Научно-исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №3

Синтез оптимального регулятора
для линейного стационарного объекта

Вариант 21

Выполнил студент Мовчан Игорь Евгеньевич, R3480
Проверил преподаватель Парамонов Алексей Владимирович

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Построение оптимального регулятора

Рассмотрим линейный объект с начальными условиями $x(0)$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Матрицы возьмём согласно варианту:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Будем строить регулятор с отрицательной обратной связью вида

$$u = -Kx$$

Расчет будем производить на основе уравнения Риккати относительно положительно определенной матрицы $P \succ 0$:

$$A^T P + PA + Q - Pbr^{-1}b^T P = 0$$

Матрицу $Q \succcurlyeq 0$ и параметр $r > 0$ примем из варианта

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r = 5$$

А матрицу K обратной связи будем расчитывать через

$$K = r^{-1} b^T P$$

При такой постановке задачи минимизируется критерий качества

$$J = \int_0^\infty x^T(\tau) Q x(\tau) + r u^2(\tau) d\tau$$

Из его вида можем предположить, что чем больше Q относительно r, тем более важно скорее «заглушить» $x(\tau)$ (достигается большее быстродействие системы), а чем больше r относительно Q, тем это быстродействие меньше, как и максимальные значения управления.

Итак, произведём расчёт регулятора при принятых матрицах и параметрах. Решение уравнения Риккати даёт матрицу

$$P = \begin{bmatrix} 7.806 & 1.551 \\ 1.551 & 0.416 \end{bmatrix} \succ 0$$

Из этого находим обратную связь оптимального регулятора

$$K = r^{-1} b^T P = \begin{bmatrix} 1.8715 & 0.3934 \end{bmatrix}$$

Проведем моделирование с найденным управлением и начальными условиями $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Результаты приведены на рисунках 1-3. Установившееся значения критерия качества $J_{min} \approx 7.8062$.

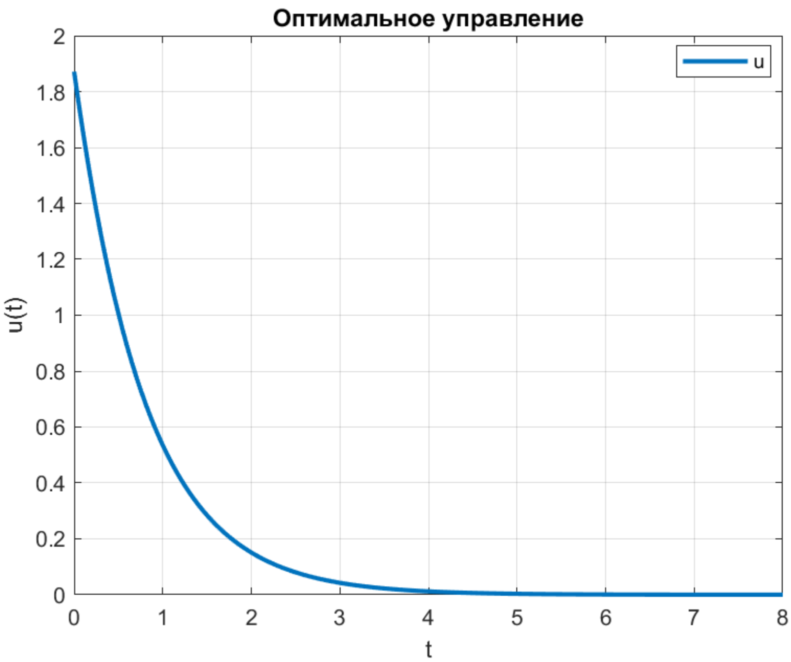

Рис. 1: График управляющего воздействия при оптимальном регуляторе

Можем видеть, что регулятор успешно стабилизирует систему с ненулевыми начальными условиями, а критерий качества со временем достигает минимально возможной оценки $J_{min} = x(0)^T P x(0)$.

Чтобы доказать минимальность установившегося значения критерия качества, стоит незначительно отклонить расчётную матрицу

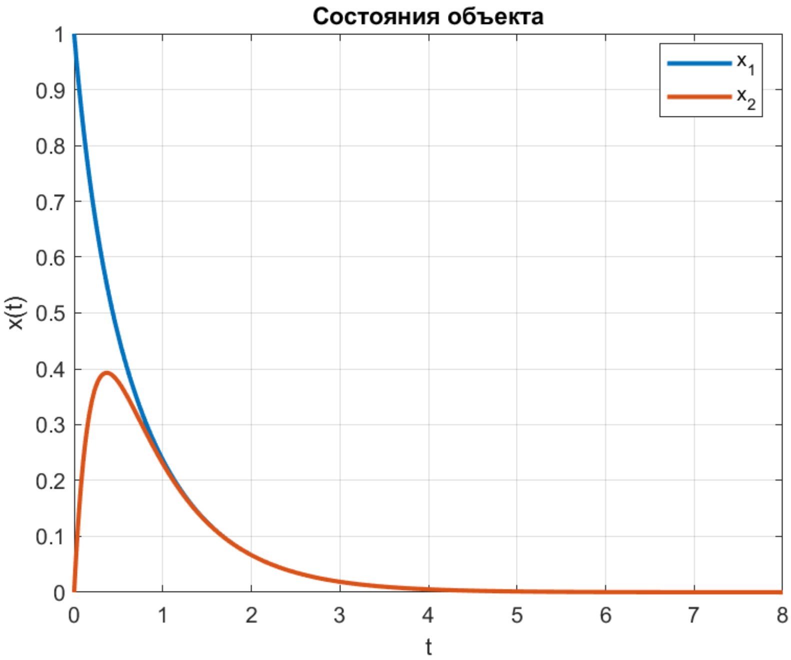

Рис. 2: Графики переменных состояния объекта при оптимальном регуляторе

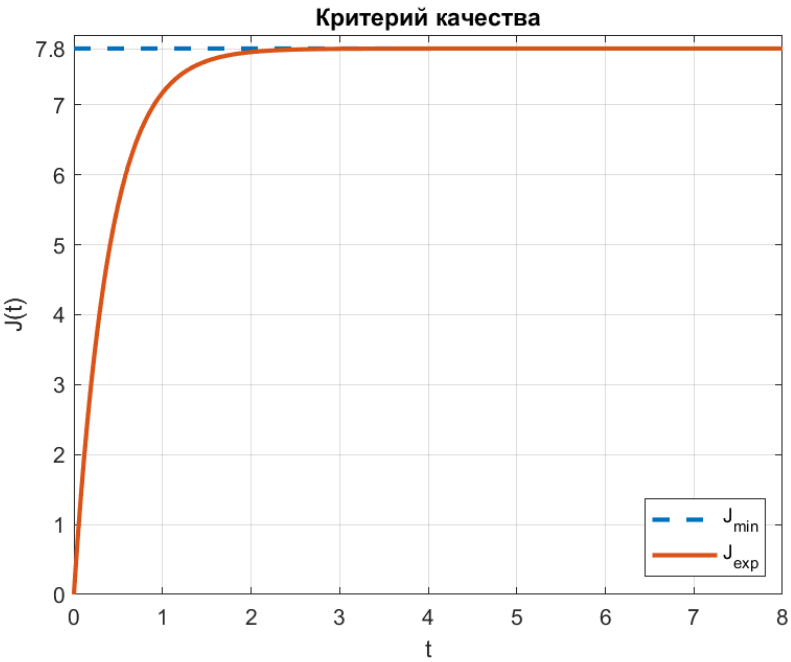

Рис. 3: График изменения минимизируемого критерия качества

обратной связи K регулятора и убедиться, что в этом случае предельное значение функционала J больше J_{min}. Сделаем это.

2 Оптимальность найденного регулятора

Итак, немного отклоним матрицу обратной связи регулятора так, чтобы система сохранила устойчивость, до

$$K' = \begin{bmatrix} 2 & 0.525 \end{bmatrix} = K + \begin{bmatrix} 0.1285 & 0.1316 \end{bmatrix}$$

Повторим моделирование с условиями $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Результаты приведены на рисунках 4-6. Установившееся значение функционала качества $J_{stab} \approx 7.8604 > J_{min} \approx 7.8062$.

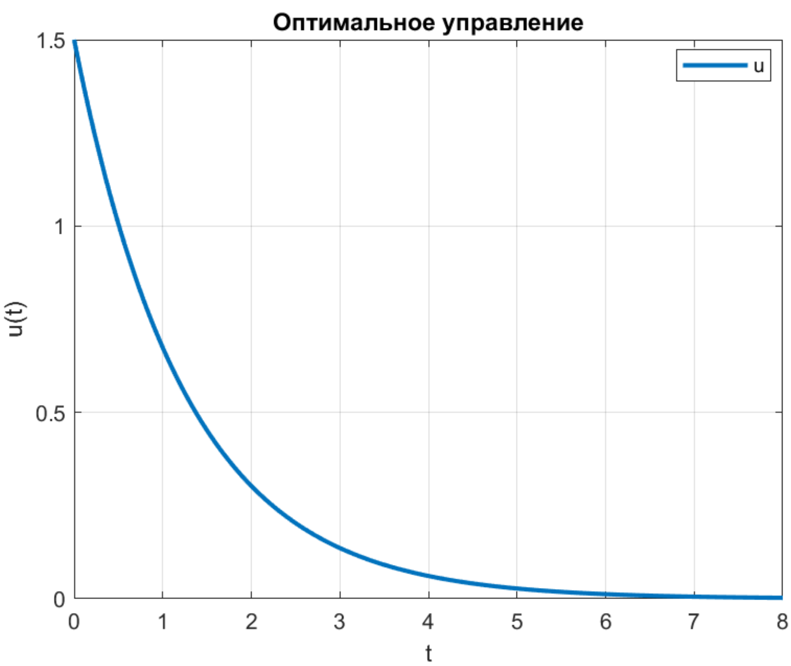

Рис. 4: График управляющего воздействия при измененном K

Из графиков видим, что система всё ещё является устойчивой, но установившееся значение функционала качества выше, чем у замкнутой оптимальным регулятором. Для убедительности повторим

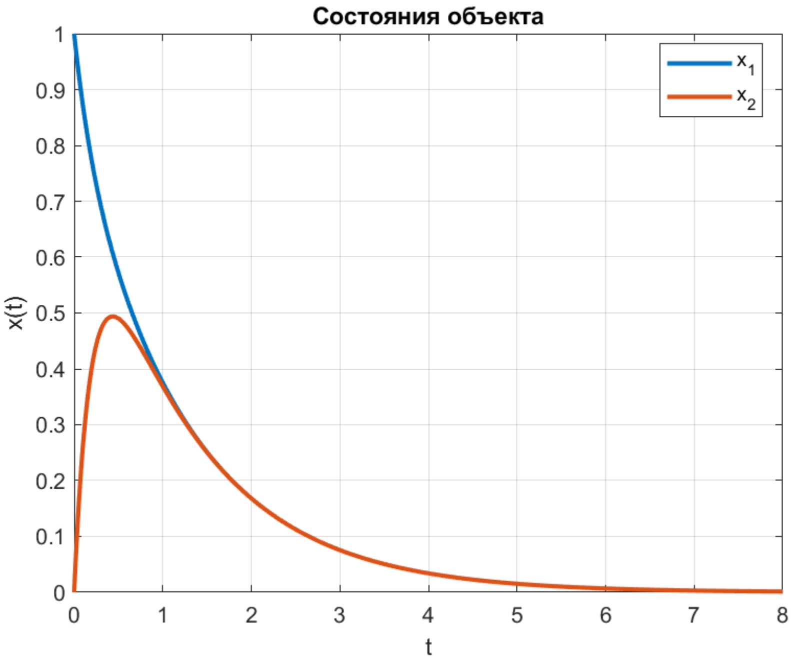

Рис. 5: Графики переменных состояния при измененном K

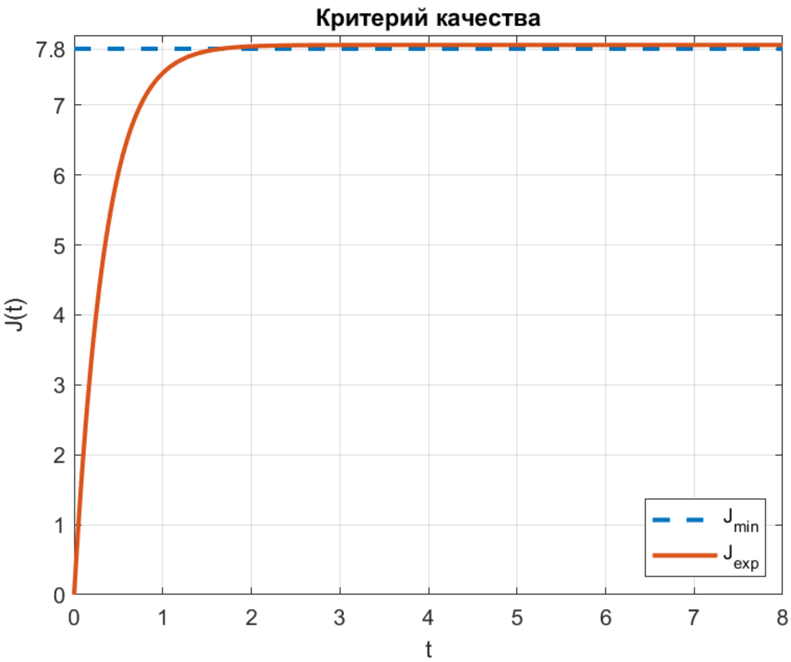

Рис. 6: График критерия качества при измененном K

эксперименты ещё раз, но уже с матрицей

$$K'' = \begin{bmatrix}1.7 & 0.35\end{bmatrix} = K + \begin{bmatrix}-0.1715 & -0.0434\end{bmatrix}$$

Результаты продемонстрированы на рисунках 7-9. Установившееся значение $J_{stab} \approx 7.8803 > J_{min} \approx 7.8062$.

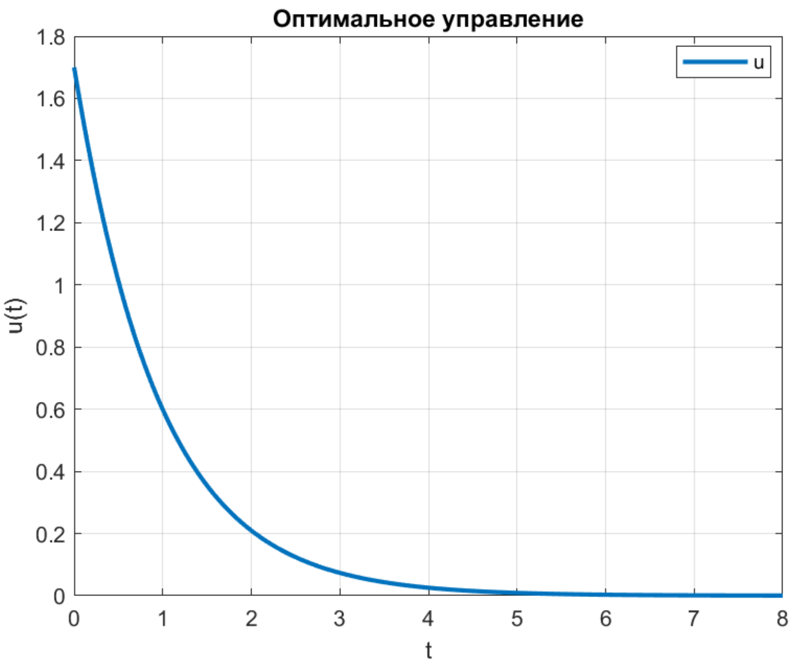

Рис. 7: График управляющего воздействия при связи K''

Таким образом, продемонстрировано, что оптимальный регулятор с матрицей обратной связи K действительно достигает минимального значения J_{min} критерия качества

$$J = \int_0^\infty x^T(\tau)Qx(\tau) + ru^2(\tau)d\tau$$

При положительно (полу-)определенных матрицах

$$Q = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad r = 5 > 0$$

Посмотрим теперь, как матрица Q и параметр r влияют на качество переходных процессов в замкнутой системе.

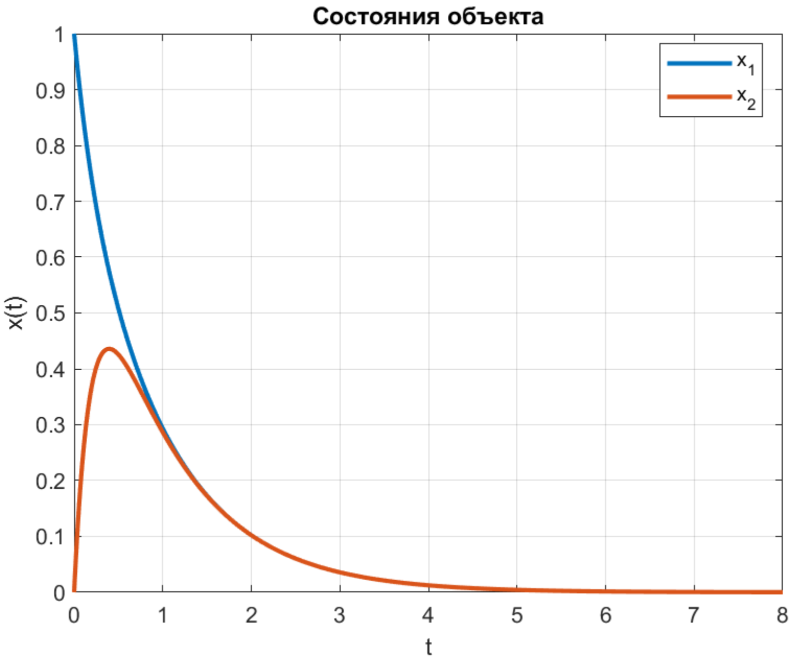

Рис. 8: Графики переменных состояния при связи K''

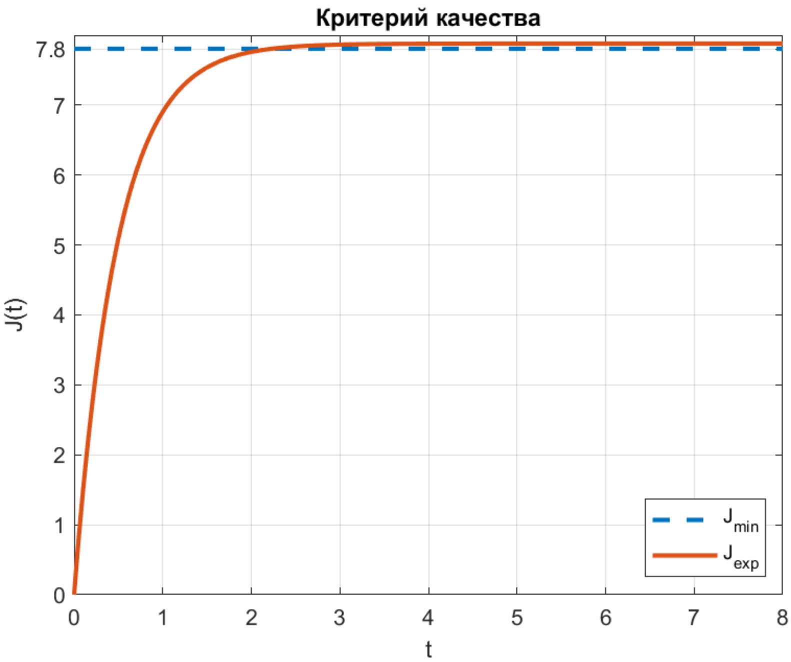

Рис. 9: График критерия качества при связи K'

3 Влияние параметров на стабилизацию

Итак, зададимся тремя различными значениями параметра r и трёмя разными матрицами Q при условии, что $r > 0$, $Q = kQ^*$ при положительном коэффициенте k и матрице $Q^* \succcurlyeq 0$, взятой в соответствии с вариантом задания

$$Q^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

В итоге получаем пары:

$$r_1 = 15,\ k_1 = 3 \qquad r_2 = 2,\ k_2 = 10 \qquad r_3 = 10,\ k_3 = 2$$

При этом для сравнения с уже вычисленным оптимальным регулятором добавим в рассмотрение пару

$$r_0 = 5, \quad k_0 = 1$$

Найденные обратные связи для введенных пар (r_i, k_i) тогда:

$$K_0 = \begin{bmatrix} 1.8715 & 0.3934 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 1.8715 & 0.3934 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 2.1130 & 0.4682 \end{bmatrix}, \quad K_3 = \begin{bmatrix} 2.9073 & 0.7384 \end{bmatrix}$$

Моделирование фомируемого управления регуляторов приведено на рисунке 10, переменных состояния - на рисунках 11 и 12, а графиков критериев качества с установившемися значениями

$$J_{min0} \approx 7.8062, \quad J_{min1} = \frac{J_{min0}}{3} \approx 23.4185$$

$$J_{min2} \approx 7.0661, \quad J_{min3} \approx 4.9242$$

На рисунках 13. Из всего выведенного можем сделать вывод, что на характер переходных процессов влияет именно соотношение между Q и r. Соответственно, чем «больше» Q, тем управление более агрессивное, затрачивает большие управления и быстрее стабилизирует систему. И наоборот, чем больше r, тем управляющее воздействие более мягкое, но переходные процессы длятся дольше.

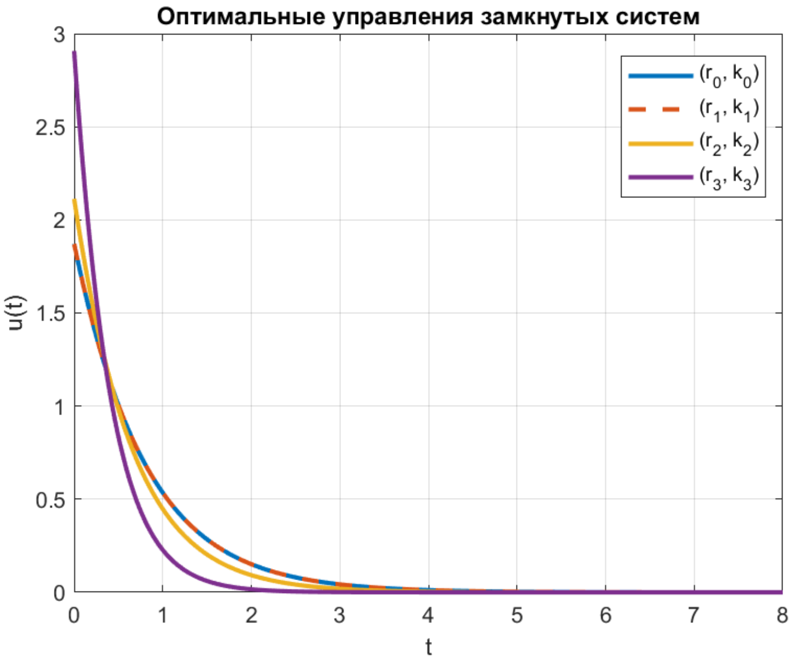

Рис. 10: График управляющего воздействия при различных парах (r_i, k_i)

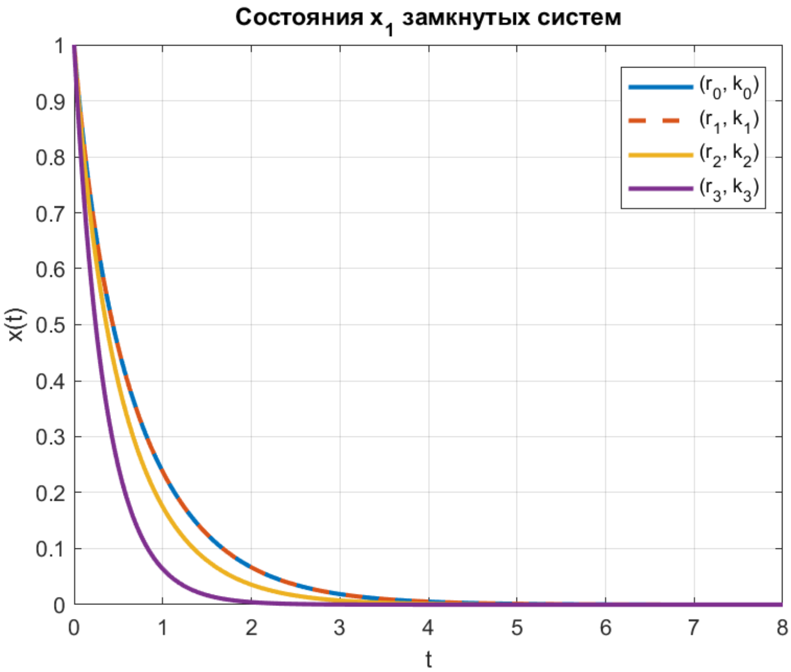

Рис. 11: График переменных состояния x_1 при различных парах (r_i, k_i)

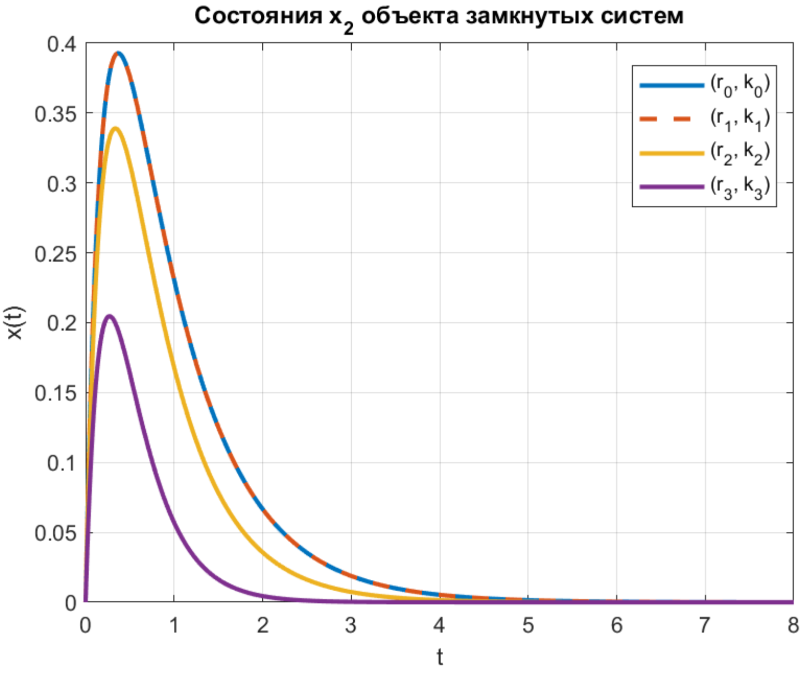

Рис. 12: График переменных состояния x_2 при различных парах (r_i, k_i)

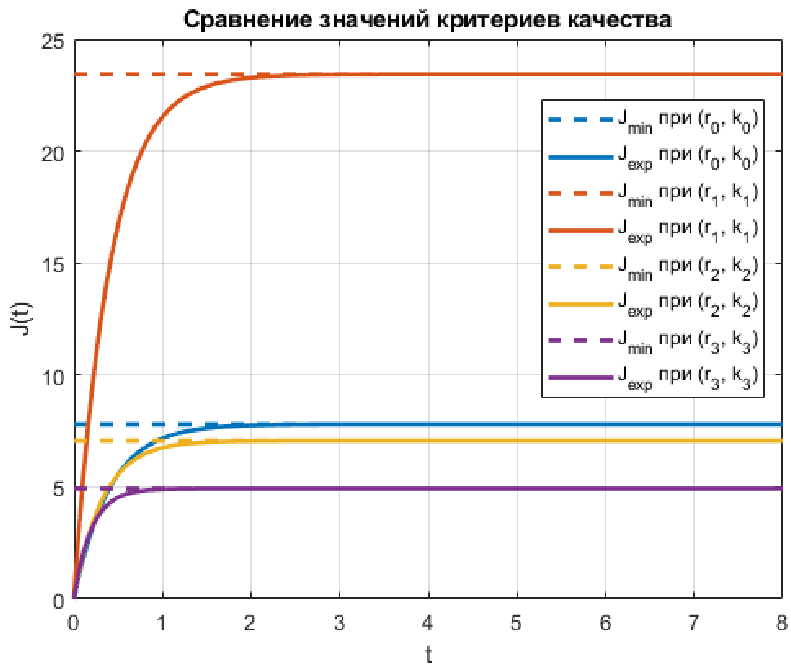

Рис. 13: Графики критериев качества при различных парах (r_i, k_i)

4 Выводы

В ходе лабораторной работы был синтезирован оптимальный линейный квадратичный регулятор для линейной системы на основе уравнения Риккати и отрицательной обратной связи по состоянию. Показано, что полученный регулятор обеспечивает устойчивость замкнутой системы и минимизирует квадратичный функционал качества, причём минимальное значение критерия совпадает с теоретической оценкой $J_{\min} = x(0)^T P x(0)$. Численные эксперименты с отклонёнными матрицами обратной связи подтвердили оптимальность решения, так как значение функционала при этом возрастает. Также исследовано влияние параметров Q и r, показавшее, что их соотношение определяет компромисс между быстродействием системы и величиной управляющего воздействия.