Научно-исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №1
Нелинейные системы
Точки равновесия и локальные регуляторы

Выполнили студенты Мовчан Игорь Евгеньевич
Ибахаев Зубайр Руслан-Бекович
Белоус Савва Эрнестович
Преподаватель Зименко Константин Александрович

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Точки равновесия систем

1.1 Первая система

Пусть система задана следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 = f_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 = f_2 \end{cases}$$

Найдем все её точки равновесия, учитывая определение $\dot{x} = 0$:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_1^3 + x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1(x_1^2 - 1) = 0 \\ x_2 = -x_1 \end{cases}$$

Получаем следующие точки:

$$x_1^* = (0, 0), \quad x_2^* = (1, -1), \quad x_3^* = (-1, 1)$$

Определим типы изолированных состояний равновесия. Для этого дополнительно вычислим матрицу Якоби системы:

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 6x_1^2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим каждую точку в отдельности.
Начнём с x_1^*. Матрица Якоби:

$$J(x_1^*) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Откуда её собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_1^*)) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{12} = -1 \pm i \Rightarrow \Re(\lambda_{12}) = -1 < 0$$

Следовательно, тип состояния равновесия - **устойчивый фокус**.
Далее, возьмём x_2^* и x_3. Их матрица Якоби:

$$J(x_2^*) = J(x_3^*) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Из которой получаем собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_2^*)) = \det(\lambda I - J(x_3^*)) = \lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_{12} = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

Они имеют отрицательную и положительную вещественные части, а значит, точки являются **седловыми**.

1.2 Вторая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 \end{cases}$$

Найдём точки равновесия:

$$\begin{cases} x_1 + x_1 x_2 = 0 \\ -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения: $x_1(1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ или $x_2 = -1$
Случай 1: $x_1 = 0$, тогда второе уравнение:

$$-x_2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2(x_2 - 1) = 0 \Rightarrow x_2 \in \{0; 1\}$$

Случай 2: $x_2 = -1$, тогда второе уравнение:

$$x_1^3 + x_1 - 2 = 0 \Rightarrow (x_1 - 1)(x_1^2 + x_1 + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

Итого, получаем все изолированные точки равновесия:

$$x_1^* = (0, 0), \quad x_2^* = (0, 1), \quad x_3^* = (1, -1)$$

Аналогично предыдущему пункту рассмотрим каждую из них в отдельности для определения типа равновесия. Для начала найдем линеаризацию системы через матрицу Якоби:

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 + x_2 & x_1 \\ x_2 - 3x_1^2 & -1 + 2x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

Теперь рассмотрим каждую точку.

Начнём с x_1^*. Матрица Якоби:

$$J(x_1^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа представлены явно на диагонали:

$$\lambda_{12} = \pm 1$$

Они имеют как положительые действительные части, так и отрицательные, поэтому точка равновесия является **седлом**.

Далее, возьмём x_2^*. Матрица Якоби:

$$J(x_2^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Откуда собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_2^*)) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1 \Rightarrow \Re(\lambda_{12}) > 0$$

Они имеют положительные вещественные части, поэтому точка имеет тип равновесия - **неустойчивый узел**.

Наконец, примем x_3^*. Матрица Якоби:

$$J(x_2^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_3^*)) = \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{12} = -1 \pm i\sqrt{3} \Rightarrow \Re(\lambda_{12}) = -1 < 0$$

Действительные части отрицательны, есть мнимые числа, поэтому тип равновесия рассматриваемой точки - **устойчивый фокус**.

1.3 Третья система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 + 0.1x_1^4) \end{cases}$$

Найдем точки равновесия, приравняв производные к нулю:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2(1 - x_1^2 + 0.1x_1^4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Получаем единственную точку:

$$x_1^* = (0, 0)$$

Линеаризуем систему, найдя матрицу Якоби:

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x_1x_2 + 0.4x_1^3x_2 & 1 - x_1^2 + 0.1x_1^4 \end{bmatrix}$$

Для определения типа равновесия изолированного состояния подставим точку в приближение:

$$J(x_1^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Найдём собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_1^*)) = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{12} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Re(\lambda_{12}) = \frac{1}{2} > 0$$

Следовательно, точка является **неустойчивым фокусом**.

1.4 Четвёртая система

Система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

Найдем точки равновесия, приравняв правые части к нулю:

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ (x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases}$$

Случай 1: $1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ (окружность)

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Все точки на окружности с центром $x_0 = (0, 0)$ и радиусом $R = 1$ являются точками равновесия.

Случай 2: $1 - x_1^2 - x_2^2 \neq 0$, тогда:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

Все точки равновесия:

$$x_1^* = (0, 0), \quad x_2^* = \text{точки на окружности } x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Причем отметим, что первая точка - изолированная, так как в окрестности неё нет других точек равновесия, а вторая - нет.

Определми тип изолированного состояния равновесия x_1^*. Для этого линеаризуем систему, вычислив матрицу Якоби системы в этой точке, предварительно сократив на ненулевой член $1 - x_1^2 - x_2^2 \neq 0$:

$$J(x_1^*) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Откуда собственные числа:

$$\lambda_{12} = 1 \pm i \Rightarrow \Re(\lambda_{12}) = 1 > 0$$

Следовательно, точка равновесия x_1^* - **неустойчивый фокус**.

Далее, перейдем к анализу неизолированного состояния равновесия x_2^* через переход к полярной системе координат:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\theta) \\ x_2 = r\sin(\theta) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} r^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right) \end{cases}$$

Вычислим производную $\dot{r}$:

$$2r\dot{r} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

$$\dot{r} = \frac{x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2}{r}$$

Подставляем $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$:

$$x_1\dot{x}_1 = x_1(x_1 - x_2)(1 - r^2) = (x_1^2 - x_1x_2)(1 - r^2)$$

$$x_2\dot{x}_2 = x_2(x_1 + x_2)(1 - r^2) = (x_1x_2 + x_2^2)(1 - r^2)$$

Складываем:

$$x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = (x_1^2 + x_2^2)(1 - r^2) = r^2(1 - r^2)$$

Таким образом:

$$\dot{r} = \frac{r^2(1 - r^2)}{r} = r(1 - r^2)$$

Вычислим производную $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2} \cdot \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{x_1^2} = \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{r^2}$$

Посчитаем отдельно числитель:

$$x_1\dot{x}_2 = x_1(x_1 + x_2)(1 - r^2) = (x_1^2 + x_1x_2)(1 - r^2)$$

$$x_2\dot{x}_1 = x_2(x_1 - x_2)(1 - r^2) = (x_1x_2 - x_2^2)(1 - r^2)$$

Вычитаем:

$$x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 = (x_1^2 + x_2^2)(1 - r^2) = r^2(1 - r^2)$$

Таким образом:

$$\dot{\theta} = \frac{r^2(1 - r^2)}{r^2} = 1 - r^2$$

Итоговая система в полярной системе координат тогда:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 - r^2 \end{cases}$$

Проведем небольшой анализ движения системы:

- При $0 < r < 1$: $\dot{r} > 0$ - траектории удаляются
- При $r = 1$: $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$ - предельный цикл
- При $r > 1$: $\dot{r} < 0$ - траектории приближаются к циклу

Значит, предельный цикл $r = 1$ является **устойчивым**. Все точки цикла - точки равновесия.

Он также соответствует неизолированной системе точек равновесия x_2^*, поэтому для них можно сделать те же самые заключения.

1.5 Пятая система

Примем систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

Приравняем производную координат к нулю $\dot{x} = 0$ и решим систему, найдя точки равновесия:

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1^3 \\ x_1(1 - x_1^8) = 0 \end{cases}$$

Рассматриваем только действительные переменные, поэтому итоговые точки равновесия:

$$x_1^* = (0, 0), \quad x_2^* = (1, 1), \quad x_3^* = (-1, -1)$$

Найдём их тип, используя линеаризацию через матрицу Якоби:

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим каждую точку в отдельности.
Начнём с x_1^*. Матрица Якоби в этой точке:

$$J(x_1^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_1^*)) = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{12} = \pm 1$$

Их вещественные части могут быть и положительными, и отрицательными, поэтому тип равновесия - **седло**.

Перейдём к x_2^*. Матрица Якоби:

$$J(x_2^*) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_2^*)) = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -4 \Rightarrow \Re(\lambda_{12}) < 0$$

Действительные части отрицательны, поэтому тип изолированной точки равновесия - **устойчивый фокус**.

Наконец, рассмотрим x_3^*.

Значение матрицы Якоби в ней будет давать те же результаты, что и в предыдущем случае, поэтому можно сделать те же выводы - точка является **устойчивым фокусом**.

1.6 Шестая система.

Система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_2^3 x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

Вычислим точки равновесия, приравняв правые части к 0:

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2^3 = 0 \\ x_2^3 x_1 - x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^3 = x_2^3 \\ x_2^3(x_1 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2(x_1 - 1) = 0 \end{cases}$$

Точки равновесия:

$$x_1^* = (0, 0), \quad x_2^* = (1, 1)$$

Линеаризуем систему через матрицу Якоби:

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 \\ x_2^3 & 3x_1x_2^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

Определеим тип каждой точки равновесия по очереди.
Начнём с x_2^*. Матрица Якоби:

$$J(x_2^*) = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Её собственные числа:

$$\det(\lambda I - J(x_2^*)) = \lambda^2 + 3\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Вещественные части принимают как отрицательные, так и положительные значения, поэтому тип неизолированной точки равновесия - **седло**.

Далее, рассмотрим x_1*. Матрица Якоби в этой точке:

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

По ней невозможно получить какую-либо информацию о типе - нужен более детальный разбор системы через функцию Ляпунова:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{4}x_2^4$$

Проверим её производную:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 = x_1^3(-x_1^3 + x_2^3) + x_2^3(x_1x_2^3 - x_2^3)$$

$$\dot{V} = -x_1^6 + x_1^3x_2^3 + x_1x_2^6 - x_2^6$$

Сгруппируем члены:

$$\dot{V} = -x_1^6 - x_2^6 + x_1^3x_2^3 + x_1x_2^6$$

Оценим знак в малой окрестности начала координат. Используем неравенство Юнга при $= q = 2$:

$$|x_1^3x_2^3| \leq \frac{1}{2}x_1^6 + \frac{1}{2}x_2^6$$

Также отметим, что $x_1x_2^6$ пренебрежимо мало в сравнении с другими членами более низких порядков. Таким образом:

$$\dot{V} \leq -x_1^6 - x_2^6 + \frac{1}{2}x_1^6 + \frac{1}{2}x_2^6 + O(\|x\|^7) = -\frac{1}{2}x_1^6 - \frac{1}{2}x_2^6 + O(\|x\|^7)$$

В достаточно малой окрестности начала координат при $x \neq 0$:

$$\dot{V} < 0$$

Значит, точка x_1^* является **асимптотически устойчивой**.

1.7 Седьмая система

Рассмотрим нелинейную систему с тремя переменными:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_3 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 = x_1x_3 - x_2^3 - \sin x_1 \end{cases}$$