

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4
«Дискретные регуляторы с заданными характеристиками
переходных процессов»
Вариант №11

Выполнили студенты

Боглачев Артём Сергеевич
Мовчан Игорь Евгеньевич

Преподаватель

Краснов Александр Юрьевич

Санкт-Петербург, 2025

Содержание

1 Введение	2
2 Синтез апериодического регулятора	2
2.1 Исходные данные	2
2.2 Приведение параметров	2
2.3 Дискретизация объекта с ЭНП	2
2.4 Синтез регулятора	3
2.5 Итоговый результат	3
2.6 Моделирование и результаты	3
3 Синтез регулятора Далина	4
3.1 Исходные данные	4
3.2 Желаемая передаточная функция	4
3.3 Синтез регулятора	4
3.4 Итоговый результат	5
3.5 Моделирование и результаты	5
4 Синтез регулятора с заданным расположением полюсов	5
4.1 Исходные данные	5
4.2 Расчёт желаемых полюсов	5
4.3 Определение коэффициентов передаточной функции	6
4.4 Синтез регулятора	7
4.5 Итоговый результат	7
4.6 Моделирование	7
5 Выводы	7
6 Графики	8

Введение

Целью данной работы является изучение методов синтеза дискретных регуляторов, обеспечивающих заданные характеристики переходных процессов в цифровых системах управления. В работе рассматриваются три типа регуляторов:

1. Апериодический регулятор
2. Регулятор Далина
3. Регулятор с заданным расположением полюсов

Для варианта 11 определены следующие исходные данные:

- Параметры объекта управления: $a = 1.9, b = 6.5$
- Требования к переходным процессам: $\zeta = 0.45, \omega_d = 4$ рад/с
- Точность: $K_v = 0.25$
- Период дискретизации: $T = 1$ с (для регуляторов 1-2), $T = 0.1$ с (для регулятора 3)

Синтез апериодического регулятора

Исходные данные

- Передаточная функция объекта: $G(s) = \frac{e^{-as}}{1 + bs}$
- Параметры: $a = 1.9, b = 6.5$
- Период дискретизации: $T = 1$ с

Приведение параметров

Так как запаздывание $a = 1.9$ не кратно периоду дискретизации $T = 1$ с, округляем до ближайшего целого значения:

$$a = 2, \quad b = 6.5, \quad T = 1$$

Дискретизация объекта с ЭНП

Передаточная функция непрерывной части:

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{1 + 6.5s}$$

Дискретная передаточная функция с экстраполатором нулевого порядка (ЭНП):

$$HG(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot G(s) \right\} = (1 - z^{-1})z^{-2} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(1 + 6.5s)} \right\}$$

Вычислим Z-преобразование:

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(1 + 6.5s)} \right\} = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/6.5} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1/6.5}} \\
&= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.857} \\
&= \frac{0.143z}{(z-1)(z-0.857)}
\end{aligned}$$

где $e^{-1/6.5} \approx 0.857$.

Тогда:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})z^{-2} \cdot \frac{0.143z}{(z-1)(z-0.857)} = \frac{0.143z^{-2}}{1 - 0.857z^{-1}}$$

Синтез регулятора

Желаемая передаточная функция замкнутой системы для апериодического регулятора:

$$T(z) = z^{-k}, \quad k \geq 2 \text{ (для физической реализуемости)}$$

Выбираем $k = 2$.

Формула для расчёта передаточной функции регулятора:

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \cdot \frac{T(z)}{1 - T(z)}$$

Подставляем:

$$\frac{1}{HG(z)} = \frac{1 - 0.857z^{-1}}{0.143z^{-2}}, \quad \frac{T(z)}{1 - T(z)} = \frac{z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

$$\begin{aligned}
D(z) &= \frac{1 - 0.857z^{-1}}{0.143z^{-2}} \cdot \frac{z^{-2}}{1 - z^{-2}} \\
&= \frac{1 - 0.857z^{-1}}{0.143(1 - z^{-2})}
\end{aligned}$$

Приводим к положительным степеням z :

$$D(z) = \frac{z^2 - 0.857z}{0.143(z^2 - 1)}$$

Итоговый результат

$$D_{\text{апер}}(z) = \frac{z^2 - 0.857z}{0.143(z^2 - 1)}$$

Моделирование и результаты

Моделирование выхода регулятора и системы приведено на рисунках 1 и 2.

Апериодический регулятор обеспечивает минимальное время переходного процесса (в нашем случае 2 периода дискретизации). Однако он требует больших управляющих воздействий и чувствителен к точности модели объекта.

Синтез регулятора Далина

Исходные данные

- Те же параметры объекта: $a = 2, b = 6.5$
- Период дискретизации: $T = 1$ с
- Параметр $q = b = 6.5$ (постоянная времени объекта)

Желаемая передаточная функция

Формула желаемой передаточной функции для регулятора Далина:

$$T(z) = \frac{z^{-k-1}(1 - e^{-T/q})}{1 - e^{-T/q}z^{-1}}, \quad k = a/T = 2$$

Вычисляем коэффициенты:

$$\begin{aligned} e^{-T/q} &= e^{-1/6.5} \approx 0.857 \\ 1 - e^{-T/q} &= 0.143 \end{aligned}$$

Тогда:

$$T(z) = \frac{0.143z^{-3}}{1 - 0.857z^{-1}}$$

Синтез регулятора

Используем ту же дискретную передаточную функцию объекта $HG(z)$:

$$HG(z) = \frac{0.143z^{-2}}{1 - 0.857z^{-1}}$$

Формула для расчёта передаточной функции регулятора:

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \cdot \frac{T(z)}{1 - T(z)}$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned} \frac{T(z)}{1 - T(z)} &= \frac{0.143z^{-3}}{1 - 0.857z^{-1} - 0.143z^{-3}} \\ D(z) &= \frac{1 - 0.857z^{-1}}{0.143z^{-2}} \cdot \frac{0.143z^{-3}}{1 - 0.857z^{-1} - 0.143z^{-3}} \\ &= \frac{z^{-1} - 0.857z^{-2}}{1 - 0.857z^{-1} - 0.143z^{-3}} \end{aligned}$$

Приводим к положительным степеням z :

$$D(z) = \frac{z^2 - 0.857z}{z^3 - 0.857z^2 - 0.143}$$

Итоговый результат

$$D_{\text{Далин}}(z) = \frac{z^2 - 0.857z}{z^3 - 0.857z^2 - 0.143}$$

Моделирование и результаты

Моделирование выхода регулятора и системы приведено на рисунках 3 и 4.

Регулятор Далина обеспечивает более плавный переходный процесс с экспоненциальным характером. Управляющие воздействия имеют приемлемую величину по сравнению с апериодическим регулятором.

Синтез регулятора с заданным расположением полюсов

Исходные данные

- Дискретная передаточная функция объекта с ЭНП:

$$HG(z) = \frac{0.03(z + 0.75)}{z^2 - 1.5z + 0.5}$$

- Требования к переходным процессам: $\zeta = 0.45$, $\omega_d = 4$ рад/с
- Точность: $K_v = 0.25$
- Период дискретизации: $T = 0.1$ с

Расчёт желаемых полюсов

Собственная частота колебаний:

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{4}{\sqrt{1 - 0.2025}} \approx 4.48 \text{ рад/с}$$

Коэффициент затухания:

$$\sigma = \zeta \omega_n = 0.45 \cdot 4.48 \approx 2.016$$

Полюса в z -плоскости:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= e^{-\sigma T} e^{\pm j\omega_d T} \\ &= e^{-0.2016} e^{\pm j0.4} \\ &= 0.8175 \cdot (\cos(0.4) \pm j \sin(0.4)) \\ &= 0.8175 \cdot (0.9211 \pm j0.3894) \\ &\approx 0.753 \pm j0.318 \end{aligned}$$

Знаменатель желаемой передаточной функции:

$$D_{\text{ж}}(z) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - 1.506z + 0.668$$

Определение коэффициентов передаточной функции

Задаём форму желаемой передаточной функции:

$$T(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 - 1.506z + 0.668}$$

Условие 1: Нулевая установившаяся ошибка для ступенчатого воздействия:

$$T(1) = 1 \Rightarrow \frac{b_1 + b_2}{1 - 1.506 + 0.668} = 1 \Rightarrow b_1 + b_2 = 0.162$$

Условие 2: Установившаяся ошибка для линейного воздействия:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{0.25} = 4$$

Используя теорему о конечном значении для линейного воздействия:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{z - 1} [1 - T(z)] = 4$$

где $T = 0.1$ с.

Вычисляем производную $T(z)$ в точке $z = 1$:

$$T'(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - T(z)}{z - 1}$$

Производная $T(z)$:

$$T'(z) = \frac{b_1 D(z) - (b_1 z + b_2) D'(z)}{D^2(z)}, \quad D(z) = z^2 - 1.506z + 0.668$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned} D(1) &= 0.162 \\ D'(1) &= 2 \cdot 1 - 1.506 = 0.494 \\ T'(1) &= \frac{b_1 \cdot 0.162 - 0.162 \cdot 0.494}{0.162^2} = \frac{0.162b_1 - 0.080028}{0.026244} = -40 \end{aligned}$$

Решая уравнение:

$$0.162b_1 - 0.080028 = -1.04976 \Rightarrow b_1 \approx -5.987$$

Тогда:

$$b_2 = 0.162 - (-5.987) = 6.149$$

Итоговая желаемая передаточная функция:

$$T(z) = \frac{-5.987z + 6.149}{z^2 - 1.506z + 0.668}$$

Синтез регулятора

Формула для расчёта передаточной функции регулятора:

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \cdot \frac{T(z)}{1 - T(z)}$$

Вычисляем:

$$1 - T(z) = \frac{z^2 + 4.481z - 5.481}{z^2 - 1.506z + 0.668}$$

$$\frac{T(z)}{1 - T(z)} = \frac{-5.987z + 6.149}{z^2 + 4.481z - 5.481}$$

Подставляем $HG(z)$:

$$D(z) = \frac{z^2 - 1.5z + 0.5}{0.03(z + 0.75)} \cdot \frac{-5.987z + 6.149}{z^2 + 4.481z - 5.481}$$

Раскрываем скобки:

$$D(z) = \frac{(z^2 - 1.5z + 0.5)(-5.987z + 6.149)}{0.03(z + 0.75)(z^2 + 4.481z - 5.481)}$$

Числитель:

$$-5.987z^3 + 15.072z^2 - 12.424z + 3.0745$$

Знаменатель:

$$0.03z^3 + 0.1569z^2 - 0.1088z - 0.1233$$

Итоговый результат

$$D_{\text{пол}}(z) \approx \frac{-199.57z^3 + 502.4z^2 - 414.13z + 102.48}{z^3 + 5.23z^2 - 3.627z - 4.11}$$

Моделирование

Моделирование выхода регулятора и системы при ступенчатом воздействии приведено на рисунках 5 и 6, а при линейно-нарастающем - на рисунках 7 и 8.

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были синтезированы три типа дискретных регуляторов для заданного объекта управления:

1. **Апериодический регулятор** обеспечивает минимальное время переходного процесса (2 периода дискретизации), но требует больших управляющих воздействий и чувствителен к точности модели объекта.
2. **Регулятор Далина** обеспечивает более плавный переходный процесс с экспоненциальным характером, управляющие воздействия имеют приемлемую величину.
3. **Регулятор с заданными полюсами** позволяет точно задать динамические характеристики системы и дать требуемую точность слежения за линейно-нарастающим сигналом.

Все синтезированные регуляторы обеспечивают нулевую установившуюся ошибку для ступенчатого входного воздействия.

Графики

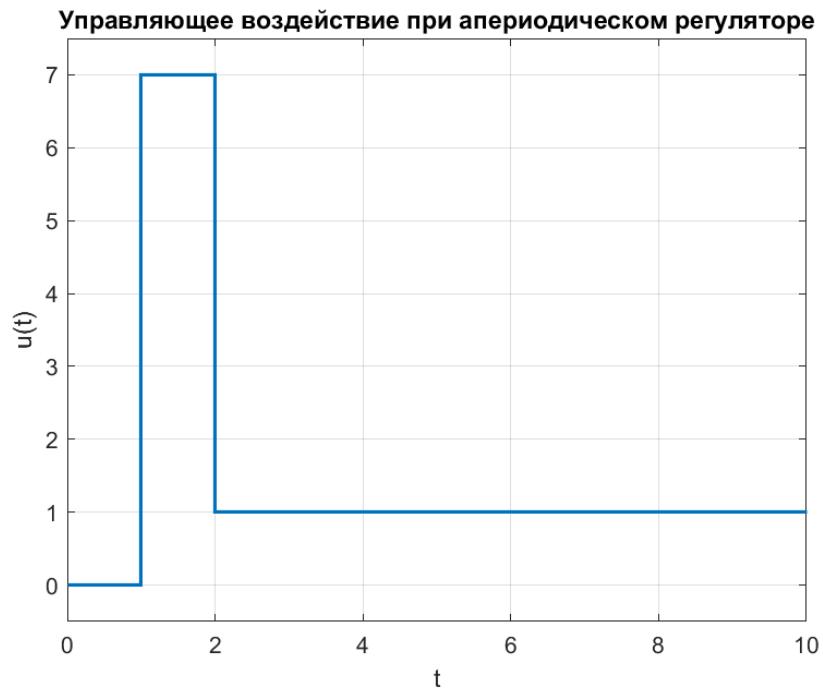


Рисунок 1. Управление апериодического регулятора

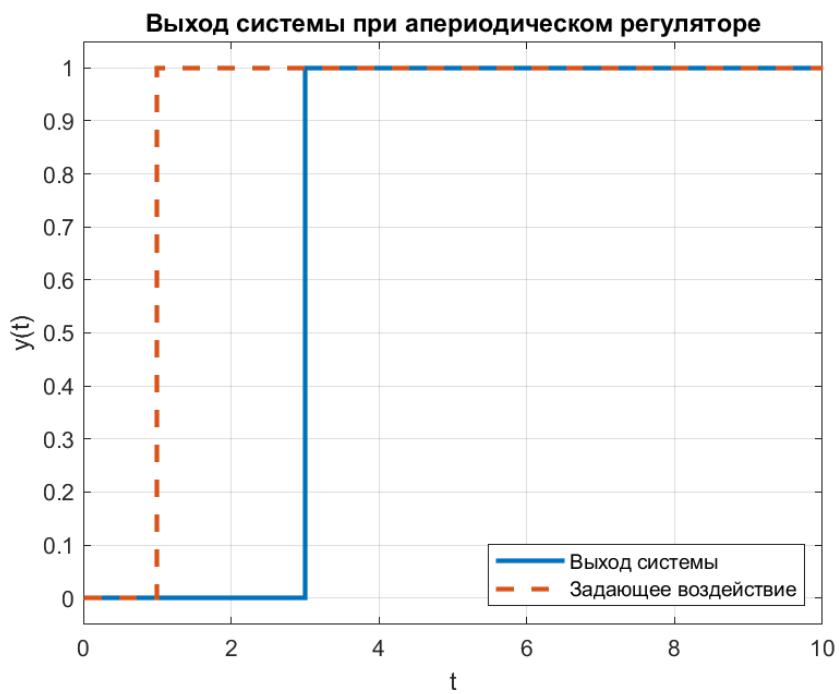


Рисунок 2. Переходный процесс при ступенчатом воздействии (апериодический регулятор)

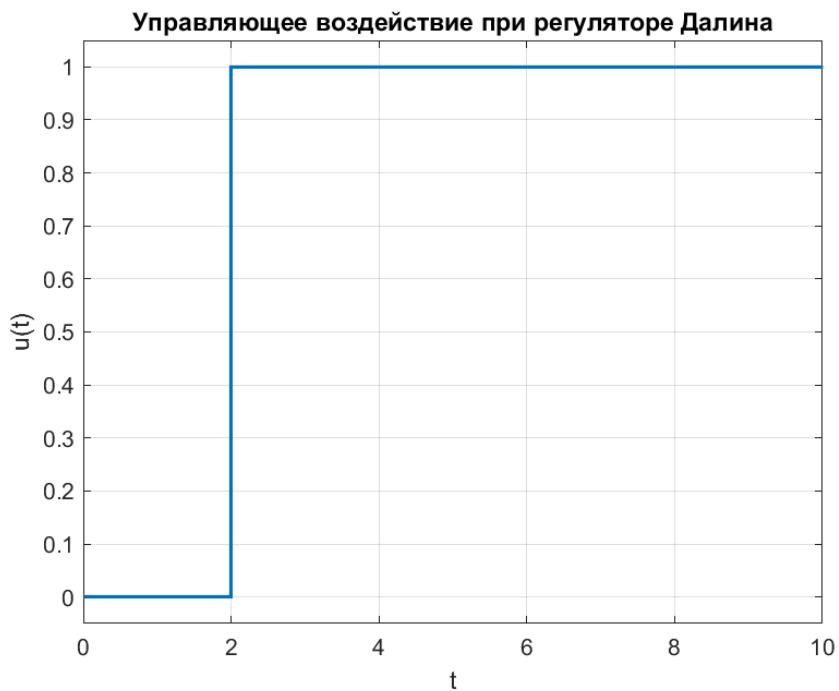


Рисунок 3. Управление регулятора Далина



Рисунок 4. Переходный процесс при ступенчатом воздействии (регулятор Далина)

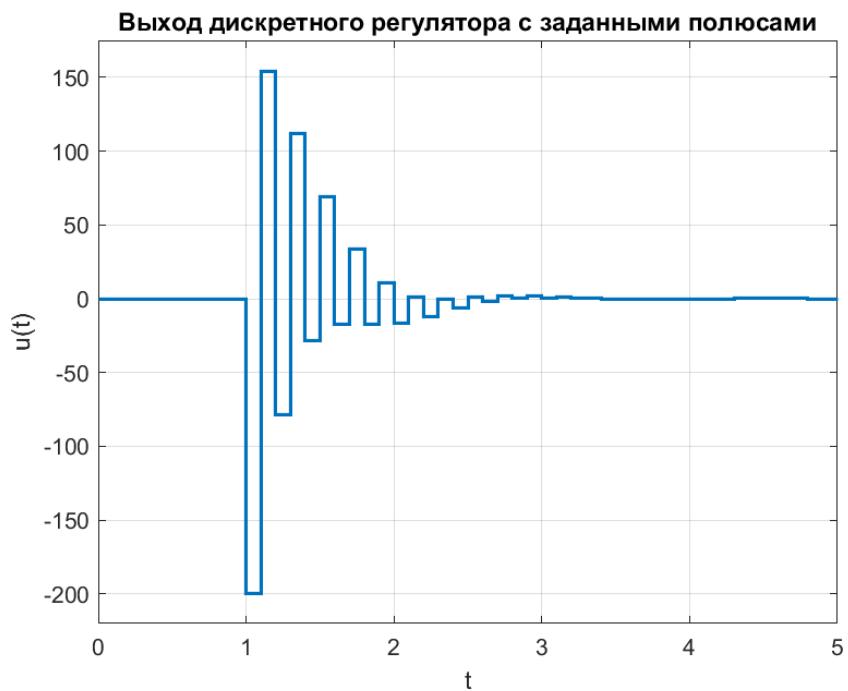


Рисунок 5. Управление регулятора с заданным расположением полюсов

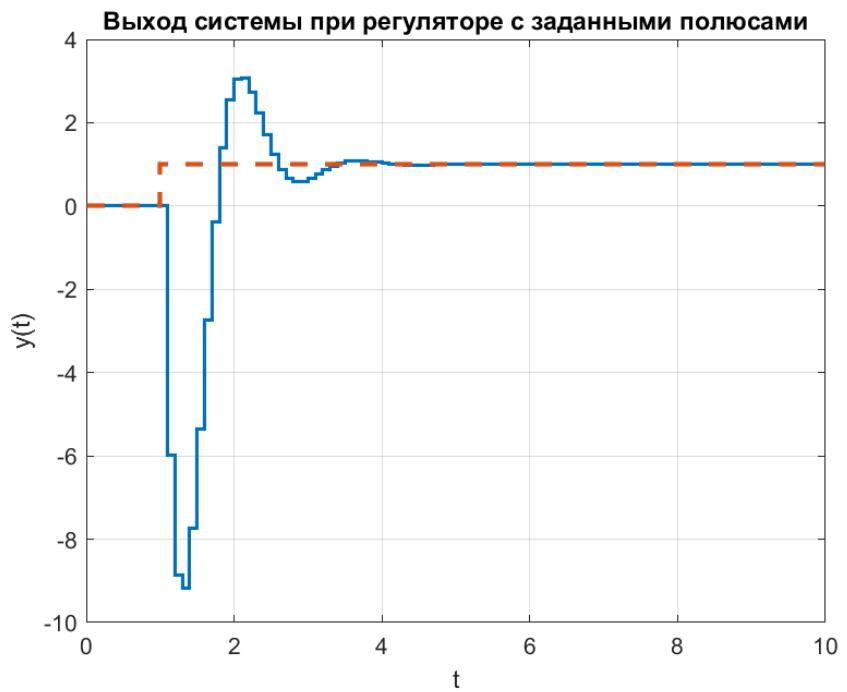


Рисунок 6. Переходный процесс при ступенчатом воздействии (регулятор с заданным расположением полюсов)

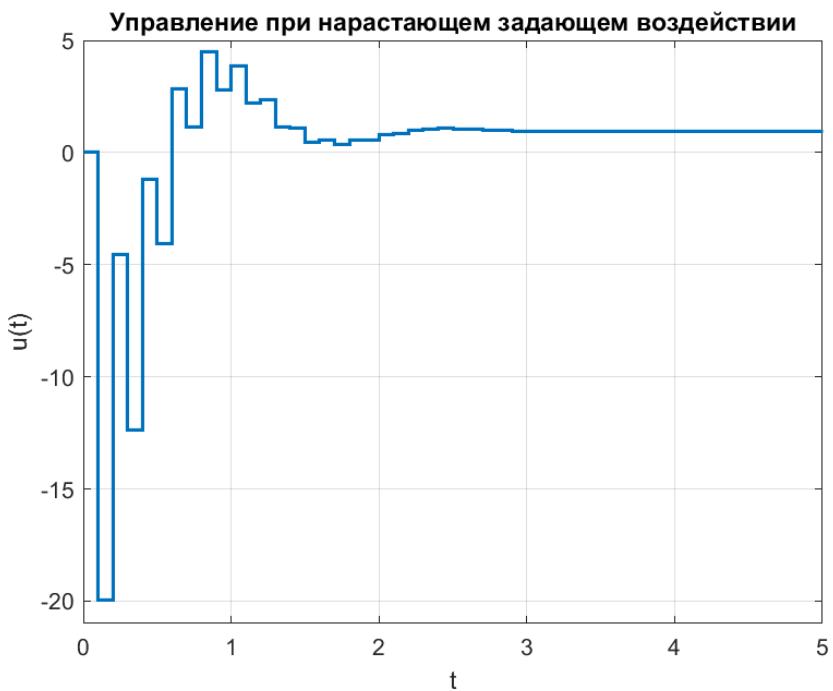


Рисунок 7. Управление регулятора с заданным расположением полюсов и линейно-нарастающим воздействии

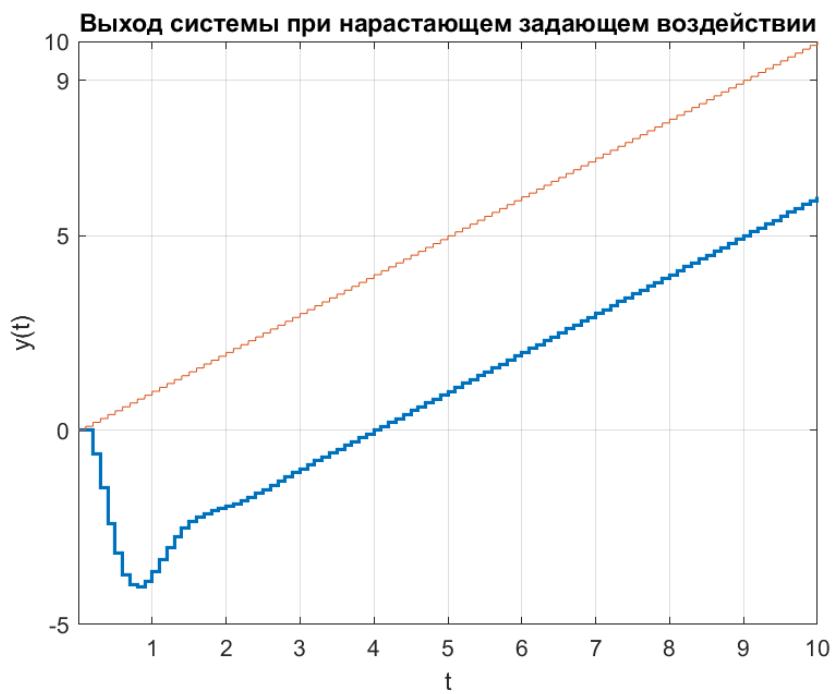


Рисунок 8. Переходный процесс при линейно-нарастающем воздействии (регулятор с заданным расположением полюсов)