

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Отчет по лабораторной работе №2
Динамические методы идентификации
Вариант 23

Выполнили студенты

Мовчан Игорь Евгеньевич
Соколов Дмитрий Алексеевич
Тенишев Алексей Николаевич

Преподаватель

Ведяков Алексей Алексеевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Дискретная система первого порядка	2
1.1	Задание системы	2
1.2	Идентификации с нормировкой шага	3
1.3	Упрощенный алгоритм идентификации	3
2	Дискретная система второго порядка	8
2.1	Задание системы	8
2.2	Простой гармонический вход	8
2.3	Двухсоставной гармонический вход	10
3	Непрерывная система	12
3.1	Задание системы	12
3.2	Непрерывный алгоритм идентификации	13
4	Выводы	14

1 Дискретная система первого порядка

1.1 Задание системы

Зададим дискретную систему с выходом $y(k)$ через передаточную функцию и вход $u(t) = \sin(\omega t)$, который по ходу дискретизируем:

$$y(k) = W(z)u(k), \quad W(z) = \frac{b}{z + a}, \quad u(k) = \sin(\omega k T_d)$$

Здесь переменная $T_d = 0.1$ отвечает за интервал дискретизации, a и b - параметры модели, ω - частота гармонического входа $u(t)$. Значения брались из варианта, в нашем случае это:

$$a = 0.97, \quad b = 2.8, \quad \omega = 5.65$$

Проведем моделирование входа $u(k)$ и выхода $y(k)$ при выбранных параметрах системы. Результат представлен на рисунке 1.

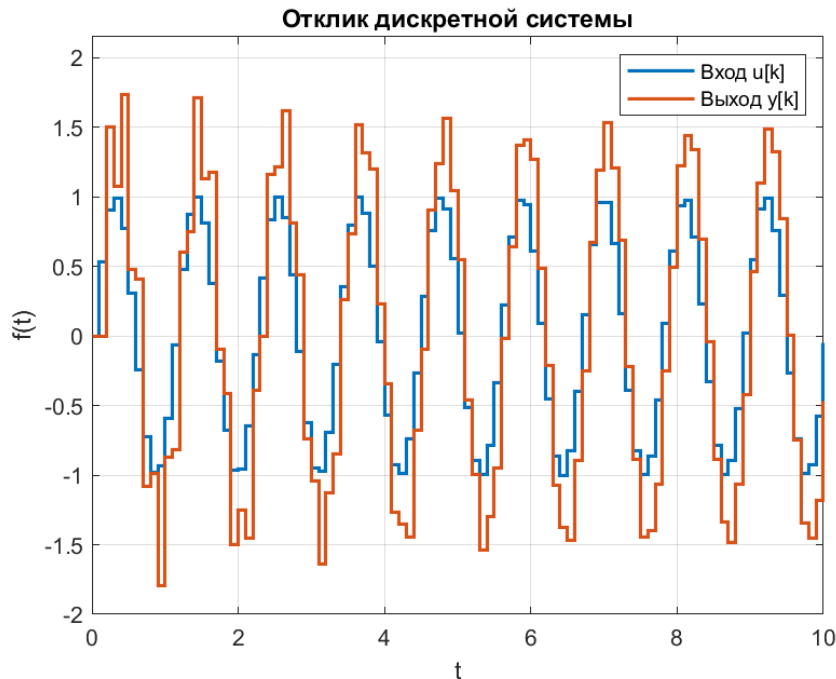


Рис. 1: Дискретизированный вход и выход системы

Для дальнейшей работы к тому же необходимо перевести систему в форму линейной регрессии, для нашего случая это:

$$y(k) = \phi^T(k)\theta = \begin{bmatrix} -y(k-1) & u(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -ay(k-1) + bu(k)$$

1.2 Идентификации с нормировкой шага

Попробуем теперь, зная только $y(k)$ и $u(k)$, оценить *постоянные* параметры системы $\theta = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$, используя градиентный алгоритм:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - \gamma \nabla_{\hat{\theta}} J_{SE}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \gamma \frac{\phi(k)e^0(k)}{1 + \gamma \phi^T(k)\phi(k)} \quad (1)$$

В методе $e^0(k) := y(k) - \phi^T(k)\hat{\theta}(k-1)$ - ошибка оценивания $y(k)$ со «знаниями» о параметре на предыдущем шаге, а минимизируемый критерий качества основан на квадрате ошибки:

$$J_{SE}(k) := \frac{e^2(k)}{2} = \frac{(y(k) - \phi^T(k)\hat{\theta}(k))^2}{2}$$

Знаменатель, присутствующий во втором слагаемом алгоритма 1, служит некой нормировкой шага и позволяет стабильнее оценивать параметры дискретной системы.

Итак, проведем численное моделирование процесса идентификации при значениях $\gamma = 1$, $\gamma = 3$ и $\gamma = 10$. На рисунках 2-6 приведены результаты работы алгоритма 1 с данными γ .

Можем видеть, что с увеличением γ повышается скорость сходимости адаптации, но одновременно ухудшается и стабильность - появляются более резкие скачки, падает качество.

1.3 Упрощенный алгоритм идентификации

Воспользуемся также упрощенным градиентным алгоритмом:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \gamma \phi(k)e^0(k) \quad (2)$$

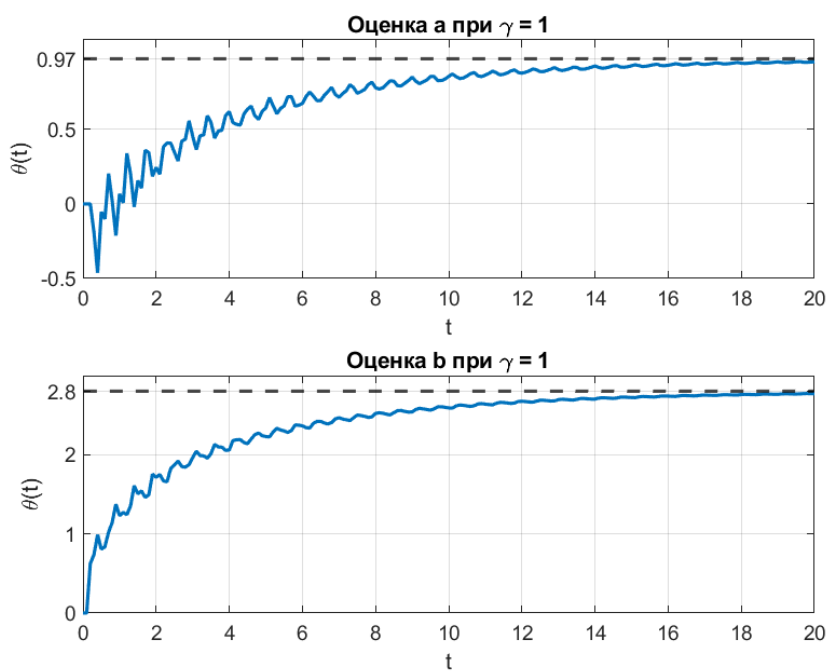


Рис. 2: Процесс идентификации параметров при значении $\gamma = 1$

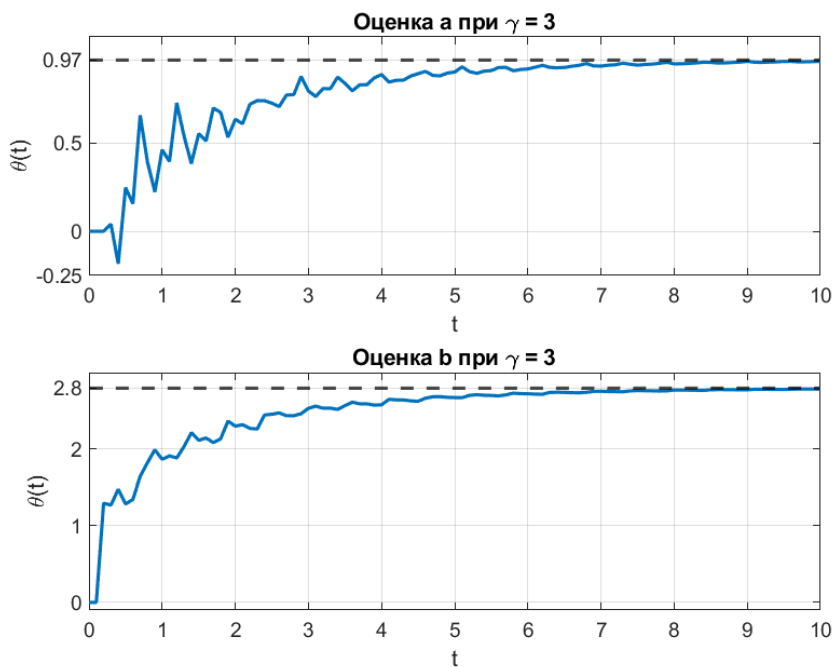
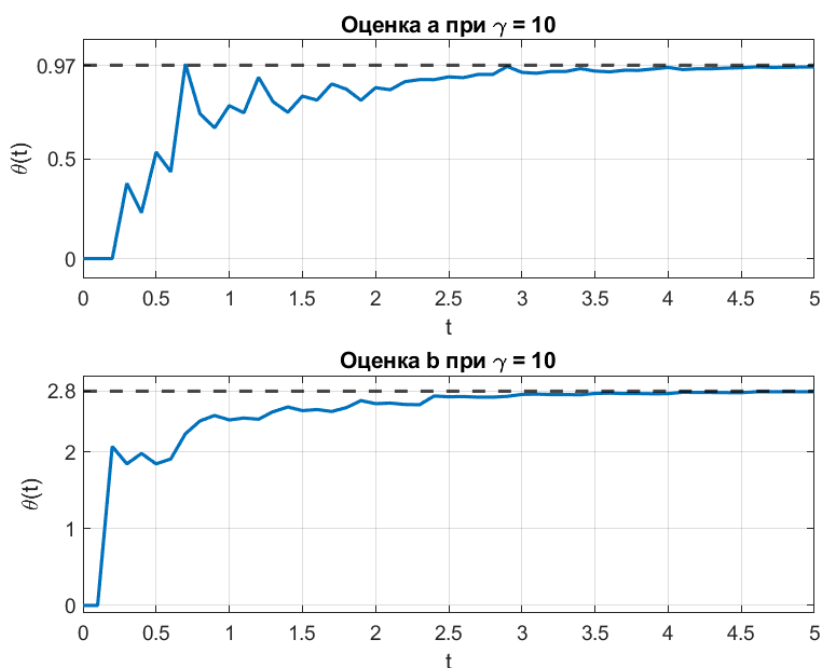
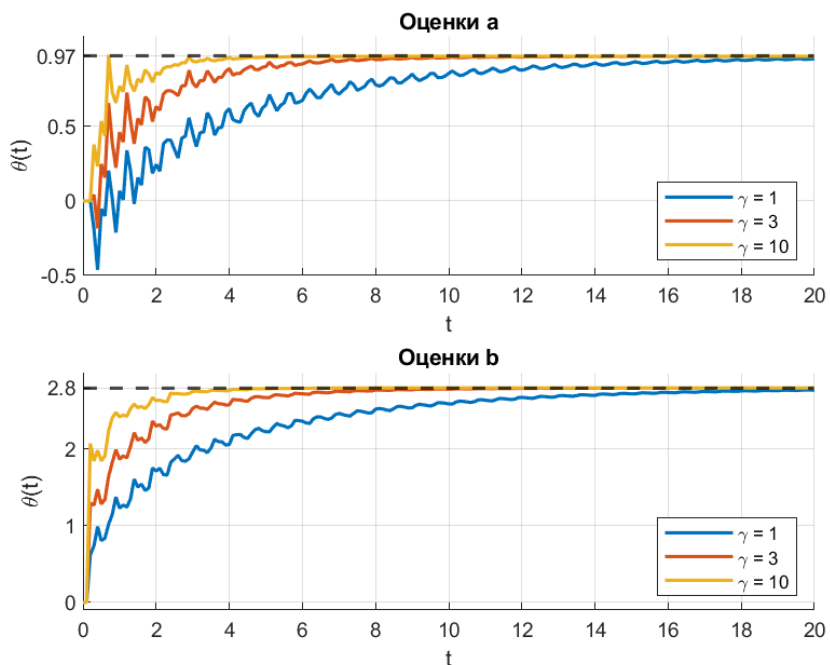


Рис. 3: Процесс идентификации параметров при значении $\gamma = 3$

Рис. 4: Процесс идентификации параметров при значении $\gamma = 10$ Рис. 5: Сравнение процессов идентификации при различных γ

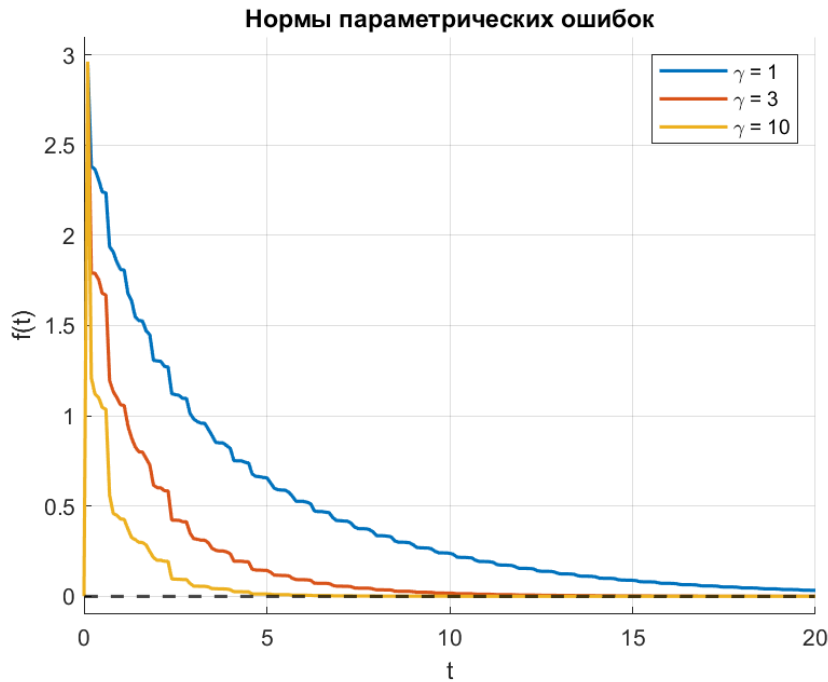


Рис. 6: Сравнение норм параметрических ошибок при различных γ

Здесь исчезает нормировка по величине γ и $\phi(k)$, поэтому при больших значениях γ система идентификации может стать неустойчивой. Проверим это, проводя моделирование при $\gamma = 1$ и $\gamma = 10$. Результаты представлены на рисунках 7 и 8.

Сильное увеличение γ при использовании алгоритма идентификации 2, как и было сказано, приводит к неустойчивости оценок.

Также в сравнении с предыдущими результатами для идентификации с нормировкой на γ процесс сходимости менее стабилен - так, при оценке параметра a присутствуют резкие скачки на величину выше самого a .

Таким образом, для получения качественных результатов при использовании упрощенного метода необходимо выбирать мелкие γ , что, в свою очередь, увеличивает ещё и время сходимости.

Здесь важно, что за все вышесказанные проблемы мы получаем более легкое вычисление шагов градиента, что в большинстве случаев, пожалуй, не так уж и полезно :)

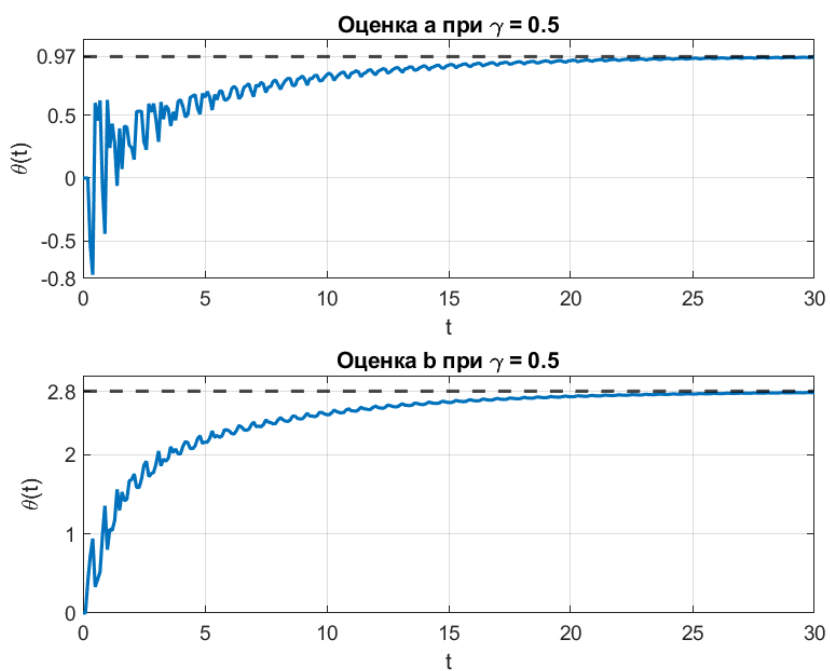


Рис. 7: Идентификации при значении $\gamma = 0.5$ и упрощенном алгоритме

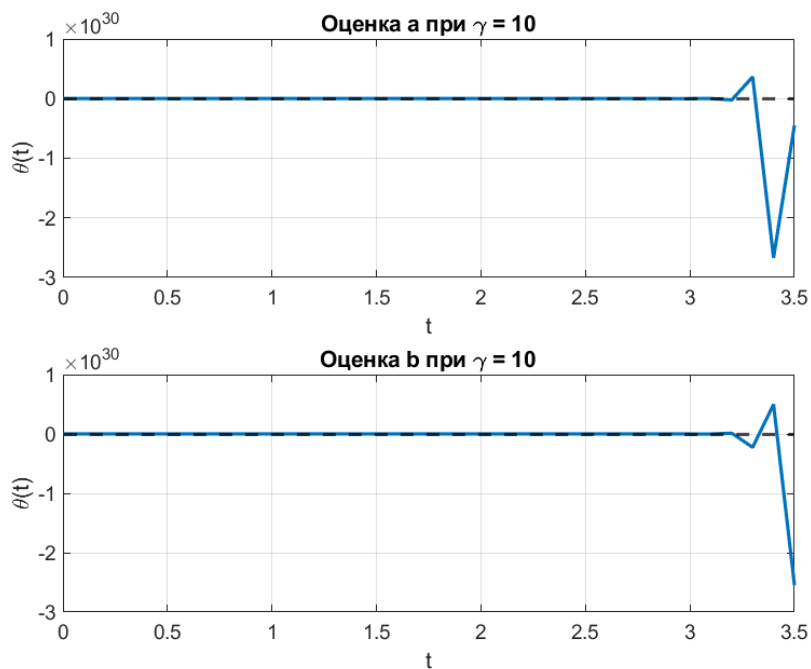


Рис. 8: Идентификации при значении $\gamma = 10$ и упрощенном алгоритме

2 Дискретная система второго порядка

2.1 Задание системы

Зададимся теперь дискретной системой второго порядка с выходом $y(k)$ и передаточной функцией $W(z)$:

$$y(k) = W(z)u(k), \quad W(z) = \frac{b}{z^2 + a_1z + a_2}$$

Также примем интервал дискретизации $T_d = 0.1$, а параметры системы a_1 , a_2 и b возьмем из варианта:

$$a_1 = -1.89, \quad a_2 = 0.8928, \quad b = 2.5$$

И переведем систему в форму линейной регрессии:

$$\begin{aligned} y(k) &= \phi^T(k)\theta = [-y(k-1) \quad y(k-2) \quad u(k)] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{bmatrix} = \\ &= -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) + bu(k) \end{aligned}$$

2.2 Простой гармонический вход

Посмотрим, как пройдет идентификация параметров при различных гармонических входах $u(t)$. Для начала возьмем уже использовавшийся нами ранее синус с заданной из варианта частотой ω :

$$u(t) = \sin(\omega t), \quad u(k) = \sin(\omega kT_d), \quad \omega = 45.86$$

Моделирование входа $u(k)$ и выхода $y(k)$ при выбранных параметрах системы приведено на рисунке 9.

Для оценки параметров будем использовать градиентный алгоритм 1 при $\gamma = 1$, так как он показал себя в предыдущем случае лучшим образом. Результаты численного моделирования процесса идентификации представлены на рисунке 10.

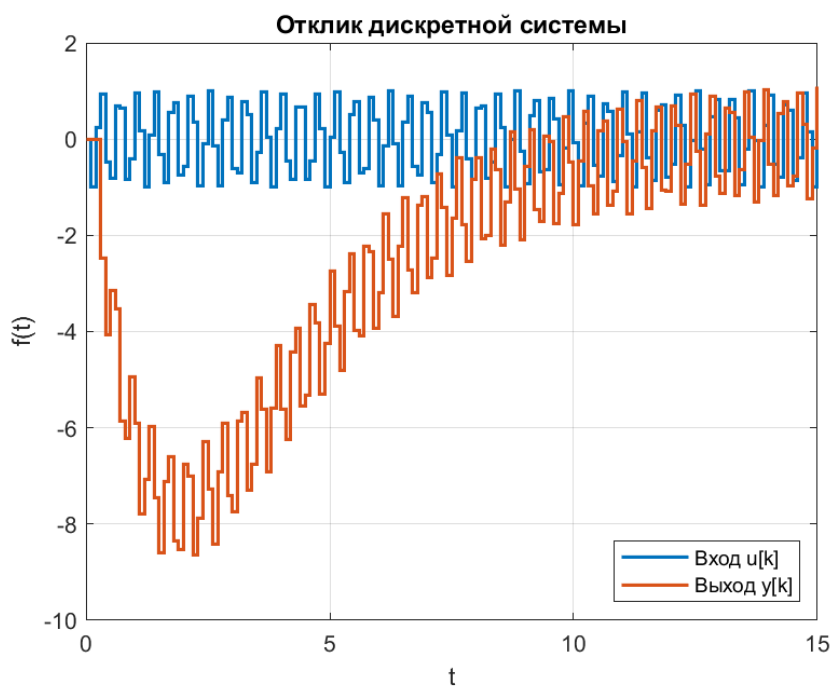


Рис. 9: Вход и выход дискретной системы второго порядка при $u = \sin(\omega t)$

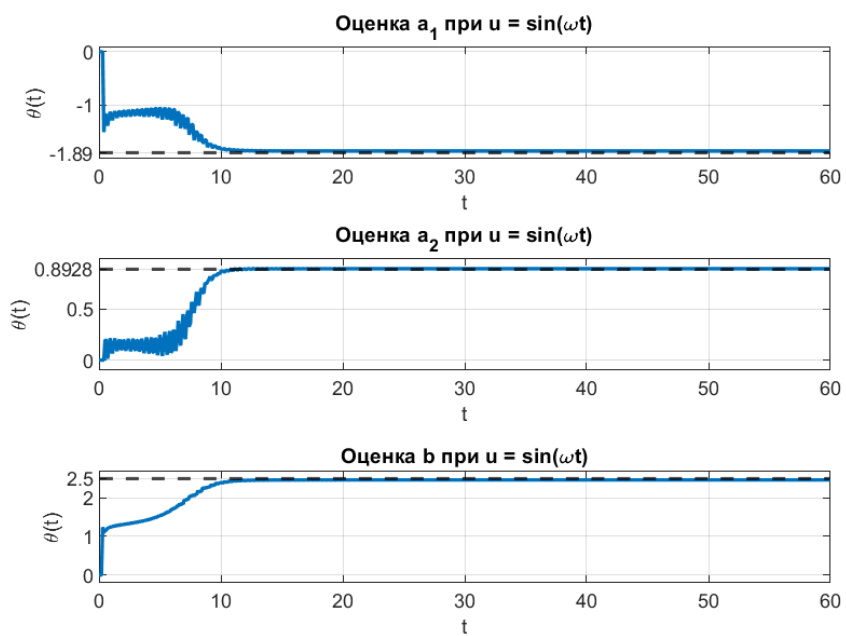


Рис. 10: Идентификации параметров при входе $u = \sin(\omega t)$

Заметим, что увеличение частоты входа привело к более частым колебаниям и в оценках $\hat{\theta}$ набора параметров $\theta = [a_1 \ a_2 \ b]^T$. При всем этом оценка сошлась достаточно точно, хоть и «застряла» на некотором уровне от истинных значений из-за малого γ .

2.3 Двухсоставной гармонический вход

Изменим вход, добавив синус меньшей амплитуды и частоты:

$$u(t) = \sin(\omega t) + 0.2 \sin(0.5\omega t), \quad u(k) = \sin(\omega k T_d) + 0.2 \sin(0.5\omega k T_d)$$

Аналогично проведем моделирование входа $u(k)$ и выхода $y(k)$, а также применим идентификацию параметров при $\gamma = 1$. На рисунках 11-13 изображены все соответствующие графики.

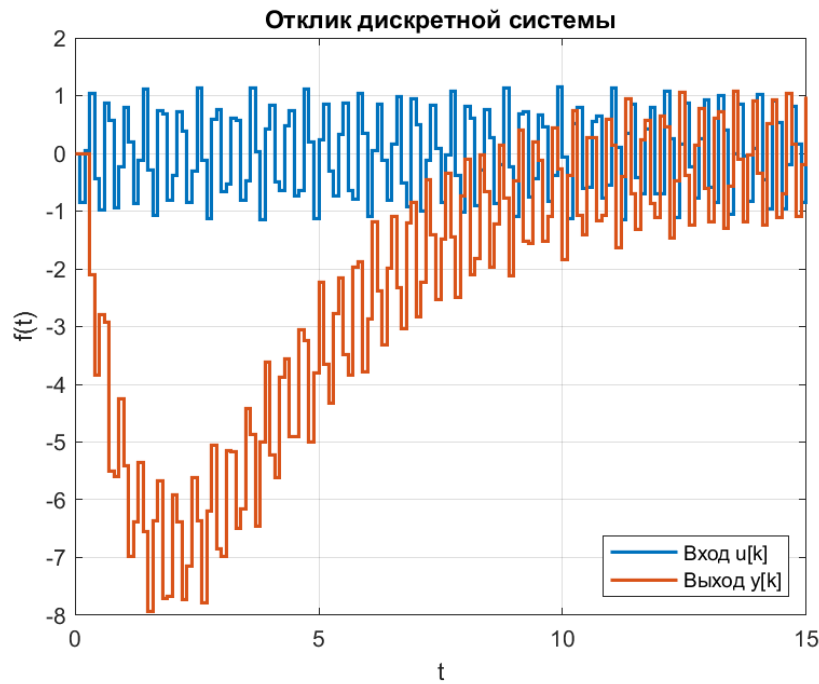
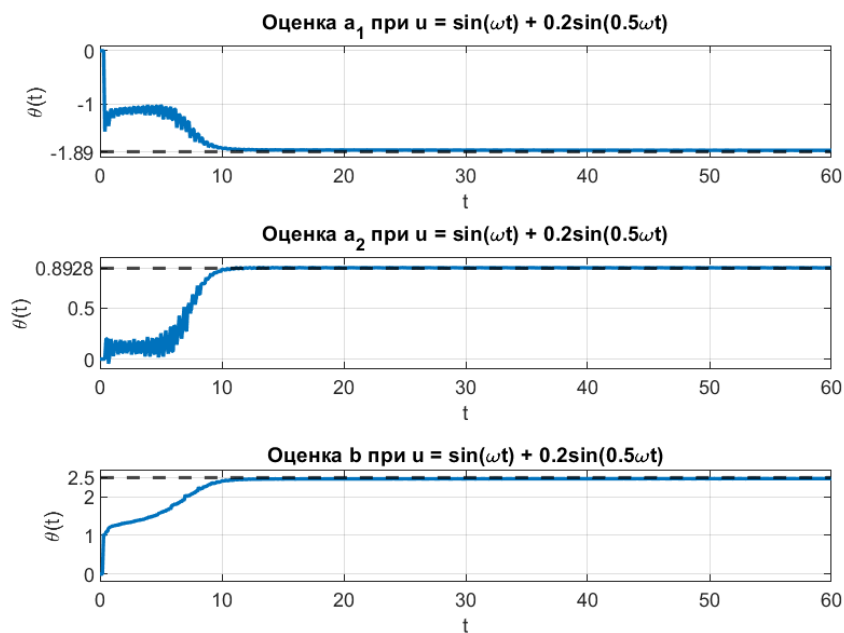
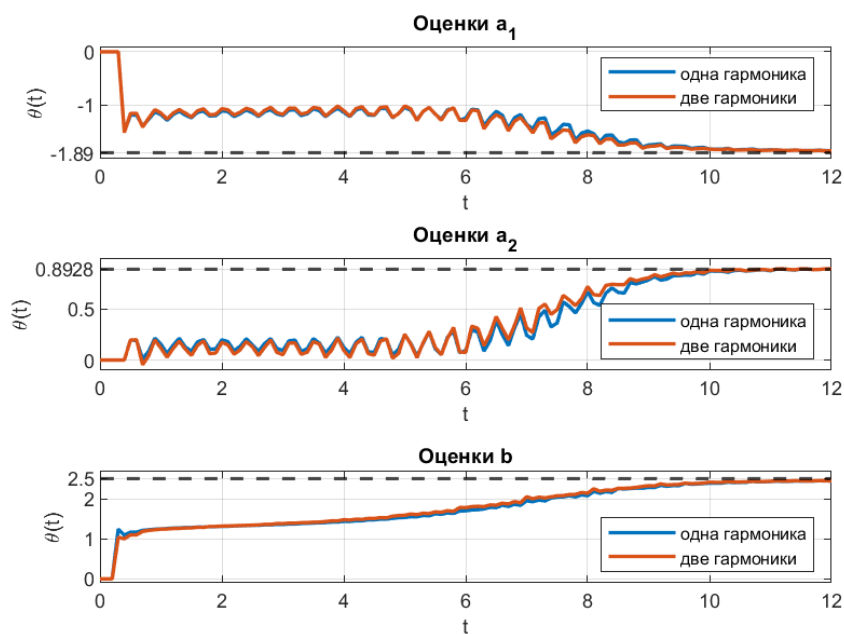


Рис. 11: Вход и выход системы второго порядка при $u = \sin(\omega t) + 0.2 \sin(0.5\omega t)$

Для наглядности на рисунках 13 и 14 также представлено сравнение процессов идентификации при входах, использующих только одну гармонику - $u(t) = \sin(\omega t)$, и две - $u(t) = \sin(\omega t) + 0.2 \sin(0.5\omega t)$.

Рис. 12: Идентификации параметров при входе $u = \sin(\omega t) + 0.2\sin(0.5\omega t)$ Рис. 13: Сравнение процессов при входах $u = \sin(\omega t)$ и $u = \sin(\omega t) + 0.2\sin(0.5\omega t)$

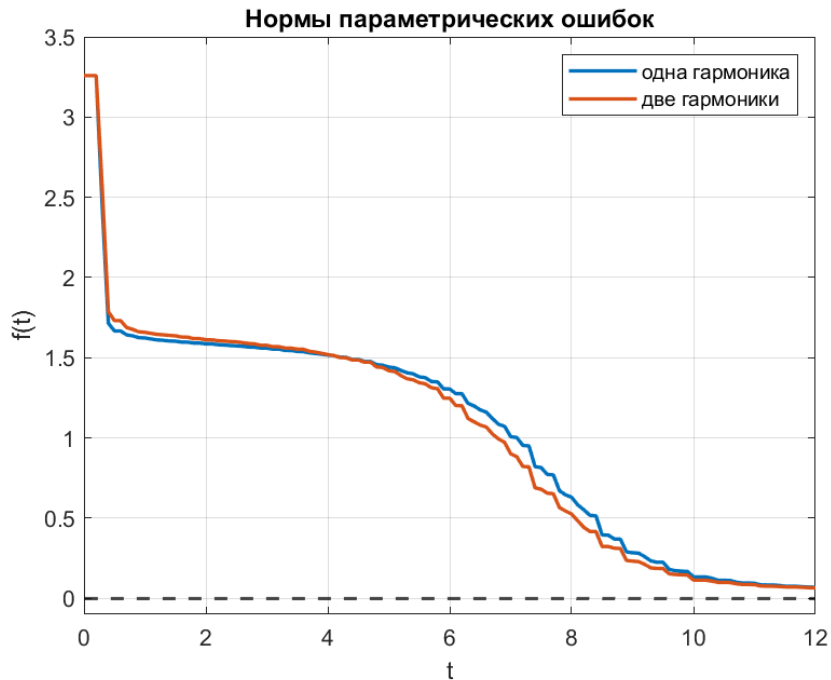


Рис. 14: Сравнение норм параметрических ошибок при различных входах

Видим, что добавление дополнительной гармоники в общем оставило динамику той же, однако *немного* ускорило адаптацию за счёт обогащения входного сигнала слабым синусом, обладающим меньшей амплитудой и частотой.

В общем случае добавление такого рода гармоники уменьшает вырожденность входа и улучшает способность алгоритмов различать вклад отдельных параметров a_1 , a_2 и b .

3 Непрерывная система

3.1 Задание системы

Пусть дана непрерывная линейная система первого порядка с гармоническим входом $u(t)$ и выходом $y(t)$:

$$y(t) = \frac{b}{p + a} u(t), \quad u(t) = \sin(\omega t)$$

Перепишем модель в форме линейной регрессии, считая производную $\dot{y}(t)$ доступной к измерению:

$$\dot{y}(t) = [-y(t) \quad u(t)] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -ay(t) + bu(t)$$

Также примем параметры системы и входа a , b и ω из варианта:

$$a = 0.5, \quad b = 3.2, \quad \omega = 5.65$$

Отлично, всё задано! На рисунке изображено моделирование входа $u(t)$ и выхода $y(t)$ данной непрерывной системы.

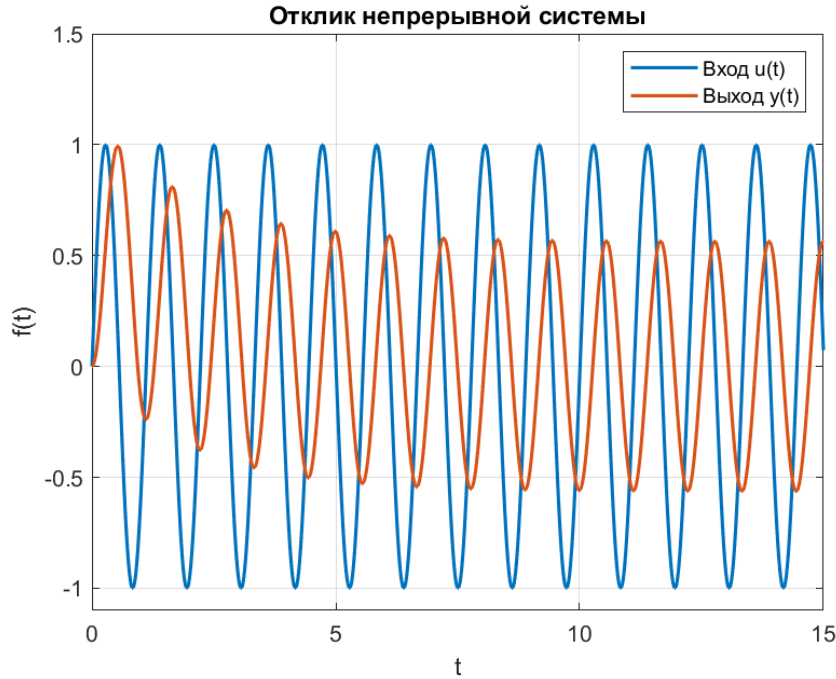


Рис. 15: Вход и выход непрерывной системы

3.2 Непрерывный алгоритм идентификации

Теперь проведем идентификацию параметров a и b на основе градиентного алгоритма для непрерывных систем:

$$\hat{\theta} = -\gamma \nabla_{\hat{\theta}} J_{SE}(t) = \gamma \phi e(t) \quad (3)$$

Здесь $e(t) := y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t)$ - ошибка на выход $y(t)$.

Численное моделирование процессов идентификации параметров a и b при значениях $\gamma = 1$, $\gamma = 3$ и $\gamma = 10$ и заданном алгоритме 3, а также их сравнение представлено на рисунках 16-20.

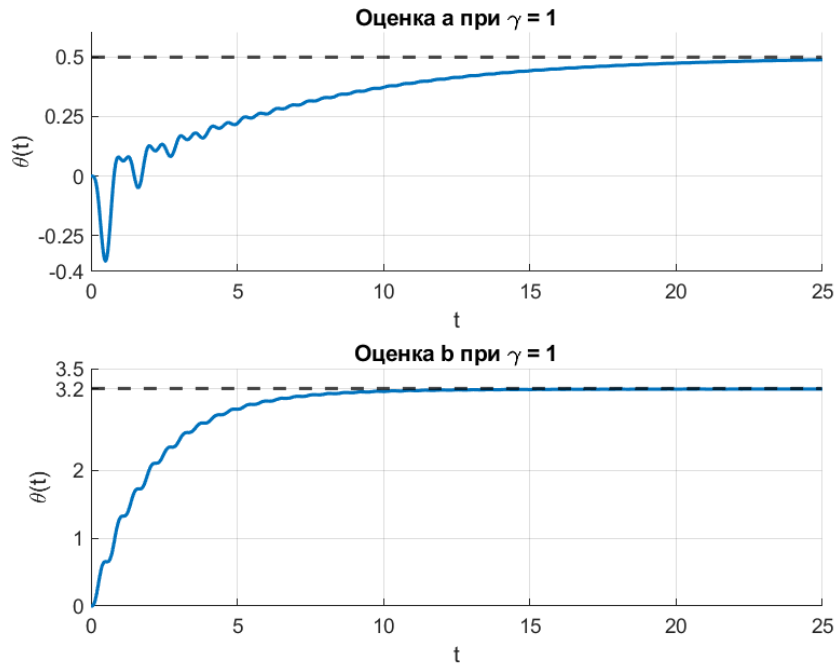
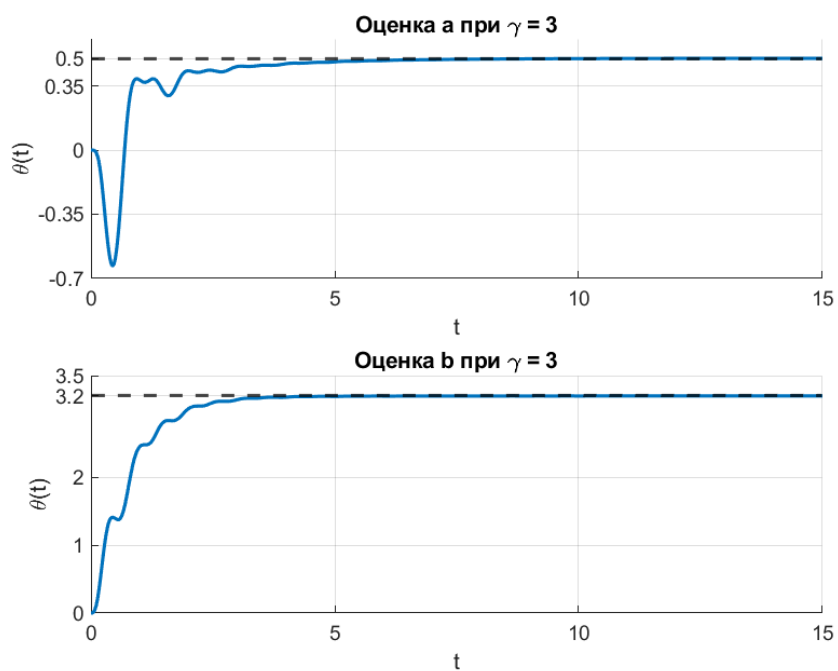
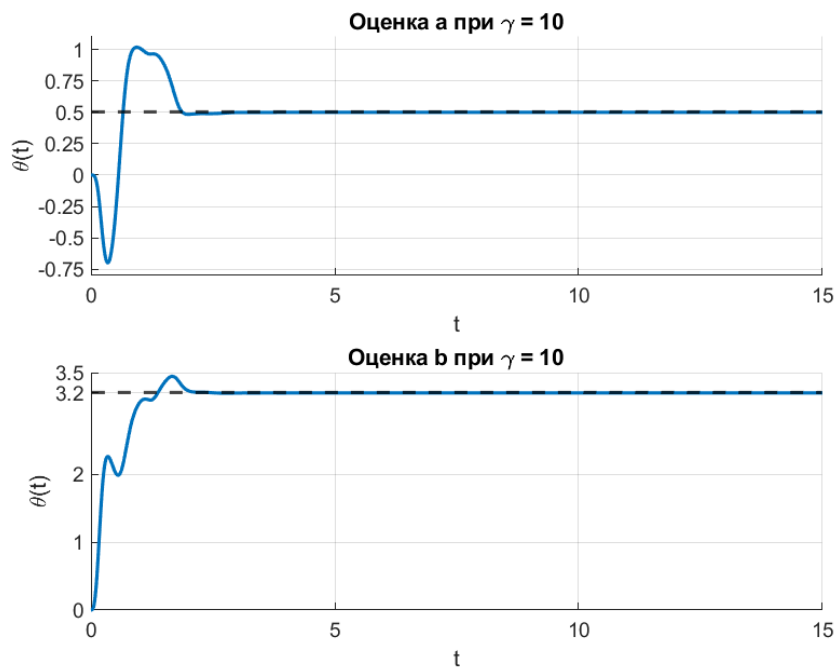


Рис. 16: Идентификации параметров непрерывной системы при $\gamma = 1$

Можем видеть, что увеличение γ , как и для дискретной системы, ведет к ускорению процессов адаптации, однако снижает их качество и стабильность - например, на рисунке 18 появляются некоторые колебания возле истинных значений параметров a и b системы.

4 Выводы

В ходе лабораторной работы исследованы градиентные алгоритмы идентификации для дискретных и непрерывных систем. Установлено, что для дискретных моделей использование алгоритма с нормировкой шага критически важно для обеспечения устойчивости, то-

Рис. 17: Идентификации параметров непрерывной системы при $\gamma = 3$ Рис. 18: Идентификации параметров непрерывной системы при $\gamma = 10$

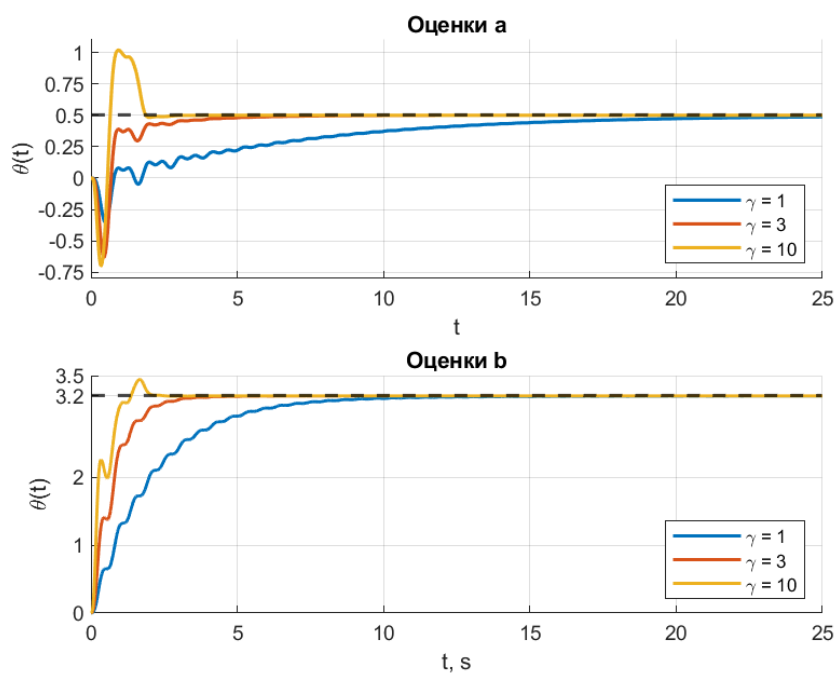


Рис. 19: Сравнение процессов непрерывной системы при различных γ

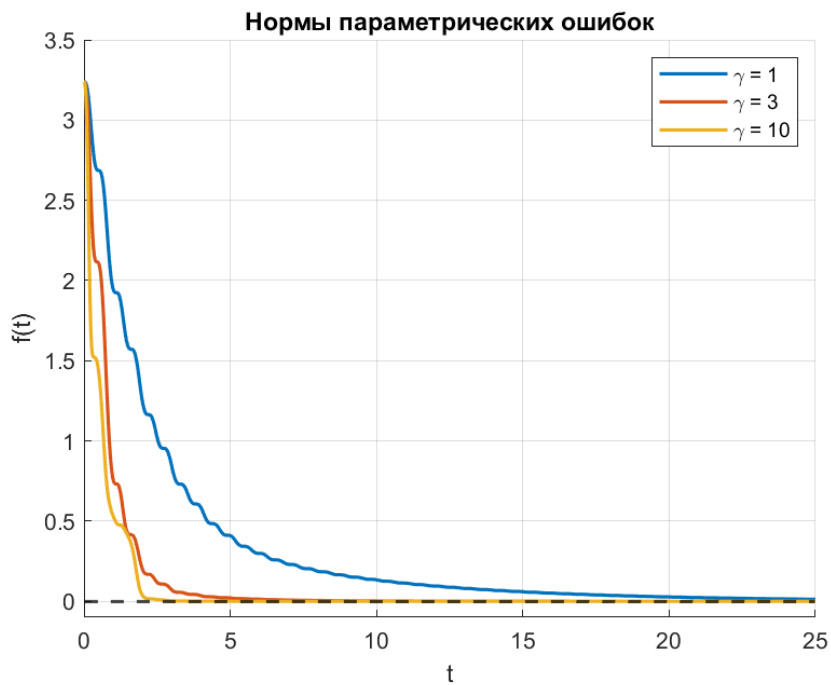


Рис. 20: Сравнение норм ошибок в непрерывной системе при различных γ

гда как увеличение коэффициента адаптации γ ускоряет сходимость ценой появления возможных неустойчивостей.

Эксперименты с системой второго порядка подтвердили, что обогащение спектра входного сигнала дополнительными гармониками немного повышает скорость адаптации.

В конечном итоге, получено, что эффективность идентификации определяется величиной шага адаптации и насыщенностью входного сигнала.