



ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

**Лабораторная работа №1  
по Теории идентификации**

Метод наименьших квадратов  
Вариант 23

**Работу выполнили:** Соколов Дмитрий Алексеевич, gr: R3443, isu: 368825  
Мовчан Игорь Евгеньевич, gr: R3480, isu: 368540  
Тенишев Алексей Николаевич, gr: R3435, isu: 387157

**Дата выполнения:** 16.11.2025 г.

**Преподаватель:** Ведяков Алексей Алексеевич

## Содержание

<b>1</b>	<b>Задание 1</b>	<b>4</b>
1.1	Оценка параметров. . . . .	4
1.2	Графики $y(t)$ и $\hat{y}(t)$ . . . . .	4
1.3	Графики ошибок . . . . .	5
1.4	Выводы . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Задание 2</b>	<b>7</b>
2.1	Представление гипотез в виде линейной регрессии . . . . .	7
2.2	Оценка параметров . . . . .	7
2.3	Графики аппроксимаций . . . . .	7
2.4	Выводы . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Задание 3</b>	<b>11</b>
3.1	Модель для zad31 . . . . .	11
3.2	Модель для zad32 . . . . .	11
3.3	Графики аппроксимаций . . . . .	11
3.4	Выводы . . . . .	12

# 1 Задание 1

Исходная модель имеет вид:

$$y(t) = x_1(t)\theta_1 + x_2(t)\theta_2 + x_3(t)\theta_3 + v(t),$$

где  $v(t)$  — шум измерений,  $v(t) \in (0, 1)$ . Требуется оценить параметры  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  по данным zad11 и zad12.

## 1.1 Оценка параметров.

Запишем модель в матричном виде:

$$y = X\theta + v, \quad X = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & x_3(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1(N) & x_2(N) & x_3(N) \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}.$$

МНК-оценка параметров:

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T y.$$

Полученные результаты:

$$\text{zad11: } \hat{\theta}_1 = 1.994, \hat{\theta}_2 = -8.004, \hat{\theta}_3 = -6.001.$$

$$\text{zad12: } \hat{\theta}_1 = 1.286, \hat{\theta}_2 = -8.005, \hat{\theta}_3 = -6.004.$$

## 1.2 Графики $y(t)$ и $\hat{y}(t)$

$$\hat{y}(t) = X(t)\hat{\theta}$$

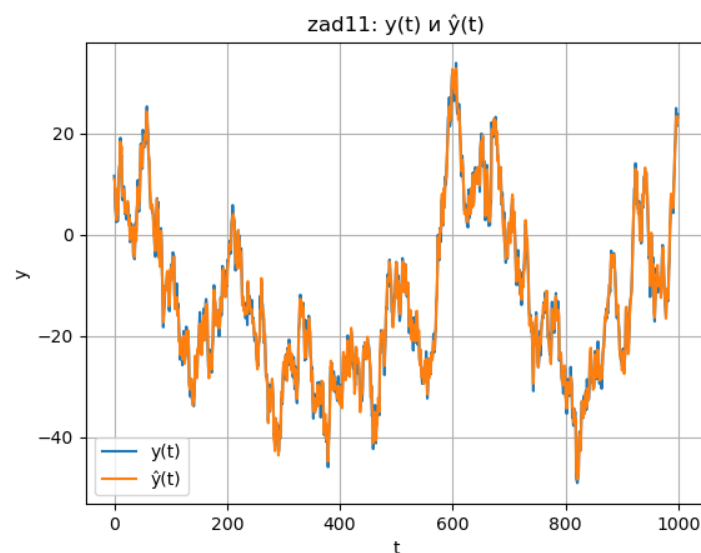


Рис. 1: Оценка данных из файла zad11

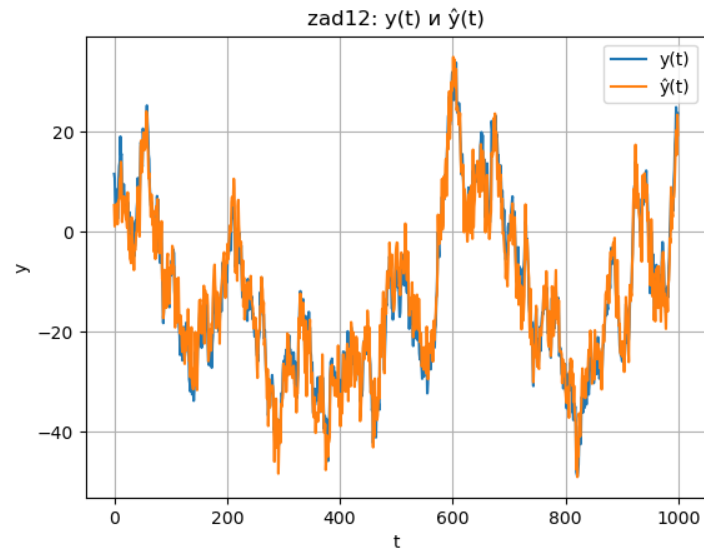


Рис. 2: Оценка данных из файла zad12

### 1.3 Графики ошибок

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$$

Средние ошибки:

$$\text{zad11: } \bar{e} = 0.013, \sigma_e = 0.98,$$

$$\text{zad12: } \bar{e} = 0.053, \sigma_e = 3.35.$$

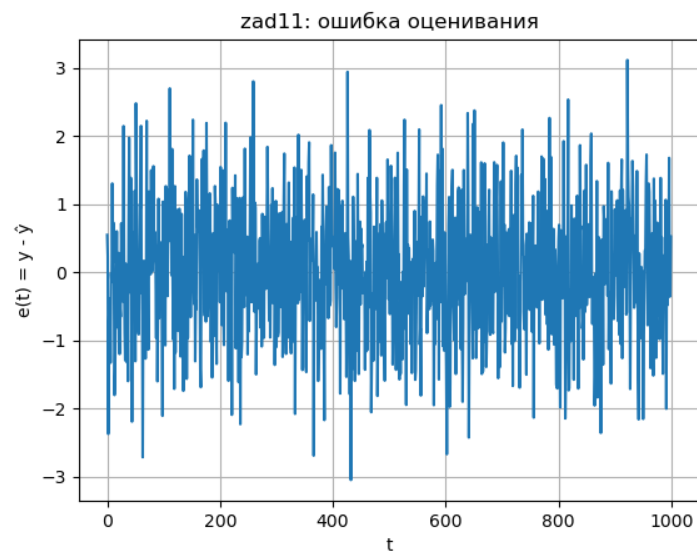


Рис. 3: Ошибка оценки данных из файла zad11

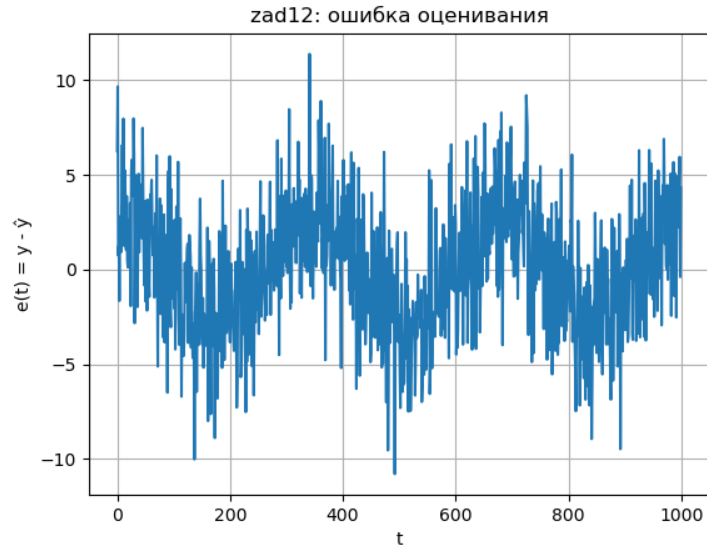


Рис. 4: Ошибка оценки данных из файла zad12

#### 1.4 Выводы

- Среднее ошибки близко к нулю — обе оценки являются **несмещёнными**.
- Дисперсия ошибки у набора zad11 в районе 1, что говорит о стандартном нормальном распределении, что нельзя сказать про набор zad12.
- В рамках линейной регрессии (при  $E[v] = 0$ ,  $D[v] = \sigma^2 I$ ) МНК является оптимальной.

## 2 Задание 2

Имеются зависимости скорости реакции  $V$  от температуры  $T$  в файлах zad21 и zad22. Рассматриваются две гипотезы:

$$(H1) : V = bT + c, \quad (H2) : V = aT^2 + bT + c.$$

### 2.1 Представление гипотез в виде линейной регрессии

Линейная модель:

$$V = bT + c = \begin{bmatrix} T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}.$$

Квадратичная модель:

$$V = aT^2 + bT + c = \begin{bmatrix} T^2 & T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

### 2.2 Оценка параметров

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T V.$$

Результаты:

**zad21:**  $H1: b = 18.98, c = 3.19, \bar{e} = 7.308, \sigma_e^2 = 64.6;$

$H2: a = 0.0102, b = 17.97, c = 26.66, \bar{e} = -1.023, \sigma_e^2 = 62.8.$

**zad22:**  $H1: b = 17.95, c = 69.89, \bar{e} = -1.949, \sigma_e^2 = 1097;$

$H2: a = -0.2503, b = 42.73, c = -506.84, \bar{e} = -7.552, \sigma_e^2 = 41.4.$

### 2.3 Графики аппроксимаций

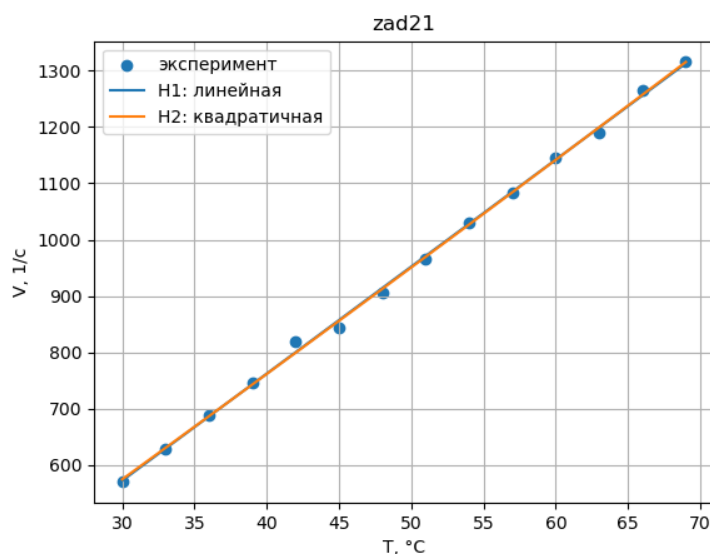


Рис. 5: Оценка данных для двух гипотез из файла zad21

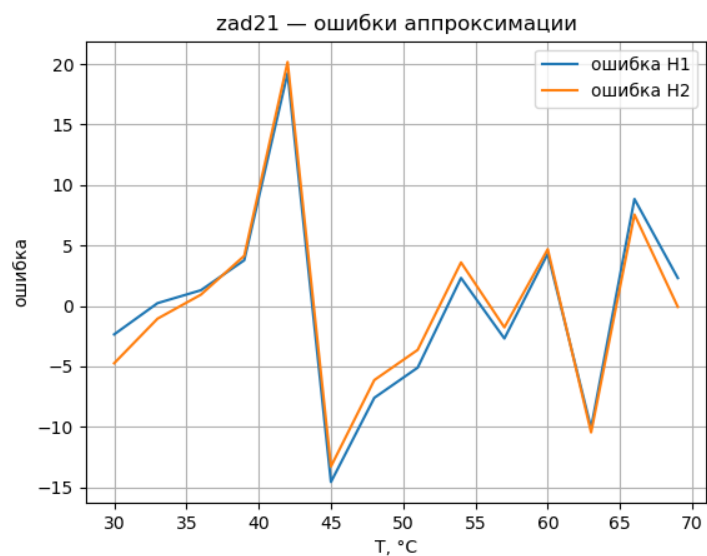


Рис. 6: Ошибка оценки данных из файла zad21

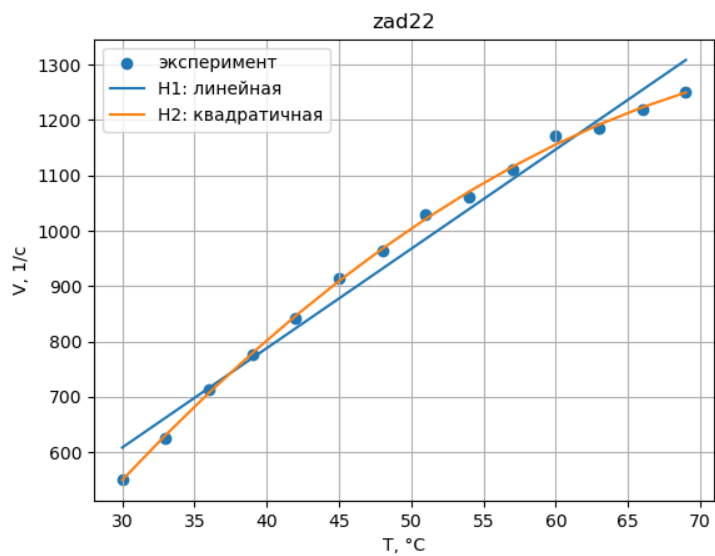


Рис. 7: Оценка данных для двух гипотез из файла zad22

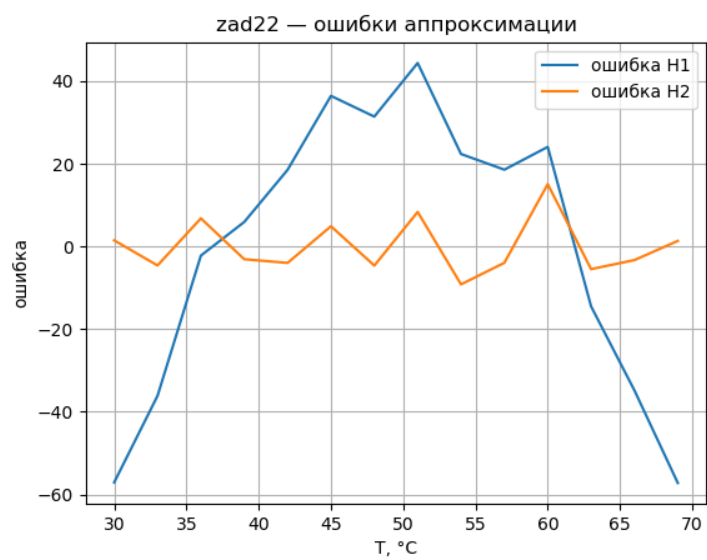


Рис. 8: Ошибка оценки данных из файла zad21



## 2.4 Выводы

- Для zad21 различие малое — **линейная модель достаточно точна.**
- Для zad22 ошибка квадратичной аппроксимации в десятки раз меньше. Следовательно, **гипотеза (H2)** является наиболее достоверной.

### 3 Задание 3

Даны функция  $y = f(x, p_1, p_2)$  и экспериментальные точки из zad31 и zad32.

#### 3.1 Модель для zad31

Предположим степенную зависимость:

$$y = p_1 x^{p_2}.$$

Линеаризуем логарифмированием:

$$\ln y = \ln p_1 + p_2 \ln x.$$

В виде линейной регрессии:

$$Z = a + bU, \quad Z = \ln y, \quad U = \ln x.$$

Оценки:

$$p_1 = 4.34, \quad p_2 = -0.391.$$

#### 3.2 Модель для zad32

Предположим экспоненциальную зависимость:

$$y = p_1 e^{p_2 x}.$$

Линеаризуем:

$$\ln y = \ln p_1 + p_2 x.$$

Оценки:

$$p_1 = 1.00, \quad p_2 = -0.20.$$

#### 3.3 Графики аппроксимаций

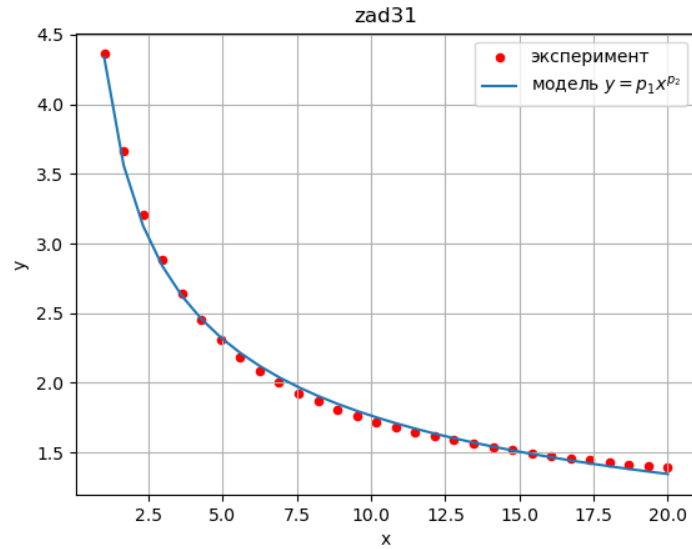


Рис. 9: График оценки данных из файла zad31

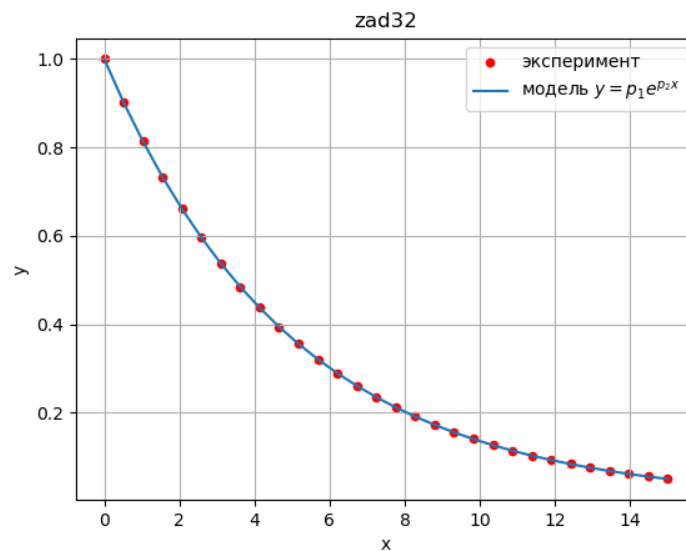


Рис. 10: График оценки данных из файла zad32

### 3.4 Выводы

- Для zad31 экспериментальные данные хорошо соответствуют степенной функции.
- Для zad32 оптимальна экспоненциальная модель.