Научно исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №2
Модальные регуляторы и наблюдатели
Вариант 11

Выполнил студент группы R3380 Мовчан Игорь Евгеньевич
Преподаватель Пашенко Артем Витальевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Модальный регулятор

Исследуем линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

В соответствии с вариантом задания, матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 13 \\ 6 & -1 & 6 \\ -6 & -1 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Выполним анализ управляемости системы и её собственных чисел. Для этого используем Жорданову форму $\hat{A} = T^{-1}AT$ матрицы A, имеющей собственными числами $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_{23} = 2 \pm 3i$, а также вспомогательную матрицу T для перехода к ней:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Можно получить обратную матрицу к T:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Заметим, что хоть элемент $\hat{B}_2$ матрицы $\hat{B}$, соответствующий одному из мнимых собственных чисел, и равен нулю, он не влияет на управляемость λ_2, так как та достигается через сопряженное λ_3.

Также отметим, что $\hat{B}_1 = 0$, а значит, λ_1 не управляемо. Вся же система является частично управляемой, но стабилизируемой, так как единственное неуправляемое собственное число лежит в левой полуплоскости, то есть имеет отрицательную вещественную часть, а значит, является асимптотически устойчивым.

Замкнем систему модальным регулятором вида:

$$u = Kx$$

Матрица K коэффициентов обратной связи выбирается так, чтобы собственные числа уже замкнутой системы с матрицей $A + BK$ были устойчивыми.

Схема моделирования системы с таким регулятором приведена на рисунке 1.

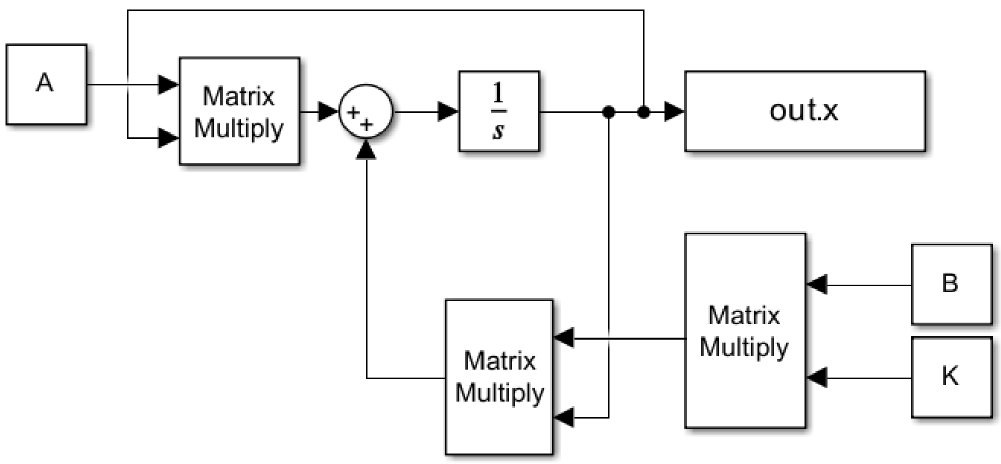

Рис. 1: Схема моделирования системы с модальным регулятором

Проведем анализ предлагаемых спектров замкнутой системы:

$$\sigma_1 = \{-1, -1, -1\}, \quad \sigma_2 = \{-2, -2, -2\}$$

$$\sigma_3 = \{-1, -10, -100\}, \quad \sigma_4 = \{-2, -20, -200\}$$

$$\sigma_5 = \{-1, -1 \pm 3i\}, \quad \sigma_6 = \{-2, -2 \pm 6i\}$$

Отсекая те, в которых не возникает неуправляемого собственного числа λ_1, получаем достижимые спектры σ_2, σ_4 и σ_6 (все оставшиеся оказались недостижимыми). Дело в том, что наличие неуправляемых собственных чисел в спектре замкнутой системы необходимо, так как влияние на них матрицей B вне зависимости от задаваемого управления u невозможно (данное хорошо прослеживается в эквивалентой Жордановой форме системы, где будет происходит обнуление управления при умножении на B - Жордановы блоки неуправляемых собственных чисел останутся неизменными, а значит, те попадут в спектр замкнутой системы).

Для каждого оставшегося спектра найдем матрицу K коэффициентов обратной связи. Начнём с σ_2.

Для синтеза соответствующей матрицы K регулятора необходимо решить уравнение Сильвестра относительно P:

$$AP - PG = BY$$

Однако обратимого решения уравнения при неуправляемой паре (A, B) не существует, поэтому воспользуемся вышесказанным про неизменность той части матрицы $\hat{A}$, которая соотвествует неуправляемым собственным числам, и рассмотрим её сужение $\hat{A}'$ (соотвествующие неуправляемым собственным числам элементы $\hat{B}$ отбрасываются, как и в $\hat{A}$, образуя $\hat{B}'$) на управляемые собственные числа. Вот это сужение в процессе подачи управления $\hat{K}'$ и должно обладать необходимым спектром, исключая неуправляемые собственные числа. В итоге решаем уравнение:

$$\hat{A}'P - PG = \hat{B}'Y$$

Пару (Y, G) сделаем наблюдаемой, усеченную матрицу обратной связи найдем по формуле $\hat{K}' = -YP^{-1}$, после чего, опять учитывая «неприкосновенность» неуправляемых собственных чисел, расширимся до $\hat{K}$ любыми числами и перейдем в базис исходной системы, используя $u = Kx = KT\hat{x} = \hat{K}\hat{x} \Rightarrow K = \hat{K}T^{-1}$.

Итак, для спектра σ_2 получаем:

$$\hat{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}' = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Выберем

$$G_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad Y_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Тогда матрица наблюдаемости $Y_{\sigma_2}G_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} Y_{\sigma_2} & Y_{\sigma_2}G_{\sigma_2} \end{bmatrix}^T$ имеет ранг 2, значит, пара $(Y_{\sigma_2}, G_{\sigma_2})$ наблюдаема.

Таким образом, пара $(\hat{A}', \hat{B}')$ управляема, $(Y_{\sigma_2}, G_{\sigma_2})$ - наблюдаема, $\sigma(\hat{A}') \cap \sigma(G_{\sigma_2}) = \varnothing$, а значит уравнение Сильвестра имеет единственное обратимое решение

$$P_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.6336 \\ -0.64 & -0.6848 \end{bmatrix}$$

Исходя из этого, матрица регулятора в базисе Жордана:

$$\hat{K}'_{\sigma_2} = -Y_{\sigma_2}P_{\sigma_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.583 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{K}_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0.583 & 2 \end{bmatrix}$$

В исходном базисе статический регулятор тогда задаётся через

$$K_{\sigma_2} = \hat{K}_{\sigma_2}T^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3.4167 & -2 \end{bmatrix}$$

Теперь выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 3 & 4.83 & 9 \\ 6 & -1 & 6 \\ -6 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

Она имеет собственными числами

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$$

Следовательно, желаемый спектр σ_2 действительно был достигнут, а значит, задача синтеза регулятора полностью решена.

Выполним моделирование и построим графики формируемого регулятором управления $u(t) = Kx(t)$ и вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1]^T$. Графики приведены на рисунках 2 и 3 соответственно.

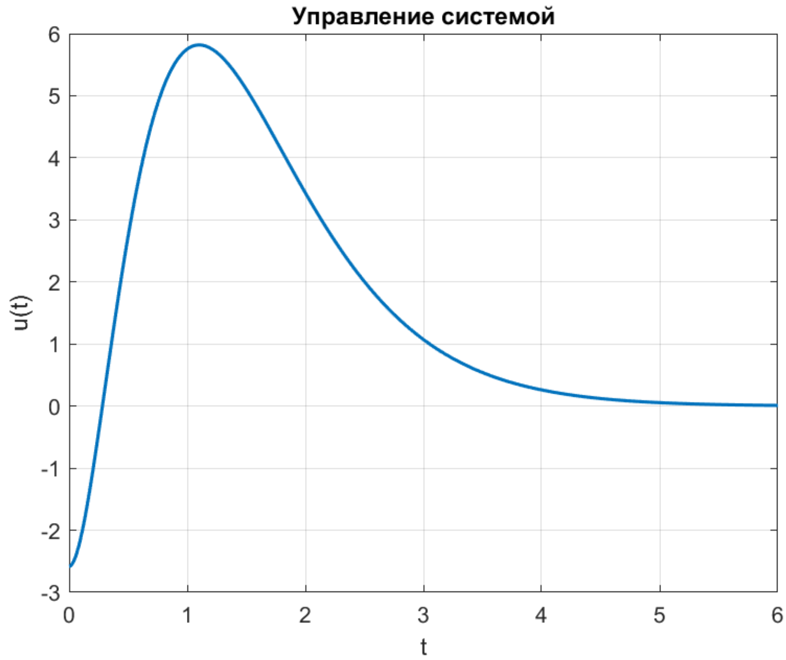

Рис. 2: График формируемого регулятором управления $u(t)$ при σ_2

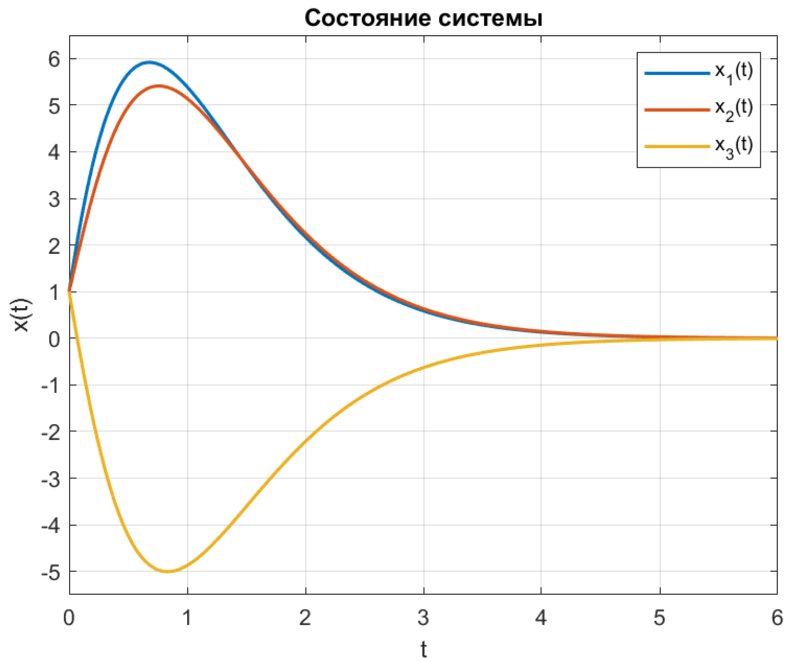

Рис. 3: График вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при σ_2

Перейдем к спектру σ_4. Выберем для него матрицу G_{σ_4} и Y_{σ_4} так, чтобы пара $(Y_{\sigma_4}, G_{\sigma_4})$ была наблюдаемой:

$$G_{\sigma_4} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -200 \end{bmatrix}, \quad Y_{\sigma_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank}(Y_{\sigma_4} G_{\sigma_4}) = 2$$

Тогда уравнение Сильвестра с теми же матрицами $\hat{A}'$ и $\hat{B}'$ имеет единственное обратимое решение

$$P_{\sigma_4} = \begin{bmatrix} 0.0243 & 0.0003 \\ -0.1785 & -0.0198 \end{bmatrix}$$

Исходя из этого, найдем матрицу регулятора в базисе Жордана:

$$\hat{K}'_{\sigma_4} = -Y_{\sigma_4} P_{\sigma_4}^{-1} = \begin{bmatrix} 369.583 & 56 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{K}_{\sigma_4} = \begin{bmatrix} 4 & 369.583 & 56 \end{bmatrix}$$

В исходном базисе статический регулятор тогда задаётся через

$$K_{\sigma_4} = \hat{K}_{\sigma_4} T^{-1} = \begin{bmatrix} -112 & -309.583 & -108 \end{bmatrix}$$

Теперь выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_{\sigma_4} = \begin{bmatrix} -213 & -621.167 & -203 \\ 6 & -1 & 6 \\ -6 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

Она имеет собственными числами

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -20, \quad \lambda_3 = -200$$

Следовательно, желаемый спектр σ_4 был достигнут, а значит, задача синтеза регулятора полностью решена.

Графики формируемого регулятором управления $u(t) = Kx(t)$ и вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1]^T$ приведены на рисунках 4 и 5 соответственно.

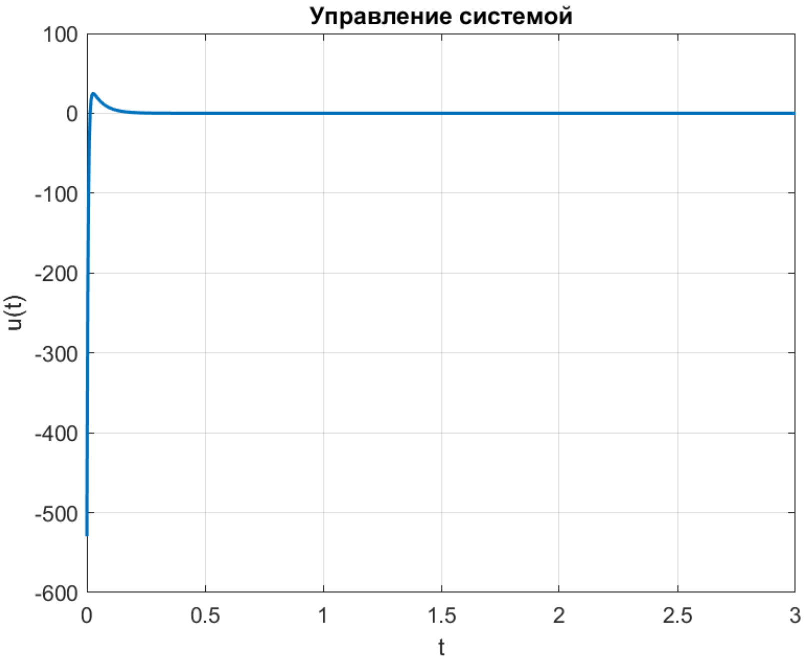

Рис. 4: График формируемого регулятором управления $u(t)$ при σ_4

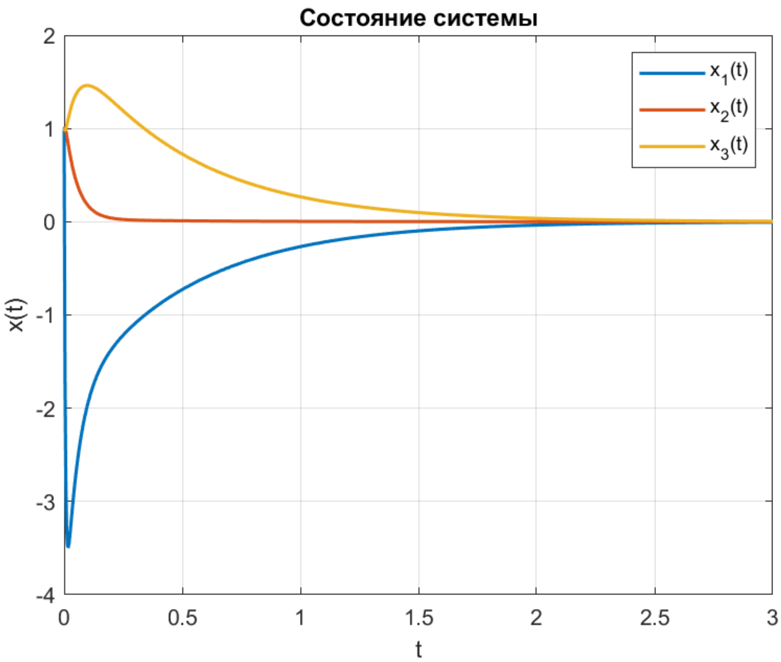

Рис. 5: График вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при σ_4

Рассмотрим теперь спектр σ_6. Выберем для него матрицу G_{σ_6} и Y_{σ_6} так, чтобы пара $(Y_{\sigma_6}, G_{\sigma_6})$ была наблюдаемой:

$$G_{\sigma_6} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}, \quad Y_{\sigma_6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank}(Y_{\sigma_6} G_{\sigma_6}) = 2$$

Рассматриваемое уравнение Сильвестра тогда имеет единственное обратимое решение

$$P_{\sigma_6} = \begin{bmatrix} -0.292 & 0.1831 \\ 0.0231 & -0.828 \end{bmatrix}$$

Исходя из этого, матрица регулятора в базисе Жордана:

$$\hat{K}'_{\sigma_6} = -Y_{\sigma_6} P_{\sigma_6}^{-1} = \begin{bmatrix} 3.583 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{K}_{\sigma_6} = \begin{bmatrix} 6 & 3.583 & 2 \end{bmatrix}$$

В исходном базисе статический регулятор тогда задаётся через

$$K_{\sigma_6} = \hat{K}_{\sigma_6} T^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 4.4167 & 2 \end{bmatrix}$$

Теперь выполним проверку корректности синтеза, для этого найдем матрицу замкнутой системы:

$$A + BK_{\sigma_6} = \begin{bmatrix} 3 & 6.833 & 17 \\ 6 & -1 & 6 \\ -6 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

Получившаяся матрица имеет собственными числами

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_{23} = -2 \pm 6i$$

Значит, желаемый спектр σ_6 был достигнут - задача синтеза регулятора полностью решена.

Графики управления и вектора состояния замкнутой системы при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1]^T$ приведены на рисунках 6 и 7 соответственно.

Расположим графики полученных управлений для спектров σ_2, σ_4 и σ_6 вместе (на рисунке 8 приведены графики при $t \in [0, 4]$ - на рисунке 9 приведены графики при $t \in [0.01, 4]$).

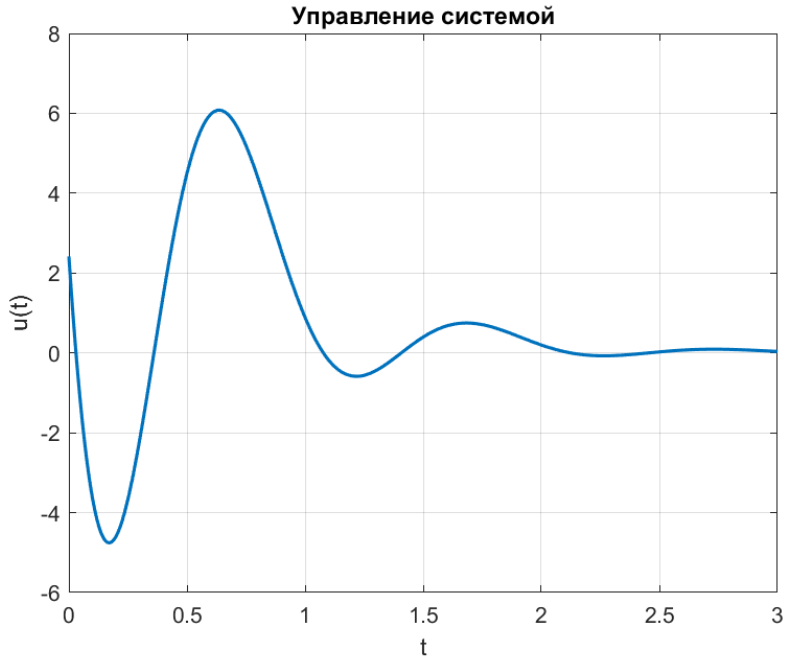

Рис. 6: График формируемого регулятором управления $u(t)$ при σ_6

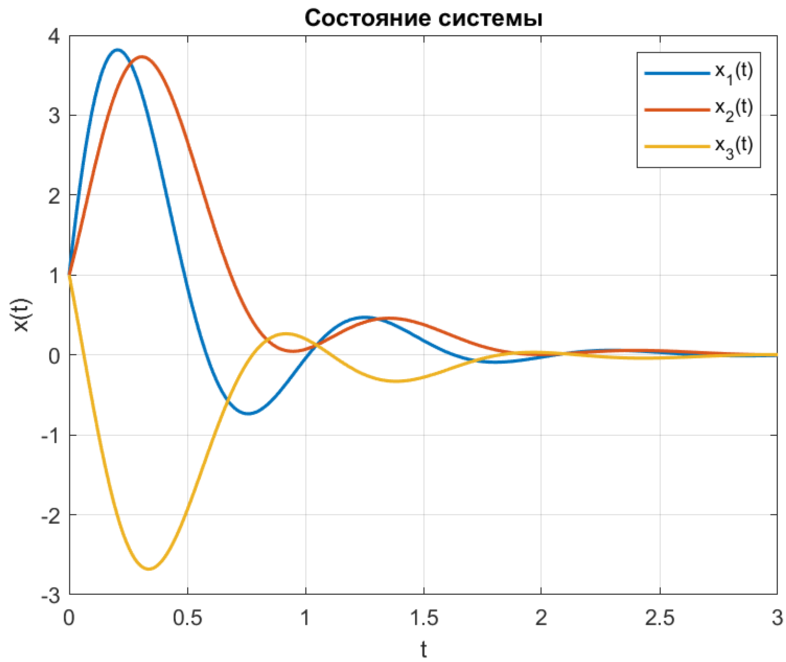

Рис. 7: График вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при σ_6

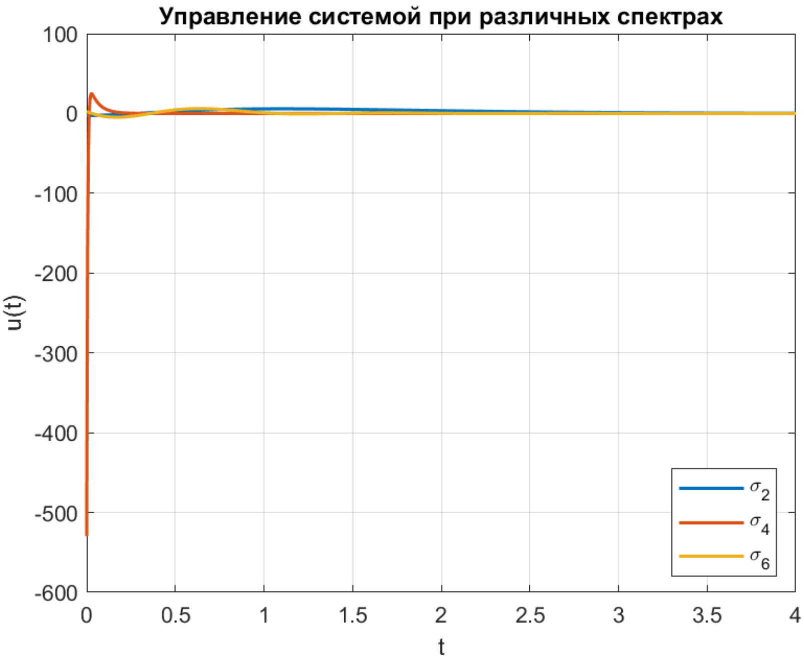

Рис. 8: Графики полученных управлений $u(t)$ при $t \in [0, 4]$

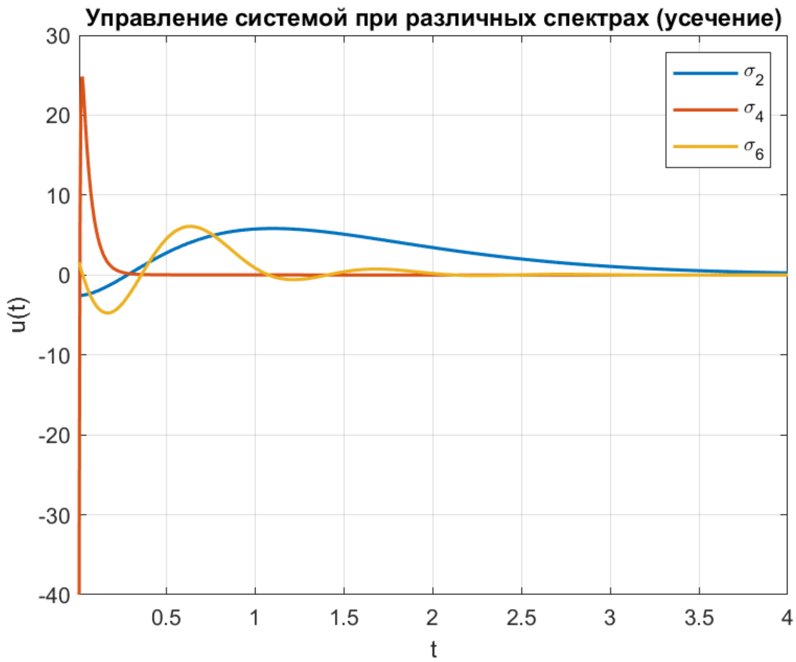

Рис. 9: Графики полученных управлений $u(t)$ при $t \in [0.01, 4]$

Сравнивая управления систем, можем видеть, что чем более быстрых переходных процессов хочется получить (чем дальше собственные числа замнкутой системы от мнимой оси), тем больше по величине и управление в первые моменты времени, появляются «всплески», растет перерегулирование (сравнение управлений у спектров σ_4 и σ_2 или σ_6 на рисунке 8). Соответственно, чем медленнее - тем менее скачкообразно (спектр σ_2 без выраженных колебаний и скачков в управлении на рисунке 9). Живя в математической абстракции нет никаких ограничений на величину управления, оно может быть сколько угодно великим (как, соответственно, и скорость затухания) - главное не бесконечным, однако в реальной жизни проявляется физическая часть объекта - мы не хотим получать тысячи ампер в проводах! Поэтому при синтезе уже физически существующих регуляторов необходимо учитывать это, находя некий компромисс между быстротой затухания и возникающим перерегулированием.

Также отметим, что при спектре σ_6 все переходные процессы происходят быстрее (в сравнении с σ_2), однако управление при этом менее плавное, система совершает частые колебания, связанные с наличием мнимых собственных чисел в спектре.

Немаловажно и то, что у спектра σ_4 возникают «выбросы» и в координатах вектора состояния (рисунок 5, координата x_3 в начальные моменты времени), что в целом тоже нежелательно, так как может негативно сказаться на физике объекта.

Спектр σ_2 же на рисунках 2 и 3 наоборот даёт *медленные*, но монотонные затухания, не обладающие ярко выраженными колебаниями или «всплесками».

В связи со всем вышесказанным выбор желаемого спектра для синтеза регулятора - задача выбора чисел с учетом всех неуправляемостей, физических ограничений на воздействия, а также желаемых переходных характеристик системы. Важным будет упомянуть, что решаемую задачу синтеза отчасти могут облегчить стандартные полиномы типа Ньютона, Баттерворта или Чебышева, которые позволяют, зная желаемые переходные характеристики системы, выбрать и соответствующее управление системы.

2 Наблюдатель полного порядка

Рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

В соответствии с вариантом задания, матрицы A и C имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 5 & -16 & 9 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ 32 & 9 & -25 & 14 \\ 8 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Выполним анализ наблюдаемости системы. Собственные числа матрицы A равны

$$\lambda_{12} = \pm i, \quad \lambda_{34} = \pm 2i$$

Используем Жорданову форму $\hat{A} = T^{-1}AT$ и найдем $\hat{C}$:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 1 \\ 1 & -0.5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Откуда матрица C в жордановом базисе равна

$$\hat{C} = CT = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Лишь элемент $\hat{C}_2$ обнулился, однако его пара $\hat{C}_1 \neq 0$ это компенсирует. Для второй пары $\hat{C}_{34} = \pm 0.5 \neq 0$, а значит, все собственные числа оказались наблюдаемыми, сама система тогда является полностью наблюдаемой и, следовательно, обнаруживаемой (так как вообще нет ненаблюдаемых собственных чисел). Можем спокойно строить наблюдатель состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$ - схема приведена на рисунке 10.

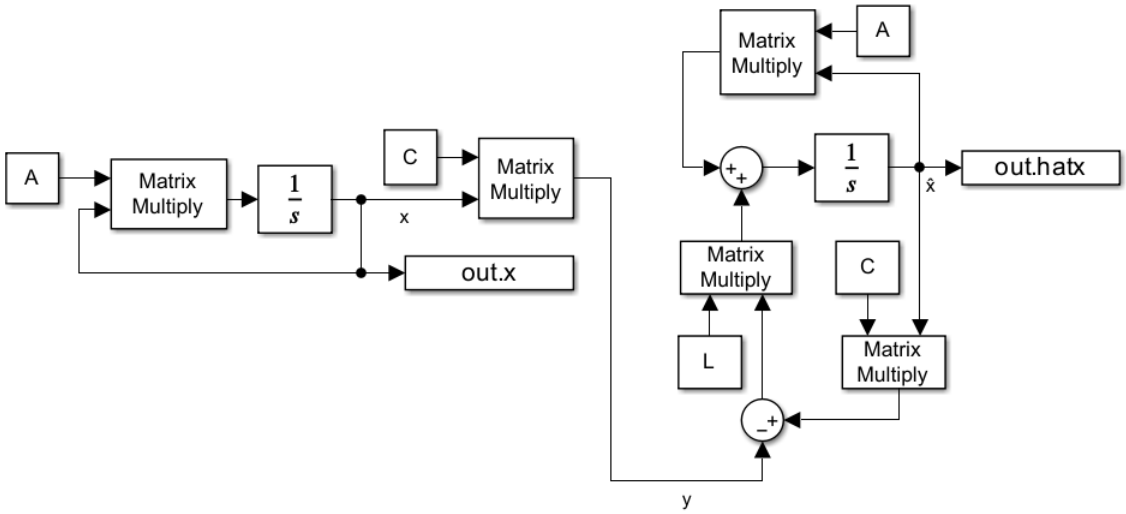

Рис. 10: Схема наблюдателя состояния

Рассмотрим каждый из предложенных спектров σ_1, σ_2 и σ_3:

$$\sigma_1 = \{-6, -6, -6, -6\}, \quad \sigma_2 = \{-6, -60, -600, -6000\}$$

$$\sigma_3 = \{-6 \pm 7i, -6 \pm 8i\}$$

Так как система полностью наблюдаема, с помощью матрицы коррекции наблюдателя L можно достичь любого желаемого спектра у матрицы наблюдателя $A + LC$. Начнём с синтеза наблюдателя для спектра σ_1. Для этого воспользуемся уравнением Сильвестра:

$$GQ - QA = YC$$

Зададимся матрицей G_{σ_1} и Y_{σ_1} так, чтобы пара $(G_{\sigma_1}, Y_{\sigma_1})$ была управляемой, а G_{σ_1} имела необходимый спектр σ_1:

$$G_{\sigma_1} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad Y_{\sigma_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Таким образом, пара (A, C) наблюдаема, $(G_{\sigma_1}, Y_{\sigma_1})$ управляема, а $\sigma(A) \cap \sigma(G_{\sigma_1}) = \varnothing$. Эти условия дают единственное обратимое решение уравнения Сильвестра:

$$Q_{\sigma_1} = \begin{bmatrix} 0.3657 & 0.0119 & -0.3154 & 0.2346 \\ 0.3636 & 0.0118 & -0.3139 & 0.2338 \\ 0.3512 & 0.0111 & -0.3042 & 0.2281 \\ 0.2865 & 0.0081 & -0.2514 & 0.1932 \end{bmatrix}$$

Теперь можем синтезировать матрицу коррекции наблюдателя L_{σ_1} с использованием полученого:

$$L_{\sigma_1} = Q_{\sigma_1}^{-1} Y_{\sigma_1} \approx \begin{bmatrix} 175.667 \\ 261.667 \\ 381.000 \\ 229.333 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдателя $A + L_{\sigma_1} C_{\sigma_1}$ тогда принимает вид

$$A + L_{\sigma_1} C_{\sigma_1} \approx \begin{bmatrix} -155.667 & 5.000 & 159.667 & -166.667 \\ -255.667 & 1.000 & 257.667 & -260.667 \\ -349.000 & 9.000 & 356.000 & -367.000 \\ -221.333 & 4.000 & 223.333 & -225.333 \end{bmatrix}$$

И имеет собственными числами

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -6$$

Следовательно, желаемый спектр σ_1 был достигнут, а значит, задача синтеза наблюдателя полностью решена.

Проведем компьютерное моделирование с начальными условиями системы $x(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ и наблюдателя $\hat{x}(0) = [2, 0, 0, -1]^T$. Сравнительные графики вектора состояний $x(t)$ и наблюдателя $\hat{x}(t)$ при σ_1 приведены на рисунках 11-14, а график ошибки наблюдателя $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ приведен на рисунке 15.

Перейдем к синтезу наблюдателя для спектра σ_2. Отметим, что для σ_2 и σ_3 будем решать всё то же уравнение Сильвестра:

$$GQ - QA = YC$$

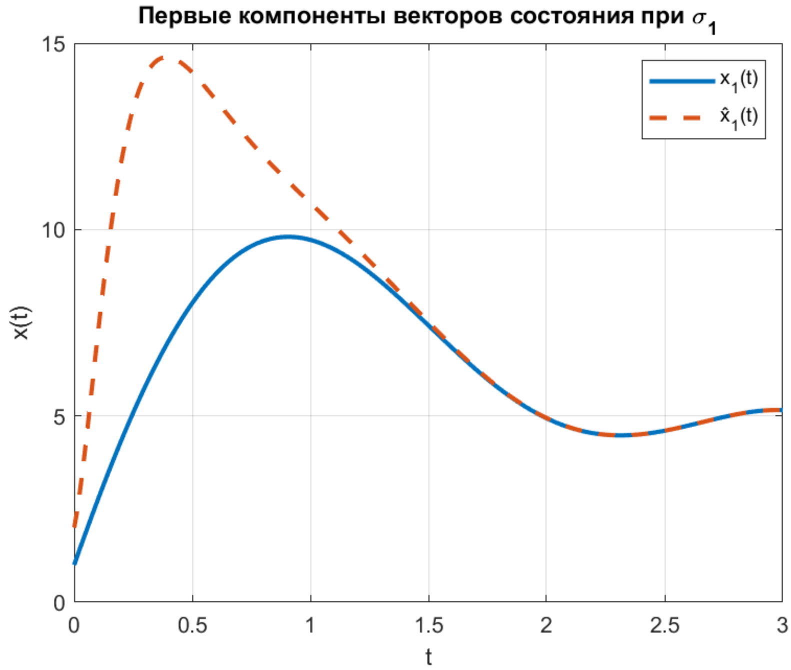

Рис. 11: Векторы состояния системы $x_1(t)$ и наблюдателя $\hat{x}_1(t)$ при σ_1

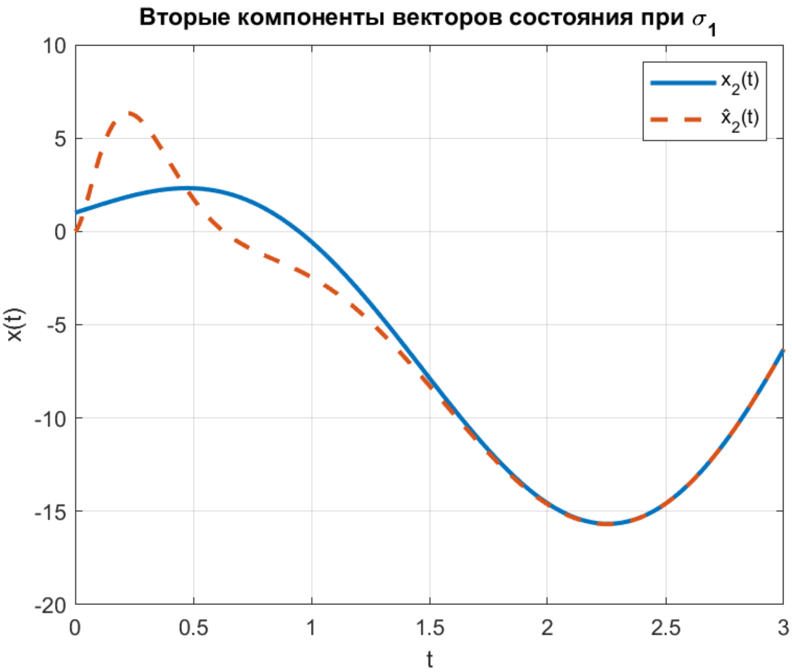

Рис. 12: Векторы состояния системы $x_2(t)$ и наблюдателя $\hat{x}_2(t)$ при σ_1

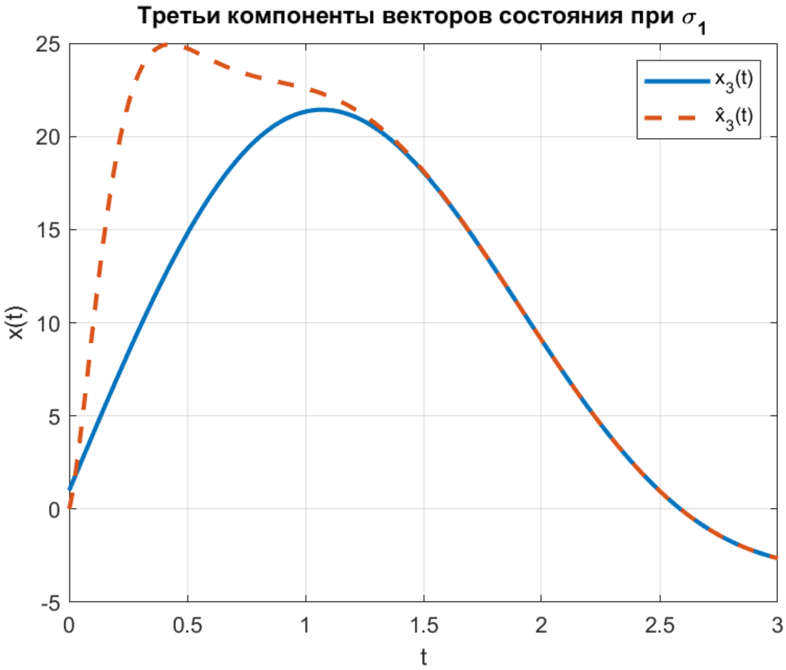

Рис. 13: Векторы состояния системы $x_3(t)$ и наблюдателя $\hat{x}_3(t)$ при σ_1

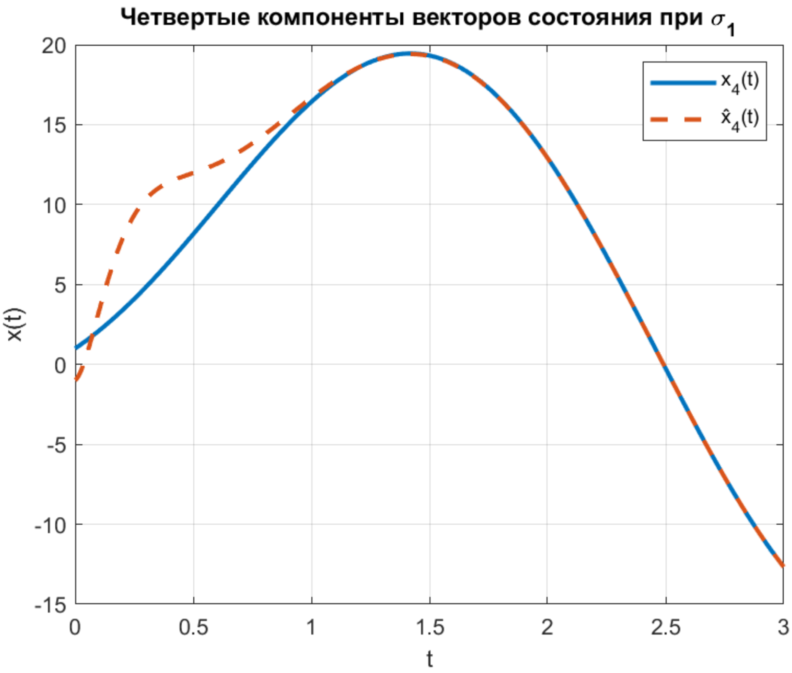

Рис. 14: Векторы состояния системы $x_4(t)$ и наблюдателя $\hat{x}_4(t)$ при σ_1

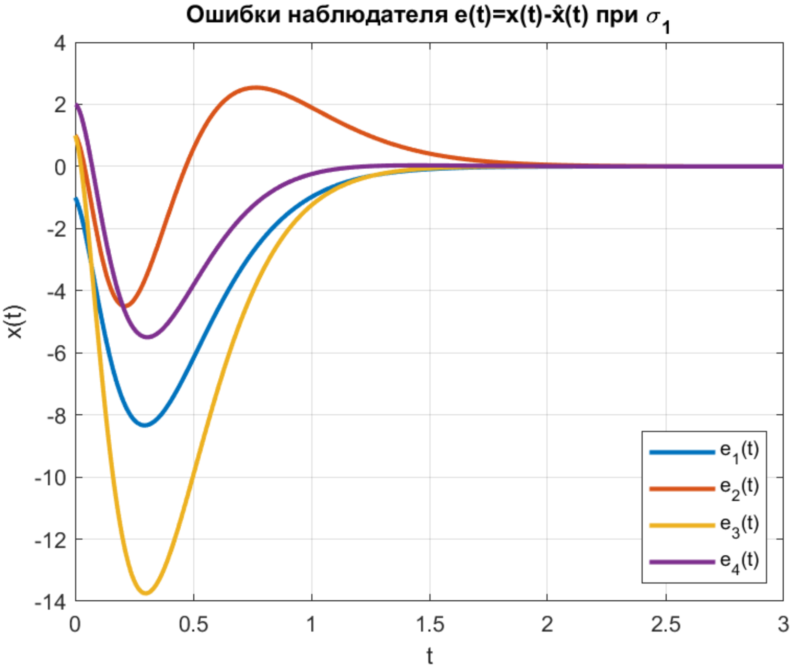

Рис. 15: График ошибки наблюдателя $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ при σ_1

Зададимся такими матрицами G_{σ_2} и Y_{σ_2}, что пара $(G_{\sigma_2}, Y_{\sigma_2})$ является управляемой, а G_{σ_2} имеет необходимый спектр σ_2:

$$G_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6000 \end{bmatrix}, \quad Y_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

С заданными матрицами существует единственное и обратимое решение рассматриваемого уравнения Сильвестра:

$$Q_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 0.2865 & 0.0081 & -0.2514 & 0.1932 \\ 0.0178 & 0.0000 & -0.0175 & 0.0170 \\ 0.0017 & 0.0000 & -0.0017 & 0.0017 \\ 0.0002 & 0.0000 & -0.0002 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

Теперь можем синтезировать матрицу коррекции наблюдателя

L_{σ_2} с использованием полученого:

$$L_{\sigma_2} = Q_{\sigma_2}^{-1} Y_{\sigma_2} \approx \begin{bmatrix} -270681790 \\ 217338652 \\ -404001376 \\ -133312919 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдателя $A + L_{\sigma_2} C_{\sigma_2}$ тогда принимает вид

$$A + L_{\sigma_2} C_{\sigma_2} \approx \begin{bmatrix} 270681810.33 & 5 & -270681806.33 & 270681799.33 \\ -217338645.66 & 1 & 217338647.66 & -217338650.66 \\ 404001407.00 & 9 & -404001400.00 & 404001389.00 \\ 133312926.67 & 4 & -133312924.67 & 133312922.67 \end{bmatrix}$$

И имеет собственными числами

$$\lambda_1 = -6, \quad \lambda_2 = -60, \quad \lambda_3 = -600, \quad \lambda_4 = -6000$$

Следовательно, желаемый спектр σ_2 был достигнут, а значит, задача синтеза наблюдателя полностью решена.

Проведем компьютерное моделирование с начальными условиями системы $x(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ и наблюдателя $\hat{x}(0) = [2, 0, 0, -1]^T$. Сравнительные графики вектора состояний $x(t)$ и наблюдателя $\hat{x}(t)$ при σ_2 приведены на рисунках 16-19, а график ошибки наблюдателя $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ приведен на рисунке 20.

Перейдем к синтезу наблюдателя для спектра σ_3. Выберем матрицы G_{σ_3} и Y_{σ_3} так, чтобы пара $(G_{\sigma_3}, Y_{\sigma_3})$ была управляемой, а G_{σ_3} имела необходимый спектр σ_3:

$$G_{\sigma_3} = \begin{bmatrix} -6 & 7 & 0 & 0 \\ -7 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & -6 \end{bmatrix}, \quad Y_{\sigma_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

С этими матрицами существует единственное и обратимое реше-

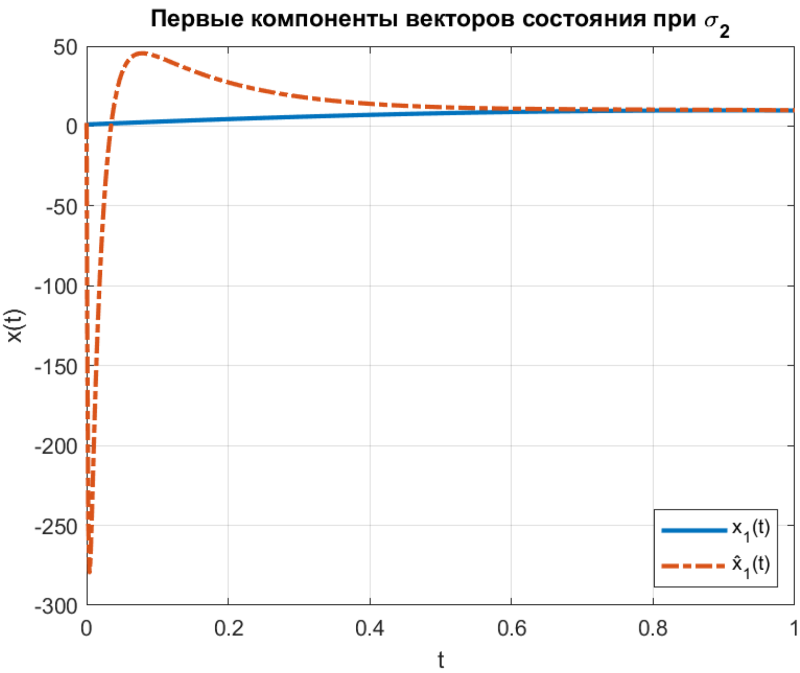

Рис. 16: Векторы состояния системы $x_1(t)$ и наблюдателя $\hat{x}_1(t)$ при σ_2

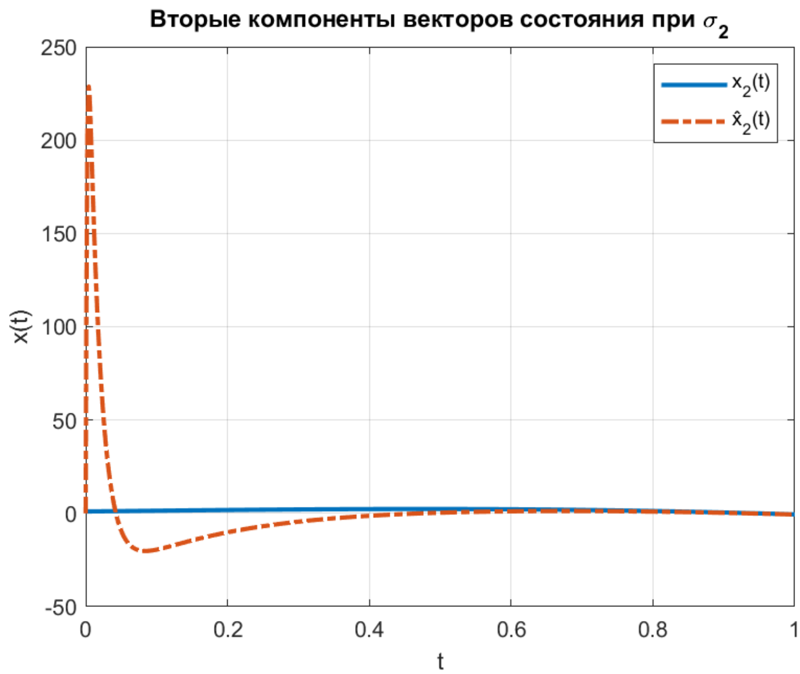

Рис. 17: Векторы состояния системы $x_2(t)$ и наблюдателя $\hat{x}_2(t)$ при σ_2

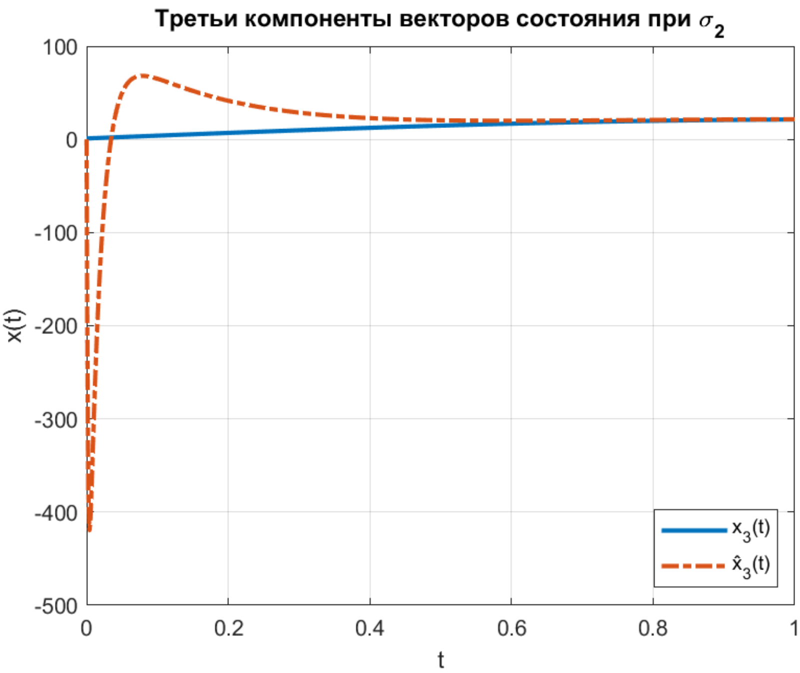

Рис. 18: Векторы состояния системы $x_3(t)$ и наблюдателя $\hat{x}_3(t)$ при σ_2

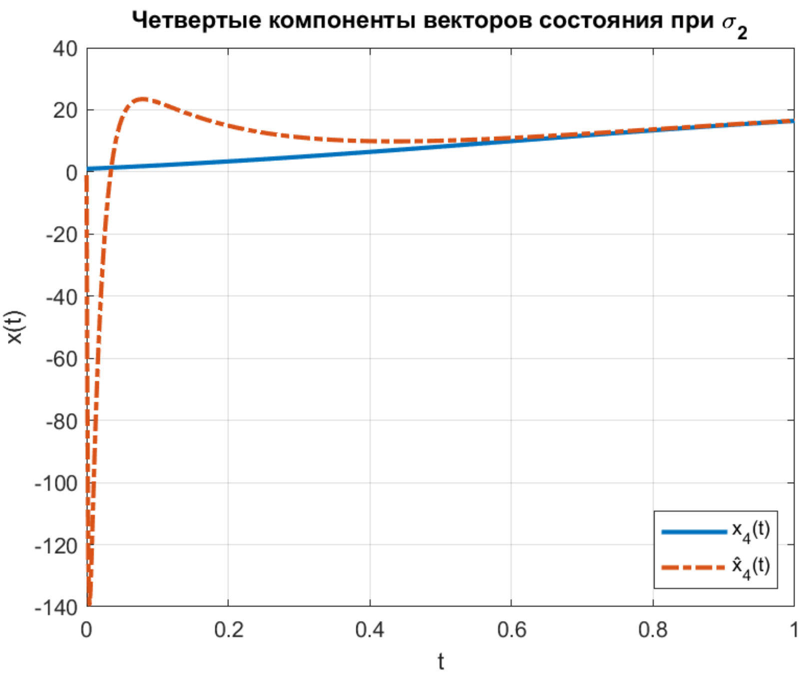

Рис. 19: Векторы состояния системы $x_4(t)$ и наблюдателя $\hat{x}_4(t)$ при σ_2

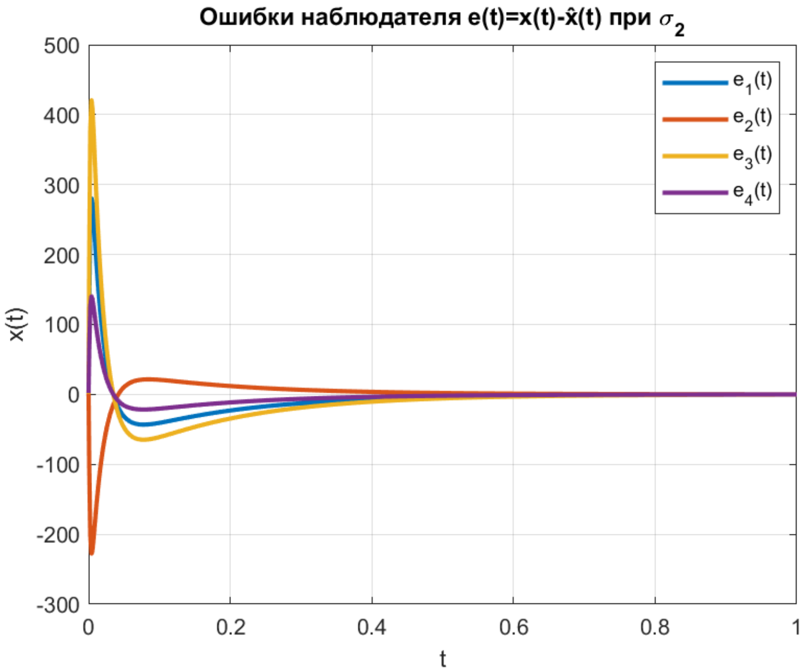

Рис. 20: График ошибки наблюдателя $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ при σ_2

ние рассматриваемого уравнения Сильвестра:

$$Q_{\sigma_3} = \begin{bmatrix} 0.1956 & 0.0001 & -0.1855 & 0.1644 \\ -0.0764 & -0.0048 & 0.0583 & -0.0275 \\ 0.1677 & -0.0008 & -0.1615 & 0.1476 \\ -0.0790 & -0.0038 & 0.0629 & -0.0346 \end{bmatrix}$$

Используя полученную матрицу, синтезируем матрицу коррекции наблюдателя L_{σ_3}:

$$L_{\sigma_3} = Q_{\sigma_3}^{-1} Y_{\sigma_3} = \begin{bmatrix} -1284 \\ 1500 \\ -1752 \\ -444 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученного наблюдателя. Найдем матрицу наблюдателя $A + L_{\sigma_3}C_{\sigma_3}$:

$$A + L_{\sigma_3}C_{\sigma_3} = \begin{bmatrix} 1304 & 5 & -1300 & 1293 \\ -1494 & 1 & 1496 & -1499 \\ 1784 & 9 & -1777 & 1766 \\ 452 & 4 & -450 & 448 \end{bmatrix}$$

Она имеет собственными числами

$$\lambda_{12} = 6 \pm 7i, \quad \lambda_{34} = 6 \pm 8i$$

Желаемый спектр σ_3 был достигнут, а значит, задача синтеза наблюдателя полностью решена.

Проведем компьютерное моделирование с начальными условиями системы $x(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ и наблюдателя $\hat{x}(0) = [2, 0, 0, -1]^T$. Сравнительные графики вектора состояний $x(t)$ и наблюдателя $\hat{x}(t)$ при σ_3 приведены на рисунках 21-24, а график ошибки наблюдателя $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ приведен на рисунке 25.

Сопоставим полученные результаты. Наблюдатель $\hat{x}(t)$ сходится к вектору состояний $x(t)$ при всех трех спектрах, однако наблюдается ситуация, подобная рассматриваемой в пункте 1, - при быстрых желаемых переходных процессах наблюдателя появляются «всплекски» в моделируемом векторе состояний $\hat{x}(t)$ в начальные моменты времени (наглядно это видно на графиках спектра σ_2, представленных на рисунках 16-19 и 20). В реальной жизни наблюдатели используются, например, в задачах построения управления при неполном знании вектора состояний системы. Естественно предположить, что увидев такие сильные отклонения, как при спектре σ_2, управление, основанное на таком наблюдателе, сразу же задаст большое воздействие на объект, что, конечно же, нежелательно, так как сильно «расшатывает» физику, приводит к поломкам и возможным скачкам ещё и в системе.

Спектр σ_3 даёт выраженные колебания в ошибке наблюдателя, однако сходится немного быстрее, чем при σ_1, поведение которого является наиболее плавным, но в то же время относительно медлительным из всех рассматриваемых случаев.

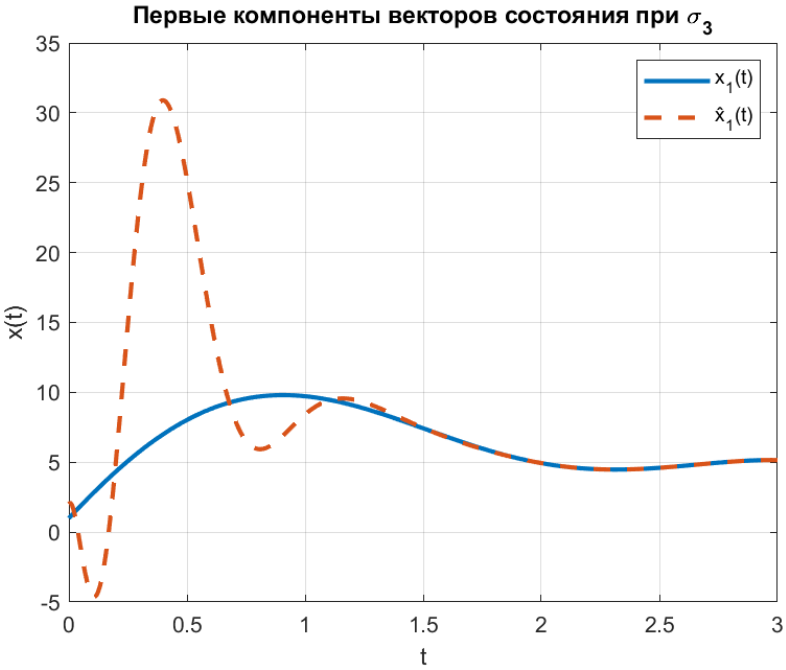

Рис. 21: Векторы состояния системы $x_1(t)$ и наблюдателя $\hat{x}_1(t)$ при σ_3

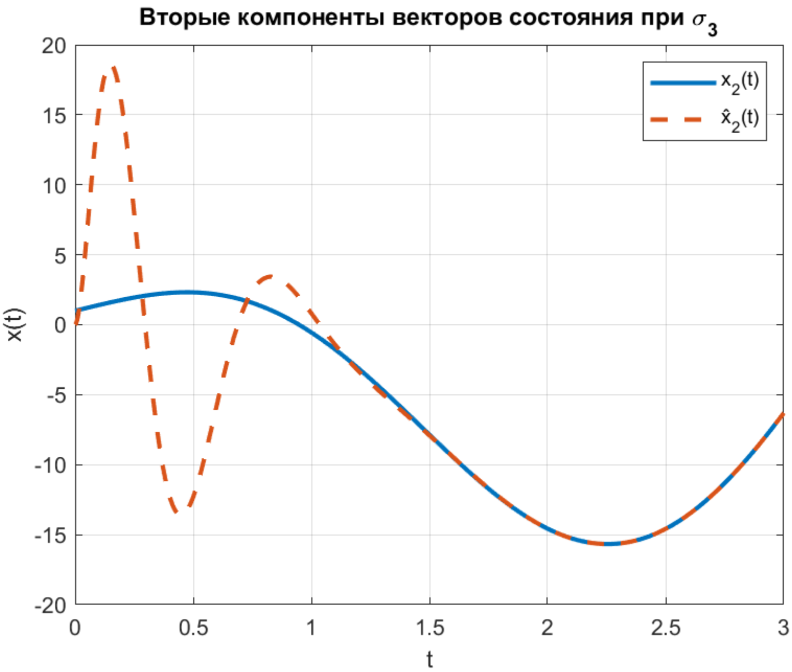

Рис. 22: Векторы состояния системы $x_2(t)$ и наблюдателя $\hat{x}_2(t)$ при σ_3

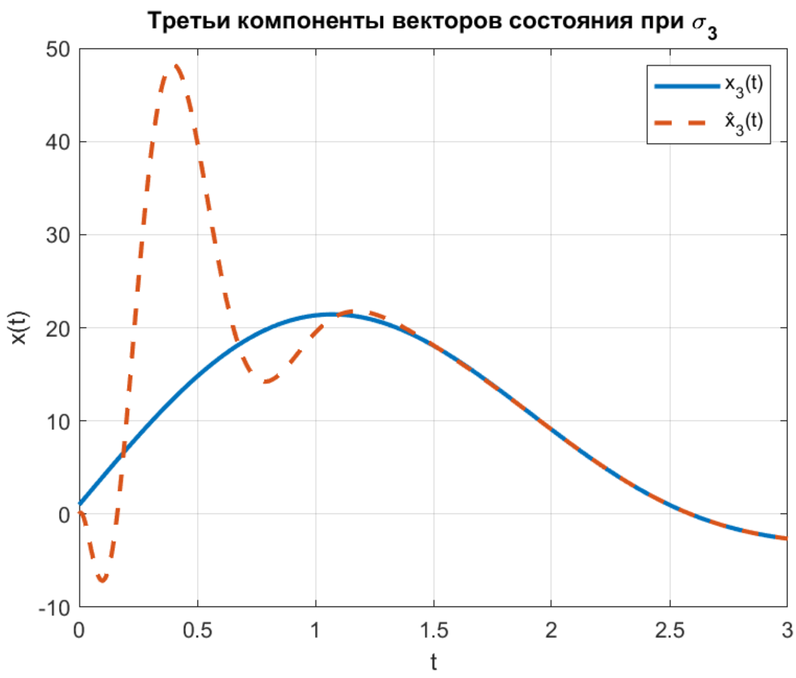

Рис. 23: Векторы состояния системы $x_3(t)$ и наблюдателя $\hat{x}_3(t)$ при σ_3

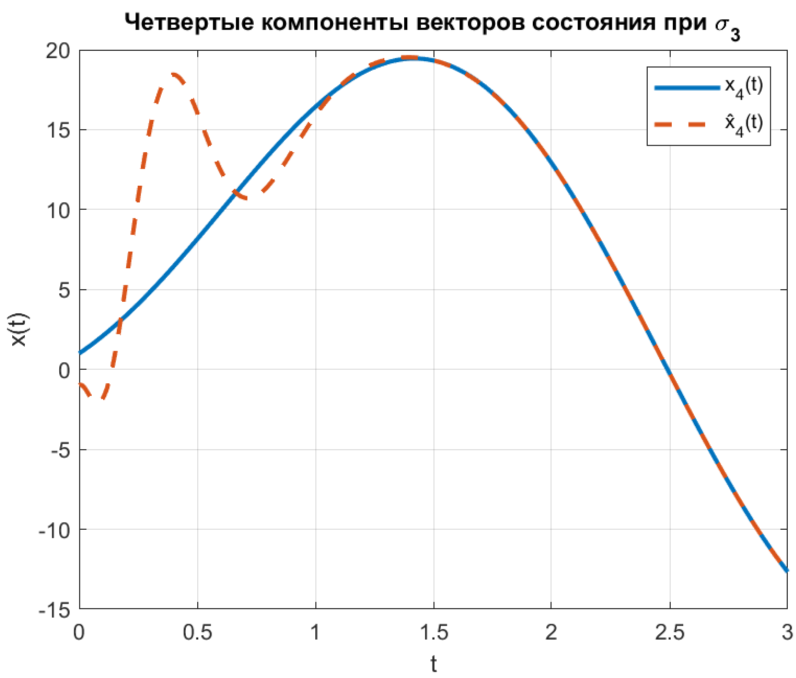

Рис. 24: Векторы состояния системы $x_4(t)$ и наблюдателя $\hat{x}_4(t)$ при σ_3

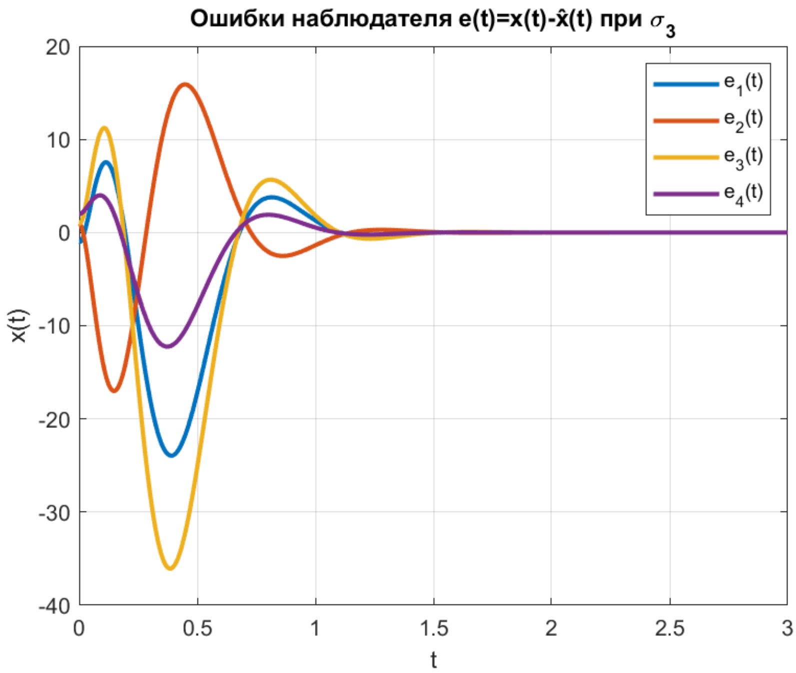

Рис. 25: График ошибки наблюдателя $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ *при* σ_3

В итоге синтез наблюдателя, как и регулятора, полностью основывается на том, какое качество переходных процессов является допустимым, а какое - нет. С учётом всех желаний и нужно выбирать оптимальный спектр для синтеза наблюдателей.

3 Модальное управление по выходу

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

В соответствии с вариантом, матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & 5 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Матрицы C и D задаются же как:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Исследуем управляемость и наблюдаемость системы. Для этого используем Жорданову форму матрицы A, имеющей собственными числами $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = 12$, $\lambda_3 = 4$ и $\lambda_4 = -12$:

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Откуда:

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Видим, что в матрице управления $\hat{B}$ в жордановом базисе нет нулей, а значит, все собственные числа λ_{1-4} управляемы, система - полностью управляемая, следовательно, и стабилизируемая.

Также отметим, что в матрице наблюдения $\hat{C}$ в жордановом базисе имеет четвертый нулевой столбец $\hat{C}_4$, а значит, собственное число $\lambda_4 = -12$ не наблюдаемо. Для остальных собственных чисел же все столбцы $\hat{C}_1 = [0,4]^T \neq 0$, $\hat{C}_2 = [0,8]^T \neq 0$ и $\hat{C}_3 = [4,0]^T \neq 0$ ненулевые - λ_{1-3} наблюдаемы. В итоге получилось, что система является частично наблюдаемой, но обнаруживаемой, так как $\Re(\lambda_4) < 0$.

Итак, перейдем к задаче модального управления по выходу. Для начала построим схему моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящем из наблюдателя состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + (B + LD)u + L(C\hat{x} - y)$ и закона управления $u = K\hat{x}$. Рисунок 26 как раз представляет собой данную схему в среде Simulink.

Теперь зададимся парой *достижимых* спектров σ_r и σ_n для регулятора и наблюдателя соответственно, обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Спектр σ_r можно брать

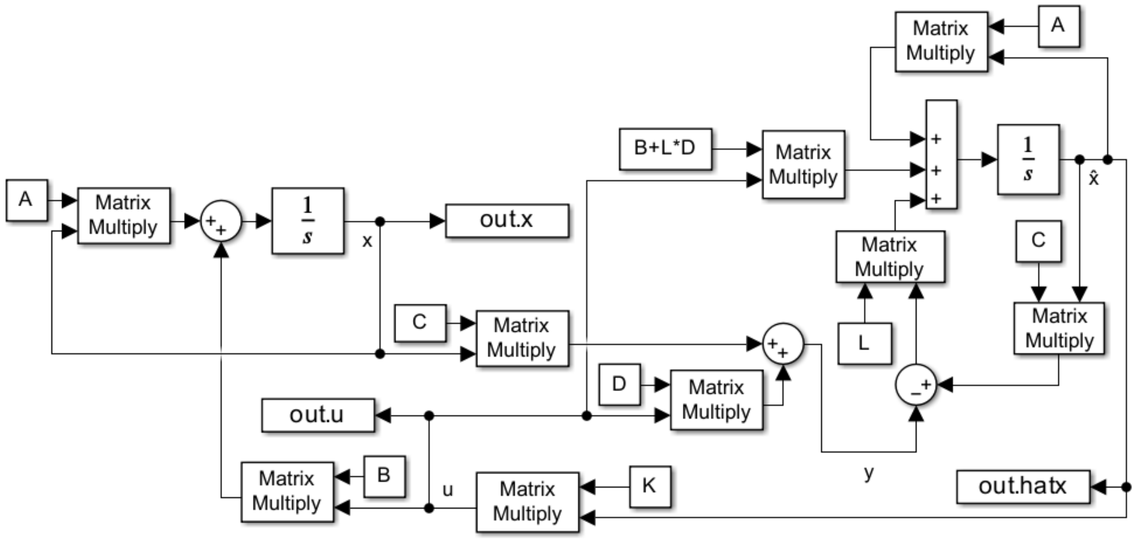

Рис. 26: Схема моделирования модального управления по выходу

любым, так как система является полностью управляемой. На σ_n же действует ограничение в виде ненаблюдаемости $\lambda_4 = -12$ - его необходимо включить в спектр (здесь работает та же логика, что и при неуправляемом собственном числе - какую бы матрицу L наблюдателя не сформировали, в матрице наблюдения $\hat{C}$ будет нулевой столбец, соответствующий λ_4 и оставляющий его жорданову клетку в матрице наблюдателя $\hat{A} + L\hat{C}$ неизменной - значит, спектр содержит λ_4), остальные собственные числа же можно брать любыми. По итогу возьмем, например, такие спектры:

$$\sigma_r = \{-13, -13, -14, -14\}, \quad \sigma_n = \{-11, -11, -12, -12\}$$

Модальное управление по выходу по своей сути является регулятором, объединенным с наблюдателем. Их также можно синтезировать по-отдельности. Начнём с регулятора. Зададимся матрицей G_r, имеющей спектр σ_r:

$$G_r = \begin{bmatrix} -13 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}$$

Теперь возьмём матрицу Y_r таким образом, чтобы пара (Y_r, G_r) была наблюдаемой:

$$Y_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Итак, решим уравнение Сильвестра относительно матрицы P:

$$AP - PG_r = BY_r$$

Так как пара (A, B) управляема, (Y_r, G_r) наблюдаема, а спектры матриц A и G_r не пересекаются, то существует единственное и обратимое решение уравнения Сильвестра. Найдем его:

$$P \approx \begin{bmatrix} 2.9954 & 5.9969 & 1.4940 & 2.2452 \\ 3.0846 & 6.0863 & 1.5829 & 2.3346 \\ 3.1223 & 6.1277 & 1.6171 & 2.3720 \\ -2.7977 & -5.7891 & -1.3060 & -2.0481 \end{bmatrix}$$

Итак, матрица K коэффициентов обратной связи регулятора:

$$K = -Y_r P^{-1} = \begin{bmatrix} 169.2232 & 105.8420 & -199.7036 & 75.3615 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученного регулятора. Найдем матрицу замкнутой системы $A + BK$:

$$A + BK \approx \begin{bmatrix} 343.4463 & 206.6840 & -408.4071 & 153.7230 \\ 1010.3389 & 640.0521 & -1201.2214 & 461.1689 \\ 1006.3389 & 632.0521 & -1193.2214 & 457.1689 \\ 341.4463 & 220.6840 & -394.4071 & 155.7230 \end{bmatrix}$$

Она имеет собственными числами

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -13, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -14$$

Желаемый спектр σ_r был достигнут, а значит, задача синтеза регулятора полностью решена. Перейдем к наблюдателю. Так как пара (A, C) является частично наблюдаемой, то обратимого решения уравнения Сильвестра

$$GA - QA = YC$$

не существует, поэтому воспользуемся усечением Жордановой формы системы $\hat{A}$ и $\hat{C}$ на наблюдаемые собственные числа, а после дополним найденную матрицу коррекции наблюдателя нулевыми строками, соответствующим ненаблюдаемым собственным числам, и перейдем к исходному базису. В итоге получаем:

$$\hat{A}' = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Теперь зададимся матрицей G_n, имеющей спектр σ_n:

$$G_n = \begin{bmatrix} -11 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Также возьмём матрицу Y_n таким образом, чтобы пара (G_n, Y_n) была управляемой:

$$Y_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Теперь пара $(\hat{A}', \hat{C}')$ управляема, спектры матриц G_n и $\hat{A}'$ не пересекаются, и пара (G_n, Y_n) управляема, а значит, существует единственное и обратимое решение уравнения Сильвестра:

$$G_n Q - Q\hat{A}' = Y_n \hat{C}'$$

Итак, матрица Q:

$$Q \approx \begin{bmatrix} -0.1536 & -0.3629 & -0.2844 \\ -0.1481 & -0.3478 & -0.2667 \\ -0.1429 & -0.3333 & -0.2500 \end{bmatrix}$$

Откуда усеченная матрица коррекции наблюдателя в жордановом базисе принимает вид:

$$\hat{L}' = Q^{-1}Y_n = \begin{bmatrix} -106.312 & -106.312 \\ 49.594 & 49.594 \\ -9.375 & -9.375 \end{bmatrix}$$

Дополним её нулевыми строками, соответствующими ненаблюдаемым собственным числам, и перейдем к исходному базису:

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} -106.312 & -106.312 \\ 49.594 & 49.594 \\ -9.375 & -9.375 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow L = T\hat{L} = \begin{bmatrix} 146.5312 & 146.5312 \\ -47.3437 & -47.3437 \\ -165.2812 & -165.2812 \\ -66.0937 & -66.0937 \end{bmatrix}$$

Проверим теперь корректность полученного наблюдателя. Найдем матрицу замкнутой системы $A + LC$:

$$A + LC = \begin{bmatrix} 298.0625 & 288.0625 & -9.0000 & 589.1250 \\ -99.6875 & -89.6875 & -3.0000 & -180.3750 \\ -339.5625 & -333.5625 & 5.0000 & -656.1250 \\ -129.1875 & -123.1875 & 5.0000 & -259.3750 \end{bmatrix}$$

Она имеет собственными числами

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -11, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -12$$

Желаемый спектр σ_n был достигнут, а значит, задача синтеза наблюдателя полностью решена.

Перейдем к компьютерному моделированию системы с начальными условиями $x(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ и $\hat{x}(0) = [0, 0, 0, 0]^T$ для наблюдателя. На рисунке 27 изображен график управления, на рисунках 28-31 - графики состояния системы и наблюдателя, на рисунке 32 - график ошибки оценок.

Таким образом, задача модального управления по выходу решена. Регулятор успешно стабилизировал систему, сведя все компоненты состояния к нулю, используя оценку наблюдателя, всё является асимптотически устойчивым. Ошибка оценки со временем также стремится к нулю, вначале же она примерно равна 25 (в пике).

Рис. 27: Управление системы при модальном управлении по выходу

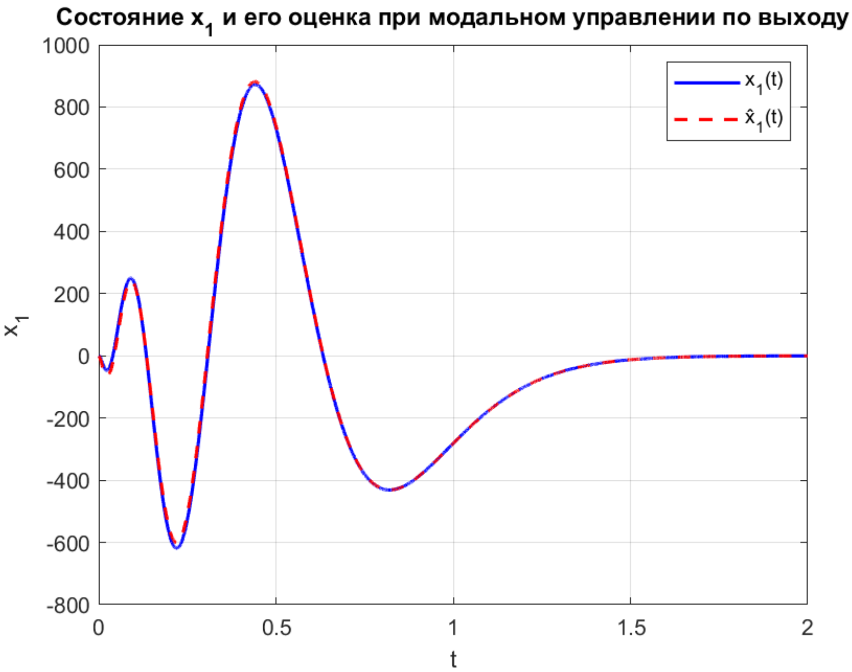

Рис. 28: Первая компонента состояния при модальном управлении по выходу

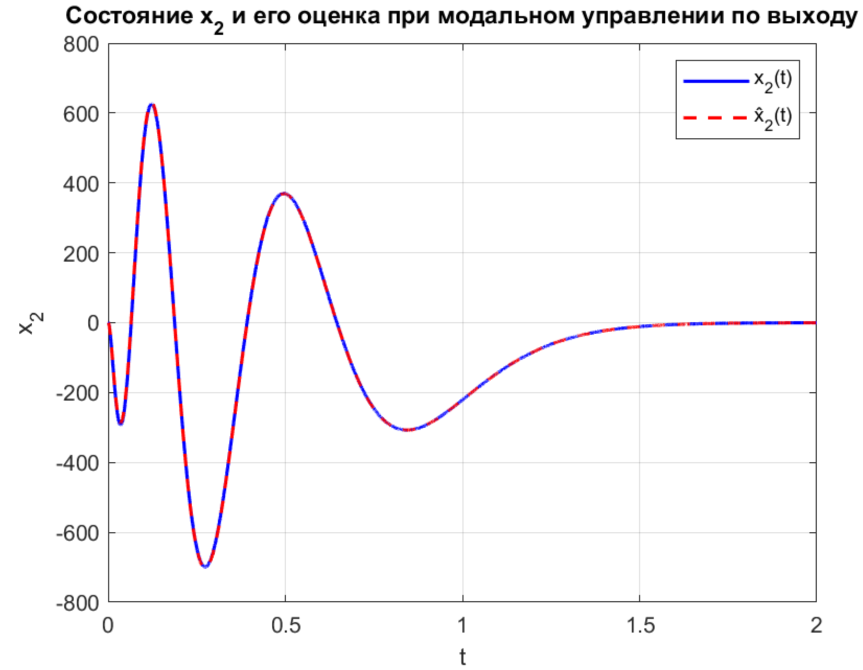

Рис. 29: Вторая компонента состояния при модальном управлении по выходу

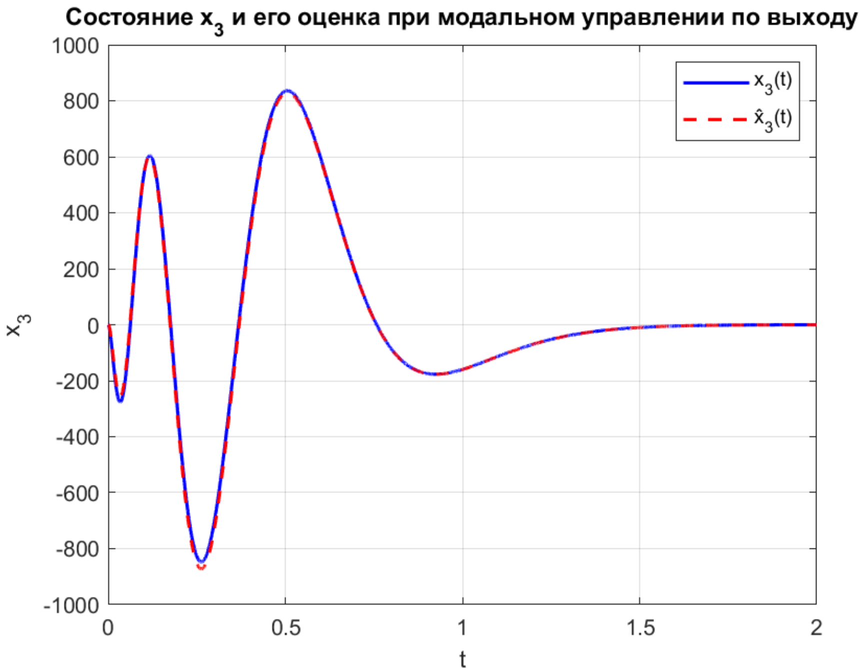

Рис. 30: Третья компонента состояния при модальном управлении по выходу

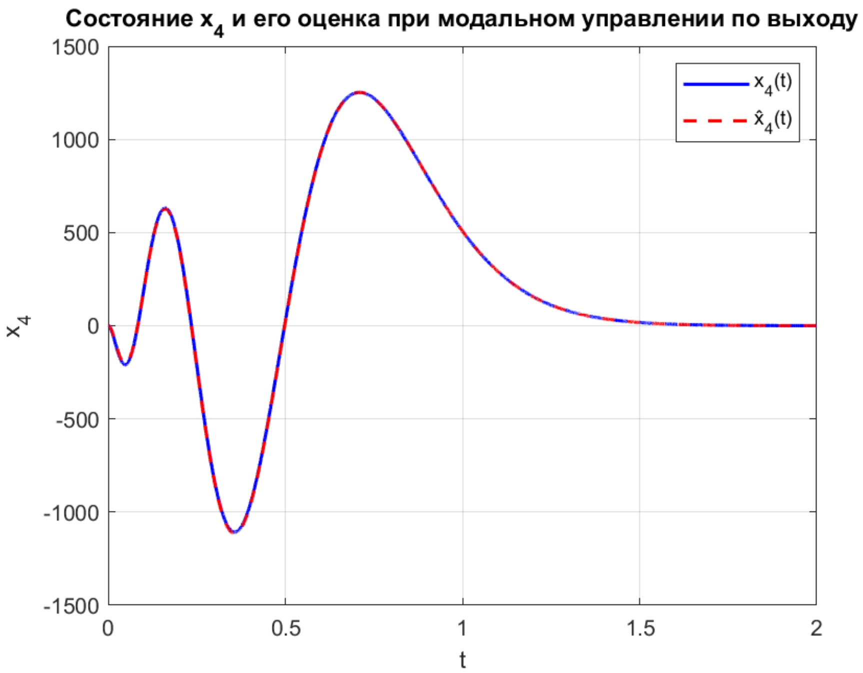

Рис. 31: Четвертая компонента $x(t)$ при модальном управлении по выходу

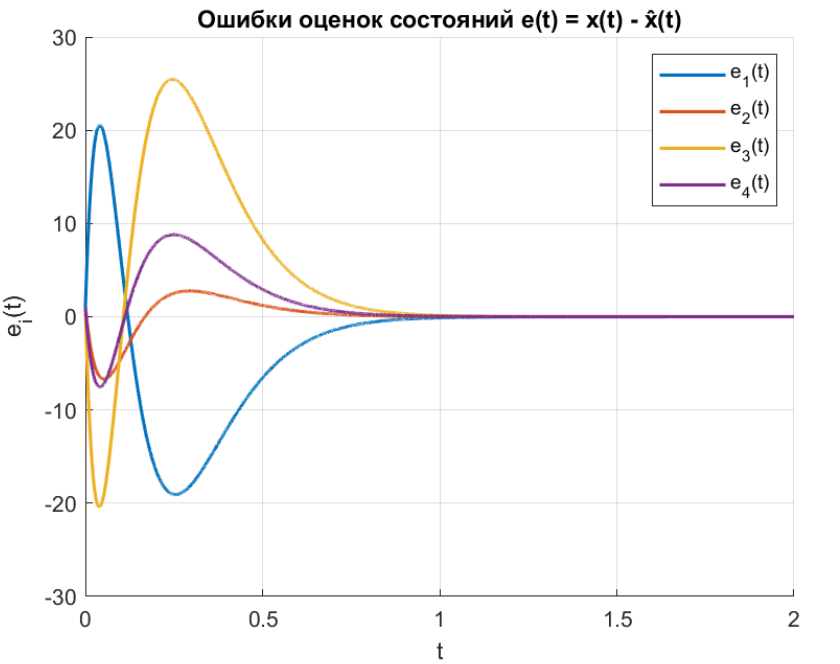

Рис. 32: График ошибки оценки при модальном управлении по выходу

4 Наблюдатель пониженного порядка

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

В соответствии с заданием, матрицы A, B и D остались теми же:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & 5 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Матрица C же изменилась и теперь имеет вид:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Выходит, напрямую собираются компоненты состояния x_2 и x_4, задач наблюдателя в данном случае будет оценить x_1 и x_3, беря значения остальных компонент как данность из выхода.

Проведем анализ управляемости и наблюдаемости системы и её собственных чисел. Для этого используем Жорданову форму системы с матрицей A, имеющей собственными числами

$$\lambda_1 = 16, \quad \lambda_2 = 12, \quad \lambda_3 = 4, \quad \lambda_4 = -12$$

Откуда Жорданова форма $\hat{A}$ и матрица перехода T к ней:

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Получаем:

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

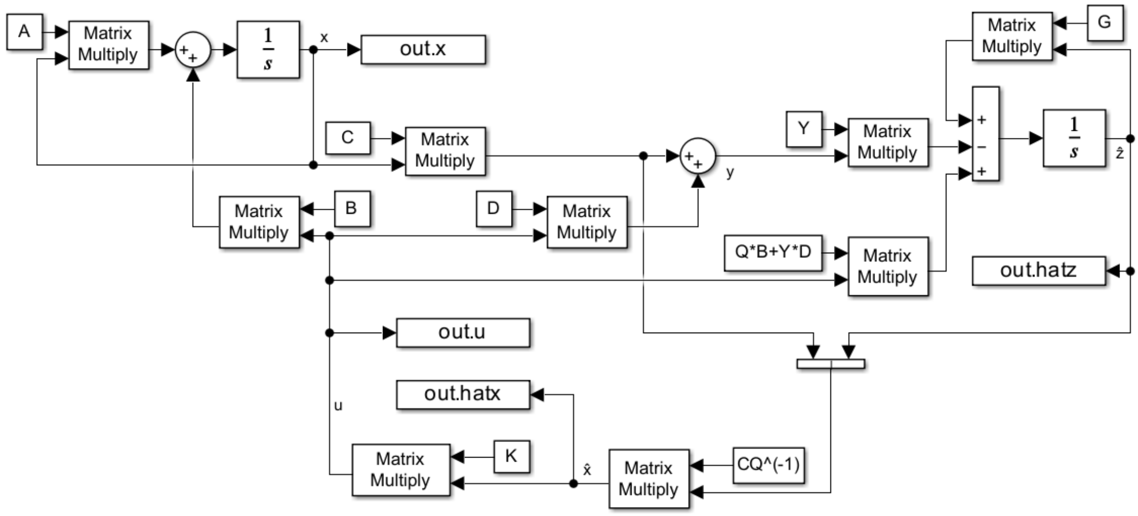

Рис. 33: Схема моделирования наблюдателя пониженного порядка

Так как пара (A, B) осталась той же, что и в предыдущем пункте, то и система имеет то же качество управляемости: так как матрица управления $\hat{B}$ не имеет нулевых столбцов, то все собственные числа управляемы, а значит, система является полностью управляемой.

Матрица C видоизменилась, в Жордановом базисе теперь отсутствуют нулевые столбцы, а значит, все собственные числа λ_{1-4} системы теперь наблюдаемы, сама система же полностью наблюдаема.

Перейдем к синтезу наблюдателя пониженного порядка. Сначала построим схему моделирования системы, замкнутую регулятором, состоящем из наблюдателя *пониженного порядка*

$$\dot{\hat{z}} = G\hat{z} - Yy + (QB + YD)u, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y - Du \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Cx \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

Схема моделирования приведена на рисунке 33. В качестве модального регулятора K используем матрицу, найденную в предыдущем пункте (задача управления $u(t) = K\hat{x}(t)$ здесь, как и прежде, стабилизировать систему):

$$K = \begin{bmatrix} 169.2232 & 105.8420 & -199.7036 & 75.3615 \end{bmatrix}$$

Зададимся желаемым спектром $\sigma = \{-5, -6\}$ матрицы наблюдателя пониженного порядка G, обеспечивающим асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Матрица G в этом случае:

$$G = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Также выберем матрицу Y таким образом, чтобы пара (G, Y) была полностью управляемой:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Наконец, синтезируем матрицу Q путем решения соответствующего уравнения Сильвестра:

$$GA - QA = YC$$

Откуда:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.3315 & 0.1727 & 0.3035 & 0.0934 \\ -0.3641 & 0.1120 & -0.3978 & 0.2073 \end{bmatrix}$$

В итоге пара (A, C) является полностью наблюдаемой, (G, Y) - управляемой, а собственные числа матриц A и G не пересекаются, следовательно, существует обратная от матрицы $N = \begin{bmatrix} C & Q \end{bmatrix}^T$. Также G гурвицева, и выполнен успешный синтез матрицы Q, решающей уравнение Сильвестра, а значит, димамическая система с уравнением $\dot{\hat{z}} = G\hat{z} - Yy + (QB + YD)u$ будет выполнять функции наблюдателя. Таким образом, синтезирован наблюдатель пониженного порядка:

$$\hat{x} = N^{-1} \begin{bmatrix} y \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

Выполним моделирование полученной с начальными условиями системы $x(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ и наблюдателя $\hat{z}(0) = [0, 0]^T$. На рисунке 34 изображен график управления, на рисунках 35-39 - графики состояния системы и наблюдателя, на рисунке 40 - график ошибки оценки состояния.

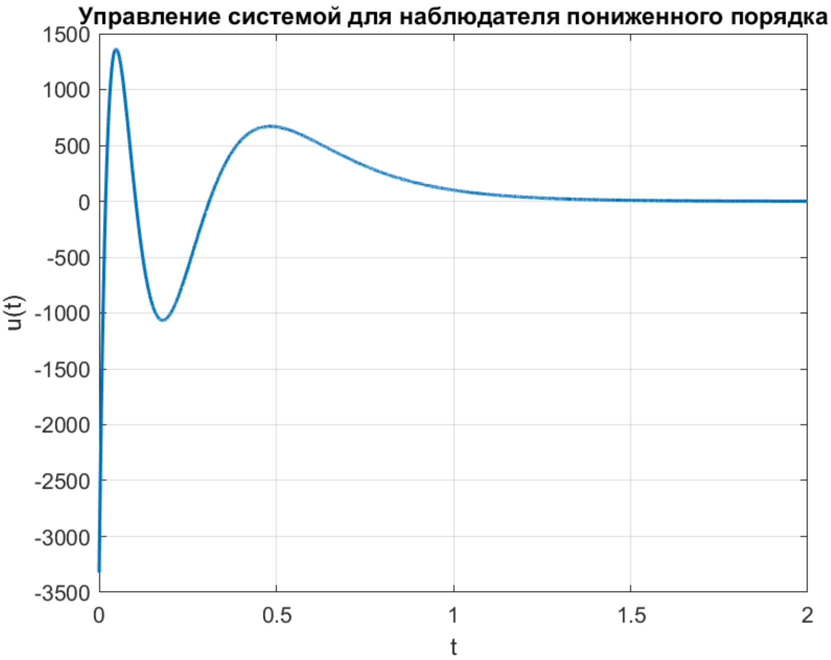

Рис. 34: Управление системы при наблюдателе пониженного порядка

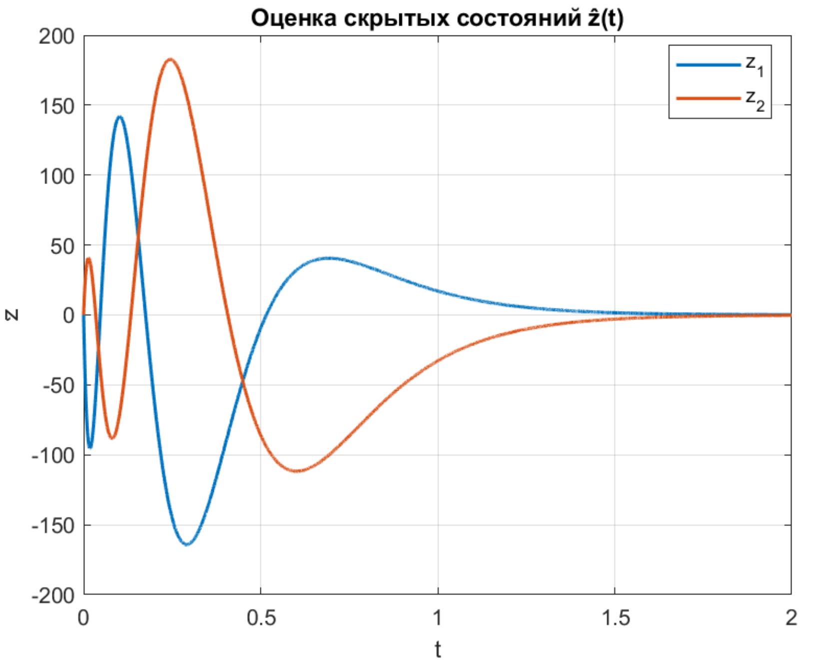

Рис. 35: Вектор состояния наблюдателя пониженной размерности

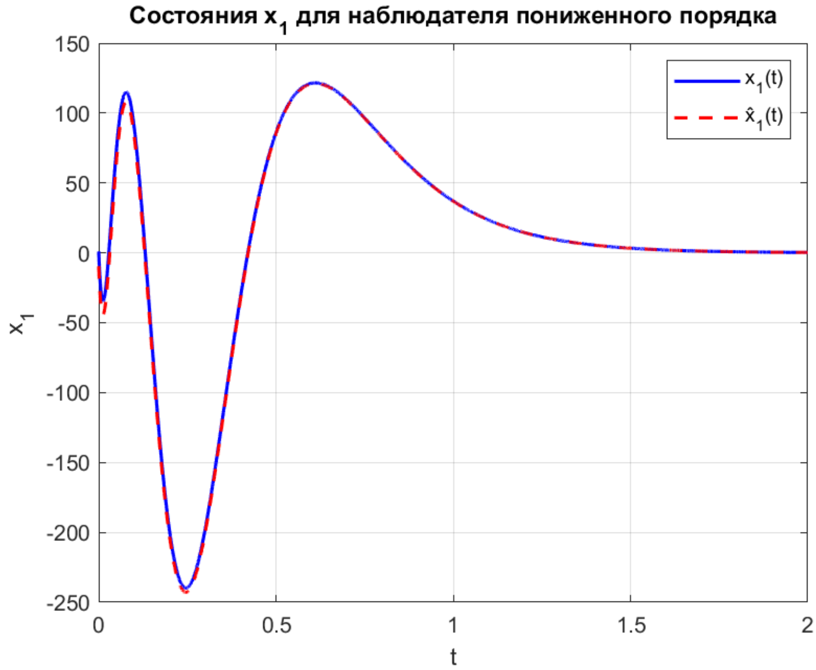

Рис. 36: Первая компонента x_1 при наблюдателе пониженного порядка

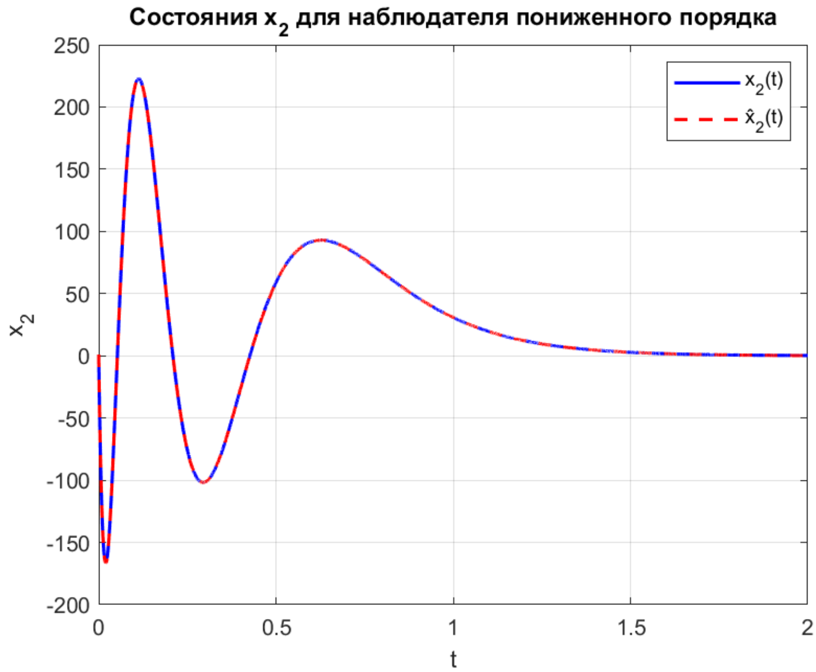

Рис. 37: Вторая компонента x_2 при наблюдателе пониженного порядка

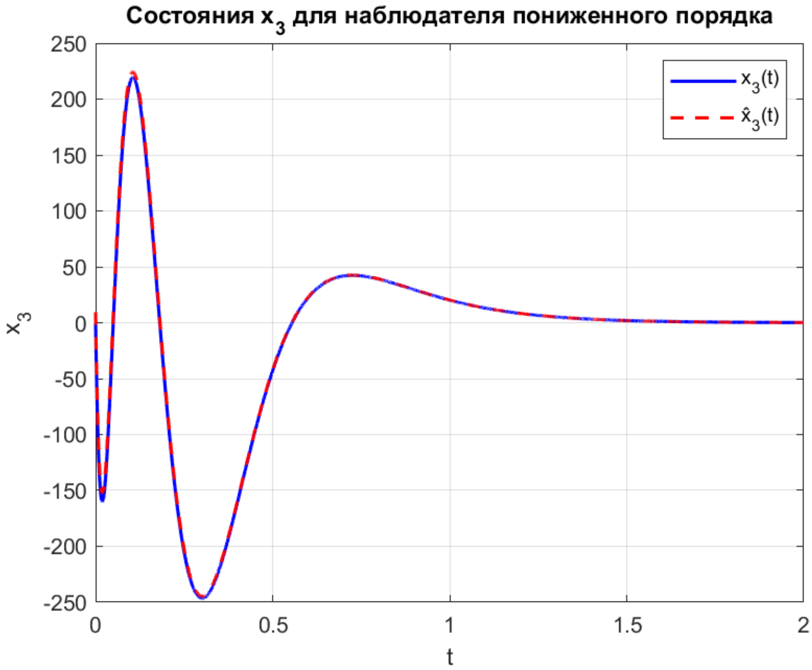

Рис. 38: Третья компонента x_3 при наблюдателе пониженного порядка

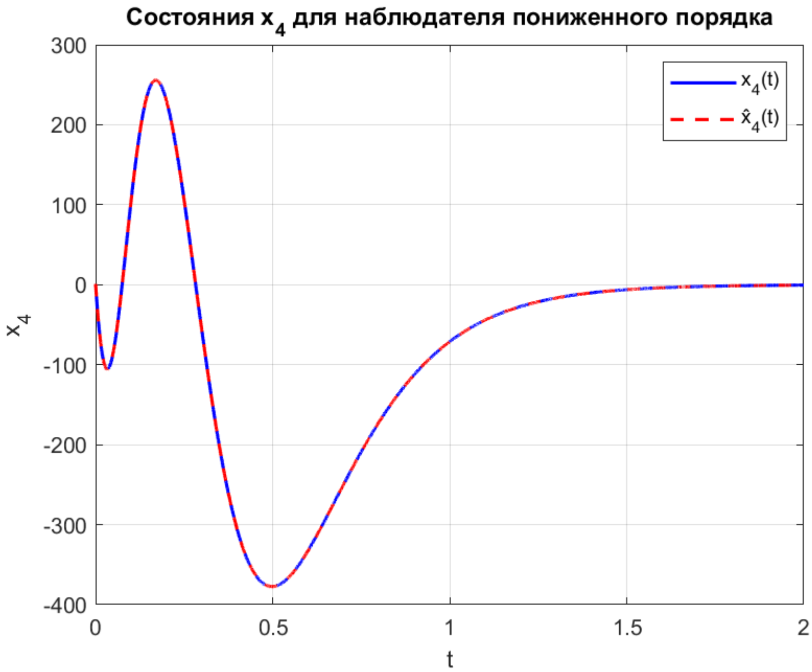

Рис. 39: Четвертая компонента x_4 при наблюдателе пониженного порядка

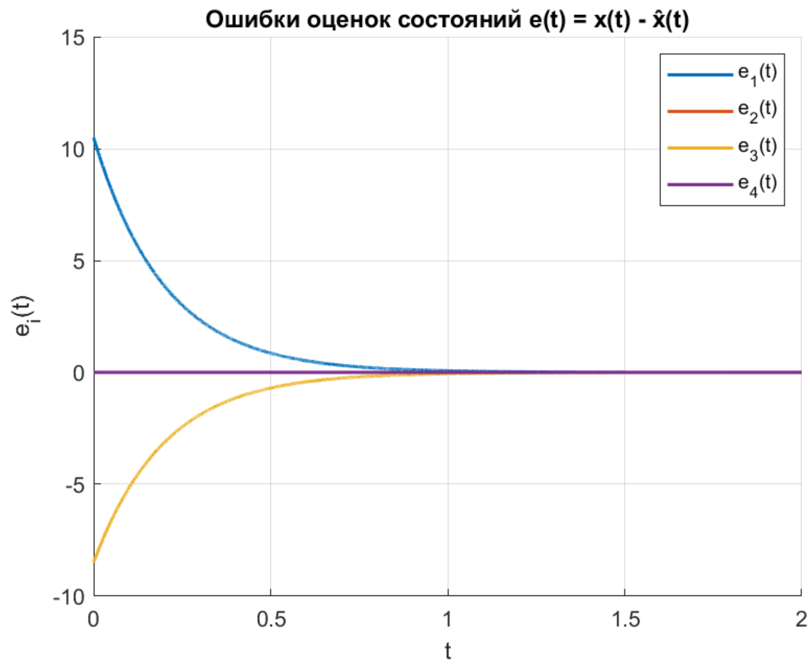

Рис. 40: График ошибки оценки при наблюдателе пониженного порядка

Таким образом, задача синтеза наблюдателя пониженного порядка решена. Моделирование подтвердило все полученные результаты: наблюдатель успешно оценил состояние x_1 и x_3, которые не наблюдаются напрямую через матрицу наблюдения C, быстро свёл первоначальную ошибку к нулю (визуально при одной секунде ошибка оценки уже равна нулю), а регулятор стабилизировал систему, сведя все компоненты состояния к нулю.

5 Общие выводы

В результате выполнения лабораторной работы были исследованы модальные регуляторы и наблюдатели разных типов, был проведён процесс их синтеза с использованием уравнений Сильвестра, получены возможные ограничения на желаемые значения спектров замкнутых систем.

Также была получена обратная взаимосвязь между перерегулированием и скоростью сходимости оценок (для наблюдателей) и состояний системы (для регуляторов).

Все задачи выполнены успешно, регуляторы и наблюдатели работают корректно как по-отдельности, так и в паре, а всё изученное подтверждается моделированием.