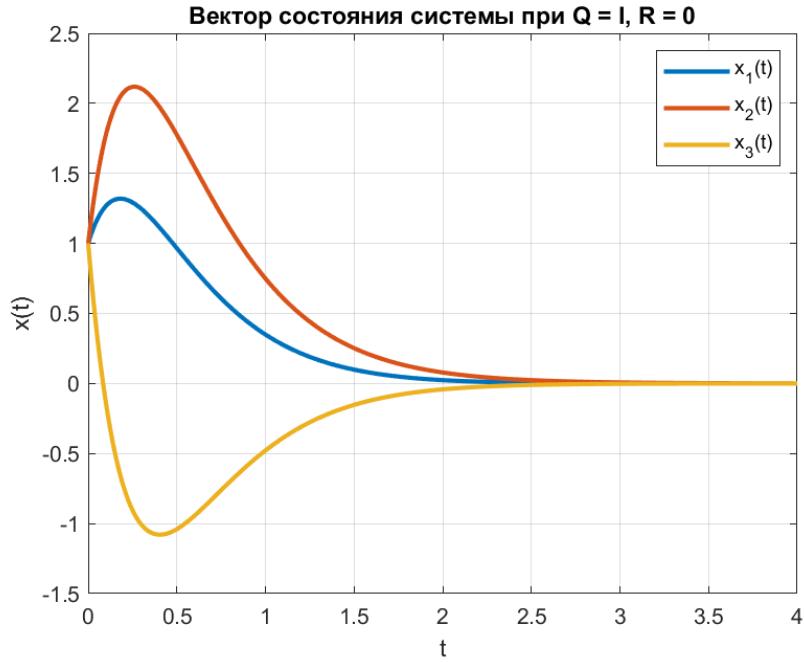


Рис. 48: Вектор состояния системы при $(Q = I, R = 0)$, регуляторе K_2



Рис. 49: Собственные числа при $(Q = 0, R = 1)$, регуляторе K_3

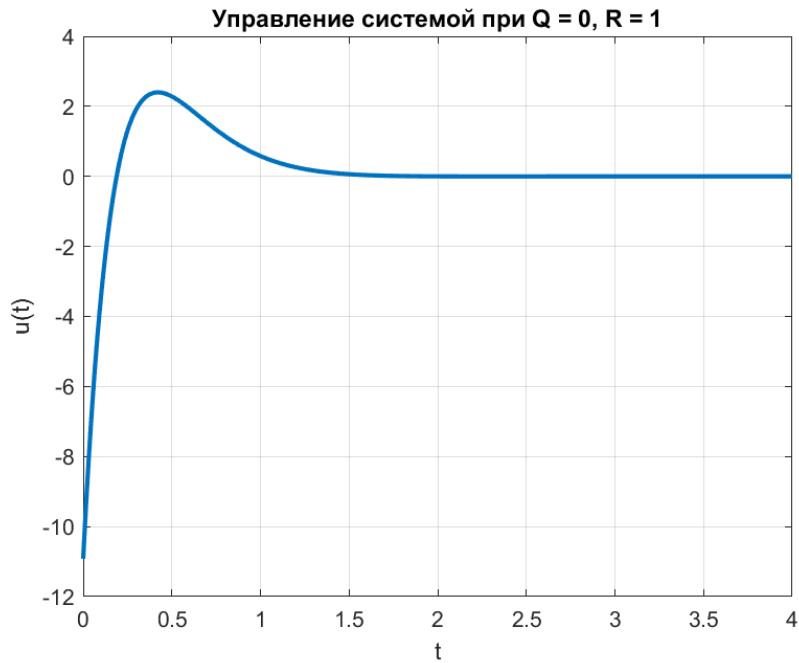


Рис. 50: Управление системой при $(Q = 0, R = 1)$, регуляторе K_3

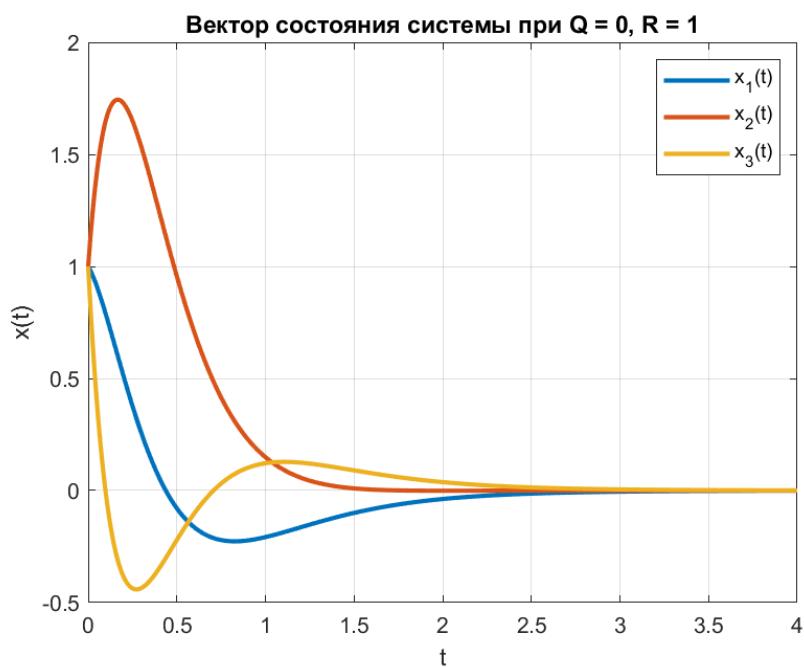


Рис. 51: Вектор состояния системы при $(Q = 0, R = 1)$, регуляторе K_3

Откуда:

$$K_4 = [-5.1117 \quad 1.5990 \quad -4.6421]$$

Проверим корректность синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_4 = \begin{bmatrix} 0.7766 & 1.1980 & 3.7157 \\ 6.0000 & -1.0000 & 6.0000 \\ -6.0000 & -1.0000 & -8.0000 \end{bmatrix}$$

Она имеет спектром

$$\sigma(A + BK_4) = \{-2, -3, -3.2234\}$$

Все собственные числа лежат в пределах круга радиуса r с центром в точке $(\beta, 0)$, а значит, синтез проведен корректно. Это подтверждается и рисунком 52.

Проведем моделирование системы с регулятором K_4 при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1]^T$. На рисунках 54 и 53 представлены векторы состояния и управления с матрицей обратной связи K_4 .

Также сравним спектры замкнутых систем, полученных при помощи различных регуляторов, и найденные управлении. Графики спектров представлены на рисунке 55, а графики управлений - на рисунке 56.

Все синтезы дали замкнутые системы с собственными числами, лежащими в заданном круге с центром в точке $(\beta, 0)$ и радиусом r . При паре $Q = 0, R = 1$ все управляемые собственные числа находятся на границе - то есть опять-таки по аналогии с предыдущим пунктом получается как бы «прижатый» спектр.

Стоит также отметить, что управление системой при помощи таких регуляторов будет некоторый схожий характер, так как все собственные числа находятся в определенной заданной комплексной области. Это видно по графикам управления на рисунке 56, которые достаточно близки друг к другу.

В итоге с помощью качественной экспоненциальной устойчивости можно контролировать спектр замкнутой системы, а значит, и её переходные процессы и возникающие колебания, держа их в определенных задаваемыми параметрами β и r пределах.



Рис. 52: Собственные числа при $(Q = 0, R = 0)$, регуляторе K_4

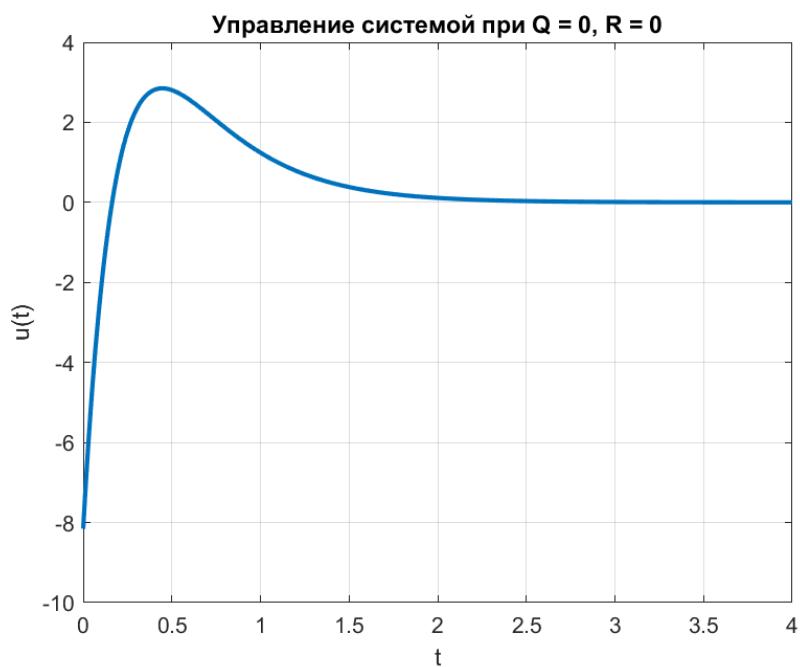


Рис. 53: Управление системой при $(Q = 0, R = 0)$, регуляторе K_4

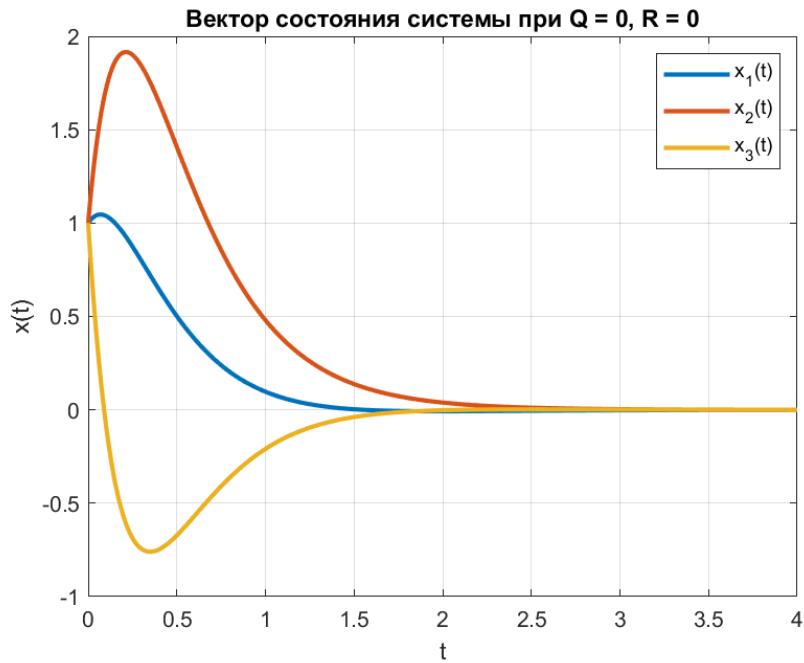


Рис. 54: Вектор состояния системы при $(Q = 0, R = 0)$, регуляторе K_4

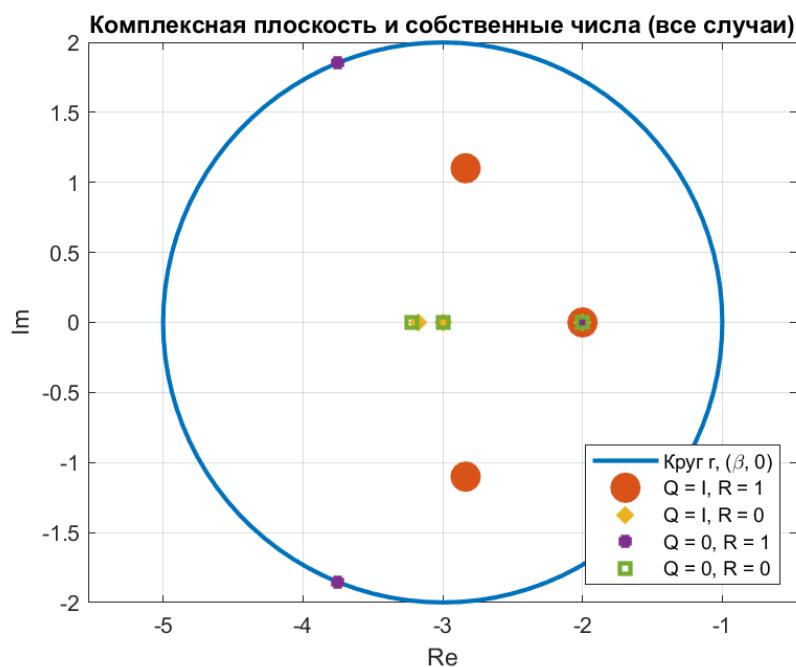


Рис. 55: Собственные числа при различных парах (Q, R)

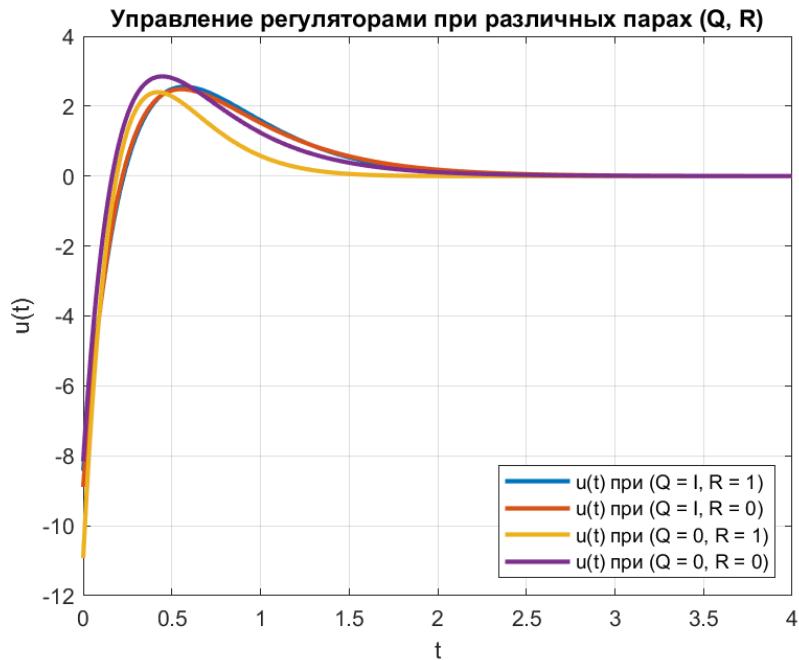


Рис. 56: Управление системой регуляторами с качественной экспоненциальной устойчивостью

4 Общие выводы

В данной работе были рассмотрены различные методы синтеза регуляторов и наблюдателей с заданной степенью экспоненциальной устойчивостью, все удалось создать и замоделировать, убедившись в работоспособности визуально.

В первом задании были рассмотрены методы синтеза регуляторов с помощью неравенства Ляпунова и уравнений Риккати, получено, что параметры Q и R в последнем задают связь между желаемым быстродействием системы и затрачиваемым на это управлением.

Во втором задании были синтезированы наблюдатели по выходу, исследована взаимосвязь между степенью устойчивости регулятора и сходимости наблюдателя.

Наконец, была изучена качественная экспоненциальная устойчивость, позволившая добиться от замкнутой системы средней степени устойчивости β мод, задаваемых собственными числами.