

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по лабораторной работе №1
Моделирование и устойчивость
Вариант 11

Выполнили студенты

Мовчан Игорь Евгеньевич
Боглачев Артём Сергеевич
Краснов Александр Юрьевич

Преподаватель

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Влияние дискретного элемента	2
2 Исследование устойчивости	3
3 Построение командных генераторов	5

1 Влияние дискретного элемента

Реализуем схему с дискретным элементом с периодом дискретизации $T = 0.2$ с и коэффициентом передачи ОУ $K_{CO} = 7.2$:

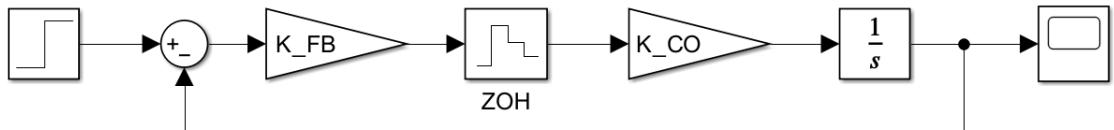


Рис. 1: Система с дискретным элементом

Выведем разностное уравнение этой схемы. На выходе экстраполатора нулевого порядка имеем $u(t) = u[k]$ при $t \in [kT, (k+1)T]$. Тогда интегратору на вход подается постоянная величина, а значит

$$y((k+1)T) = y(kT) + K_{CO}T u[k]$$

Откуда при компактном обозначении $y[k] = y(kT)$:

$$y[k+1] = y[k] + K_{CO}T u[k]$$

Далее, учитывая, что $u[k] = K_{FB}(r[k] - y[k])$:

$$y[k+1] = (1 - K_{FB}K_{CO}T)y[k] + K_{FB}K_{CO}Tr[k]$$

В данном случае $r[k]$ - дискретный входной сигнал от $r(t)$ в моменты времени $t = kT$. Для рассматриваемой схемы

$$r(t) = g(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Нейтральная граница $z = 1$, колебательная $z = -1$.

Затухающие колебания при $-1 \leq z < 0$, максимальные при $z = -1$, при $z < -1$ - расходящиеся колебания. При $z \geq 0$ - отсутствие колебаний. При $0 \leq z \leq 1$ - затухание. При $z > 1$ - расходящиеся экспоненты.

Оптимальное по быстродействию значение $z = 0$.

2 Исследование устойчивости

Рассмотрим непрерывный ОУ, заданный уравнением $\ddot{y} = u$, где $u(t)$ - управляющее воздействие, $y(t)$ - выходная величина.

Зададимся $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$, а значит, $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, а $\dot{x}_2(t) = u(t)$. Тогда модель в форме вход-состояние-выход будет:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = A_{\text{H}}x + B_{\text{H}}u$$

Дискретизируем ее с использованием выражений:

$$A = e^{A_{\text{H}}T} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{\text{H}}^i T^i}{i!}, \quad B = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{\text{H}}^{i-1} T^i}{i!} B_{\text{H}}$$

Заметим, что $A^2 = 0$, а значит, $A^n = 0$ для любого $n \geq 2$. Тогда

$$A = I + A_{\text{H}}T = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = TB_{\text{H}} + \frac{A_{\text{H}}T^2 B_{\text{H}}}{2} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

Теперь зададим управляющее воздействие в виде

$$u(k) = -Kx(k) = -[k_1 \ k_2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

А также матрицу динамики замкнутой системы:

$$F = A - BK = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - [k_1 \ k_2] \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - k_1 T^2/2 & T - k_2 T \\ -k_1 T^2/2 & 1 - k_2 T \end{bmatrix}$$

Характеристический полином для замкнутой системы тогда:

$$\begin{aligned} P(z) &= \det(zI - F) = \begin{vmatrix} z - 1 + k_1 T^2/2 & -T + k_2 T \\ k_1 T^2/2 & z - 1 + k_2 T \end{vmatrix} = \\ &= (z - 1 + k_1 T^2/2)(z - 1 + k_2 T) - (-T + k_2 T)(k_1 T^2/2) = \\ &= z^2 + z(-2 + k_1 T^2/2 + k_2 T) + (1 - k_1 T^2/2 - k_2 T + k_1 T^3/2) \end{aligned}$$

С помощью матрицы M размерности 2×2 такой, что $x = M\xi$ и существует M^{-1} , перейдем к базису ξ системы, где матрица F была бы диагональной и имела собственными числами z_1 и z_2 :

$$F_d = M^{-1}FM = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}, \quad \xi(m+1) = F_d\xi(m), \quad \xi_i(m) = z_i^m \xi(0)$$

Характеристический полином замкнутой системы в этом случае:

$$P(z) = \det(zI - F_d) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2$$

Зная, что при переходе в новый базис характеристический полином остается тем же:

$$\det(zI - F_d) = \det(M^{-1}(zI - F)M) = \det(zI - F)$$

Получаем систему уравнений на коэффициенты k_1 и k_2 :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 - k_1T^2/2 - k_2T \\ z_1z_2 = 1 - k_1T^2/2 - k_2T + k_1T^3/2 \end{cases}$$

Решим ее аналитически с введенными $s = z_1 + z_2$ и $p = z_1z_2$:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{2(1-s+p)}{T^3} \\ k_2 = \frac{2-s}{T} - \frac{1-s+p}{T^2} \end{cases}$$

Отлично! Теперь можно синтезировать матрицу K по желаемым корням z_1 и z_2 замкнутой системы, а также взятому периоду дискретизации $T = 0.2$ с. Рассмотрим пять случаев:

$$1. \ z_1 = 0.1 \text{ и } z_2 = 0.7: \text{ обратная связь } K_1 = [67.5 \ -0.75]^T$$

$$2. \ z_1 = -1.2 \text{ и } z_2 = -0.4: \text{ обратная связь } K_2 = [770 \ -59]^T$$

$$3. \ z_1 = 0.1 \text{ и } z_2 = 0.5: \text{ обратная связь } K_3 = [112.5 \ -4.25]^T$$

$$4. z_{12} = \pm 1.2j: \text{ обратная связь } K_4 = [610 \ -51]^T$$

$$5. z_{12} = -0.8 \pm 0.7j: \text{ обратная связь } K_5 = [932.5 \ -75.25]^T$$

Наконец, осуществим моделирование полученных систем с начальными условиями $y(0) = 1$ и $\dot{y}(0) = 0$. Переходный процесс при входе $r(t) = g(t)$.

3 Построение командных генераторов

Синтезируем командный генератор гармонического сигнала вида $g(k) = A \sin(kT\omega)$ с параметрами из варианта:

$$T = 0.2 \text{ с}, \quad A = -1.3, \quad \omega = 0.87 \text{ рад/с}$$

Найдем разностное уравнение для этого сигнала:

$$g(k+1) = A \sin((k+1)T\omega) = A(\sin(kT\omega) \cos(T\omega) + \cos(kT\omega) \sin(T\omega))$$

Введем переменные состояния:

$$x_1(k) = g(k) = A \sin(kT\omega), \quad x_2(k) = A \cos(kT\omega)$$

Тогда система уравнений для состояний:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) \cos(T\omega) + x_2(k) \sin(T\omega) \\ x_2(k+1) = -x_1(k) \sin(T\omega) + x_2(k) \cos(T\omega) \end{cases}$$

Запишем эту систему в матричном виде:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(T\omega) & \sin(T\omega) \\ -\sin(T\omega) & \cos(T\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = Ax(k)$$

Это и будет итоговое разностное уравнение для командного генератора. Начальные условия при этом:

$$x_1(0) = A \sin(0) = 0, \quad x_2(0) = A \cos(0) = A$$

Далее синтезируем дискретную модель возмущения $g(k) = A + BkT + C(kT)^2$ с параметрами из варианта:

$$A = 5, \quad B = 5.5, \quad C = 1.5$$

Разностное уравнение для этого сигнала:

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \\ \xi_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix} = \Gamma_d \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \end{bmatrix}$$

где

$$\Gamma_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \ 0 \ 0]$$

А также

$$g(k) = H\Gamma_d^k \xi(0)$$

Начальные условия

$$\xi(0) = \begin{bmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \\ \xi_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A + BT + CT^2 \\ A + 2BT + 3CT^2 \end{bmatrix}$$